Normas octahedrales y propiedades de diámetro dos

Abraham Rueda Zoca

Universidad de Granada
Departamento de análisis matemático

XII Encuentros de la Red de Análisis Funcional y sus Aplicaciones

Preliminares

Preliminares

Dado X un espacio de Banach y $C \subseteq X$ un subconjunto acotado, entenderemos por un *slice de C* un conjunto de la forma

$$S(C, x^*, \alpha) := \{x \in C \ / \ x^*(x) > \sup x^*(C) - \alpha\} \ \ x^* \in X^* \setminus \{0\}, \alpha > 0.$$

Preliminares

Dado X un espacio de Banach y $C \subseteq X$ un subconjunto acotado, entenderemos por un *slice de C* un conjunto de la forma

$$S(C, x^*, \alpha) := \{x \in C \;/\; x^*(x) > \sup x^*(C) - \alpha\} \;\; x^* \in X^* \setminus \{0\}, \alpha > 0.$$

Si $X = Y^*$ es un espacio dual, el conjunto anterior se dirá *débil***-slice* si $x \in Y \subseteq Y^{**} = X^*$.

Preliminares

Dado X un espacio de Banach y $C \subseteq X$ un subconjunto acotado, entenderemos por un *slice de C* un conjunto de la forma

$$S(C, x^*, \alpha) := \{x \in C \ / \ x^*(x) > \sup x^*(C) - \alpha\} \ \ x^* \in X^* \setminus \{0\}, \alpha > 0.$$

Si $X = Y^*$ es un espacio dual, el conjunto anterior se dirá *débil*-slice* si $x \in Y \subseteq Y^{**} = X^*$.

Si C es convexo, entenderemos por una *combinación convexa de slices de C* un conjunto de la forma

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i S_i,$$

donde $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in [0, 1], \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ y $S_1, \ldots, S_n$ son slices de C.

Preliminares

Dado X un espacio de Banach y $C \subseteq X$ un subconjunto acotado, entenderemos por un *slice de C* un conjunto de la forma

$$S(C, x^*, \alpha) := \{x \in C \ / \ x^*(x) > \sup x^*(C) - \alpha\} \ \ x^* \in X^* \setminus \{0\}, \alpha > 0.$$

Si $X = Y^*$ es un espacio dual, el conjunto anterior se dirá *débil*-slice* si $x \in Y \subseteq Y^{**} = X^*$.
Si C es convexo, entenderemos por una *combinación convexa de slices de C* un conjunto de la forma

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i S_i,$$

donde $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in [0, 1], \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ y $S_1, \ldots, S_n$ son slices de C.
De manera análoga, en espacios de Banach duales tenemos la noción de *combinaciones convexas de débil*-slices*.

Propiedades de diámetro dos

Propiedades de diámetro dos

Propiedades de diámetro dos

Propiedades de diámetro dos

Sea X un espacio de Banach.

Propiedades de diámetro dos

Propiedades de diámetro dos

Sea X un espacio de Banach.

- Se dice que X tiene la *propiedad de diámetro dos para slices (slice-D2P)* si todo slice de B_X tiene diámetro dos.

Propiedades de diámetro dos

Propiedades de diámetro dos

Sea X un espacio de Banach.

- Se dice que X tiene la *propiedad de diámetro dos para slices (slice-D2P)* si todo slice de B_X tiene diámetro dos.
- Se dice que X tiene la *propiedad de diámetro dos (D2P)* si todo abierto débil no vacío de B_X tiene diámetro dos.

Propiedades de diámetro dos

Propiedades de diámetro dos

Sea X un espacio de Banach.

- Se dice que X tiene la *propiedad de diámetro dos para slices (slice-D2P)* si todo slice de B_X tiene diámetro dos.
- Se dice que X tiene la *propiedad de diámetro dos (D2P)* si todo abierto débil no vacío de B_X tiene diámetro dos.
- Se dice que X tiene la *propiedad fuerte de diámetro dos (strong-D2P)* si toda combinación convexa de slices de B_X tiene diámetro dos.

Propiedades de diámetro dos

Propiedades de diámetro dos

Sea X un espacio de Banach.

- Se dice que X tiene la *propiedad de diámetro dos para slices (slice-D2P)* si todo slice de B_X tiene diámetro dos.
- Se dice que X tiene la *propiedad de diámetro dos (D2P)* si todo abierto débil no vacío de B_X tiene diámetro dos.
- Se dice que X tiene la *propiedad fuerte de diámetro dos (strong-D2P)* si toda combinación convexa de slices de B_X tiene diámetro dos.

