Midiendo conjuntos no medibles y espacios de Banach universales

Abel Álvarez, Miguel Ángel Andrés, Javier Canto, Pablo Gerlach, Daniel Morales, Alberto Rodríguez

Universidad de Extremadura
VI Escuela Taller de Análisis Funcional
Tutor: Antonio Avilés

XII Encuentro de la Red de Análisis Funcional y Aplicaciones

2 de marzo de 2016

Indice

Objetivos

Objetivos

Preguntémonos lo siguiente:

Objetivos

Preguntémonos lo siguiente:

1. ¿Existe una medida que extienda la medida de Lebesgue en $\mathcal{P}(\mathbb{R})$?

Objetivos

Preguntémonos lo siguiente:

1. ¿Existe una medida que extienda la medida de Lebesgue en $\mathcal{P}(\mathbb{R})$?
2. ¿Están todos los subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ en la $\sigma-$álgebra generada por los conjuntos de la forma $A \times B$, donde A y B son subconjuntos arbitrarios de $\mathbb{R}$?

Objetivos

Preguntémonos lo siguiente:

1. ¿Existe una medida que extienda la medida de Lebesgue en $\mathcal{P}(\mathbb{R})$?
2. ¿Están todos los subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ en la $\sigma-$álgebra generada por los conjuntos de la forma $A \times B$, donde A y B son subconjuntos arbitrarios de $\mathbb{R}$?
3. ¿Todos los espacios de Banach de la cardinalidad del continuo son isométricos (o al menos isomorfos) a subespacios del espacio cociente l_∞/c_0?

Axiomática ZFC

1. **Axioma de extensibilidad**: Dos conjuntos X e Y son iguales (lo cual se denotará como $X = Y$) únicamente si tienen los mismos elementos.

Axiomática ZFC

1. **Axioma de extensibilidad**: Dos conjuntos X e Y son iguales (lo cual se denotará como $X = Y$) únicamente si tienen los mismos elementos.
2. **Axioma de pares**: Dados cualesquiera conjuntos x e y existe otro conjunto, representado por $\{x, y\}$, cuyos elementos son únicamente x e y.

Axiomática ZFC

1. **Axioma de extensibilidad**: Dos conjuntos X e Y son iguales (lo cual se denotará como $X = Y$) únicamente si tienen los mismos elementos.
2. **Axioma de pares**: Dados cualesquiera conjuntos x e y existe otro conjunto, representado por $\{x, y\}$, cuyos elementos son únicamente x e y.
3. **Axioma de la unión**: Dada cualquier colección $\{C_i\}_{i\in I}$ de conjuntos, existe un conjunto, representado por $\bigcup_{i\in I} C_i$ y llamado unión de $\{C_i\}_{i\in I}$, que contiene todos los elementos de cada conjunto C_i para todo $i \in I$.

Axiomática ZFC

1. **Axioma de extensibilidad**: Dos conjuntos X e Y son iguales (lo cual se denotará como $X = Y$) únicamente si tienen los mismos elementos.
2. **Axioma de pares**: Dados cualesquiera conjuntos x e y existe otro conjunto, representado por $\{x, y\}$, cuyos elementos son únicamente x e y.
3. **Axioma de la unión**: Dada cualquier colección $\{C_i\}_{i\in I}$ de conjuntos, existe un conjunto, representado por $\bigcup_{i\in I} C_i$ y llamado unión de $\{C_i\}_{i\in I}$, que contiene todos los elementos de cada conjunto C_i para todo $i \in I$.
4. **Axioma del conjunto potencia**: Para cualquier conjunto X existe otro, que denotaremos $\mathcal{P}(X)$, que contiene todos los subconjuntos de X.

Axiomática ZFC

5. **Esquema axiomático de especificación**: Si tenemos un conjunto X y una propiedad P existe el conjunto formado los elementos $x \in X$ que verifican P.

Axiomática ZFC

5. **Esquema axiomático de especificación**: Si tenemos un conjunto X y una propiedad P existe el conjunto formado los elementos $x \in X$ que verifican P.
6. **Esquema axiomático de reemplazo**: Si tenemos un conjunto X y una función f definida sobre X, existe el conjunto $\{f(t) \ : \ t \in X\}$.

Axiomática ZFC

5. **Esquema axiomático de especificación**: Si tenemos un conjunto X y una propiedad P existe el conjunto formado los elementos $x \in X$ que verifican P.
6. **Esquema axiomático de reemplazo**: Si tenemos un conjunto X y una función f definida sobre X, existe el conjunto $\{f(t) \ : \ t \in X\}$.
7. **Axioma de infinitud**: Existe un conjunto X tal que $\emptyset \in X$ y tal que si $y \in X$ entonces $y \cup \{y\} \in X$ (en otras palabras, existe un conjunto inductivo).

Axiomática ZFC

5. **Esquema axiomático de especificación**: Si tenemos un conjunto X y una propiedad P existe el conjunto formado los elementos $x \in X$ que verifican P.
6. **Esquema axiomático de reemplazo**: Si tenemos un conjunto X y una función f definida sobre X, existe el conjunto $\{f(t) \ : \ t \in X\}$.
7. **Axioma de infinitud**: Existe un conjunto X tal que $\emptyset \in X$ y tal que si $y \in X$ entonces $y \cup \{y\} \in X$ (en otras palabras, existe un conjunto inductivo).
8. **Axioma de regularidad**: Para todo conjunto no vacío X existe un conjunto $Y \in X$ tal que $X \cap Y = \emptyset$.
9. **Axioma de elección**: Si tenemos una función f definida en X, de tal forma que $f(x) \neq \emptyset$ para todo $x \in X$ entonces existe una g definida en X tal que $g(x) \in f(x)$ para todo $x \in X$.

