# Índice numérico de un espacio de Banach

**Rafael Payá**

Universidad de Granada

**XII Encuentro de Análisis Funcional**
**Cáceres, 2 de marzo de 2016**

# Rango numérico y radio numérico

# Rango numérico y radio numérico

## Rango numérico

# Rango numérico y radio numérico

## Rango numérico

- Caso particular (Toeplitz, 1918):

$$H \text{ espacio de Hilbert, } T \in L(H)$$
$$V(T) = \big\{ (Tx \mid x) \ : \ x \in H, \ \|x\| = 1 \big\}.$$

# Rango numérico y radio numérico

## Rango numérico

- Caso particular (Toeplitz, 1918):

$$H \text{ espacio de Hilbert, } T \in L(H)$$
$$V(T) = \big\{ (Tx \mid x) \ : \ x \in H, \ \|x\| = 1 \big\}.$$

- Caso general (Lumer, 1961; Bauer, 1962):

$$X \text{ espacio de Banach, } T \in L(X)$$
$$V(T) = \big\{ x^*(Tx) : x \in X\,,\ x^* \in X^*,\ \|x\| = \|x^*\| = x^*(x) = 1 \big\}$$

# Rango numérico y radio numérico

## Rango numérico

- Caso particular (Toeplitz, 1918):

$$H \text{ espacio de Hilbert, } T \in L(H)$$
$$V(T) = \big\{ (Tx \mid x) \ : \ x \in H, \ \|x\| = 1 \big\}.$$

- Caso general (Lumer, 1961; Bauer, 1962):

$$X \text{ espacio de Banach, } T \in L(X)$$
$$V(T) = \Big\{ x^*(Tx) : x \in X\,,\ x^* \in X^*,\ \|x\| = \|x^*\| = x^*(x) = 1 \Big\}$$

## Radio numérico

# Rango numérico y radio numérico

## Rango numérico

- Caso particular (Toeplitz, 1918):

$$H \text{ espacio de Hilbert, } T \in L(H)$$
$$V(T) = \big\{ (Tx \mid x) \ : \ x \in H, \ \|x\| = 1 \big\}.$$

- Caso general (Lumer, 1961; Bauer, 1962):

$$X \text{ espacio de Banach, } T \in L(X)$$
$$V(T) = \big\{ x^*(Tx) : x \in X\,,\ x^* \in X^*,\ \|x\| = \|x^*\| = x^*(x) = 1 \big\}$$

## Radio numérico

- $v(T) = \sup \big\{ |\lambda| \ : \ \lambda \in V(T) \big\}$

# Rango numérico y radio numérico

## Rango numérico

- Caso particular (Toeplitz, 1918):

$$H \text{ espacio de Hilbert, } T \in L(H)$$
$$V(T) = \Big\{ (Tx \mid x) \ : \ x \in H, \ \|x\| = 1 \Big\}.$$

- Caso general (Lumer, 1961; Bauer, 1962):

$$X \text{ espacio de Banach, } T \in L(X)$$
$$V(T) = \Big\{ x^*(Tx) : x \in X\,, \ x^* \in X^*, \ \|x\| = \|x^*\| = x^*(x) = 1 \Big\}$$

## Radio numérico

- $v(T) = \sup \Big\{ |\lambda| \ : \ \lambda \in V(T) \Big\}$
- Seminorma en $L(X)$, con $\quad v(T) \leqslant \|T\| \quad$ para todo $T \in L(X)$

# Índice numérico

# Índice numérico

## Índice numérico (Lumer, 1968)

# Índice numérico

## Índice numérico (Lumer, 1968)

El índice numérico de un espacio de Banach $X$ es

$$\begin{aligned} n(X) &= \inf\left\{ v(T) \ : \ T \in L(X),\ \|T\| = 1 \right\} \\ &= \max\left\{ k \geqslant 0 \ : \ k\|T\| \leqslant v(T) \ \ \forall\, T \in L(X) \right\} \end{aligned}$$

# Índice numérico

## Índice numérico (Lumer, 1968)

El índice numérico de un espacio de Banach $X$ es

$$\begin{aligned} n(X) &= \inf \left\{ v(T) \ : \ T \in L(X),\ \|T\| = 1 \right\} \\ &= \max \left\{ k \geqslant 0 \ : \ k\|T\| \leqslant v(T) \ \ \forall\, T \in L(X) \right\} \end{aligned}$$

