Mecánica Cuántica - Principio de Incertidumbre - Ecuación de Schrödinger - Ecuación de Dirac[1]

Universidad del País Vasco - Diciembre 2012

[1]Estas notas de curso fueron tomadas durante el período de contrato PIC en la Facultad de Ciencia y Tecnología de la Universidad del País Vasco.

Resumen

Estas notas fueron tomadas durante el período de contrato PIC, de setiembre a diciembre de 2012, en la Facultad de Ciencia y Tecnología de Universidad del País Vasco, en el Departamento de Matemáticas y en el grupo de Análisis Matemático y Aplicaciones. El tema principal giro entorno el Principio de Incertidumbre, así como la Ecuación de Schrödinger y Dirac, dentro de los cuales se desarrollaron tópicos como operadores simétricos y la caracterización de operadores autoadjuntos y extensiones autoadjuntas con aplicación a la ecuación de Dirac, el teorema de Descomposición Espectral y el Teorema de Cauchy-Kovalevskaya.

La mayoría de resultados forman parte de las publicaciones y recientes trabajos del grupo de Análisis Matemático y Aplicaciones. Cada capítulo de estas notas está con la respectiva bibliografía usada para su desarrollo. Además, los interesados pueden visitar la página web del grupo: **http://www.ehu.es/amaplicado/**.

El capítulo 1 fue impartido por Luis Vega. En este capítulo se mostró una desigualdad abstracta del Principio de Incertidumbre con algunos ejemplos de aplicación. Luego, una desigualdad tipo Hardy para la ecuación de Dirac, así como un Teorema Virial para la Ecuación de Schrödinger. En esta parte expreso mi agradecimiento por las fructíferas discusiones a Luis Vega, Luis Urrutia y Aingeru; las cuales me ayudaron a una mejor comprensión de los resultados mostrados.

El capítulo 2 fue impartido por Naiara Arrizabalaga. En este capítulo se probó la existencia de una extensión autoadjunta del Operador de Dirac con un potencial cuya singularidad es de tipo Coulomb. También expreso mi agradecimiento a Naira, por absolver mis dudas respecto a los resultados de este capítulo y por sus valiosas sugerencias en la redacción de esta parte.

El capítulo 3 fue impartido por Albert Mas. En este capítulo se prueba una condición necesaria para la existencia de una extensión autoadjunta del operador de Dirac definido en $L^2(\nu)^4$, donde ν es una medida positiva de Borel en $\mathbb{R}^3$. También expreso mi agradecimiento a Albert, por mostrarse siempre dispuesto a despejar mis dudas y por la recomendacíion de bibliografía para una mejor comprensión de los resultados de este capítulo, así como sus sugerencias para la redacción de esta parte.

El capítulo 4 fue impartido por Aingeru Fernandez. Este capítulo forma parte de su Tesina de Máster y se prueba que, si la solución de la Ecuación de Schrödinger con potencial posee decaimiento gausiano en tiempo $t = 0$ y $t = 1$, entonces su solución también hereda esta propiedad. La totalidad de este capítulo fue redactado por Aingeru, al cual expreso mi agradecimiento por esto, además por las motivadoras discusiones que tuvimos sobre los resultados de este y otros capítulos .

El capítulo 5 es un apéndice de algunos resultados asumidos al desarrollar los capítulos anteriores. La primera sección fue impartida por Luis Urrutia, en la cual prueba el Teorema Espectral para operadores autoadjuntos y no acotados, la totalidad de esta sección fue redactado por él. La segunda sección fue impartida por mi, en ésta se prueba un criterio que caracteriza cuando un operador simétrico es autoadjunto así como la existencia de extensiones autoadjuntas. La tercera sección fue impartida por Santiago Montaner, donde

prueba el Teorema del Cauchy-Kovalevskaya, así como el Teorema de Unicidad de Holmgren. La cuarta sección fue impartida por Odei Rey, donde muestra y explica el fenómeno de dispersión al trabajar con neutrones y su relación con la ecuación de Schrödinger con potencial.

Finalmente, quiero agradecer al Departamento de Matemáticas, a mis estimados colegas de trabajo, los que he mencionado y los que no, ya que han convertido este período en Leioa en momentos gratos y agradables.

Índice general

Capítulo 1

Parte de Luis Vega

En este capítulo se asume que el lector está familiarizado con Teoría de Espacios de Hilbert, Teoría de Operadores, Ecuación del Calor y Ecuación de Schrödinger. Para estos temas, por ejemplo, ver ([3]), ([8]), ([11]), ([13]), ([14]). Para mayores detalles de los resultados mostrados, consultar los artículos ([5]), ([6]), ([7]) y las referencias contenidas en los mismos.

1.1. Principio de Incertidumbre

En un espacio de Hilbert H, consideramos los operadores S y A, simétrico y antisimétrico, respectivamente; es decir

$$\langle S\psi, \psi\rangle = \langle \psi, S\psi\rangle \quad , \quad \langle A\psi, \psi\rangle = -\langle \psi, A\psi\rangle.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} 0 \leq \|(A+S)\psi\|^2 &= \langle S\psi, S\psi\rangle + \langle A\psi, A\psi\rangle + \langle S\psi, A\psi\rangle + \langle A\psi, S\psi\rangle \\ &= \langle S\psi, S\psi\rangle + \langle A\psi, A\psi\rangle + 2\mathrm{Re}\langle S\psi, A\psi\rangle \\ &= \langle S\psi, S\psi\rangle + \langle A\psi, A\psi\rangle + \langle (SA-AS)\psi, \psi\rangle. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$-\langle (SA - AS)\psi, \psi\rangle \leq \|S\psi\|^2 + \|A\psi\|^2 . \tag{1.1}$$

Análogamente, si cambiamos A por $-A$, obtenemos

$$\langle (SA - AS)\psi, \psi\rangle \leq \|S\psi\|^2 + \|A\psi\|^2 . \tag{1.2}$$

Combinando (1.1) y (1.2), obtenemos la siguiente desigualdad

$$|\langle (SA - AS)\psi, \psi\rangle| \leq \|S\psi\|^2 + \|A\psi\|^2 . \tag{1.3}$$

En (1.3), cambiando A por λA y S por $\frac{1}{\lambda}S$, se tiene

$$|\langle (SA - AS)\psi, \psi\rangle| \leq \frac{1}{\lambda^2} \|S\psi\|^2 + \lambda^2 \|A\psi\|^2 \leq 2 \|S\psi\| \|A\psi\| \tag{1.4}$$

En la última desigualdad hemos tomado $\frac{1}{\lambda^2} = \frac{\|A\psi\|}{\|S\psi\|}$. Esto es debido a que la función $f(\lambda) = \frac{1}{\lambda^2} \|S\psi\|^2 + \lambda^2 \|A\psi\|^2$, alcanza su mínimo en ese valor. Más aún,

$$2 \left| \mathrm{Re} \int S\psi \overline{A\psi} \right| = |\langle (SA - AS)\psi, \psi\rangle| \leq 2 \|S\psi\| \|A\psi\| . \tag{1.5}$$

La desigualdad (1.5), se denomina **Principio de Incertidumbre**. Por otro lado, ese cumple la igualdad en (1.1) si y solo si

$$(A + S)\psi = 0. \tag{1.6}$$

A continuación, mostramos algunos ejemplos de aplicación. En todos ellos, los cálculos son formales.

Ejemplo 1 *En el espacio $L^2(\mathbb{R})$, consideramos los operadores*

$$S\psi = x\psi \qquad , \qquad A\psi = \frac{d}{dx}\psi.$$

Es claro que el operador S es simétrico y, por integración por partes, A es antisimétrico. A continuación calculamos su respectivo conmutador

$$(SA - AS)\psi = \left(x\frac{d}{dx} - \frac{d}{dx}x \right) \psi = x\frac{d}{dx}\psi - \frac{d}{dx}(x\psi) = x\frac{d}{dx}\psi - x\frac{d}{dx}\psi - \psi = -\psi.$$

De (1.1) y (1.4), obtenemos las desigualdades

$$-\langle (SA - AS)\psi, \psi\rangle = \int |\psi|^2 \leq \int |x\psi|^2 + \int |\psi'|^2 , \tag{1.7}$$

y

$$-\langle (SA - AS)\psi, \psi\rangle = \int |\psi|^2 \leq 2 \left(\int |x\psi|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int |\psi'|^2\right)^{\frac{1}{2}} .$$

De la ecuación (1.6), se cumple la igualdad si y solo si la función ψ cumple la ecuación diferencial (EDO): $\frac{d}{dx}\psi = -x\psi$. Entonces, $\psi_0 = a_0 e^{-x^2/2}$ verifica la igualdad. Por otro lado, se cumple

$$0 = \langle (A+S)\psi, (A+S)\psi\rangle = \langle (S-A)(S+A)\psi, \psi\rangle = \langle (S^2 - A^2 + SA - AS)\psi, \psi\rangle,$$

así, ψ_0 cumple las siguientes igualdades

$$-\frac{d^2}{dx^2}\psi_0 + x^2\psi_0 = \psi_0 \quad , \quad \int |x\psi_0|^2 + \int |\psi_0'|^2 = \int |\psi_0|^2 . \tag{1.8}$$

Sea λ un autovalor asociado a el oscilador armónico $-\dfrac{d^2}{dx^2} + x^2$. Entonces, por la ecuación (1.7), $\lambda \geq 1$. Por (1.8), el autovalor $\lambda_0 = 1$ se alcanza en ψ_0. Por lo tanto, hemos hallado la primera autofunción asociada al oscilador armónico.

Ejemplo 2 *En el espacio $L^2(\mathbb{R})$, consideramos los operadores*

$$S\psi = \operatorname{sgn}(x)\psi \qquad , \qquad A\psi = \frac{d}{dx}\psi.$$

El operador S es simétrico y, por integración por partes, A es antisimétrico. A continuación calculamos su respectivo conmutador

$$(SA - AS)\psi = \operatorname{sgn}(x)\frac{d}{dx}\psi - \frac{d}{dx}(\operatorname{sgn}(x)\psi) = \operatorname{sgn}(x)\frac{d}{dx}\psi - \operatorname{sgn}(x)\frac{d}{dx}\psi - \frac{d}{dx}\operatorname{sgn}(x)\psi = -2\delta_0\psi.$$

De (1.1), obtenemos la desigualdad

$$-\langle (SA - AS)\psi, \psi\rangle = -\int -2\delta_0\psi\overline{\psi} = 2\,|\psi(0)|^2 \leq \int |\psi|^2 + \int |\psi'|^2 . \tag{1.9}$$

De la ecuación (1.6), se cumple la igualdad si y solo si la función ψ cumple la EDO $\frac{d}{dx}\psi = -\operatorname{sgn}(x)\psi$. *Entonces,* $\psi_0 = a_0 e^{-|x|}$ *verifica la igualdad. Por otro lado, se cumple*

$$0 = \langle (A+S)\psi, (A+S)\psi \rangle = \langle (S-A)(S+A)\psi, \psi \rangle = \langle (S^2 - A^2 + SA - AS)\psi, \psi \rangle,$$

así, ψ_0 *cumple las siguientes igualdades*

$$-\frac{d^2}{dx^2}\psi_0 - 2\delta_0\psi = -\psi \ \ , \ \ 2\left|\psi_0(0)\right|^2 = \int |\psi_0|^2 + \int \left|\psi_0'\right|^2. \tag{1.10}$$

Sea λ *un autovalor asociado a el operador* $H = -\dfrac{d^2}{dx^2} - 2\delta_0$. *Entonces, por la ecuación (1.9),* $\lambda \geq -1$. *Por (1.10), el autovalor* $\lambda_0 = -1$, *se alcanza en* ψ_0. *Por lo tanto, hemos encontrado la primera autofunción asociada al operador* H.

Ejemplo 3 *En el espacio* $L^2(\mathbb{R}^d)$ *con* $d > 1$, *consideramos los operadores*

$$S\psi = \frac{x}{|x|}\psi \qquad , \qquad A\psi = \nabla\psi.$$

El operador S *es simétrico y, por integración por partes,* A *es antisimétrico. A continuación calculamos su respectivo conmutador*

$$(SA - AS)\psi = \frac{x}{|x|}\nabla\psi - \nabla\left(\frac{x}{|x|}\psi\right) = \frac{x}{|x|}\nabla\psi - \frac{x}{|x|}\nabla\psi - \nabla\left(\frac{x}{|x|}\right)\psi = -\frac{d-1}{|x|}\psi.$$

De (1.1), obtenemos la desigualdad

$$-\langle (SA - AS)\psi, \psi \rangle = \int \frac{d-1}{|x|}|\psi|^2 \leq \int |\psi|^2 + \int |\nabla\psi|^2. \tag{1.11}$$

De la ecuación (1.6), se cumple la igualdad si y solo si la función ψ *cumple la EDO:* $\nabla\psi = -\dfrac{x}{|x|}\psi$. *Entonces,* $\psi_0 = a_0 e^{-|x|}$ *verifica la igualdad. Por otro lado, se cumple*

$$0 = \langle (A+S)\psi, (A+S)\psi \rangle = \langle (S-A)(S+A)\psi, \psi \rangle = \langle (S^2 - A^2 + SA - AS)\psi, \psi \rangle,$$

así, ψ_0 *cumple las siguientes igualdades*

$$-\Delta\psi_0 - \frac{d-1}{|x|}\psi_0 = -\psi_0 \ \ , \ \ \int \frac{d-1}{|x|}|\psi_0|^2 = \int |\psi_0|^2 + \int |\nabla\psi_0|^2. \tag{1.12}$$

Sea λ un autovalor asociado a el operador $H = -\Delta\psi - \frac{d-1}{|x|}\psi$. Entonces, por la ecuación (1.13), $\lambda \geq -1$. Por (1.12), el autovalor $\lambda_0 = -1$, se alcanza en ψ_0. Por lo tanto, hemos encontrado la primera autofunción asociada al operador H.

Ejemplo 4 *En el espacio $L^2(\mathbb{R}^d)$con $d > 2$, consideramos los operadores*

$$S\psi = \frac{x}{|x|^2}\psi \qquad , \qquad A\psi = \nabla\psi.$$

El operador S es simétrico y, por integración por partes, A es antisimétrico. A continuación calculamos su respectivo conmutador

$$(SA - AS)\psi = \frac{x}{|x|^2}\nabla\psi - \nabla\left(\frac{x}{|x|^2}\psi\right) = \frac{x}{|x|^2}\nabla\psi - \frac{x}{|x|^2}\nabla\psi - \nabla\left(\frac{x}{|x|^2}\right)\psi = -\frac{d-2}{|x|^2}\psi.$$

De (1.1) y (1.4), obtenemos las desigualdades

$$-\langle (SA - AS)\psi, \psi\rangle = (d-2)\int \frac{|\psi|^2}{|x|^2} \leq \int \frac{|\psi|^2}{|x|^2} + \int |\nabla\psi|^2 , \tag{1.13}$$

y

$$-\langle (SA - AS)\psi, \psi\rangle = (d-2)\int \frac{|\psi|^2}{|x|^2} \leq 2\left(\int \frac{|\psi|^2}{|x|^2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int |\nabla\psi|^2\right)^{\frac{1}{2}} .$$

Despejando, obtenemos

$$\int \frac{|\psi|^2}{|x|^2} \leq \frac{4}{(d-2)^2}\int |\nabla\psi|^2 . \tag{1.14}$$

1.2. Ecuación de Dirac

Consideramos la ecuación $\partial_t\psi = (\alpha\nabla + \mathrm{i}m\beta)\psi$. Derivando con respecto al tiempo y usando la notación de sumación de Einstein, obtenemos

$$\partial_t^2 = (\alpha\nabla + \mathrm{i}m\beta)(\alpha\nabla + \mathrm{i}m\beta) = (\alpha_j\partial_j + \mathrm{i}m\beta)(\alpha_k\partial_k + \mathrm{i}m\beta) = (\alpha_j\partial_j\alpha_k\partial_k + \mathrm{i}m\beta\alpha_k\partial_k + \alpha_j\partial_j\mathrm{i}m\beta - m^2\beta^2)$$

Deseamos que este operador sea el operador que define la ecuación de ondas: $\partial_t^2 = \Delta - m^2$; por lo cual imponemos las siguientes condiciones:

$$\alpha_j\alpha_k + \alpha_k\alpha_j = 2\delta_{jk} \quad , \quad \beta\alpha_k + \alpha_k\beta = 0, \tag{1.15}$$

y

$$\beta^2 = \mathbb{I}_d \quad , \quad \alpha_j^* = \alpha_j \quad , \quad \beta^* = \beta, \tag{1.16}$$

donde

$$\alpha_j = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_j \\ \sigma_j & 0 \end{pmatrix}, \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_d & 0 \\ 0 & -\mathbb{I}_d \end{pmatrix}. \tag{1.17}$$

A continuación, unos resultados técnicos que usaremos en la demostración del teorema principal, una desigualdad de tipo Hardy.

Lema 1.2.1 *Se cumplen las siguientes igualdades:*

1. $\sigma_j \sigma_k = \mathrm{i}\varepsilon_{jkl}\sigma_l$, *donde*

$$\varepsilon_{jkl} = \begin{cases} 1 & \textit{permutación par de } (1,2,3), \\ -1 & \textit{permutación impar de } (1,2,3), \\ 0 & \textit{índice repetido al menos dos veces.} \end{cases}$$

2. $\sigma A \sigma B = AB + \mathrm{i}\sigma(A \wedge B)$.

3. $\sigma \dfrac{x}{|x|}\sigma\nabla = \dfrac{x}{|x|}\nabla + \dfrac{\mathrm{i}\sigma}{|x|}(x \wedge \nabla)$.

4. *Si* $L = \dfrac{1}{\mathrm{i}} x \wedge \nabla$. *Entonces*

$$\sigma\nabla\sigma\frac{x}{|x|} - \sigma\frac{x}{|x|}\sigma\nabla = \frac{2}{r}\left(\mathbb{I}_d + \sigma L\right).$$

5. $(\sigma L)^2 + \sigma L = L^2$.

6.

$$\sigma\nabla(\mathbb{I}_d + \sigma L) + (\mathbb{I}_d + \sigma L)\sigma\nabla = 0.$$

$$\sigma\frac{x}{|x|}(\mathbb{I}_d + \sigma L) + (\mathbb{I}_d + \sigma L)\sigma\frac{x}{|x|} = 0.$$

7. $(\mathbb{I}_d + \sigma L)^2 \geq \mathbb{I}_d$, *es decir,* $\langle(\mathbb{I}_d + \sigma L)^2\psi, \psi\rangle \geq \langle\psi, \psi\rangle$.

Demostración:

1. Se puede verificar para cada índice.

2. Usando la igualdad del item 1.

$$\sigma A\sigma B = (\sigma_j a_j)(\sigma_k b_k) = \sigma_j a_j \sigma_j b_j + \sum_{j\neq k} \sigma_j\sigma_k a_j b_k = AB + \mathrm{i}\sum_{j\neq k}\varepsilon_{jkl}\sigma_l a_j b_k = AB + \mathrm{i}\sigma(A\wedge B).$$

3. Tomando $A = \frac{x}{|x|}$ y $B = \nabla$, y usando la igualdad del item 2, se tiene

$$\sigma\frac{x}{|x|}\sigma\nabla = \frac{x}{|x|}\nabla + \mathrm{i}\sigma\left(\frac{x}{|x|}\wedge\nabla\right) = \frac{x}{|x|}\nabla + \frac{\mathrm{i}\sigma}{|x|}(x\wedge\nabla).$$

4. Análogamente, usando la igualdad del item 2, obtenemos

$$\begin{aligned}\sigma\nabla\sigma\frac{x}{|x|} - \sigma\frac{x}{|x|}\sigma\nabla &= \nabla\frac{x}{|x|} + \mathrm{i}\sigma\left(\nabla\wedge\frac{x}{|x|}\right) - \frac{x}{|x|}\nabla - \mathrm{i}\sigma\left(\frac{x}{|x|}\wedge\nabla\right)\\ &= \nabla\frac{x}{|x|} - \frac{x}{|x|}\nabla - 2\mathrm{i}\sigma\left(\frac{x}{|x|}\wedge\nabla\right)\\ &= \frac{2}{|x|} + \frac{2}{|x|}\sigma L \;=\; \frac{2}{r}\left(\mathbb{I}_d + \sigma L\right).\end{aligned}$$

5. Desde que $L\wedge L = \mathrm{i}L$, obtenemos

$$(\sigma L)^2 = \sigma L\sigma L = LL + \mathrm{i}\sigma(L\wedge L) = L^2 - \sigma L.$$

6. Desde que

$$\sigma\nabla\left(e^{-|x|}f\right) = \sigma\left(-\frac{x}{|x|}e^{-|x|}f + e^{-|x|}\nabla f\right) = -e^{-|x|}\sigma\frac{x}{|x|}f + e^{-|x|}\sigma\nabla f,$$

se cumple la identidad

$$\sigma\frac{x}{|x|} = -e^{|x|}\sigma\nabla\left(e^{-|x|}\cdot\right) + \sigma\nabla. \tag{1.18}$$

Denotamos $A = \sigma\dfrac{x}{|x|}(\mathbb{I}_d + \sigma L) + (\mathbb{I}_d + \sigma L)\sigma\dfrac{x}{|x|}$. Entonces, aplicando repetidas veces la igualdad (1.18), se tiene

$$
\begin{aligned}
A &= 2\sigma\frac{x}{|x|} + \sigma\frac{x}{|x|}\sigma L + +\sigma L\sigma\frac{x}{|x|}\\
&= 2\left(-e^{|x|}\sigma\nabla\left(e^{-|x|}\cdot\right) + \sigma\nabla\right) + \left(-e^{|x|}\sigma\nabla\left(e^{-|x|}\cdot\right) + \sigma\nabla\right)\sigma L + \sigma L\left(-e^{|x|}\sigma\nabla\left(e^{-|x|}\cdot\right) + \sigma\nabla\right)\\
&= -2e^{|x|}\sigma\nabla\left(e^{-|x|}\cdot\right) + 2\sigma\nabla - e^{|x|}\sigma\nabla\left(e^{-|x|}\sigma L\right) + \sigma\nabla\sigma L - \sigma L\left(e^{|x|}\sigma\nabla\left(e^{-|x|}\cdot\right)\right) + \sigma L\sigma\nabla\\
&= -2e^{|x|}\sigma\nabla\left(e^{-|x|}\cdot\right) - e^{|x|}\sigma\nabla\left(e^{-|x|}\sigma L\right) - \sigma L\left(e^{|x|}\sigma\nabla\left(e^{-|x|}\cdot\right)\right)\\
&= -2e^{|x|}\sigma\nabla\left(e^{-|x|}\cdot\right) + \sigma\frac{x}{|x|}\sigma L - \sigma\nabla\sigma L - e^{|x|}\sigma L\sigma\nabla\left(e^{-|x|}\cdot\right)\\
&= -e^{|x|}\sigma\nabla\left(e^{-|x|}\cdot\right) - e^{|x|}\sigma\nabla\left(e^{-|x|}\cdot\right) - e^{|x|}\sigma L\sigma\nabla\left(e^{-|x|}\cdot\right) + \sigma\frac{x}{|x|}\sigma L - \sigma\nabla\sigma L\\
&= -e^{|x|}\sigma\nabla\left(e^{-|x|}\cdot\right) - e^{|x|}\sigma\nabla\left(\mathbb{I}_d + \sigma L\right)\left(e^{-|x|}\cdot\right) + \sigma\frac{x}{|x|}\sigma L - \sigma\nabla\sigma L\\
&= -e^{|x|}\sigma\nabla\left(e^{-|x|}\cdot\right) + e^{|x|}\left(\mathbb{I}_d + \sigma L\right)\sigma\nabla\left(e^{-|x|}\cdot\right) + \sigma\frac{x}{|x|}\sigma L - \sigma\nabla\sigma L\\
&= -e^{|x|}\sigma\nabla\left(e^{-|x|}\cdot\right) + e^{|x|}\sigma\nabla\left(e^{-|x|}\cdot\right) + e^{|x|}\sigma\nabla\sigma L\left(e^{-|x|}\cdot\right) + \sigma\frac{x}{|x|}\sigma L - \sigma\nabla\sigma L\\
&= e^{|x|}\sigma\nabla\left(e^{-|x|}\sigma L\right) + \sigma\frac{x}{|x|}\sigma L - \sigma\nabla\sigma L\\
&= \left(e^{|x|}\sigma\nabla\left(e^{-|x|}\cdot\right) + \sigma\frac{x}{|x|} - \sigma\nabla\right)(\sigma L) = 0
\end{aligned}
$$

7. Sea λ un autovalor del operador $\mathbb{I}_d + \sigma L$ asociado a la autofunción ψ, es decir:

$$(\mathbb{I}_d + \sigma L)\,\psi = \lambda\psi.$$

Entonces, por el item 6, se obtiene la igualdad

$$(\mathbb{I}_d + \sigma L)\left(\sigma\frac{x}{|x|}\right)\psi = -\sigma\frac{x}{|x|}\left(\mathbb{I}_d + \sigma L\right)\psi = -\sigma\frac{x}{|x|}(\lambda\psi) = -\lambda\sigma\frac{x}{|x|}\psi. \qquad (1.19)$$

Luego, $-\lambda$ también es un autovalor de $\mathbb{I}_d + \sigma L$, asociado a la autofunción $\sigma\frac{x}{|x|}\psi$.

Así, aplicando el teorema espectral al operador σL, obtenemos

$$spec\{\ \sigma L\}\ \ = \{\ -\lambda_j\}\ _{j\in\mathbb{N}}\bigcup\{\ \mu_k\}\ _{k\in\mathbb{N}} \quad , \quad \lambda_j, \mu_k > 0.$$

Del item 5, se sigue que $(\sigma L)^2 + \sigma L \geq 0$, entonces

$$0 \leq \langle \left((\sigma L)^2 + \sigma L\right) \psi_j, \psi_j \rangle = \langle \lambda_j^2 \psi_j - \lambda_j \psi_j, \psi_j \rangle = \lambda_j^2 - \lambda_j = \lambda_j(\lambda_j - 1).$$

Así, $\lambda_j > 1$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Entonces, desde que $\lambda_j - 1$ y $1 + \mu_k$ son autovalores positivos de $\mathbb{I}_d + \sigma L$, para cada $j \in \mathbb{N}$, existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$\lambda_j - 1 = 1 + \mu_k.$$

Luego, $\lambda_j \geq 2$ para todo $j \in \mathbb{N}$.

Ahora, sean $(\psi_j)_{j\in\mathbb{N}}$, $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ las familias autonormales de autofunciones asociadas, respectivamente, a los autovalores positivos y negativos del operador σL. Entonces:

$$f = \sum_{j\in\mathbb{N}} \langle f, \psi_j \rangle \psi_j + \sum_{k\in\mathbb{N}} \langle f, \varphi_k \rangle \varphi_k, \tag{1.20}$$

y

$$(\mathbb{I}_d + \sigma L) f = \sum_{j\in\mathbb{N}} (1 - \lambda_j) \langle f, \psi_j \rangle \psi_j + \sum_{k\in\mathbb{N}} (1 + \mu_k) \langle f, \varphi_k \rangle \varphi_k. \tag{1.21}$$

Haciendo las cuentas, obtenemos

$$\langle (\mathbb{I}_d + \sigma L)^2 \psi_j, \psi_j \rangle - \langle \psi_j, \psi_j \rangle = (1 - \lambda_j)^2 - 1 \geq 0 \quad , \quad j \in \mathbb{N}.$$

$$\langle (\mathbb{I}_d + \sigma L)^2 \varphi_k, \varphi_k \rangle - \langle \varphi_k, \varphi_k \rangle = (1 + \mu_k)^2 - 1 \geq 0 \quad , \quad k \in \mathbb{N}.$$

Así, $(\mathbb{I}_d + \sigma L)^2 - \mathbb{I}_d$ es un operador positivo tanto en su proyección positiva como negativa, como se quería probar.

■

Observación 1 *Denotamos por ψ_j y φ_k los autovalores negativos y positivos del operador $\mathbb{I}_d + \sigma L$, respectivamente. De la ecuación (1.21), se sigue que*

$$(\mathbb{I}_d + \sigma L) f = \sum_{j\in\mathbb{N}} \lambda_j \langle f, \psi_j \rangle \psi_j + \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu_k \langle f, \varphi_k \rangle \varphi_k = P^+ f - P^- f, \tag{1.22}$$

donde P^+ y P^- denota la parte positiva y negativa del operador $\mathbb{I}_d + \sigma L$, respectivamente. Sea $l \in \mathbb{N}$, de la ecuación 1.19, se sigue

$$\left(P^+\alpha\frac{x}{|x|}P^+\right)\varphi_l = \left(P^+\alpha\frac{x}{|x|}\right)(\lambda_l\varphi_l) = -P^+\left(-\lambda_l\alpha\frac{x}{|x|}\varphi_l\right) = -P^+P^-\left(\alpha\frac{x}{|x|}\varphi_l\right) = 0. \tag{1.23}$$

Análogamente

$$\left(P^-\alpha\frac{x}{|x|}P^-\right)\psi_l = 0. \tag{1.24}$$

Por el item 6 del lema 1.2.1,

$$P^+\alpha\frac{x}{|x|} - P^-\alpha\frac{x}{|x|} = \alpha\frac{x}{|x|}P^+ - \alpha\frac{x}{|x|}P^-, \tag{1.25}$$

aplicando P^+ y P^- tanto a la derecha como izquierda de la igualdad (1.25), y de las identidades (1.23) y (1.24), obtenemos

$$-P^+\alpha\frac{x}{|x|}P^- = \alpha\frac{x}{|x|}P^- = P^+\alpha\frac{x}{|x|}, \tag{1.26}$$

y

$$-P^-\alpha\frac{x}{|x|}P^+ = \alpha\frac{x}{|x|}P^+ = P^-\alpha\frac{x}{|x|}. \tag{1.27}$$

Desde que P^+ es un operador proyección y de la igualdad (1.27), se obtiene

$$\int \beta\psi\overline{\alpha\frac{x}{|x|}P^+\psi} = \int \beta\psi\overline{\alpha\frac{x}{|x|}P^+P^+\psi} = \int \beta\psi\overline{P^-\alpha\frac{x}{|x|}P^+\psi} = \int \beta P^-\psi\overline{\alpha\frac{x}{|x|}P^+\psi},$$

ya que $P^\pm, \beta, \alpha$ son operadores autoadjuntos, el primero conmuta con β y los dos primeros conmutan con $\alpha\frac{x}{|x|}$.