Objetivos

1. ¿Existe una medida que extienda la medida de Lebesgue en $\mathcal{P}(\mathbb{R})$?

Objetivos

1. ¿Existe una medida que extienda la medida de Lebesgue en $\mathcal{P}(\mathbb{R})$?
2. ¿Están todos los subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ en la $\sigma-$álgebra generada por los conjuntos de la forma $A \times B$, donde A y B son subconjuntos arbitrarios de $\mathbb{R}$?

Objetivos

1. ¿Existe una medida que extienda la medida de Lebesgue en $\mathcal{P}(\mathbb{R})$?
2. ¿Están todos los subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ en la $\sigma-$álgebra generada por los conjuntos de la forma $A \times B$, donde A y B son subconjuntos arbitrarios de $\mathbb{R}$?
3. ¿Todos los espacios de Banach de la cardinalidad del continuo son isométricos (o al menos isomorfos) a subespacios del espacio cociente l_∞/c_0?

NO 1: No existe ninguna medida λ que extienda a la medida de Lebesgue.

2: La $\sigma-$álgebra de los rectángulos coincide con las partes del plano.

Hipótesis del Continuo.

3: l_∞/c_0 es un espacio de Banach universal.

Extensión de medidas

Pregunta 1

¿Existe una medida que extienda la medida de Lebesgue en $\mathcal{P}(\mathbb{R})$?

Extensión de medidas

Pregunta 1

¿Existe una medida que extienda la medida de Lebesgue en $\mathcal{P}(\mathbb{R})$?

- Vitali demostró que no existe una medida así que sea invariante por traslaciones.

Extensión de medidas

Pregunta 1

¿Existe una medida que extienda la medida de Lebesgue en $\mathcal{P}(\mathbb{R})$?

- Vitali demostró que no existe una medida así que sea invariante por traslaciones.
- Banach y Kuratowski demostraron que la Hipótesis del Continuo responde negativamente a la pregunta.

Extensión de medidas

Pregunta 1

¿Existe una medida que extienda la medida de Lebesgue en $\mathcal{P}(\mathbb{R})$?

- Vitali demostró que no existe una medida así que sea invariante por traslaciones.
- Banach y Kuratowski demostraron que la Hipótesis del Continuo responde negativamente a la pregunta.
- Solovay demostró que “no se puede demostrar que no se pueda demostrar que la respuesta sea negativa.”

Está demostrado que no se puede demostrar que no se pueda demostrar que la respuesta sea negativa.

nexo sujeto verbo atributo

nexo Adv verbo C. directo Oración subordinada Sujeto

nexo Adv verbo C. directo Oración subordinada Sujeto

verbo atributo Oración subordinada Sujeto

Extensión de medidas

Axioma

Existe una medida $\overline{\lambda}$ definida sobre todos los subconjuntos de $\mathbb{R}$ que coincide con la medida de Lebesgue en los conjuntos de la $\sigma-$álgebra de Lebesgue.

Extensión de medidas

Axioma

Existe una medida $\overline{\lambda}$ *definida sobre todos los subconjuntos de* $\mathbb{R}$ *que coincide con la medida de Lebesgue en los conjuntos de la* $\sigma-$*álgebra de Lebesgue.*

Teorema

Si el axioma es cierto, entonces existe un conjunto $D \subseteq \mathbb{R}^2$ *tal que* $D \notin \sigma^2(\mathbb{R}) = \mathcal{P}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{P}(\mathbb{R})$.

Extensión de medidas

Demostración.

Sea $\prec$ un buen orden de $\mathbb{R}$. Denotamos

$$I_{\prec}(x) := \{y \in \mathbb{R} \; : \; y \prec x\}.$$

Extensión de medidas

Demostración.

Sea $\prec$ un buen orden de $\mathbb{R}$. Denotamos

$$I_{\prec}(x) := \{y \in \mathbb{R} \; : \; y \prec x\}.$$

Hay dos opciones:

Extensión de medidas

Demostración.

Sea $\prec$ un buen orden de $\mathbb{R}$. Denotamos

$$I_{\prec}(x) := \{y \in \mathbb{R} \ : \ y \prec x\}.$$

Hay dos opciones:

- Si $\overline{\lambda}(I_{\prec}(x)) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, tomaremos $X = \mathbb{R}$.

Extensión de medidas

Demostración.

Sea $\prec$ un buen orden de $\mathbb{R}$. Denotamos

$$I_{\prec}(x) := \{y \in \mathbb{R} \,:\, y \prec x\}.$$

Hay dos opciones:

- Si $\overline{\lambda}(I_{\prec}(x)) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, tomaremos $X = \mathbb{R}$.
- Si existe un x_0 con $\overline{\lambda}(I_{\prec}(x_0)) > 0$, entonces tomamos $X = I_{\prec}(x)$ con $x = \min_{\prec}\{y \in \mathbb{R} \,:\, \overline{\lambda}(I_{\prec}(y)) > 0\}$.

Extensión de medidas

Demostración.

Sea $\prec$ un buen orden de $\mathbb{R}$. Denotamos

$$I_{\prec}(x) := \{y \in \mathbb{R} \ : \ y \prec x\}.$$

Hay dos opciones:

- Si $\overline{\lambda}(I_{\prec}(x)) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, tomaremos $X = \mathbb{R}$.
- Si existe un x_0 con $\overline{\lambda}(I_{\prec}(x_0)) > 0$, entonces tomamos $X = I_{\prec}(x)$ con $x = \min_{\prec}\{y \in \mathbb{R} \ : \ \overline{\lambda}(I_{\prec}(y)) > 0\}$.

