Caracterización de Bases Greedy en Espacios de Banach

Pablo Manuel Berná Larrosa
pmanuel.berna@um.es
Universidad de Murcia

XII Encuentro de la Red de Análisis Funcional y Aplicaciones
Trabajo conjunto con Óscar Blasco de la Cruz

2-4 Marzo 2016
Cáceres

Algoritmo Greedy y Bases Greedy

Sección 1

Notación:

- $\mathbb{X}$ es un espacio de Banach real.

Notación:

- $\mathbb{X}$ es un espacio de Banach real.
- $\mathcal{B}$ es una base de Schauder en $\mathbb{X}$.

Notación:

- $\mathbb{X}$ es un espacio de Banach real.
- $\mathcal{B}$ es una base de Schauder en $\mathbb{X}$.
- $supp(x) = \{n \in \mathbb{N} : e_n^*(x) \neq 0\}$.

Notación:

- $\mathbb{X}$ es un espacio de Banach real.
- $\mathcal{B}$ es una base de Schauder en $\mathbb{X}$.
- $supp(x) = \{n \in \mathbb{N} : e_n^*(x) \neq 0\}$.
- Denotamos por $xy = 0$ a aquellos $x, y \in \mathbb{X}$ cuyos soportes son disjuntos.

Notación:

- $\mathbb{X}$ es un espacio de Banach real.
- $\mathcal{B}$ es una base de Schauder en $\mathbb{X}$.
- $supp(x) = \{n \in \mathbb{N} : e_n^*(x) \neq 0\}$.
- Denotamos por $xy = 0$ a aquellos $x, y \in \mathbb{X}$ cuyos soportes son disjuntos.
- $\|\tilde{x}\|_\infty = \sup\{|e_n^*(x)| : n \in supp(x)\}$.

Algoritmo Greedy

Sea $x = \sum_{i=1}^{\infty} e_i^*(x) e_i \in \mathbb{X}$. Consideramos la serie reordenadda

$$\sum_{j=1}^{\infty} e^*_{\rho(j)}(x) e_{\rho(j)},$$

donde ρ es **orden natural greedy**: $\rho : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ es inyectiva, $supp(x) \subset \rho(\mathbb{N})$ y tal que si $j < k$ entonces $|e^*_{\rho(j)}(x)| \geq |e^*_{\rho(k)}(x)|$ y $\rho(j) < \rho(k)$.

Algoritmo Greedy

Sea $x = \sum_{i=1}^{\infty} e_i^*(x) e_i \in \mathbb{X}$. Consideramos la serie reordenadda

$$\sum_{j=1}^{\infty} e^*_{\rho(j)}(x) e_{\rho(j)},$$

donde ρ es **orden natural greedy**: $\rho : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ es inyectiva, $supp(x) \subset \rho(\mathbb{N})$ y tal que si $j < k$ entonces $|e^*_{\rho(j)}(x)| \geq |e^*_{\rho(k)}(x)|$ y $\rho(j) < \rho(k)$.

La m-**th suma greedy** de x es

$$\mathcal{G}_m[\mathbb{X}, \mathcal{B}](x) := \mathcal{G}_m(x) = \sum_{j=1}^{m} e^*_{\rho(j)}(x) e_{\rho(j)},$$

y se conoce como **Algoritmo Greedy** a $\{\mathcal{G}_m\}_{m=1}^{\infty}$.

Bases Greedy

Optimalidad$\rightarrow \|x - \mathcal{G}_m(x)\| \approx \sigma_m(x).$

Bases Greedy

Optimalidad$\rightarrow \|x - \mathcal{G}_m(x)\| \approx \sigma_m(x)$.

Definimos

$$\sigma_m(x) := \underset{c_n, A}{inf} \{\|x - \sum_{n \in A} c_n e_n\| \ : \ |A| = m, \ c_n' s \text{ escalares}\}.$$

Bases Greedy

Optimalidad→ $\|x - \mathcal{G}_m(x)\| \approx \sigma_m(x)$.

Definimos

$$\sigma_m(x) := \inf_{c_n, A} \{\|x - \sum_{n \in A} c_n e_n\| \ : \ |A| = m, \ c_n's \text{ escalares}\}.$$

Definición

Una base $\mathcal{B}$ de un espacio de Banach $\mathbb{X}$ es una **base greedy** (ó base avariciosa) si existe una constante $C \geq 1$ tal que

$$\|x - \mathcal{G}_m(x)\| \leq C\sigma_m(x), \ \ \forall m \in \mathbb{N}, \ \ \forall x \in \mathbb{X}.$$

La constante más pequeña que satisface la desigualdad es la constante greedy y la denotamos por C_g.

Bases Greedy

Optimalidad$\rightarrow \|x - \mathcal{G}_m(x)\| \approx \sigma_m(x)$.

