Teoremas de punto fijo y aplicaciones

Joan Carles Bastons (UB)
Víctor González (UM)
Jose Antonio Gutiérrez (UM)
Imanol Pérez (UPV/EHU)
Antonio Jesús Román (US)
Antonio Zarauz (UAL)

Dirigido por: Juan José Nieto
Escuela-Taller Análisis Funcional

2 de marzo de 2016

Contenidos

Crecientes en $[0,1]$

Sea $f : [0,1] \to [0,1]$ una aplicación creciente. Entonces f tiene un punto fijo.

Demostración

Consideremos el conjunto $A = \{x \in [0,1] : x \leq f(x)\}$.

- Dado que $f(0) \geq 0$, A es no vacío. Sea $a := \sup A$.
- Supongamos que $a \notin A$, es decir, $f(a) < a$.
- Sea $x \in A$, $x < a$, y como f es creciente $f(x) \leq f(a)$. Entonces,

$$x \leq f(x) \leq f(a), \forall x \in A.$$

  Se obtiene $a \leq f(a)$, que es una contradicción.

Crecientes en $[0,1]$

Sea $f : [0,1] \to [0,1]$ una aplicación creciente. Entonces f tiene un punto fijo.

Demostración

Consideremos el conjunto $A = \{x \in [0,1] : x \leq f(x)\}$.

- Dado que $f(0) \geq 0$, A es no vacío. Sea $a := \sup A$.
- Supongamos que $a \notin A$, es decir, $f(a) < a$.
- Sea $x \in A$, $x < a$, y como f es creciente $f(x) \leq f(a)$. Entonces,

$$x \leq f(x) \leq f(a), \forall x \in A.$$

Se obtiene $a \leq f(a)$, que es una contradicción.

Crecientes en $[0,1]$

Sea $f:[0,1]\to[0,1]$ una aplicación creciente. Entonces f tiene un punto fijo.

Demostración

Consideremos el conjunto $A=\{x\in[0,1]: x\le f(x)\}$.

- Dado que $f(0)\ge 0$, A es no vacío. Sea $a:=\sup A$.
- Supongamos que $a\notin A$, es decir, $f(a)<a$.
- Sea $x\in A$, $x<a$, y como f es creciente $f(x)\le f(a)$. Entonces,

$$x\le f(x)\le f(a),\ \forall x\in A.$$

Se obtiene $a\le f(a)$, que es una contradicción.

Crecientes en $[0,1]$

Sea $f : [0,1] \to [0,1]$ una aplicación creciente. Entonces f tiene un punto fijo.

Demostración

Consideremos el conjunto $A = \{x \in [0,1] : x \leq f(x)\}$.

- Dado que $f(0) \geq 0$, A es no vacío. Sea $a := \sup A$.
- Supongamos que $a \notin A$, es decir, $f(a) < a$.
- Sea $x \in A$, $x < a$, y como f es creciente $f(x) \leq f(a)$. Entonces,

$$x \leq f(x) \leq f(a), \forall x \in A.$$

Se obtiene $a \leq f(a)$, que es una contradicción.

Demostración

- Se tiene que $a \in A$, es decir, $a \leq f(a)$.
- Como f es creciente, $f(a) \leq f^2(a)$. Pues $f(a) \in A$.
- Dado que $a \leq f(a)$ y a es el supremo, $f(a) = a$.

Demostración

- Se tiene que $a \in A$, es decir, $a \leq f(a)$.
- Como f es creciente, $f(a) \leq f^2(a)$. Pues $f(a) \in A$.
- Dado que $a \leq f(a)$ y a es el supremo, $f(a) = a$.

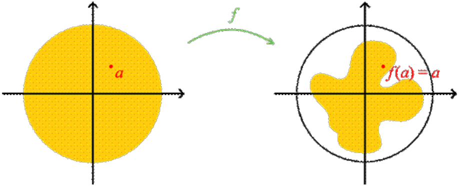
Demostración

- Se tiene que $a \in A$, es decir, $a \leq f(a)$.
- Como f es creciente, $f(a) \leq f^2(a)$. Pues $f(a) \in A$.
- Dado que $a \leq f(a)$ y a es el supremo, $f(a) = a$.

Teorema [Punto fijo de Brouwer]

Sea $f : \overline{B}_{\mathbb{R}^n} \to \overline{B}_{\mathbb{R}^n}$ una aplicación continua. Entonces, f tiene un punto fijo.

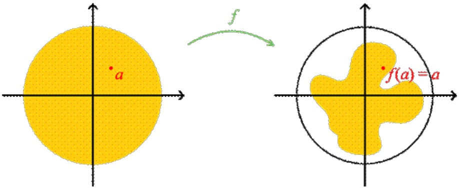
La demostración se basa en que el disco $\overline{B}_{\mathbb{R}^n}$ no se puede retraer en $\mathbb{S}^{n-1}$ para todo $n \geq 1$. Si f no tuviera puntos fijos se podría construir una retracción del disco en la circunferencia.