En cualquier caso, sea $D = \{(x, y) \in X^2 \ : \ y \prec x\}$.

Extensión de medidas

Demostración.

Tenemos

$$D_x = \{y \in X \ : \ (x,y) \in D\} = \{y \in X \ : \ y \prec x\} = I_{\prec}(x)$$

Extensión de medidas

Demostración.

Tenemos

$$D_x = \{y \in X \, : \, (x,y) \in D\} = \{y \in X \, : \, y \prec x\} = I_{\prec}(x)$$

$$\overline{\lambda}(D_x) = 0.$$

Extensión de medidas

Demostración.

Tenemos

$$D_x = \{y \in X \, : \, (x, y) \in D\} = \{y \in X \, : \, y \prec x\} = I_{\prec}(x)$$

$$\overline{\lambda}(D_x) = 0.$$

Por otro lado,

$$D^y = \{x \in X \, : \, (x, y) \in D\} = \{x \in X \, : \, y \prec x\} = X \setminus I_{\prec}(y).$$

Extensión de medidas

Demostración.

Tenemos

$$D_x = \{y \in X \,:\, (x,y) \in D\} = \{y \in X \,:\, y \prec x\} = I_{\prec}(x)$$

$$\overline{\lambda}(D_x) = 0.$$

Por otro lado,

$$D^y = \{x \in X \,:\, (x,y) \in D\} = \{x \in X \,:\, y \prec x\} = X \setminus I_{\prec}(y).$$

$$\overline{\lambda}(D^y) = \overline{\lambda}(X \setminus I_{\prec}(y)) > 0.$$

Extensión de medidas

Demostración.

Supongamos que $D \in \sigma^2(\mathbb{R})$.

Extensión de medidas

Demostración.

Supongamos que $D \in \sigma^2(\mathbb{R})$. Por el teorema de Fubini:

$$\overline{\lambda} \otimes \overline{\lambda}(D) = \int_{\mathbb{R}} \overline{\lambda}(D_x) d\overline{\lambda}(x) = \int_{\mathbb{R}} \overline{\lambda}(D^y) d\overline{\lambda}(y)$$

Extensión de medidas

Demostración.

Supongamos que $D \in \sigma^2(\mathbb{R})$. Por el teorema de Fubini:

$$\overline{\lambda} \otimes \overline{\lambda}(D) = \int_{\mathbb{R}} \overline{\lambda}(D_x) d\overline{\lambda}(x) = \int_{\mathbb{R}} \overline{\lambda}(D^y) d\overline{\lambda}(y)$$

Por un lado tenemos,

$$\int_{\mathbb{R}} \overline{\lambda}(D_x) d\overline{\lambda}(x) = \int_{\mathbb{R}} 0 d\overline{\lambda}(x) = 0$$

Extensión de medidas

Demostración.

Supongamos que $D \in \sigma^2(\mathbb{R})$. Por el teorema de Fubini:

$$\overline{\lambda} \otimes \overline{\lambda}(D) = \int_{\mathbb{R}} \overline{\lambda}(D_x) d\overline{\lambda}(x) = \int_{\mathbb{R}} \overline{\lambda}(D^y) d\overline{\lambda}(y)$$

Por un lado tenemos,

$$\int_{\mathbb{R}} \overline{\lambda}(D_x) d\overline{\lambda}(x) = \int_{\mathbb{R}} 0 d\overline{\lambda}(x) = 0$$

y por el otro

$$\int_{\mathbb{R}} \overline{\lambda}(D^y) d\overline{\lambda}(y) = \int_{X} \overline{\lambda}(D^y) d\overline{\lambda}(y) > 0.$$

NO 1: No existe ninguna medida λ que extienda a la medida de Lebesgue.

2: La $\sigma-$álgebra de los rectángulos coincide con las partes del plano.

Hipótesis del Continuo.

3: l_∞/c_0 es un espacio de Banach universal.

NO 1: No existe ninguna medida λ que extienda a la medida de Lebesgue.

$\longleftarrow$

2: La $\sigma-$álgebra de los rectángulos coincide con las partes del plano.

Hipótesis del Continuo.

3: l_∞/c_0 es un espacio de Banach universal.

$\sigma-$ÁLGEBRA GENERADA POR RECTÁNGULOS

$\sigma-$ÁLGEBRA GENERADA POR RECTÁNGULOS

Pregunta 2

¿Están todos los subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ en la $\sigma-$álgebra generada por los conjuntos de la forma $A \times B$, donde A y B son subconjuntos arbitrarios de $\mathbb{R}$?

$\sigma-$álgebra generada por rectángulos

Pregunta 2

¿Están todos los subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ en la $\sigma-$álgebra generada por los conjuntos de la forma $A \times B$, donde A y B son subconjuntos arbitrarios de $\mathbb{R}$?

1. Fue formulada por Ulam en el año 1938.

$\sigma-$álgebra generada por rectángulos

Pregunta 2

¿Están todos los subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ en la $\sigma-$álgebra generada por los conjuntos de la forma $A \times B$, donde A y B son subconjuntos arbitrarios de $\mathbb{R}$?

1. Fue formulada por Ulam en el año 1938.
2. Rothberger demostró que la Hipótesis del Continuo implica que la respuesta a dicha pregunta es "Sí".