- $0 \leqslant n(X) \leqslant 1$

# Índice numérico

## Índice numérico (Lumer, 1968)

El índice numérico de un espacio de Banach $X$ es

$$\begin{aligned} n(X) &= \inf \left\{ v(T) \ : \ T \in L(X), \ \|T\| = 1 \right\} \\ &= \max \left\{ k \geqslant 0 \ : \ k\|T\| \leqslant v(T) \ \ \forall\, T \in L(X) \right\} \end{aligned}$$

- $0 \leqslant n(X) \leqslant 1$
- $n(X) > 0 \ \Leftrightarrow \ v$ es una norma equivalente a $\|\cdot\|$

# Índice numérico

## Índice numérico (Lumer, 1968)

El índice numérico de un espacio de Banach $X$ es

$$\begin{aligned} n(X) &= \inf \left\{ v(T) \ : \ T \in L(X),\ \|T\| = 1 \right\} \\ &= \max \left\{ k \geqslant 0 \ : \ k\|T\| \leqslant v(T) \ \ \forall\, T \in L(X) \right\} \end{aligned}$$

- $0 \leqslant n(X) \leqslant 1$
- $n(X) > 0 \ \Leftrightarrow\ v$ es una norma equivalente a $\|\cdot\|$
- $n(X) = 1 \ \Leftrightarrow\ v = \|\cdot\|$

# Índice numérico

## Índice numérico (Lumer, 1968)

El índice numérico de un espacio de Banach $X$ es

$$\begin{aligned} n(X) &= \inf \left\{ v(T) \ : \ T \in L(X), \ \|T\| = 1 \right\} \\ &= \max \left\{ k \geqslant 0 \ : \ k\|T\| \leqslant v(T) \ \ \forall \, T \in L(X) \right\} \end{aligned}$$

- $0 \leqslant n(X) \leqslant 1$
- $n(X) > 0 \ \Leftrightarrow \ v$ es una norma equivalente a $\|\cdot\|$
- $n(X) = 1 \ \Leftrightarrow \ v = \|\cdot\|$

## Un resultado básico

# Índice numérico

## Índice numérico (Lumer, 1968)

El índice numérico de un espacio de Banach $X$ es

$$\begin{aligned} n(X) &= \inf \left\{ v(T) \ : \ T \in L(X),\ \|T\| = 1 \right\} \\ &= \max \left\{ k \geqslant 0 \ : \ k\|T\| \leqslant v(T) \ \ \forall\, T \in L(X) \right\} \end{aligned}$$

- $0 \leqslant n(X) \leqslant 1$
- $n(X) > 0 \ \Leftrightarrow\ v$ es una norma equivalente a $\|\cdot\|$
- $n(X) = 1 \ \Leftrightarrow\ v = \|\cdot\|$

## Un resultado básico

- $X$ complejo $\Rightarrow$ $n(X) \geqslant 1/e$

  (Bohnenblust–Karlin, 1955; Glickfeld, 1970)

# Índice numérico

## Índice numérico (Lumer, 1968)

El índice numérico de un espacio de Banach $X$ es

$$\begin{aligned} n(X) &= \inf \left\{ v(T) \ : \ T \in L(X),\ \|T\| = 1 \right\} \\ &= \max \left\{ k \geqslant 0 \ : \ k\|T\| \leqslant v(T) \ \ \forall\, T \in L(X) \right\} \end{aligned}$$

- $0 \leqslant n(X) \leqslant 1$
- $n(X) > 0 \ \Leftrightarrow \ v$ es una norma equivalente a $\|\cdot\|$
- $n(X) = 1 \ \Leftrightarrow \ v = \|\cdot\|$

## Un resultado básico

- $X$ complejo $\Rightarrow \ n(X) \geqslant 1/e$

  (Bohnenblust–Karlin, 1955; Glickfeld, 1970)

- $\{n(X) \ : \ X \text{ complejo},\ \dim(X) = 2\} = [1/e, 1]$
  $\{n(X) \ : \ X \text{ real},\ \dim(X) = 2\} = [0, 1]$

  (Duncan–McGregor–Pryce–White, 1970)

# Ejemplos I

## Ejemplos

1. $H$ espacio de Hilbert con $\dim(H) > 1$:

$$\begin{array}{ll} n(H) = 0 & \text{si } H \text{ es real} \\ n(H) = 1/2 & \text{si } H \text{ es complejo} \end{array}$$

# Ejemplos I

## Ejemplos

1. $H$ espacio de Hilbert con $\dim(H) > 1$:

$$\begin{aligned} n(H) &= 0 && \text{si } H \text{ es real} \\ n(H) &= 1/2 && \text{si } H \text{ es complejo} \end{aligned}$$