Teorema [Punto fijo de Brouwer]

Sea $f : \overline{B}_{\mathbb{R}^n} \to \overline{B}_{\mathbb{R}^n}$ una aplicación continua. Entonces, f tiene un punto fijo.

La demostración se basa en que el disco $\overline{B}_{\mathbb{R}^n}$ no se puede retraer en $\mathbb{S}^{n-1}$ para todo $n \geq 1$. Si f no tuviera puntos fijos se podría construir una retracción del disco en la circunferencia.



Aplicación: Teorema fundamental del álgebra

Todo polinomio $p(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n \in \mathbb{C}[x]$ con $n \geq 1$ tiene una raíz en $\mathbb{C}$.

- Podemos suponer sin pérdida de generalidad $a_n = 1$. Sea $r = 2 + \sum_{i=0}^{n} |a_i|$.
- Definimos la aplicación continua $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ para cada $z = \rho e^{eit}$ por

$$g(z) = \begin{cases} z - \frac{p(z)}{r} e^{i(1-n)t}, & |z| \leq 1 \\ z - \frac{p(z)}{r} z^{(1-n)}, & |z| > 1. \end{cases}$$

- Se cumple $g(\overline{B(0,r)}) \subset \overline{B(0,r)}$.
- Entonces, por el Teorema del punto fijo de Brouwer, existe $z_0 \in \overline{B(0,r)}$ tal que $g(z_0) = z_0$, es decir, $p(z_0) = 0$.

Aplicación: Teorema fundamental del álgebra

Todo polinomio $p(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n \in \mathbb{C}[x]$ con $n \geq 1$ tiene una raíz en $\mathbb{C}$.

- Podemos suponer sin pérdida de generalidad $a_n = 1$. Sea $r = 2 + \sum_{i=0}^{n} |a_i|$.
- Definimos la aplicación continua $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ para cada $z = \rho e^{it}$ por

$$g(z) = \begin{cases} z - \frac{p(z)}{r} e^{i(1-n)t}, & |z| \leq 1 \\ z - \frac{p(z)}{r} z^{(1-n)}, & |z| > 1. \end{cases}$$

- Se cumple $g(\overline{B(0,r)}) \subset \overline{B(0,r)}$.
- Entonces, por el Teorema del punto fijo de Brouwer, existe $z_0 \in \overline{B(0,r)}$ tal que $g(z_0) = z_0$, es decir, $p(z_0) = 0$.

Aplicación: Teorema fundamental del álgebra

Todo polinomio $p(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n \in \mathbb{C}[x]$ con $n \geq 1$ tiene una raíz en $\mathbb{C}$.

- Podemos suponer sin pérdida de generalidad $a_n = 1$. Sea $r = 2 + \sum_{i=0}^{n} |a_i|$.
- Definimos la aplicación continua $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ para cada $z = \rho e^{eit}$ por

$$g(z) = \begin{cases} z - \frac{p(z)}{r} e^{i(1-n)t}, & |z| \leq 1 \\ z - \frac{p(z)}{r} z^{(1-n)}, & |z| > 1. \end{cases}$$

- Se cumple $g(\overline{B(0,r)}) \subset \overline{B(0,r)}$.
- Entonces, por el Teorema del punto fijo de Brouwer, existe $z_0 \in \overline{B(0,r)}$ tal que $g(z_0) = z_0$, es decir, $p(z_0) = 0$.

Aplicación: Teorema fundamental del álgebra

Todo polinomio $p(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n \in \mathbb{C}[x]$ con $n \geq 1$ tiene una raíz en $\mathbb{C}$.

- Podemos suponer sin pérdida de generalidad $a_n = 1$. Sea $r = 2 + \sum_{i=0}^{n} |a_i|$.
- Definimos la aplicación continua $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ para cada $z = \rho e^{eit}$ por

$$g(z) = \begin{cases} z - \frac{p(z)}{r} e^{i(1-n)t}, & |z| \leq 1 \\ z - \frac{p(z)}{r} z^{(1-n)}, & |z| > 1. \end{cases}$$

- Se cumple $g(\overline{B(0,r)}) \subset \overline{B(0,r)}$.
- Entonces, por el Teorema del punto fijo de Brouwer, existe $z_0 \in \overline{B(0,r)}$ tal que $g(z_0) = z_0$, es decir, $p(z_0) = 0$.

Aplicación: Teorema fundamental del álgebra

Todo polinomio $p(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n \in \mathbb{C}[x]$ con $n \geq 1$ tiene una raíz en $\mathbb{C}$.

- Podemos suponer sin pérdida de generalidad $a_n = 1$. Sea $r = 2 + \sum_{i=0}^{n} |a_i|$.
- Definimos la aplicación continua $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ para cada $z = \rho e^{eit}$ por

$$g(z) = \begin{cases} z - \frac{p(z)}{r} e^{i(1-n)t}, & |z| \leq 1 \\ z - \frac{p(z)}{r} z^{(1-n)}, & |z| > 1. \end{cases}$$

- Se cumple $g(\overline{B(0,r)}) \subset \overline{B(0,r)}$.
- Entonces, por el Teorema del punto fijo de Brouwer, existe $z_0 \in \overline{B(0,r)}$ tal que $g(z_0) = z_0$, es decir, $p(z_0) = 0$.

