MIDIENDO CONJUNTOS NO MEDIBLES Y ESPACIOS DE BANACH UNIVERSALES

ANTONIO AVILÉS

Empecemos con preguntas. Si alguna terminología no está clara, consúltense los apéndices.

1. ¿Existe una medida $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \longrightarrow [0, +\infty)$ definida sobre *todos* los subconjuntos de $\mathbb{R}$, que sea nula sobre los conjuntos finitos, pero no nula sobre los intervalos?

2. ¿Están todos los subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ en la σ-álgebra generada por los conjuntos de la forma $A \times B$, donde A y B son subconjuntos *arbitrarios* de $\mathbb{R}$?

3. ¿Todos los espacios de Banach de la cardinalidad del continuo son isométricos (o al menos isomorfos) a subespacios del espacio cociente ℓ_∞/c_0?

La respuesta a todas estas preguntas es que ni sí ni no, sino todo lo contrario. Ni la veracidad ni la falsedad de tales enunciados puede probarse partiendo de los axiomas usuales (ZFC). ¿Y se ha demostrado que no se puede demostrar? Bueno, ni sí ni no... Estudiaremos la relación que existe entre estas preguntas y trataremos de aclarar su estatus lógico.

Todas las matemáticas que habitualmente usamos pueden formalizarse en un único lenguaje y partiendo de un único sistema de axiomas. A estos axiomas estándar de las matemáticas se les conoce como los axiomas ZFC, por los matemáticos Zermelo y Fraenkel que los propusieron (la C es de *choice* por el axioma de elección), y expresan las propiedad básicas que los conjuntos deben cumplir, y que no se pueden deducir de otras propiedades más básicas. A modo de ilustración, uno de los axiomas del sistema es el axioma del conjunto potencia: Dado un conjunto x existe un conjunto $P(x)$ que llamamos las partes de x, de modo que los elementos de $P(x)$ son justamente los subconjuntos de x.

Cuando tenemos ante nosotros un enunciado matemático, estamos acostumbrados a plantearnos dos posibilidades: o es cierto o es falso. Si es cierto, tendremos que demostrar que es cierto (a partir de los axiomas), y si es falso, tendremos que demostrar que es falso (a partir de los axiomas). Sin embargo, también existe la posibilidad de que sea imposible hacer ninguna de las demostraciones. En este caso, el enunciado en cuestión no es ni verdadero ni falso, sino independiente de los axiomas.

El más famoso enunciado independiente, es la Hipótesis del Continuo, planteada por Cantor: Todo subconjunto infinito A de $\mathbb{R}$, o bien es numerable, o bien tiene la cardinalidad del continuo (ver apéndice sobre ccardinalidades). La pregunta de si esto era cierto o falso constituyó el primer problema de la famosa lista de Hilbert de 1900. Gödel demostró en 1940 que no se podía demostrar que fuese falso, y Cohen en 1963 que no se podía demostrar que fuese verdadero.

La Hipótesis del Continuo está relacionada con la Pregunta 3.

Teorema 1. *Si la Hipótesis del Continuo es cierta, entonces todo espacio de Banach de cardinalidad continuo es isométrico a un subespacio de ℓ_∞/c_0.*

De esto se deduce que la respuesta a la Pregunta 3 no puede ser "*No*". La demostración de este teorema requiere resultados de Parovichenko y varias herramientas de análisis funcional y teoría de conjuntos y no la discutiremos aquí. Vamos a entrar en detalle, en cambio, sobre por qué la respuesta a la Pregunta 3 tampoco puede ser "*Sí*".

La Pregunta 2 fue formulada por Ulam en 1938. Rothberger [9] demostró que la Hipótesis del Continuo implica que la respuesta a la Pregunta 2 es "*Sí*". En su tesis doctoral, Kunen [8] hizo notar que otros axiomas conocidos implican que la respuesta es "*No*". Así pues, el siguiente axioma es independiente de los axiomas de ZFC, no se puede demostrar ni su veracidad ni su falsedad:

Axioma 1. *Todos los subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ en la σ-álgebra generada por los conjuntos de la forma $A\times B$, donde A y B son subconjuntos* arbitrarios *de $\mathbb{R}$.*

Vamos a denotar por $\sigma^2(X)$ a la σ-álgebra de los subconjuntos de $X\times X$ generada por los subconjuntos de la forma $A\times B$ con $A,B\subset X$. Necesitaremos algunas observaciones sobre este tipo de σ-álgebras

Lema 2. *Si $f: X\longrightarrow Y$ es una función, entonces la función $f\times f: X\times X\longrightarrow Y\times Y$, dada por $(f\times f)(x_1,x_2) = (f(x_1),f(x_2))$, es $\sigma^2(X)$-$\sigma^2(Y)$-medible.*