2. $n\big(L_1(\mu)\big) = 1 = n\big(C(K)\big)$ (Duncan et al., 1970)

# Ejemplos I

## Ejemplos

1. $H$ espacio de Hilbert con $\dim(H) > 1$:

$$\begin{array}{ll} n(H) = 0 & \text{si } H \text{ es real} \\ n(H) = 1/2 & \text{si } H \text{ es complejo} \end{array}$$

2. $n\big(L_1(\mu)\big) = 1 = n\big(C(K)\big)$ (Duncan et al., 1970)
3. $X$ o $X^*$ $C^*$-álgebra no conmutativa $\Rightarrow$ $n(X) = 1/2$

   (Huruya, 1977; Kaidi–Morales–Rodríguez, 2000)

# Ejemplos I

## Ejemplos

1. $H$ espacio de Hilbert con $\dim(H) > 1$:
$$\begin{aligned} n(H) &= 0 && \text{si } H \text{ es real} \\ n(H) &= 1/2 && \text{si } H \text{ es complejo} \end{aligned}$$
2. $n\big(L_1(\mu)\big) = 1 = n\big(C(K)\big)$ (Duncan et al., 1970)
3. $X$ o $X^*$ $C^*$-álgebra no conmutativa $\Rightarrow$ $n(X) = 1/2$
(Huruya, 1977; Kaidi–Morales–Rodríguez, 2000)
4. $A$ álgebra de funciones $\Rightarrow$ $n(A) = 1$ (Werner, 1997)

# Ejemplos II

## Otros ejemplos

5. Para $n \geqslant 2$, sea $X_n = \mathbb{R}^2$ con la norma cuya bola unidad es un polígono regular con $2n$ lados. Entonces:

$$n(X_n) = \begin{cases} \operatorname{tg}\big(\pi/(2n)\big) & \text{si } n \text{ es par} \\ \operatorname{sen}\big(\pi/(2n)\big) & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases} \qquad \text{(Martín–Merí, 2007)}$$

# Ejemplos II

## Otros ejemplos

5. Para $n \geqslant 2$, sea $X_n = \mathbb{R}^2$ con la norma cuya bola unidad es un polígono regular con $2n$ lados. Entonces:

$$n(X_n) = \begin{cases} \operatorname{tg}\big(\pi/(2n)\big) & \text{si } n \text{ es par} \\ \operatorname{sen}\big(\pi/(2n)\big) & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$ (Martín–Merí, 2007)

6. $X \subset C[0,1]\,,\quad \dim\big(C[0,1]/X\big) < \infty \quad \Rightarrow \quad n(X) = 1$
(Boyko–Kadets–Martín–Werner, 2007)

# Ejemplos III

# Ejemplos III

**Sumas directas (Martín–P. 2000)**

# Ejemplos III

## Sumas directas (Martín–P. 2000)

$$n\Big([\oplus_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda]_{c_0}\Big) = n\Big([\oplus_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda]_{\ell_1}\Big) = n\Big([\oplus_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda]_{\ell_\infty}\Big) = \inf_\lambda n(X_\lambda)$$

# Ejemplos III

## Sumas directas (Martín–P. 2000)

$$n\Big([\oplus_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda]_{c_0}\Big) = n\Big([\oplus_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda]_{\ell_1}\Big) = n\Big([\oplus_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda]_{\ell_\infty}\Big) = \inf_\lambda n(X_\lambda)$$

## Consecuencias

# Ejemplos III

## Sumas directas (Martín–P. 2000)

$$n\Big([\oplus_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda]_{c_0}\Big) = n\Big([\oplus_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda]_{\ell_1}\Big) = n\Big([\oplus_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda]_{\ell_\infty}\Big) = \inf_\lambda n(X_\lambda)$$

## Consecuencias

- En el caso real, puede ocurrir que el radio numérico sea una norma no equivalente a la usual

# Ejemplos III

## Sumas directas (Martín–P. 2000)

$$n\Big([\oplus_{\lambda\in\Lambda}X_\lambda]_{c_0}\Big) = n\Big([\oplus_{\lambda\in\Lambda}X_\lambda]_{\ell_1}\Big) = n\Big([\oplus_{\lambda\in\Lambda}X_\lambda]_{\ell_\infty}\Big) = \inf_\lambda n(X_\lambda)$$

## Consecuencias

- En el caso real, puede ocurrir que el radio numérico sea una norma no equivalente a la usual
- Los espacios $c_0$ , $\ell_1$ , $\ell_\infty$ se pueden renormar para conseguir todos los valores posibles del índice numérico: $[0,1]$ $(\mathbb{R})$ o $[1/e,1]$ $(\mathbb{C})$

