Sobre la complejidad de subespacios de ℓ_p, $2 < p < \infty$

Wilson A. Cuéllar

Universidade de São Paulo

XII Encuentro de la Red de Análisis Funcional y Aplicaciones
Cáceres, Marzo 3 de 2016.

Introducción

Problema del espacio homogéneo (Gowers; Komorowski y Tomczak-Jaegermann)

Si un espacio de Banach X *tiene solo una clase de isomorfismo de subespacios de dimensión infinta, entonces* X *es isomorfo a* ℓ_2.

Introducción

Problema del espacio homogéneo (Gowers; Komorowski y Tomczak-Jaegermann)

Si un espacio de Banach X *tiene solo una clase de isomorfismo de subespacios de dimensión infinta, entonces* X *es isomorfo a* ℓ_2*.*

Problema (G. Godefroy)

Cuántos subespacios no isomorfos debe contener un espacio de Banach?

Introducción

Problema del espacio homogéneo (Gowers; Komorowski y Tomczak-Jaegermann)

Si un espacio de Banach X tiene solo una clase de isomorfismo de subespacios de dimensión infinta, entonces X es isomorfo a ℓ_2.

Problema (G. Godefroy)

Cuántos subespacios no isomorfos debe contener un espacio de Banach?

Cuántas clases de isomorfismo de subespacios de dimensión infinita tiene un espacio de Banach no Hilbert?

Introducción

Problema del espacio homogéneo (Gowers; Komorowski y Tomczak-Jaegermann)

Si un espacio de Banach X tiene solo una clase de isomorfismo de subespacios de dimensión infinta, entonces X es isomorfo a ℓ_2.

Problema (G. Godefroy)

Cuántos subespacios no isomorfos debe contener un espacio de Banach?

Cuántas clases de isomorfismo de subespacios de dimensión infinita tiene un espacio de Banach no Hilbert?

Investigar la complejidad de la relación de isomorfismo entre los subespacios de un dado espacio de Banach no isomorfo a ℓ_2.

Complejidad de relaciones de equivalencia

Sean $E \subseteq X^2$ y $F \subseteq Y^2$ dos relaciones de equivalencia analíticas en espacios polacos X e Y. Decimos que E es Borel reducible a F ($E \leq_B F$) se existe una función Borel medible $f : X \to Y$ tal que para todos $x, y \in X$

$$xEy \iff f(x)Ff(y).$$

Complejidad de relaciones de equivalencia

Sean $E \subseteq X^2$ y $F \subseteq Y^2$ dos relaciones de equivalencia analíticas en espacios polacos X e Y. Decimos que E es Borel reducible a F ($E \leq_B F$) se existe una función Borel medible $f : X \to Y$ tal que para todos $x, y \in X$

$$xEy \iff f(x)Ff(y).$$

Es un refinamiento del concepto de cardinalidad.

Complejidad de relaciones de equivalencia

Sean $E \subseteq X^2$ y $F \subseteq Y^2$ dos relaciones de equivalencia analíticas en espacios polacos X e Y. Decimos que E es Borel reducible a F ($E \leq_B F$) se existe una función Borel medible $f : X \to Y$ tal que para todos $x, y \in X$

$$xEy \iff f(x)Ff(y).$$

Es un refinamiento del concepto de cardinalidad.
Intuitivamente esto dice que los objetos en X son más simples de clasificar en relación a E que los objetos de Y en relación a F.

Complejidad de relaciones de equivalencia

Sean $E \subseteq X^2$ y $F \subseteq Y^2$ dos relaciones de equivalencia analíticas en espacios polacos X e Y. Decimos que E es Borel reducible a F ($E \leq_B F$) se existe una función Borel medible $f : X \to Y$ tal que para todos $x, y \in X$

$$xEy \iff f(x)Ff(y).$$

Es un refinamiento del concepto de cardinalidad.
Intuitivamente esto dice que los objetos en X son más simples de clasificar en relación a E que los objetos de Y en relación a F.

Una importante medida de complejidad es la relación E_0 definida en $2^{\mathbb{N}}$

$$xE_0y \iff \exists N \, \forall n > N, \; x(n) = y(n).$$

Espacios ergódicos

Definición (Ferenczi-Rosendal, 2005)

Un espacio de Banach separable X *es* *ergódico* *si la relación* E_0 *es Borel reducible a la relación de isomorfismo entre los subespacios de* X*.*

Espacios ergódicos

Definición (Ferenczi-Rosendal, 2005)

Un espacio de Banach separable X *es ergódico si la relación* E_0 *es Borel reducible a la relación de isomorfismo entre los subespacios de* X.

Observaciones

- *Un espacio ergódico debe contener* 2^ω *subespacios no isomorfos entre si.*

Espacios ergódicos

Definición (Ferenczi-Rosendal, 2005)

Un espacio de Banach separable X es ergódico si la relación E_0 es Borel reducible a la relación de isomorfismo entre los subespacios de X.