En espacios de Banach duales, se definen de forma análoga la *propiedad de diámetro dos para débil* -slices (w^*-D2P), la propiedad débil* de diámetro dos (w^*-D2P) y la propiedad fuerte débil* de diámetro dos (w^*-strong-D2P)*.

Ejemplos

Ejemplos

- Espacios de Banach con la propiedad de Daugavet (R. Shvidkoy, 2000).

Ejemplos

- Espacios de Banach con la propiedad de Daugavet (R. Shvidkoy, 2000). $L^1([0,1])$.

Ejemplos

- Espacios de Banach con la propiedad de Daugavet (R. Shvidkoy, 2000). $L^1([0,1])$.
- Álgebras uniformes infinito-dimensionales (O. Nygaard y D. Werner (2001)).

Ejemplos

- Espacios de Banach con la propiedad de Daugavet (R. Shvidkoy, 2000). $L^1([0,1])$.
- Álgebras uniformes infinito-dimensionales (O. Nygaard y D. Werner (2001)). $\mathcal{C}(K)$.

Ejemplos

- Espacios de Banach con la propiedad de Daugavet (R. Shvidkoy, 2000). $L^1([0,1])$.
- Álgebras uniformes infinito-dimensionales (O. Nygaard y D. Werner (2001)). $\mathcal{C}(K)$.
- El espacio de Hagler *JH* tiene la strong-D2P (J. Becerra, G. López y A.R. (2015)).

Ejemplos

- Espacios de Banach con la propiedad de Daugavet (R. Shvidkoy, 2000). $L^1([0,1])$.
- Álgebras uniformes infinito-dimensionales (O. Nygaard y D. Werner (2001)). $\mathcal{C}(K)$.
- El espacio de Hagler *JH* tiene la strong-D2P (J. Becerra, G. López y A.R. (2015)).
- Si X e Y tienen la D2P, entonces la tiene $X \oplus_p Y$ para $1 < p < \infty$ (T. Abrahamsen, V. Lima y O. Nygaard (2013)).

Normas octahedrales

Teorema (John y Zizler (1978))

Teorema (John y Zizler (1978))

Sea X un espacio de Banach.

Normas octahedrales

Teorema (John y Zizler (1978))

Sea X un espacio de Banach.
X^* tiene la w^*-slice D2P si, y sólamente si X tiene norma extremadamente ruda, es decir, $\limsup_{\|h\|\to 0} \frac{\|x+h\|+\|x-h\|-2\|x\|}{h} = 2$ *para cada $x \in S_X$.*

Normas octahedrales

Teorema (John y Zizler (1978))

Sea X un espacio de Banach.
X^* tiene la w^*-slice D2P si, y sólamente si X tiene norma extremadamente ruda, es decir, $\limsup_{\|h\|\to 0} \frac{\|x+h\|+\|x-h\|-2\|x\|}{h} = 2$ *para cada $x \in S_X$.*

¿Existen caracterizaciones de la w^*-D2P y de la w^*-strong D2P?

Teorema (John y Zizler (1978))

Sea X un espacio de Banach.
X^* tiene la w^*-slice D2P si, y sólamente si X tiene norma extremadamente ruda, es decir, $\limsup_{\|h\|\to 0} \frac{\|x+h\|+\|x-h\|-2\|x\|}{h} = 2$ para cada $x \in S_X$.

¿Existen caracterizaciones de la w^*-D2P y de la w^*-strong D2P?

Norma octahedral

Normas octahedrales

Teorema (John y Zizler (1978))

Sea X un espacio de Banach.
X^* tiene la w^*-slice D2P si, y sólamente si X tiene norma extremadamente ruda, es decir, $\limsup\limits_{\|h\|\to 0} \frac{\|x+h\|+\|x-h\|-2\|x\|}{h} = 2$ *para cada $x \in S_X$.*

¿Existen caracterizaciones de la w^*-D2P y de la w^*-strong D2P?

Norma octahedral

Sea X un espacio de Banach.

Normas octahedrales

Teorema (John y Zizler (1978))

Sea X un espacio de Banach.
X^* tiene la w^*-slice D2P si, y sólamente si X tiene norma extremadamente ruda, es decir, $\limsup\limits_{\|h\|\to 0} \frac{\|x+h\|+\|x-h\|-2\|x\|}{h} = 2$ *para cada $x \in S_X$.*

¿Existen caracterizaciones de la w^*-D2P y de la w^*-strong D2P?