# Ejemplos III

## Sumas directas (Martín–P. 2000)

$$n\Big([\oplus_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda]_{c_0}\Big) = n\Big([\oplus_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda]_{\ell_1}\Big) = n\Big([\oplus_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda]_{\ell_\infty}\Big) = \inf_\lambda n(X_\lambda)$$

## Consecuencias

- En el caso real, puede ocurrir que el radio numérico sea una norma no equivalente a la usual
- Los espacios $c_0$, $\ell_1$, $\ell_\infty$ se pueden renormar para conseguir todos los valores posibles del índice numérico: $[0,1]$ ($\mathbb{R}$) o $[1/e,1]$ ($\mathbb{C}$)

## Problema

# Ejemplos III

## Sumas directas (Martín–P. 2000)

$$n\Big([\oplus_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda]_{c_0}\Big) = n\Big([\oplus_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda]_{\ell_1}\Big) = n\Big([\oplus_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda]_{\ell_\infty}\Big) = \inf_\lambda n(X_\lambda)$$

## Consecuencias

- En el caso real, puede ocurrir que el radio numérico sea una norma no equivalente a la usual
- Los espacios $c_0$ , $\ell_1$ , $\ell_\infty$ se pueden renormar para conseguir todos los valores posibles del índice numérico: $[0,1]$ ($\mathbb{R}$) o $[1/e,1]$ ($\mathbb{C}$)

## Problema

¿ $n\big(L_p(\mu)\big)$ ?

# Dualidad I

# Dualidad I

## Rango numérico del operador adjunto

# Dualidad I

## Rango numérico del operador adjunto

$X$ espacio de Banach, $T \in L(X)$, $T^* \in L(X^*)$ su adjunto:

$$T^*(x^*)(x) = x^*(Tx) \qquad \forall x^* \in X^*$$

# Dualidad I

## Rango numérico del operador adjunto

$X$ espacio de Banach, $T \in L(X)$, $T^* \in L(X^*)$ su adjunto:

$$T^*(x^*)(x) = x^*(Tx) \qquad \forall x^* \in X^*$$

- Se verifica que $V(T) \subset V(T^*) \subset \overline{V(T)}$

# Dualidad I

## Rango numérico del operador adjunto

$X$ espacio de Banach, $T \in L(X)$, $T^* \in L(X^*)$ su adjunto:

$$T^*(x^*)(x) = x^*(Tx) \qquad \forall x^* \in X^*$$

- Se verifica que $V(T) \subset V(T^*) \subset \overline{V(T)}$
- luego $v(T^*) = v(T)$

# Dualidad I

## Rango numérico del operador adjunto

$X$ espacio de Banach, $T \in L(X)$, $T^* \in L(X^*)$ su adjunto:

$$T^*(x^*)(x) = x^*(Tx) \qquad \forall x^* \in X^*$$

- Se verifica que $V(T) \subset V(T^*) \subset \overline{V(T)}$
- luego $v(T^*) = v(T)$
- Por tanto: $n(X^*) \leqslant n(X)$

# Dualidad I

## Rango numérico del operador adjunto

$X$ espacio de Banach, $T \in L(X)$, $T^* \in L(X^*)$ su adjunto:

$$T^*(x^*)(x) = x^*(Tx) \qquad \forall x^* \in X^*$$

- Se verifica que $V(T) \subset V(T^*) \subset \overline{V(T)}$
- luego $v(T^*) = v(T)$
- Por tanto: $n(X^*) \leqslant n(X)$

(Duncan–McGregor–Pryce–White, 1970)

# Dualidad I

## Rango numérico del operador adjunto

$X$ espacio de Banach, $T \in L(X)$, $T^* \in L(X^*)$ su adjunto:

$$T^*(x^*)(x) = x^*(Tx) \qquad \forall x^* \in X^*$$

- Se verifica que $V(T) \subset V(T^*) \subset \overline{V(T)}$
- luego $v(T^*) = v(T)$
- Por tanto: $n(X^*) \leqslant n(X)$

(Duncan–McGregor–Pryce–White, 1970)

¿Se da siempre la igualdad?