Definimos

$$\sigma_m(x) := \underset{c_n,A}{inf}\{\|x - \sum_{n\in A} c_n e_n\| \ :\ |A| = m,\ c_n' s \text{ escalares}\}.$$

Definición

Una base $\mathcal{B}$ de un espacio de Banach $\mathbb{X}$ es una **base greedy** (ó base avariciosa) si existe una constante $C \geq 1$ tal que

$$\sigma_m(x) \leq \|x - \mathcal{G}_m(x)\| \leq C\sigma_m(x),\ \ \forall m \in \mathbb{N},\ \ \forall x \in \mathbb{X}.$$

La constante más pequeña que satisface la desigualdad es la constante greedy y la denotamos por C_g.

Bases Greedy

Optimalidad$\rightarrow \|x - \mathcal{G}_m(x)\| \approx \sigma_m(x)$.

Definimos

$$\sigma_m(x) := \underset{c_n, A}{inf} \{\|x - \sum_{n \in A} c_n e_n\| \ : \ |A| = m, \ c_n's \text{ escalares}\}.$$

Definición

Una base $\mathcal{B}$ de un espacio de Banach $\mathbb{X}$ es una **base greedy** (ó base avariciosa) si existe una constante $C \geq 1$ tal que

$$\sigma_m(x) \leq \|x - \mathcal{G}_m(x)\| \leq C\sigma_m(x), \ \ \forall m \in \mathbb{N}, \ \ \forall x \in \mathbb{X}.$$

$$\|x - \mathcal{G}_m(x)\| \approx \sigma_m(x)$$

La constante más pequeña que satisface la desigualdad es la constante greedy y la denotamos por C_g.

Ejemplos

1. Sea $\mathbb{X} = \mathbb{H}$ un espacio de Hilbert y $\mathcal{B} = (e_n)_n$ una base ortonormal. Entonces $\mathcal{B}$ es greedy con constante $C_g = 1$, es decir,

$$\boxed{\|x - \mathcal{G}_m(x)\| = \sigma_m(x)\ \forall x \in \mathbb{H},\ \forall m \in \mathbb{N}}$$

Ejemplos

1. Sea $\mathbb{X} = \mathbb{H}$ un espacio de Hilbert y $\mathcal{B} = (e_n)_n$ una base ortonormal. Entonces $\mathcal{B}$ es greedy con constante $C_g = 1$, es decir,

$$\boxed{\|x - \mathcal{G}_m(x)\| = \sigma_m(x) \; \forall x \in \mathbb{H}, \; \forall m \in \mathbb{N}}$$

2. La base canónica en $X = \ell_p$, $1 \leq p < \infty$ es greedy con constante $C_g = 1$.

Ejemplos

1. Sea $\mathbb{X} = \mathbb{H}$ un espacio de Hilbert y $\mathcal{B} = (e_n)_n$ una base ortonormal. Entonces $\mathcal{B}$ es greedy con constante $C_g = 1$, es decir,

$$\boxed{\|x - \mathcal{G}_m(x)\| = \sigma_m(x)\ \forall x \in \mathbb{H},\ \forall m \in \mathbb{N}}$$

2. La base canónica en $X = \ell_p$, $1 \leq p < \infty$ es greedy con constante $C_g = 1$.
3. La base de Haar es base greedy en $L_p[0,1]$ con $1 < p < \infty$. (Temlyakov)

Ejemplos

1. Sea $\mathbb{X} = \mathbb{H}$ un espacio de Hilbert y $\mathcal{B} = (e_n)_n$ una base ortonormal. Entonces $\mathcal{B}$ es greedy con constante $C_g = 1$, es decir,

$$\boxed{\|x - \mathcal{G}_m(x)\| = \sigma_m(x)\ \forall x \in \mathbb{H},\ \forall m \in \mathbb{N}}$$

2. La base canónica en $X = \ell_p$, $1 \leq p < \infty$ es greedy con constante $C_g = 1$.
3. La base de Haar es base greedy en $L_p[0,1]$ con $1 < p < \infty$. (Temlyakov)
4. El sistema trigonométrico no es greedy en $L_p(\mathbb{T})$ con $p \neq 2$. (Temlyakov)

Bases democráticas e incondicionales

Definición

Diremos que una base $\mathcal{B}$ de un espacio de Banach $\mathbb{X}$ es **democrática** si existe $D \geq 1$ tal que para cualesquiera A, B finitos de mismo cardinal, se tiene que

$$D^{-1}\|\sum_{n\in B} e_n\| \leq \|\sum_{n\in A} e_n\| \leq D\|\sum_{n\in B} e_n\|.$$

Denotamos por C_D la constante de democracia.

