Análisis Armónico de la A a la A

VI Escuela-Taller de Análisis Funcional

Diego Lloria Albiñana
Adrián Llinares Romero
Pablo Piniella Cerón
José Antonio Salmerón Garrido
Damián Mompeán Rueda
Félix Cabello Sánchez

2 de marzo de 2016

Índice

Preliminares

Trabajamos sobre la circunferencia unidad, denotada $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ y con funciones sobre esta $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$.
Si la función $x \mapsto f(e^{ix})$ es diferenciable en $x_0 \in \mathbb{R}$, entonces f es diferenciable en $\xi_0 = e^{ix_0}$ y

$$(Df)(\xi_0) = \frac{d}{dx}\bigg|_{x=x_0} \big(f(e^{ix})\big)$$

Preliminares

Denotaremos por

$$\mathcal{C}^p(\mathbb{T}) := \{f : \mathbb{T} \to \mathbb{C} : \mathcal{D}^p(f) \text{ es continua}\}$$

$$\mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}) := \bigcap_{p=1}^{\infty} \mathcal{C}^p(\mathbb{T}) = \mathcal{D}(\mathbb{T})$$

Tomando la familia de seminormas definidas en $\mathcal{D}(\mathbb{T})$,

$$||f||_0 := \max_{\xi \in \mathbb{T}} |f(z)| \qquad ||f||_p := \max_{\xi \in \mathbb{T}} \sup_{\alpha \leq p} |D^\alpha f(\xi)| \quad p = 1, 2, \dots$$

$\mathcal{D}(\mathbb{T})$ es un espacio de Frèchet.

Nota

$$f_j \xrightarrow{\mathcal{D}(\mathbb{T})} f \iff D^\alpha f_j \xrightarrow{||\cdot||_0} D^\alpha f, \ \forall \alpha \in \mathbb{N}_0$$

Definición

Una **distribución** en $\mathbb{T}$ es un funcional $\varphi : \mathcal{D}(\mathbb{T}) \to \mathbb{C}$ lineal y continuo, i.e. si $\{f_j\} \subset \mathcal{D}(\mathbb{T})$ tal que $f_j \to 0$, entonces $\varphi[f_j] \to 0$.
Denotaremos el conjunto de todas las distribuciones como $\mathcal{D}'(\mathbb{T})$.

Nota

(i) Sea $\varphi \in \mathcal{D}'(\mathbb{T})$ entonces $\exists p_\varphi \in \mathbb{N}_0$ y $C_\varphi > 0$ tal que

$$|\varphi[f]| \leq C_\varphi ||f||_{p_\varphi}, \quad \forall f \in \mathcal{D}(\mathbb{T}).$$

(ii) Sea $\{T_j\}_{j\geq 1} \subset \mathcal{D}'(\mathbb{T})$, entonces

$$T_j \to T \text{ en } \mathcal{D}'(\mathbb{T}) \text{ si, y sólo si, } T_j[f] \to T[f], \quad \forall f \in \mathcal{D}(\mathbb{T}).$$

Distribuciones

Ejemplo

(i) **Delta de Dirac**: $\delta : \mathcal{D}(\mathbb{T}) \to \mathbb{C}$ definida por $\delta[f] := f(1)$.

(ii) $g \in L_1(\mathbb{T})$, $T_g : \mathcal{D}(\mathbb{T}) \to \mathbb{C}$ definida por

$$T_g[f] := \int_{\mathbb{T}} fg.$$

(iii) Sea $\mathcal{M}(\mathbb{T})$ el conjunto de las medidas complejas sobre $\mathbb{T}$. Dada $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T})$ se asociamos una distribución T_μ de la siguiente forma:

$$T_\mu[f] := \int_{\mathbb{T}} f \, d\mu.$$

Distribuciones

Definición

Sea $p \in \mathbb{N}_0$ y $\varphi \in \mathcal{D}'(\mathbb{T})$, definimos la **derivada de** φ como el funcional $D^p\varphi : \mathcal{D}(\mathbb{T}) \to \mathbb{K}$ definido por

$$D^p\varphi[f] := (-1)^p \varphi[D^p f],$$

para cada $f \in \mathcal{D}(\mathbb{T})$.

Nota

$D^p\varphi \in \mathcal{D}'(\mathbb{T})$ por ser $D^p\varphi = D^p \circ \varphi$ donde $D^p : \mathcal{D}(\mathbb{T}) \to \mathcal{D}(\mathbb{T})$ es continua.