Observaciones

- *Un espacio ergódico debe contener 2^ω subespacios no isomorfos entre si.*
- *Si Y es un subespacio ergódico de X, entonces X es ergódico.*

Espacios ergódicos

Definición (Ferenczi-Rosendal, 2005)

Un espacio de Banach separable X es ergódico si la relación E_0 es Borel reducible a la relación de isomorfismo entre los subespacios de X.

Observaciones

- *Un espacio ergódico debe contener 2^ω subespacios no isomorfos entre si.*
- *Si Y es un subespacio ergódico de X, entonces X es ergódico.*
- *Rosendal Espacios hereditariamente indescomponibles (H.I) son ergódicos.*

Espacios ergódicos

Definición (Ferenczi-Rosendal, 2005)

Un espacio de Banach separable X es ergódico si la relación E_0 es Borel reducible a la relación de isomorfismo entre los subespacios de X.

Observaciones

- *Un espacio ergódico debe contener 2^ω subespacios no isomorfos entre si.*
- *Si Y es un subespacio ergódico de X, entonces X es ergódico.*
- *Rosendal Espacios hereditariamente indescomponibles (H.I) son ergódicos.*

Dicotomía de Gowers Todo espacio de Banach de dimensión infinita contiene un subespacio con una base incondicional o un subespacio H.I. de dimensión infinita.

Espacios ergódicos

Ferenczi-Rosendal, 2005 Si X es un espacio de Banach no ergódico con base incondicional, entonces X es isomorfo a:

- Sus Hiperplanos.
- X^2.
- $X \oplus Y$, donde Y es generado por una subsucesión de la base de X.

Espacios ergódicos

Ferenczi-Rosendal, 2005 Si X es un espacio de Banach no ergódico con base incondicional, entonces X es isomorfo a:

- Sus Hiperplanos.
- X^2.
- $X \oplus Y$, donde Y es generado por una subsucesión de la base de X.

Conjetura (Ferenczi-Rosendal, 2005) Todo espacio de Banach separable no isomorfo a ℓ_2 es ergódico.

Espacios ergódicos

Ferenczi-Rosendal, 2005 Si X es un espacio de Banach no ergódico con base incondicional, entonces X es isomorfo a:

- Sus Hiperplanos.
- X^2.
- $X \oplus Y$, donde Y es generado por una subsucesión de la base de X.

Conjetura (Ferenczi-Rosendal, 2005) Todo espacio de Banach separable no isomorfo a ℓ_2 es ergódico.

Anisca, 2009 Todo espacio de Banach weak Hilbert no isomorfo a ℓ_2 es ergódico.

Espacios ergódicos

Ferenczi-Rosendal, 2005 Si X es un espacio de Banach no ergódico con base incondicional, entonces X es isomorfo a:

- Sus Hiperplanos.
- X^2.
- $X \oplus Y$, donde Y es generado por una subsucesión de la base de X.

Conjetura (Ferenczi-Rosendal, 2005) Todo espacio de Banach separable no isomorfo a ℓ_2 es ergódico.

Anisca, 2009 Todo espacio de Banach weak Hilbert no isomorfo a ℓ_2 es ergódico.

Ferenczi-Galego, 2006 c_0 y ℓ_p $(1 \leq p < 2)$ son ergódicos.

Caso ℓ_p, $2 < p < \infty$

Johnson-Szankowski, 1976 Para cada $2 < p < \infty$, no existe un espacio de Banach separable que sea universal por complemento para la familia de todos los subespacios de ℓ_p.

Caso ℓ_p, $2 < p < \infty$

Johnson-Szankowski, 1976 Para cada $2 < p < \infty$, no existe un espacio de Banach separable que sea universal por complemento para la familia de todos los subespacios de ℓ_p.

En consecuencia, para cada $2 < p < \infty$, existe una colección no enumerable de subespacios de ℓ_p no isomorfos entre si.

Caso ℓ_p, $2 < p < \infty$

Johnson-Szankowski, 1976 Para cada $2 < p < \infty$, no existe un espacio de Banach separable que sea universal por complemento para la familia de todos los subespacios de ℓ_p.

En consecuencia, para cada $2 < p < \infty$, existe una colección no enumerable de subespacios de ℓ_p no isomorfos entre si.

A. M. Davie, 1973 Existen subespacios de ℓ_p, $2 < p < \infty$, que no tienen la propiedad de aproximación (A.P).

Caso ℓ_p, $2 < p < \infty$

Johnson-Szankowski, 1976 Para cada $2 < p < \infty$, no existe un espacio de Banach separable que sea universal por complemento para la familia de todos los subespacios de ℓ_p.

En consecuencia, para cada $2 < p < \infty$, existe una colección no enumerable de subespacios de ℓ_p no isomorfos entre si.