Bases democráticas e incondicionales

Definición

Diremos que una base $\mathcal{B}$ de un espacio de Banach $\mathbb{X}$ es **democrática** si existe $D \geq 1$ tal que para cualesquiera A, B finitos de mismo cardinal, se tiene que

$$D^{-1}\|\sum_{n\in B} e_n\| \leq \|\sum_{n\in A} e_n\| \leq D\|\sum_{n\in B} e_n\|.$$

Denotamos por C_D la constante de democracia.

Definición

Una base $\mathcal{B}$ de un espacio de Banach $\mathbb{X}$ es **suppression unconditional** si existe una constante $K \geq 1$ tal que para todo $x \in \mathbb{X}$ y todo $A \subset \mathbb{N}$, se verifica

$$\|P_A(x)\| \leq K\|x\|, \quad P_A\left(\sum_{j=1}^{\infty} a_i e_i\right) = \sum_{j\in A} a_i e_i.$$

Denotamos por K_s a la constante de supresión-incondicional

Caracterización de las bases greedy

Teorema(Temlyakov, Konyagin; 1999)

Una base es greedy si y solo si es incondicional y democrática.

Caracterización de las bases greedy

Teorema(Temlyakov, Konyagin; 1999)

Una base es greedy si y solo si es incondicional y democrática.

Si la base es greedy con constante $C_g \Rightarrow$ es democrática con constante $C_D \leq C_g$ e incondicional con constante $K_s \leq C_g$.

Caracterización de las bases greedy

Teorema(Temlyakov, Konyagin; 1999)

Una base es greedy si y solo si es incondicional y democrática.

Si la base es greedy con constante $C_g \Rightarrow$ es democrática con constante $C_D \leq C_g$ e incondicional con constante $K_s \leq C_g$.

Si la base es democrática con constante C_D e incondicional con constante K_s, es greedy con constante $C_g \leq K_s + K_s^3 C_D$.

Caracterización de las bases greedy

Teorema(Temlyakov, Konyagin; 1999)

Una base es greedy si y solo si es incondicional y democrática.

Si la base es greedy con constante $C_g \Rightarrow$ es democrática con constante $C_D \leq C_g$ e incondicional con constante $K_s \leq C_g$.

Si la base es democrática con constante C_D e incondicional con constante K_s, es greedy con constante $C_g \leq K_s + K_s^3 C_D$.

¿Cómo puedo conseguir $C_g = 1$?

Propiedad (A)

Sección 2

Sea $x = (-1, \mathbf{-3}, 0, 0, \mathbf{3}, 0, \mathbf{-3}, 0, 1, ...)$.

Sea $x = (-1, \mathbf{-3}, 0, 0, \mathbf{3}, 0, \mathbf{-3}, 0, 1, ...)$.

Consideramos el vector $x_{\varepsilon,\theta} = (-1, 0, \mathbf{3}, 0, \mathbf{3}, \mathbf{-3}, 0, 0, 1, ...)$.

Sea $x = (-1, \mathbf{-3}, 0, 0, \mathbf{3}, 0, \mathbf{-3}, 0, 1, ...)$.

Consideramos el vector $x_{\varepsilon,\theta} = (-1, 0, \mathbf{3}, 0, \mathbf{3}, \mathbf{-3}, 0, 0, 1, ...)$.

Diremos que una base satisface la Propiedad (A) si

$$\|x\| = \|x_{\varepsilon,\theta}\|, \;\; \forall \varepsilon, \theta \text{ y } \forall x \in \mathbb{X}.$$

Sea $x = (-1, \mathbf{-3}, 0, 0, \mathbf{3}, 0, \mathbf{-3}, 0, 1, ...)$.

Consideramos el vector $x_{\varepsilon,\theta} = (-1, 0, \mathbf{3}, 0, \mathbf{3}, \mathbf{-3}, 0, 0, 1, ...)$.

Diremos que una base satisface la Propiedad (A) si

$$\|x\| = \|x_{\varepsilon,\theta}\|, \ \ \forall \varepsilon, \theta \text{ y } \forall x \in \mathbb{X}.$$

Teorema (Albiac y Wojtaszczyk; 2006)

Una base es greedy con constante $C_g = 1$ si y solo si es incondicional con $K_s = 1$ y satisface la Propiedad (A).

Definición

Una base $\mathcal{B}$ de un espacio de Banach $\mathbb{X}$ satisface la **Propiedad (A)** si

$$\|x + t\sum_{n\in A} \varepsilon_n e_n\| \leq C\|x + t\sum_{n\in B} \varepsilon'_n e_n\|,$$

para $x \in \mathbb{X}$, para todo par de conjuntos $|A| = |B|$, $A \cap B = \emptyset$, $supp(x) \cap (A \cup B) = \emptyset$, para cualesquiera colección de signos $\varepsilon, \varepsilon'$ y con $t = \max\{|e_n^*(x)| : n \in supp(x)\}$.
La constante más pequeña que satisface la desigualdad es C_A.