Demostración. Se sigue de que $(f\times f)^{-1}(A\times B) = f^{-1}(A)\times f^{-1}(B)$. □

Lema 3. $\{(a,b)\in\mathbb{R}^2 : a<b\}\in\sigma^2(\mathbb{R})$

Demostración. $\{(a,b)\in\mathbb{R}^2 : a<b\}$ es la unión de todos los conjuntos de la forma $I_1\times I_2$ donde I_1 e I_2 son intervalos de extremos racionales con $max(I_1) < \min(I_2)$. □

Lema 4. *Si $A\subset\mathbb{R}$, entonces $A' = \{(a,a) : a\in A\}\in\sigma^2(\mathbb{R})$.*

Demostración. A' es la intersección de todos los conjuntos de la forma

$$(A\cap I_1)\times(A\cap I_1)\cup(A\cap I_2)\times(A\cap I_2)\cup\cdots\cup(A\cap I_n)\times(A\cap I_n)$$

donde $I_1,\ldots,I_n$ son intervalos con extremos racionales tales que $I_1\cup\cdots\cup I_n = \mathbb{R}$. □

Teorema 5. *Si el Axioma 1 es falso, entonces existe un espacio de Banach de la cardinalidad del continuo que no es isométrico a ningún subespacio de ℓ_∞/c_0.*

Si el Axioma 1 no se cumple es porque existe un conjunto $E\subset\mathbb{R}^2$ que no pertence a la σ-álgebra $\sigma^2(\mathbb{R})$. Podemos escribir E como

$E = \{(a,b)\in E : a<b\}\cup\{(a,b)\in E : a=b\}\cup\{(a,b)\in E : a>b\}$.

Tiene que haber uno de esos tres subconjuntos que no pertenezca a $\sigma^2(\mathbb{R})$. Por el Lema 4 no puede ser el conjunto central. Por simetría podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que es el primer conjunto el que no está en $\sigma^2(\mathbb{R})$. Por tanto, podemos suponer, de hecho, que $E \subset \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 : a < b\}$.

Lema 6. *Existe un espacio de Banach X_E de cardinalidad del continuo y vectores $\{e_a : a \in \mathbb{R}\}$ de X tales que para todo $a < b$:*

1. $\|e_a + e_b\| = 2$ *si* $(a,b) \in E$
2. $\|e_a + e_b\| = 1$ *si* $(a,b) \notin E$

Demostración. Dada una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, sean

$$\begin{gathered}
\|f\|_\infty = \{\sup\{|f(a)\| : a \in \mathbb{R}\},\\
\|f\|_E = \sup\{|f(a) + f(b)| : (a,b) \in E\},\\
\|f\| = \text{máx}\{\|f\|_\infty, \|f\|_E\},\\
Y = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : \|f\| < \infty\}\,.
\end{gathered}$$

Para cada $a \in \mathbb{R}$ sea $e_a \in Y$ la función característica del punto a, es decir: $e_a(a) = 1$ y $e_a(b) = 0$ si $b \neq a$. Es fácil ver que $(Y, \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach y los vectores e_a cumplen las condiciones requeridas. Lo que no está tan claro es que Y tenga la cardinalidad del continuo. Pero el subespacio X_E de Y generado por los e_a sí que la tiene (ver apéndice). $\square$

Supongamos que tenemos una isometría $T : X_E \longrightarrow \ell_\infty$ y buscaremos una contradicción. Para cada $a \in \mathbb{R}$ sea $S(a) \in \ell_\infty$ un representante de la clase de equivalencia de $T(a)$ en el espacio cociente ℓ_∞/c_0. De esta forma tenemos una función $S : \mathbb{R} \longrightarrow \ell_\infty$. Para $a < b$ se tiene que

$$\begin{gathered}
(a,b) \in E \iff \|e_a + e_b\| > 1 \iff \|T(e_a) + T(e_b)\| > 1 \iff\\
\limsup_n |S(a)_n + S(b)_n| > 1 \iff\\
(S(a), S(b)) \in Z := \left\{(u,v) \in \ell_\infty \times \ell_\infty : \limsup_n |u_n + v_n| > 1\right\}
\end{gathered}$$

Así pues, tenemos que

$$E = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 : a < b\} \cap (S \times S)^{-1}(Z)$$