# Dualidad I

## Rango numérico del operador adjunto

$X$ espacio de Banach, $T \in L(X)$, $T^* \in L(X^*)$ su adjunto:

$$T^*(x^*)(x) = x^*(Tx) \qquad \forall x^* \in X^*$$

- Se verifica que $V(T) \subset V(T^*) \subset \overline{V(T)}$
- luego $v(T^*) = v(T)$
- Por tanto: $n(X^*) \leqslant n(X)$

(Duncan–McGregor–Pryce–White, 1970)

¿Se da siempre la igualdad?

## Respuesta negativa (Boyko–Kadets–Martín–Werner, 2007)

# Dualidad I

## Rango numérico del operador adjunto

$X$ espacio de Banach, $T \in L(X)$, $T^* \in L(X^*)$ su adjunto:

$$T^*(x^*)(x) = x^*(Tx) \qquad \forall x^* \in X^*$$

- Se verifica que $V(T) \subset V(T^*) \subset \overline{V(T)}$
- luego $v(T^*) = v(T)$
- Por tanto: $n(X^*) \leqslant n(X)$

(Duncan–McGregor–Pryce–White, 1970)

¿Se da siempre la igualdad?

## Respuesta negativa (Boyko–Kadets–Martín–Werner, 2007)

$$X = \left\{(x,y,z) \in c \oplus_\infty c \oplus_\infty c \ : \ \lim x + \lim y + \lim z = 0\right\}$$

# Dualidad I

## Rango numérico del operador adjunto

$X$ espacio de Banach, $T \in L(X)$, $T^* \in L(X^*)$ su adjunto:

$$T^*(x^*)(x) = x^*(Tx) \qquad \forall x^* \in X^*$$

- Se verifica que $V(T) \subset V(T^*) \subset \overline{V(T)}$
- luego $v(T^*) = v(T)$
- Por tanto: $n(X^*) \leqslant n(X)$

(Duncan–McGregor–Pryce–White, 1970)

¿Se da siempre la igualdad?

## Respuesta negativa (Boyko–Kadets–Martín–Werner, 2007)

$$X = \left\{(x,y,z) \in c \oplus_\infty c \oplus_\infty c \ : \ \lim x + \lim y + \lim z = 0\right\}$$

$$n(X) = 1 \quad \text{pero} \quad n(X^*) < 1$$

# Dualidad I

## Rango numérico del operador adjunto

$X$ espacio de Banach, $T \in L(X)$, $T^* \in L(X^*)$ su adjunto:

$$T^*(x^*)(x) = x^*(Tx) \qquad \forall x^* \in X^*$$

- Se verifica que $V(T) \subset V(T^*) \subset \overline{V(T)}$
- luego $v(T^*) = v(T)$
- Por tanto: $n(X^*) \leqslant n(X)$

(Duncan–McGregor–Pryce–White, 1970)

¿Se da siempre la igualdad?

## Respuesta negativa (Boyko–Kadets–Martín–Werner, 2007)

$$X = \Big\{(x,y,z) \in c \oplus_\infty c \oplus_\infty c \ : \ \lim x + \lim y + \lim z = 0\Big\}$$

$$n(X) = 1 \quad \text{pero} \quad n(X^*) < 1$$

Existe $Z \simeq c_0$ tal que $n(Z) = 1$ pero $n(Z^*) = 0$ $(\mathbb{R})$ o $n(Z^*) = 1/e$ $(\mathbb{C})$

# Dualidad II

# Dualidad II

## Algunos resultados positivos

# Dualidad II

## Algunos resultados positivos

La igualdad $n(X) = n(X^*)$ se verifica en los siguientes casos:

- $X$ es reflexivo (obvio)

# Dualidad II

## Algunos resultados positivos

La igualdad $n(X) = n(X^*)$ se verifica en los siguientes casos:

- $X$ es reflexivo (obvio)
- $X$ o $X^*$ es una $C^*$-álgebra

# Dualidad II

## Algunos resultados positivos

La igualdad $n(X) = n(X^*)$ se verifica en los siguientes casos:

- $X$ es reflexivo (obvio)
- $X$ o $X^*$ es una $C^*$-álgebra
- $X^{**} = X \oplus_1 Y$ (Martín–2009)

# Dualidad II

## Algunos resultados positivos

La igualdad $n(X) = n(X^*)$ se verifica en los siguientes casos:

- $X$ es reflexivo (obvio)
- $X$ o $X^*$ es una $C^*$-álgebra
- $X^{**} = X \oplus_1 Y$ (Martín–2009)
- $X$ tiene la RNP y $n(X) = 1$

# Dualidad II

## Algunos resultados positivos

La igualdad $n(X) = n(X^*)$ se verifica en los siguientes casos:

- $X$ es reflexivo (obvio)
- $X$ o $X^*$ es una $C^*$-álgebra
- $X^{**} = X \oplus_1 Y$ (Martín–2009)
- $X$ tiene la RNP y $n(X) = 1$

## Problema

# Dualidad II

## Algunos resultados positivos

La igualdad $n(X) = n(X^*)$ se verifica en los siguientes casos:

- $X$ es reflexivo (obvio)
- $X$ o $X^*$ es una $C^*$-álgebra
- $X^{**} = X \oplus_1 Y$ (Martín–2009)
- $X$ tiene la RNP y $n(X) = 1$

## Problema

- Encontrar condiciones (isomóficas) para asegurar que $n(X) = n(X^*)$

# Dualidad II

## Algunos resultados positivos

La igualdad $n(X) = n(X^*)$ se verifica en los siguientes casos:

- $X$ es reflexivo (obvio)
- $X$ o $X^*$ es una $C^*$-álgebra
- $X^{**} = X \oplus_1 Y$ (Martín–2009)
- $X$ tiene la RNP y $n(X) = 1$

## Problema

- Encontrar condiciones (isomóficas) para asegurar que $n(X) = n(X^*)$
- En particular: ¿ $X$ RNP $\Rightarrow$ $n(X) = n(X^*)$ ?

# Índices para normas equivalentes

# Índices para normas equivalentes

$$\dim(X) > 1, \quad \mathcal{N}(X) = \{n(Y) : Y \simeq X\}$$

# Índices para normas equivalentes

$$\dim(X) > 1, \quad \mathcal{N}(X) = \{n(Y) : Y \simeq X\}$$

## Finet–Martín–P. 2003

# Índices para normas equivalentes

$$\dim(X) > 1, \quad \mathcal{N}(X) = \{n(Y) : Y \simeq X\}$$

## Finet–Martín–P. 2003

- $0 \in \mathcal{N}(X)$ (caso real) y $1/e \in \mathcal{N}(X)$ (caso complejo)

# Índices para normas equivalentes

$$\dim(X) > 1, \quad \mathcal{N}(X) = \{n(Y) : Y \simeq X\}$$

**Finet–Martín–P. 2003**

- $0 \in \mathcal{N}(X)$ (caso real) y $1/e \in \mathcal{N}(X)$ (caso complejo)
- $\mathcal{N}(X)$ es un intervalo

# Índices para normas equivalentes

$$\dim(X) > 1, \quad \mathcal{N}(X) = \{n(Y) : Y \simeq X\}$$

**Finet–Martín–P. 2003**

- $0 \in \mathcal{N}(X)$ (caso real) y $1/e \in \mathcal{N}(X)$ (caso complejo)
- $\mathcal{N}(X)$ es un intervalo
- $\sup \mathcal{N}(X) \geqslant 1/3$ (caso real) y $\sup \mathcal{N}(X) \geqslant 1/2$ (caso complejo)

# Índices para normas equivalentes

$$\dim(X) > 1, \quad \mathcal{N}(X) = \{n(Y) : Y \simeq X\}$$

## Finet–Martín–P. 2003

- $0 \in \mathcal{N}(X)$ (caso real) y $1/e \in \mathcal{N}(X)$ (caso complejo)
- $\mathcal{N}(X)$ es un intervalo
- $\sup\mathcal{N}(X) \geqslant 1/3$ (caso real) y $\sup\mathcal{N}(X) \geqslant 1/2$ (caso complejo)
- Si $X$ admite un “sistema biortogonal largo”, entonces $\sup\mathcal{N}(X) = 1$

# Índices para normas equivalentes

$$\dim(X) > 1, \quad \mathcal{N}(X) = \{n(Y) : Y \simeq X\}$$

## Finet–Martín–P. 2003

- $0 \in \mathcal{N}(X)$ (caso real) y $1/e \in \mathcal{N}(X)$ (caso complejo)
- $\mathcal{N}(X)$ es un intervalo
- $\sup \mathcal{N}(X) \geqslant 1/3$ (caso real) y $\sup \mathcal{N}(X) \geqslant 1/2$ (caso complejo)
- Si $X$ admite un "sistema biortogonal largo", entonces $\sup \mathcal{N}(X) = 1$

## Problemas

# Índices para normas equivalentes

$$\dim(X) > 1, \quad \mathcal{N}(X) = \{n(Y) : Y \simeq X\}$$

## Finet–Martín–P. 2003

- $0 \in \mathcal{N}(X)$ (caso real) y $1/e \in \mathcal{N}(X)$ (caso complejo)
- $\mathcal{N}(X)$ es un intervalo
- $\sup \mathcal{N}(X) \geqslant 1/3$ (caso real) y $\sup \mathcal{N}(X) \geqslant 1/2$ (caso complejo)
- Si $X$ admite un "sistema biortogonal largo", entonces $\sup \mathcal{N}(X) = 1$

## Problemas

- ¿Se tiene siempre $\sup \mathcal{N}(X) = 1$?