Ejemplo

(i) $g \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$, $T_g[f] = \int_{\mathbb{T}} fg$,

$$T_{g'}[f] = \int_{\mathbb{T}} fg' = \overbrace{\ldots}^{i.p.p} = -T_g[f']$$

$$(T_g)'[f] = -T_g[f'].$$

(ii) **"Heaviside step function"**

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 \leq x \leq \pi \\ 0 & \text{si} \quad -\pi \leq x < 0 \end{cases}$$

$$DH[f] = \delta - \delta_\pi, \quad \forall f \in \mathcal{D}(\mathbb{T}).$$

Definición

(i) Si $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$, se define la traslación como

$$\tau_s(f)(e^{it}) := f(e^{i(t+s)}), \qquad s, t \in \mathbb{R}.$$

(ii) Sea $\varphi \in \mathcal{D}'(\mathbb{T})$ y $a \in \mathbb{T}$, definimos la **traslación** de φ por e^{is} como el operador continuo $\tau_s : \mathcal{D}'(\mathbb{T}) \to \mathcal{D}'(\mathbb{T})$ dado por

$$\tau_s(\varphi)[f] = \varphi[\tau_{-s}(f)],$$

para cada $f \in \mathcal{D}(\mathbb{T})$.

Convolución

Definición (Convolución)

Dadas $f, g \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$, definimos $f * g$ como

$$(f * g)\left(e^{it}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(e^{ix}\right) g\left(e^{i(t-x)}\right) dx, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

- Nuestro objetivo es generalizar este concepto a distribuciones.

Convolución

Lema

Sean $\varphi \in \mathcal{D}'(\mathbb{T})$ *y* $f \in \mathcal{D}(\mathbb{T})$. *Si*

$$g\left(e^{it}\right) := \varphi^s\left[f\left(e^{i(s+t)}\right)\right], \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

entonces $g \in \mathcal{D}(\mathbb{T})$. *Además,*

$$D^\alpha g\left(e^{it}\right) = \varphi^s\left[D^\alpha f\left(e^{i(s+t)}\right)\right], \quad \forall t \in \mathbb{R}, \forall n \geq 1.$$

Convolución

Definición (Convolución)

Dadas $\varphi, \psi \in \mathcal{D}'(\mathbb{T})$, definimos $\varphi * \psi$ de la siguiente forma:

$$(\varphi * \psi)[f] := \varphi^t \left[\psi^s \left[f \left(e^{i(s+t)} \right) \right] \right], \quad \forall f \in \mathcal{D}(\mathbb{T}).$$

Lema

La convolución de distribuciones es una distribución.

Convolución

Proposición

La convolución de distribuciones generaliza el concepto de convolución de funciones continuas.

Demostración.

Si $\varphi, \psi \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ y $f \in \mathcal{D}(\mathbb{T})$,

$$\begin{aligned}(\varphi * \psi)_{\mathcal{C}}[f] &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (\varphi * \psi)\left(e^{it}\right) f\left(e^{it}\right) dt \\ &= \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} \varphi\left(e^{is}\right)\psi\left(e^{i(t-s)}\right) ds\right) f\left(e^{it}\right) dt. \qquad (1)\end{aligned}$$

$\square$

Convolución

Demostración.

Por otro lado, mediante la definición dada para distribuciones,

$$\begin{aligned}(\varphi * \psi)_{\mathcal{D}}[f] &= \varphi^t \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi\left(e^{is}\right) f\left(e^{i(s+t)}\right) ds \right] \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi\left(e^{it}\right) \left(\int_{-\pi}^{\pi} \psi\left(e^{is}\right) f\left(e^{i(s+t)}\right) ds \right) dt,\end{aligned}$$

y realizando el cambio de varible $x = s + t$,

$$(\varphi * \psi)_{\mathcal{D}}[f] = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi\left(e^{it}\right) \psi\left(e^{i(x-t)}\right) f\left(e^{ix}\right) dxdt, \tag{2}$$

y por el teorema de Fubini, tenemos la igualdad entre (1) y (2). $\square$

Convolución

Lema

$\tau_s(\delta) * \varphi = \tau_s(\varphi)$ y $\delta * \varphi = \varphi$ para cualesquiera $s \in \mathbb{R}$ y $\varphi \in \mathcal{D}'(\mathbb{T})$.

Proposición

Si $\varphi, \psi \in \mathcal{D}'(\mathbb{T})$ y $(\varphi_j)_{j \geq 1} \subset \mathcal{D}'(\mathbb{T})$ convergente a φ,

$$\lim_{j \to \infty} (\varphi_j * \psi) = \varphi * \psi \tag{3}$$

$$\lim_{j \to \infty} (\psi * \varphi_j) = \psi * \varphi. \tag{4}$$

Convolución

Demostración.