Teorema 1.2.1 (Desigualdad de Hardy para la ecuación de Dirac)

$$\int \frac{|\psi|^2}{|x|}dx \leq \int |(\alpha\nabla + \mathrm{i}m\beta + \epsilon\mathbb{I}_d)\,\psi|^2\,|x|\,dx \quad , \quad m > 0, \epsilon \in \mathbb{R}.$$

Demostración: Parte principal de la demostración radica en estimar una cota para la cantidad

$$2\mathrm{Re}\int(\alpha\nabla+\mathrm{i}m\beta+\epsilon\mathbb{I}_d)\,\psi\overline{\alpha\frac{x}{|x|}(P^+\psi-P^-\psi)}. \tag{1.28}$$

Por un lado, se cumple la igualdad

$$2\mathrm{iIm}\int\beta\psi\overline{\alpha\frac{x}{|x|}(P^+\psi-P^-\psi)}=0. \tag{1.29}$$

En efecto, usamos el hecho que $\mathrm{Im}z=\frac{1}{2\mathrm{i}}(z-\overline{z})$. Entonces:

$$\begin{aligned}
(1{,}29) &= \int\beta\psi\overline{\alpha\frac{x}{|x|}(P^+\psi-P^-\psi)}-\int\overline{\beta\psi}\alpha\frac{x}{|x|}(P^+\psi-P^-\psi)\\
&= \int\beta\psi\overline{\alpha\frac{x}{|x|}P^+\psi}-\int\beta\psi\overline{\alpha\frac{x}{|x|}P^-\psi}-\int\overline{\beta\psi}\alpha\frac{x}{|x|}P^+\psi+\int\overline{\beta\psi}\alpha\frac{x}{|x|}P^-\psi\\
&= \left(\int\beta\psi\overline{\alpha\frac{x}{|x|}P^+\psi}+\int\overline{\beta\psi}\alpha\frac{x}{|x|}P^-\psi\right)-\left(\int\beta\psi\overline{\alpha\frac{x}{|x|}P^-\psi}+\int\overline{\beta\psi}\alpha\frac{x}{|x|}P^+\psi\right)\\
&= \left(\int\beta\psi\overline{P^-\alpha\frac{x}{|x|}\psi}+\int\overline{\beta\psi}\alpha\frac{x}{|x|}P^-\psi\right)-\left(\int\beta\psi\overline{P^+\alpha\frac{x}{|x|}\psi}+\int\overline{\beta\psi}\alpha\frac{x}{|x|}P^+\psi\right)\\
&= \left(\int P^-\psi\overline{\beta\alpha\frac{x}{|x|}\psi}+\int\overline{\alpha\frac{x}{|x|}\beta\psi}P^-\psi\right)-\left(\int P^+\psi\overline{\beta\alpha\frac{x}{|x|}\psi}+\int\overline{\alpha\frac{x}{|x|}\beta\psi}P^+\psi\right)\\
&= \int\left(P^--P^+\right)\psi\overline{\left(\beta\alpha\frac{x}{|x|}+\alpha\frac{x}{|x|}\beta\right)\psi}\;=\;0,
\end{aligned}$$

ya que $\alpha\dfrac{x}{|x|}$ anticonmuta con β.

De manera análoga, se cumple la igualdad

$$\mathrm{Re}\int\psi\overline{\alpha\frac{x}{|x|}\,(P^+\psi-P^-\psi)}=0. \tag{1.30}$$

Reemplazando las igualdades (1.29) y (1.30) en (1.28), se tiene

$$2\mathrm{Re}\int(\alpha\nabla+\mathrm{i}m\beta+\epsilon\mathbb{I}_d)\,\psi\overline{\alpha\frac{x}{|x|}(P^+\psi-P^-\psi)}=2\mathrm{Re}\int\alpha\nabla\psi\overline{\alpha\frac{x}{|x|}\,(P^+\psi-P^-\psi)}. \quad (1.31)$$

Hacemos las cuentas para calcular una expresión reducida de (1.31). Por un lado, se tiene

$$\begin{aligned}2\mathrm{Re}\int\alpha\nabla\psi\overline{\alpha\frac{x}{|x|}P^+\psi}&=\int\alpha\nabla\psi\overline{\alpha\frac{x}{|x|}P^+\psi}+\int\overline{\alpha\nabla\psi}\alpha\frac{x}{|x|}P^+\psi\\&=\int\alpha\nabla\psi\overline{\alpha\frac{x}{|x|}P^+P^+\psi}+\int\overline{\alpha\nabla\psi}\alpha\frac{x}{|x|}P^+P^+\psi\\&=\int\alpha\frac{x}{|x|}\alpha\nabla P^+\psi\overline{P^+\psi}-\int\alpha\nabla\alpha\frac{x}{|x|}P^+\psi\overline{P^+\psi} \qquad (1.32)\\&=\int\left(\alpha\frac{x}{|x|}\alpha\nabla-\alpha\nabla\alpha\frac{x}{|x|}\right)P^+\psi\overline{P^+\psi}\\&=-2\int\frac{1}{|x|}(\mathbb{I}_d+\alpha L)P^+\psi\overline{P^+\psi},\end{aligned}$$

y de manera análoga, se tiene

$$2\mathrm{Re}\int\alpha\nabla\psi\overline{\alpha\frac{x}{|x|}P^-\psi}=-2\int\frac{1}{|x|}(\mathbb{I}_d+\alpha L)P^-\psi\overline{P^-\psi}. \qquad (1.33)$$

Reemplazando (1.33) y (1.32) en (1.31), obtenemos

$$\begin{aligned}|(1{,}28)|&=\left|-2\int\frac{1}{|x|}(\mathbb{I}_d+\alpha L)P^+\psi\overline{P^+\psi}+2\int\frac{1}{|x|}(\mathbb{I}_d+\alpha L)P^-\psi\overline{P^-\psi}\right|\\&\geq 2\int\frac{1}{|x|}\left(\left|P^+\psi\right|^2+\left|P^-\psi\right|^2\right) \qquad (1.34)\\&=2\int\frac{1}{|x|}\left|\psi\right|^2.\end{aligned}$$

Por otro lado, por Cauchy-Schwarz, se tiene

$$\begin{aligned}
|(1{,}28)| &= 2\left|\mathrm{Re}\int |x|^{1/2}\left(\alpha\nabla + \mathrm{i}m\beta + \epsilon\mathbb{I}_d\right)\psi\overline{\frac{1}{|x|^{1/2}}\alpha\frac{x}{|x|}\left(P^{+}\psi - P^{-}\psi\right)}\right| \\
&\leq 2\left|\int |x|^{1/2}\left(\alpha\nabla + \mathrm{i}m\beta + \epsilon\mathbb{I}_d\right)\psi\overline{\frac{1}{|x|^{1/2}}\alpha\frac{x}{|x|}\left(P^{+}\psi - P^{-}\psi\right)}\right| \\
&\leq 2\left(\int |x|\left|\left(\alpha\nabla + \mathrm{i}m\beta + \epsilon\mathbb{I}_d\right)\psi\right|^2\right)^{1/2}\left(\int \frac{1}{|x|}\left|\alpha\frac{x}{|x|}\left(P^{+}\psi - P^{-}\psi\right)\right|^2\right)^{1/2} \qquad (1.35)\\
&= 2\left(\int |x|\left|\left(\alpha\nabla + \mathrm{i}m\beta + \epsilon\mathbb{I}_d\right)\psi\right|^2\right)^{1/2}\left(\int \frac{1}{|x|}\left(\left|P^{+}\psi\right|^2 + \left|P^{-}\psi\right|^2\right)\right)^{1/2} \\
&= 2\left(\int |x|\left|\left(\alpha\nabla + \mathrm{i}m\beta + \epsilon\mathbb{I}_d\right)\psi\right|^2\right)^{1/2}\left(\int \frac{1}{|x|}|\psi|^2\right)^{1/2}
\end{aligned}$$

Finalmente, de (1.34) y (1.35), se concluye la prueba. ∎

1.3. Teorema Virial

Sea la ecuación de Schrödinger lineal

$$\partial_t\psi = \mathrm{i}\Delta\psi \qquad , \qquad x \in \mathbb{R}^d\ ,\ t \in \mathbb{R}. \tag{1.36}$$

Haremos unas cuentas para estimar la cantidad $\int |x|^2\,|\psi(x,t)|^2\,dx$, la cual esta relacionada con la posición de la partícula en un tiempo t. Para esto, procedemos de manera formal. Consideramos dos funciones, una radial $\phi(x) = \phi(|x|)$ y la otra h, definida por

$$h(t) = \int \phi(x)\,|\psi(x,t)|^2\,dx, \tag{1.37}$$

donde ψ es solución de la ecuación (1.36). Denotamos $\partial_t\psi = \psi_t$, entonces

$$\frac{d}{dt}|\psi(x,t)|^2 = \psi_t\overline{\psi} + \psi\overline{\psi_t} = \mathrm{i}\left(\Delta\psi\overline{\psi} - \psi\overline{\Delta\psi}\right) = \mathrm{idiv}\left(\nabla\psi\overline{\psi} - \psi\overline{\nabla\psi}\right) = -2\mathrm{divIm}\left(\nabla\psi\overline{\psi}\right). \tag{1.38}$$

La primera derivada de la función h viene dada por

$$h'(t) = \int \phi(x)\frac{d}{dt}|\psi(x,t)|^2\,dx = -2\mathrm{Im}\int \phi\mathrm{div}\left(\nabla\psi\overline{\psi}\right) = 2\mathrm{Im}\int \nabla\phi\nabla\psi\overline{\psi}. \tag{1.39}$$

La segunda derivada de la función h viene dada por

$$
\begin{aligned}
h''(t) &= 2\mathrm{Im}\int \nabla\phi\frac{d}{dt}\left(\nabla\psi\overline{\psi}\right)\\
&= 2\mathrm{Im}\int \nabla\phi\left(\nabla\psi_t\overline{\psi}+\nabla\psi\overline{\psi_t}\right)\\
&= 2\mathrm{Im}\int \nabla\phi\left(\nabla(\mathrm{i}\Delta\psi)\overline{\psi}+\nabla\psi(-\mathrm{i}\overline{\Delta\psi})\right)\\
&= 2\mathrm{Re}\int \nabla\phi\left(\nabla(\Delta\psi)\overline{\psi}-\nabla\psi(\overline{\Delta\psi})\right)\\
&= 2\mathrm{Re}\int \Delta\psi\nabla(\nabla\phi\overline{\psi})-\nabla\psi\overline{\Delta\psi}\nabla\phi\\
&= 2\mathrm{Re}\int -\left(\Delta\psi\Delta\phi\overline{\psi}+\Delta\psi\nabla\phi\nabla\overline{\psi}\right)-\nabla\psi\overline{\Delta\psi}\nabla\phi\\
&= -2\mathrm{Re}\int \Delta\psi\Delta\phi\overline{\psi}-2\mathrm{Re}\int \Delta\psi\nabla\phi\nabla\overline{\psi}-\nabla\psi\overline{\Delta\psi}\nabla\phi\\
&= -2\mathrm{Re}\int \Delta\psi\Delta\phi\overline{\psi}-2\mathrm{Re}\int \nabla\phi(\Delta\psi\overline{\nabla\psi}+\overline{\Delta\psi}\nabla\psi)\\
&= -2\mathrm{Re}\int \Delta\psi\Delta\phi\overline{\psi}-4\mathrm{Re}\int \nabla\phi\Delta\psi\overline{\nabla\psi}\\
&= -2\mathrm{Re}\int \Delta\psi\Delta\phi\overline{\psi}-4\mathrm{Re}\int \nabla\phi\Delta\psi\overline{\nabla\psi}\\
&= -2\mathrm{Re}\int \Delta\psi\Delta\phi\overline{\psi}+2\nabla\phi\Delta\psi\overline{\nabla\psi}\\
&= -4\mathrm{Re}\int \Delta\psi\left(\nabla\phi\nabla+\frac{1}{2}\Delta\phi\right)\overline{\psi}\\
&= -4\mathrm{Re}\int \Delta\psi\overline{A\psi}=4\mathrm{Re}\int \nabla\psi\overline{\nabla A\psi},
\end{aligned}
$$

donde $A=\nabla\phi\nabla+\dfrac{1}{2}\Delta\phi$. Por lo tanto, al ser A un operador antisimétrico, obtenemos

$$
h''(t)=4\mathrm{Re}\int \nabla\psi\overline{A\nabla\psi}+4\mathrm{Re}\int \nabla\psi(\overline{\nabla A-A\nabla)\psi}=4\mathrm{Re}\int \nabla\psi(\overline{\nabla A-A\nabla)\psi}. \tag{1.40}
$$

Ahora calculamos el respectivo conmutador

$$
\begin{aligned}
(\nabla A - A\nabla)\,\psi &= \nabla(A\psi) - A(\nabla\psi) \\
&= \nabla\left(\nabla\phi\nabla\psi + \frac{1}{2}(\Delta\phi)\psi\right) - \left(\nabla\phi\nabla(\nabla\psi) + \frac{1}{2}(\Delta\phi)\nabla\psi\right) \\
&= \Delta\phi\nabla\psi + \nabla\phi\Delta\psi + \frac{1}{2}\left(\nabla\Delta\phi\psi + \Delta\phi\nabla\psi\right) - \nabla\phi\Delta\psi - \frac{1}{2}\Delta\phi\nabla\psi \\
&= \left(\Delta\phi\nabla + \frac{1}{2}\nabla\Delta\phi\right)\psi.
\end{aligned}
\tag{1.41}
$$

Por otro lado, se verifica

$$
\begin{aligned}
2\mathrm{Re}\int \psi\nabla\Delta\phi\nabla\overline{\psi} &= \int \psi\nabla\Delta\phi\nabla\overline{\psi} + \int \overline{\psi}\nabla\Delta\phi\nabla\psi \\
&= \int \nabla\overline{\psi}(\nabla\Delta\phi\psi) + \int \nabla\psi(\nabla\Delta\phi\overline{\psi}) \\
&= -\left(\int \overline{\psi}(\Delta^2\phi)\psi + \overline{\psi}\nabla\Delta\phi\nabla\psi + \psi(\Delta^2\phi)\overline{\psi} + \psi\nabla\Delta\phi\nabla\overline{\psi}\right) \\
&= -2\int \Delta^2\phi\,|\psi|^2 - 2\mathrm{Re}\int \psi\nabla\Delta\phi\nabla\overline{\psi}.
\end{aligned}
$$

Entonces

$$
2\mathrm{Re}\int \psi\nabla\Delta\phi\nabla\overline{\psi} = -\int \Delta^2\phi\,|\psi|^2\,. \tag{1.42}
$$

Reemplazando (1.41) y (1.42) en la ecuacón (1.40), obtenemos

$$
\begin{aligned}
h''(t) &= 4\mathrm{Re}\int \nabla\psi\overline{\left(\Delta\phi\nabla + \frac{1}{2}\nabla\Delta\phi\right)\psi} \\
&= 4\mathrm{Re}\int \nabla\psi\Delta\phi\overline{\nabla\psi} + 2\mathrm{Re}\int \nabla\psi\nabla\Delta\phi\overline{\psi} \\
&= 4\int \nabla\psi\Delta\phi\overline{\nabla\psi} - \int \Delta^2\phi\,|\psi|^2\,.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, hemos demostrado el siguiente lema.

Lema 1.3.1 *Sean ψ una solución de la ecuación (1.36), ϕ una función radial y h definida por (1.37). Entonces*

$$
h''(t) = 4\int \nabla\psi\Delta\phi\overline{\nabla\psi} - \int \Delta^2\phi\,|\psi|^2\,.
$$

Si $\phi(x) = |x|^2$. Se cumple que

$$\Delta\phi = 2\mathbb{I}_d \quad , \quad \Delta^2\phi = 0.$$

Por lo tanto, el siguiente corolario es consecuencia inmediata del lema 1.3.1.

Corolario 1.3.1 *Si $\phi(x) = |x|^2$. Entonces*

$$h''(t) = 8\int |\nabla\psi(x,t)|^2\, dx.$$

Si ψ es una solución de la ecuación (1.36), entonces la función $\int |\psi(x,t)|^2\, dx$ es constante. En efecto, de la ecuación (1.38) obtenemos

$$\frac{d}{dt}\int |\psi(x,t)|^2\, dx = -2\mathrm{Im}\int \mathrm{div}\left(\nabla\psi\overline{\psi}\right) = -2\mathrm{Im}\int \nabla\psi\nabla\overline{\psi} + \Delta\psi\overline{\psi} = 0.$$

Como $\nabla\psi$ también es solución de (1.38), se cumple

$$\frac{d}{dt}\int |\nabla\psi(x,t)|^2\, dx = 0. \tag{1.43}$$

Teorema 1.3.1 *Sea ψ una solución de la ecuación (1.36), con condición inicial $\psi_0(x) = \psi(x,0)$. Entonces*

$$h(t) = \int |x|^2\, |\psi(x,t)|^2\, dx$$

es una función convexa. Más aún, es una función polinómica de grado 2.

Demostración: Denotamos las constantes

$$a = \int |x|^2\, |\psi_0(x)|^2\, dx \quad , \quad b = \int |\nabla\psi_0(x)|^2\, dx. \tag{1.44}$$

Por el corolario 1.3.1 y de (1.43), $h''(t) = 8b > 0$. Por lo tanto, h es una función convexa. Más aún

$$h(t) = a + h'(0)t + 4bt^2.$$

■

Lema 1.3.2 *Sea ψ una solución de la ecuación (1.36), con condición inicial ψ_0. Entonces*

a. Si $\nu \in \mathbb{R}^d$, la función $\psi_\nu(x,t) = e^{-\mathrm{i}t|\nu|^2+\mathrm{i}\nu\cdot x}\psi(x-2t\nu,t)$ también es solución de (1.36), con condición inicial $\psi_\nu(x,0) = e^{-\mathrm{i}\nu\cdot x}\psi_0(x)$.

b. Si $x_0 \in \mathbb{R}^d$, la función entonces $\psi^{x_0}(x,t) = \psi(x-x_0,t)$ también es solución de la ecuación (1.36), con condición inicial $\psi^{x_0}(x,0) = \psi_0(x-x_0)$.

Observación 2 (Sobre $h'(0)$) *En la demostración del teorema 1.3.1, se puede considerar $h'(0) = 0$. En efecto, si $\psi(x,t)$ es una solución de la ecuación de Schrödinger*

$$\partial_t \psi = i\Delta\psi, \tag{1.45}$$

con condición inicial $\psi_0(x)$, entonces $\overline{\psi(x,-t)}$ también es solución de la ecuación de schrodinger, con condición inicial $\overline{\psi_0(x)}$. Por lo tantom, las cantidad a y b definidas en la prueba del teorema 1.3.1, son las mismas para ambas soluciones. Por lo tanto,

$$h(t) = \int \phi(x)\,|\psi(x,t)|^2\,dx = \int \phi(x)\left|\overline{\psi(x,-t)}\right|^2 dx = \int \phi(x)\,|\psi(x,-t)|^2\,dx = h(-t).$$

Entonces

$$a + h'(0)t + 4bt^2 = h(t) = h(-t) = a - h'(0)t + 4bt^2,$$

así, $h'(0) = 0$ y $h(t) = a + 4bt^2$.

A continuación, hacemos una cuenta formal para derivar la desigualdad de Heisenberg-Pauli-Weyl. Para lo cual, procedemos tal como en la primera sección de este capítulo. En $L^2\left(\mathbb{R}^d\right)$ consideramos los operadores $S\psi = x\psi$ y $A\psi = \nabla\psi$ y calculamos su respectivo conmutador

$$(SA - AS)\,\psi = S(A\psi) - A(S\psi) = S(\nabla\psi) - A(x\psi) = x\nabla\psi - \nabla(x\psi) = -d\psi.$$

Entonces

$$d\int|\psi|^2 = -\langle(SA-AS)\psi,\psi\rangle \leq 2\,\|S\psi\|\,\|A\psi\| = 2\left(\int|x|^2\,|\psi|^2\right)^{1/2}\left(\int|\nabla\psi|^2\right)^{1/2}. \tag{1.46}$$

La desigualdad (1.46) es llamada **desigualdad de Heisenberg-Pauli-Weyl** .

Sea una ψ solución de la ecuación de Schrödinger con condición inicial $\psi_0(x)$ tal que $\|\psi_0\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} = 2/d$. De la definición de las constantes a y b, y la desigualdad (1.46) aplicada a ψ_0, se sigue que $1 \leq ab$. Entonces

$$h(t) = a + 4bt^2 \geq a + \frac{4}{a}t^2,$$

donde la igualdad ($1 = ab$) se cumple si y solo si existe una función φ tal que $(S+A)\varphi = 0$. Tal función existe y se trata de la gausiana $\varphi(x) = Ke^{-|x|^2/2}$, donde K es una constante tal que $\|\varphi\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} = 2/d$.

Lema 1.3.3 *Sea ψ una solución de la ecuación $\partial_t\psi = (S + A)\psi$, donde los operadores S y A son simétrico y antisimétrico, respectivamente. Si $[S, A] = SA - SA \geq 0$, entonces la función $H(t) = \langle\psi, \psi\rangle$ es logarítmicamente convexa.*

Demostración: Calculamos la primera y segunda deriva de H.

$$\begin{aligned}
H'(t) &= \langle\psi_t, \psi\rangle + \langle\psi, \psi_t\rangle = \langle(S + A)\psi, \psi\rangle + \langle\psi, (S + A)\psi\rangle = 2\langle S\psi, \psi\rangle. \\
H''(t) &= 2\left(\langle(S\psi)_t, \psi\rangle + \langle S\psi, \psi_t\rangle\right) \\
&= 2\left(\langle S\psi_t, \psi\rangle + \langle S\psi, \psi_t\rangle\right) \\
&= 2\left(\langle\psi_t, S\psi\rangle + \langle S\psi, \psi_t\rangle\right) \\
&= 2\left(\langle(S + A)\psi, S\psi\rangle + \langle S\psi, (S + A)\psi, \psi\rangle\right) \\
&= 4\langle S\psi, S\psi\rangle + 2\langle(SA - AS)\psi, \psi\rangle.
\end{aligned}$$

A continuación, calculamos la segunda derivada de $\log H$.

$$
\begin{aligned}
(\log H)'' &= \left(\frac{H'}{H}\right)' = \frac{H''H - (H')^2}{H^2} \\
&= \frac{\left(4\langle S\psi, S\psi\rangle + 2\langle (SA - AS)\psi, \psi\rangle\right)\langle \psi, \psi\rangle - \left(2\langle S\psi, \psi\rangle\right)^2}{\langle \psi, \psi\rangle^2} \\
&= \frac{4\left\|S\psi\right\|^2\left\|\psi\right\|^2 - 4\langle S\psi, \psi\rangle^2}{\left\|\psi\right\|^4} + \frac{2\langle (SA - AS)\psi, \psi\rangle}{\left\|\psi\right\|^2} \\
&\geq \frac{2\langle (SA - AS)\psi, \psi\rangle}{\left\|\psi\right\|^2} \geq 0.
\end{aligned}
$$

El resultado se sigue de esta desigualdad. ∎

Ejemplo 5 *En el espacio $L^2(\mathbb{R})$, consideramos $S \equiv 0$ y $A = \mathrm{i}\partial_x$. Es claro que los operadores S y A son simétrico y antisimétrico, respectivamente. Como $SA - AS \equiv 0$, por el lema 1.3.3, se cumple la desigualdad*

$$
\int |\psi(x,t)|^2\,dx \leq \left(\int |\psi(x,0)|^2\,dx\right)^{\frac{1-t}{2}} \left(\int |\psi(x,1)|^2\,dx\right)^{\frac{t}{2}}.
$$

En particular, si $\psi(x,1) = 0$ y $\psi(x,0) \in L^2(\mathbb{R})$, la solución de la ecuación $\partial_t\psi = \mathrm{i}\partial_x\psi$ es idénticamente nula. Análogamente, se obtiene desigualdad para los pares $S = \Delta, A \equiv 0$ y $S = 0, A = \mathrm{i}\Delta$.

Teorema 1.3.2 *Sea ψ una solución de la ecuación $\partial_t\psi = \mathrm{i}\Delta\psi$. Sean $\lambda > 0$ y la función H definida por*

$$
H(t) = \int e^{2\lambda|x|^2}\,|\psi(x,t)|^2\,dx,
$$

tal que $H(0) + H(1) < \infty$. Entonces $\log H$ es una función convexa.

Demostración: Usamos el lema 1.3.3 para probar que la función $\log H$ es convexa. Seguidamente, enunciaremos un lema previo para probar que $H(t) < \infty$.

Sea $\phi(x)$ una función radial y $H(t) = \langle e^{\lambda\phi}\psi, e^{\lambda\phi}\psi\rangle = \langle f, f\rangle$, donde $f = e^{\lambda\phi}\psi$. Entonces:

$$\begin{aligned}
\Delta\psi &= \Delta(e^{-\lambda\phi}f) = \mathrm{div}\nabla.(e^{-\lambda\phi}f) = \mathrm{div}(-\lambda\nabla\phi e^{-\lambda\phi}f + e^{-\lambda\phi}\nabla f) \\
&= -\lambda(\Delta\phi e^{-\lambda\phi}f + \nabla\phi(-\lambda\nabla\phi e^{-\lambda\phi}f + e^{-\lambda\phi}\nabla f)) + (-\lambda\nabla\phi e^{-\lambda\phi}\nabla f + e^{-\lambda\phi}\Delta f) \\
&= -\lambda\Delta\phi e^{-\lambda\phi}f + \lambda^2 |\nabla\phi|^2 e^{-\lambda\phi}f - \lambda\nabla\phi e^{-\lambda\phi}\nabla f - \lambda\nabla\phi e^{-\lambda\phi}\nabla f + e^{-\lambda\phi}\Delta f \\
&= e^{-\lambda\phi}(-\lambda\Delta\phi f + \lambda^2 |\nabla\psi|^2 f - 2\lambda\nabla\phi\nabla f + \Delta f) \\
&= e^{-\lambda\phi}((\lambda^2 |\nabla\phi|^2 + \Delta)f - (\lambda\Delta\phi + 2\lambda\nabla\phi\nabla)f).
\end{aligned}$$

Entonces

$$\partial_t f = e^{\lambda\phi}\psi_t = \mathrm{i}e^{\lambda\phi}\Delta\psi = \mathrm{i}(\lambda^2 |\nabla\phi|^2 + \Delta)f - \mathrm{i}(\lambda\Delta\phi + 2\lambda\nabla\phi\nabla)f = (S + A)f, \qquad (1.47)$$

donde $S = -\mathrm{i}\lambda(\Delta\phi + 2\nabla\phi\nabla)$, $A = \mathrm{i}(\lambda^2 |\nabla\phi|^2 + \Delta)$. Es claro que los operadores S y A son simétrico y antisimétrico, respectivamente.