# Índices para normas equivalentes

$$\dim(X) > 1, \quad \mathcal{N}(X) = \{n(Y) : Y \simeq X\}$$

## Finet–Martín–P. 2003

- $0 \in \mathcal{N}(X)$ (caso real) y $1/e \in \mathcal{N}(X)$ (caso complejo)
- $\mathcal{N}(X)$ es un intervalo
- $\sup \mathcal{N}(X) \geqslant 1/3$ (caso real) y $\sup \mathcal{N}(X) \geqslant 1/2$ (caso complejo)
- Si $X$ admite un “sistema biortogonal largo”, entonces $\sup \mathcal{N}(X) = 1$

## Problemas

- ¿Se tiene siempre $\sup \mathcal{N}(X) = 1$?
- Caracterizar los espacios de Banach $X$ tales que $1 \in \mathcal{N}(X)$

# Renormando con índice 1. Condiciones necesarias

# Renormando con índice 1. Condiciones necesarias

**López–Martín–P. 1999**

# Renormando con índice 1. Condiciones necesarias

**López–Martín–P. 1999**

- $X$ real, $\dim(X) = \infty$ y $n(X) = 1$. Entonces:

# Renormando con índice 1. Condiciones necesarias

## López–Martín–P. 1999

- $X$ real, $\dim(X) = \infty$ y $n(X) = 1$. Entonces:
  $X$ RNP $\Rightarrow$ $\ell_1 \hookrightarrow X$

# Renormando con índice 1. Condiciones necesarias

## López–Martín–P. 1999

- $X$ real, $\dim(X) = \infty$ y $n(X) = 1$. Entonces:

  $X$ RNP $\Rightarrow$ $\ell_1 \hookrightarrow X$

  $X^*$ RNP $\Rightarrow$ $\ell_1 \hookrightarrow X^*$

# Renormando con índice 1. Condiciones necesarias

## López–Martín–P. 1999

- $X$ real, $\dim(X) = \infty$ y $n(X) = 1$. Entonces:

  $X$ RNP $\Rightarrow$ $\ell_1 \hookrightarrow X$
  $X^*$ RNP $\Rightarrow$ $\ell_1 \hookrightarrow X^*$

- En particular: $X$ real, reflexivo, $\dim(X) = \infty \quad \Rightarrow \quad 1 \notin \mathcal{N}(X)$

# Renormando con índice 1. Condiciones necesarias

## López–Martín–P. 1999

- $X$ real, $\dim(X)=\infty$ y $n(X)=1$. Entonces:

  $X$ RNP $\Rightarrow$ $\ell_1 \hookrightarrow X$

  $X^*$ RNP $\Rightarrow$ $\ell_1 \hookrightarrow X^*$

- En particular: $X$ real, reflexivo, $\dim(X)=\infty \quad \Rightarrow \quad 1 \notin \mathcal{N}(X)$
- De hecho: $X$ real, $\dim(X)=\infty$, $1 \in \mathcal{N}(X) \quad \Rightarrow \quad X^{**}/X$ no es separable

# Renormando con índice 1. Condiciones necesarias

## López–Martín–P. 1999

- $X$ real, $\dim(X) = \infty$ y $n(X) = 1$. Entonces:
  $X$ RNP $\Rightarrow$ $\ell_1 \hookrightarrow X$
  $X^*$ RNP $\Rightarrow$ $\ell_1 \hookrightarrow X^*$
- En particular: $X$ real, reflexivo, $\dim(X) = \infty \ \Rightarrow \ 1 \notin \mathcal{N}(X)$
- De hecho: $X$ real, $\dim(X) = \infty$, $1 \in \mathcal{N}(X) \ \Rightarrow \ X^{**}/X$ no es separable

## Avilés–Kadets–Martín–Merí–Shepelska, 2010

# Renormando con índice 1. Condiciones necesarias

## López–Martín–P. 1999

- $X$ real, $\dim(X) = \infty$ y $n(X) = 1$. Entonces:
  $X$ RNP $\Rightarrow$ $\ell_1 \hookrightarrow X$
  $X^*$ RNP $\Rightarrow$ $\ell_1 \hookrightarrow X^*$
- En particular: $X$ real, reflexivo, $\dim(X) = \infty$ $\Rightarrow$ $1 \notin \mathcal{N}(X)$
- De hecho: $X$ real, $\dim(X) = \infty$, $1 \in \mathcal{N}(X)$ $\Rightarrow$ $X^{**}/X$ no es separable