Si tenemos en cuenta que

$$(\varphi_j * \psi)[f] \quad = \quad \varphi_t^j \overbrace{\left[\psi^s\left[f\left(e^{i(s+t)}\right)\right]\right]}^{\in \mathcal{D}(\mathbb{T})}.$$

Consecuentemente,

$$\lim_{j\to\infty} (\varphi_j * \psi)[f] = \varphi_t\left[\psi^s\left[f\left(e^{i(s+t)}\right)\right]\right] = (\varphi * \psi)[f] \quad \forall f \in \mathcal{D},$$

demostrando así (3). $\square$

Convolución

Lema

$\mathcal{D}(\mathbb{T})$ es denso en $\mathcal{D}'(\mathbb{T})$.

Lema

Si $\varphi \in \mathcal{D}'(\mathbb{T})$ y $f \in \mathcal{D}(\mathbb{T})$, entonces $\varphi * f \in \mathcal{D}(\mathbb{T})$. Además, si $m \in \mathcal{M}(\mathbb{T})$ y $f \in L_p(\mathbb{T})$, $m * f \in L_p(\mathbb{T})$; y si $f \in \mathcal{C}^p(\mathbb{T})$, $m * f \in \mathcal{C}^p(\mathbb{T})$.

Proposición

La convolución de distribuciones es asociativa y conmutativa.

Proposición

$\varphi * \left(e^{int}\right) = \varphi\left[e^{-int}\right] e^{int}$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ y para toda $\varphi \in \mathcal{D}'(\mathbb{T})$.

Demostración.

Dada $f \in \mathcal{D}(\mathbb{T})$,

$$\begin{aligned}
(\varphi * e^{int})[f] &= \varphi^s\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{int} f\left(e^{i(t+s)}\right) dt\right] \\
&\overbrace{=}^{x=s+t} \varphi^s\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{in(x-s)} f(e^{ix}) dx\right] \\
&= \varphi^s\left[\frac{e^{-ins}}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} f\left(e^{ix}\right) dx\right] \\
&= \varphi^s[e^{-ins}]\, e^{inx}[f].
\end{aligned}$$

Demostrando que $\varphi * e^{int} = \varphi[e^{-int}]e^{int}$. □

Caracterización de operadores IT

Definición (Operador invariante por traslaciones (IT))

Un operador lineal continuo $L : \mathcal{D}'(\mathbb{T}) \to \mathcal{D}'(\mathbb{T})$ se dice invariante por traslaciones si para cada $e^{is} \in \mathbb{T}$

$$\tau_s L = L \tau_s$$

Caracterización de operadores IT

Teorema

Para toda $\varphi \in \mathcal{D}'(\mathbb{T})$ el operador $L_\varphi : \mathcal{D}'(\mathbb{T}) \to \mathcal{D}'(\mathbb{T})$ dado por $L_\varphi(\psi) := \varphi * \psi$ es un operador invariante por traslaciones. Más aun, todo operador L invariante por traslaciones puede expresarse como $L = L_\varphi$ para alguna $\varphi \in \mathcal{D}'(\mathbb{T})$ que puede construirse como $\varphi = L(\delta)$.

Demostración.

$\varphi \in \mathcal{D}'(\mathbb{T})$, $e^{is} \in \mathbb{T}$

$$\tau_s\big(L_\varphi(\psi)\big) \overset{def}{=} \tau_s(\varphi * \psi) \overset{unid}{=} \tau_s(\delta) * (\varphi * \psi) \overset{conm,asoc}{=}$$

$$= \varphi * \big(\tau_s(\delta) * \psi\big) \overset{unid}{=} \varphi * \big(\tau_s(\psi)\big) \overset{def}{=} L_\varphi\big(\tau_s(\psi)\big).$$

$\square$

Lema

Span $\left(\{\delta_s \,:\, e^{is} \in \mathbb{T}\}\right)$ *es denso en* $\mathcal{D}'(\mathbb{T})$.

Demostración.