Para $\phi(x) = |x|^2$, se tiene las igualdades

$$\nabla(\phi) = 2x \;\;,\;\; \Delta^2\phi = 0.$$

Entonces

$$\langle (SA - AS)f, f\rangle = \lambda\left(32\lambda^2 \int |x|^2 |f|^2 + 8\int |\nabla f|^2\right) \geq 0.$$

Por el lema 1.3.3, la función $\log H$ es convexa. De hecho, se puede refinar esta cota por un número estrictamente positivo. En efecto, por la desigualdad de Heisenberg-Pauli-Weyl, se tiene

$$\begin{aligned}
\lambda d \int |f|^2 &\leq \left(4\lambda^2 \int |x|^2 |f|^2\right)^{1/2} \left(\int |\nabla f|^2\right)^{1/2} \\
&\leq \frac{1}{2}\left(4\lambda^2 \int |x|^2 |f|^2\right) + \frac{1}{2}\left(\int |\nabla f|^2\right) \\
&= 2\lambda^2 \int |x|^2 |f|^2 + \frac{1}{2}\int |\nabla f|^2 .
\end{aligned}$$

Multiplicando a ambos mienbros de la desigualdas por 16λ, ontenemos

$$\langle (SA - AS)f, f\rangle \geq 16\lambda^2 d \int |f|^2 > 0.$$

Lema 1.3.4 *Si ψ es una solución de la ecuación $\partial_t\psi = (S+A)\psi$, donde los operadores S y A son simétrico y antisimétrico, respectivamente. Entonces*

$$\int_0^1 \eta'(t)H'(t)dt = \eta' H|_0^1 - \int_0^1 \eta''(t)H(t)dt. \tag{1.48}$$

Además, si consideramos una perturbación del sistema inicial: $\partial_t\psi = (S+A)\psi + V(x,t)\psi$, entonces

$$\int_0^1 \eta'(t)H'(t)dt = 2\eta\langle S\psi,\psi\rangle|_0^1 - 2\int_0^1 \eta\frac{d}{dt}\langle S\psi,\psi\rangle dt + 2\mathrm{Re}\int_0^1 \eta'(t)\langle V(\cdot,t)\psi,\psi\rangle dt. \tag{1.49}$$

Demostración: Sabemos que $(\eta\prime H)' = \eta'' H + \eta' H'$, integrando de 0 a 1 y usando el Teorema Fundamental del Cálculo, se sigue la igualdad (1.48). A continuación mostramos la igualdad (1.49).

$$\begin{aligned} H'(t) &= \langle \psi_t,\psi\rangle + \langle \psi,\psi_t\rangle = \langle (S+A)\psi + V\psi,\psi\rangle + \langle \psi,(S+A)\psi + V\psi\rangle \\ &= \langle (S+A)\psi,\psi\rangle + \langle \psi,(S+A)\psi\rangle + \langle V\psi,\psi\rangle + \langle \psi, V\psi\rangle \\ &= 2\langle S\psi,\psi\rangle + 2\mathrm{Re}\langle V\psi,\psi\rangle, \end{aligned}$$

por lo tanto:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \eta' H' dt = 2\int_0^1 \eta'\langle S\psi,\psi\rangle + 2\mathrm{Re}\int_0^1 \eta'(t)\langle V(\cdot,t)\psi,\psi\rangle dt \\ = 2\eta\langle S\psi,\psi\rangle|_0^1 - 2\int_0^1 \eta\frac{d}{dt}\langle S\psi,\psi\rangle + 2\mathrm{Re}\int_0^1 \eta'(t)\langle V(\cdot,t)\psi,\psi\rangle dt. \end{aligned}$$

$\blacksquare$

Observación 3 (Recuperación de la función H**)** *Sea* ψ *una solución de la ecuación de Schrödinger con potencial,* $\partial_t\psi = (S+A)\psi + V(x,t)\psi$*. Entonces*

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\langle S\psi,\psi\rangle &= \langle (S\psi)_t,\psi\rangle + \langle S\psi,\psi_t\rangle = \langle S\psi_t,\psi\rangle + \langle S\psi,\psi_t\rangle = \langle \psi_t, S\psi\rangle + \langle S\psi,\psi_t\rangle \\ &= \langle (S+A)\psi + V\psi, S\psi\rangle + \langle S\psi, (S+A)\psi + V\psi\rangle \\ &= \langle (S+A)\psi, S\psi\rangle + \langle V\psi, S\psi\rangle + \langle S\psi,(S+A)\psi\rangle + \langle S\psi, V\psi\rangle \\ &= 2\langle S\psi, S\psi\rangle + \langle (SA-AS)\psi,\psi\rangle + 2\mathrm{Re}\langle V\psi, S\psi\rangle.\end{aligned}$$

Luego, de las igualdades (1.48) y (1.49), obtenemos

$$\begin{aligned}\eta' H|_0^1 - \int_0^1 \eta''(t)H(t)dt &= 2\eta\langle S\psi,\psi\rangle|_0^1 - 2\int_0^1 \eta\frac{d}{dt}\langle S\psi,\psi\rangle dt + 2\mathrm{Re}\int_0^1 \eta'(t)\langle V(\cdot,t)\psi,\psi\rangle dt \\ &= 2\eta\langle S\psi,\psi\rangle|_0^1 - 2\int_0^1 \eta\left[2\langle S\psi,S\psi\rangle + \langle (SA-AS)\psi,\psi\rangle + 2\mathrm{Re}\langle V\psi,S\psi\rangle\right]dt \\ &\quad + 2\mathrm{Re}\int_0^1 \eta'(t)\langle V(\cdot,t)\psi,\psi\rangle dt.\end{aligned}$$

Imponiendo que $\eta(0) = 0 = \eta(1)$ *de manera que el término* $\eta\langle S\psi,\psi\rangle|_0^1$ *se anula, entonces*

$$\begin{aligned}&4\int_0^1 \eta\langle S\psi,S\psi\rangle + 2\int_0^1 \eta\langle (SA-AS)\psi,\psi\rangle dt - \int_0^1 \eta''(t)H(t)dt \\ &= -\eta' H|_0^1 + 2\mathrm{Re}\int_0^1 \eta'(t)\langle V(\cdot,t)\psi,\psi\rangle dt - 2\mathrm{Re}\int_0^1 \eta\langle V\psi,S\psi\rangle dt.\end{aligned}$$

De esta igualdad, si consideramos funciones η *con suficiente regularidad y, por ejemplo, si* $V \in L^\infty$*, se puede recuperar la función* H*.*

1.4. Ecuación del calor vs Ecuación de Schrödinger

En esta sección las cuentas serán hechas de manera formal. En $\mathbb{R}^d$, es conocido que la solución fundamental de la ecuación del calor, $\psi_t = \Delta\psi$, viene dada por

$$\phi(x,t) = \frac{1}{t^{d/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \tag{1.50}$$

Sea $a > 0$ y hacemos el cambio $t \mapsto t + ia$. La función $\phi_c(x,t) = \phi(x, t + ia)$ también es solución de la ecuación del calor y, por (1.50), se tiene

$$\phi_c(x,t) = \frac{1}{(t+ia)^{d/2}} e^{-\dfrac{|x|^2}{4(t+ia)}} = \frac{1}{(t+ia)^{d/2}} e^{-\dfrac{t\,|x|^2}{4(t^2+a^2)}} e^{-\dfrac{ia\,|x|^2}{4(t^2+a^2)}}.$$

Estudiemos la dinámica de ϕ_c a medida que pasa el tiempo.

- Para $t = 0$, se tiene
$$\phi_c(x,0) = \frac{1}{(ia)^{d/2}} e^{-\dfrac{i}{4}|x|^2} \sim \cos\left(\frac{|x|^2}{4}\right).$$
- Para $t = na$, con $n \in \mathbb{N}$, se tiene
$$\phi_c(x,na) = \frac{1}{(na+ia)^{d/2}} e^{-\dfrac{na\,|x|^2}{4(n^2a^2+a^2)}} e^{-\dfrac{ia\,|x|^2}{4(n^2a^2+a^2)}} \sim e^{-\dfrac{n\,|x|^2}{4a(n^2+1)}}$$
  la cual es una función gausiana centrada en 0 y de base $\left(2a\left(n + \frac{1}{n}\right)\right)^{1/2}$. Intutitivamente esto refleja que para valores $0 < a < 1$, la solución es muy concentrada alrededor del origen; y para valores de $a > 1$, la solución se dispersa alrededor del origen. De hecho, podemos calcular explícitamente el valor crítico del tiempo en el cual cambia la dinámica. Basta con hallar el máximo de la función $f(t) = -\dfrac{t}{4(t^2+a^2)}$; para lo cual, calculamos la derivada de f.
$$f'(t) = -\frac{4(t^2+a^2) - t(8t)}{(t^2+a^2)^2} = \frac{4a^2 - 4t^2}{(t^2+a^2)^2}.$$
  Esta derivada se anula en $t_0 = a$. Esto corrobora lo que intuivamente notamos. Es decir, desde el tiempo $0 < t < a$, la solución se está concentrando alrededor del origen y, en el tiempo $t_0 = a$ alcanza su máxima concentración; para luego empezar a disperzarse. Aún así, mantiene su forma de gausiana.

Por otro lado, si hacemos el cambio $t \mapsto it + a$, la función $\phi_s(x,t) = \phi(x, it + a)$ es una solución de la ecuación de Schrödinger $\psi_t = i\Delta\psi$. Entonces

$$\phi_s(x,t) = \frac{1}{(it+a)^{d/2}} e^{-\dfrac{|x|^2}{4(it+a)}} = \frac{1}{(it+a)^{d/2}} e^{-\dfrac{a\,|x|^2}{4(t^2+a^2)}} e^{-\dfrac{it\,|x|^2}{4(t^2+a^2)}}.$$

Veamos la dinámica de ϕ_s a medida que pasa el tiempo.

- Para $t = 0$, se tiene
$$\phi_s(x,0) = \frac{1}{a^{d/2}} e^{-\dfrac{|x|^2}{4a}},$$
la cual es una función gausiana centrada en cero y con base $(2a)^{1/2}$.

- Para $t = na$, con $n \in \mathbb{N}$, se tiene
$$\phi_s(x,na) = \frac{1}{(ina+a)^{d/2}} = \frac{1}{(na+ia)^{d/2}} e^{-\dfrac{a\,|x|^2}{4(n^2a^2+a^2)}} e^{\dfrac{it\,|x|^2}{4(n^2a^2+a^2)}} \sim e^{-\dfrac{|x|^2}{4a(n^2+1)}},$$
la cual es una función gausiana centrada en el origen y de base es $(2a(n^2+1))^{1/2}$. Notemos que esta cantidad crece más rápido que la base encontrada para la ecuación del calor, es decir a medida que pasa el tiempo, la solución de la ecuación de Schrödinger se disipa rápidamente, a pesar de que en el tiempo $t = 0$, se comportaba como una sinoidal. Esto es debido a que la función $f(t) = -\dfrac{a}{4(t^2+a^2)}$ alcanza su máximo en $t_0 = 0$.

Concluimos que, mientras la solución de la ecuación del calor en tiempos cercanos a cero, se concentra alrededor del origen hasta llegar a un tiempo crítico a partir del cual se disipa conservando la estructura gausiana. Por el contrario, la solución de la ecuación de Schrödinger se disipa inmediatamente para un tiempo $t > 0$ y con una velocidad de disipación mayor que la del calor.

Capítulo 2

Parte Naiara

En este capítulo se asume que el lector está familiarizado con Teoría de Espacios de Hilbert, Espacios L^p, Teoría de Operadores, Ecuación de Dirac. Para estos temas, por ejemplo, ver ([3]), ([8]), ([11]), ([13]), ([14]). Para mayores detalles de los resultados mostrados, consultar el artículo ([1]), y las referencias contenidas en el mismo.

2.1. Extensiones Autoadjuntas del Operador de Dirac

Consideramos los operadores $H_0 = -\mathrm{i}\alpha\nabla + m\beta$ y $H = H_0 + \mathbb{V}$. La ecuación de Dirac con potencial $\mathbb{V}$ viene dada por

$$\mathrm{i}\partial_t\psi(x,t) = H\psi(x,t).$$

En este capítulo estudiamos bajo qué condiciones sobre el potencial $\mathbb{V}$, el operador H es autoadjunto. Propiamente hablando, se mostrará que si $\mathbb{V}$ es simétrico y $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}^3/\{0\}} |x|\,\|\mathbb{V}\| < 1$, entonces H es autoadjunto en un subespacio de $L^2\left(\mathbb{R}^3,\mathbb{C}^4\right)$.

Previamente, damos la definición de operadores simétricos, autoadjuntos y esencialmente autoadjuntos. Sea $T : D(T) \subset H \to H$ un operador densamente definido en un espacio de Hilbert H. Definimos el conjunto

$$D(T^*) = \{\psi \in H \mid \exists\, \psi^* \in H \text{ tal que } \langle A\varphi, \psi\rangle_H = \langle \varphi, \psi^*\rangle_H \text{ para toda } \varphi \in D(T)\}\,.$$

Para cada $\psi \in D(T)$, $\psi^* \in H$ es único. En efecto, si $\langle T\varphi, \psi\rangle = \langle \varphi, \psi_1^*\rangle$ y $\langle T\varphi, \psi\rangle = \langle \varphi, \psi_2^*\rangle$, para toda $\varphi \in D(T)$. Entonces

$$\langle \varphi, \psi_1^* - \psi_2^*\rangle = 0 \ \ , \ \ \varphi \in D(T).$$

Desde que $D(T)$ e sun subespacio denso de H, se sigue que $\psi_1^* = \psi_2^*$. Por lo tanto, la aplicación $T^* : D(T^*) \subset H \to H$ dada por $T^*\psi = \psi^*$, está bien definida.

Definición 2.1.1 *Sea $T : D(T) \subset H \to H$ un operador densamente definido en un espacio de Hilbert H. El operador T^* se llama* **dual** *de T.*

Definición 2.1.2 *Un operador $T : D(T) \subset H \to H$, densamente definido en un espacio de Hilbert H, se llama* **simétrico** *si $T \subset T^*$, es decir, si $D(T) \in D(T^*)$ y $T\psi = T^*\psi$ para toda $\psi \in D(T)$.*

Definición 2.1.3 *Un operador T es llamado* **autoadjunto** *si $T = T^*$, es decir, si T es simétrico y $D(T) = D(T^*)$.*

Teorema 2.1.1 *Sea T un operador simétrico en un espacio de Hilbert H. Las siguientes afirmacione son equivalentes:*

a. T es autoadjunto.

b. T es cerrado y $\ker(T^* \pm \mathrm{i}) = \{0\}$.

c. $Ran(T \pm \mathrm{i}) = H$.

Definición 2.1.4 *Un operador $T : D(T) \subset H \to H$, densamente definido en un espacio de Hilbert H, se llama* **esencialmente autoadjunto** *si $\overline{T}$ es autoadjunto.*

Corolario 2.1.1 *Sea T un operador simétrico en un espacio de Hilbert H. Las siguientes afirmacione son equivalentes:*

a. *T es esencialmente autoadjunto.*

b. $\ker(T^* \pm \mathrm{i}) = \{0\}$.

c. $\overline{Ran(T \pm \mathrm{i})} = H$.

Ahora, hacemos un repaso breve de la literatura.

- El operador $H_0 = -\mathrm{i}\alpha\nabla + m\beta$ es autoadjunto en $H^1\left(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^4\right)$. Intuitivamente H_0 describe los movimientos realtivistas de partículas con spín $1/2$ y sin interacción entre átomos o fuerzas externas. Este es un modelo idealizado, por lo cual, para hacerlo más realista, se adiciona un potencial $\mathbb{V}$.
- Kato $'80$. Si $|V_{i,j}| \leq \frac{a}{2} + b$ con $a < 1$ y $b > 0$. Entonces $H_0 + \mathbb{V}$ es esencialmente autoadjunto en $C_c^\infty\left(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^4\right)$.
- Weidmann $'71$. Si $\mathbb{V} = \frac{v}{|x|}\mathbb{I}_4$. Entonces, H es esencialmente autoadjunto en $C_c^\infty\left(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^4\right)$ si y solo si $|v| < \frac{\sqrt{3}}{2}$ y es autoadjunto en $H^1\left(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^4\right)$.
- Wüst $'73$. Si $\mathbb{V} = \frac{v}{|x|}\mathbb{I}_4$, con $v < 1$. Entonces H posee una única extensión autoadjunta de H tal que $D(T) \subset D(r^{-1/2})$.
- Schimcke $'76$. Para el caso anterior, probó que existe una única extensión autoadjunta de H en $C_c^\infty\left(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^4\right)$ con $D(H) \subset H^{1/2}$.
- Esteban y Loss, 2007. Si $H = H_0 + \frac{v}{|x|}$ con v una matriz diagonal tal que $|v(x)| \leq \frac{1}{|x|}$ y $\lambda \in (-1, 1)$. Entonces:

$$\int \frac{1}{|x|\,|\phi|^2} \leq \int \frac{|\sigma.\nabla\phi|^2}{1 - \frac{v}{|x|} + \lambda} + (1+\lambda)\int |\phi|^2 + \frac{\nabla v}{(v-\gamma)^2} \in L^2_{loc}.$$

- Si $V = \begin{pmatrix} w_1 & 0 \\ 0 & w_2 \end{pmatrix}$, donde w_1 es una función real o medida, $w_2 \geq 0$ y $m > 0$. Si $w_i \leq V_i \leq \frac{1}{|x|}$ para $i = 1, 2$. Entonces:

$$\int V_1 |\phi|^2 \leq \int \frac{|\sigma.\nabla\phi|^2}{m + V_2 - \lambda} + (m + \lambda) \int |\phi|^2 .$$

Observación 4 *El potencial* $\mathbb{V} = \begin{pmatrix} v/|x| & \sigma.A \\ \sigma.A & v/|x| \end{pmatrix}$, *no cumple las condiciones anteriores. En este caso, se hace uso de extensiones autoadjuntas.*

En el teorema 1.2.1 del capítulo 1, se probó la desigualdad de Hardy para la ecuación de Dirac:

$$\int \frac{|\psi|^2}{|x|} dx \leq \int |(i\alpha\nabla + m\beta \pm \epsilon i \mathbb{I}_d)\,\psi|^2 \,|x|\, dx \quad , \quad m > 0, \epsilon \in \mathbb{R}. \tag{2.1}$$

Lema 2.1.1 *Se cumple la desigualdad:*

$$\frac{8}{9} \int |x|\, |\alpha\nabla\psi|^2 \leq \int |(\alpha\nabla + \mathrm{i}m\beta \pm \epsilon \mathbb{I}_d)\,\psi|^2 \,|x|\, dx \quad , \quad m > 0, \epsilon \in \mathbb{R}.$$

Teorema 2.1.2 *Sea* $\mathbb{V}$ *una matriz simétrica tal que* $\sup\limits_{x \in \mathbb{R}^3/\{0\}} |x|\, \|\mathbb{V}\| = c < 1$. *Si* $\|\mathbb{V}\| = \sup\limits_{\|\psi\|=1} \langle \mathbb{V}\psi, \mathbb{V}\psi \rangle^{1/2}$ *y* $f \in L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^4)$. *Entonces:*

- *Existe una única* $\psi \in L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^4)$ *tal que*

$$\int \psi \overline{(H + \mathrm{i})\varphi} = \int f \overline{\varphi} \quad , \quad \textit{para toda } \varphi \in L^2, (H + \mathrm{i})\varphi \in L^2. \tag{2.2}$$

- *Existe una única* $\psi \in L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^4)$ *tal que*

$$\int \psi \overline{(H - \mathrm{i})\varphi} = \int f \overline{\varphi} \quad , \quad \textit{para toda } \psi \in L^2, (H - \mathrm{i})\varphi \in L^2. \tag{2.3}$$

Además:

$$\|\psi\|_2 \leq \|f\|_2 \,. \tag{2.4}$$

$$\int \frac{1}{|x|}\,|\psi|^2 \leq C\,\|f\|_2^2 \quad , \quad C > 0. \tag{2.5}$$

$$\int_{|x|<1} |x|\,|\alpha.\nabla\psi|^2 \leq C\,\|f\|_2^2 \quad , \quad C > 0. \tag{2.6}$$

$$\|\psi\|_{H^{1/2}} \leq C\,\|f\|_2 \quad , \quad C > 0. \tag{2.7}$$

Sean $f_1, f_2 \in L^2$ *y sus correspondientes* $\psi_1, \psi_2 \in H^{1/2}$*. Entonces*

$$\int (H \pm \mathrm{i})\psi_1\overline{\psi_2} = \int \psi_1\overline{(H \mp \mathrm{i})\psi_2}. \tag{2.8}$$

Demostración: Dividimos la prueba en varios pasos. Primeramente, probamos que H es simétrico en un subespacio denso de L^2. Luego, usando argumentos de densidad probamos el resultado.

1. Sea $\widetilde{D} = \left\{\psi \in L^2(1+|x|) \mid H\psi \in L^2(1+|x|)\right\}$. Entonces, para todo $f \in L^2(1+|x|)$, existe un único $\psi \in \widetilde{D}$ tal que $(H+\mathrm{i})\psi = f$.

En efecto,

$$\begin{aligned}
&(H+\mathrm{i})\psi = f \\
\Longleftrightarrow\ & (\mathrm{i}\alpha\nabla - m\beta - \mathrm{i} + \mathbb{V})\,\psi = f \\
\Longleftrightarrow\ & \frac{|x|^{1/2}}{|x|^{1/2}}\,(\mathrm{i}\alpha\nabla - m\beta - \mathrm{i})\,\frac{|x|^{1/2}}{|x|^{1/2}}\psi + \frac{1}{|x|^{1/2}}\frac{1}{|x|^{1/2}}\,|x|\,\mathbb{V}\psi = f \\
\Longleftrightarrow\ & |x|^{1/2}\,(\mathrm{i}\alpha\nabla - m\beta - \mathrm{i})\,|x|^{1/2}\,\frac{1}{|x|^{1/2}}\psi + |x|\,\mathbb{V}\frac{1}{|x|^{1/2}}\psi = |x|^{1/2}\,f \\
& \left(\widetilde{K} = |x|^{1/2}\,(\mathrm{i}\alpha\nabla - m\beta - \mathrm{i})\,|x|^{1/2}\,, w = \frac{1}{|x|^{1/2}}\psi, F = |x|^{1/2}\,f\right) \\
\Longleftrightarrow\ & \widetilde{K}w + |x|\,\mathbb{V}w = F \\
& \left(K = \widetilde{K}^{-1} = |x|^{-1/2}\,(\mathrm{i}\alpha\nabla - m\beta - \mathrm{i})^{-1}\,|x|^{-1/2}\right) \\
\Longleftrightarrow\ & (\mathbb{I} + K\,|x|\,\mathbb{V})\,w = \mathbb{I}_4 w + K\,|x|\,\mathbb{V}w = KF \\
\Longleftarrow\ & \|K\,|x|\,\mathbb{V}\| < 1 \\
\Longleftrightarrow\ & \sup_{F\neq 0}\frac{|K\,|x|\,\mathbb{V}F|}{|F|} < 1 \\
\Longleftarrow\ & \|K\,|x|\,\mathbb{V}F\| \leq v\,\|F\| \ ,\ v < 1 \\
\Longleftarrow\ & \int |K\,|x|\,\mathbb{V}F|^2 \leq v\int |F|^2 \\
\Longleftarrow\ & \int \left||x|^{-1/2}\,(\mathrm{i}\alpha\nabla - m\beta - \mathrm{i})^{-1}\,|x|^{-1/2}\,|x|\,\mathbb{V}\left(|x|^{1/2}\,f\right)\right|^2 \leq v\int |x|\,|f|^2 \\
\Longleftarrow\ & \int \frac{1}{|x|}\left|(\mathrm{i}\alpha\nabla - m\beta - \mathrm{i})^{-1}\,|x|\,\mathbb{V}f\right|^2 \leq v\int |x|\,|f|^2 \quad , \quad 0 < v < 1.
\end{aligned}$$

Entonces, bastará probar la última desigualdad. De la ecuación (2.1), se tiene

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{|x|}\left|(\mathrm{i}\alpha\nabla - m\beta - \mathrm{i})^{-1}\,|x|\,\mathbb{V}f\right|^2 &= \int \frac{1}{|x|}\left|(\mathrm{i}\alpha\nabla - m\beta - \mathrm{i})^{-1}f\right|^2 |x|^2\,|\mathbb{V}|^2 \\
&\leq c\int \frac{1}{|x|}\left|(\mathrm{i}\alpha\nabla - m\beta - \mathrm{i})^{-1}f\right|^2 \\
&\leq c\int |x|\,|f|^2
\end{aligned}$$

Entonces

$$\left(\int |K\,|x|\,\mathbb{V}F|^2\right)^{1/2} \leq c\left(\int |F|^2\right)^{1/2},$$

es decir: $\sup\limits_{F\neq 0}\dfrac{|K\,|x|\,\mathbb{V}F|}{|F|} < c < 1$. Por lo cual, el operador $\mathbb{I}_d + K\,|x|\,\mathbb{V}$ es invertible.

Por lo tanto, la ecuación $(\mathbb{I} + K\,|x|\,\mathbb{V})\,w = KF$ posee una única solución, y viene dada por la serie de Neuman

$$w = (\mathbb{I} + K\,|x|\,\mathbb{V})^{-1}\,(KF) = \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j(K\,|x|\,\mathbb{V})^j(KF),$$

entonces

$$\psi = |x|^{1/2}\,w = (\mathbb{I} + K\,|x|\,\mathbb{V})^{-1}\,(KF) = \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\,|x|^{1/2}\,(K\,|x|\,\mathbb{V})^j(KF) \tag{2.9}$$

Desde que

$$K\,|x| = |x|^{-1/2}\,(\mathrm{i}\alpha\nabla - m\beta - \mathrm{i})^{-1}\,|x|^{-1/2}\,|x| = (\mathrm{i}\alpha\nabla - m\beta - \mathrm{i})^{-1},$$

y

$$KF = |x|^{-1/2}\,(\mathrm{i}\alpha\nabla - m\beta - \mathrm{i})^{-1}\,|x|^{-1/2}\,|x|^{1/2}\,f = |x|^{-1/2}\,(\mathrm{i}\alpha\nabla - m\beta - \mathrm{i})^{-1}f.$$

Reemplazando estas igualdades en la ecuación (2.9), obtenemos

$$\psi = \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\left((\mathrm{i}\alpha\nabla - m\beta - \mathrm{i})^{-1}\mathbb{V}\right)^j(\mathrm{i}\alpha\nabla - m\beta - \mathrm{i})^{-1}f. \tag{2.10}$$

Una vez probado la existencia y unicidad de ψ, aún queda por probar que pertenece a $\widetilde{D}$. Para esto, veamos algunas consideraciones:

(a) Sean $\psi = (\mathrm{i}\alpha\nabla - m\beta \pm \epsilon\mathbb{I}_d)^{-1}f$ y $\epsilon = 1$. Reemplazando en la desigualdad (2.1), obtenemos

$$\int \frac{1}{|x|}\left|(\mathrm{i}\alpha\nabla - m\beta \pm \mathrm{i})^{-1}f\right|^2 \leq \int |x|\,|f|^2. \tag{2.11}$$

Por hipótesis, $f \in L^2(1 + |x|) \subset L^2(|x|)$. Entonces, la desigualdad (2.11) implica que $(\mathrm{i}\alpha\nabla - m\beta \pm \mathrm{i})^{-1}f \in L^2(1/\,|x|)$.

(b) Sea $g \in L^2(1/|x|)$, entonces $g/|x| \in L^2(|x|)$. Por la hipótesis sobre la matriz $\mathbb{V}$ se sigue que

$$|\mathbb{V}g| \leq \frac{1}{|x|}|g|, \tag{2.12}$$

Lo cual implica que $\mathbb{V}g \in L^2(|x|)$.

Por lo tanto, de las consideraciones (a) y (b), la serie ψ definida por (2.9), es convergente. Mas aún, $\psi \in L^2(1/|x|)$ y $\mathbb{V}\psi \in L^2(|x|)$. Como $(i\alpha\nabla - m\beta - i)\psi + \mathbb{V}\psi = f$, entonces $(i\alpha\nabla - m\beta - i)\psi \in L^2(|x|)$.

Por el lema 2.1.1, $i\alpha\nabla\psi \in L^2(|x|)$, entonces $(-m\beta - i)\psi \in L^2(|x|)$. Así $\psi \in L^2(|x|)$ y de la consideración (a), $\psi \in L^2(1/|x|)$. Entonces:

$$\int |\psi|^2 = \int \frac{1}{|x|^{1/2}}|\psi|\,|x|^{1/2}|\psi| \leq \left(\int \frac{1}{|x|}|\psi|^2\right)^{1/2}\left(\int |x|\,|\psi|^2\right)^{1/2} < \infty.$$

Por lo tanto, $f \in L^2(1+|x|)$ y desde que $H\psi = f - i\psi, H\psi \in L^2(1+|x|)$. Esto prueba que para todo $f \in L^2(1+|x|)$, existe un único $\psi \in \widetilde{D}$ tal que $(H \pm i)\psi = f$.

De manera análoga, se prueba el otro caso, que $(H - i)\psi = f$.

2. Como segundo paso en la prueba, mostramos que H es simétrico en $\widetilde{D}$.

En efecto, sean $\psi_1, \psi_2 \in L^2(1+|x|)$. Por el paso 1, existen $f_1, f_2 \in \widetilde{D}$ tal que

$$(H+i)\psi_1 = f_1 \quad , \quad (H-i)\psi_2 = f_2$$

Mas aún, de (2.10), se tiene las igualdades

$$\psi_1 = \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\left((\mathrm{i}\alpha\nabla - m\beta - \mathrm{i})^{-1}\mathbb{V}\right)^j(\mathrm{i}\alpha\nabla - m\beta - \mathrm{i})^{-1}f_1. \tag{2.13}$$

$$\psi_2 = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \left((\mathrm{i}\alpha\nabla - m\beta + \mathrm{i})^{-1} \mathbb{V} \right)^j (\mathrm{i}\alpha\nabla - m\beta + \mathrm{i})^{-1} f_2. \tag{2.14}$$

Hacemos un breve paréntesis para hacer unas cuentas que usamos mas adelante.

Observación 5

$$(i\alpha\nabla - m\beta + i)(i\alpha\nabla - m\beta - i) = (i\alpha\nabla - m\beta)^2 - i^2 = \Delta + m^2 + 1.$$

Entonces

$$(i\alpha\nabla - m\beta \pm i)^{-1} = \frac{1}{\Delta + m^2 + 1} (i\alpha\nabla - m\beta \mp i) \tag{2.15}$$

y

$$(i\alpha\nabla - m\beta \pm i)^* = (i\alpha\nabla)^* - (m\beta)^* \pm (i\mathbb{I}_d)^* = i\alpha\nabla - m\beta \mp i \tag{2.16}$$

$$\left((i\alpha\nabla - m\beta \pm i)^{-1} \right)^* = ((i\alpha\nabla - m\beta \pm i)^*)^{-1} = (i\alpha\nabla - m\beta \mp i)^{-1} \tag{2.17}$$

Retomando a la prueba del paso 2, tenemos que

$$\begin{aligned}\langle H\psi_1, \psi_2\rangle &= \langle (H+i)\psi_1, \psi_2\rangle - i\langle \psi_1, \psi_2\rangle \\ &= \langle f_1, \psi_2\rangle - i\langle \psi_1, \psi_2\rangle\end{aligned}$$

De (2,14)

$$= \langle f_1, \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j \left((\mathrm{i}\alpha\nabla - m\beta + \mathrm{i})^{-1}\mathbb{V}\right)^j (\mathrm{i}\alpha\nabla - m\beta + \mathrm{i})^{-1} f_2\rangle - i\langle \psi_1, \psi_2\rangle$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty}\langle f_1, (-1)^j \left((\mathrm{i}\alpha\nabla - m\beta + \mathrm{i})^{-1}\mathbb{V}\right)^j (\mathrm{i}\alpha\nabla - m\beta + \mathrm{i})^{-1} f_2\rangle - i\langle \psi_1, \psi_2\rangle$$

De (2,13) y (2,17)

$$\begin{aligned}&= \sum_{j=0}^{\infty}\langle (-1)^j \left((\mathrm{i}\alpha\nabla - m\beta - \mathrm{i})^{-1}\mathbb{V}\right)^j (\mathrm{i}\alpha\nabla - m\beta - \mathrm{i})^{-1} f_1, f_2\rangle - i\langle \psi_1, \psi_2\rangle \\ &= \langle \psi_1, f_2\rangle - i\langle \psi_1, \psi_2\rangle \\ &= \langle \psi_1, (H-i)\psi_2\rangle + \langle \psi_1, i\psi_2\rangle \\ &= \langle \psi_1, H\psi_2\rangle\end{aligned}$$

Por lo tanto, H es simétrico en $\widetilde{D}$.