Definición

Una base $\mathcal{B}$ de un espacio de Banach $\mathbb{X}$ satisface la **Propiedad (A)** si

$$\|x + t\sum_{n\in A}\varepsilon_n e_n\| \leq C\|x + t\sum_{n\in B}\varepsilon'_n e_n\|,$$

para $x \in \mathbb{X}$, para todo par de conjuntos $|A| = |B|$, $A \cap B = \emptyset$, $supp(x) \cap (A \cup B) = \emptyset$, para cualesquiera colección de signos $\varepsilon, \varepsilon'$ y con $t = \max\{|e_n^*(x)| : n \in supp(x)\}$.
La constante más pequeña que satisface la desigualdad es C_A.

Teorema (Dilworth, Kutzarova, Odell, Schlumprecht; 2014)

Si $\mathcal{B}$ es greedy, entonces es incondicional con $K_s \leq C_g$ y satisface la Propiedad (A) con $C_A \leq C_g$.

Definición

Una base $\mathcal{B}$ de un espacio de Banach $\mathbb{X}$ satisface la **Propiedad (A)** si

$$\|x + t\sum_{n\in A}\varepsilon_n e_n\| \leq C\|x + t\sum_{n\in B}\varepsilon'_n e_n\|,$$

para $x \in \mathbb{X}$, para todo par de conjuntos $|A| = |B|$, $A \cap B = \emptyset$, $supp(x) \cap (A \cup B) = \emptyset$, para cualesquiera colección de signos $\varepsilon, \varepsilon'$ y con $t = \max\{|e_n^*(x)| : n \in supp(x)\}$.
La constante más pequeña que satisface la desigualdad es C_A.

Teorema (Dilworth, Kutzarova, Odell, Schlumprecht; 2014)

Si $\mathcal{B}$ es greedy, entonces es incondicional con $K_s \leq C_g$ y satisface la Propiedad (A) con $C_A \leq C_g$.
Si $\mathcal{B}$ satisface la Propiedad (A) con constante C_A y es incondicional con constante K_s, entonces la base es greedy con constante $C_g \leq K_s^2 C_A$.

Definición

Una base $\mathcal{B}$ de un espacio de Banach $\mathbb{X}$ satisface la **Propiedad (A)** si

$$\|x + \sum_{n\in A} \varepsilon_n e_n\| \leq C\|x + \sum_{n\in B} \varepsilon'_n e_n\|,$$

para $x \in \mathbb{X}$ con $\|\tilde{x}\|_\infty \leq 1$, para todo par de conjuntos $|A| = |B|$, $A \cap B = \emptyset$, $supp(x) \cap (A \cup B) = \emptyset$ y para cualesquiera colección de signos $\varepsilon, \varepsilon'$. La constante más pequeña que satisface la desigualdad es C_A.

Teorema (Dilworth, Kutzarova, Odell, Schlumprecht; 2014)

Si $\mathcal{B}$ es greedy, entonces es incondicional con $K_s \leq C_g$ y satisface la Propiedad (A) con $C_A \leq C_g$.
Si $\mathcal{B}$ satisface la Propiedad (A) con constante C_A y es incondicional con constante K_s, entonces la base es greedy con constante $C_g \leq K_s^2 C_A$.

Nueva Caracterización de las bases greedy

Sección 3

Definimos

$$\mathcal{D}_m(x) = inf\{\|x - \alpha \sum_{n\in A} e_n\| \ : \ \alpha \in \mathbb{R}, \ |A| = m\}.$$

$$\sigma_m(x) \leq \mathcal{D}_m(x)$$

Definimos

$$\mathcal{D}_m(x) = inf\{\|x - \alpha \sum_{n \in A} e_n\| \ : \ \alpha \in \mathbb{R}, \ |A| = m\}.$$

$$\sigma_m(x) \leq \mathcal{D}_m(x)$$

Supongamos que la base es greedy.

1. Definimos $y = x + \alpha \sum_{n \in A} e_n$, con $x \in \mathbb{X}$ y $A \subset supp(x)$.

Definimos

$$\mathcal{D}_m(x) = inf\{\|x - \alpha \sum_{n \in A} e_n\| \ : \ \alpha \in \mathbb{R}, \ |A| = m\}.$$

$$\sigma_m(x) \leq \mathcal{D}_m(x)$$

Supongamos que la base es greedy.