Supongamos que existe $\varphi \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}) \setminus \overline{\text{Span}} \left(\{\delta_s \,:\, e^{is} \in \mathbb{T}\}\right)$. Aplicando Hahn-Banach, existe un funcional lineal y continuo $T : \mathcal{D}'(\mathbb{T}) \to \mathbb{C}$ tal que $T(\varphi) = 1$ pero $T(\delta_s) = 0$ $(e^{is} \in \mathbb{T})$. Ahora bien, como $\mathcal{D}'(\mathbb{T})$ está equipado con la topología estrella débil, existe $f \in \mathcal{D}(\mathbb{T})$ tal que $T = J(f)$. De aquí

$$f(e^{is}) = \delta_s[f] = T(\delta_s) = 0.$$

Ya que la expresión es válida para todo $e^{is} \in \mathbb{T}$, $f \equiv 0$. Sin embargo, $1 = T(\varphi) = \varphi[f]$, contradicción. $\square$

Caracterización de operadores IT

Demostración.

Sea L invariante por traslaciones y denotemos $L(\delta) := \varphi$. Se tiene

$$L(\delta_s) = L\big(\tau_{-s}(\delta)\big) \overset{i.t}{=} \tau_{-s}\big(L(\delta)\big) = \tau_{-s}(\varphi) \overset{p,2}{=} \tau_{-s}(\delta) * \varphi = L_\varphi(\delta_s).$$

para todo $e^{is} \in \mathbb{T}$. Como L es lineal, $L(\psi) = L_\varphi(\psi)$ para todo $\psi \in \operatorname{Span}\left(\{\delta_s \,:\, e^{is} \in \mathbb{T}\}\right)$. Tomando $\psi \in \mathcal{D}'(\mathbb{T})$ arbitraria, por el lema anterior existe una sucesión $\psi_j \in \operatorname{Span}\left(\{\delta_s \,:\, e^{is} \in \mathbb{T}\}\right)$ tal que $\lim\limits_{j\to\infty} \psi_j = \psi$. Por tanto

$$L(\psi) = L\left(\lim_{j\to\infty} \psi_j\right) \overset{cont}{=} \lim_{j\to\infty} L(\psi_j) = \lim_{j\to\infty} (\varphi * \psi_j) \overset{p,3}{=} \varphi * \psi = L_\varphi(\psi).$$

La unicidad es directa: $L_\varphi = L_\psi \Rightarrow \varphi = L_\varphi(\delta) = L_\psi(\delta) = \psi$.

$\square$

- Corolario: L es diagonal en la base de los armónicos.

Resultado Principal

Definición (Coeficientes de Fourier de la distribución φ)

Al valor $\varphi[z^{-n}]$, donde $\varphi \in \mathcal{D}'(\mathbb{T})$, $n \in \mathbb{Z}$, se le conoce como n-ésimo coeficiente de Fourier de la distribución φ y se le denota como $\widehat{\varphi}(n)$.

Definición

1. Llamamos Transformada de Fourier de la distribución φ a la función $\widehat{\varphi} : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$.
2. Llamamos serie de Fourier de la distribución φ a la serie $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{\varphi}(n) z^n$.

Resultado Principal

Teorema

Sea φ una distribución. Entonces la Serie de Fourier de φ es convergente a dicha distribución. Es decir,

$$\varphi = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{\varphi}(n) z^n.$$

Esquema de la demostración

Comprobaremos que para cualquier test se satisface:

$$\phi[f] = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{\phi}(n) e_n[f].$$

Usando que $e_n[f] = \int_{\mathbb{T}} f e_n = f[e_{-n}] = \widehat{f}(-n)$ pasamos a $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{\phi}(n) \widehat{f}(-n)$.

Resultado Principal

Lema

Sea $\varphi \in \mathcal{D}'(\mathbb{T})$*. Entonces* $\widehat{\varphi}(n)$ *tiene un crecimiento polinómico, a saber,* $O(n^p)$ *para un cierto* $p \in \mathbb{N}$*.*

Demostración.

Sabemos que $\exists p_\varphi \in \mathbb{N}$ y $C_\varphi > 0$ tal que $|\varphi[e_{-n}]| \leq C_\varphi ||e_{-n}||_{p_\varphi}$.
Usando que $||e_{-n}||_p = |n|^p$ llegamos al resultado. $\square$

Lema

Sea $f \in \mathcal{D}(\mathbb{T})$*. Entonces* $\widehat{f}(-n)$ *decrece como* $o(n^{-T})$*, donde podemos elegir* T *tan grande como queramos.*

- $\widehat{D^p f}(n) = D^p(f)[e_{-n}] = (-1)^p f[\frac{d^p}{dx^p}(e^{-inx})] = (in)^p \widehat{f}(n)$.

Resultado Principal

Demostración.