3. Para todo $f \in L^2(1+|x|)$, se cumple $\|\psi\|_2 \leq \|f\|_2$.

En efecto, por el paso 1, sabemos que para todo $f \in L^2(1+|x|)$, existe un único $\psi \in \widetilde{D}$ tal que $(H+i)\psi = f$. Entonces

$$\|f\|_{L^2}\,\|\psi\|_{L^2} \geq \mathrm{Im}\langle f, \psi\rangle = \mathrm{Im}\langle (H+i)\psi, \psi\rangle = \mathrm{Im}\langle H\psi, \psi\rangle + \mathrm{Im}\left(i\langle \psi, \psi\rangle\right) = \|\psi\|_{L^2}^2\,,$$

de lo cual se obtiene la desigualdad.

4. En este paso, mostramos la existencia de la función $\psi \in L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^4)$ tal que cumple la igualdad (2.3) (la igualdad (2.2) es análoga).

   En efecto, el espacio $L^2(1+|x|)$ es denso en $L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^4)$. Así, para cada $f \in L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^4)$, existe una sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in L^2(1+|x|)$ tal que $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ en $L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^4)$. Por el paso 1, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $\psi_n \in \widetilde{D}$ tal que $(H+i)\psi_n = f_n$. Por el paso 3, se cumple la desigualdad

$$\|\psi_m - \psi_n\|_{L^2} \leq \|f_m - f_n\|_{L^2} \quad , \quad \text{para todo } m, n \in \mathbb{N}. \tag{2.18}$$

   Al ser (f_n) una sucesión convergente en L^2, en particular es una sucesión de Cauchy. La desigualdad (2.18), implica que (ψ_n) es una sucesión de Cauchy en L^2. Por lo tanto, existe $\psi \in L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^4)$ tal que $\lim_{n\to\infty} \psi_n = \psi$ en L^2.

   Por otro lado, de la igualdad $H\psi_n = f_n - i\psi_n$, se sigue que la sucesión $(H\psi_n)$ también es una sucesión de Cauchy en $L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^4)$. Por lo tanto, existe $\phi \in L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^4)$ tal que $\lim_{n\to\infty} H\psi_n = \phi$ en L^2.

   El operador H involucra el operador $i\alpha\nabla$, el cual es una matriz cuyos componentes involucran derivadas parciales. Entonces, $\lim_{n\to\infty} H\psi_n = H\psi$ en L^2 y $H\psi = \phi$ en el sentido de las distribuciones, es decir

$$\begin{aligned}
\langle (H+i)\psi_n, \varphi\rangle &= \langle f_n, \varphi\rangle \quad , \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}, \varphi \in \widetilde{D} \\
\langle H\psi_n, \varphi\rangle + i\langle \psi_n, \varphi\rangle &= \langle f_n, \varphi\rangle \quad , \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}, \varphi \in \widetilde{D} \\
\langle \psi_n, H\varphi\rangle + \langle \psi_n, -i\varphi\rangle &= \langle f_n, \varphi\rangle \quad , \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}, \varphi \in \widetilde{D} \\
\langle \psi_n, (H-i)\varphi\rangle &= \langle f_n, \varphi\rangle \quad , \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}, \varphi \in \widetilde{D} \\
\int \psi_n \overline{(H-i)\varphi} &= \int f_n \overline{\varphi} \quad , \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}, \varphi \in \widetilde{D}.
\end{aligned}$$

Tomamos $n \to \infty$, entonces

$$\int \psi \overline{(H-i)\varphi} = \int f\overline{\varphi} \quad , \quad \text{para todo } \varphi \in \widetilde{D}. \tag{2.19}$$

Como el conjunto de las funciones en el espacio de Schwartz $\mathcal{S}$ es denso en L^2, y $\mathcal{S} \subset \widetilde{D}$, se sigue que $\widetilde{D}$ también es denso en L^2. Por lo tanto, por argumentos de densidad, la igualdad (2.19) se cumple para funciones $\varphi \in L^2$, es decir

$$\int \psi \overline{(H-i)\varphi} = \int f\overline{\varphi} \quad , \quad \text{para todo } \varphi \in L^2, (H-i)\varphi \in L^2.$$

5. La función ψ del paso 4, es única.

   En efecto, sean $f \in L^2$ y ψ_1, ψ_2 tal que se cumple la igualdad del paso 4. Por el paso 3, y siguiendo la demostración del paso 4, se tiene la desigualdad

$$\|\psi_m - \psi_n\|_2 \leq \|f_m - f_n\|_2 \quad , \quad \text{para todo } m, n \in \mathbb{N},$$

   tomando $m, n \to \infty$, entonces $\|\psi_1 - \psi_2\|_2 = 0$. Por lo tanto, la unicidad está probada.

   Hasta el momento, hemos probado las igualdades (2.2), (2.3) y la desigualdad (2.4).

6. En este paso, probamos la desigualdad (2.5).

   Definimos la función η como

$$\eta(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } |x| \leq 1, \\ 0, & \text{si } |x| > 2. \end{cases} \quad , \quad \eta(x) \in (0,1] \,.$$

Definimos $\widetilde{f} = (H+i)(\eta\psi)$. Entonces

$$\begin{aligned}
\widetilde{f} &= (-i\alpha\nabla + m\beta - \mathbb{V} + i)(\eta\psi) \\
&= (-i\alpha\nabla)(\eta\psi) + m\beta(\eta\psi) - \mathbb{V}(\eta\psi) + i\eta\psi \\
&= (-i\alpha)(\nabla\eta\psi + \eta\nabla\psi) + m\eta\beta\psi - \eta\mathbb{V}\psi + i\eta\psi \\
&= -i\alpha\nabla\eta - i\eta\alpha\nabla\psi + m\eta\beta\psi - n\mathbb{V}\psi + i\eta\psi \\
&= (-i\alpha\nabla\eta)\psi + \eta(-i\alpha\nabla + m\beta - \mathbb{V} + i)\psi \\
&= (-i\alpha\nabla\eta)\psi + \eta(H+i)\psi
\end{aligned} \tag{2.20}$$

Veamos las estimaciones para cada uno de estos sumandos.

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^3} |x|\,|(i\alpha\nabla\eta)\psi|^2 &= \int_{|x|<2} |x|\,|(i\alpha\nabla\eta)\psi|^2 + \int_{|x|\geq 2} |x|\,|(i\alpha\nabla\eta)\psi|^2 \\
&= \int_{|x|<2} |x|\,|(i\alpha\nabla\eta)\psi|^2 \\
&\leq 2\int_{|x|<2} |(i\alpha\nabla\eta)\psi|^2 \\
&\leq 2\int_{\mathbb{R}^3} |(i\alpha\nabla\eta)\psi|^2 \\
&\leq 2C\int_{\mathbb{R}^3} |\psi|^2
\end{aligned} \tag{2.21}$$

De (2,4)

$$\leq 2C\int_{\mathbb{R}^3} |f|^2 < \infty,$$

y

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^3} |x|\,|\eta(H+i)\psi|^2 &= \int_{|x|<2} |x|\,|\eta(H+i)\psi|^2 + \int_{|x|\geq 2} |x|\,|\eta(H+i)\psi|^2 \\ &= \int_{|x|<2} |x|\,|\eta(H+i)\psi|^2 \\ &\leq 2\int_{|x|<2} |\eta(H+i)\psi|^2 \\ &\leq \int_{|x|<2} |(H+i)\psi|^2 \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^3} |(H+i)\psi|^2 \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^3} |f|^2 < \infty.\end{aligned} \tag{2.22}$$

De (2.20), (2.21) y (2.22), se tiene que $\widetilde{f} \in L^2(|x|)$. Por otro lado, de la desigualdad (2.1), se tiene

$$\int \frac{1}{|x|}\,|\eta\psi|^2 \leq \int |(H+i)\psi|^2\,|x| = \int |x|\left|\widetilde{f}\right|^2 < \infty, \tag{2.23}$$

entonces $\eta\psi \in L^2(1/|x|)$. Así

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|x|} |\psi|^2 &= \int_{|x|\leq 1} \frac{1}{|x|} |\psi|^2 + \int_{|x|>1} \frac{1}{|x|} |\psi|^2 \\
&= \int_{|x|\leq 1} \frac{1}{|x|} |\eta\psi|^2 + \int_{|x|>1} \frac{1}{|x|} |\psi|^2 \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|x|} |\eta\psi|^2 + \int_{\mathbb{R}^3} |\psi|^2 \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^3} |x| \left|\widetilde{f}\right|^2 + \int_{\mathbb{R}^3} |f|^2
\end{aligned}$$

De (2,20) :

$$\begin{aligned}
&= \int_{\mathbb{R}^3} |x| \left|(-i\alpha\nabla\eta)\psi + \eta f\right|^2 + \int_{\mathbb{R}^3} |f|^2 \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^3} |x| \left|(-i\alpha\nabla\eta)\psi\right|^2 + \int_{\mathbb{R}^3} |x| |\eta f|^2 + \int_{\mathbb{R}^3} |f|^2 \\
&= \int_{|x|\leq 1} |x| \left|(-i\alpha\nabla\eta)\psi\right|^2 + \int_{|x|\leq 1} |x| |\eta f|^2 + \int_{\mathbb{R}^3} |f|^2 \\
&\leq \int_{|x|\leq 1} \left|(-i\alpha\nabla\eta)\psi\right|^2 + \int_{|x|\leq 1} |x| |\eta f|^2 + \int_{\mathbb{R}^3} |f|^2 \\
&\leq C_1 \int_{|x|\leq 1} |\psi|^2 + C_2 \int_{|x|\leq 1} |f|^2 + \int_{\mathbb{R}^3} |f|^2 \\
&\leq C_1 \int_{\mathbb{R}^3} |\psi|^2 + C_2 \int_{\mathbb{R}^3} |f|^2 + \int_{\mathbb{R}^3} |f|^2 \\
&\leq C \int_{\mathbb{R}^3} |f|^2 ,
\end{aligned}$$

donde $C = C_1 + C_2 + 1$.

7. En este paso, probamos la desigualdad (2.6).

$$\begin{aligned}
\int_{|x|<1} |x|\,|i\alpha\nabla\psi|^2 &= \int_{|x|<1} |x|\,|(i\alpha\nabla - m\beta + \mathbb{V} + i)\psi + (m\beta - \mathbb{V} - i)\psi|^2 \\
&\leq \int_{|x|<1} |x|\,|(i\alpha\nabla - m\beta + \mathbb{V} + i)\psi|^2 + \int_{|x|<1} |x|\,|(m\beta - \mathbb{V} - i)\psi|^2 \\
&= \int_{|x|<1} |x|\,|(H+i)\psi|^2 + \int_{|x|<1} |x|\,|(m\beta - \mathbb{V} - i)\psi|^2 \\
&= \int_{|x|<1} |x|\,|f|^2 + \int_{|x|<1} |x|\,|m\beta\psi|^2 + \int_{|x|<1} |x|\,|\mathbb{V}\psi|^2 + \int_{|x|<1} |x|\,|i\psi|^2 \\
&= \int_{|x|<1} |f|^2 + m^2\,\|\beta\|^2 \int_{|x|<1} |\psi|^2 + \|\mathbb{V}\|^2 \int_{|x|<1} |\psi|^2 + \int_{|x|<1} |\psi|^2 \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} |f|^2 + m^2\,\|\beta\|^2 \int_{\mathbb{R}^3} |\psi|^2 + \|\mathbb{V}\|^2 \int_{\mathbb{R}^3} |\psi|^2 + \int_{\mathbb{R}^3} |\psi|^2 \\
&\leq C \int_{\mathbb{R}^3} |f|^2\,,
\end{aligned}$$

donde $C = 2 + m^2\,\|\beta\|^2 + \|\mathbb{V}\|^2$.

8. En este paso, probamos la desigualdad (2.7).

$$\int_{\mathbb{R}^3} \psi\overline{\sqrt{-\Delta}\psi} = \int_{\mathbb{R}^3} i\alpha\nabla\psi\overline{\sqrt{-\Delta}(i\alpha\nabla)^{-1}\psi} = \int_{\mathbb{R}^3} i\alpha\nabla\psi\overline{\phi},$$

donde $\phi = \sqrt{-\Delta}(i\alpha\nabla)^{-1}\psi$. Entonces

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\mathbb{R}^3} i\alpha\nabla\psi\overline{\phi}\right| &= \left|\int_{\mathbb{R}^3} (i\alpha\nabla + \mathbb{V})\psi\overline{\phi} - \int_{\mathbb{R}^3} \mathbb{V}\psi\overline{\phi}\right| \\
&\leq \left|\int_{\mathbb{R}^3} (i\alpha\nabla + \mathbb{V})\psi\overline{\phi}\right| + \left|\int_{\mathbb{R}^3} \mathbb{V}\psi\overline{\phi}\right| \\
&\leq \left(\int |(i\alpha\nabla + \mathbb{V})\psi|^2\right)^{1/2} \left(\int |\phi|^2\right)^{1/2} + \left(\int \frac{1}{|x|}\,|\psi|^2\right)^{1/2} \left(\frac{1}{|x|}\,|\phi|^2\right)^{1/2} \\
&= I.II + III.IV
\end{aligned} \tag{2.24}$$

A continuación, estimamos las cantidades I, II, III y IV.

$$\begin{aligned} I^2 &= \int \left|(i\alpha\nabla + \mathbb{V} - m\beta + i)\psi + (m\beta - i)\psi\right|^2 \\ &\leq C\int |f|^2 + C(m^2\|\beta\|^2 + 1)\int |\psi|^2 \\ &\leq C(m^2\|\beta\|^2 + 2)\int |f|^2 \end{aligned} \tag{2.25}$$

$$\begin{aligned} II^2 &= \int \left|\sqrt{-\Delta}(i\alpha\nabla)^{-1}\psi\right|^2 \\ &= \int \left|\mathcal{F}\left(\sqrt{-\Delta}(i\alpha\nabla)^{-1}\psi\right)\right|^2 \\ &= \int |\mathcal{F}(\psi)|^2 = \int |\psi|^2 \leq \int |f|^2 \end{aligned} \tag{2.26}$$

De la desigualdad (2.5), se tiene

$$III^2 = \int \frac{1}{|x|}|\psi|^2 \leq C\int |f|^2 \tag{2.27}$$

$$IV^2 = \int \frac{1}{|x|}|\phi|^2 \leq C\int \frac{1}{|x|}|\psi|^2 \leq C\int |f|^2 \tag{2.28}$$

Reemplazando las desigualdades (2.25), (2.26), (2.27) y (2.28), en (2.24), se obtiene la desigualdad (2.7).

9. En este paso, probamos la igualdad (2.8).

Sean $f_1, f_2 \in L^2$. Entonces, existen sucesiones $(f_{1_n}), (f_{2_n}) \in L^2(1 + |x|)$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} f_{1_n} = f_1 \quad , \quad \lim_{n\to\infty} f_{2_n} = f_2 \quad , \quad \text{en } L^2.$$

Además, para cada $n \in \mathbb{N}$, existen $\psi_{1_n}, \psi_{2_n} \in \widetilde{D}$ tal que

$$(H + i)\psi_{1_n} = f_{1_n} \quad , \quad (H - i)\psi_{2_n} = f_{2_n}.$$

Por la desigualdad (2.4) y el paso 8, existen $\psi_1, \psi_2 \in H^{1/2}$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \psi_{1_n} = \psi_1 \quad , \quad \lim_{n\to\infty} \psi_{2_n} = \psi_2,$$

y por el paso 2, se cumple la igualdad

$$\int (H+i)\psi_{1_n}\overline{\psi_{2_n}} = \int \psi_{1_n}\overline{(H-i)\psi_{2_n}} \quad , \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Tomando $n \to \infty$, obtenemos lo que queriamos probar

$$\int (H+i)\psi_1\overline{\psi_2} = \int \psi_1\overline{(H-i)\psi_2}.$$

■

Teorema 2.1.3 *Sea* $\mathbb{V}$ *una matriz potencial simétrica tal que* $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}^3/\{0\}} |x|\,\|\mathbb{V}\| < 1$*. Entonces,* $H = -i\alpha\nabla + m\beta - \mathbb{V}$ *e sun operador autoadjunto en*

$$D(H) = \left\{\psi \in L^2\left(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^4\right) \mid H\psi \in L^2\left(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^4\right)\right\}.$$

Más aún,

$$D(H) \subset H^{1/2} \cap D(r^{-1/2}),$$

donde,

$$D(r^{-1/2}) = \left\{\psi \in L^2 \mid \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|x|}\,|\psi|^2 < \infty\right\}.$$

Demostración: Por el teorema 2.1.2, para cada $f \in L^2$, existe $\psi \in L^2$ tal que $(H \pm i)\psi = f$. Por lo tanto $H\psi \in L^2$.

Ahora veamos que H es simétrico en $D(H)$. Sean $\psi_1, \psi_2 \in D(H)$, asociados a las funciones $f_1, f_2 \in L^2$, tal que

$$(H+i)\psi_1 = f_1 \quad , \quad (H-i)\psi_2 = f_2 \quad , \quad \text{en } L^2.$$

Entonces, usando la igualdad (2.8) del teorema 2.1.2, se tiene

$$\begin{aligned}\langle H\psi_1, \psi_2\rangle &= \langle (H+i)\psi_1, \psi_2\rangle - \langle i\psi_1, \psi_2\rangle \\ &= \langle \psi_1, (H-i)\psi_2\rangle - \langle i\psi_1, \psi_2\rangle \\ &= \langle \psi_1, H\psi_2\rangle + \langle i\psi_1, \psi_2\rangle - \langle i\psi_1, \psi_2\rangle \\ &= \langle \psi_1, H\psi_2\rangle.\end{aligned}$$

Por lo tanto, H es un operador simétrico en $D(H)$.

Por otro lado, si $\psi \in D(H)$, vimos que los elementos $\psi, H\psi \in L^2$. Además, se tiene la iguadad $(H+i)\psi = f \in L^2$. Por la desigualdad (2.4), $\int \frac{1}{|x|} |\psi|^2 \leq C \int |f|^2$, entonces $\psi \in D(r^{-1/2})$; y por la desigualdad (2.7), $\|\psi\|_{H^{1/2}} \leq C \|f\|_2$, entonces $\psi \in H^{1/2}$. ■

Ejemplo 6 *Sean la matriz simétrica* $\mathbb{V} = \frac{v}{|x|}\mathbb{I}_4$*, con* $v < 1$*, y* $H = -i\alpha\nabla + m\beta - \mathbb{V}$*. Es claro que* $\mathbb{V}$ *cumple las condiciones del teorema 2.1.3.*

Ejemplo 7 (Potencial Electromagnético) *Sea* $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *una función que representa un potencial magnético. Denotamos por* $\nabla_A = \nabla - iA$ *y consideramos el operador* H *definido por*

$$H = -i\alpha\nabla_A + m\beta - \frac{v}{|x|}\mathbb{I}_4 = -i\alpha\nabla + m\beta - \left(\frac{v}{|x|}\mathbb{I}_4 + \alpha A\right) = -i\alpha\nabla + m\beta - \mathbb{V},$$

donde $\mathbb{V} = \frac{v}{|x|}\mathbb{I}_4 + \alpha A$*.*

En este caso, veamos que la condición del teorema 2.1.3, $\sup_{x\in\mathbb{R}^3/\{0\}} |x| \, \|\mathbb{V}\| < 1$*, se cumple si* $\sup_{x\in\mathbb{R}^3/\{0\}} (v + |x|\,|A|) < 1$*. Primeramente, veamos algunas notaciones.*

Denotamos por $\phi = \begin{pmatrix}\phi_1 \\ \phi_2\end{pmatrix}$ *un elemento de* $\mathbb{C}^2$*, con norma* $|\phi|_2^2 = |\phi_1|^2 + |\phi_2|^2$*. Análogamente, si* $\psi = \begin{pmatrix}\phi \\ \chi\end{pmatrix} \in \mathbb{C}^4$*, su respectiva norma es* $|\psi|_4^2 = |\phi|_2^2 + |\chi|_2^2$*. De la definición de la* *matriz* $\mathbb{V}$, *se tiene*

$$\mathbb{V}\psi = \left(\frac{v}{|x|}\mathbb{I}_4 + \alpha A\right)\begin{pmatrix}\phi\\ \chi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{v}{|x|} & \sigma A\\ \sigma A & \frac{v}{|x|}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\phi\\ \chi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{v}{|x|}\phi + \sigma A\chi\\ \sigma A\phi + \frac{v}{|x|}\chi\end{pmatrix} = \frac{1}{|x|}\begin{pmatrix}v\phi + |x|\,\sigma A\chi\\ |x|\,\sigma A\phi + v\chi\end{pmatrix}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
|x|^2\,|\mathbb{V}\psi|^2 &= \left|\begin{pmatrix}v\phi + |x|\,\sigma A\chi\\ |x|\,\sigma A\phi + v\chi\end{pmatrix}\right|^2\\
&= |v\phi + |x|\,\sigma A\chi|^2 + ||x|\,\sigma A\phi + v\chi|^2\\
&= v^2\,|\phi|^2 + |x|^2\,|A|^2\left|\sigma\frac{A}{|A|}\chi\right|^2 + 2\mathrm{Re}\langle v\phi, |x|\,|A|\,\sigma\frac{A}{|A|}\chi\rangle\\
&\quad + |x|^2\,|A|^2\left|\sigma\frac{A}{|A|}\phi\right|^2 + v^2\,|\chi|^2 + 2\mathrm{Re}\langle |x|\,|A|\,\sigma\frac{A}{|A|}\phi, v\chi\rangle\\
&= v^2\,|\phi|^2 + |x|^2\,|A|^2\,|\chi|^2 + 2v\,|x|\,|A|\,\mathrm{Re}\langle\phi, \sigma\frac{A}{|A|}\chi\rangle\\
&\quad + |x|^2\,|A|^2\,|\phi|^2 + v^2\,|\chi|^2 + 2v\,|x|\,|A|\,\mathrm{Re}\langle\sigma\frac{A}{|A|}\phi, \chi\rangle\\
&= v^2\,|\psi|^2 + |x|^2\,|A|^2\,|\psi|^2 + 2v\,|x|\,|A|\,\mathrm{Re}\left(\langle\phi, \sigma\frac{A}{|A|}\chi\rangle + \langle\sigma\frac{A}{|A|}\phi, \chi\rangle\right)\\
&\leq v^2\,|\psi|^2 + |x|^2\,|A|^2\,|\psi|^2 + 2v\,|x|\,|A|\left(|\phi|\left|\sigma\frac{A}{|A|}\chi\right| + \left|\sigma\frac{A}{|A|}\phi\right|\,|\chi|\right)\\
&= v^2\,|\psi|^2 + |x|^2\,|A|^2\,|\psi|^2 + 2v\,|x|\,|A|\,(|\phi|\,|\chi| + |\phi|\,|\chi|)\\
&\leq v^2\,|\psi|^2 + |x|^2\,|A|^2\,|\psi|^2 + 2v\,|x|\,|A|\left(|\phi|^2 + |\chi|^2\right)\\
&= v^2\,|\psi|^2 + |x|^2\,|A|^2\,|\psi|^2 + 2v\,|x|\,|A|\,|\psi|^2\\
&= (v + |x|\,|A|)^2\,|\psi|^2\,.
\end{aligned}$$

Entonces

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^3/\{0\}} |x|\,\|\mathbb{V}\| = \sup_{x\in\mathbb{R}^3/\{0\}\,,\,\psi\neq 0}\frac{|x|\,|\mathbb{V}\psi|}{|\psi|} \leq \sup_{x\in\mathbb{R}^3/\{0\}}(v + |x|\,|A|) < 1.$$

Capítulo 3

Parte de Albert

En este capítulo se asume que el lector está familiarizado con Teoría de Espacios de Hilbert, Espacios L^p, Teoría de Operadores, Ecuación de Dirac, Teoría de la Medida, en particular medidad de Borel y Lebesgue. Para estos temas, por ejemplo, ver ([4]), ([12]). Para mayores detalles de los resultados mostrados, consultar ([2]), y las referencias contenidas en el mismo.

3.1. Extensiones Autoadjuntas del Operador de Dirac

Sea ν una medida positiva de Borel en $\mathbb{R}^3$. Algunas consideraciones:

- Sea $L^2(\nu)^4$, el espacio definido por:

$$L^2(\nu)^4 = \left\{ f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}^4 \;\; | \;\; f \text{ es } \nu - \text{medible}, \|f\|^2_{L^2(\nu)^4} = \int |f|^2 \, d\nu < +\infty \right\},$$

  con producto interno $\langle \;\; , \;\; \rangle_{L^2(\nu)^4}$ estándar en $L^2(\nu)^4$.

- Sea $D = C_c^\infty \left(\mathbb{R}^3\right)^4$ el espacio de las funciones de $\mathbb{R}^3$ con valores en $\mathbb{C}^4$, C^∞ y soporte compacto.

- Denotamos por D^* el espacio de distribuciones con respecto a D (espacio test).

- Denotamos por μ la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^3$.

Sea $H : D^* \to D^*$, el operador de Dirac definido por $H = -\mathrm{i}\alpha.\nabla + m\beta$. Durante todo el capítulo asumimos que $m > 0$. El **propósito de este capítulo** es hallar un subespacio $E \subset L^2(\nu)^4 \subset D^*$ y $V : E \to L^2(\nu)^4$, para alguna medida de Borel ν singular a μ, tal que $(H+V)_{|E}$ es un operador autoadjunto con respecto a $L^2(\nu)^4$. Esto es debido a que una de las hipótesis clásicas para resolver la ecuación

$$\frac{d}{dt}\psi(x,t) = \mathrm{i}(H+V)\psi(x,t),$$

es que $H+V$ sea un operador autoadjunto.

Ejemplo 8 *Las medidas ν que tenemos en mente serán, por ejemplo, la medida de superficie de:*

- $\mathbb{R}^2 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$.
- $\mathbb{S}^2$.
- *El gráfico de una función lipschitziana de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$.*

Observación 6 (Sobre operadores simétricos) *Sea $T : D(T) \subset H \to H$ un operador no actodado y densamanete definido en un espacio de Hilbert H. El adjunto del operador T, denotado por T^*, está definido en $D(T^*) \subset H$ a H, donde*

$$D(T^*) = \{y \in H \;\mid\; \exists\, z \in H \text{ tal que } \langle Tx, y\rangle_H = \langle x, z\rangle_H \text{ para todo } x \in D(T)\}$$

El elemento $z \in H$ es único ya que $D(T)$ es denso en H. Así, para $y \in D(T^*)$, denotamos $T^*y = z$.

Definición 3.1.1 *Un operador T es llamado* **simétrico** *si $\langle Tx, y\rangle_H = \langle x, Ty\rangle_H$ para todo $x \in D(T)$.*

Definición 3.1.2 *Un operador T es llamado* **autoadjunto** *si $D(T) = D(T^*)$ y $T = T^*$ en $D(T)$.*

Equivalentemente, un operador T es autoadjunto si es simétrico y $D(T^*) \subset D(T)$.

3.1.1. Solución Fundamental de H

Definición 3.1.3 *Una función g es llamada* **solución fundamental** *de un operador diferencial D, si $g * Df = f$ para todo $f \in C_c^\infty$. Es decir, $Dg = \delta_0$ en el sentido de las distribuciones.*

Lema 3.1.1 *La función*

$$\phi_m(x) = \frac{e^{-m|x|}}{4\pi |x|} \left(m\beta + (1 + m |x|) \mathrm{i}\alpha \frac{x}{|x|^2} \right),$$

es una solución fundamental de H. Es decir, $H\phi_m = \delta_0 \mathbb{I}_4$.

Demostración: Es sabido que la función

$$\psi_m(x) = \frac{e^{-m|x|}}{4\pi |x|},$$

es solución fundamental del operador diferencial $-\Delta + m^2$. Por otro lado, por las cuentas hechas en el primer capítulo, se cumple que

$$H^2 = (-\mathrm{i}\alpha\nabla + m\beta)^2 = (-\Delta + m^2)\mathbb{I}_4. \tag{3.1}$$

Definimos $\phi_m(x) = H(\psi_m(x)\mathbb{I}_4)$. Entonces:

$$H(\phi_m) = H^2(\psi_m(x)\mathbb{I}_4) = \left((-\Delta + m^2)\psi_m(x)\right) \mathbb{I}_4 = \delta_0 \mathbb{I}_4.$$

Por lo tanto, ϕ_m es una solución fundamental de H.