1. Definimos $y = x + \alpha \sum_{n \in A} e_n$, con $x \in \mathbb{X}$ y $A \subset supp(x)$.

$$y = \sum_{n \in A} (\alpha + e_n^*(x)) e_n + P_{A^c}(x),$$

Definimos

$$\mathcal{D}_m(x) = inf\{\|x - \alpha \sum_{n\in A} e_n\| \,:\, \alpha \in \mathbb{R},\ |A| = m\}.$$

$$\sigma_m(x) \leq \mathcal{D}_m(x)$$

Supongamos que la base es greedy.

1. Definimos $y = x + \alpha \sum_{n\in A} e_n$, con $x \in \mathbb{X}$ y $A \subset supp(x)$.

$$y = \sum_{n\in A} (\alpha + e_n^*(x))e_n + P_{A^c}(x),\ \mathcal{G}_m(y) = \sum_{n\in A} (\alpha + e_n^*(x))e_n,$$

Definimos

$$\mathcal{D}_m(x) = inf\{\|x - \alpha \sum_{n\in A} e_n\| \,:\, \alpha \in \mathbb{R},\ |A| = m\}.$$

$$\sigma_m(x) \leq \mathcal{D}_m(x)$$

Supongamos que la base es greedy.

1. Definimos $y = x + \alpha \sum_{n\in A} e_n$, con $x \in \mathbb{X}$ y $A \subset supp(x)$.

$$y = \sum_{n\in A}(\alpha + e_n^*(x))e_n + P_{A^c}(x),\ \mathcal{G}_m(y) = \sum_{n\in A}(\alpha + e_n^*(x))e_n,$$

$$\|P_{A^c}(x)\| = \|y - \mathcal{G}_m(y)\| \leq C_g \sigma_m(y)$$

Definimos

$$\mathcal{D}_m(x) = inf\{\|x - \alpha \sum_{n\in A} e_n\| \ : \ \alpha \in \mathbb{R}, \ |A| = m\}.$$

$$\sigma_m(x) \leq \mathcal{D}_m(x)$$

Supongamos que la base es greedy.

1. Definimos $y = x + \alpha \sum_{n\in A} e_n$, con $x \in \mathbb{X}$ y $A \subset supp(x)$.

$$y = \sum_{n\in A} (\alpha + e_n^*(x))e_n + P_{A^c}(x), \ \mathcal{G}_m(y) = \sum_{n\in A} (\alpha + e_n^*(x))e_n,$$

$$\|P_{A^c}(x)\| = \|y - \mathcal{G}_m(y)\| \leq C_g \sigma_m(y) \leq C_g \|y - \alpha \sum_{n\in A} e_n\| = C_g\|x\|.$$

Definimos

$$\mathcal{D}_m(x) = inf\{\|x - \alpha \sum_{n\in A} e_n\| \ : \ \alpha \in \mathbb{R}, \ |A| = m\}.$$

$$\sigma_m(x) \leq \mathcal{D}_m(x)$$

Supongamos que la base es greedy.

1. Definimos $y = x + \alpha \sum_{n\in A} e_n$, con $x \in \mathbb{X}$ y $A \subset supp(x)$.

$$y = \sum_{n\in A} (\alpha + e_n^*(x))e_n + P_{A^c}(x), \ \mathcal{G}_m(y) = \sum_{n\in A} (\alpha + e_n^*(x))e_n,$$

$$\|P_{A^c}(x)\| = \|y - \mathcal{G}_m(y)\| \leq C_g \sigma_m(y) \leq C_g \|y - \alpha \sum_{n\in A} e_n\| = C_g \|x\|.$$

2. Definimos $x = (1+\varepsilon) \sum_{n\in A\setminus B} e_n + \sum_{n\in B} e_n$.

Definición

Diremos que una base $\mathcal{B}$ satisface la **Propiedad (Q)** si

$$\|x+z\| \leq C\|x+y\|,$$

con $\max\{\|\tilde{x}\|_\infty, \|\tilde{z}\|_\infty\} \leq 1$, $xy=0$, $xz=0$, $yz=0$ e $y \in \Gamma_z$.

$$\Gamma_z := \{y \in \mathbb{X} : yz=0, |supp(z)| \leq |\{n : e_n^*(y)=1\}|\}$$

Definición

Diremos que una base $\mathcal{B}$ satisface la **Propiedad (Q)** si

$$\|x+z\| \leq C\|x+y\|,$$

con $\max\{\|\tilde{x}\|_\infty, \|\tilde{z}\|_\infty\} \leq 1$, $xy=0$, $xz=0$, $yz=0$ e $y \in \Gamma_z$.

$$\Gamma_z := \{y \in \mathbb{X} : yz = 0, |supp(z)| \leq |\{n : e_n^*(y) = 1\}|\}$$

Equivalencia

Propiedad (Q) si y solo si

$$\|x + \sum_{n\in A} e_n\| \leq C\|x+y+\sum_{n\in B} e_n\|,$$

con $|A| = |B|$, $A\cap B = \emptyset$, $xy=0$, $\|\tilde{x}\|_\infty \leq 1$ y $supp(x+y)\cap(A\cup B) = \emptyset$.