Vamos a comprobar que Z pertenece a la σ-álgebra $\sigma^2(\ell_\infty)$. Esto nos lleva a una contradicción usando el Lema 3 y el hecho de que E no está en $\sigma^2(\mathbb{R})$. Efectivamente,

$$\begin{aligned}
Z &= \left\{(u,v) \in \ell_\infty \times \ell_\infty : \exists k \in \mathbb{N}\ \forall m \in \mathbb{N}\ \exists n > m\ |u_n + v_n| > 1 + k^{-1}\right\}\\
&= \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \bigcup_{n>m} \left\{(u,v) \in \ell_\infty \times \ell_\infty : |u_n + v_n| > 1 + k^{-1}\right\}
\end{aligned}$$

y el conjunto

$$A_{n,k} = \left\{(u,v) \in \ell_\infty \times \ell_\infty : |u_n + v_n| > 1 + k^{-1}\right\}$$

ies la unión de los dos conjuntos

$$A^+_{n,k} = \bigcup_{q,q'\in\mathbb{Q}, q+q'>1+k^{-1}} \{u \in \ell_\infty : u_n > q\} \times \{u \in \ell_\infty : u_n > q\}$$

y

$$A^-_{n,k} = \bigcup_{q,q'\in\mathbb{Q}, q+q'>1+k^{-1}} \{u \in \ell_\infty : u_n > q\} \times \{u \in \ell_\infty : u_n > q\}.$$

La conclusión es que $Z \in \sigma^2(\ell_\infty)$, lo que concluye la demostración del Teorema 5.

Notas

1. La prueba que hemos hecho del Teorema 5 es una versión simplificada de lo que hacen Krupski y Marciszewski en [7], que a su vez se basa en ideas de Todorcevic [10].

2. Trabajando en $\mathbb{R}^n$ en lugar de $\mathbb{R}^2$, es posible demostrar, con algo más de esfuerzo, que tampoco se puede demostrar que ℓ_∞/c_0 contenga copias *isomorfas* de todos los espacios de Banach de cardinalidad continuo. Otra demostración de esto, menos elemental, puede verse en [2].

3. Todavía no hemos comentado nada sobre la Pregunta 1. Resulta que una respuesta afirmativa implica una respuesta negativa a la Pregunta 2. Pero en este caso, tenemos una situación todavía más enrevesada:
   - No se puede demostrar que la respuesta a la Pregunta 1 sea afirmativa. De hecho Banach y Kuratowski [2] mostraron en 1929 que la Hipótesis del Continuo implica una respuesta afirmativa a la Pregunta 1.
   - No se puede demostrar que no se puede demostrar que la respuesta a la Pregunta 1 sea negativa. Esto es consecuencia del trabajo de Ulam [12] y desarrollos posteriores.

   En cualquier caso, hay cierto consenso en la comunidad de especialistas en que no se debe poder demostrar que la respuesta a 1 sea falsa. Así pues, la existencia de tal medida $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \longrightarrow [0, +\infty)$ es tomada como un axioma legítimo con el que trabajar.

4. Finalmente, mencionar que el segundo teorema de incompletitud de Gödel viene a decir que es imposible demostrar formalmente que de los axiomas del sistema[1] ZFC no pueda deducirse a una contradicción. Así pues, todo lo que se ha dicho aquí, y todo lo que habéis hecho hasta ahora debería ir precedido por un prudente *Suponiendo que ZFC no encierra contradicciones.*

Apéndice: Espacios de Banach

Un espacio de Banach es es un espacio normado completo. En esta nota, entendemos que es un espacio sobre el cuerpo de los números reales. Si X es un espacio de Banach e $Y \subset X$ es un subespacio cerrado, entonces el espacio cociente X/Y es un espacio de Banach dotado de la norma $\|x + Y\| = \text{ínf}\{\|x + y\| : y \in Y\}$.

Una isometría es una aplicación lineal $T : X \longrightarrow Y$ entre espacios de Banach tal que $\|Tx\| = \|x\|$ para todo $x \in X$. Se dice que X e Y son isométricos si existe una isometría suprayectiva entre ellos.

Dos espacios de Banach X e Y se dicen isomorfos si existe una aplicación biyectiva lineal y continua $T : X \longrightarrow Y$ cuya inversa T^{-1} también es lineal y continua.

El espacio de Banach ℓ_∞ se define como

[1] o de cualquera otro sistema de axiomas que cumpliera el mismo papel

$$\ell_\infty = \left\{ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| < \infty \right\}$$

dotado de las operaciones lineales coordenada a coordenada, y de la norma $\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\| = \sup\{|x_n| : n \in \mathbb{N}\}$. El subespacio $c_0 \subset \ell_\infty$ es

$$c_0 = \left\{ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} : \lim_n x_n = 0 \right\}.$$

Apéndice: Cardinalidad

Dados dos conjuntos A y B, se dice que la cardinalidad de A es menor que la de B, y escribimos $|A| \leq |B|$ si existe una aplicación inyectiva $f : A \longrightarrow B$. Decimos que A y B tienen la misma cardinalidad, y escribimos $|A| = |B|$ si existe una aplicación biyectiva $f : A \longrightarrow B$.

Teorema 7 (Schröder,Bernstein)**.** $|A| = |B|$ *si y sólo si* $|A| \leq |B|$ *y* $|B| \leq |A|$.