Teorema

Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ conjunto compacto convexo no vacío y $f : K \to K$ una aplicación continua. Entonces f tiene un punto fijo.

Aplicación: Teorema de Frobenius

Toda matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ con entradas estrictamente positivas tiene un autovalor positivo.

- Tomamos el compacto convexo

$$K = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{j=1}^{n} x_j = 1,\, x_j \geq 0,\, j = 1, \ldots, n \right\}.$$

- Consideramos la aplicación $f : K \to K$ dada por $f(x) = \frac{Ax}{\|Ax\|_1}$.
- Por el teorema, f tiene un punto fijo $\overline{x} \in K$, es decir, $A\overline{x} = \|A\overline{x}\|_1 \overline{x}$.

Teorema

Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ conjunto compacto convexo no vacío y $f : K \to K$ una aplicación continua. Entonces f tiene un punto fijo.

Aplicación: Teorema de Frobenius

Toda matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ con entradas estrictamente positivas tiene un autovalor positivo.

- Tomamos el compacto convexo

$$K = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \colon \sum_{j=1}^{n} x_j = 1,\, x_j \geq 0,\, j = 1, \ldots, n \right\}.$$

- Consideramos la aplicación $f : K \to K$ dada por $f(x) = \frac{Ax}{\|Ax\|_1}$.
- Por el teorema, f tiene un punto fijo $\overline{x} \in K$, es decir, $A\overline{x} = \|A\overline{x}\|_1 \overline{x}$

Teorema

Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ conjunto compacto convexo no vacío y $f : K \to K$ una aplicación continua. Entonces f tiene un punto fijo.

Aplicación: Teorema de Frobenius

Toda matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ con entradas estrictamente positivas tiene un autovalor positivo.

- Tomamos el compacto convexo

$$K = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \colon \sum_{j=1}^{n} x_j = 1,\ x_j \geq 0,\ j = 1, \ldots, n \right\}.$$

- Consideramos la aplicación $f : K \to K$ dada por $f(x) = \frac{Ax}{\|Ax\|_1}$.
- Por el teorema, f tiene un punto fijo $\overline{x} \in K$, es decir, $A\overline{x} = \|A\overline{x}\|_1 \overline{x}$

Teorema

Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ conjunto compacto convexo no vacío y $f : K \to K$ una aplicación continua. Entonces f tiene un punto fijo.

Aplicación: Teorema de Frobenius

Toda matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ con entradas estrictamente positivas tiene un autovalor positivo.

- Tomamos el compacto convexo

$$K = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \colon \sum_{j=1}^{n} x_j = 1,\, x_j \geq 0,\, j = 1, \ldots, n \right\}.$$

- Consideramos la aplicación $f : K \to K$ dada por $f(x) = \frac{Ax}{\|Ax\|_1}$.
- Por el teorema, f tiene un punto fijo $\overline{x} \in K$, es decir, $A\overline{x} = \|A\overline{x}\|_1 \overline{x}$

Teorema

Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ conjunto compacto convexo no vacío y $f : K \to K$ una aplicación continua. Entonces f tiene un punto fijo.

Aplicación: Teorema de Frobenius

Toda matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ con entradas estrictamente positivas tiene un autovalor positivo.

- Tomamos el compacto convexo

$$K = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \colon \sum_{j=1}^{n} x_j = 1,\ x_j \geq 0,\ j = 1, \dots, n \right\}.$$

- Consideramos la aplicación $f : K \to K$ dada por $f(x) = \frac{Ax}{\|Ax\|_1}$.
- Por el teorema, f tiene un punto fijo $\overline{x} \in K$, es decir, $A\overline{x} = \|A\overline{x}\|_1 \overline{x}$.

Contenidos

La compacidad es una propiedad esencial que pierden numerosos conjuntos (bolas, esferas,...) y en consecuencia aplicaciones al trabajar en espacios de dimensión infinita. Ello nos impide extender los resultados anteriores, como muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo [Kakutani]

Dado $\varepsilon \in (0, 1]$ y $x = (x_0, x_1, x_2, \ldots) \in \ell^2$, la aplicación

$$\begin{array}{rccc} f_\varepsilon : & \overline{B}_{\ell^2} & \longrightarrow & \overline{B}_{\ell^2} \\ & x & \longmapsto & (\varepsilon(1 - \|x\|), x_0, x_1, \ldots) \end{array}$$

no tiene puntos fijos.

Bajo hipótesis adicionales sobre el conjunto o la aplicación podemos obtener, respectivamente, resultados análogos en dimensión infinita.

Teorema [Schauder]

Sea X espacio localmente convexo y $K \subset X$ convexo no vacío. Si $K_0 \subset K$ es compacto y $f : K \to K_0$ es continua, entonces $f|_{K_0}$ tiene un punto fijo.