Definición

Diremos que una base $\mathcal{B}$ satisface la **Propiedad (Q)** si

$$\|x+z\| \leq C\|x+y\|,$$

con $\max\{\|\tilde{x}\|_\infty, \|\tilde{z}\|_\infty\} \leq 1$, $xy=0$, $xz=0$, $yz=0$ e $y \in \Gamma_z$.

$$\Gamma_z := \{y \in \mathbb{X} : yz = 0, |supp(z)| \leq |\{n : e_n^*(y) = 1\}|\}$$

Equivalencia

Propiedad (Q) si y solo si

$$\|x + \sum_{n\in A} e_n\| \leq C\|x+y+\sum_{n\in B} e_n\|,$$

con $|A| = |B|$, $A \cap B = \emptyset$, $xy=0$, $\|\tilde{x}\|_\infty \leq 1$ y $supp(x+y)\cap(A\cup B) = \emptyset$.

$$\Downarrow\Uparrow$$

Democracia e Incondicionalidad

Proposición (B., Blasco; 2015)

Sea $\mathbb{X}$ un espacio de Banach y $\mathcal{B}$ una base de Schauder de $\mathbb{X}$. Son equivalentes:

1. Existe $C > 0$ tal que
$$\|x - \mathcal{G}_m(x)\| \leq C\mathcal{D}_m(x),\ \forall x \in \mathbb{X},\ \forall m \in \mathbb{N}.$$
2. $\mathcal{B}$ satisface la Propiedad (Q).

Proposición (B., Blasco; 2015)

Sea $\mathbb{X}$ un espacio de Banach y $\mathcal{B}$ una base de Schauder de $\mathbb{X}$. Son equivalentes:

1. Existe $C > 0$ tal que
$$\|x - \mathcal{G}_m(x)\| \leq C\mathcal{D}_m(x),\ \forall x \in \mathbb{X},\ \forall m \in \mathbb{N}.$$
2. $\mathcal{B}$ satisface la Propiedad (Q).
3. $\mathcal{B}$ es base greedy.

Proposición (B., Blasco; 2015)

Sea $\mathbb{X}$ un espacio de Banach y $\mathcal{B}$ una base de Schauder de $\mathbb{X}$. Son equivalentes:

1. Existe $C > 0$ tal que
$$\|x - \mathcal{G}_m(x)\| \leq C\mathcal{D}_m(x),\ \forall x \in \mathbb{X},\ \forall m \in \mathbb{N}.$$
2. $\mathcal{B}$ satisface la Propiedad (Q).
3. $\mathcal{B}$ es base greedy.

Teorema (B., Blasco; 2015)

Si $\mathbb{X}$ es un espacio de Hilbert y $\mathcal{B}$ una base ortonormal. Entonces
$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \mathcal{D}_n(x) = \|x\|, \quad \forall x \in \mathbb{X}.$$

Nota: Si $\|x - \mathcal{G}_m(x)\| \leq C\mathcal{D}_m(x),\ \forall x \in \mathbb{X}, \forall m \in \mathbb{N}$, entonces la base es greedy con constante $C + C^4$.

Nota: Si $\|x-\mathcal{G}_m(x)\| \leq C\mathcal{D}_m(x),\ \forall x \in \mathbb{X}, \forall m \in \mathbb{N}$, entonces la base es greedy con constante $C + C^4$.

Para mejorar la constante, definimos el siguiente funcional

$$\mathcal{D}_m^*(x) = inf\{\|x - \alpha \sum_{n\in A} \varepsilon_n e_n\| \ :\ \alpha \in \mathbb{R},\ \varepsilon_n \in \{\pm 1\},\ |A| = m\}.$$

Nota: Si $\|x - \mathcal{G}_m(x)\| \leq C\mathcal{D}_m(x),\ \forall x \in \mathbb{X}, \forall m \in \mathbb{N}$, entonces la base es greedy con constante $C + C^4$.

Para mejorar la constante, definimos el siguiente funcional

$$\mathcal{D}_m^*(x) = inf\{\|x - \alpha \sum_{n \in A} \varepsilon_n e_n\| \,:\, \alpha \in \mathbb{R},\ \varepsilon_n \in \{\pm 1\},\ |A| = m\}.$$

Recordatorio

$\mathcal{D}_m(x) = inf\{\|x - \alpha \sum_{n \in A} e_n\| \,:\, \alpha \in \mathbb{R},\ |A| = m\}.$

Nota: Si $\|x - \mathcal{G}_m(x)\| \leq C\mathcal{D}_m(x), \; \forall x \in \mathbb{X}, \forall m \in \mathbb{N}$, entonces la base es greedy con constante $C + C^4$.