$\sigma-$álgebra generada por rectángulos

Pregunta 2

¿Están todos los subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ en la $\sigma-$álgebra generada por los conjuntos de la forma $A \times B$, donde A y B son subconjuntos arbitrarios de $\mathbb{R}$?

1. Fue formulada por Ulam en el año 1938.
2. Rothberger demostró que la Hipótesis del Continuo implica que la respuesta a dicha pregunta es “Sí”.
3. Kunen hizo notar que otros axiomas conocidos implican que la respuesta es “No”.

$\sigma-$álgebra generada por rectángulos

Pregunta 2

¿Están todos los subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ en la $\sigma-$álgebra generada por los conjuntos de la forma $A \times B$, donde A y B son subconjuntos arbitrarios de $\mathbb{R}$?

1. Fue formulada por Ulam en el año 1938.
2. Rothberger demostró que la Hipótesis del Continuo implica que la respuesta a dicha pregunta es "Sí".
3. Kunen hizo notar que otros axiomas conocidos implican que la respuesta es "No".

NO 1: No existe ninguna medida λ que extienda a la medida de Lebesgue.

2: La $\sigma-$álgebra de los rectángulos coincide con las partes del plano.

Hipótesis del Continuo.

3: l_∞/c_0 es un espacio de Banach universal.

Espacios de Banach universales

Espacios de Banach universales

Pregunta 3

¿Todos los espacios de Banach de la cardinalidad del continuo son isométricos (o al menos isomorfos) a subespacios del espacio cociente l_∞/c_0*?*

Espacios de Banach universales

Lema

Si $f : X \longrightarrow Y$ es una función, entonces la función $f \times f : X \times X \longrightarrow Y \times Y$, dada por

$$(f \times f)(x_1, x_2) = (f(x_1), f(x_2)),$$

es $\sigma^2(X) - \sigma^2(Y)-$ medible.

Espacios de Banach universales

Lema

Si $f : X \longrightarrow Y$ es una función, entonces la función $f \times f : X \times X \longrightarrow Y \times Y$, dada por

$$(f \times f)(x_1, x_2) = (f(x_1), f(x_2)),$$

es $\sigma^2(X) - \sigma^2(Y)-$ medible.

Demostración.

Se sigue del hecho de que

$$(f \times f)^{-1}(A \times B) = f^{-1}(A) \times f^{-1}(B).$$

$\square$

Espacios de Banach universales

Lema

Se tiene que el conjunto $\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \ : \ a < b\} \in \sigma^2(\mathbb{R})$.

Espacios de Banach universales

Lema

Se tiene que el conjunto $\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \ : \ a < b\} \in \sigma^2(\mathbb{R})$.

Demostración.

Podemos escribir nuestro conjunto $\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \ : \ a < b\}$ como la siguiente unión de rectángulos:

$$\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \ : \ a < b\} = \bigcup_{I_1, I_2 \subset \mathbb{R}} I_1 \times I_2,$$

donde $I_1, I_2 \subset \mathbb{R}$ son intervalos de extremos racionales que verifican $\max(I_1) < \min(I_2)$. $\square$

Espacios de Banach universales

Lema

Si $A \subset \mathbb{R}$, entonces $A' := \{(a,a) \ : \ a \in A\} \in \sigma^2(\mathbb{R})$.

Demostración.

La idea consiste en demostrarlo por doble contención, tratando de ver

$$A' = \bigcap \bigcup_{k=1}^{n} (A \cap I_k) \times (A \cap I_k),$$

donde $I_1, \ldots, I_n$ son intervalos con extremos racionales tales que $I_1 \cup I_2 \cup \ldots I_n = \mathbb{R}$.

Espacios de Banach universales

Lema

Si $A \subset \mathbb{R}$, entonces $A' := \{(a,a) \ : \ a \in A\} \in \sigma^2(\mathbb{R})$.

Demostración.

Si escribimos el intervalos $I_k = (p_k, q_k)$ siendo $p_k, q_k \in \mathbb{Q}$ tenemos que la parte derecha se convierte en

$$B := \bigcap \bigcup_{k=1}^{n} (A \cap I_k) \times (A \cap I_k) = \bigcap \bigcup_{k=1}^{n} \{(a,a) \ : \ p_k < a < q_k\}.$$

□

Espacios de Banach universales

Axioma (Afirmación de la Pregunta 2)

Todos los subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ están en la $\sigma-$álgebra generada por todos los conjuntos de la forma $A \times B$, donde A y B son conjuntos arbitrarios de $\mathbb{R}$.

Espacios de Banach universales

Axioma (Afirmación de la Pregunta 2)

Todos los subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ están en la $\sigma-$álgebra generada por todos los conjuntos de la forma $A \times B$, donde A y B son conjuntos arbitrarios de $\mathbb{R}$.

Teorema

Si el axioma anterior es falso, entonces existe un espacio de Banach de la cardinalidad del continuo que no es isométrico a ningún subespacio de l_∞/c_0.

Espacios de Banach universales

Como vamos a trabajar en el espacio cociente l_∞/c_0 debemos considerar la norma dada por

$$\|\overline{x}\|_{l_\infty/c_0} = \|x + c_0\|_{l_\infty/c_0} := \inf\{\|x + y\|_{l_\infty} \ : \ y \in c_0\},$$

siendo x un representante de la clase $\overline{x} \in l_\infty/c_0$.

Espacios de Banach universales

Como vamos a trabajar en el espacio cociente l_∞/c_0 debemos considerar la norma dada por

$$\|\overline{x}\|_{l_\infty/c_0} = \|x + c_0\|_{l_\infty/c_0} := \inf\{\|x + y\|_{l_\infty} \ : \ y \in c_0\},$$

siendo x un representante de la clase $\overline{x} \in l_\infty/c_0$.