En particular, las aplicaciones continuas entre compactos convexos no vacíos tienen puntos fijos.

Teorema [Schaefer]

Sea X espacio de Banach y $f : X \to X$ continua y compacta. Si el conjunto

$$F = \{x \in X \colon x = \lambda f(x),\ \text{para algún } \lambda \in [0,1]\}$$

es acotado, entonces f tiene un punto fijo.

Este resultado induce una técnica de demostración de existencia de soluciones en problemas tipo Dirichlet.

Ejemplo

El problema

$$(PL)\left\{\begin{array}{rcl} -u''(x) & = & \phi(x) \\ u(a)=u(b) & = & 0 \end{array}\right. \qquad x\in(a,b)$$

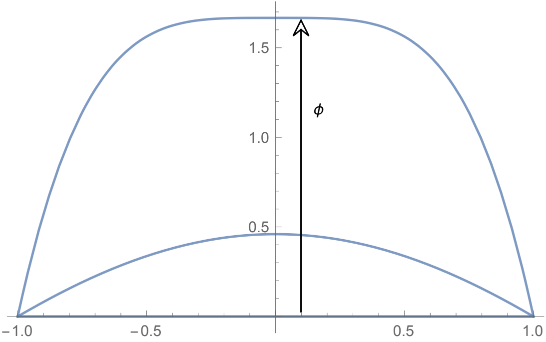
puede reformularse como

$$u(x)=\int_{[a,b]} k(x,y)\phi(y)\,dy=[K\phi](x),$$

donde

$$k(x,y)=\left\{\begin{array}{lll} \dfrac{x-a}{b-a}(b-y)-(x-y) & \text{si} & a\leq y\leq x\leq b \\ \dfrac{x-a}{b-a}(b-y) & \text{si} & a\leq x<y\leq b \end{array}\right.$$

Por tanto, el operador $K : L^2((a,b)) \to L^2((a,b))$ es lineal, compacto y autoadjunto.



Ejemplo

El problema ampliado

$$(P)\left\{\begin{array}{rcl} -u''(x) & = & \phi(x,u(x)) \\ u(a)=u(b) & = & 0 \end{array}\right. \qquad x\in(a,b)$$

puede reformularse como

$$u(x)=\int_{[a,b]} k(x,y)\phi(y)\,dy=[T\phi](x),$$

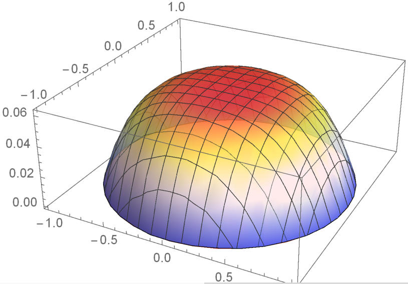
donde $T=K\circ N$ y $[Nu](x)=\phi(x,u(x))$. Por tanto, (P) equivale a buscar puntos fijos del operador T.

Ejemplo

De forma general, el problema

$$(P)\begin{cases} -\Delta u = \phi(x, u(x)) & x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n \\ u = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

puede plantearse en términos de búsqueda de puntos fijos.



Contenidos

Una extensión de los resultados anteriores a un ambiente más general viene dado por el teorema del punto fijo de Banach.

Teorema [Punto fijo de Banach]
Sea X una espacio métrico completo y $f : X \to X$ una aplicación contractiva. Entonces f tiene un único punto fijo $\overline{x} \in X$.

Por construcción, la cota

$$d(x_n, \overline{x}) \leq \frac{\lambda^n}{1-\lambda} d(f(x_0), x_0)$$

permite acotar iterativamente la región donde se encuentra el punto fijo.

Una extensión de los resultados anteriores a un ambiente más general viene dado por el teorema del punto fijo de Banach.

Teorema [Punto fijo de Banach]
Sea X una espacio métrico completo y $f : X \to X$ una aplicación contractiva. Entonces f tiene un único punto fijo $\overline{x} \in X$.

Por construcción, la cota

$$d(x_n, \overline{x}) \leq \frac{\lambda^n}{1-\lambda} d(f(x_0), x_0)$$

permite acotar iterativamente la región donde se encuentra el punto fijo.

Una extensión de los resultados anteriores a un ambiente más general viene dado por el teorema del punto fijo de Banach.

Teorema [Punto fijo de Banach]

Sea X una espacio métrico completo y $f : X \to X$ una aplicación contractiva. Entonces f tiene un único punto fijo $\overline{x} \in X$.

Por construcción, la cota

$$d(x_n, \overline{x}) \leq \frac{\lambda^n}{1-\lambda} d(f(x_0), x_0)$$

permite acotar iterativamente la región donde se encuentra el punto fijo.