Para mejorar la constante, definimos el siguiente funcional

$$\mathcal{D}^*_m(x) = inf\{\|x - \alpha \sum_{n \in A} \varepsilon_n e_n\| \; : \; \alpha \in \mathbb{R}, \; \varepsilon_n \in \{\pm 1\}, \; |A| = m\}.$$

Recordatorio

$\mathcal{D}_m(x) = inf\{\|x - \alpha \sum_{n \in A} e_n\| \; : \; \alpha \in \mathbb{R}, \; |A| = m\}.$

La relación entre los funcionales es $\sigma_m(x) \leq \mathcal{D}^*_m(x) \leq \mathcal{D}_m(x)$.

Nota: Si $\|x - \mathcal{G}_m(x)\| \leq C\mathcal{D}_m(x),\ \forall x \in \mathbb{X}, \forall m \in \mathbb{N}$, entonces la base es greedy con constante $C + C^4$.

Para mejorar la constante, definimos el siguiente funcional

$$\mathcal{D}_m^*(x) = inf\{\|x - \alpha \sum_{n \in A} \varepsilon_n e_n\| \ :\ \alpha \in \mathbb{R},\ \varepsilon_n \in \{\pm 1\},\ |A| = m\}.$$

Recordatorio

$\mathcal{D}_m(x) = inf\{\|x - \alpha \sum_{n \in A} e_n\| \ :\ \alpha \in \mathbb{R},\ |A| = m\}$.

La relación entre los funcionales es $\sigma_m(x) \leq \mathcal{D}_m^*(x) \leq \mathcal{D}_m(x)$.

Teorema (B., Blasco; 2015)

Si $\mathbb{X}$ es un espacio de Hilbert y $\mathcal{B}$ una base ortonormal. Entonces

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \mathcal{D}_n^*(x) = \lim_{n \longrightarrow \infty} \mathcal{D}_n(x) = \|x\|, \quad \forall x \in \mathbb{X}.$$

Nota: Si $\|x - \mathcal{G}_m(x)\| \leq C\mathcal{D}_m(x),\ \forall x \in \mathbb{X}, \forall m \in \mathbb{N}$, entonces la base es greedy con constante $C + C^4$.

Para mejorar la constante, definimos el siguiente funcional

$$\mathcal{D}_m^*(x) = inf\{\|x - \alpha \sum_{n\in A} \varepsilon_n e_n\| \ :\ \alpha \in \mathbb{R},\ \varepsilon_n \in \{\pm 1\},\ |A| = m\}.$$

La relación entre los funcionales es $\sigma_m(x) \leq \mathcal{D}_m^*(x) \leq \mathcal{D}_m(x)$.

Nota: Si $\|x - \mathcal{G}_m(x)\| \leq C\mathcal{D}_m(x), \ \forall x \in \mathbb{X}, \forall m \in \mathbb{N}$, entonces la base es greedy con constante $C + C^4$.

Para mejorar la constante, definimos el siguiente funcional

$$\mathcal{D}_m^*(x) = inf\{\|x - \alpha \sum_{n \in A} \varepsilon_n e_n\| \ : \ \alpha \in \mathbb{R}, \ \varepsilon_n \in \{\pm 1\}, \ |A| = m\}.$$

La relación entre los funcionales es $\sigma_m(x) \leq \mathcal{D}_m^*(x) \leq \mathcal{D}_m(x)$.

Definición

Diremos que una base $\mathcal{B}$ satisface la **Propiedad (Q^*)** si

$$\|x + z\| \leq C\|x + y\|,$$

con $\max\{\|\tilde{x}\|_\infty, \|\tilde{z}\|_\infty\} \leq 1$, $xy = 0$, $xz = 0$, $yz = 0$ e $y \in \Gamma_z^*$.

$$\Gamma_z^* := \{y \in \mathbb{X} : yz = 0, |supp(z)| \leq |\{n : |e_n^*(y)| = 1\}|\}$$

Equivalencia

Propiedad (Q^*) si y solo si

$$\|x+\sum_{n\in A}\varepsilon_n e_n\| \leq C\|x+y+\sum_{n\in B}\varepsilon'_n e_n\|,$$

con $A\cap B=\emptyset$, $|A|=|B|$, $xy=0$, $\|\tilde{x}\|_\infty\leq 1$, $supp(x+y)\cap(A\cup B)=\emptyset$ y ε,ε' colecciones de signos cualesquiera.