Un resultado fundamental para la demostración será la equivalencia de

$$\limsup_{n\to+\infty} |x_n| = \inf\left\{\sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n + y_n| \ : \ y_n \longrightarrow 0\right\} =: \|\overline{x}\|_{l_\infty/c_0}.$$

NO 1: No existe ninguna medida λ que extienda a la medida de Lebesgue.

2: La $\sigma-$álgebra de los rectángulos coincide con las partes del plano.

Hipótesis del Continuo.

3: l_∞/c_0 es un espacio de Banach universal.

Espacios de Banach universales

Axioma (Afirmación de la Pregunta 2)

Todos los subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ están en la $\sigma-$álgebra generada por todos los conjuntos de la forma $A \times B$, donde A y B son conjuntos arbitrarios de $\mathbb{R}$.

Teorema

Si el axioma anterior es falso, entonces existe un espacio de Banach de la cardinalidad del continuo que no es isométrico a ningún subespacio de l_∞ / c_0.

Espacios de Banach universales

Supongamos que existe un conjunto $E \subset \mathbb{R}^2$ que no pertenece a la $\sigma-$álgebra $\sigma^2(\mathbb{R})$.

Espacios de Banach universales

Supongamos que existe un conjunto $E \subset \mathbb{R}^2$ que no pertenece a la $\sigma-$álgebra $\sigma^2(\mathbb{R})$. Podemos escribir nuestro conjunto E de la siguiente manera

$$E = E_1 \cup E_2 \cup E_3$$

siendo

Espacios de Banach universales

Supongamos que existe un conjunto $E \subset \mathbb{R}^2$ que no pertenece a la $\sigma-$álgebra $\sigma^2(\mathbb{R})$. Podemos escribir nuestro conjunto E de la siguiente manera

$$E = E_1 \cup E_2 \cup E_3$$

siendo

$$E_1 = \{(a, b) \in E \ : \ a < b\},$$

Espacios de Banach universales

Supongamos que existe un conjunto $E \subset \mathbb{R}^2$ que no pertenece a la $\sigma-$álgebra $\sigma^2(\mathbb{R})$. Podemos escribir nuestro conjunto E de la siguiente manera

$$E = E_1 \cup E_2 \cup E_3$$

siendo

$$E_1 = \{(a,b) \in E \ : \ a < b\},$$
$$E_2 = \{(a,b) \in E \ : a = b\},$$

Espacios de Banach universales

Supongamos que existe un conjunto $E \subset \mathbb{R}^2$ que no pertenece a la $\sigma-$álgebra $\sigma^2(\mathbb{R})$. Podemos escribir nuestro conjunto E de la siguiente manera

$$E = E_1 \cup E_2 \cup E_3$$

siendo

$$\begin{aligned} E_1 &= \{(a,b) \in E \ : \ a < b\}, \\ E_2 &= \{(a,b) \in E \ : a = b\}, \\ E_3 &= \{(a,b) \in E \ : \ a > b\}. \end{aligned}$$

Espacios de Banach universales

Lema

Existe un espacio de Banach X_E de cardinalidad del continuo y vectores $\{e_a \; : \; a \in \mathbb{R}\}$ de X unitarios tales que para todo $a < b$ se verifican

Espacios de Banach universales

Lema

Existe un espacio de Banach X_E de cardinalidad del continuo y vectores $\{e_a \ : \ a \in \mathbb{R}\}$ de X unitarios tales que para todo $a < b$ se verifican

1. $\|e_a + e_b\| = 2$ *si* $(a, b) \in E$.

Espacios de Banach universales

Lema

Existe un espacio de Banach X_E de cardinalidad del continuo y vectores $\{e_a : a \in \mathbb{R}\}$ de X unitarios tales que para todo $a < b$ se verifican

1. $\|e_a + e_b\| = 2$ *si* $(a, b) \in E$.
2. $\|e_a + e_b\| = 1$ *si* $(a, b) \notin E$.

Espacios de Banach universales

Lema

Existe un espacio de Banach X_E de cardinalidad del continuo y vectores $\{e_a : a \in \mathbb{R}\}$ de X unitarios tales que para todo $a < b$ se verifican

1. $\|e_a + e_b\| = 2$ *si* $(a, b) \in E$.
2. $\|e_a + e_b\| = 1$ *si* $(a, b) \notin E$.

Demostración.

Dada una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definiremos

Espacios de Banach universales

Lema

Existe un espacio de Banach X_E de cardinalidad del continuo y vectores $\{e_a \; : \; a \in \mathbb{R}\}$ de X unitarios tales que para todo $a < b$ se verifican

1. $\|e_a + e_b\| = 2$ *si* $(a, b) \in E$.
2. $\|e_a + e_b\| = 1$ *si* $(a, b) \notin E$.

Demostración.

Dada una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definiremos

$$\|f\|_\infty \quad = \quad \sup\{|f(a)| \; : \; a \in \mathbb{R}\},$$

Espacios de Banach universales

Lema

Existe un espacio de Banach X_E de cardinalidad del continuo y vectores $\{e_a \ : \ a \in \mathbb{R}\}$ de X unitarios tales que para todo $a < b$ se verifican

1. $\|e_a + e_b\| = 2$ *si* $(a, b) \in E$.
2. $\|e_a + e_b\| = 1$ *si* $(a, b) \notin E$.

Demostración.