Demostración. No es trivial, pero es una prueba bonita, elemental y accesible. Se puede encontrar en muchos libros de teoría de conjuntos, por ejemplo [6]. □

Proposición 8. $|A| \leq |B|$ *si y sólo si existe una aplicación suprayectiva* $f : B \longrightarrow A$.

Demostración. Sencillo ejercicio. □

Proposición 9. $|\mathbb{R}| = |\mathbb{R}^{\mathbb{N}}|$.

Demostración. No es difícil, usando el Teorema de Schröder-Bernstein. □

Si $|A| = |\mathbb{R}|$ decimos que A tiene la cardinalidad del continuo (lo que a veces se escribe $|A| = \mathfrak{c}$. Utilizando los teoremas anteriores no es difícil demostrar lo siguiente:

Proposición 10. *Si* X *es un espacio de Banach, y* $A \subset X$ *es tal que* $|A| \leq |\mathbb{R}|$*, entonces el subespacio cerrado generado por* A *tiene la cardinalidad del continuo.*

Demostración. Los puntos del subespacio cerrado generado por A son límites de sucesiones de combinaciones lineales finitas de A. Utilizar los resultados mencionados anteriormente. □

Por ejemplo, cualquier espacio obtenido haciendo cocientes y subespacios de ℓ_∞ tiene la cardinalidad del continuo.

Apéndice: σ-álgebras

Una σ-álgebra en un conjunto Ω es una familia no vacía Σ de subconjuntos de Ω con las propiedades de que:

1. Si $A \in \Sigma$, entonces $\{x \in \Omega : x \notin A\} \in \Sigma$.
2. Si $A_1, A_2, \ldots \in \Sigma$ entonces $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \Sigma$.

De estas dos propiedades se deduce que si $A_1, A_2, \ldots \in \Sigma$ entonces también $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \Sigma$.

La σ-álgebra generada por una familia cualquiera $\mathcal{F}$ de subconjuntos de Ω es la intersección de todas las σ-álgebras de subconjuntos de Ω que contienen a $\mathcal{F}$. Esta intersección es de nuevo una σ-álgebra, así que la σ-álgebra generada por $\mathcal{F}$ es la menor σ-álgebra que contiene a $\mathcal{F}$.

Si Σ es una σ-álgebra de subconjuntos de Ω, y Si Σ' es una σ-álgebra de subconjuntos de Ω', una aplicación $f : \Omega \longrightarrow \Omega'$ se dice que es Σ-Σ'-medible si $f^{-1}(A) \in \Sigma$ para todo $A \in \Sigma'$.

La familia $\mathcal{P}(\Omega)$ de todos los subconjuntos de Ω es obviamente una σ-álgebra.

Una aplicación $\mu : \Sigma \longrightarrow [0, +\infty]$ es una aplicación con la propiedad de que

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

para cualesquiera $A_n \in \Sigma$ disjuntos dos a dos.

Referencias

[1] S. Banach, S. Kuratowski, *Sur une généralisation du probleme de la mesure*, Fund. Math 14 (1929), 127–131.

[2] C. Brech, P. Koszmider, *On universal Banach spaces of density continuum.* Israel J. Math. 190 (2012), 93–110.

[3] P. Cohen, *The Independence of the Continuum Hypothesis.* Proc. Nat. Acad. of Sci. U.S.A. 50, no. 6 (1963), 1143–1148.

[4] P. Cohen, *The Independence of the Continuum Hypothesis II.* Proc. Nat. Acad. of Sci. U.S.A. 51, no.1 (1964), 105–110.

[5] K. Gödel, *The independence of the Continuum Hypothesis.* Princeton University Press (1940).

[6] T. Jech, *Set theory.* The third millennium edition, revised and expanded. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2003.

[7] M. Krupski, W. Marciszewski, *Some remarks on universality properties of* ℓ_∞/c_0. Colloq. Math. 128 (2012), no. 2, 187–195.

[8] K. Kunen, *Inaccessibility properties of cardinals*, PhD thesis, Stanford University, ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 1968.

[9] Fritz Rothberger. A remark on the existence of a denumerable base for a family of functions. Canadian J. Math., 4:117–119, 1952.

[10] S. Todorcevic, *Embedding function spaces into* ℓ_∞/c_0, J. Math. Anal. Appl. 384 (2011), 246-251.

[11] S. M. Ulam, *Problème No. 74*, Fund. Math. 30 (1938) 365.

[12] S. M. Ulam, *Zur Masstheorie in der allgemeinen Mengenlehre.* Fund. Math. 16 (1930), 140–150.

[13] S. Todorcevic, Embedding function spaces into ℓ_∞/c_0, J. Math. Anal. Appl. 384 (2011), 246–251.

Universidad de Murcia, Departamento de Matemáticas, Campus de Espinardo 30100 Murcia, Spain.

E-mail address: `avileslo@um.es`