Norma octahedral

Sea X un espacio de Banach.
Se dice que la norma de X es *octahedral* si dado $\varepsilon > 0$ y un subespacio finito-dimensional Y existe $x \in S_X$ de manera que

$$\|y + \lambda x\| \geq (1-\varepsilon)(\|y\| + |\lambda|) \; \forall y \in Y, \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Normas octahedrales

Teorema (John y Zizler (1978))

Sea X un espacio de Banach.
X^* tiene la w^*-slice D2P si, y sólamente si X tiene norma extremadamente ruda, es decir, $\limsup_{\|h\|\to 0} \frac{\|x+h\|+\|x-h\|-2\|x\|}{h} = 2$ *para cada $x \in S_X$.*

¿Existen caracterizaciones de la w^*-D2P y de la w^*-strong D2P?

Norma octahedral

Sea X un espacio de Banach.
Se dice que la norma de X es *octahedral* si dado $\varepsilon > 0$ y un subespacio finito-dimensional Y existe $x \in S_X$ de manera que

$$\|y + \lambda x\| \geq (1 - \varepsilon)(\|y\| + |\lambda|) \; \forall y \in Y, \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

ℓ_1 tiene norma octahedral.

Caracterización de normas octahedrales

Caracterización de normas octahedrales

Teorema (G. Godefroy (1989))

Caracterización de normas octahedrales

Teorema (G. Godefroy (1989))

Un espacio de Banach X puede renormarse equivalentemente con norma octahedral si, y sólamente si, $\ell_1 \subseteq X$.

Caracterización de normas octahedrales

Teorema (G. Godefroy (1989))

Un espacio de Banach X puede renormarse equivalentemente con norma octahedral si, y sólamente si, $\ell_1 \subseteq X$.

Teorema (R. Deville (1988))

Caracterización de normas octahedrales

Teorema (G. Godefroy (1989))

Un espacio de Banach X puede renormarse equivalentemente con norma octahedral si, y sólamente si, $\ell_1 \subseteq X$.

Teorema (R. Deville (1988))

Si un espacio de Banach X tiene norma octahedral, entonces X^* tiene la strong-D2P.

Caracterización de normas octahedrales

Teorema (G. Godefroy (1989))

Un espacio de Banach X puede renormarse equivalentemente con norma octahedral si, y sólamente si, $\ell_1 \subseteq X$.

Teorema (R. Deville (1988))

Si un espacio de Banach X tiene norma octahedral, entonces X^* tiene la strong-D2P.

Problema (R. Deville, 1988)

Caracterización de normas octahedrales

Teorema (G. Godefroy (1989))

Un espacio de Banach X puede renormarse equivalentemente con norma octahedral si, y sólamente si, $\ell_1 \subseteq X$.

Teorema (R. Deville (1988))

Si un espacio de Banach X tiene norma octahedral, entonces X^* tiene la strong-D2P.

Problema (R. Deville, 1988)

Si X^* tiene la w^*-strong D2P, ¿tiene X norma octahedral?.

Caracterización de normas octahedrales

Caracterización de normas octahedrales

Teorema (J. Becerra, G. López y A. Rueda (2014))

Dado X un espacio de Banach, son equivalentes:

1. *X tiene norma octahedral.*
2. *X^* tiene la w^*-strong D2P.*

Caracterización de normas octahedrales

Teorema (J. Becerra, G. López y A. Rueda (2014))

Dado X un espacio de Banach, son equivalentes:

1. *X tiene norma octahedral.*
2. *X^* tiene la w^*-strong D2P.*

La octahedralidad se traduce en que dado $\{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq S_X$ y $\varepsilon > 0$ existe $x \in S_X$ y $f_1, g_1, \ldots, f_n, g_n \in S_{X^*}$ de manera que

$$\begin{array}{ll} f_i(x_i) > 1 - \varepsilon, & f_i(x) > 1 - \varepsilon, \\ g_i(x_i) > 1 - \varepsilon, & g_i(x) < -1 + \varepsilon. \end{array}$$

Caracterización de normas octahedrales

$$\begin{array}{ll} f_i(x_i) > 1-\varepsilon, & f_i(x) > 1-\varepsilon, \\ g_i(x_i) > 1-\varepsilon, & g_i(x) < -1+\varepsilon. \end{array}$$

Caracterización de normas octahedrales

$$\begin{array}{ll} f_i(x_i) > 1-\varepsilon, & f_i(x) > 1-\varepsilon, \\ g_i(x_i) > 1-\varepsilon, & g_i(x) < -1+\varepsilon. \end{array}$$