- f es continua, luego sus coeficientes de Fourier están acotados mediante $|\widehat{f}(n)| \leq ||f||_0$.
- Análogamente para Df se tiene, $|\widehat{Df}(n)| \leq ||Df||_0$.
- Como f es de clase $C^\infty(\mathbb{T})$ los coeficientes de Fourier de sus derivadas también lo están y se cumple la relación $\widehat{Df}(n) = in\widehat{f}(n)$.
- Deducimos que $|\widehat{f}(n)| \leq \frac{1}{|n|}||f||_1$.
- Iterando el razonamiento, $|\widehat{f}(n)| \leq \frac{1}{|n|^p}||f||_p, \forall p \in \mathbb{N}$, como queríamos probar.

$\square$

Bien definida y continua

$$\begin{aligned}\left|\sum_{n\in\mathbb{Z}}\widehat{\varphi}(n)\widehat{f}(-n)\right| &\leq \sum_{n\in\mathbb{Z}}\left|\widehat{\varphi}(n)\widehat{f}(-n)\right| \\ &\leq \sum_{n\in\mathbb{Z}} K_{\varphi}|n|^{p}\left|\widehat{f}(-n)\right| \\ &\leq K_{\varphi}\sum_{n\neq 0}|n|^{p}\,||f||_{p+2}\frac{1}{|n|^{p+2}}.\end{aligned}$$

Lema

Toda función de $\mathcal{D}(\mathbb{T})$ coincide con su desarrollo de Fourier: $f=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\widehat{f}(n)z^{n}$, con $z=e^{it}$.

Para terminar,

$$\phi[f] = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{\phi}(n)e_n[f].$$

Resultado válido para polinonmios trigonometricos, y por extensión a sus combinaciones lineales.
Finalizamos la prueba empleando que éstos son densos en $\mathcal{C}(\mathbb{T})$:

$$\varphi\left[\lim_{m\to\infty}\left(\sum_{j=-m}^{m}\widehat{f}(j)e_{-j} - f\right)\right] = 0$$

Aplicación: Problema isoperimétrico

Teorema

Sea C una curva de Jordan de longitud 2π. Entonces el área que encierra es menor que π. Es más, se alcanza la igualdad si, y sólo si, en caso de que C sea una circunferencia de radio unidad.

Demostración (Hurwitz).

Sea $z = z(t)$ la curva parametrizada por el arco, $|(Dz)(t)| = 1$. Entonces

$$2\pi = \int_0^{2\pi} |(Dz)(s)|^2 \, ds = 2\pi ||(Dz)||^2_{L_2(\mathbb{T})} = 2\pi \sum_{n\in\mathbb{Z}} n^2 |\widehat{z}(n)|^2.$$

□

Aplicación: Problema isoperimétrico

Demostración.

Si aplicamos el Teorema de Green, tomando $x = \frac{z+\bar{z}}{2}, y = \frac{z-\bar{z}}{2i}$ tenemos que

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}\oint xdy - ydx \\ &= \frac{1}{4i}\int_0^{2\pi} \bar{z}Dz - zD\bar{z}dt \\ &= \frac{2\pi}{4i}(\langle Dz|z\rangle_{L_2(\mathbb{T})} - \langle z|Dz\rangle_{L_2(\mathbb{T})}) \\ &= \frac{\pi}{2i}(\langle \widehat{Dz}|\widehat{z}\rangle_{l_2(\mathbb{Z})} - \langle \widehat{z}|\widehat{Dz}\rangle_{l_2(\mathbb{Z})}). \end{aligned}$$

□

Aplicación: Problema isoperimétrico

Demostración.

Sustituyendo, $\widehat{Dz} = in\widehat{z}(n)$ obtenemos:

$$A = \frac{\pi}{i} \sum_{n\in\mathbb{Z}} in|\widehat{z}(n)|^2 \leq \pi \sum_{n\in\mathbb{Z}} n^2|\widehat{z}(n)|^2 = \pi.$$

Además, se alcanza la igualdad si y sólo si $\widehat{z}(n) = 0$ para todo n distinto de 0 y 1, con lo que

$$z(t) = \widehat{z}(0) + \widehat{z}(1)e^{it},$$

demostrando así que la curva es una circunferencia (unitaria). $\square$

Bibliografía

V.P. Khavin, N.K. Nikol'skij; 1991.*Enciclopaedia of the Mathematical Sciences. Volume 15* Barcelona : Springer-Verlag.

W. Rudin; 1979.*Análisis Funcional* Barcelona : Editorial Reverté, S.A.