Principio de incertidumbre

Juan Carlos Cantero Guardeño
Juan Antonio Fernández Torvisco
José Carlos García Merino
Irene López Bailón
Joaquín Santos Barragán
Manuel Santos Gutiérrez

VI Escuela Taller de Análisis Funcional

2 de marzo de 2016

Contents

Contenidos

Introducción

Definición 1

Un operador S se dice simétrico si $\langle Sf, f\rangle = \langle f, Sf\rangle$, y un operador A se dice antisimétrico si $\langle Af, f\rangle = -\langle f, Af\rangle$.

Introducción

Definición 1

Un operador S se dice simétrico si $\langle Sf, f\rangle = \langle f, Sf\rangle$, y un operador A se dice antisimétrico si $\langle Af, f\rangle = -\langle f, Af\rangle$.

Se verifica:

$$\langle (AS - SA)f, f\rangle \leq \|Sf\|^2 + \|Af\|^2. \tag{1}$$

Introducción

Definición 1

Un operador S se dice simétrico si $\langle Sf, f\rangle = \langle f, Sf\rangle$, y un operador A se dice antisimétrico si $\langle Af, f\rangle = -\langle f, Af\rangle$.

Se verifica:

$$\langle (AS - SA)f, f\rangle \leq \|Sf\|^2 + \|Af\|^2. \tag{1}$$

En (1) obtenemos la igualdad si y sólo si $(A + S)f = 0$.

Introducción

Definición 1

Un operador S se dice simétrico si $\langle Sf, f\rangle = \langle f, Sf\rangle$, y un operador A se dice antisimétrico si $\langle Af, f\rangle = -\langle f, Af\rangle$.

Se verifica:

$$\langle (AS - SA)f, f\rangle \leq \|Sf\|^2 + \|Af\|^2. \tag{1}$$

En (1) obtenemos la igualdad si y sólo si $(A+S)f = 0$.
Cambiando A por $-A$, obtenemos:

$$-\langle (AS - SA)f, f\rangle = \langle ((-A)S - S(-A))f, f\rangle \leq \|Sf\|^2 + \|Af\|^2.$$

Introducción

Definición 1

Un operador S se dice simétrico si $\langle Sf, f\rangle = \langle f, Sf\rangle$, y un operador A se dice antisimétrico si $\langle Af, f\rangle = -\langle f, Af\rangle$.

Se verifica:

$$\langle (AS - SA)f, f\rangle \leq \|Sf\|^2 + \|Af\|^2. \tag{1}$$

En (1) obtenemos la igualdad si y sólo si $(A + S)f = 0$.
Cambiando A por $-A$, obtenemos:

$$-\langle (AS - SA)f, f\rangle = \langle ((-A)S - S(-A))f, f\rangle \leq \|Sf\|^2 + \|Af\|^2.$$

Cambiando ahora A por $\pm\lambda A$ y S por $\frac{1}{\lambda}S$, obtenemos:

Principio de incertidumbre

$$|\langle (AS - SA)f, f\rangle| \leq 2\|Sf\|\|Af\|.$$

Oscilador armónico (Heisenberg)

$Sf = xf$; $Af = f'$, S simétrico, A antisimétrico.

Oscilador armónico (Heisenberg)

$Sf = xf$; $Af = f'$, S simétrico, A antisimétrico.
Conmutador:

$$(AS - SA)f = \frac{d}{dx}(xf) - x\frac{d}{dx}f = f$$

Oscilador armónico (Heisenberg)

$Sf = xf$; $Af = f'$, S simétrico, A antisimétrico.
Conmutador:

$$(AS - SA)f = \frac{d}{dx}(xf) - x\frac{d}{dx}f = f$$

Principio de Incertidumbre de Heisenberg:

$$\|f\|_{L^2}^2 \leq 2\|f'\|_{L^2}\|xf\|_{L^2}$$

Oscilador armónico (Heisenberg)

$Sf = xf$; $Af = f'$, S simétrico, A antisimétrico.
Conmutador:

$$(AS - SA)f = \frac{d}{dx}(xf) - x\frac{d}{dx}f = f$$

Principio de Incertidumbre de Heisenberg:

$$\|f\|_{L^2}^2 \leq 2\|f'\|_{L^2}\|xf\|_{L^2}$$

$$(S + A)f = 0 \Leftrightarrow f(x) = ce^{-x^2/2}$$

Oscilador armónico (Heisenberg)