Corolarios

- Sea X un espacio métrico completo y $f : X \to X$. Si f^n es contractiva para algún $n \in \mathbb{N}$, entonces f tiene un único punto fijo.
- Sea X un espacio métrico completo e Y un espacio topológico. Dada $f : X \times Y \to X$ aplicación continua que sea una retracción en X uniformemente en Y; i.e.,

$$d(f(x_1, y), f(x_2, y)) \leq \lambda d(x_1, x_2), \quad \forall x_1, x_2 \in X, \forall y \in Y, \lambda < 1.$$

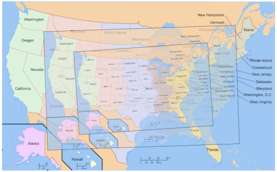
  Se tiene que para todo $y \in Y$ fijo, la aplicación $x \mapsto f(x, y)$ tiene un único punto fijo, $\varphi(y)$, siendo $y \mapsto \varphi(y)$ continua de Y en X.

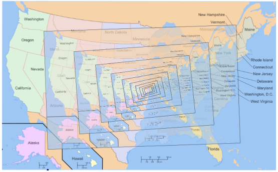
Corolarios

- Sea X un espacio métrico completo y $f : X \to X$. Si f^n es contractiva para algún $n \in \mathbb{N}$, entonces f tiene un único punto fijo.
- Sea X un espacio métrico completo e Y un espacio topológico. Dada $f : X \times Y \to X$ aplicación continua que sea una retracción en X uniformemente en Y; i.e.,

  $$d(f(x_1, y), f(x_2, y)) \leq \lambda d(x_1, x_2), \quad \forall x_1, x_2 \in X, \forall y \in Y, \lambda < 1.$$

  Se tiene que para todo $y \in Y$ fijo, la aplicación $x \mapsto f(x, y)$ tiene un único punto fijo, $\varphi(y)$, siendo $y \mapsto \varphi(y)$ continua de Y en X.

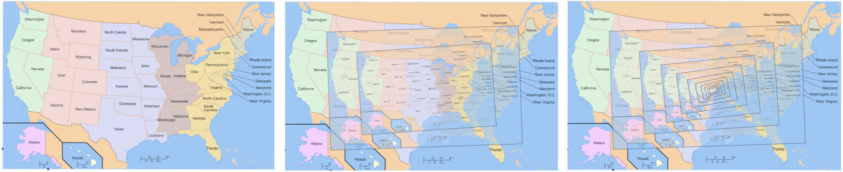




En un ambiente en el que sean aplicables el teoerma de Schaefer y el del punto fijo de Banach, podemos usar el primero para deducir el segundo (junto a la compacidad de la aplicación contractiva). En efecto, el conjunto

$$F = \{x \in X : x = \lambda f(x) \text{ para algún } \lambda \in [0,1]\}$$

está acotado, pues sólo puede albergar a $x = 0$ y al único posible punto fijo de f.



En un ambiente en el que sean aplicables el teoerma de Schaefer y el del punto fijo de Banach, podemos usar el primero para deducir el segundo (junto a la compacidad de la aplicación contractiva). En efecto, el conjunto

$$F = \{x \in X : x = \lambda f(x) \text{ para algún } \lambda \in [0,1]\}$$

está acotado, pues sólo puede albergar a $x = 0$ y al único posible punto fijo de f.

Contenidos

Teorema de Picard

Sea $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ abierto y $f : U \to \mathbb{R}^N$ tal que $f(t,x)$ sea Lipchitz respecto a la variable x. Sea $(t_0, x_0) \in U$ entonces existe un intervalo $I_\delta = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ donde el problema de Cauchy:

$$(PC)\begin{cases} x'(t) & = & f(t,x(t)) \\ x(t_0) & = & x_0 \end{cases}$$

tiene solución única.

En el caso de espacios de Banach X, tenemos la siguiente extensión del resultado anterior.

Problema de Cauchy

Sea X espacio de Banach y $U \in \mathbb{R} \times X$ abierto y con $u_0 = (t_0, x_0) \in U$, $f : U \to X$ continua. Queremos encontrar $I \subset \mathbb{R}$ intervalo y una función diferenciable $x : I \to X$ tal que

$$(PC) \begin{cases} x'(t) & = & f(t, x(t)) \\ x(t_0) & = & x_0 \end{cases}$$

Relación con puntos fijos

x es solución del $(PC) \iff x$ satisface:

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(y, x(y))dy, \quad \forall t \in I.$$

Llamando F al operador definido por

$$F[x](t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(y, x(y))dy,$$

convertimos el problema original en la búsqueda de un punto fijo del operador F.

Teorema de solución local

Dadas las siguientes hipotesis:

1. f es continua.
2. $\|f(t,x_1) - f(t,x_2)\| \leq k(t)\|x_1 - x_2\|$ donde $k(t) \in [0,\infty]$ $\forall (t,x_1),(t,x_2) \in U$.
3. $k \in L^1[(t_0 - a, t_0 + a)]$ para algun $a > 0$
4. Existe $m > 0$ y $\overline{B}_{\mathbb{R}\times X}(u_0,s) \in U$ tal que:

$$\|f(t,x)\| \leq m \qquad \forall (t,x) \in \overline{B}_{\mathbb{R}\times X}(u_0,s)$$

Entonces el problema de Cauchy tiene solución única.