A continuación calculamos explícitamente ϕ_m. Se cumple la igualdad:

$$\begin{aligned}\nabla\psi_m(x) &= \frac{1}{4\pi}\nabla\left(e^{-m|x|}\,|x|^{-1}\right) = \frac{1}{4\pi}\left(-m\frac{x}{|x|}e^{-m|x|}\,|x|^{-1} - e^{-m|x|}\,|x|^{-2}\,\frac{x}{|x|}\right)\\ &= \frac{e^{-m|x|}}{4\pi\,|x|}\left(-mx\,|x|^{-1} - x\,|x|^{-2}\right).\end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned}\phi_m(x) &= H(\psi_m\mathbb{I}_4) = -\mathrm{i}\alpha\nabla(\psi_m\mathbb{I}_4) + m\beta(\psi_m\mathbb{I}_4)\\ &= -\mathrm{i}\alpha\left(\frac{e^{-m|x|}}{4\pi\,|x|}\left(-mx\,|x|^{-1} - x\,|x|^{-2}\right)\right) + m\beta\left(\frac{e^{-m|x|}}{4\pi\,|x|}\right)\\ &= \frac{e^{-m|x|}}{4\pi\,|x|}\left(\mathrm{i}\alpha m\frac{x}{|x|} + \mathrm{i}\alpha\frac{x}{|x|^2} + m\beta\right)\\ &= \frac{e^{-m|x|}}{4\pi\,|x|}\left(m\beta + (1+m\,|x|)\mathrm{i}\alpha\frac{x}{|x|^2}\right),\end{aligned}$$

lo cual concluye la prueba. ∎

Lema 3.1.2 *La función ϕ_m cumple las siguientes propiedades:*

1. $(\phi_m)_{i,j} \in C^\infty(\mathbb{R}^3 - \{0\})$, *para todo* $1 \leq i,j \leq 4$.
2. $\phi_m(x-y) = \overline{\phi_m^t(y-x)}$, *para todo* $x \neq y$.
3. $\sup_{i,j}|(\phi_m)_{i,j}(x)| = \mathcal{O}(|x|^{-2})$, *cuando* $|x| \to 0$.
4. $\sup_{i,j}|(\phi_m)_{i,j}(x)| = \mathcal{O}(e^{-m|x|})$, *cuando* $|x| \to \infty$.
5. $\sup_{i,j}\sup_{\xi\in\mathbb{R}^3}\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{1}{2}}\mathcal{F}((\phi_m)_{i,j})(\xi) < +\infty$.

Demostración: Se deja al lector. ∎

3.1.2. Algunas consideraciones

Sea σ una medida de Hausdorff 2−dimensional (medida de superficie) restringida a la frontera de un dominio lipschitziano (dominio que se puede cubrir con una cantidad finita de gráficas de funciones lipschitzianas). Además, asumimos que σ es homogénea de grado dos, es decir, existe una constante $c > 0$ tal que:

$$\frac{r^2}{c} \leq \sigma\left(B(x,r)\right) \leq cr^2 \quad , \quad \text{para todo } x \in \ supp(\sigma) \ \text{ y } \ 0 < r < 1.$$

Por ejemplo, la esfera, elipse y parábola cumplen esta propiedad.

Definimos el conjunto

$$\mathbb{X} = \left\{ G\mu + g\sigma \mid G \in L^2(\mu)^4, g \in L^2(\sigma)^4 \right\} \subset D^*,$$

con producto interno y norma:

$$\langle F\mu + f\sigma, G\mu + g\sigma\rangle_{\mathbb{X}} = \int F\overline{G}d\mu + \int f\overline{g}d\sigma,$$

$$\|G\mu + g\sigma\|^2_{\mathbb{X}} = \|G\|^2_{L^2(\mu)^4} + \|g\|^2_{L^2(\sigma)^4}\,.$$

Lema 3.1.3 *Existe un $b > 0$ tal que*

$$\|\phi_m * g\sigma\|_{L^2(\mu)^4} \leq b\,\|g\|^2_{L^2(\sigma)^4} \quad , \quad \textit{para toda } g \in L^2(\sigma)^4,$$

donde $(\phi_m * g\sigma)(x) = \int \phi_m(x-y)g(y)d\sigma(y)$.

Demostración: Sea $K(x) = \sup\limits_{1\leq i,j\leq 4} |(\phi_m)_{i,j}(x)|$. Entonces, usando Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned} |(\phi_m * g\sigma)(x)|^2 &= \left|\int \phi_m(x-y)g(y)d\sigma(y)\right|^2 \leq b\left(\int K(x-y)\,|g(y)|\,d\sigma(y)\right)^2 \\ &\leq b\int K(x-y)^{\frac{3}{4}}d\sigma(y)\int K(x-z)^{\frac{5}{4}}\,|g(z)|^2\,d\sigma(z) \end{aligned} \tag{3.2}$$

A continuación probamos que $\int K(x-y)^{\frac{3}{4}}d\sigma(y) < +\infty$. En efecto:

$$\begin{aligned}\int K(x-y)^{\frac{3}{4}}d\sigma(y) &= \int_{B(x,1)} K(x-y)^{\frac{3}{4}}d\sigma(y) + \int_{B(x,R)/B(x,1)} K(x-y)^{\frac{3}{4}}d\sigma(y)\\ &\quad + \int_{B^c(x,R)} K(x-y)^{\frac{3}{4}}d\sigma(y)\\ &= I + II + III,\end{aligned} \tag{3.3}$$

donde $R > 0$ es suficientemente grande. La descomposición de la integral en estos sumandos es debido a que usaremos las propiedades 3 y 4 del lema 3.1.2. Claramente II es finito. Veamos las cuentas para I y III, donde usaremos el crecimiento 2-dimensional de σ.

$$\begin{aligned}|I| &= \sum_{j=0}^{\infty}\int_{B(x,2^{-j})/B(x,2^{-j-1})} K(x-y)^{\frac{3}{4}}d\sigma(y) \le b\sum_{j=o}^{\infty}\left(2^{-j-1}\right)^{-\frac{3}{2}}\sigma\left(B(x,2^{-j})\right)\\ &\le b\sum_{j=0}^{\infty}\left(2^{-j-1}\right)^{-\frac{3}{2}}\left(c2^{-2j}\right) = bc\sum_{j=0}^{\infty}2^{-\frac{1}{2}j} < +\infty.\\ |III| &= \sum_{j=0}^{\infty}\int_{B(x,2^{Rj+1})/B(x,2^{Rj})} K(x-y)^{\frac{3}{4}}d\sigma(y) \le b\sum_{j=0}^{\infty}e^{-\frac{3}{4}m2^{Rj}}\sigma\left(B(x,2^{Rj+1})\right)\\ &\le bc\sum_{j=0}^{\infty}e^{-\frac{3}{4}m2^{Rj}}2^{2(j+1)}R^2 < +\infty.\end{aligned} \tag{3.4}$$

Las constantes las denotamos con C, independientemente del valor que tengan. Por lo tanto, usando (3.2), (3.3) y (3.4),

$$|(\phi_m * g\sigma)(x)|^2 \le C\int K(x-z)^{\frac{5}{4}}|g(z)|^2 d\sigma(z). \tag{3.5}$$

Integrando en $\mathbb{R}^3$, obtenemos

$$\int |(\phi_m * g\sigma)(x)|^2 d\mu(x) \le C\iint K(x-z)^{\frac{5}{4}}|g(z)|^2 d\sigma(z)d\mu(x). \tag{3.6}$$

De forma similar a como hemos visto que (3.3) es finito, se comprueba que la integral $\int K(x-z)^{5/4}d\mu(x)$ es finita, usando que μ es 3-dimensional. El lema se obtiene aplicando Fubini en (3.6). ∎

Lema 3.1.4 *Existe $b > 0$ tal que*

$$\|\phi_m * G\mu\|_{L^2(\mu)^4} \leq \|\phi_m * G\mu\|_{W^{1,2}(\mu)^4} \leq b\,\|G\|_{L^2(\mu)^4}\,.$$

Demostración: Por la propiedad 5 del lema 3.1.2 y el Teorema de Plancherel, se tiene

$$\begin{aligned}
\|\phi_m * G\mu\|_{W^{1,2}(\mu)^4} &= \int \left(1+|\xi|^2\right)\mathcal{F}\left(\phi_m * G\mu\right)^2(\xi)d\mu(\xi) \\
&= \int \left(1+|\xi|^2\right)\mathcal{F}\left(\phi_m\right)^2(\xi)\mathcal{F}\left(G\right)^2(\xi)d\mu(\xi) \\
&= \int \left(1+|\xi|^2\right)\mathcal{F}\left(\phi_m\right)^2(\xi)\widehat{\mathcal{F}}\left(G\right)^2(\xi)d\mu(\xi) \\
&\leq C\int \widehat{G}(\xi)^2 d\mu(\xi) = C\,\|G\|_{L^2(\mu)^4}
\end{aligned}$$

∎

Corolario 3.1.1 *El operador $\Phi : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ definido por*

$$\Phi(G\mu + g\sigma) = \left(\phi_m * G\mu + \phi_m * g\sigma\right)\mu$$

es acotado.

Observación 7 (Operador Traza) *Para $f \in D$ y Σ una superficie regular en $\mathbb{R}^3$, definimos $Tr_\Sigma(f) = f\chi_\Sigma$. El operador traza es el operador Tr_Σ definido en D, que se extiende a un operador acotado de $W^{1,2}(\mu)^4$ a $L^2(\sigma)^4$, donde σ es la medida de superficie de Σ.*

Corolario 3.1.2 *La aplicación*

$$\Phi_\Sigma(G\mu) = Tr_\Sigma(\phi_m * G\mu) \quad , \quad \textit{para toda } G \in L^2(\mu)^4,$$

está bien definida, donde $\Sigma = supp(\sigma)$. Más aún:

$$\|\Phi_\Sigma(G\mu)\|_{L^2(\sigma)^4} \leq C\,\|G\|_{L^2(\mu)^4}$$

Lema 3.1.5 *Se cumplen*

$$\langle \Phi(G\mu), F\mu\rangle_{\mathbb{X}} - \langle G\mu, \Phi(F\mu)\rangle_{\mathbb{X}} = 0 \quad , \quad \text{para toda } F, G \in L^2(\mu)^4 \tag{3.7}$$

y

$$\langle \Phi(g\sigma), F\mu\rangle_{\mathbb{X}} = \langle g\sigma, \Phi_\Sigma(F_M)\rangle_{\mathbb{X}} \quad , \quad \text{para toda } F \in L^2(\mu)^4, g \in L^2(\sigma)^4. \tag{3.8}$$

Demostración: La igualdad (3.7), se obtiene de la siguiente cuenta, usando la propiedad 2 del lema 3.1.2,

$$\begin{aligned}
\langle \Phi(G\mu), F\mu\rangle_{\mathbb{X}} &= \iint \phi_m(x-y)G(y)d\mu(y)\overline{F(x)}d\mu(x) \\
&= \iint G(y)\overline{\phi_m(y-x)F(x)}d\mu(x)d\mu(y) \\
&= \langle G\mu, \Phi(F\mu)\rangle_{\mathbb{X}}.
\end{aligned}$$

A continuación mostramos la igualdad (3.8). Sean $0 < \epsilon, \delta < 1$, definimos las funciones truncadas:

$$F_\epsilon = F\chi_{\left\{x\in\mathbb{R}^3 \,\mid\, |x|<\frac{1}{\epsilon}, dist(x,\Sigma)>\epsilon\right\}} = F\chi_{\Omega_\epsilon} \quad , \quad g_\delta = g\chi_{\left\{x\in\Sigma \,\mid\, |x|<\frac{1}{\delta}\right\}} = g\chi_{\Sigma_\delta}.$$

Para las funciones F_ϵ y g_δ, se cumple la igualdad (3.8):

$$\begin{aligned}
\langle g_\delta\sigma, \Phi_\Sigma\left(F_\epsilon\mu\right)\rangle_{\mathbb{X}} &= \int_\Sigma g_\delta(x)\int_{\mathbb{R}^3}\overline{\phi_m(x-y)F_\epsilon(y)d\mu(y)}d\sigma(x) \\
&= \iint g_\delta(x)\overline{\phi_m(x-y)F_\epsilon(y)}d\mu(y)d\sigma(x) \\
&= \iint \overline{\phi_m^t(x-y)}g_\delta(x)\overline{F_\epsilon(y)}d\sigma(x)d\mu(y) \\
&= \iint \phi_m(y-x)g_\delta(x)\overline{F_\epsilon(y)}d\sigma(x)d\mu(y) \\
&= \langle \Phi(g_\delta)\sigma, F_\epsilon\rangle_{\mathbb{X}}.
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Denotamos $A = \langle \Phi(g\sigma), F\mu\rangle - \langle g\sigma, \Phi_\Sigma(F_\mu)\rangle$. Por el lema 3.1.3 y corolario 3.1.2, se cumplen las desigualdades:

$$\left\|\Phi\left(g-g_\delta\right)\sigma\right\|_{L^2(\mu)^4} \leq C\left\|g-g_\delta\right\|_{L^2(\sigma)^4}$$

y

$$\|\Phi_\Sigma (F - F_\epsilon) \mu\|_{l^2(\sigma)^4} \leq C \|F - F_\epsilon\|_{L^2(\mu)^4} .$$

Entonces, usando (3.9),

$$\begin{aligned} A &= \langle \Phi (g\sigma - g_\delta \sigma), F\mu \rangle_{\mathbb{X}} + \langle \Phi (g_\delta \sigma), (F - F_\epsilon)\mu \rangle_{\mathbb{X}} + \langle \Phi (g_\delta \sigma), F_\epsilon \mu \rangle_{\mathbb{X}} \\ &\quad - [\langle (g - g_\delta) \sigma, \Phi_\Sigma (F_\mu) \rangle_{\mathbb{X}} + \langle g_\delta \sigma, \Phi_\Sigma ((F - F_\epsilon \mu)\rangle_{\mathbb{X}} + \langle g_\delta \sigma, \Phi_\Sigma (F_\epsilon \mu) \rangle_{\mathbb{X}}] \\ &= \langle \Phi (g\sigma - g_\delta \sigma), F\mu \rangle_{\mathbb{X}} + \langle \Phi (g_\delta \sigma), (F - F_\epsilon)\mu \rangle_{\mathbb{X}} \\ &\quad - \langle (g - g_\delta) \sigma, \Phi_\Sigma (F_\mu) \rangle_{\mathbb{X}} - \langle g_\delta \sigma, \Phi_\Sigma ((F - F_\epsilon \mu)\rangle_{\mathbb{X}} . \end{aligned}$$

Así

$$|A| \leq 2C \left(\|g - g_\delta\|_{L^2(\sigma)^4} \|F\|_{L^2(\mu)^4} + \|g_\delta\|_{L^2(\sigma)^4} \|F - F_\epsilon\|_{L^2(\mu)^4} \right) \underset{\epsilon,\delta \to 0}{\longrightarrow} 0$$

Lo cual muestra la igualdad (3.8). ■

Observación 8

- *Ppara toda función $f \in D$, $\phi_m * Hf = f$. Por lo tanto, distribucionalmente,*

$$H (\Phi (G\mu + g\sigma)) = G\mu + g\sigma \quad , \quad \textit{para todo } G\mu + g\sigma \in \mathbb{X}.$$

- *Para $G\mu + g\sigma \in \mathbb{X}$, sea $V : L^2(\mathbb{R}^3) \to L^2(\mathbb{R}^2)$, definida por*

$$V (\Phi (G\mu + g\sigma)) = -g\sigma.$$

  Veamos que V está bien definida. Sea $\varphi = \Phi(G\mu + g\sigma) = \Phi(F\mu + f\sigma)$, entonces $H\varphi = G\mu + g\sigma = F\mu + f\sigma$ en el sentido de las distribuciones. Desde que las medidas μ y σ son mutuamente singulares, se deduce que $G\mu = F\mu$ y $g\sigma = f\sigma$. Por lo tanto, $g = f$ en $L^2(\sigma)^4$, y V está bien definida.

- *Para $\varphi = \Phi(G\mu + g\sigma)$, definimos $H_V(\varphi) = (H + V)\varphi$. Entonces*

$$H_V(\varphi) = H\varphi + V\varphi = G\mu + g\sigma - g\sigma = G\mu.$$

Definición 3.1.4 *Sea* $\Lambda : L^2(\sigma)^4 \to L^2(\sigma)^4$ *un operador acotado y autoadjunto. Definimos*

$$D(H_V) = D_\Lambda = \left\{\Phi\left(G\mu + \Lambda(Tr_\Sigma(\phi * G\mu))\sigma\right) \mid G \in L^2(\mu)^4\right\} \subset \mathbb{X}.$$

Para $\varphi = \Phi\left(G\mu + \Lambda(Tr_\Sigma(\phi * G\mu))\sigma\right) \in D_\Lambda$, *se tiene*

$$V\varphi = -\left(\Lambda Tr_\Sigma \phi_m * G\mu\right)\sigma \quad , \quad H_V\varphi = G\mu. \tag{3.10}$$

En ese sentido, observamos que V *está* **determinado** *por* Λ.

A continuación enunciamos y demostramos el teorema principal de este capítulo.

Teorema 3.1.1 *Sea* $\Lambda : L^2(\sigma)^4 \to L^2(\sigma)^4$ *un operador acotado y autoadjunto. Entonces,* H_V *restringido a* D_Λ *es un operador no acotado y autoadjunto en* $\mathbb{X}$.

Demostración: La demostración está dividida en dos partes. Primero probamos que H_V es simétrico en $D(\Lambda)$, luego que $D(H_V^*) \subset D_\Lambda$.

- H_V es simétrico en D_Λ. En efecto, sean

$$\varphi = \Phi\left(G\mu + g\sigma\right), \psi = \Phi\left(F\mu + f\sigma\right) \in D_\Lambda.$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\langle H_V\varphi, \psi\rangle_{\mathbb{X}} - \langle \varphi, H_V\psi\rangle_{\mathbb{X}} &= \langle G\mu, \Phi(F\mu + f\sigma)\rangle_{\mathbb{X}} - \langle \Phi(G\mu + g\sigma), F\mu\rangle_{\mathbb{X}} \\
&= \langle G\mu, \Phi(F\mu)\rangle_{\mathbb{X}} + \langle G\mu, \Phi(f\sigma)\rangle_{\mathbb{X}} - \langle \Phi(G\mu), F\mu\rangle_{\mathbb{X}} - \langle \Phi(g\sigma), F\mu\rangle_{\mathbb{X}} \\
(\Phi \text{ simétrico}) &= \langle G\mu, \Phi(f\sigma)\rangle_{\mathbb{X}} - \langle \Phi(g\sigma), F\mu\rangle_{\mathbb{X}} \\
&= \langle \Phi_\Sigma(G\mu), f\sigma\rangle_{\mathbb{X}} - \langle g\sigma, \Phi_\Sigma(F\mu)\rangle_{\mathbb{X}} \\
&= \langle (Tr_\Sigma\phi_m * G\mu)\,\sigma, f\sigma\rangle_{\mathbb{X}} - \langle g\sigma, (Tr_\Sigma\phi_m * F\mu)\,\sigma\rangle_{\mathbb{X}} \\
&= \langle Tr_\Sigma\phi_m * G\mu, \Lambda\left(Tr_\Sigma\phi_m * F\mu\right)\rangle_{L^2(\sigma)^4} \\
&\quad - \langle \Lambda\left(Tr_\Sigma\phi_m * G\mu\right), Tr_\Sigma\phi_m * F\mu\rangle_{L^2(\sigma)^4} \\
(\Lambda \text{ autoadjunto}) &= 0
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\langle H_V\varphi,\psi\rangle_{\mathbb{X}} = \langle \varphi, H_V\psi\rangle_{\mathbb{X}} \ \ , \ \ \text{para todo } \varphi,\psi \in D_\Lambda.$$

- A continuación mostramos que $D(H_V^*) \subset D_\Lambda$. Es decir, si $\psi \in L^2(\mu)^4\mu$ tal que existe $\psi^* \in L^2(\mu)^4\mu$ cumpliendo

$$\langle H_V\varphi,\psi\rangle_{\mathbb{X}} = \langle \varphi, \psi^*\rangle_{\mathbb{X}} \ \ , \ \ \text{para todo } \varphi \in D_\Lambda, \tag{3.11}$$

debemos mostrar que $\psi \in D_\Lambda$ y $H_V\psi = \psi^*$.

Sea ψ que satisface (3.11). Desde que $\psi^* \in L^2(\mu)^4\mu$; $\psi^* = F\mu$ para algún $F \in L^2(\mu)^4$. Sea $\varphi = \Phi(G\mu + g\sigma) \in D_\Lambda$. Entonces:

$$\begin{aligned} \langle G\mu,\psi\rangle_{\mathbb{X}} = \langle H_V\varphi,\psi\rangle_{\mathbb{X}} &= \langle\varphi,\psi^*\rangle_{\mathbb{X}} \\ &= \langle \Phi(G\mu+g\sigma), F\mu\rangle_{\mathbb{X}} \\ &= \langle G\mu, \Phi(F\mu)\rangle_{\mathbb{X}} + \langle g\sigma, \Phi_\Sigma(F\mu)\rangle_{\mathbb{X}} \end{aligned} \tag{3.12}$$

Por otro lado, si definimos $f = \Lambda\left((Tr\phi_m * F\mu)\sigma\right)$,

$$\begin{aligned} \langle g\sigma, \Phi_\Sigma(F\mu)\rangle_{\mathbb{X}} &= \langle \Lambda\left(Tr_\Sigma\phi_m * G\mu\right)\sigma, \left(Tr\phi_m * F\mu\right)\sigma\rangle_{\mathbb{X}} \\ &= \langle \left(Tr_\Sigma\phi_m * G\mu\right)\sigma, \Lambda\left(\left(Tr\phi_m * F\mu\right)\right)\sigma\rangle_{\mathbb{X}} \\ &= \langle \Phi_\Sigma(G\mu), f\sigma\rangle_{\mathbb{X}} \\ &= \langle G\mu, \Phi(f\sigma)\rangle_{\mathbb{X}}, \end{aligned}$$

Reemplazando esta igualdad en (3.11), se tiene

$$\langle G\mu,\psi\rangle_{\mathbb{X}} = \langle G\mu, \Phi(F\mu)\rangle_{\mathbb{X}} + \langle G\mu, \Phi(f\sigma)\rangle_{\mathbb{X}} = \langle G\mu, \Phi(F\mu+f\sigma)\rangle_{\mathbb{X}}, \text{para toda } G \in L^2(\mu)^4.$$

Entonces $\psi = \Phi(F\mu + f\sigma) \in L^2(\mu)^4$ y $f = \Lambda\left((Tr\phi_m * F\mu)\sigma\right)$. Por lo tanto $\psi \in D_\Lambda$. Luego

$$H_V(\psi) = H(\psi) + V(\psi) = F\mu + f\sigma - f\sigma = F\mu = \psi^*,$$

entonces $D(H_V^*) \subset D_\Lambda$. Concluimos que H_V es un operador autoadjunto en D_Λ.

■

Corolario 3.1.3 *Sea $\Lambda : L^2(\sigma)^4 \to L^2(\sigma)^4$ un operador acotado y autoadjunto. Definimos*

$$D_\Lambda = \left\{\varphi + \phi_m * (\Lambda Tr_\Sigma(\varphi)\sigma) \mid \varphi \in W^{1,2}(\mu)^4\right\} \subset L^2(\mu)^4$$

y $H_V = H + V$ sobre D_Λ como

$$H_V\left(\varphi + \phi_m * (\Lambda Tr_\Sigma(\varphi)\sigma)\right) = H\varphi \in L^2(\mu)^4.$$

Entonces H_V es autoadjunto en D_Λ.

Observación 9 *Para $f \in L^2(\sigma)^4$, $(\phi_m * f\sigma)(x) = \int_\Sigma \phi_m(x-y)f(y)d\sigma(y)$ con $x \in \Sigma^c$. Se cumple que, si $\mathbb{R}^3 = \Omega_+ \cup \Omega_-$ y $\partial\Omega_+ = \partial\Omega_- = \Sigma$,*

$$\lim_{\substack{x\to z \\ \text{no tangencial} \\ x\in\Omega_\pm}} (\phi_m * f\sigma)(x) = \mp\frac{i}{2}(\alpha N(z))f(z) + C_\Sigma f(z) \quad , \quad \text{para } \sigma - c.t.p\ z \in \Sigma, \tag{3.13}$$

donde:

$$C_\Sigma : L^2(\sigma)^4 \to L^2(\sigma)^4 \quad , \quad C_\Sigma f(z) = \lim_{\epsilon\to 0}\int_{|z-y|>\epsilon} \phi_m(z-y)f(y)d\sigma(y),$$

que es un operador acotado. Veamos una situación similar, para tener una idea de la veracidad de (3.13). Si tomamos $\Sigma = \mathbb{R}\times\{0\} \subset \mathbb{R}^2$. Sea $f \in L^2(\mathbb{R})$ ó $C_c^\infty(\mathbb{R})$. Para ϵ suficientemente pequeño, sea $z = x + \mathrm{i}\epsilon$. Entonces

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x+\mathrm{i}\epsilon} = \frac{x-\mathrm{i}\epsilon}{x^2+\epsilon^2} = \frac{x}{x^2+\epsilon^2} - \mathrm{i}\frac{\epsilon}{x^2+\epsilon^2} = Q_\epsilon + P_\epsilon,$$

donde P_ϵ es el núcleo de Poisson y Q_ϵ el de Poisson conjugado. Por lo cual

$$\lim_{\epsilon\to 0^\pm} P_\epsilon f = \pm Cf$$

$$\lim_{\epsilon\to 0^\pm} Q_\epsilon f = CHf(x) = C\lim_{\epsilon\to 0}\int_{|x-y|>\epsilon}\frac{f(y)}{x-y}dy \quad , \quad x \in \mathbb{R},$$

véase, por ejemplo, ([4]).

Hasta ahora hemos visto que, dado Λ, se puede definir V mediante (3.10). Nuestra atención ahora es la siguiente: dado V, ¿Podemos encontrar Λ tal que se verifique (3.10)?. Veamos que, bajo ciertas condiciones sobre V, es posible conocer el respectivo Λ asociado.

En efecto, sea $\psi = \varphi + \phi_m * (\Lambda \varphi_\Sigma \sigma)$ para algún Λ. De la observación 9, se cumple que

$$\psi_\pm(x) = \lim_{\substack{z \to x \\ z \in \Omega_\pm}} \psi(z) = \varphi_\Sigma \mp \frac{\mathrm{i}}{2}(\alpha N)\Lambda\varphi_\Sigma + C_\Sigma(\Lambda\varphi_\Sigma).$$

y si imponemos que, por ejemplo,

$$V(\psi) = a(\psi_+ + \psi_-) = a(2\varphi_\Sigma + 2C_\Sigma(\Lambda\varphi_\Sigma)), \tag{3.14}$$

de (3.10), sabemos que V debe verificar

$$V(\psi) = -\Lambda\varphi_\Sigma. \tag{3.15}$$

De (3.14) y (3.15), $-\Lambda\varphi_\Sigma = 2a(\varphi_\Sigma + C_\Sigma(\Lambda\varphi_\Sigma))$. Entonces:

$$-(1 + 2aC_\Sigma)\Lambda = 2a\mathbb{I}_d \quad , \quad \text{para todo } \varphi_\Sigma \text{ tal que } \varphi \in W^{1,2}(\mu)^4.$$

El operador $1 + 2aC_\Sigma$ es invertible para a suficientemente pequeño, debido a que C_Σ es acotado (basta tomar $2a\|C_\Sigma\| < 1$). Usando un argumento de serie de Neumann, el operador $\Lambda = 2a(1 + 2aC_\Sigma)^{-1} : L^2(\sigma)^4 \to L^2(\sigma)^4$ es acotado. Más aún, es autoadjunto, ya que C_Σ lo es. Con esta definción de Λ podemos definir D_Λ y $H_V|_{D_\Lambda}$; y por el corolario 3.1.3, H_V es autoadjunto sobre D_Λ. Además, $V(\psi) = a(\psi_+ + \psi_-)$ para toda $\psi \in D_\Lambda$.

Capítulo 4

Parte Aingeru Fernandez

En este capítulo se asume que el lector está familiarizado con Teoría de Espacios de Hilbert, Espacios L^p, Teoría de Operadores, Ecuación de Schrödinger y Análisis de Fourier. Para estos temas, por ejemplo, ver ([3]), ([8]), ([11]), ([13]), ([14]). Para mayores detalles de los resultados mostrados, consultar los artículos ([1]), ([6]); la tesina de máster de Aingeru ([9]) y las referencias contenidas en los mismos.

En esta parte del curso, probaremos de nuevo el hecho de que si tenemos una solución de la ecuación de Schrödinger

$$\partial_t u = i(\Delta u + Vu) \tag{4.1}$$

con decaimiento Gaussiano en tiempo $t = 0, t = 1$, entonces la solución de la ecuación tendrá decaimiento Gaussiano para todo tiempo entre medias. Esto es,

$$|e^{|x|^2/\beta^2} u(0)\| + \|e^{|x|^2/\alpha^2} u(1)\| < +\infty \Rightarrow \|e^{\gamma(t)|x|^2} u(t)\| < +\infty \ \forall t \in [0,1],$$

donde $\gamma(t)$ será una cierta función tal que $\gamma(0) = 1/\beta^2,\ \gamma(1) = 1/\alpha^2$.

En la primera parte del curso se dio una prueba completamente formal de este resultado, mientras que en esta parte intentaremos dar una prueba más rigurosa.