$Sf = xf$; $Af = f'$, S simétrico, A antisimétrico.
Conmutador:

$$(AS - SA)f = \frac{d}{dx}(xf) - x\frac{d}{dx}f = f$$

Principio de Incertidumbre de Heisenberg:

$$\|f\|_{L^2}^2 \leq 2\|f'\|_{L^2}\|xf\|_{L^2}$$

$$(S + A)f = 0 \Leftrightarrow f(x) = ce^{-x^2/2}$$

Oscilador Armónico:

$$(S - A)(S + A)f = -f'' + x^2 f - f = 0.$$

Potencial de Coulomb

$Sf = \frac{x}{|x|}f; Af = \bigtriangledown f$, S simétrico, A antisimétrico

Potencial de Coulomb

$Sf = \frac{x}{|x|}f; Af = \bigtriangledown f$, S simétrico, A antisimétrico
Conmutador:

$$(AS - SA)f = \frac{d-1}{|x|}f, (d \geq 2)$$

Potencial de Coulomb

$Sf = \frac{x}{|x|} f; Af = \bigtriangledown f$, S simétrico, A antisimétrico
Conmutador:

$$(AS - SA)f = \frac{d-1}{|x|} f, (d \geq 2)$$

$$\int \frac{d-1}{|x|} |f|^2 \leq 2 \left(\int |f|^2 \right)^{1/2} \left(\int |\bigtriangledown f|^2 \right)^{1/2}$$

Potencial de Coulomb

$Sf = \frac{x}{|x|}f; Af = \bigtriangledown f$, S simétrico, A antisimétrico
Conmutador:

$$(AS - SA)f = \frac{d-1}{|x|}f, (d \geq 2)$$

$$\int \frac{d-1}{|x|}|f|^2 \leq 2\left(\int |f|^2\right)^{1/2}\left(\int |\bigtriangledown f|^2\right)^{1/2}$$

$$(S + A)f = 0 \Leftrightarrow f(x) = ce^{-|x|}$$

Potencial de Coulomb

$Sf = \frac{x}{|x|}f$; $Af = \bigtriangledown f$, S simétrico, A antisimétrico
Conmutador:

$$(AS - SA)f = \frac{d-1}{|x|}f, (d \geq 2)$$

$$\int \frac{d-1}{|x|}|f|^2 \leq 2\left(\int |f|^2\right)^{1/2}\left(\int |\bigtriangledown f|^2\right)^{1/2}$$

$$(S+A)f = 0 \Leftrightarrow f(x) = ce^{-|x|}$$

Potencial de Coulomb:

$$(S-A)(S+A)f = -\bigtriangleup f - \frac{d-1}{|x|}f + f = 0$$

Desigualdad de Hardy

$$Sf = \frac{d-2}{2}\frac{x}{|x|^2}f; Af = \nabla f, (d \geq 3)$$

Desigualdad de Hardy

$$Sf = \frac{d-2}{2}\frac{x}{|x|^2}f; Af = \bigtriangledown f, (d \geq 3)$$

Conmutador:

$$(AS - SA)f = \frac{(d-2)^2}{2}\frac{1}{|x|^2}f$$

Desigualdad de Hardy

$$Sf = \frac{d-2}{2}\frac{x}{|x|^2}f; Af = \bigtriangledown f, (d \geq 3)$$

Conmutador:

$$(AS - SA)f = \frac{(d-2)^2}{2}\frac{1}{|x|^2}f$$

Desigualdad de Hardy:

$$\left(\int \frac{(d-2)^2}{2|x|^2}|f|^2\right)^{1/2} \leq \left(2\int |\bigtriangledown f|^2\right)^{1/2}$$

Desigualdad de Hardy

$$Sf = \frac{d-2}{2}\frac{x}{|x|^2}f; Af = \bigtriangledown f, (d \geq 3)$$

Conmutador:

$$(AS - SA)f = \frac{(d-2)^2}{2}\frac{1}{|x|^2}f$$

Desigualdad de Hardy:

$$\left(\int \frac{(d-2)^2}{2|x|^2}|f|^2\right)^{1/2} \leq \left(2\int |\bigtriangledown f|^2\right)^{1/2}$$

$$(S+A)f = 0 \Leftrightarrow f(x) = |x|^{1-\frac{d}{2}} \quad (\bigtriangledown f \notin L^2)$$