Dada una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definiremos

$$\begin{aligned} \|f\|_\infty &= \sup\{|f(a)| \ : \ a \in \mathbb{R}\}, \\ \|f\|_E &:= \sup\{|f(a) + f(b)| \ : \ (a, b) \in E\}, \end{aligned}$$

Espacios de Banach universales

Lema

Existe un espacio de Banach X_E de cardinalidad del continuo y vectores $\{e_a \ : \ a \in \mathbb{R}\}$ de X unitarios tales que para todo $a < b$ se verifican

1. $\|e_a + e_b\| = 2$ *si* $(a, b) \in E$.
2. $\|e_a + e_b\| = 1$ *si* $(a, b) \notin E$.

Demostración.

Dada una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definiremos

$$\begin{array}{rcl} \|f\|_\infty & = & \sup\{|f(a)| \ : \ a \in \mathbb{R}\}, \\ \|f\|_E & := & \sup\{|f(a) + f(b)| \ : \ (a, b) \in E\}, \\ \|f\| & := & \max\{\|f\|_\infty, \|f\|_E\}, \end{array}$$

Espacios de Banach universales

Lema

Existe un espacio de Banach X_E de cardinalidad del continuo y vectores $\{e_a \ : \ a \in \mathbb{R}\}$ de X unitarios tales que para todo $a < b$ se verifican

1. $\|e_a + e_b\| = 2$ *si* $(a, b) \in E$.
2. $\|e_a + e_b\| = 1$ *si* $(a, b) \notin E$.

Demostración.

Dada una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definiremos

$$\begin{array}{rcl} \|f\|_\infty & = & \sup\{|f(a)| \ : \ a \in \mathbb{R}\}, \\ \|f\|_E & := & \sup\{|f(a) + f(b)| \ : \ (a, b) \in E\}, \\ \|f\| & := & \max\{\|f\|_\infty, \|f\|_E\}, \end{array}$$

así como el espacio

$$Y := \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \ : \ \|f\| < +\infty\}.$$

Espacios de Banach universales

Demostración.

Consideremos la función característica $e_a \in Y$ del punto $a \in \mathbb{R}$

$$e_a(a) = 1, \qquad \text{y} \qquad e_a(b) = 0, \ \forall b \neq a.$$

Espacios de Banach universales

Demostración.

Consideremos la función característica $e_a \in Y$ del punto $a \in \mathbb{R}$

$$e_a(a) = 1, \qquad \text{y} \qquad e_a(b) = 0,\ \forall b \neq a.$$

Se tiene que $(Y, \|\cdot\|)$ conforma un espacio de Banach.

Espacios de Banach universales

Demostración.

Consideremos la función característica $e_a \in Y$ del punto $a \in \mathbb{R}$

$$e_a(a) = 1, \qquad \text{y} \qquad e_a(b) = 0, \ \forall b \neq a.$$

Se tiene que $(Y, \|\cdot\|)$ conforma un espacio de Banach. Además, los vectores e_a cumplen

1. $\|e_a + e_b\| = 2$ si $(a, b) \in E$.
2. $\|e_a + e_b\| = 1$ si $(a, b) \notin E$.
3. $\|e_a\| = 1 \ \forall a \in \mathbb{R}$.

Espacios de Banach universales

Demostración.

Consideremos la función característica $e_a \in Y$ del punto $a \in \mathbb{R}$

$$e_a(a) = 1, \qquad \text{y} \qquad e_a(b) = 0, \ \forall b \neq a.$$

Se tiene que $(Y, \|\cdot\|)$ conforma un espacio de Banach. Además, los vectores e_a cumplen

1. $\|e_a + e_b\| = 2$ si $(a, b) \in E$.
2. $\|e_a + e_b\| = 1$ si $(a, b) \notin E$.
3. $\|e_a\| = 1$ $\forall a \in \mathbb{R}$.

Basta considerar entonces el espacio de Banach

$$X_E := \overline{\operatorname{span}\{e_a \ : \ a \in \mathbb{R}\}},$$

el cual tiene la cardinalidad del continuo. □

Espacios de Banach universales

Teorema

El conjunto X_E construido anteriormente es un espacio de Banach de la cardinalidad del continuo que no es isométrico a ningún subespacio de l_∞/c_0.

Espacios de Banach universales

Teorema

El conjunto X_E construido anteriormente es un espacio de Banach de la cardinalidad del continuo que no es isométrico a ningún subespacio de l_∞/c_0.

Espacios de Banach universales

Teorema

El conjunto X_E construido anteriormente es un espacio de Banach de la cardinalidad del continuo que no es isométrico a ningún subespacio de l_∞/c_0.

Demostración.

Supongamos para ello que tenemos una isometría

$$T : X_E \longrightarrow l_\infty/c_0$$

y denotemos mediante

$$S(a) := (S(a)_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l_\infty$$

a un representante cualquiera de la clase de equivalencia de $T(e_a)$ en el espacio cociente l_∞/c_0.

Espacios de Banach universales

Demostración.

Definimos a continuación los conjuntos

Espacios de Banach universales

Demostración.

Definimos a continuación los conjuntos

$$A_n = \{a \in \mathbb{R} : S(a)_n > 2/3\},$$

Espacios de Banach universales

Demostración.

Definimos a continuación los conjuntos

$$\begin{array}{rcl} A_n & = & \{a \in \mathbb{R} \,:\, S(a)_n > 2/3\}, \\ B_n & = & \{a \in \mathbb{R} \,:\, S(a)_n < -2/3\}. \end{array}$$

Espacios de Banach universales

Demostración.