Este teorema generaliza el teorema de Picard. Si $X = \mathbb{R}^n$ y f es Lipchitziana:

- f es continua.
- $k(t) = L$ para todo $t \in I$, y por tanto $k \in L^1(I)$.
- $\overline{B}_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n}(u_0, s)$ es un compacto y por tanto f alcanza un máximo.

Este teorema generaliza el teorema de Picard. Si $X = \mathbb{R}^n$ y f es Lipchitziana:

- f es continua.
- $k(t) = L$ para todo $t \in I$, y por tanto $k \in L^1(I)$.
- $\overline{B}_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n}(u_0, s)$ es un compacto y por tanto f alcanza un máximo.

Este teorema generaliza el teorema de Picard. Si $X = \mathbb{R}^n$ y f es Lipchitziana:

- f es continua.
- $k(t) = L$ para todo $t \in I$, y por tanto $k \in L^1(I)$.
- $\overline{B}_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n}(u_0, s)$ es un compacto y por tanto f alcanza un máximo.

Ideas de la demostración:

- $F[x](t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(y, x(y))dy$.
- Sea $r = \min\{a, s\}$ y $\tau_0 = \min\{r, r/m\}$. Para $\tau < \tau_0$, tomamos el espacio métrico completo $Z = \overline{B}_C(x_0, r)$ donde $C = C(I_\tau, X)$.
- $F : Z \to Z$ está bien definida.
- Por inducción vemos que

$$\|F^n[z_1](t) - F^n[z_2](t)\| \leq \frac{1}{n!} \int_{t_0}^{t} k(y)dy \|z_1 - z_2\|$$

  y esto implica que: $\|F^n[z_1] - F^n[z_2]\| \leq \frac{1}{n!} \|k\|_{L^1(I_\tau)} \|z_1 - z_2\|$.
- Por lo tanto podemos encontrar $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n!} \|k\|_{L^1(I_\tau)} < 1$ y por lo tanto F^n contractiva.

Ideas de la demostración:

- $F[x](t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(y, x(y))dy$.
- Sea $r = \min\{a, s\}$ y $\tau_0 = \min\{r, r/m\}$. Para $\tau < \tau_0$, tomamos el espacio métrico completo $Z = \overline{B}_C(x_0, r)$ donde $C = C(I_\tau, X)$.
- $F : Z \to Z$ está bien definida.
- Por inducción vemos que

$$\|F^n[z_1](t) - F^n[z_2](t)\| \leq \frac{1}{n!} \int_{t_0}^{t} k(y)dy \|z_1 - z_2\|$$

  y esto implica que:$\|F^n[z_1] - F^n[z_2]\| \leq \frac{1}{n!}\|k\|_{L^1(I_\tau)}\|z_1 - z_2\|$.
- Por lo tanto podemos encontrar $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n!}\|k\|_{L^1(I_\tau)} < 1$ y por lo tanto F^n contractiva.

Ideas de la demostración:

- $F[x](t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(y, x(y))dy$.
- Sea $r = \min\{a, s\}$ y $\tau_0 = \min\{r, r/m\}$. Para $\tau < \tau_0$, tomamos el espacio métrico completo $Z = \overline{B}_C(x_0, r)$ donde $C = C(I_\tau, X)$.
- $F : Z \to Z$ está bien definida.
- Por inducción vemos que

$$\|F^n[z_1](t) - F^n[z_2](t)\| \leq \frac{1}{n!} \int_{t_0}^{t} k(y)dy \|z_1 - z_2\|$$

  y esto implica que: $\|F^n[z_1] - F^n[z_2]\| \leq \frac{1}{n!}\|k\|_{L^1(I_\tau)}\|z_1 - z_2\|$.
- Por lo tanto podemos encontrar $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n!}\|k\|_{L^1(I_\tau)} < 1$ y por lo tanto F^n contractiva.

Ideas de la demostración:

- $F[x](t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(y, x(y))dy$.
- Sea $r = \text{mín}\{a, s\}$ y $\tau_0 = \text{mín}\{r, r/m\}$. Para $\tau < \tau_0$, tomamos el espacio métrico completo $Z = \overline{B}_C(x_0, r)$ donde $C = C(I_\tau, X)$.
- $F : Z \to Z$ está bien definida.
- Por inducción vemos que

$$\|F^n[z_1](t) - F^n[z_2](t)\| \leq \frac{1}{n!} \int_{t_0}^{t} k(y)dy \|z_1 - z_2\|$$

  y esto implica que: $\|F^n[z_1] - F^n[z_2]\| \leq \frac{1}{n!} \|k\|_{L^1(I_\tau)} \|z_1 - z_2\|$.
- Por lo tanto podemos encontrar $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n!} \|k\|_{L^1(I_\tau)} < 1$ y por lo tanto F^n contractiva.