Equivalencia

Propiedad (Q^*) si y solo si

$$\|x + \sum_{n \in A} \varepsilon_n e_n\| \leq C\|x + y + \sum_{n \in B} \varepsilon'_n e_n\|,$$

con $A \cap B = \emptyset$, $|A| = |B|$, $xy = 0$, $\|\tilde{x}\|_\infty \leq 1$, $supp(x+y) \cap (A \cup B) = \emptyset$ y $\varepsilon, \varepsilon'$ colecciones de signos cualesquiera.

Recordatorio

Propiedad (Q) si y solo si

$$\|x + \sum_{n \in A} e_n\| \leq C\|x + y + \sum_{n \in B} e_n\|,$$

con $|A| = |B|$, $A \cap B = \emptyset$, $xy = 0$, $\|\tilde{x}\|_\infty \leq 1$ y $supp(x+y) \cap (A \cup B) = \emptyset$.

Equivalencia

Propiedad (Q^*) si y solo si

$$\|x+\sum_{n\in A}\varepsilon_n e_n\| \leq C\|x+y+\sum_{n\in B}\varepsilon'_n e_n\|,$$

con $A\cap B=\emptyset$, $|A|=|B|$, $xy=0$, $\|\tilde{x}\|_\infty \leq 1$, $supp(x+y)\cap(A\cup B)=\emptyset$ y $\varepsilon, \varepsilon'$ colecciones de signos cualesquiera.

$$\Downarrow\Uparrow$$

Propiedad (A) e Incondicionalidad

Equivalencia

Propiedad (Q^*) si y solo si

$$\|x+\sum_{n\in A}\varepsilon_n e_n\| \leq C\|x+y+\sum_{n\in B}\varepsilon'_n e_n\|,$$

con $A\cap B=\emptyset$, $|A|=|B|$, $xy=0$, $\|\tilde{x}\|_\infty\leq 1$, $supp(x+y)\cap(A\cup B)=\emptyset$ y ε,ε' colecciones de signos cualesquiera.

$$\Downarrow\Uparrow$$

Propiedad (A) e Incondicionalidad

Teorema (B., Blasco; 2015)

Propiedad (Q) $\Leftrightarrow$ Propiedad (Q^*)

Teorema (B., Blasco; 2015)

Sea $\mathbb{X}$ un espacio de Banach y $\mathcal{B}$ una base de Schauder de $\mathbb{X}$. Son equivalentes:

1. Si existe $C > 0$ tal que
$$\|x - \mathcal{G}_m(x)\| \leq C\mathcal{D}_m^*(x),\ \forall x \in \mathbb{X},\ \forall m \in \mathbb{N},$$
entonces $\mathcal{B}$ satisface la Propiedad (Q^*) con constante C.
2. Si $\mathcal{B}$ satisface la Propiedad (Q^*) con constante C entonces
$$\|x - \mathcal{G}_m(x)\| \leq C^2\sigma_m(x),\ \forall x \in \mathbb{X},\ \forall m \in \mathbb{N}.$$
3. Si $\mathcal{B}$ es greedy con constante C, entonces
$$\|x - \mathcal{G}_m(x)\| \leq C\mathcal{D}_m^*(x),\ \forall x \in \mathbb{X},\ \forall m \in \mathbb{N}.$$

Corolario (B., Blasco; 2015)

1. $\mathcal{B}$ es greedy.
2. Existe $C \geq 1$ tal que
$$\|x - \mathcal{G}_m(x)\| \leq C\mathcal{D}_m^*(x),\ \forall x \in \mathbb{X},\ \forall m \in \mathbb{N}.$$
3. Existe $C \geq 1$ tal que
$$\|x - \mathcal{G}_m(x)\| \leq C\mathcal{D}_m(x),\ \forall x \in \mathbb{X},\ \forall m \in \mathbb{N}.$$
4. $\mathcal{B}$ satisface la Propiedad (Q).
5. $\mathcal{B}$ satisface la Propiedad (Q^*).
6. $\mathcal{B}$ es incondicional y democrática.

Referencias

F.Albiac, J.L. Ansorena, *Characterization of 1-almost greedy bases*, arXiv: 1506.03397v2 [math.FA] 17 Aug 2015.

F.Albiac, P.Wojtaszczyk, *Characterization of 1-greedy bases*, J. Approx. Theory, **138** (2006), no.1, 65-86.

P.M. Berná, Ó. Blasco, *Characterization of greedy bases in Banach spaces*. Submitted.

S.J. Dilworth, D. Kutzarova, E. Odell, T. Schlumprecht, A. Zsak, *Renorming spaces with greedy bases*, J. Approx. Theory **188** (2014), 39-56.

V.N.Temlyakov, *Greedy approximation*, Camdrige Monographs on Applied and Computional Mathematics, vol.20, Cambridge University Press, Cambridge, 2011.