Desigualdad de Hardy

$$Sf = \frac{d-2}{2}\frac{x}{|x|^2}f; Af = \bigtriangledown f, (d \geq 3)$$

Conmutador:

$$(AS - SA)f = \frac{(d-2)^2}{2}\frac{1}{|x|^2}f$$

Desigualdad de Hardy:

$$\left(\int \frac{(d-2)^2}{2|x|^2}|f|^2\right)^{1/2} \leq \left(2\int |\bigtriangledown f|^2\right)^{1/2}$$

$$(S+A)f = 0 \Leftrightarrow f(x) = |x|^{1-\frac{d}{2}} \quad (\bigtriangledown f \notin L^2)$$

$$(S-A)(S+A)f = -\bigtriangleup f - \frac{(d-2)^2}{4|x|^2}f = 0$$

Contenidos

Transformada de Fourier

Se define la transformada de Fourier de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f \in L^1$ como

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-ix\xi) f(x) dx$$

con $\xi \in \mathbb{R}^n$.

(1) $\widehat{\nabla f}(\xi) = i\xi \widehat{f}(\xi)$

(2) (Plancherel) $\|f\|_{L^2} = \|\widehat{f}\|_{L^2}$

Heisenberg

$$\|f\|_{L^2}^2 \leq 2\|xf\|_{L^2}\|\xi\widehat{f}\|_{L^2}$$

" = " $\Leftrightarrow f = ce^{-x^2/2}$ (f gaussiana)

Contenidos

Principio de incertidumbre de Hardy

Teorema 1

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $\hat{f}$ su transformada de Fourier. Supongamos que

$$f(\cdot)exp(|\cdot|^2/\alpha^2) \in L^\infty(\mathbb{R}^n),$$

$$\hat{f}(\cdot)exp(|\cdot|^2/\beta^2) \in L^\infty(\mathbb{R}^n).$$

- Si $\alpha^2\beta^2 = 4$, entonces f es un múltiplo escalar de $\exp(-|\cdot|^2/\alpha^2)$.
- Si $\alpha^2\beta^2 < 4$, $f \equiv 0$.

Teorema de Cowling-Price

Teorema 2

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $\widehat{f}$ su transformada de Fourier. Supongamos que

$$f(\cdot)exp(|\cdot|^2/\alpha^2) \in L^2,$$

$$\widehat{f}(\cdot)exp(|\cdot|^2/\beta^2) \in L^2.$$

Si $\alpha^2\beta^2 \leq 4$, $f \equiv 0$.

Contenidos

Aplicación a la ecuación del calor

$$\begin{cases} u_t = \Delta u, \\ u(\cdot, t=0) = u_0 \end{cases}$$

Aplicación a la ecuación del calor

$$\begin{cases} u_t = \Delta u, \\ u(\cdot, t=0) = u_0 \end{cases}$$

Proposición 1

Sea $T > 0$. Si $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $u(x,T)$ decae gaussiano (i.e. $u(x,T) = O\left(e^{-|x|^2/\delta^2}\right)$. Entonces, si $\frac{1}{\sqrt{T}}\delta^2 < 4$, entonces

$$u_0 \equiv 0.$$

Proof.

Aplicamos la transformada de Fourier a la ecuación, Proof.

Aplicamos la transformada de Fourier a la ecuación,

$$\hat{u}_t(t,\xi) = -\xi^2\hat{u}(t,\xi) \Longrightarrow \hat{u}(t,\xi) = e^{-t|\xi|^2}\hat{u}_0(\xi)$$

Así, como $u_0(x)$ es integrable,

Proof.

Aplicamos la transformada de Fourier a la ecuación,

$$\hat{u}_t(t,\xi) = -\xi^2\hat{u}(t,\xi) \Longrightarrow \hat{u}(t,\xi) = e^{-t|\xi|^2}\hat{u}_0(\xi)$$

Así, como $u_0(x)$ es integrable,

$$\hat{u}(0,\xi) = \hat{u}_0(\xi) \in L^\infty$$

además,

Proof.