Los dos problemas principales con los que nos vamos a encontrar son, por una parte, que necesitamos exigir cierta regularidad a nuestra solución, y por otra parte, necesitamos que la función

$$H(t) = \|e^{\gamma|x|^2}u(t)\|^2$$

este bien definida para todo $t \in [0,1]$. Para solventar estos problemas, vamos a tomar primero soluciones de la ecuación con difusión

$$\partial_t u = (A+iB)(\Delta u + V(x,t)u + F(x,t), \quad A > 0, \quad B \in \mathbb{R}, \tag{4.2}$$

ecuación para la que se sabe

$$u(0) \in L^2[0,1] \Rightarrow u \in L^\infty([0,1], L^2(\mathbb{R}^n)) \cap L^2([0,1], H^1(\mathbb{R}^n)).$$

Tendremos entonces que ahora nuestra solución es suficientemente regular para que los razonamientos que sigamos sean rigurosos. Una vez veamos que las soluciones de estas ecuaciones tienen decaimiento Gaussiano si se tiene decaimiento Gaussiano en los extremos, mediante un paso al límite en el que haremos tender el término de difusión A a 0, probaremos el resultado principal de esta parte. A modo de notación, por comodidad, cuando me refiera a la norma de una función en el espacio $L^2(\mathbb{R}^n)$ no utilizaré ningún subíndice. En caso contrario, indicare con la notación habitual en que espacio estamos tomando la norma. Además, aunque nuestra solución (y más funciones que nos aparecerán más adelante) dependa de la variable espacial x, y de la temporal t, habitualmente escribiré $u(t)$ para referirme a la solución, sobretodo a la hora de calcular normas en $\mathbb{R}^n$. Para empezar, veremos una primera estimación del decaimiento una solución de la ecuación (2) que dependerá del decaimiento del dato inicial $u(0)$.

Lema 4.0.6 *Supongamos que* $u \in L^\infty([0,1], L^2(\mathbb{R}^n)) \cap L^2([0,1], H^1(\mathbb{R}^n))$ *verifica*

$$\partial_t u = (A+iB)(\Delta u + Vu + F),$$

con $A > 0$ *y* $B \in \mathbb{R}$. *Entonces*

$$\begin{aligned} &e^{-M_T} \| e^{\frac{\gamma A|x|^2}{A+4\gamma(A^2+B^2)T}} u(T) \| \\ &\qquad \leq \| e^{\gamma |x|^2} u(0) \| + \sqrt{A^2+B^2} \| e^{\frac{\gamma A|x|^2}{A+4\gamma(A^2+B^2)t}} F(t) \|_{L^1([0,T],L^2(\mathbb{R}^n))} \end{aligned}$$

cuando $\gamma \geq 0, 0 \leq T \leq 1$ *y* $M_T = \| A(\Re V)^+ - B\Im V \|_{L^1([0,T],L^\infty(\mathbb{R}^n))}$.

Demostración:

Sea $v = e^{\varphi} u$ con $\varphi = \varphi(x,t) \in \mathbb{R}$ una función que escogeremos más adelante, y escribamos la ecuación que verifica v en la forma

$$\partial_t v = \mathcal{S}v + \mathcal{A}v + (A+iB)e^{\varphi} F,$$

donde los operadores $\mathcal{S}$ y $\mathcal{A}$ son simétrico y antisimétrico respectivamente.

Si tenemos en cuenta que $u = e^{-\varphi} v$,

$$\partial_t u = -e^{-\varphi} v \partial_t \varphi + e^{-\varphi} \partial_t v$$

$$\Delta u = -\Delta \varphi e^{-\varphi} v + |\nabla \varphi|^2 e^{-\varphi} v - 2\nabla \varphi \cdot \nabla v e^{-\varphi} + e^{-\varphi} \Delta v.$$

Estas relaciones nos permiten escribir la ecuación que verifica la función $v(x,t)$ en la forma que buscamos, donde los operadores $\mathcal{S}$ y $\mathcal{A}$ son

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= A(\Delta + |\nabla \varphi|^2) - iB(2\nabla \varphi \cdot \nabla + \Delta \varphi) + (\partial_t \varphi + A\Re V - B\Im V), \\ \mathcal{A} &= iB(\Delta + |\nabla \varphi|^2) - A(2\nabla \varphi \cdot \nabla + \Delta \varphi) + i(B\Re V + A\Im V). \end{aligned}$$

Integrando por partes, se ve fácilmente que estos operadores son simétrico y antisimétrico, respectivamente. De manera formal,

$$\partial_t \|v\|^2 = (\partial_t v, v) + (v, \partial_t v) = 2\Re(\mathcal{S}v, v) + 2\Re((A+iB)e^{\varphi} F, v)$$

cuando $t \geq 0$. Integrando por partes,

$$\begin{aligned} \Re(\mathcal{S}v, v) = &- A \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla v|^2 \, dx + \int_{\mathbb{R}^n} (A|\nabla \varphi|^2 + \partial_t \varphi)|v|^2 \, dx \\ &+ 2B\Im \int_{\mathbb{R}^n} \bar{v} \nabla \varphi \cdot \nabla v \, dx + \int_{\mathbb{R}^n} (A\Re V - B\Im V)|v|^2 \, dx \end{aligned}$$

y aplicando la **desigualdad de Cauchy-Schwarz**

$$\partial_t \|v(t)\|^2 \leq 2\|A(\Re V(t))^+ - B\Im V(t)\|_\infty \|v(t)\|^2 + 2\sqrt{A^2+B^2}\|e^\varphi F(t)\|\|v(t)\| \tag{4.3}$$

cuando

$$(A + B^2/A)|\nabla\varphi|^2 + \partial_t \varphi \leq 0 \quad \text{en } \mathbb{R}^{n+1}_+. \tag{4.4}$$

Esto nos permite que al acotar el término $2\Re(\mathcal{S}v, v)$, nos quede un término negativo más el primer término en la acotación que hemos dado para $\partial_t\|v(t)\|^2$. Para esta acotación, utilizaremos la propiedad

$$2ab \leq k^2 a^2 + \frac{1}{k^2} b^2,$$

con $a = B\nabla v, b = \overline{v}\nabla\varphi$ y $k^2 = A/B^2$. De esta forma,

$$2B\Im \int_{\mathbb{R}^n} \overline{v}\nabla\varphi \cdot \nabla v \, dx \leq \frac{A}{B^2}\int_{\mathbb{R}^n} B^2|\nabla v|^2 \, dx + \frac{B^2}{A}\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla\varphi|^2|v|^2 \, dx,$$

y, al aplicar esta desigualdad, vemos que si se cumple la condición (4.4) entonces se obtiene (4.3). Cuando $\varphi(x,t) = a(t)\phi(x)$, la condición (4.4) se reescribe como

$$a(t)^2(A + B^2/A)|\nabla\phi(x)|^2 + a'(t)\phi(x) \leq 0.$$

De manera formal, exigiremos que $\phi(x) = |x|^2$. En ese caso, (4.4) se verifica cuando

$$\begin{cases} a'(t) = -4(A + B^2/A)a(t)^2, \\ a(0) = \gamma. \end{cases} \tag{4.5}$$

Para probar el Lema, utilizaremos el **método de la energía**. Si tenemos que

$$y'(t) + f(t)y(t) \leq g(t),$$

utilizando el método del factor integrante, deducimos que

$$e^{\int_0^T f(s)\,ds} y(T) - y(0) \leq \int_0^T e^{\int_0^t f(s)\,ds} g(t)\,dt \tag{4.6}$$

En nuestro caso, tendremos que

$$y(t) = \|v(t)\|, \; f(t) = -\|A(\Re V(t))^+ - B\Im V(t)\|_\infty, \; g(t) = \sqrt{A^2+B^2}\|e^{\varphi(x,t)}F(t)\|.$$

Si sustituimos estos valores en (4.6), y tenemos en cuenta que

$$a(t) = \frac{\gamma A}{A + 4\gamma(A^2 + B^2)t}$$

es la solución de (4.5), y que $e^{-M_t} \leq 1$ por ser $M_t \geq 0$ para todo $t \in [0, T]$, llegamos, de manera formal, a la acotación del Lema. Para justificar todos los cálculos hechos en esta demostración, dado $\gamma > 0$, truncamos $|x|^2$ como

$$\phi_R(x) = \begin{cases} |x|^2, & |x| \leq R, \\ R^2, & |x| > R. \end{cases}$$

y regularizamos ϕ_R con un mollifier estándar θ_ρ, esto es, una función que verifica

$$\theta_\rho(y) = \frac{1}{\rho^n}\theta\left(\frac{y}{\rho}\right), \text{ con } \theta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \text{ radial, par, positiva, } \int_{\mathbb{R}^n} \theta_\rho(y)\,dy = 1.$$

Llamamos

$$\varphi_{\rho,R}(x,t) = a(t)\theta_\rho * \phi_R(x), \quad v_{\rho,R} = e^{\varphi_{\rho,R}}u,$$

donde $a(t)$ es la solución de la ecuación diferencial (4.5). Para estas funciones, todas las integrales son finitas y las integrales por partes están justificadas. Además, se verifica (4.4) ya que si escribimos la condición en estos términos tendremos gracias a las propiedades del mollifier

$$\begin{aligned}
&\left(A + \frac{B^2}{A}\right)a^2(t)\left|\int_{|x-y|\leq R} \theta_\rho(y)2(x-y)\,dy\right|^2 \\
&-4\left(A + \frac{B^2}{A}\right)a^2(t)\left[\int_{|x-y|\leq R} \theta_\rho(y)|x-y|^2\,dy + \int_{|x-y|>R} \theta_\rho(y)R^2\,dy\right] \\
\leq\ & 4\left(A + \frac{B^2}{A}\right)a^2(t)|x|^2\left(\int_{|x-y|\leq R} \theta_\rho(y)\,dy\right)^2 \\
&-4\left(A + \frac{B^2}{A}\right)a^2(t)\left[\int_{|x-y|\leq R} (|x|^2 + |y|^2)\theta_\rho(y)\,dy + \int_{|x-y|>R} \theta_\rho(y)R^2\,dy\right] \\
=\ & 4\left(A + \frac{B^2}{A}\right)a^2(t)|x|^2\int_{|x-y|\leq R} \theta_\rho(y)\,dy\left[\int_{|x-y|\leq R} \theta_\rho(y)\,dy - 1\right] \\
&-4\left(A + \frac{B^2}{A}\right)a^2(t)\left[\int_{|x-y|\leq R} |y|^2\theta_\rho(y)\,dy + \int_{|x-y|>R} \theta_\rho(y)R^2\,dy\right] \leq 0.
\end{aligned}$$

Entonces, usando el método de la energía al igual que antes, pero ahora de forma rigurosa, se cumple la desigualdad

$$\|v_{\rho,R}(T)\| \leq e^{M_T}(\|e^{\gamma|x|^2}u(0)\| + \sqrt{A^2+B^2}\|e^{\varphi_{\rho,R}}F\|_{L^1([0,T],L^2(\mathbb{R}^n))})$$

de manera uniforme en ρ y R. Como, de nuevo por las propiedades del mollifier, $\theta_\rho * \phi_R(x) \leq |x|^2 + C\rho^2$, tomando el límite cuando ρ tiende a cero y R tiende a infinito, se sigue la estimación del Lema de forma rigurosa gracias al **Lema de Fatou**. ■ A continuación, veremos un Lema abstracto para operadores simétricos y antisimétricos que nos dirá bajo que condiciones tenemos propiedades del tipo de convexidad logarítmica. De esta forma, aplicando este resultado a una solución de la ecuación anterior, el decaimiento Gaussiano en tiempo $t \in [0,1]$ dependerá del decaimiento en los extremos del intervalo.

Lema 4.0.7 *Supongamos que $\mathcal{S}$ es un operador simétrico, $\mathcal{A}$ es un operador antisimétrico, ambos dependiendo de la variable temporal t, G es una función positiva y $f(x,t)$ es una función razonable. Sean, además,*

$$H(t) = (f,f), \quad D(t) = (\mathcal{S}f,f), \quad \partial_t\mathcal{S} = \mathcal{S}_t, \quad N(t) = \frac{D(t)}{H(t)}.$$

Entonces

$$\begin{aligned}\partial_t^2 H =& 2\partial_t\Re(\partial_t f - \mathcal{S}f - \mathcal{A}f, f) + 2(\mathcal{S}_t f + [\mathcal{S},\mathcal{A}]f, f) \\ &+ \|\partial_t f - \mathcal{A}f + \mathcal{S}f\|^2 - \|\partial_t f - \mathcal{A}f - \mathcal{S}f\|^2\end{aligned} \tag{4.7}$$

y

$$\dot{N}(t) \geq (\mathcal{S}_t f + [\mathcal{S},\mathcal{A}]f, f)/H - \|\partial_t f - \mathcal{A}f - \mathcal{S}f\|^2/2H. \tag{4.8}$$

Además, si

$$|\partial_t f - \mathcal{A}f - \mathcal{S}f| \leq M_1|f| + G \quad \text{en } \mathbb{R}^n \times [0,1], \quad \mathcal{S}_t + [\mathcal{S},\mathcal{A}] \geq -M_0, \tag{4.9}$$

y

$$M_2 = \sup_{[0,1]} \|G(t)\|/\|f(t)\|$$

es finito, entonces $H(t)$ es "logarítmicamente convexa" en $[0,1]$ y existe una constante universal N tal que

$$H(t) \leq e^{N(M_0+M_1+M_2+M_1^2+M_2^2)} H(0)^{1-t} H(1)^t, \quad \textit{cuando } 0 \leq t \leq 1. \tag{4.10}$$

Demostración: Supongamos primero además que $\partial_t f = \mathcal{S}f + \mathcal{A}f$. Bajo esta nueva hipótesis es más fácil probar la convexidad logarítmica, ya que

$$\dot{H}(t) = 2\Re(\partial_t f, f) = 2(\mathcal{S}f, f) = 2D(t),$$

$$\begin{aligned}
\dot{D}(t) &= (\mathcal{S}_t f, f) + (\mathcal{S}\partial_t f, f) + (\mathcal{S}f, \partial_t f) = (\mathcal{S}_t f, f) + 2\Re(\mathcal{S}f, \partial_t f) \\
&= (\mathcal{S}_t f, f) + 2(\mathcal{S}f, \mathcal{S}f) + 2\Re(\mathcal{S}f, \mathcal{A}f) = (\mathcal{S}_t f + [\mathcal{S}, \mathcal{A}]f, f) + 2(\mathcal{S}f, \mathcal{S}f).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\ddot{H}(t) = 2(\mathcal{S}_t f + [\mathcal{S}, \mathcal{A}]f, f) + 4(\mathcal{S}f, \mathcal{S}f)$ y

$$\partial_t^2(\log H) = \frac{\ddot{H}H - \dot{H}^2}{H^2} = \frac{2(\mathcal{S}_t f + [\mathcal{S}, \mathcal{A}]f, f)(f, f) + 4(\mathcal{S}f, \mathcal{S}f) - 4(\mathcal{S}f, f)(\mathcal{S}f, f)}{(f, f)^2},$$

luego si aplicamos la desigualdad de **Cauchy-Schwarz**, los dos últimos términos del numerador se cancelan, por lo que

$$\partial_t^2(\log H) \geq \frac{2(\mathcal{S}_t f + [\mathcal{S}, \mathcal{A}]f, f)}{(f, f)} \geq -2M_0,$$

y a partir de aquí se prueba la convexidad logarítmica siguiendo un proceso análogo al que veremos a continuación para el caso general. En el caso general, si derivamos $H(t)$, y tenemos en cuenta que $\mathcal{S}$ es simétrico y $\mathcal{A}$ es antisimétrico, es fácil ver que

$$\begin{aligned}
\dot{H}(t) &= 2\Re(\partial_t f - \mathcal{S}f - \mathcal{A}f, f) + 2D(t), \\
\dot{H}(t) &= \Re(\partial_t f + \mathcal{S}f, f) + \Re(\partial_t f - \mathcal{S}f, f), \\
D(t) &= \frac{1}{2}\Re(\partial_t f + \mathcal{S}f, f) - \frac{1}{2}\Re(\partial_t f - \mathcal{S}f, f).
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Por otro lado, si derivamos $D(t)$ y tenemos en cuenta que

$$([\mathcal{S}, \mathcal{A}]f, f) = 2\Re(\mathcal{A}f, \mathcal{S}f),$$

tenemos que

$$\dot{D}(t) = (\mathcal{S}_t f, f) + (\mathcal{S}\partial_t f, f) + (\mathcal{S}f, \partial_t f) = (\mathcal{S}_t f + [\mathcal{S}, \mathcal{A}]f, f) + 2\Re(\partial_t f - \mathcal{A}f, \mathcal{S}f),$$

que, teniendo en cuenta la identidad de polarización

$$4(x, y) = \|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 - i(\|x + iy\|^2 - \|x - iy\|^2),$$

podemos escribir como

$$\dot{D}(t) = (\mathcal{S}_t f + [\mathcal{S}, \mathcal{A}]f, f) + \frac{1}{2}\|\partial_t f - \mathcal{A}f + \mathcal{S}f\|^2 - \frac{1}{2}\|\partial_t f - \mathcal{A}f - \mathcal{S}f\|^2. \tag{4.12}$$

Combinando la primera fórmula de (4.11) y (4.12), se obtiene (4.7). Si multiplicamos las dos ultimas fórmulas en (4.11) y aÒadimos el término $\Re(\mathcal{A}f, f) = 0$, tenemos que

$$\dot{H}(t)D(t) = \frac{1}{2}(\Re(\partial_t f - \mathcal{A}f + \mathcal{S}f, f))^2 - \frac{1}{2}(\Re(\partial_t f - \mathcal{A}f - \mathcal{S}f, f))^2. \tag{4.13}$$

Para obtener la desigualdad del Lema, derivamos $N(t)$ y utilizamos (4.13) y (4.12). Una vez calculado $\dot{N}(t)$, llegamos a la desigualdad (4.8) desechando los términos positivos en (4.12) y en la igualdad resultante de derivar $N(t)$. Finalmente, si se verifica (4.9), gracias a (4.11) observamos que

$$\partial_t^2(\log H(t) + O(1)) \geq 0, \quad \text{cuando } 0 \leq t \leq 1,$$

donde $|O(1)| \leq N(M_0 + M_1 + M_2 + M_1^2 + M_2^2)$ en $[0, 1]$. Deducimos entonces, por monotonía

$$\partial_s(\log H(s) + O(1)) \leq \partial_\tau(\log H(\tau) + O(1)), \quad \text{cuando } 0 \leq s \leq t \leq \tau \leq 1.$$

Integrando esta desigualdad en $(s, \tau) \in [0, t] \times [t, 1]$, llegamos a que

$$(1 - t)(\log H(t) - \log H(0) + O(1)) \leq t(\log H(1) - \log H(t) + O(1)),$$

y finalmente, agrupando términos y tomando exponenciales obtenemos la desigualdad (4.10). ∎

Gracias a este Lema ya estamos en condiciones de probar la convexidad logarítmica de las soluciones de esta ecuación con difusión con decaimiento Gaussiano en los extremos del intervalo. A la hora de justificar los cálculos, daremos una idea orientativa de como se ha de proceder para la justificación de las cuentas, aunque por comodidad evitaremos dar todos los detalles.

Lema 4.0.8 *Supongamos que* $u \in L^\infty([0,1], L^2(\mathbb{R}^n)) \cap L^2([0,1], H^1(\mathbb{R}^n))$ *verifica*

$$\partial_t u = (A + iB)(\Delta u + Vu + F),$$

con $A > 0, B \in \mathbb{R}, V$ *tomando valores complejos,* $\gamma > 0$, *y*

$$\sup_{[0,1]} \|V(t)\|_\infty \leq M_1.$$

Sea

$$M_2 = \sup_{[0,1]} \|e^{\gamma|x|^2} F(t)\| / \|u(t)\|$$

y supongamos que $\|e^{\gamma|x|^2} u(0)\|, \|e^{\gamma|x|^2} u(1)\|$ *y* M_2 *son cantidades finitas. Entonces* $\|e^{\gamma|x|^2} u(t)\|$ *es "logarítmicamente convexa" en* $[0,1]$ *y existe una constante* N *tal que*

$$\|e^{\gamma|x|^2} u(t)\| \leq e^{N[(A^2+B^2)(M_1^2+M_2^2)+\sqrt{A^2+B^2}(M_1+M_2)]} \|e^{\gamma|x|^2} u(0)\|^{1-t} \|e^{\gamma|x|^2} u(1)\|^t \qquad (4.14)$$

cuando $0 \leq t \leq 1$.

Demostración: Primero veamos la demostración formal para hacernos una idea de como probar la convexidad logarítmica. Si tomamos $f = e^{\gamma\varphi} u$ con $\varphi = \varphi(x)$ una función real que escogeremos más adelante, observamos que esta nueva función verifica

$$\partial_t f = \mathcal{S} f + \mathcal{A} f + (A + iB)(Vf + e^{\gamma\varphi} F), \text{ en } \mathbb{R}^{n+1}_+, \qquad (4.15)$$

con operadores $\mathcal{S}$ simétrico y $\mathcal{A}$ antisimétrico

$$\mathcal{S} = A(\Delta + \gamma^2 |\nabla\varphi|^2) - iB\gamma(2\nabla\varphi \cdot \nabla + \Delta\varphi) + \gamma\partial_t\varphi,$$
$$\mathcal{A} = iB(\Delta + \gamma^2 |\nabla\varphi|^2) - A\gamma(2\nabla\varphi \cdot \nabla + \Delta\varphi).$$

Calculando el conmutador, obtenemos

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_t+[\mathcal{S},\mathcal{A}]=&\gamma\partial_t^2\varphi+4\gamma^2A\nabla\varphi\cdot\nabla\partial_t\varphi-2iB\gamma(2\nabla\partial_t\varphi\cdot\nabla+\Delta\partial_t\varphi)\\&-\gamma(A^2+B^2)[4\nabla\cdot(D^2\varphi\nabla\,)-4\gamma^2D^2\varphi\nabla\varphi\cdot\nabla\varphi+\Delta^2\varphi].\end{aligned}\tag{4.16}$$

De manera formal, si $\varphi(x,t)=|x|^2$, entonces

$$\mathcal{S}_t+[\mathcal{S},\mathcal{A}]=-\gamma(A^2+B^2)[8\Delta-32\gamma^2|x|^2]$$

y, integrando por partes

$$(\mathcal{S}_tf+[\mathcal{S},\mathcal{A}]f,f)=\gamma(A^2+B^2)\int_{\mathbb{R}^n}(8|\nabla f|^2+32\gamma^2|x|^2|f|^2)\,dx\geq C_\gamma\int_{\mathbb{R}^n}|f|^2\geq 0.\tag{4.17}$$

Donde hemos utilizado la **Desigualdad de Heisenberg-Pauli-Weyl**. Teniendo en cuenta (4.15), y que V está acotado,

$$|\partial_tf-\mathcal{S}f-\mathcal{A}f|=|(A+iB)(Vf+e^{\gamma\varphi}F)|\leq\sqrt{A^2+B^2}(M_1|f|+e^{\gamma\varphi}|F|),\tag{4.18}$$

Luego si podemos justificar las cuentas que acabamos de hacer de forma rigurosa, podremos aplicar el lema 4.0.7 a la función f, con $\tilde{M}_0=0,\tilde{M}_1=\sqrt{A^2+B^2}M_1$ y $\tilde{M}_2=\sqrt{A^2+B^2}M_2$ para concluir la convexidad logarítmica de $\|e^{\gamma|x|^2}u(t)\|^2$ y (4.14). Para justificar los cálculos previos, necesitamos, por una parte, una función $\varphi(x,t)$ tal que

$$\begin{aligned}(\mathcal{S}_tf+[\mathcal{S},\mathcal{A}]f,f)=&4\gamma(A^2+B^2)\int_{\mathbb{R}^n}\nabla f\cdot D^2\varphi\overline{\nabla f}\,dx\\&+4\gamma^3(A^2+B^2)\int_{\mathbb{R}^n}D^2\varphi\nabla\varphi\cdot\nabla\varphi|f|^2\,dx\\&-\gamma(A^2+B^2)\int_{\mathbb{R}^n}\Delta^2\varphi|f|^2\,dx>0\end{aligned}$$

y, por otra parte, que esta función tenga un decaimiento en el infinito inferior al decaimiento Gaussiano. Para nuestra elección, los dos primeros sumandos serán positivos, pero el término del bilaplaciano no será positivo. Para esto, dado $a\in(0,1)$ tomaremos una función $\eta(r)\in C^\infty(\mathbb{R})$ positiva tal que

$$\eta(r)=\begin{cases}0, & \text{en } r\leq 1,\\ r^{-a}, & \text{en } r\geq 2.\end{cases}$$

A continuación, definimos una función radial φ_a de forma que se verifique

$$\begin{cases} \varphi_a''(r) - \frac{\varphi_a'(r)}{r} = -2a\eta(r), \\ \varphi_a(0) = 0 = \text{lím}_{r\to+\infty} \varphi_a'(r). \end{cases}$$

Entonces,

$$\varphi_a''(r) - \frac{\varphi_a'(r)}{r} = r\left(\frac{1}{r}\varphi_a'\right)' = -2a\eta(r) \Longrightarrow \left(\frac{1}{r}\varphi_a'\right)' = -\frac{2a}{r}\eta(r),$$

por lo que integrando esta última igualdad deducimos que

$$\varphi_a'(r) = 2ar\int_r^\infty \eta(t)\frac{dt}{t}.$$

Como el bilaplaciano de una función radial es

$$\Delta^2\psi = \psi^{iv)} + 2\frac{n-1}{r}\psi''' + \frac{(n-3)(n-1)}{r^2}\left(\psi'' - \frac{\psi'}{r}\right), \tag{4.19}$$

necesitamos saber las derivadas de nuestra función φ_a, cuyo valor depende de r. En primer lugar, si $r \geq 2$, como en ese caso $\eta(r) = r^{-a}$, tenemos que

$$\varphi_a'(r) = 2ar\int_r^\infty t^{-a-1}\,dt = 2r^{1-a} \Longrightarrow \begin{cases} \varphi_a''(r) = 2(1-a)r^{-a}, \\ \varphi_a'''(r) = -2a(1-a)r^{-a-1}, \\ \varphi_a^{iv)}(r) = 2a(a+1)(1-a)r^{-a-2}. \end{cases}$$

Por otro lado, si $0 \leq r \leq 1$, como en el intervalo $[r,1]$ sabemos que $\eta \equiv 0$,

$$\varphi_a'(r) = 2ar\int_1^\infty \eta(t)\frac{dt}{t} \Longrightarrow \varphi_a''(r) = 2a\int_1^\infty \eta(t)\frac{dt}{t},$$

y dado que φ_a'' es constante, entonces $\varphi_a''' \equiv 0 \equiv \varphi_a^{iv)}$. Finalmente, si $1 \leq r \leq 2$, por construcción tenemos

$$\varphi_a''(r) - \frac{\varphi_a'(r)}{r} = r\left(\frac{\varphi_a'(r)}{r}\right)' = -2a\eta(r) \Longrightarrow \left(\frac{\varphi_a'(r)}{r}\right)' = -\frac{2a\eta(r)}{r},$$

luego

$$\varphi_a''(r) = -2a\eta(r) + \frac{\varphi_a'(r)}{r} \Longrightarrow \begin{cases} \varphi_a'''(r) = -2a\eta'(r) - \frac{2a\eta(r)}{r} = -2a\left(\eta'(r) + \frac{\eta(r)}{r}\right), \\ \varphi_a^{iv)} = -2a\left(\eta''(r) + \frac{\eta'(r)}{r} - \frac{\eta(r)}{r^2}\right). \end{cases}$$

Una vez obtenidas las expresiones de las derivadas de φ_a, podemos calcular el bilaplaciano mediante la fórmula (4.19), obteniendo

$$\Delta^2\varphi_a = \begin{cases} 0, & \text{en } 0 \leq r \leq 1, \\ 2a\big(-\eta''(r) - (2n-1)\frac{\eta'(r)}{r} + (-n^2+2n)\frac{\eta(r)}{r^2}\big), & \text{en } 1 \leq r \leq 2, \\ -2a(a-n)(a-n+2)r^{-a-2}, & \text{en } 2 \leq r. \end{cases}$$

Por lo tanto, podemos observar que en $r \leq 1$ el bilaplaciano es 0, y para $r \geq 1$ el bilaplaciano es un valor que esta multiplicado por a, lo cual nos indica que será muy pequeÒo cuando a sea muy pequeÒo. Hecho esto, necesitamos una cota para el término $D^2\varphi_a \nabla\varphi_a \cdot \nabla\varphi_a$ que no tienda a cero cuando a tiende a cero. Como nuestra función φ_a es radial, si calculamos este término en coordenadas radiales, obtendremos que $D^2\varphi_a\nabla\varphi_a \cdot \nabla\varphi_a = (\varphi_a'(r))^2\varphi_a''(r)$, luego tenemos que acotar la primera y segunda derivada de φ_a. Hay que observar que para $0 \leq r \leq 1$ no hace falta dar una acotación, pues en ese caso hemos visto que $\Delta^2\varphi_a = 0$, y los otros dos términos de $(\mathcal{S}_t f + [\mathcal{S},\mathcal{A}]f, f)$ son positivos. Si $1 \leq r \leq 2$, entonces a partir de la expresión de $\varphi_a'(r)$ obtenemos

$$\varphi_a'(r) = 2ar\int_r^\infty \eta(t)\frac{dt}{t} \geq 2ar\int_2^\infty \eta(t)\frac{dt}{t} = r2^{1-a} \geq 2^{1-a},$$

$$\varphi_a''(r) = 2a\int_r^\infty \eta(t)\frac{dt}{t} - 2a\eta(r) \geq 2^{1-a} - 2a\eta(r),$$

luego $(\varphi_a'(r))^2\varphi_a''(r) \geq 8^{1-a} - 4^{1-a}2a\eta(r)$ y vemos que este número tiende a 8 cuando a tiende a cero. Por otra parte, si $2 \leq r$

$$\left.\begin{array}{l} \varphi_a'(r) = 2r^{1-a} \\ \varphi_a''(t) = 2(1-a)r^{-a} \end{array}\right\} \Longrightarrow (\varphi_a'(r))^2\varphi_a''(r) = 8(1-a)r^{2-3a} \geq (1-a)2^{2-3a},$$

para a suficientemente pequeÒo (basta con que $a < 2/3$), y de nuevo, tomando el límite cuando a tiende a cero, vemos que esta cantidad tiende a 32. Por lo tanto, si consideramos $f_a = e^{\gamma\varphi_a}u$, dados γ, A, B, existe $a_0 > 0$ tal que para $a \leq a_0$

$$(\mathcal{S}_t f_a + [\mathcal{S},\mathcal{A}]f_a, f_a) > 0.$$

Si ahora tomamos $H_a(t) = \|f_a\|^2$ con $0 < a \le a_0$, como tenemos un decaimiento más lento que el decaimiento Gaussiano, podemos utilizar la estimación del lema 4.0.6 y la regularidad interior de soluciones de la ecuación que estamos considerando con $A > 0$ para garantizar que los cálculos realizados en el **aingeruuno** son finitos y correctos. Por lo tanto tendremos que H_a verifica la estimación (4.10) y (4.14) se verifica al tomar el límite cuando a tiende a cero, utilizando el **Lema de Fatou**, ya que así

$$\begin{aligned}
\|e^{\gamma|x|^2}u(t)\| &\le \liminf_{a\to 0}\|f_a(t)\|^2 \\
&\le \liminf_{a\to 0} e^{N[(A^2+B^2)(M_1^2+M_2^2)+\sqrt{A^2+B^2}(M_1+M_2)]}H_a(0)^{1-t}H_a(1)^t \\
&= e^{N[(A^2+B^2)(M_1^2+M_2^2)+\sqrt{A^2+B^2}(M_1+M_2)]}\|e^{\gamma|x|^2}u(0)\|^{1-t}\|e^{\gamma|x|^2}u(1)\|^t.
\end{aligned}$$