(1)$\Rightarrow$(2). Dada $C := \sum_{i=1}^n \lambda_i S(B_{X^*}, x_i, \varepsilon)$ podemos encontrar $\sum_{i=1}^n \lambda_i f_i, \sum_{i=1}^n \lambda_i g_i \in C$ de manera que

$$\left\| \sum_{i=1}^n \lambda_i (f_i - g_i) \right\| \geq \sum_{i=1}^n \lambda_i (f_i - g_i)(x) > 2 - 2\varepsilon.$$

Caracterización de normas octahedrales

$$f_i(x_i) > 1-\varepsilon, \quad f_i(x) > 1-\varepsilon,$$
$$g_i(x_i) > 1-\varepsilon, \quad g_i(x) < -1+\varepsilon.$$

(2)⇒(1). Dado $\{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq S_X$ y $\varepsilon > 0$ podemos encontrar $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f_i, \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n g_i \in \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n S(B_{X^*}, x_i, \varepsilon)$ y $x \in S_X$ tal que $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (f_i - g_i)(x) > 2 - \frac{\varepsilon}{n}$.

Caracterización de normas octahedrales

$$\begin{array}{ll} f_i(x_i) > 1 - \varepsilon, & f_i(x) > 1 - \varepsilon, \\ g_i(x_i) > 1 - \varepsilon, & g_i(x) < -1 + \varepsilon. \end{array}$$

Corolario

Un espacio de Banach X tiene la strong-D2P si, y sólamente si, X^* tiene norma octahedral.

Estabilidad de la octahedralidad en espacios de operadores

Teorema (J. Becerra, G. López, A.R. (2015))

Estabilidad de la octahedralidad en espacios de operadores

Teorema (J. Becerra, G. López, A.R. (2015))

Sean X, Y dos espacios de Banach y $H \subseteq L(X, Y)$ un subespacio tal que $X^* \otimes Y \subseteq H$.

Estabilidad de la octahedralidad en espacios de operadores

Teorema (J. Becerra, G. López, A.R. (2015))

Sean X, Y dos espacios de Banach y $H \subseteq L(X, Y)$ un subespacio tal que $X^* \otimes Y \subseteq H$.
Si X^* e Y tienen norma octahedral, entonces H tiene norma octahedral.

Estabilidad de la octahedralidad en espacios de operadores

Teorema (J. Becerra, G. López, A.R. (2015))

Sean X, Y dos espacios de Banach y $H \subseteq L(X, Y)$ un subespacio tal que $X^* \otimes Y \subseteq H$.
Si X^* e Y tienen norma octahedral, entonces H tiene norma octahedral.

$$x \otimes y^* \in S(B_{H^*}, T, \alpha)$$

Estabilidad de la octahedralidad en espacios de operadores

Teorema (J. Becerra, G. López, A.R. (2015))

Sean X, Y dos espacios de Banach y $H \subseteq L(X, Y)$ un subespacio tal que $X^* \otimes Y \subseteq H$.
Si X^* e Y tienen norma octahedral, entonces H tiene norma octahedral.

$$x \otimes y^* \in S(B_{H^*}, T, \alpha) \Leftrightarrow y^*(T(x)) > 1 - \alpha$$

Estabilidad de la octahedralidad en espacios de operadores

Teorema (J. Becerra, G. López, A.R. (2015))

Sean X, Y dos espacios de Banach y $H \subseteq L(X, Y)$ un subespacio tal que $X^* \otimes Y \subseteq H$.
Si X^* e Y tienen norma octahedral, entonces H tiene norma octahedral.

$$x \otimes y^* \in S(B_{H^*}, T, \alpha) \Leftrightarrow y^*(T(x)) > 1 - \alpha \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y^* \in S(B_{Y^*}, T(x), \alpha) \\ \end{array} \right.$$

Estabilidad de la octahedralidad en espacios de operadores

Teorema (J. Becerra, G. López, A.R. (2015))

Sean X, Y dos espacios de Banach y $H \subseteq L(X, Y)$ un subespacio tal que $X^* \otimes Y \subseteq H$.
Si X^* e Y tienen norma octahedral, entonces H tiene norma octahedral.

$$x \otimes y^* \in S(B_{H^*}, T, \alpha) \Leftrightarrow y^*(T(x)) > 1 - \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} y^* \in S(B_{Y^*}, T(x), \alpha) \\ x \in S(B_X, y^* \circ T, \alpha). \end{cases}$$

Estabilidad de la octahedralidad en espacios de operadores

Teorema (J. Becerra, G. López, A.R. (2015))

Sean X, Y dos espacios de Banach y $H \subseteq L(X, Y)$ un subespacio tal que $X^* \otimes Y \subseteq H$.
Si X^* e Y tienen norma octahedral, entonces H tiene norma octahedral.

$$x \otimes y^* \in S(B_{H^*}, T, \alpha) \Leftrightarrow y^*(T(x)) > 1 - \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} y^* \in S(B_{Y^*}, T(x), \alpha) \\ x \in S(B_X, y^* \circ T, \alpha). \end{cases}$$

Teorema (J. Langemets, V. Lima, A.R. preprint)

Sean X e Y dos espacios de Banach y sea $H \subseteq L(X^*, Y)$ un subespacio tal que $X \otimes Y \subseteq H$.