Definimos a continuación los conjuntos

$$\begin{aligned} A_n &= \{a \in \mathbb{R} \,:\, S(a)_n > 2/3\}, \\ B_n &= \{a \in \mathbb{R} \,:\, S(a)_n < -2/3\}. \end{aligned}$$

La idea consistirá en demostrar que podemos escribir

$$E = \left(\bigcap_{m \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \geq m} A_n \times A_n \right) \cup \left(\bigcap_{m \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \geq m} B_n \times B_n \right),$$

lo cual nos llevará a contradicción con la suposición dada en el axioma de que $E \notin \sigma^2(\mathbb{R})$.

Espacios de Banach universales

Demostración.

Tomemos para ello $a < b$ tal que $(a, b) \in E$. Vimos entonces que

$$\|e_a + e_b\| = 2,$$

por lo que al ser T una isometría y gracias a la elección de S como representante obtenemos que

$$\|T(e_a) + T(e_b)\| = \limsup_{n\to+\infty} |S(a)_n + S(b)_n| = 2.$$

Espacios de Banach universales

Demostración.

Consideremos primero el caso en que

$$\limsup_{n \to +\infty} \left(S(a)_n + S(b)_n \right) = 2.$$

Espacios de Banach universales

Demostración.

Consideremos primero el caso en que

$$\limsup_{n\to+\infty} (S(a)_n + S(b)_n) = 2.$$

Debido a que $\|e_a\| = \|e_b\| = 1$ obtenemos que $|S(a)_n|, |S(b)_n| \leq 7/6$ para casi todo $n \in \mathbb{N}$ (por ejemplo). En consecuencia, debe ser

$$S(a)_n > 2/3 \qquad \text{y} \qquad S(b)_n > 2/3,$$

Espacios de Banach universales

Demostración.

Consideremos primero el caso en que

$$\limsup_{n\to+\infty} (S(a)_n + S(b)_n) = 2.$$

Debido a que $\|e_a\| = \|e_b\| = 1$ obtenemos que $|S(a)_n|, |S(b)_n| \leq 7/6$ para casi todo $n \in \mathbb{N}$ (por ejemplo). En consecuencia, debe ser

$$S(a)_n > 2/3 \qquad \text{y} \qquad S(b)_n > 2/3,$$

ya que en caso contrario (supongamos que $S(a)_n \leq 2/3$) tendríamos que

$$|S(a)_n + S(b)_n| \leq |S(a)_n| + |S(b)_n| \leq \frac{2}{3} + \frac{7}{6} = \frac{11}{6} < 2,$$

lo cual no es posible.

Espacios de Banach universales

Demostración.

Luego, $(a, b) \in A_n \times A_n$ ocurre para un número infinito de índices, lo cual significa que

$$(a, b) \in \left(\bigcap_{m \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \geq m} A_n \times A_n \right).$$

Espacios de Banach universales

Demostración.

Luego, $(a,b) \in A_n \times A_n$ ocurre para un número infinito de índices, lo cual significa que

$$(a,b) \in \left(\bigcap_{m \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \geq m} A_n \times A_n \right).$$

Análogamente, si tomamos el caso en que

$$\limsup_{n \to +\infty} \left(S(a)_n + S(b)_n \right) = -2,$$

llegaríamos a que

$$(a,b) \in \left(\bigcap_{m \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \geq m} B_n \times B_n \right).$$

Espacios de Banach universales

Demostración.

Para demostrar la inclusión contraria, tomemos (a, b) tal que

$$(a, b) \in \left(\bigcap_{m \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \geq m} A_n \times A_n \right) \cup \left(\bigcap_{m \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \geq m} B_n \times B_n \right).$$

Espacios de Banach universales

Demostración.

Para demostrar la inclusión contraria, tomemos (a, b) tal que

$$(a, b) \in \left(\bigcap_{m \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \geq m} A_n \times A_n \right) \cup \left(\bigcap_{m \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \geq m} B_n \times B_n \right).$$

Por lo tanto, $a, b \in A_n$ para infinitos índices $n \in \mathbb{N}$ de modo que

$$\limsup_{n \to +\infty} |S(a)_n + S(b)_n| > 1.$$

Espacios de Banach universales

Demostración.

Para demostrar la inclusión contraria, tomemos (a, b) tal que

$$(a, b) \in \left(\bigcap_{m \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \geq m} A_n \times A_n \right) \cup \left(\bigcap_{m \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \geq m} B_n \times B_n \right).$$

Por lo tanto, $a, b \in A_n$ para infinitos índices $n \in \mathbb{N}$ de modo que

$$\limsup_{n \to +\infty} |S(a)_n + S(b)_n| > 1.$$

Luego, deducimos que $\|e_a + e_b\| > 1$, por lo que $(a, b) \in E$. Hemos probado entonces que E es un elemento de la $\sigma-$álgebra generada por rectángulos $\sigma^2(\mathbb{R})$, lo cual contradice la suposición realizada. $\square$

NO 1: No existe ninguna medida λ que extienda a la medida de Lebesgue.

$\longleftarrow$

2: La $\sigma-$álgebra de los rectángulos coincide con las partes del plano.

Hipótesis del Continuo.