■

Antes de enunciar el resultado principal de este capítulo, introduciremos el concepto de transformada Appell, gracias al cual, aunque no tengamos el mismo decaimiento en los extremos del intervalo, podremos reducirnos al caso en el que el decaimiento sea el mismo de manera muy sencilla. Supongamos que $u(y,s)$ verifica, para $A + iB \neq 0$,

$$\partial_s u = (A+iB)(\Delta u + V(y,s)u + F(y,s)), \quad \text{en } \mathbb{R}^n \times [0,1],$$

y sean α y β números positivos, $\gamma \in \mathbb{R}$ y

$$\tilde{u}(x,t) = \left(\frac{\sqrt{\alpha\beta}}{\alpha(1-t)+\beta t}\right)^{n/2} u\left(\frac{\sqrt{\alpha\beta}x}{\alpha(1-t)+\beta t}, \frac{\beta t}{\alpha(1-t)+\beta t}\right) e^{\frac{(\alpha-\beta)|x|^2}{4(A+iB)(\alpha(1-t)+\beta t)}}.$$

Entonces $\tilde{u}$ verifica

$$\partial_t \tilde{u} = (A+iB)(\Delta\tilde{u} + \tilde{V}(x,t)\tilde{u} + \tilde{F}(x,t)) \quad \text{en } \mathbb{R}^n \times [0,1],$$

con

$$\tilde{V}(x,t) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha(1-t)+\beta t)^2} V\left(\frac{\sqrt{\alpha\beta}x}{\alpha(1-t)+\beta t}, \frac{\beta t}{\alpha(1-t)+\beta t}\right)$$

$$\tilde{F}(x,t) = \left(\frac{\sqrt{\alpha\beta}}{\alpha(1-t)+\beta t}\right)^{n/2+2} F\left(\frac{\sqrt{\alpha\beta}x}{\alpha(1-t)+\beta t}, \frac{\beta t}{\alpha(1-t)+\beta t}\right) e^{\frac{(\alpha-\beta)|x|^2}{4(A+iB)(\alpha(1-t)+\beta t)}}.$$

Además,

$$\|e^{\gamma|x|^p}\tilde{F}(t)\| = \frac{\alpha\beta}{(\alpha(1-t)+\beta t)^2}\|e^{\frac{\gamma(\alpha\beta)^{p/2}}{(\alpha s+\beta(1-s))^p}|y|^p+\frac{(\alpha-\beta)A}{4(A^2+B^2)(\alpha s+\beta(1-s))}|y|^2}F(s)\|$$

y

$$\|e^{\gamma|x|^p}\tilde{u}(t)\| = \|e^{\frac{\gamma(\alpha\beta)^{p/2}}{(\alpha s+\beta(1-s))^p}|y|^p+\frac{(\alpha-\beta)A}{4(A^2+B^2)(\alpha s+\beta(1-s))}|y|^2}u(s)\|$$

cuando $s = \frac{\beta t}{\alpha(1-t)+\beta t}$ y $\gamma \in \mathbb{R}$. En un principio, nos interesará el caso en el que $p = 2$, caso en el que los dos sumandos de la exponencial tienen la misma potencia, $|y|^2$. Supongamos que trabajamos con la ecuación de Schrˆdinger, es decir que elegimos $A = 0, B = 1$, tomamos como $\gamma = \dfrac{1}{\alpha\beta}$ y evaluamos en los puntos $t = 0 \Rightarrow s = 0$ y $t = 1 \Rightarrow s = 1$ tenemos que

$$\|e^{|x|^2/\alpha\beta}\tilde{u}(0)\| = \|e^{|x|^2/\beta^2}u(0)\|,$$
$$\|e^{|x|^2/\alpha\beta}\tilde{u}(1)\| = \|e^{|x|^2/\alpha^2}u(1)\|.$$

Por lo tanto, esta nueva función tiene decaimiento Gaussiano en los extremos del intervalo con el mismo coeficiente para cada tiempo. Combinando la transformada Appell con los resultados previos probaremos la convexidad logarítmica para soluciones de la ecuación de Schrˆdinger.

Teorema 4.0.2 *Supongamos que* $u \in C([0,1], L^2(\mathbb{R}^n))$ *verifica*

$$\partial_t u = i(\Delta u + V(x,t)u), \quad \textit{en } \mathbb{R}^n \times [0,1],$$

con $V = V_1(x) + V_2(x,t)$*,* V_1 *es un potencial real,* $\|V_1\|_\infty \leq M_1$*, y que existen números positivos* α *y* β *tal que*

$$\|e^{|x|^2/\beta^2}u(0)\|, \|e^{|x|^2/\alpha^2}u(1)\|, \sup_{[0,1]}\|e^{\frac{|x|^2}{(\alpha t+(1-t)\beta)^2}}V_2(t)\|_\infty < +\infty.$$

Entonces $\|e^{\frac{|x|^2}{(\alpha t+(1-t)\beta)^2}}u(t)\|^{\alpha t+(1-t)\beta}$ *es "logarítmicamente convexa" en* $[0,1]$ *y existe* $N = N(\alpha,\beta)$ *tal que*

$$\|e^{\frac{|x|^2}{(\alpha t+(1-t)\beta)^2}}u(t)\| \leq e^{N(M_1+M_2+M_1^2+M_2^2)}\|e^{|x|^2/\beta^2}u(0)\|^{\frac{\beta(1-t)}{\alpha t+\beta(1-t)}}\|e^{|x|^2/\alpha^2}u(1)\|^{\frac{\alpha t}{\alpha t+\beta(1-t)}}$$

cuando $0 \leq t \leq 1$ *y* $M_2 = \sup_{[0,1]}\|e^{\frac{|x|^2}{(\alpha t+\beta(1-t))^2}}V_2(t)\|_\infty e^{2\sup_{[0,1]}\|\Im V_2(t)\|_\infty}$.

Demostración: Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $\alpha < \beta$. En caso de que $\alpha = \beta$, reemplazaríamos β por $\beta + \delta$, con $\delta > 0$ y después tomaríamos el límite cuando δ tiende a cero. Si $\alpha > \beta$, reemplazaríamos nuestra solución u por $u_1 = \bar{u}(1-t)$. Lo primero que vamos a ver es que para nuestra solución u se verifica

$$N_1^{-1}\|u(0)\| \leq \|u(t)\| \leq N_1\|u(0)\|, \quad \text{con } N_1 = e^{\sup_{[0,1]} \|\Im V_2(t)\|_\infty}, \quad \text{cuando } 0 \leq t \leq 1.$$

A partir de la ecuación que verifica u tenemos que

$$\partial_t \|u(t)\|^2 = 2\Re(\partial_t u, u) = -2\Im(\Delta u + Vu, u) = -2\Im \int V_2(t)|u(t)|^2,$$

y, utilizando la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$-2\sup_{[0,1]} \|\Im V_2(t)\|_\infty \|u(t)\|^2 \leq \partial_t \|u(t)\|^2 \leq 2\sup_{[0,1]} \|\Im V_2(t)\|_\infty \|u(t)\|^2.$$

Si ahora dividimos esta cadena de desigualdades por $\|u(t)\|^2$ e integramos en $s \in [0,t]$, concluimos

$$e^{-2\sup_{[0,1]} \|\Im V_2(t)\|_\infty}\|u(0)\|^2 \leq \|u(t)\|^2 \leq e^{2\sup_{[0,1]} \|\Im V_2(t)\|_\infty}.$$

Finalmente, tomando raices cuadradas llegamos precisamente a

$$N_1^{-1}\|u(0)\| \leq \|u(t)\| \leq N_1\|u(0)\|.$$

A continuación, definimos el operador $H = \Delta + V_1(x)$ y denotemos por $e^{t(A+iB)H}u_0$ la solución perteneciente a $C([0,1], L^2(\mathbb{R}^n)$ de

$$\begin{cases} \partial_t v = (A+iB)(\Delta v + V_1(x)v), & \text{en } \mathbb{R}^n \times [0,1], \\ v(0) = u_0, \end{cases}$$

cuando $A \geq 0$. Por el **Principio de Duhamel**

$$u(t) = e^{itH}u(0) + i\int_0^t e^{i(t-s)H}(V_2(s)u(s))\,ds \quad \text{en } \mathbb{R}^n \times [0,1]. \tag{4.20}$$

Para $0 \leq \epsilon \leq 1$, definimos

$$F_\epsilon(t) = \frac{i}{\epsilon + i} e^{\epsilon t H}(V_2(t)u(t)), \tag{4.21}$$

$$u_\epsilon(t) = e^{(\epsilon+i)tH}u(0) + (\epsilon+i)\int_0^t e^{(\epsilon+i)(t-s)H}F_\epsilon(s)\,ds. \tag{4.22}$$

Entonces, $u_\epsilon \in L^\infty([0,1], L^2(\mathbb{R}^n)) \cap L^2([0,1], H^1(\mathbb{R}^n))$ y verifica

$$\begin{cases} \partial_t u_\epsilon = (\epsilon+i)(Hu_\epsilon + F_\epsilon(t)), & \text{en } \mathbb{R}^n \times [0,1], \\ u_\epsilon(0) = u(0). \end{cases}$$

Ya tenemos una función u_ϵ que verifica una ecuación con un término de difusión, luego a esta función le podemos aplicar todos los resultados que hemos visto antes. Para obtener estimaciones en términos de nuestras hipótesis, utilizaremos de manera adecuada el lema 4.0.6. Utilizando las identidades

$$e^{(z_1+z_2)H} = e^{(z_2+z_1)H} = e^{z_1H}e^{z_2H}, \quad \text{cuando } \Re z_1, \Re z_2 \geq 0,$$

junto a (4.20),(4.21) y (4.22) se prueba que

$$u_\epsilon(t) = e^{\epsilon tH}u(t), \quad \text{cuando } 0 \leq t \leq 1. \tag{4.23}$$

En particular, $u_\epsilon(1) = e^{\epsilon H}u(1)$, y aplicando el lema 4.0.6 utilizando los valores $A = \epsilon, B = 0, \gamma = 1/\alpha^2, F \equiv 0$ teniendo en cuenta también que $u_\epsilon(0) = u(0)$ obtenemos

$$\begin{aligned} \|e^{\frac{|x|^2}{\alpha^2+4\epsilon}}u_\epsilon(1)\| = \|e^{\frac{|x|^2}{\alpha^2+4\epsilon}}e^{\epsilon H}u(1)\| &\leq e^{\epsilon\|V_1\|_\infty}\|e^{|x|^2/\alpha^2}u(1)\|, \\ \|e^{|x|^2/\beta^2}u_\epsilon(0)\| &= \|e^{|x|^2/\beta^2}u(0)\|. \end{aligned}$$

De nuevo aplicamos el 4.0.6, en este caso con $A = \epsilon, B = 0, F \equiv 0$ y $\gamma = 1/(\alpha t + \beta(1-t))^2$ y (4.21), obteniendo

$$\begin{aligned} \|e^{\frac{|x|^2}{(\alpha t+\beta(1-t))^2+4\epsilon t}}F_\epsilon(t)\| &= \|e^{\frac{|x|^2}{(\alpha t+\beta(1-t))^2+4\epsilon t}}\frac{i}{\epsilon+i}e^{\epsilon tH}(V_2(t)u(t))\| \\ &\leq e^{\epsilon\|V_1\|_\infty}\|e^{\frac{|x|^2}{(\alpha t+\beta(1-t))^2+4\epsilon t}}V_2(t)u(t)\| \\ &\leq e^{\epsilon\|V_1\|_\infty}\|e^{\frac{|x|^2}{(\alpha t+\beta(1-t))^2}}V_2(t)\|_\infty\|u(t)\| \end{aligned}$$

cuando $0 \leq t \leq 1$. Si definimos $\alpha_\epsilon = \alpha + 2\epsilon$ y $\beta_\epsilon = \beta + 2\epsilon$, de las tres últimas desigualdades concluimos que

$$\|e^{|x|^2/\alpha_\epsilon^2} u_\epsilon(1)\| \leq e^{\epsilon \|V_1\|_\infty} \|e^{|x|^2/\alpha^2} u(1)\|, \quad \|e^{|x|^2/\beta_\epsilon^2} u_\epsilon(0)\| \leq \|e^{|x|^2/\beta^2} u(0)\|, \tag{4.24}$$

$$\|e^{\frac{|x|^2}{(\alpha_\epsilon t + \beta_\epsilon(1-t))^2}} F_\epsilon(t)\| \leq e^{\epsilon\|V_1\|_\infty} \|e^{\frac{|x|^2}{(\alpha t + \beta(1-t))^2}} V_2(t)\|_\infty \|u(t)\|. \tag{4.25}$$

Una nueva aplicación del 4.0.6 con $A = \epsilon, B = 0, F \equiv 0, \gamma = 0$ junto a (4.21) y (4.23) muestra que

$$\|F_\epsilon(t)\| \leq e^{\epsilon\|V_1\|_\infty} \|V_2(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \|u(t)\|, \quad \|u_\epsilon(t)\| \leq e^{\epsilon\|V_1\|_\infty} \|u(t)\| \tag{4.26}$$

cuando $0 \leq t \leq 1$. Definimos $\gamma_\epsilon = 1/\alpha_\epsilon\beta_\epsilon$ y $\tilde{u}_\epsilon$ como la función resultante de aplicar la transformada de Appell u_ϵ cuando $A = \epsilon, B = 1$ y α, β son sustituidos por α_ϵ y β_ϵ, esto es

$$\tilde{u}_\epsilon(x,t) = \left(\frac{\sqrt{\alpha_\epsilon\beta_\epsilon}}{\alpha_\epsilon(1-t) + \beta_\epsilon t}\right)^{n/2} u_\epsilon\left(\frac{\sqrt{\alpha_\epsilon\beta_\epsilon}x}{\alpha_\epsilon(1-t)+\beta_\epsilon t}, \frac{\beta_\epsilon t}{\alpha_\epsilon(1-t)+\beta_\epsilon t}\right) e^{\frac{(\alpha_\epsilon - \beta_\epsilon)|x|^2}{4(\epsilon+i)(\alpha_\epsilon(1-t)+\beta_\epsilon t)}}$$

Como $\alpha < \beta$, $\tilde{u}_\epsilon \in L^\infty([0,1], L^2(\mathbb{R}^n)) \cap L^2([0,1], H^1(\mathbb{R}^n))$ verificando

$$\partial_t \tilde{u}_\epsilon = (\epsilon + i)(\Delta\tilde{u}_\epsilon + \tilde{V}_1^\epsilon(x,t)\tilde{u}_\epsilon + \tilde{F}_\epsilon(x,t)), \quad \text{en } \mathbb{R}^n \times [0,1],$$

donde $\tilde{V}_1^\epsilon$ es un potencial real,

$$\tilde{V}_1^\epsilon(x,t) = \frac{\alpha_\epsilon\beta_\epsilon}{(\alpha_\epsilon(1-t)+\beta_\epsilon t)^2} V_1\left(\frac{\sqrt{\alpha_\epsilon\beta_\epsilon}x}{\alpha_\epsilon(1-t)+\beta_\epsilon t}\right), \quad \sup_{[0,1]} \|\tilde{V}_1^\epsilon(t)\|_\infty \leq \frac{\beta}{\alpha} M_1, \tag{4.27}$$

$$\tilde{F}_\epsilon(x,t) = \left(\frac{\sqrt{\alpha_\epsilon\beta_\epsilon}}{\alpha_\epsilon(1-t)+\beta_\epsilon t}\right)^{\frac{n}{2}+2} F_\epsilon\left(\frac{\sqrt{\alpha_\epsilon\beta_\epsilon}x}{\alpha_\epsilon(1-t)+\beta_\epsilon t}, \frac{\beta_\epsilon t}{\alpha_\epsilon(1-t)+\beta_\epsilon t}\right) e^{\frac{(\alpha_\epsilon-\beta_\epsilon)|x|^2}{4(\epsilon+i)(\alpha_\epsilon(1-t)+\beta_\epsilon t)}},$$

$$\|e^{\gamma_\epsilon|x|^2}\tilde{F}_\epsilon(t)\| \leq \frac{\beta}{\alpha}\|e^{\frac{|x|^2}{(\alpha_\epsilon s+\beta_\epsilon(1-s))^2}} F_\epsilon(s)\|, \quad \|\tilde{F}_\epsilon(t)\| \leq \frac{\beta}{\alpha}\|F_\epsilon(s)\|, \tag{4.28}$$

y

$$\begin{aligned} \|e^{\gamma_\epsilon|x|^2}\tilde{u}_\epsilon(t)\| &= \|e^{\left[\frac{1}{(\alpha_\epsilon s+\beta_\epsilon(1-s))^2} + \frac{(\alpha_\epsilon-\beta_\epsilon)\epsilon}{4(\epsilon^2+1)(\alpha_\epsilon s+\beta_\epsilon(1-s))}\right]|y|^2} u_\epsilon(s)\|, \\ \|\tilde{u}_\epsilon(t)\| &\leq \|u_\epsilon(s)\|, \end{aligned} \tag{4.29}$$

cuando $s = \frac{\beta_\epsilon t}{\alpha_\epsilon(1-t)+\beta_\epsilon t}$. Esta última identidad y (4.24) implican que

$$\|e^{\gamma_\epsilon |x|^2}\tilde{u}_\epsilon(0)\| \leq \|e^{|x|^2/\beta^2}u(0)\|, \quad \|e^{\gamma_\epsilon |x|^2}\tilde{u}_\epsilon(1)\| \leq e^{\epsilon\|V_1\|_\infty}\|e^{|x|^2/\alpha^2}u(1)\|. \tag{4.30}$$

Por otro lado, ya hemos visto que

$$N_1^{-1}\|u(0)\| \leq \|u(t)\| \leq N_1\|u(0)\| \text{ cuando } 0 \leq t \leq 1, \; N_1 = e^{\sup_{[0,1]}\|\Im V_2(t)\|_\infty}, \tag{4.31}$$

y, si repetimos el proceso para llegar a (4.3), ahora con $\tilde{u}_\epsilon(t)$, vemos que se verifica

$$\partial_t\|\tilde{u}_\epsilon(t)\|^2 \leq 2\epsilon\|\tilde{V}_1^\epsilon(t)\|_\infty\|\tilde{u}_\epsilon(t)\|^2 + 2\sqrt{1+\epsilon^2}\|\tilde{F}_\epsilon(t)\|\|\tilde{u}_\epsilon(t)\|.$$

Sea $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_m = 1$ una partición del intervalo $[0,1]$ uniformemente distribuida, donde elegiremos m más adelante. Si aplicamos a esta última desigualdad todas las estimaciones que hemos visto observamos que

$$\begin{aligned}
\partial_t\|\tilde{u}_\epsilon(t)\|^2 &\leq 2\epsilon\frac{\beta}{\alpha}M_1\|\tilde{u}_\epsilon(t)\|^2 + 2\sqrt{1+\epsilon^2}\|\tilde{F}_\epsilon(t)\|\|\tilde{u}_\epsilon(t)\| \\
&\leq 2\epsilon\frac{\beta}{\alpha}M_1 e^{2\epsilon\|V_1\|_\infty}\|u(s)\|^2 + 2\frac{\beta}{\alpha}\sqrt{1+\epsilon^2}e^{2\epsilon\|V_1\|_\infty}\sup_{[0,1]}\|V_2(t)\|_\infty\|u(s)\|^2 \\
&\leq 2\epsilon\frac{\beta}{\alpha}M_1 e^{2\epsilon\|V_1\|_\infty}N_1^2\|u(0)\|^2 + 2\frac{\beta}{\alpha}\sqrt{1+\epsilon^2}e^{2\epsilon\|V_1\|_\infty}\sup_{[0,1]}\|V_2(t)\|_\infty\|u(0)\|^2 N_1^2 \\
&= N_2^2\|u(0)\|^2,
\end{aligned}$$

donde N_2 depende de $\alpha, \beta, \|V_1\|_\infty$ y $\sup_{[0,1]}\|V_2(t)\|_\infty$. Si ahora, para $t_{i-1} \leq t \leq t_i$ integramos esta desigualdad en $s \in [t, t_i]$,

$$\|\tilde{u}_\epsilon(t_i)\|^2 \leq \|\tilde{u}_\epsilon(t)\|^2 + N_2^2(t_i - t)\|u(0)\|^2 \leq \|\tilde{u}_\epsilon(t)\|^2 + N_2^2\|u(0)\|^2(t_i - t_{i-1}),$$

y,tomando raíces cuadradas concluimos

$$\|\tilde{u}_\epsilon(t_i)\| \leq \|\tilde{u}_\epsilon(t)\| + N_2\sqrt{t_i - t_{i-1}}\|u(0)\|,$$

cuando $t_{i-1} \leq t \leq t_i, 0 < \epsilon \leq 1$ y $i = 1, \ldots, m$. Elegimos entonces m tal que

$$N_2 \max_{1\leq i\leq m}\sqrt{t_i - t_{i-1}} \leq \frac{1}{4N_1}$$

Usando ahora que $\lim_{\epsilon\to 0^+}\|\tilde{u}_\epsilon(t)\| = \|u(s)\|$ y (4.31), para un ϵ_0 suficientemente pequeÒo se cumple

$$\|\tilde{u}_\epsilon(t_i)\| \geq \frac{\|u(s_i)\|}{2} \geq \frac{1}{2N_1}\|u(0)\|, \quad \text{cuando } 0<\epsilon\leq\epsilon_0,\ i=1,\dots,m,$$

utilizando las tres ultimas desigualdades, tenemos que

$$\|\tilde{u}_\epsilon(t)\| \geq \frac{1}{4N_1}\|u(0)\|, \quad \text{cuando } 0<\epsilon\leq\epsilon_0,\ 0\leq t\leq 1. \tag{4.32}$$

Nuestro objetivo es aplicar el lema 4.0.8 a la función $\tilde{u}_\epsilon$, por lo tanto, solo nos falta acotar el decaimiento de $\tilde{F}_\epsilon(t)$ en términos de $\tilde{u}_\epsilon(t)$, cosa que ya podemos hacer gracias a esta última desigualdad.

$$\begin{aligned}
\|e^{\gamma_\epsilon|x|^2}\tilde{F}_\epsilon(t)\| &\leq \frac{\beta}{\alpha}\|e^{\frac{|x|^2}{(\alpha_\epsilon s+(1-s)\beta_\epsilon)^2}}F_\epsilon(s)\| \leq \frac{\beta}{\alpha}e^{\epsilon\|V_1\|_\infty}\|e^{\frac{|x|^2}{(\alpha s+(1-s)\beta)^2}}V_2(s)\|_\infty\|u(s)\|\frac{\|\tilde{u}_\epsilon(t)\|}{\|\tilde{u}_\epsilon(t)\|} \\
&\leq \frac{\beta}{\alpha}e^{\epsilon\|V_1\|_\infty}\sup_{[0,1]}\|e^{\frac{|x|^2}{(\alpha s+(1-s)\beta)^2}}V_2(s)\|_\infty N_1\|u(0)\|\frac{4N_1}{\|u(0)\|}\|\tilde{u}_\epsilon(t)\| \\
&= 4\frac{\beta}{\alpha}M_2(\epsilon)\|\tilde{u}_\epsilon(t)\|.
\end{aligned}$$

De aqui deducimos que

$$\sup_{[0,1]}\frac{\|e^{\gamma_\epsilon|x|^2}\tilde{F}_\epsilon(t)\|}{\|\tilde{u}_\epsilon(t)\|} \leq \frac{4\beta}{\alpha}M_2(\epsilon), \quad \text{cuando } 0<\epsilon<\epsilon_0,$$

donde

$$M_2(\epsilon) = e^{2\sup_{[0,1]}\|\Im V_2(t)\|_\infty+\epsilon\|V_1\|_\infty}\sup_{[0,1]}\|e^{\frac{|x|^2}{(\alpha t+\beta(1-t))^2}}V_2(t)\|_\infty.$$

Podemos aplicar el lema 4.0.8 junto con las acotaciones (4.30) para concluir que $\|e^{\gamma_\epsilon|x|^2}\tilde{u}_\epsilon(t)\|$ es "logarítmicamente convexa" en $[0,1]$ y

$$\|e^{\gamma_\epsilon|x|^2}\tilde{u}_\epsilon(t)\| \leq e^{N(M_1+M_2(\epsilon)+M_1^2+M_2(\epsilon)^2)}\|e^{|x|^2/\beta^2}u(0)\|^{1-t}\|e^{|x|^2/\alpha^2}u(1)\|^t$$

cuando $0<\epsilon\leq\epsilon_0$. Teniendo en cuenta (4.29) y tomando el límite en estas desigualdad cuando ϵ tiende a cero,

$$\|e^{\frac{|x|^2}{(\alpha s+(1-s)\beta)^2}}u(s)\| \leq e^{N(M_1+M_2+M_1^2+M_2^2)}\|e^{|x|^2/\beta^2}u(0)\|^{1-t}\|e^{|x|^2}\alpha^2u(1)\|^t, \quad 0\leq t\leq 1.$$

Ahora bien, recordamos que $s = \frac{\beta t}{\alpha(1-t)+\beta t} \Rightarrow t = \frac{\alpha s}{\alpha s+(1-s)\beta}$, luego si reescribimos esta desigualdad en términos de s

$$\|e^{\frac{|x|^2}{(\alpha s+(1-s)\beta)^2}} u(s)\| \leq e^{N(M_1+M_2+M_1^2+M_2^2)} \|e^{|x|^2/\beta^2} u(0)\|^{\frac{(1-s)\beta}{\alpha s+(1-s)\beta}} \|e^{|x|^2} \alpha^2 u(1)\|^{\frac{\alpha s}{\alpha s+(1-s)\beta}},$$

cuando $0 \leq s \leq 1$, justo la desigualdad del Teorema. ■

Observación 10 *Es necesario tomar una partición del intervalo* $[0,1]$ *dado que la convergencia de* $\|\tilde{u}_\epsilon(t)\|$ *a* $\|u(s)$ *no es uniforme, luego no tenemos un* ϵ *genérico para cualquier* t. *En cambio, una vez hemos hecho la partición del intervalo, el número de nodos de la partición es finito y por tanto, si que vamos a tener un* ϵ_0 *para el cuál podamos acotar* $\|\tilde{u}_\epsilon(t_i)\|$ *para todo* $i = 1, \dots, m$. *Para terminar con esta parte del curso, veremos una estimación para el decaimiento del gradiente de la solución de la ecuación de Schr ˆdigner. Como antes, primero necesitamos un resultado previo para el caso en el que trabajamos con una ecuación con un término de difusión, para luego, mediante un proceso análogo al que acabamos de realizar, concluir la estimación para la solución de la ecuación de Schr ˆdinger.*

Lema 4.0.9 *Supongamos que estamos en las condiciones del lema 4.0.8, que* $\gamma > 0$ *y* $\sup_{[0,1]} \|V(t)\|_\infty \leq M_1$. *Entonces*

$$\begin{aligned} &\|\sqrt{t(1-t)} e^{\gamma|x|^2} \nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^n \times [0,1])} + \|\sqrt{t(1-t)} |x| e^{\gamma|x|^2} u\|_{L^2(\mathbb{R}^n \times [0,1])} \\ &\qquad \leq N[(1+M_1) \sup_{[0,1]} \|e^{\gamma|x|^2} u(t)\| + \sup_{[0,1]} \|e^{\gamma|x|^2} F\|], \end{aligned} \tag{4.33}$$

donde N *esta acotado cuando* γ *y* $A^2 + B^2$ *están acotados inferiormente.*

Demostración: Sea $f = e^{\gamma|x|^2} u$, primero vamos a probar que

$$\int_{\mathbb{R}^n} (|\nabla f|^2 + 4\gamma^2 |x|^2 |f|^2)\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\gamma|x|^2} (|\nabla u|^2 - 2n\gamma |u|^2)\, dx. \tag{4.34}$$

Si desarrollamos el término de la izquierda,

$$|\nabla f|^2 + 4\gamma^2 |x|^2 |f|^2 = e^{2\gamma|x|^2} \big(4\gamma^2 |x|^2 |u|^2 + |\nabla u|^2 + 4\gamma \Re(xu \cdot \overline{\nabla u}) + 4\gamma^2 |x|^2 |u|^2\big).$$