Aplicamos la transformada de Fourier a la ecuación,

$$\hat{u}_t(t,\xi) = -\xi^2\hat{u}(t,\xi) \Longrightarrow \hat{u}(t,\xi) = e^{-t|\xi|^2}\hat{u}_0(\xi)$$

Así, como $u_0(x)$ es integrable,

$$\hat{u}(0,\xi) = \hat{u}_0(\xi) \in L^\infty$$

además,

$$\hat{u}(T,\xi) = e^{-T(\xi)^2}\hat{u}_0(\xi)$$

ahora estamos en condiciones de aplicar Hardy, $\alpha = \delta$ y $\beta^2 = 1/T$. $\square$

De manera análoga, usando el principio de incertidumbre de Hardy en su versión L^2:

De manera análoga, usando el principio de incertidumbre de Hardy en su versión L^2:

Proposición 2

Si $u_0 \in L^2$ y $e^{\frac{|x|^2}{\delta^2}} u(T,x) \in L^2$ y $\delta \leq \sqrt{4T}$, entonces,

$$u_0 \equiv 0.$$

Podemos concluir resultados parecidos para la ecuación de Schrödinger:

$$\begin{cases} u_t = i\Delta u \\ u(\cdot, t=0) = u_0 \end{cases}$$

Podemos concluir resultados parecidos para la ecuación de Schrödinger:

$$\begin{cases} u_t = i\Delta u \\ u(\cdot, t = 0) = u_0 \end{cases}$$

Análogamente, si escogemos α y β adecuados, y ocurre que

Podemos concluir resultados parecidos para la ecuación de Schrödinger:

$$\begin{cases} u_t = i\Delta u \\ u(\cdot, t=0) = u_0 \end{cases}$$

Análogamente, si escogemos α y β adecuados, y ocurre que

$$u_0 e^{\frac{|y|^2}{\alpha^2}} \in L^2,$$

$$u(T,x) e^{\frac{|y|^2}{\beta^2}} \in L^2;$$

entonces podemos aplicar el teorema de Hardy para concluir $u \equiv 0$.

Contenidos

Consideramos la siguiente variación de la ecuación del calor

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + Vu, \\ u(\cdot, t = 0) = u_0, \end{cases}$$

con $V \in L^\infty(\mathbb{R}^n \times [0, T])$.

Consideramos la siguiente variación de la ecuación del calor

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + V u, \\ u(\cdot, t = 0) = u_0, \end{cases}$$

con $V \in L^\infty(\mathbb{R}^n \times [0, T])$.

¿Qué podemos concluir en este caso?

Consideramos la siguiente variación de la ecuación del calor

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + V u, \\ u(\cdot, t = 0) = u_0, \end{cases}$$

con $V \in L^\infty(\mathbb{R}^n \times [0, T])$.

¿Qué podemos concluir en este caso?

Si intentamos procedemos análogamente al caso $V = 0$

Consideramos la siguiente variación de la ecuación del calor

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + Vu, \\ u(\cdot, t = 0) = u_0, \end{cases}$$

con $V \in L^\infty(\mathbb{R}^n \times [0, T])$.

¿Qué podemos concluir en este caso?

Si intentamos procedemos análogamente al caso $V = 0$

- No sabemos si V es analítico.

Consideramos la siguiente variación de la ecuación del calor

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + Vu, \\ u(\cdot, t = 0) = u_0, \end{cases}$$

con $V \in L^\infty(\mathbb{R}^n \times [0, T])$.

¿Qué podemos concluir en este caso?

Si intentamos procedemos análogamente al caso $V = 0$

- No sabemos si V es analítico.
- No podemos expresar $(Vu)\hat{}$ sólo en términos de $\hat{u}$.

Lema abstracto

Lema 1

Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{S}$ dos operadores antisimétrico y simétrico resp.

Lema abstracto

Lema 1

Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{S}$ dos operadores antisimétrico y simétrico resp. Sea ψ una solución de

$$\psi_t = (\mathcal{S} + \mathcal{A})\psi.$$

Lema abstracto

Lema 1

Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{S}$ dos operadores antisimétrico y simétrico resp.
Sea ψ una solución de

$$\psi_t = (\mathcal{S} + \mathcal{A})\psi.$$

Si $[\mathcal{S}, \mathcal{A}] = \mathcal{S}\mathcal{A} - \mathcal{A}\mathcal{S} \geq 0$, entonces la función

$$||\psi(t)||_{L^2}^2$$

es logarítmicamente convexa.