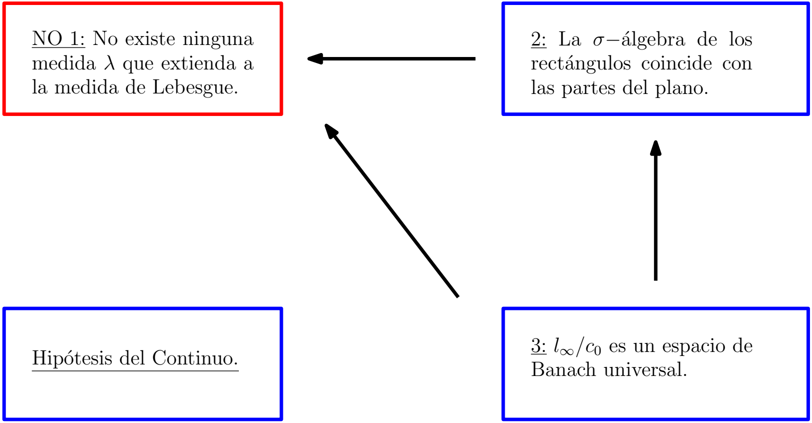
3: l_∞/c_0 es un espacio de Banach universal.

NO 1: No existe ninguna medida λ que extienda a la medida de Lebesgue.

2: La $\sigma-$álgebra de los rectángulos coincide con las partes del plano.

Hipótesis del Continuo.

3: l_∞ / c_0 es un espacio de Banach universal.


NO 1: No existe ninguna medida λ que extienda a la medida de Lebesgue.
2: La $\sigma-$álgebra de los rectángulos coincide con las partes del plano.
Hipótesis del Continuo.
3: l_∞/c_0 es un espacio de Banach universal.

Espacios de Banach universales

Espacios de Banach universales

Teorema

Sea X un espacio de Banach, Y una subálgebra separable de X, $x \in X$, y $T : Y \longrightarrow l_\infty / c_0$ una isometría multiplicativa. Entonces existe una isometría multiplicativa $\widehat{T} : Alg(Y, x) \longrightarrow l_\infty / c_0$ que extiende a T.

Espacios de Banach universales

Teorema

Sea X un espacio de Banach, Y una subálgebra separable de X, $x \in X$, y $T : Y \longrightarrow l_\infty / c_0$ una isometría multiplicativa. Entonces existe una isometría multiplicativa $\widehat{T} : Alg(Y, x) \longrightarrow l_\infty / c_0$ que extiende a T.

Esto nos permitiría demostrar el siguiente resultado.

Espacios de Banach universales

Teorema

Sea X un espacio de Banach, Y una subálgebra separable de X, $x \in X$, y $T : Y \longrightarrow l_\infty/c_0$ una isometría multiplicativa. Entonces existe una isometría multiplicativa $\widehat{T} : Alg(Y, x) \longrightarrow l_\infty/c_0$ que extiende a T.

Esto nos permitiría demostrar el siguiente resultado.

Teorema

Si la Hipótesis del Continuo es cierta, entonces todo espacio de Banach de cardinalidad el continuo es isométrico a un subespacio de l_∞/c_0.

Espacios de Banach universales

Ejemplo

Sin utilizar ningún axioma fuera de ZFC, se puede demostrar que $l_\infty \hookrightarrow l_\infty / c_0$.

Espacios de Banach universales

Ejemplo

Sin utilizar ningún axioma fuera de ZFC, se puede demostrar que $l_\infty \hookrightarrow l_\infty/c_0$.
Para ello basta considerar la aplicación

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \longmapsto (x_1, x_1, x_2, x_1, x_2, x_3, \ldots).$$

NO 1: No existe ninguna medida λ que extienda a la medida de Lebesgue.

2: La $\sigma-$álgebra de los rectángulos coincide con las partes del plano.

Hipótesis del Continuo.

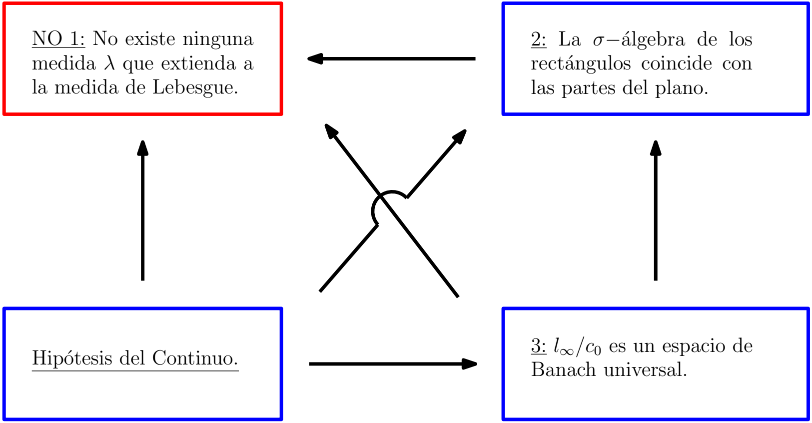
3: l_∞/c_0 es un espacio de Banach universal.

NO 1: No existe ninguna medida λ que extienda a la medida de Lebesgue.

2: La $\sigma-$álgebra de los rectángulos coincide con las partes del plano.

Hipótesis del Continuo.

3: l_∞/c_0 es un espacio de Banach universal.


NO 1: No existe ninguna medida λ que extienda a la medida de Lebesgue.
2: La $\sigma-$álgebra de los rectángulos coincide con las partes del plano.
Hipótesis del Continuo.
3: l_∞/c_0 es un espacio de Banach universal.

Midiendo conjuntos no medibles y espacios de Banach universales

Abel Álvarez, Miguel Ángel Andrés, Javier Canto, Pablo Gerlach, Daniel Morales, Alberto Rodríguez

Universidad de Extremadura
VI Escuela Taller de Análisis Funcional
Tutor: Antonio Avilés
XII Encuentro de la Red de Análisis Funcional y Aplicaciones

2 de marzo de 2016