Estabilidad de la octahedralidad en espacios de operadores

Teorema (J. Becerra, G. López, A.R. (2015))

Sean X, Y dos espacios de Banach y $H \subseteq L(X, Y)$ un subespacio tal que $X^* \otimes Y \subseteq H$.
Si X^* e Y tienen norma octahedral, entonces H tiene norma octahedral.

$$x \otimes y^* \in S(B_{H^*}, T, \alpha) \Leftrightarrow y^*(T(x)) > 1 - \alpha \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y^* \in S(B_{Y^*}, T(x), \alpha) \\ x \in S(B_X, y^* \circ T, \alpha). \end{array} \right.$$

Teorema (J. Langemets, V. Lima, A.R. preprint)

Sean X e Y dos espacios de Banach y sea $H \subseteq L(X^*, Y)$ un subespacio tal que $X \otimes Y \subseteq H$. Supongamos que todo elemento de H es $w^* - w$ continuo.

Estabilidad de la octahedralidad en espacios de operadores

Teorema (J. Becerra, G. López, A.R. (2015))

Sean X, Y dos espacios de Banach y $H \subseteq L(X, Y)$ un subespacio tal que $X^* \otimes Y \subseteq H$.
Si X^* e Y tienen norma octahedral, entonces H tiene norma octahedral.

$$x \otimes y^* \in S(B_{H^*}, T, \alpha) \Leftrightarrow y^*(T(x)) > 1 - \alpha \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y^* \in S(B_{Y^*}, T(x), \alpha) \\ x \in S(B_X, y^* \circ T, \alpha). \end{array} \right.$$

Teorema (J. Langemets, V. Lima, A.R. preprint)

Sean X e Y dos espacios de Banach y sea $H \subseteq L(X^*, Y)$ un subespacio tal que $X \otimes Y \subseteq H$. Supongamos que todo elemento de H es $w^* - w$ continuo.
Si X e Y tienen norma octahedral, entonces H tiene norma octahedral.

Consecuencias

Consecuencias

Corolario (J. Becerra, G. López, A.R. (2015))

Consecuencias

Corolario (J. Becerra, G. López, A.R. (2015))

Si X e Y tienen la strong-D2P, entonces la tiene $X\widehat{\otimes}_\pi Y$.

Consecuencias

Corolario (J. Becerra, G. López, A.R. (2015))

Si X e Y tienen la strong-D2P, entonces la tiene $X\widehat{\otimes}_\pi Y$.

Corolario (J. Langemets, V. Lima, A.R. preprint)

Consecuencias

Corolario (J. Becerra, G. López, A.R. (2015))

Si X e Y tienen la strong-D2P, entonces la tiene $X\widehat{\otimes}_\pi Y$.

Corolario (J. Langemets, V. Lima, A.R. preprint)

Si X e Y tiene norma octahedral, entonces $X\widehat{\otimes}_\varepsilon Y$ tiene norma octahedral.

Referencias

J. Becerra Guerrero, G. López-Pérez y Abraham Rueda Zoca, *Octahedral norms and convex combination of slices in Banach spaces,* J. Func. Anal. **266** (4) (2014), 2424–2436.

Referencias

J. Becerra Guerrero, G. López-Pérez y Abraham Rueda Zoca, *Octahedral norms and convex combination of slices in Banach spaces,* J. Func. Anal. **266** (4) (2014), 2424–2436.

J. Becerra Guerrero, G.López Pérez y A. Rueda Zoca, *Octahedral norms in spaces of operators*, Jou. Math. Anal. App. **427** (2015), 171-184.

Referencias

- J. Becerra Guerrero, G. López-Pérez y Abraham Rueda Zoca, *Octahedral norms and convex combination of slices in Banach spaces,* J. Func. Anal. **266** (4) (2014), 2424–2436.
- J. Becerra Guerrero, G.López Pérez y A. Rueda Zoca, *Octahedral norms in spaces of operators*, Jou. Math. Anal. App. **427** (2015), 171-184.
- J. Langemets, V. Lima y A. Rueda Zoca, *Almost square and octahedral norms in tensor products of Banach spaces*, preprint.

Gracias por vuestra atención.