Prueba del lema (I)

- Denotamos $H(t) := ||\psi(t)||_{L^2}^2 = \langle \psi, \psi \rangle$.
- $\dot{H}(t) =$

Prueba del lema (I)

- Denotamos $H(t) := ||\psi(t)||_{L^2}^2 = \langle \psi, \psi \rangle$.
- $\dot{H}(t) = \langle \psi_t, \psi \rangle + \langle \psi, \psi_t \rangle =$

Prueba del lema (I)

- Denotamos $H(t) := ||\psi(t)||_{L^2}^2 = \langle \psi, \psi \rangle$.
- $\dot{H}(t) = \langle \psi_t, \psi \rangle + \langle \psi, \psi_t \rangle = \langle (\mathcal{S} + \mathcal{A})\psi, \psi \rangle + \langle (\psi, \mathcal{S} + \mathcal{A})\psi \rangle =$

Prueba del lema (I)

- Denotamos $H(t) := ||\psi(t)||_{L^2}^2 = \langle \psi, \psi \rangle$.
- $\dot{H}(t) = \langle \psi_t, \psi \rangle + \langle \psi, \psi_t \rangle = \langle (\mathcal{S} + \mathcal{A})\psi, \psi \rangle + \langle (\psi, \mathcal{S} + \mathcal{A})\psi \rangle = \langle (\mathcal{S} + \mathcal{A})\psi, \psi \rangle + \langle (\mathcal{S} - \mathcal{A})\psi, \psi \rangle = 2\langle \mathcal{S}\psi, \psi \rangle$

Prueba del lema (I)

- Denotamos $H(t) := ||\psi(t)||_{L^2}^2 = \langle \psi, \psi \rangle$.
- $\dot{H}(t) = \langle \psi_t, \psi \rangle + \langle \psi, \psi_t \rangle = \langle (\mathcal{S} + \mathcal{A})\psi, \psi \rangle + \langle (\psi, \mathcal{S} + \mathcal{A})\psi \rangle = \langle (\mathcal{S} + \mathcal{A})\psi, \psi \rangle + \langle (\mathcal{S} - \mathcal{A})\psi, \psi \rangle = 2\langle \mathcal{S}\psi, \psi \rangle$
- $\ddot{H}(t) = 2\langle \mathcal{S}\psi_t, \psi \rangle + 2\langle \mathcal{S}\psi, \psi_t \rangle = 2\langle (\mathcal{S} + \mathcal{A})\psi, \mathcal{S}\psi \rangle + 2\langle \mathcal{S}\psi, (\mathcal{S} + \mathcal{A})\psi \rangle = 4\langle \mathcal{S}\psi, \mathcal{S}\psi \rangle + 2\langle (\mathcal{S}\mathcal{A} - \mathcal{A}\mathcal{S})\psi, \psi \rangle$

Prueba del lema (II)

$$\text{Como} \begin{cases} H(t) = \langle \psi, \psi \rangle \\ \dot{H}(t) = 2\langle \mathcal{S}\psi, \psi \rangle \\ \ddot{H}(t) = 4\langle \mathcal{S}\psi, \mathcal{S}\psi \rangle + 2\langle (\mathcal{S}\mathcal{A} - \mathcal{A}\mathcal{S})\psi, \psi \rangle \end{cases}$$

$$(\log(H(t))\ddot{)} = \left(\frac{\dot{H}}{H}\right)^{\cdot} = \frac{\ddot{H}H - \dot{H}^2}{H^2} = \ldots =$$

$$= \frac{1}{\langle \psi, \psi \rangle}\left[4\left(||\mathcal{S}\psi||_{L^2}^2\,||\psi||_{L^2}^2 - \langle \mathcal{S}\psi, \psi \rangle^2\rangle\right) + 2\langle (\mathcal{S}\mathcal{A} - \mathcal{A}\mathcal{S})\psi, \psi \rangle\right]$$

$$\underbrace{\geq}_{C-S} 2\langle (\mathcal{S}\mathcal{A} - \mathcal{A}\mathcal{S})\psi, \psi \rangle \underbrace{\geq}_{[\mathcal{S},\mathcal{A}]\geq 0} 0 \Rightarrow \log H(t) \text{ es convexa.}$$

Consecuencia directa

Corolario 1

En la situación anterior, para $t \in (0,1)$,

$$H(t) \leq H(0)^{1-t} H(1)^t.$$

Consecuencia directa

Corolario 1

En la situación anterior, para $t \in (0,1)$,

$$H(t) \leq H(0)^{1-t} H(1)^t.$$

Proof.