Ideas de la demostración:

- $F[x](t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(y, x(y))dy$.
- Sea $r = \text{mín}\{a, s\}$ y $\tau_0 = \text{mín}\{r, r/m\}$. Para $\tau < \tau_0$, tomamos el espacio métrico completo $Z = \overline{B}_C(x_0, r)$ donde $C = C(I_\tau, X)$.
- $F : Z \to Z$ está bien definida.
- Por inducción vemos que

$$\|F^n[z_1](t) - F^n[z_2](t)\| \leq \frac{1}{n!} \int_{t_0}^{t} k(y)dy \|z_1 - z_2\|$$

  y esto implica que:$\|F^n[z_1] - F^n[z_2]\| \leq \frac{1}{n!} \|k\|_{L^1(I_\tau)} \|z_1 - z_2\|$.
- Por lo tanto podemos encontrar $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n!}\|k\|_{L^1(I_\tau)} < 1$ y por lo tanto F^n contractiva.

En el contexto de dimensión infinita, algunos resultados clásicos no son generalizables de manera directa.

Teorema de Peano

Sea f continua y acotada en $[x_0, b] \times \mathbb{R}^n$ entonces el problema de Cauchy tiene al menos una solución.

De hecho, una caracterización de estos espacios viene dada a continuación.

Teorema de Godunov

Si el teorema de Peano se verifica en un espacio de Banach X, entonces X es finito-dimensional.

En el contexto de dimensión infinita, algunos resultados clásicos no son generalizables de manera directa.

Teorema de Peano

Sea f continua y acotada en $[x_0, b] \times \mathbb{R}^n$ entonces el problema de Cauchy tiene al menos una solución.

De hecho, una caracterización de estos espacios viene dada a continuación.

Teorema de Godunov

Si el teorema de Peano se verifica en un espacio de Banach X, entonces X es finito-dimensional.

Contenidos

Teorema de Dini

Sean X, Y, Z espacios de Banach, $U \subset X \times Y$ abierto, $u_0 = (x_0, y_0) \in U$ y $F : U \to Z$. Supongamos que:

1. F es continua y $F(u_0) = 0$.
2. $D_y F$ existe en U, es continua en u_0 y $D_y F(u_0)$ es invertible.

Entonces, existen $\alpha, \beta > 0$ para los que $\overline{B}_X(x_0, \alpha) \times \overline{B}_Y(x_0, \beta) \subset U$ y una única función continua

$$f : \overline{B}_X(x_0, \alpha) \to \overline{B}_Y(x_0, \beta)$$

tal que la relación $F(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = f(x)$ es válida $\forall (x, y) \in \overline{B}_X(x_0, \alpha) \times \overline{B}_Y(x_0, \beta)$.

Idea de la demostración

- $u_0 = (0, 0)$.
- $\phi(x, y) = y - [D_y F(0, 0)]^{-1} F(x, y) \ \forall \ (x, y) \in U$.
- $\|\phi(x, y_1) - \phi(x, y_2)\| \leq \dfrac{1}{2}\|y_1 - y_2\|$.
- $\|\phi(x, y)\| \leq \|\phi(x, 0)\| + \|\phi(x, y) - \phi(x, 0)\| \leq \beta$.
- $\phi : \overline{B}_X(0, \alpha) \times \overline{B}_Y(0, \beta) \to \overline{B}_Y(0, \beta)$ contractiva.

Subespacio invariante

Sea X un espacio de Banach y $T \in L(X)$.

¿Existe $M \subset X$ cerrado (no trivial) tal que $T(M) \subset M$?

En tal caso, decimos que M es un subespacio invariante para T.

Puntos fijos e invarianza

Subespacio hiperinvariante

Sea un espacio de Banach X. Sea M subespacio invariante para $T \in L(X)$. Decimos que M es hiperinvariante si es invariante para todo operador que conmuta con T.

Teorema de Lomonosov

Sea un espacio de Banach X y $T \in L(X)$ un operador no escalar (no múltiplo de la identidad) que conmuta con un operador compacto no nulo $S \in L(X)$. Entonces, T tiene un subespacio hiperinvariante.

Puntos fijos e invarianza

Subespacio hiperinvariante

Sea un espacio de Banach X. Sea M subespacio invariante para $T \in L(X)$. Decimos que M es hiperinvariante si es invariante para todo operador que conmuta con T.

Teorema de Lomonosov

Sea un espacio de Banach X y $T \in L(X)$ un operador no escalar (no múltiplo de la identidad) que conmuta con un operador compacto no nulo $S \in L(X)$. Entonces, T tiene un subespacio hiperinvariante.