A. M. Davie, 1973 Existen subespacios de ℓ_p, $2 < p < \infty$, que no tienen la propiedad de aproximación (A.P).
Consideremos $2 < p < \infty$ fijo. La construcción es de la forma:

$$E_k = \operatorname{span}\{e_j^k \ : \ 1 \leq j \leq 2^k\} \subseteq \ell_p \ \ (k = 0, 1, 2, \dots)$$

$$E = \overline{\operatorname{span}}\{e_j^k \ : \ 1 \leq j \leq 2^k, \, k = 0, 1, 2, \dots\} = \bigoplus_k E_k.$$

Caso ℓ_p, $2 < p < \infty$

La demostración de Johnson-Szankowski se basa en 'cantorizar' la construcción de Davie. Para $\epsilon = 0, 1$ considere

$$J(k,\epsilon) = \{\epsilon 2^{k-1}+1, \epsilon 2^{k-1}+2, \dots (\epsilon+1)2^{k-1}\}$$

$$E_{k\epsilon} = \operatorname{span}\{e_j^k \,:\, j \in J(k,t(k)), k = 0,1,2,\dots\}.$$

Para cada $t = (t(n))_n \in 2^{\mathbb{N}}$ consideramos el subespacio X_t of ℓ_p

$$X_t = \overline{\operatorname{span}}\{e_j^k \,:\, j \in J(k,t(k)), k = 0,1,2,\dots\} = \bigoplus_k E_{kt(k)}.$$

ℓ_p, $(2 < p < \infty)$ es ergódico

Teorema (C.)

ℓ_p, $(2 < p < \infty)$ *es ergódico.*

ℓ_p, $(2 < p < \infty)$ es ergódico

Teorema (C.)

ℓ_p, $(2 < p < \infty)$ es ergódico.

Esquema de la demostración Definimos una relación de equivalencia E en $2^{\mathbb{N}}$ mediante

$$sEt \iff X_s \text{ es isomorfo a } X_t$$

ℓ_p, $(2 < p < \infty)$ es ergódico

Teorema (C.)

ℓ_p, $(2 < p < \infty)$ es ergódico.

Esquema de la demostración Definimos una relación de equivalencia E en $2^{\mathbb{N}}$ mediante

$$sEt \iff X_s \text{ es isomorfo a } X_t$$

Proposición No existe una familia no enumerable $\Gamma \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ tal que $\{ X_t,\, t \in \Gamma\}$ sean todos isomorfos entre si.

ℓ_p, $(2 < p < \infty)$ es ergódico

Teorema (C.)

ℓ_p, $(2 < p < \infty)$ *es ergódico.*

Esquema de la demostración Definimos una relación de equivalencia E en $2^{\mathbb{N}}$ mediante

$$sEt \iff X_s \text{ es isomorfo a } X_t$$

Proposición No existe una familia no enumerable $\Gamma \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ tal que $\{ X_t, t \in \Gamma\}$ sean todos isomorfos entre si.

Toda clase de equivalencia de E es enumerable. Por lo tanto, E es una clase de equivalencia magra en $2^{\mathbb{N}}$.

ℓ_p, $(2 < p < \infty)$ es ergódico

Teorema (C.)

ℓ_p, $(2 < p < \infty)$ es ergódico.

Esquema de la demostración Definimos una relación de equivalencia E en $2^{\mathbb{N}}$ mediante

$$sEt \iff X_s \text{ es isomorfo a } X_t$$

Proposición No existe una familia no enumerable $\Gamma \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ tal que $\{ X_t, t \in \Gamma\}$ sean todos isomorfos entre si.

Toda clase de equivalencia de E es enumerable. Por lo tanto, E es una clase de equivalencia magra en $2^{\mathbb{N}}$.

Teorema (Rosendal, 2004)

Sea E una clase de equivalencia magra en $2^{\mathbb{N}}$ conteniendo E_0'. Entonces $E_0 \leq_B E$.

Generalización

Sea X un espacio de Banach de dimensión infinita denotamos

$$q(X) = \inf\{q \,:\, X \text{ tiene cotipo q}\}$$

Generalización

Sea X un espacio de Banach de dimensión infinita denotamos

$$q(X) = \inf\{q : X \text{ tiene cotipo q}\}$$

Maurey y Pisier; Krivine Para todo espacio de Banach X, $\ell_{q(X)}$ es finitamente representable en X.

Generalización

Sea X un espacio de Banach de dimensión infinita denotamos

$$q(X) = \inf\{q : X \text{ tiene cotipo q}\}$$

Maurey y Pisier; Krivine Para todo espacio de Banach X, $\ell_{q(X)}$ es finitamente representable en X.

Teorema (C.)

Si X es un espacio de Banach tal que $2 < q(X) < \infty$, entonces X es ergódico.