Si $\log(H(t))$ es convexa,

$$\log(H(t)) \leq (1-t)\log H(t) + t \log H(1) = \log(H(t)^{1-t} H(1)^t) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow H(t) \leq H(0)^{1-t} H(1)^t.$$

$\square$

Aplicamos el lema (I)

Si u es solución de $u_t = \Delta u$ y consideramos $v(x) := u(x)e^{|x|^2/2}$, después de unos cálculos, podemos ver que

Aplicamos el lema (I)

Si u es solución de $u_t = \Delta u$ y consideramos $v(x) := u(x)e^{|x|^2/2}$, después de unos cálculos, podemos ver que

$$v_t = \ldots = (|x|^2 - 2x\nabla - 1 + \Delta)v.$$

Entonces, podemos escribir

$$v_t = (\mathcal{S} + \mathcal{A})v,$$

para $\begin{cases} \mathcal{S} = (\Delta + |x|^2), \\ \mathcal{A} = -(2x\nabla + 1). \end{cases}$

Aplicamos el lema (I)

Si u es solución de $u_t = \Delta u$ y consideramos $v(x) := u(x)e^{|x|^2/2}$, después de unos cálculos, podemos ver que

$$v_t = \ldots = (|x|^2 - 2x\nabla - 1 + \Delta)v.$$

Entonces, podemos escribir

$$v_t = (\mathcal{S} + \mathcal{A})v,$$

para $\begin{cases} \mathcal{S} = (\Delta + |x|^2), \\ \mathcal{A} = -(2x\nabla + 1). \end{cases} \quad \Rightarrow [\mathcal{S}, \mathcal{A}] = -4\Delta + 4\,|x|^2$

Aplicamos el lema (II)

Entonces,

$$\begin{aligned}\langle(\mathcal{SA}-\mathcal{AS})\psi,\psi\rangle &= -4\langle\Delta\psi,\psi\rangle + 4\langle x^2\psi,\psi\rangle = \\ &= 4\langle\nabla\psi,\nabla\psi\rangle + 4\langle x\psi,x\psi\rangle = \\ &= 4\left(||\nabla\psi||_{L^2}^2 + ||x\psi||_{L^2}^2\right) \geq \\ &\underbrace{\geq}_{\text{Heis.}} 4\,||\psi||_{L^2}^2 \geq 0 \Rightarrow [\mathcal{S},\mathcal{A}] \geq 0\end{aligned}$$

Aplicamos el lema (II)

Entonces,

$$\begin{aligned}\langle(\mathcal{S}\mathcal{A}-\mathcal{A}\mathcal{S})\psi,\psi\rangle &= -4\langle\Delta\psi,\psi\rangle+4\langle x^2\psi,\psi\rangle = \\ &= 4\langle\nabla\psi,\nabla\psi\rangle+4\langle x\psi,x\psi\rangle = \\ &= 4\left(||\nabla\psi||_{L^2}^2+||x\psi||_{L^2}^2\right)\geq \\ &\underbrace{\geq}_{\text{Heis.}} 4\,||\psi||_{L^2}^2\geq 0\Rightarrow[\mathcal{S},\mathcal{A}]\geq 0\end{aligned}$$

Por el lema anteriormente visto,

$$||\psi(t)||_{L^2}^2\leq\left(||\psi(0)||_{L^2}^2\right)^{1-t}\left(||\psi(1)||_{L^2}^2\right)^{t}\quad t\in(0,1).$$

Bibliography

L. Vega, *Mecánica cuántica, principio de incertidumbre, ecuación de Schrödinger, ecuación de Dirac* (notas de curso).

M. Cowling, L. Escauriaza, C. E. Kenig, G. Ponce y L. Vega, *The Hardy uncertainty principle revisited* (2010).

E. Stein y R. Shakarchi, *Complex analysis*, Princeton lect. in Analysis, cap. 4 (2007).

E. Stein y R. Shakarchi, *Fourier analysis*, Princeton lect. in Analysis (2007).

¡Muchas gracias!