## Avilés–Kadets–Martín–Merí–Shepelska, 2010

$$X \text{ real}, \quad \dim(X) = \infty, \quad n(X) = 1 \quad \Rightarrow \quad \ell_1 \hookrightarrow X^*$$

# Renormando con índice 1. Condiciones necesarias

## López–Martín–P. 1999

- $X$ real, $\dim(X) = \infty$ y $n(X) = 1$. Entonces:

  $X$ RNP $\Rightarrow$ $\ell_1 \hookrightarrow X$

  $X^*$ RNP $\Rightarrow$ $\ell_1 \hookrightarrow X^*$

- En particular: $X$ real, reflexivo, $\dim(X) = \infty \;\Rightarrow\; 1 \notin \mathcal{N}(X)$
- De hecho: $X$ real, $\dim(X) = \infty$, $1 \in \mathcal{N}(X) \;\Rightarrow\; X^{**}/X$ no es separable

## Avilés–Kadets–Martín–Merí–Shepelska, 2010

$$X \text{ real}, \quad \dim(X) = \infty, \quad n(X) = 1 \;\Rightarrow\; \ell_1 \hookrightarrow X^*$$

## Problema

# Renormando con índice 1. Condiciones necesarias

## López–Martín–P. 1999

- $X$ real, $\dim(X) = \infty$ y $n(X) = 1$. Entonces:

  $X$ RNP $\Rightarrow$ $\ell_1 \hookrightarrow X$

  $X^*$ RNP $\Rightarrow$ $\ell_1 \hookrightarrow X^*$
- En particular: $X$ real, reflexivo, $\dim(X) = \infty$ $\Rightarrow$ $1 \notin \mathcal{N}(X)$
- De hecho: $X$ real, $\dim(X) = \infty$, $1 \in \mathcal{N}(X)$ $\Rightarrow$ $X^{**}/X$ no es separable

## Avilés–Kadets–Martín–Merí–Shepelska, 2010

$$X \text{ real}, \quad \dim(X) = \infty, \quad n(X) = 1 \quad \Rightarrow \quad \ell_1 \hookrightarrow X^*$$

## Problema

- ¿Qué ocurre en el caso complejo?

# Renormando con índice 1. Condiciones necesarias

## López–Martín–P. 1999

- $X$ real, $\dim(X) = \infty$ y $n(X) = 1$. Entonces:

  $X$ RNP $\Rightarrow$ $\ell_1 \hookrightarrow X$

  $X^*$ RNP $\Rightarrow$ $\ell_1 \hookrightarrow X^*$

- En particular: $X$ real, reflexivo, $\dim(X) = \infty \Rightarrow 1 \notin \mathcal{N}(X)$
- De hecho: $X$ real, $\dim(X) = \infty$, $1 \in \mathcal{N}(X) \Rightarrow X^{**}/X$ no es separable

## Avilés–Kadets–Martín–Merí–Shepelska, 2010

$$X \text{ real}, \quad \dim(X) = \infty, \quad n(X) = 1 \quad \Rightarrow \quad \ell_1 \hookrightarrow X^*$$

## Problema

- ¿Qué ocurre en el caso complejo?
- En particular: ¿Existe $X$ complejo, reflexivo, $\dim(X) = \infty$ y $n(X) = 1$?

# Renormando con índice 1. Condición suficiente

# Renormando con índice 1. Condición suficiente

**Boyko–Kadets–Martín–Merí, 2009**

# Renormando con índice 1. Condición suficiente

**Boyko–Kadets–Martín–Merí, 2009**

$$X \ \text{separable}, \quad c_0 \hookrightarrow X \quad \Rightarrow \quad 1 \in \mathcal{N}(X)$$

# Renormando con índice 1. Condición suficiente

**Boyko–Kadets–Martín–Merí, 2009**

$$X \text{ separable}, \quad c_0 \hookrightarrow X \qquad \Rightarrow \qquad 1 \in \mathcal{N}(X)$$

V. Kadets, M. Martín, and R. Payá.
Recent progress and open questions on the numerical index of Banach spaces.
*RACSAM* Vol. 2000 (2006), pp. 155-182

**¡Muchas gracias por vuestra atención!**