Contenidos

- K_i el conjunto de estrategias posibles para el jugador i-ésimo.
- $K = K_1 \times \ldots \times K_n$
- Función de pérdidas $f_i : K \to \mathbb{R}$

Definición (Juego de suma cero)

Para cada jugador i, sea $f_i : K \to \mathbb{R}$ la función de pérdida del jugador i-ésimo. Se dice que el juego es de suma cero si

$$\sum_i f_i(x) = 0 \quad \forall x \in K$$

- K_i el conjunto de estrategias posibles para el jugador i-ésimo.
- $K = K_1 \times \ldots \times K_n$
- Función de pérdidas $f_i : K \to \mathbb{R}$

Definición (Juego de suma cero)

Para cada jugador i, sea $f_i : K \to \mathbb{R}$ la función de pérdida del jugador i-ésimo. Se dice que el juego es de suma cero si

$$\sum_i f_i(x) = 0 \quad \forall x \in K$$

Definición (Equilibrio de Nash)

Un equilibrio de Nash es una estrategia $\overline{x} \in K$ tal que

$$f_i(\overline{x}) \leq f_i(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_{i-1}, x_i, \overline{x}_{i+1}, \ldots, \overline{x}_n) \quad \forall x_i \in K_i, \quad \forall i = 1, \ldots, n$$

Definición (Función inferiormente semicontínua)

Sea Y un espacio topológico. Una función $f : Y \to (-\infty, \infty]$ es semicontínua inferiormente si $f^{-1}((\alpha, \infty])$ es abierto para cada $\alpha \in \mathbb{R}$.

Teorema [Ky Fan]

Sea X espacio localmente convexo y $K \subset X$ compacto convexo no vacío. Sea $\Phi : K \times K \to \mathbb{R}$ una aplicación tal que

(a) $\Phi(\cdot, y)$ es semicontínua inferior para cada $y \in K$.

(b) $\Phi(x, \cdot)$ es cóncava para cada $x \in K$.

Entonces, existe $x_0 \in K$ de modo que

$$\sup_{y \in K} \Phi(x_0, y) \leq \sup_{y \in K} \Phi(y, y)$$

Definición (Función inferiormente semicontínua)

Sea Y un espacio topológico. Una función $f : Y \to (-\infty, \infty]$ es semicontínua inferiormente si $f^{-1}((\alpha, \infty])$ es abierto para cada $\alpha \in \mathbb{R}$.

Teorema [Ky Fan]

Sea X espacio localmente convexo y $K \subset X$ compacto convexo no vacío. Sea $\Phi : K \times K \to \mathbb{R}$ una aplicación tal que

(a) $\Phi(\cdot, y)$ es semicontínua inferior para cada $y \in K$.

(b) $\Phi(x, \cdot)$ es cóncava para cada $x \in K$.

Entonces, existe $x_0 \in K$ de modo que

$$\sup_{y \in K} \Phi(x_0, y) \leq \sup_{y \in K} \Phi(y, y)$$

Definición (Función superiormente semicontínua)

Una función $f : K \to 2^K$ será superiormente semicontínua si para cada abierto $U \supset f(x)$, existe un entorno V de x tal que si $y \in V$, entonces $f(y) \subset U$.

Teorema [Kakutani–Ky Fan]

Sea X espacio localmente convexo y $K \subset X$ compacto convexo no vacío. Sea $f : K \to 2^K$ semicontínua superiormente, y tal que $f(x)$ es no vacío, convexo y cerrado para cada $x \in K$. Entonces f tiene un punto fijo $x \in K$.

Definición (Función superiormente semicontínua)

Una función $f : K \to 2^K$ será superiormente semicontínua si para cada abierto $U \supset f(x)$, existe un entorno V de x tal que si $y \in V$, entonces $f(y) \subset U$.

Teorema [Kakutani–Ky Fan]

Sea X espacio localmente convexo y $K \subset X$ compacto convexo no vacío. Sea $f : K \to 2^K$ semicontínua superiormente, y tal que $f(x)$ es no vacío, convexo y cerrado para cada $x \in K$. Entonces f tiene un punto fijo $x \in K$.

Teorema [Nash]

Dado $i = 1, \ldots, n$, sea X_i espacio localmente convexo y $K_i \subset X_i$ compacto convexo no vacío. Supongamos que la función de pérdida f_i es contínua en K, y que para cada x_j fijo, $j \neq i$,

$$f_i(x_1, \ldots, x_{i-1}, \cdot, x_{i+1}, \ldots, x_n) : K_i \rightarrow \mathbb{R}$$

es convexo. Entonces existe un equilibrio de Nash $\overline{x} \in K$.

Teorema [von Neumann]

Sea $K_1 \subset X_1$ y $K_2 \subset X_2$ como en el Teorema de Nash. Sea $\Psi : K_1 \times K_2 \to \mathbb{R}$ dado por

$$\Psi(x_1, x_2) := f_1(x_1, x_2) = -f_2(x_1, x_2)$$

tal que

(a) $\Psi(\cdot, x_2)$ es semicontínua inferiormente y convexa $\forall x_2 \in K_2$.

(b) $\Psi(x_1, \cdot)$ es semicontínua superiormente y cóncava $\forall x_1 \in K_1$.

Entonces, existe un equilibrio de Nash $(x_1, x_2) \in K_1 \times K_2$.

Teoremas de punto fijo y aplicaciones

Joan Carles Bastons (UB)
Víctor González (UM)
Jose Antonio Gutiérrez (UM)
Imanol Pérez (UPV/EHU)
Antonio Jesús Román (US)
Antonio Zarauz (UAL)

Dirigido por: Juan José Nieto
Escuela-Taller Análisis Funcional

2 de marzo de 2016