Para el término con la parte real, integraremos por partes, de modo que

$$4\gamma\Re\int e^{2\gamma|x|^2}xu\cdot\overline{\nabla u}=-16\gamma^2\int|x|^2|u|^2e^{2\gamma|x|^2}-4n\gamma\int e^{2\gamma|x|^2}|u|^2-4\gamma\Re\int e^{2\gamma|x|^2}x\overline{u}\cdot\nabla u,$$

y si agrupamos la primera y última integral, que son iguales, tenemos que

$$4\gamma\Re\int e^{2\gamma|x|^2}xu\cdot\overline{\nabla u}=-8\gamma^2\int|x|^2|u|^2e^{2\gamma|x|^2}-2n\gamma\int e^{2\gamma|x|^2}|u|^2.$$

Para probar la igualdad que queremos, ya solo nos falta integrar la expresión que tenemos para el gradiente de f y para $|x|^2|f|^2$ y en el término de la parte real sustituir por las integrales que acabamos de calcular. Por otro lado, teniendo en cuenta la **Desigualdad de Heisenberg-Pauli-Weyl**

$$n\int_{\mathbb{R}^n}|f|^2\leq 2\left(\int_{\mathbb{R}^n}|x|^2|f|^2\right)^{1/2}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla f|^2\right)^{1/2},$$

y que $2ab\leq a^2+b^2$, observamos que

$$2\gamma n\int_{\mathbb{R}^n}|f|^2\,dx\leq 2\left(\int_{\mathbb{R}^n}4\gamma^2|x|^2|f|^2\right)^{1/2}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla f|^2\right)^{1/2}\leq\int_{\mathbb{R}^n}(|\nabla f|^2+4\gamma^2|x|^2|f|^2)\,dx. \tag{4.35}$$

Sumando (4.34) y (4.35), obtenemos la desigualdad

$$2\int_{\mathbb{R}^n}(|\nabla f|^2+4\gamma^2|x|^2|f|^2)\,dx\geq\int_{\mathbb{R}^n}e^{2\gamma|x|^2}|\nabla u|^2\,dx. \tag{4.36}$$

Ahora, multiplicamos (4.7) por $t(1-t)$ e integramos por partes para obtener

$$\begin{aligned}2\int_0^1 t(1-t)(\mathcal{S}_tf+[\mathcal{S},\mathcal{A}]f,f)\,dt+2\int_0^1 H(t)\,dt&\\ \leq H(1)+H(0)+2\int_0^1(1-2t)\Re(\partial_tf-\mathcal{S}f-\mathcal{A}f,f)\,dt&\\ +\int_0^1 t(1-t)\|\partial_tf-\mathcal{A}f-\mathcal{S}f\|^2\,dt,&\end{aligned} \tag{4.37}$$

donde $H(t)=\|f(t)\|^2$. Recordamos que el conmutador era

$$(\mathcal{S}_tf+[\mathcal{S},\mathcal{A}]f,f)=\gamma(A^2+B^2)\int_{\mathbb{R}^n}(8|\nabla f|^2+32\gamma^2|x|^2|f|^2)\,dx.$$

Por otro lado,

$$H(1)+H(0)=\|e^{\gamma|x|^2}u(1)\|^2+\|e^{\gamma|x|^2}u(0)\|^2\leq 2\sup_{[0,1]}\|e^{\gamma|x|^2}u(t)\|^2,$$

$$|(\partial_t f-\mathcal{S}f-\mathcal{A}f,f)|\leq\sqrt{A^2+B^2}(M_1\sup_{[0,1]}\|e^{\gamma|x|^2}u(t)\|^2+\sup_{[0,1]}\|e^{\gamma|x|^2}u(t)\|\sup_{[0,1]}\|e^{\gamma|x|^2}F(t)\|),$$

$$\|\partial_t f-\mathcal{A}f-\mathcal{S}f\|^2\leq(A^2+B^2)(M_1^2\sup_{[0,1]}\|e^{\gamma|x|^2}u(t)\|^2+\sup_{[0,1]}\|e^{\gamma|x|^2}F(t)\|^2).$$

Si utilizamos estas tres desigualdades, y luego juntamos los sumandos adecuadamente completando cuadrados, llegamos a

$$\begin{aligned}&2\gamma(A^2+B^2)\int_0^1\int_{\mathbb{R}^n}t(1-t)(8|\nabla f|^2+32\gamma^2|x|^2|f|^2)\,dx\,dt\\&\leq N\left((1+M_1)\sup_{[0,1]}\|e^{\gamma|x|^2}u(t)\|+\sup_{[0,1]}\|e^{\gamma|x|^2}F(t)\|\right)^2\end{aligned}$$

Para obtener la primera parte de la desigualdad (4.33), utilizamos (4.36) y tomamos raíces cuadradas en esta última desigualdad. Para obtener la segunda parte, simplemente desechamos de esta desigualdad el término en $|\nabla f|^2$ y tomamos raíces cuadradas. De nuevo habría que justificar estos cálculos, para esto, como todos los cálculos son finitos para $f(t)=e^{\gamma|x|^2}u(t)$ salvo $|x|^2|f|^2$, tomamos $f_\rho=e^{(\gamma-\rho)|x|^2}u(t)$ de forma que podamos esconder este término escribiendo $|x|^2$ como $e^{\epsilon|x|^2}$. Tendríamos entonces una desigualdad para f_ρ, con la que después de un paso al límite en el que hacemos ρ tender a cero probamos la desigualdad del Lema. ■ Como habíamos explicado antes, usando este Lema probamos un resultado análogo para una solución de la ecuación de Schrˆdinger. Si definimos u_ϵ y F_ϵ de la misma forma que en el teorema 4.0.2, este Lema nos dice que

$$\|\sqrt{t(1-t)}e^{\gamma_\epsilon|x|^2}\nabla u_\epsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^n\times[0,1])}\leq N[(1+M_1)\sup_{[0,1]}\|e^{\gamma_\epsilon|x|^2}u_\epsilon(t)\|+\sup_{[0,1]}\|e^{\gamma_\epsilon|x|^2}F_\epsilon(t)\|],$$

Utilizando las estimaciones que habíamos visto en el teorema 4.0.2 y hacemos ϵ tender a cero vamos a obtener una estimación del decaimiento del gradiente de la solución en función del decaimiento de nuestra solución en los extremos del intervalo. Como $a^{1-t}b^t\leq a+b$ esta estimación será

$$\|\sqrt{t(1-t)}e^{\gamma|x|^2}\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^n\times[0,1])} \leq Ne^{N(M_1+M_2+M_1^2+M_2^2)}[\|e^{\gamma|x|^2}u(0)\| + \|e^{\gamma|x|^2}u(1)\|].$$

Capítulo 5

Apéndice

En este apéndice se desarrolla diversos temas, entre los cuales se encuentran Teoría de Espacios de Hilbert, Espacios L^p, Teoría de Operadores, Ecuaciones Diferenciales, véase, por ejemplo ([3]), ([4]), ([8]), ([11]), ([10]), ([13]) y ([14]), entre otros.

5.1. Parte Luis Urrutia

Antes de demostrar el teorema espectral en su versión para no acotados, vamos a demostrar y a entender la construcción de una de las versiones de la versión para acotados. Consideremos A un operador simétrico, con cotas superior e inferior M y m, respectivamente (esto es, $m < f, f > \leq < Af, f > \leq M < f, f >, \forall f$). Si p es un polinomio con coeficientes complejos, podemos construir $p(A)$ de la forma natural, siendo también simétrica. La correspondencia $p \to p(A)$ es del tipo positivo ($p(\lambda) \geq 0, \lambda \in [m, M] \Rightarrow p(A) \geq 0$ como forma cuadrática), y consecuentemente dicha correspondencia es monótona ($p(\lambda) \geq q(\lambda), \lambda \in [m, M] \Rightarrow p(A) \geq q(A)$ como forma cuadrática).
Consideremos el espacio $C := \{f : [m, M] \longrightarrow \mathbb{R}_0^+ \text{ ,superiormente semicontinua}\}$. Es conocido que si tenemos $u \in C$, existe una sucesión decreciente de polinomios $\{p_n\}$ que converge uniformemente a u. Definimos la sucesión de operadores $\{p_n(A)\}$, que es decreciente e inferi-

ormente acotada por 0 (vista como forma cuadrática). Usando un resultado para operadores acotados ([13]), dicha sucesión converge en norma. Definimos pues $u(A) := \lim p_n(A)$.

- $u(A)$ está bien definido (no depende de la sucesión tomada).

  Tomemos dos sucesiones decrecientes de polinomios que convergen a u, p_n y q_n. Entonces, $\forall r, \exists s / p_s(\lambda) \leq q_r(\lambda) + \frac{1}{r}, q_s(\lambda) \leq p_r(\lambda) + \frac{1}{r}$ en $[m, M]$. Tomando límites primero en r y después en s, obtenemos lo buscado.

- $u(A)$ es un operador simétrico.

- Si $u_1 \leq u_2$ en $[m, M] \Rightarrow u_1(A) \leq u_2(A)$ como forma cuadrática.

- Si V permuta con A, entonces V permuta con $u(A)$

En particular, dentro de C estaán las proyecciones siguientes: fijado $\mu \in \mathbb{R}$, definimos

$$e_\mu(\lambda) := \begin{matrix} 1 & si\ \lambda \leq \mu \\ 0 & si\ \lambda > \mu \end{matrix}$$

Para cada μ, definimos $E_\mu := e_\mu(A)$, definido por el procedimiento antes dado. La familia de operadores $\{E_\mu\}_{\mu \in \mathbb{R}}$ verifica las siguientes propiedades:

1. $e_\mu e_\nu = e_\mu$ si $\mu \leq \nu \Longrightarrow E_\mu E_\nu = E_\nu E_\nu = E_\mu$, que se escribe como $\mu \leq \nu \Rightarrow E_\mu \leq E_\nu$

2. $$\begin{matrix} e_\mu \equiv 0 & si\ \mu < m \\ e_\mu \equiv 1 & si\ \mu \geq M \end{matrix} \Longrightarrow \begin{matrix} E_\mu = 0 & si\ \mu < m \\ E_\mu = Id & si\ \mu \geq M \end{matrix}$$

3. $\mu \longmapsto E_\mu$ es continua a la derecha.

   Fijo μ. Puedo tomar, que existe, una sucesión decreciente de polinomios $\{p_n\}$ convergente a e_μ verificando que $p_n \geq e_{\mu+\frac{1}{n}}$. Entonces,

   $p_n(A) \geq E_{\mu+\frac{1}{n}} \geq E_\mu$. Tomando límites en n, y como podemos hacer la misma cuenta para cualquier sucesión de números positivos decreciente a 0, tenemos que $E_{\mu+\varepsilon} \longrightarrow E_\mu$ si $\varepsilon \searrow 0$

Estas tres propiedades son las que definen a una familia espectral.

Tomemos ahora $\mu < \lambda < \nu \Rightarrow \mu[e_\nu(\lambda) - e_\mu(\lambda)] \leq \lambda[e_\nu(\lambda) - e_\mu(\lambda)] \leq \nu[e_\nu(\lambda) - e_\mu(\lambda)] \Rightarrow \mu(E_\nu - E_\mu) \leq A(E_\nu - E_\mu) \leq \nu(E_\nu - E_\mu)$. Si tomamos ahora una partición de $[m, M]$, $\mu_0 < m < \mu_1 < ... < \mu_{n-1} < M \leq \mu_n$ y elegimos $\mu = \mu_{k-1}$, $\nu = \mu_k$, y sumamos en k todas las desigualdades que tenemos obtenemos

$$\sum_{k=1}^{n} \mu_{k-1}(E_{\mu_k} - E_{\mu_{k-1}}) \leq \sum_{k=1}^{n} A(E_{\mu_k} - E_{\mu_{k-1}}) \leq \sum_{k=1}^{n} \mu_k(E_{\mu_k} - E_{\mu_{k-1}})$$

El término del medio es igual a $A(E_{\mu_n} - E_{\mu_0}) = A$. Si además la norma de la partición (el máximo de la distancia entre dos elementos consecutivos de la misma) es menor que un $\varepsilon > 0$ dado, la diferencia entre los términos extremos de la desigualdad está acotada por εId. Entonces, si para cada k elegimos $\lambda_k \in [\mu_{k-1}, \mu_k]$, se tiene que

$$\|A - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k(E_{\mu_k} - E_{\mu_{k-1}})\| < \varepsilon,$$

esto es, que si incrementamos el número de elementos de la partición (n) de forma que la norma de la misma tienda a 0, las sumas $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k(E_{\mu_k} - E_{\mu_{k-1}})$ convergerán en norma al operador A. Como este límite es el mismo que da origen a la definición de la integral de Riemman-Stieltjes, escribimos por analogía

$$A = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda dE_\lambda = \int_{m-0}^{M} \lambda dE_\lambda$$

, donde la segunda identidad es cierta al ser E_λ constante por debajo de m y por encima de M. Dicha identidad se interpreta como que para un elemento $f \in D(A)$,

$$Af = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda dE_\lambda f$$

Por las propiedades de la familia espectral, y repitiendo las cuentas ya hechas, es fácil comprobar que

$$\forall r \in \mathbb{N}, A^r = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^r dE_\lambda$$

y por linealidad que

$$\forall p \in \mathbb{C}[X], p(A) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(\lambda) dE_\lambda$$

Finalmente, un argumento de densidad nos permite concluir que

$$\forall u \text{ continua}, u(A) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(\lambda) dE_\lambda$$

Hasta la primera de las identidades integrales dadas es la demostración del Teorema Espectral para operadores simétricos acotados.

5.1.1. El Teorema Espectral para operadores autoadjuntos no acotados

Para la demostración que daremos del teorema, la dada por Von Neumann, necesitamos dos resultados previos. Uno de ellos es el teorema espectral para operadores unitarios(isometrías sobreyectivas globalmente definidas), que no demostraremos.

Teorema 5.1.1 *(Teorema Espectral para operadores unitarios) Sea V un operador unitario en un espacio de Hilbert complejo. Entonces,*

$$V = \int_0^{2\pi} e^{\imath\varphi} dF_\varphi$$

con $F_0 = 0$, $F_{2\pi} = I$.

Demostración: Ver ([13]). ■

El segundo es un lema de caracter técnico, que en cierto modo es un recíproco del Teorema Espectral.

Lema 5.1.1 *Sea $\mathcal{L}_n$ una familia numerable de subespacios de un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ tal que $\mathcal{H}$ descompone como suma ortogonal de todos ellos. Para cada n, consideremos un operador*

$$A_n : \mathcal{L}_n \longrightarrow \mathcal{L}_n$$

que sea acotado y autoadjunto. Entonces, existe un único operador autoadjunto (no necesariamente acotado)

$$A : D(A) \subset \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H} / A|_{\mathcal{L}_n} = A_n$$

Además, dicho operador viene dado por:

$$D(A) := \{f \in \mathcal{H} / \sum_{n=1}^{\infty} \|A_n f_n\|^2 < \infty\}; f \in D(A), Af := \sum_{n=1}^{\infty} A_n f_n$$

donde por f_n se denota a la proyección del elemento f al subespacio $\mathcal{L}_n$.

Demostración: De forma natural, la extensión y su dominio de definición, de existir, deben de ser los dados en el enunciado. Llamamos A y D(A) a éstos.

- A es lineal.

  Trivial a partir de la definición.

- $D(A)$ es denso en $\mathcal{H}$.

  Por construcción, $D(A)$ contiene a todos los elementos de la forma $\sum_{k=1}^{n} f_k$, con $f_k \in \mathcal{L}_k$. Como $\mathcal{H}$ descompone como suma ortogonal de los $\mathcal{L}_n$, se concluye que $D(A)$ es denso.

- A simétrico.

  Sean $f, g \in D(A)$. Entonces,

$$\begin{aligned} < Af, g > &= \sum_n < A_n f_n, g >= \sum_n < A_n f_n, g_n >= \\ &= \sum < f_n, A_n g_n >= \sum < f, A_n g_n >= \\ &= < f, Ag > \end{aligned}$$

- Sea $g \in D(A^*)$ ($< Af, g >=< f, Ag >, \forall f \in D(A)$). Es claro que para cada n se tiene la identidad $(A_n)^* = (A^*)_n$, donde la segunda es la restricción de A^* a $\mathcal{L}_n$. Entonces,

$$\sum \|A_n g_n\|^2 = \sum < A_n g_n, A_n g_n >= \sum < (A^* g)_n, (A^* g)_n >= \|A^* g\|^2 < \infty$$

  De donde concluimos que $g \in D(A)$, y por tanto que A es autoadjunto.

- Unicidad de la extensión.

  Sea A' otro operador autoadjunto tal que $A'|_{\mathcal{L}_n} = A_n, \forall n$. Como es autoadjunto, es cerrado, y por tanto A' está definido para para todo elemento $f/\sum A'f$ converge, y para tales elementos, $A'f = \sum A'f_n = \sum A_n f_n$. De aquí es obvio que A' es una extensión simétrica de A, y como A es autoadjunto (en particular, no admite extensiones simétricas propias), concluimos que $A = A'$.

■

Con ambos, podemos demostrar ya el Teorema Espectral. Sea A un operador autoadjunto en un espacio de Hilbert complejo H. Sabemos ya, por el criterio básico, que $Ker(A \pm \imath) = 0$, $Ran(A \pm \imath) = H$. Pero además de las cuentas hechas para demostrarlo obtenemos, primero, que $(A \pm \imath)^{-1}$ son continuas y están globalmente definidas, y la identidad $\|(A+\imath)f\| = \|(A-\imath)f\|$. De la segunda se tiene que el operador $V := (A-\imath)(A+\imath)^{-1}$, la transformada de Cayley de A, es una isometría. Además, de la definición se tiene que para los elementos de la forma

$$g = (A+\imath)f\,;\; Vg = (A-\imath)f$$

. Como $A+\imath, A-\imath$ son ambas sobreyectivas, se tiene que tanto g como Vg varían en todo H, de donde es inmediato que V está definida globalmente y es sobreyectiva, esto es, V es unitaria, y es susceptible de aplicarle el Teorema Espectral correspondiente. Pero además podemos recuperar A a partir de V. Volvemos a las dos igualdades anteriores, y las sumamos y restamos, quedando:

$$(I+V)g = 2Af\,;\; (I-V)g = 2\imath f$$

De la segunda ecuación, tenemos que $I-V$ es inyectiva (y, en algún sitio, existe su inversa), que junto con la primera ecuación nos da, por sustitución directa,

$$A = \imath(I+V)(I-V)^{-1}$$

Como V es un operador unitario, le aplicamos su Teorema Espectral correspondiente,

$$V = \int_0^{2\pi} e^{\imath\varphi} dF_\varphi$$

, con $F_0 = 0$, $F_{2\pi} = I$.

- F_φ es continua en $\varphi = 0$, por las propiedades de familia espectral.
- F_φ es continua en $\varphi = 2\pi$, porque si no lo fuera $1 = e^{2\pi\imath}$ sería valor característico de V, y en particular no exixtiría $(I - V)^{-1}$, que sabemos existe.

Consideremos $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ la partición de $]0, 2\pi[$ dada por $-\cot\frac{\varphi_n}{2} = n$. Como $\{F_\varphi\}$ es una familia espectral, los operadores $P_n := F_{\varphi_n} - F_{\varphi_{n-1}}$ son proyecciones ortogonales dos a dos, y $\sum P_n = F_{2\pi} - F_0 = I - 0 = I$. Si llamamos $\mathcal{L}_n := P_n H$, entonces H descompone como la suma ortogonal de los subespacios $\mathcal{L}_n$. Además, como las proyecciones P_n conmutan con V, éstas permutan con A (puesto que A es una "función"de V) $\Rightarrow P_n A = AP_n \Rightarrow A|_{\mathcal{L}_n} : \mathcal{L}_n \longrightarrow \mathcal{L}_n$ (esto es, los subespacios $\mathcal{L}_n$ son A-invariantes). Fijamos ahora m. La función $\varphi \longmapsto (1 - e^{\imath\varphi})^{-1}$ está acotada para $\varphi \in [\varphi_{m-1}, \varphi_m]$. Si cogemos $f \in \mathcal{L}_n$,

$$\begin{aligned} Af &= AP_m f = \imath(I+V)(I-V)^{-1}P_m f = \int_{\varphi_{m-1}}^{\varphi_m} \imath(1+e^{\imath\varphi})(1-e^{\imath\varphi})^{-1} dF_\varphi = \\ &= \int_{\varphi_{m-1}}^{\varphi_m} -\cot\frac{\varphi}{2} dF_\varphi = \{\lambda = -\cot\frac{\varphi}{2}\} = \int_{m-1}^{m} \lambda dE_\lambda \end{aligned}$$

Obviamente, $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ es una familia espectral para A (tomando $E_\lambda := F_a$). Tenemos ahora la siguiente familia de operadores:

$$\forall m, \mathcal{J}_m : \mathcal{L}_m \longrightarrow \mathcal{L}_m / \mathcal{J}_m f := \int_{m-1}^{m} \lambda dE_\lambda$$

todos acotados y autoadjuntos, que además verifican la condición de que H descompone como suma ortogonal de todos los $\mathcal{L}_m$. Por el lema, existe una única extensión autoadjunta que descompone en los operadores dados, $\mathcal{J}$. Definimos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lambda dE_\lambda := \mathcal{J}$$

Finalmente, como $\mathcal{L}_m = H_m$ y $\mathcal{J}_m = A|_{\mathcal{L}_m}$, por unicidad se tiene

$$A = \mathcal{J} = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda dE_\lambda$$

Así, hemos demostrado el Teorema Espectral para operadores autoadjuntos no necesariamente acotados:

Teorema 5.1.2 *Teorema Espectral Sea H un espacio de Hilbert complejo, $A : D(A) \subset H \longrightarrow H$ un operador autoadjunto. Entonces,*

$$A = \mathcal{J} = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda dE_\lambda$$

5.2. Parte Leyter

Sea un operador $A : D(A) \subset H \to H$ densamente definido en un espacio de Hilbert H. En esta sección estudiamos la caracterización de operadores autoadjuntos, para luego mostrar un ejemplo de un operador simétrico pero no autoadjunto.

Definimos el conjunto

$$D(A^*) = \{\psi \in H \mid \exists\, \psi^* \in H \text{ tal que } \langle A\varphi, \psi\rangle_H = \langle \varphi, \psi^*\rangle_H \text{ para toda } \varphi \in D(A)\}\,.$$

Para cada $\psi \in D(A)$, el elemento ψ^* es único. En efecto, si $\langle A\varphi, \psi\rangle = \langle \varphi, \psi_1^*\rangle$ y $\langle A\varphi, \psi\rangle = \langle \varphi, \psi_2^*\rangle$, para toda $\varphi \in D(A)$. Entonces

$$\langle \varphi, \psi_1^* - \psi_2^*\rangle = 0 \ \ , \ \ \varphi \in D(A).$$

Desde que $D(A)$ es un subespacio denso de H, se sigue que $\psi_1^* = \psi_2^*$. Por lo tanto, la aplicación $A^* : D(A^*) \subset H \to H$ dada por $A^*\psi = \psi^*$, está bien definida.

Definición 5.2.1 *Sea un operador $A : D(A) \subset H \to H$ densamente definido en un espacio de Hilbert H. El operador A^* se llama* **dual** *de A.*

5.2.1. Operadores simétrico y autoadjunto. Criterios

Definición 5.2.2 *Un operador A, densamente definido en un espacio de Hilbert H se llama* **simétrico** *si $A \subset A^*$, es decir, si $D(A) \in D(A^*)$ y $A\psi = A^*\psi$ para toda $\psi \in D(A)$.*

Definición 5.2.3 *Un operador A es llamado* **autoadjunto** *si $A = A^*$, es decir, si A es simétrico y $D(A) = D(A^*)$.*

Definición 5.2.4 *Un operador $A : D(A) \subset H \to H$ se dice* **cerrado**, *si el conjunto*

$$\Gamma(A) = \{(\varphi, A\varphi) \in H \times H \mid \varphi \in D(A)\} \subset H \times H$$

es un subconjunto cerrado en $H \times H$.

Lema 5.2.1 *Sea A un operador simétrico en un espacio de Hilbert H. Entonces, A^* es cerrado, es decir, el gráfico de A, $\Gamma(A)$, es un subespacio cerrado de $H \times H$.*

Demostración: Definimos el operador unitario $V : H \times H \to H \times H$ como

$$V(\varphi, \psi) = (-\psi, \varphi).$$

El producto interno en $H \times H$ es dado por

$$\langle(\varphi_1, \psi_1), (\varphi_2, \psi_2)\rangle_{H\times H} = \langle\varphi_1, \varphi_2\rangle_H + \langle\psi_1, \psi_2\rangle_H.$$

A continuación, mostramos que $V\left[\Gamma(A)\right]^{\perp} = \Gamma(A^*)$. En efecto,

$$\begin{aligned}
(\varphi, \psi) \in (V\left[\Gamma(A)\right])^{\perp} &\Leftrightarrow \langle(\varphi, \psi), V(\omega, A\omega)\rangle_{H\times H} = 0 && \text{, para toda } \omega \in D(A) \\
&\Leftrightarrow \langle(\varphi, \psi), (-A\omega, \omega)\rangle_{H\times H} = 0 && \text{, para toda } \omega \in D(A) \\
&\Leftrightarrow \langle\psi, \omega\rangle_H = \langle\varphi, A\omega\rangle_H && \text{, para toda } \omega \in D(A) \\
&\Leftrightarrow \langle\omega, \psi\rangle_H = \langle A\omega, \varphi\rangle_H = \langle\omega, A^*\varphi\rangle_H && \text{, para toda } \omega \in D(A) \\
&\Leftrightarrow \psi = A^*\varphi \\
&\Leftrightarrow (\varphi, \psi) = (\varphi, A^*\varphi) \in \Gamma(A^*),
\end{aligned}$$

y desde que todo subespacio ortogonal es cerrado, se sigue que $\Gamma(A^*)$ es un subespacio cerrado en H. Concluimos que A es cerrado.

■

Teorema 5.2.1 *Sea A un operador simétrico en un espacio de Hilbert H. Son equivalentes:*

a. A *es autoadjunto.*

b. A *es cerrado y* $\ker(A^* \pm \mathrm{i}) = \{0\}$.

c. $Ran(A \pm \mathrm{i}) = H$.

Demostración:

- $a) \to b)$. Supongamos que A es autoadjunto. En particular, por el lema 5.2.1, es un operador cerrado. Por otro lado, sea $\varphi \in \ker(A^* \pm \mathrm{i})$, entonces

  $$\pm\mathrm{i}\langle\varphi,\varphi\rangle = \langle\varphi, \mp\mathrm{i}\varphi\rangle = \langle\varphi, A^*\varphi\rangle = \langle\varphi, A\varphi\rangle = -\langle A\varphi,\varphi\rangle = -\langle\varphi, A^*\varphi\rangle = \mp\mathrm{i}\langle\varphi,\varphi\rangle,$$

  entonces $\varphi = 0$. Luego, $\ker(A^* \pm \mathrm{i}) = \{0\}$.

- $b) \to c)$ Esta parte de la demostración está basada en mostrar que el conjunto $Ran(A \pm \mathrm{i})$ es denso y cerrado en H. Para la densidad, sea $\psi \in (Ran(A \pm \mathrm{i}))^\perp$, entonces

  $$\langle (A \pm i)\varphi, \psi\rangle = 0 \quad , \quad \text{para toda } \varphi \in D(A).$$

  Entonces

  $$0 = \langle (A \pm i)\varphi, \psi\rangle = \langle \varphi, (A^* \mp i)\psi\rangle \quad , \quad \text{para toda } \varphi \in D(A),$$

  y desde que $D(A)$ es denso en H, $\psi \in \ker(A^* \pm \mathrm{i}) = \{0\}$. Entonces $\psi = 0$, por lo tanto $Ran(A \pm \mathrm{i})$ es denso en H.

  Ahora, mostramos que el conjunto $Ran(A \pm \mathrm{i})$ es cerrado en H. En efecto, sea $\varphi_n \in D(A)$ tal que $\lim_{n\to\infty} (A \pm \mathrm{i})\varphi_n = \psi$. Por ser A un operador simétrico, se cumple que $\langle \varphi_n, A\varphi_n\rangle \in \mathbb{R}$. Por lo cual, se cumple la igualdad

  $$\|(A \pm \mathrm{i})\varphi_n\|^2 = \|A\varphi_n\|^2 + \|\varphi_n\|^2 .$$

Entonces, las sucesiones $(A\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son de Cauchy. Por ser A cerrado, existe $\varphi \in D(A)$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n = \varphi \quad , \quad \lim_{n\to\infty} A\varphi_n = A\varphi.$$

Entonces

$$\psi = \lim_{n\to\infty} (A \pm \mathrm{i})\varphi_n = \lim_{n\to\infty} A\varphi_n \pm \mathrm{i} \lim_{n\to\infty} \varphi_n = A\varphi \pm \mathrm{i}\varphi = (A \pm \mathrm{i})\varphi.$$

Así, $\psi \in Ran(A \pm \mathrm{i})$, es decir, $Ran(A \pm \mathrm{i})$ es cerrado en H. Finalmente, obtenemos

$$Ran(A \pm \mathrm{i}) = \overline{Ran(A \pm \mathrm{i})} = H.$$

- $c) \to a)$. La parte principal de la prueba radica en mostrar que $\ker(A^* \pm \mathrm{i}) = \{0\}$. En efecto, sea $\varphi \in \ker(A^* \pm \mathrm{i})$, entonces

  $$\langle (A \mp \mathrm{i})\psi, \varphi\rangle = \langle \psi, (A^* \pm \mathrm{i})\varphi\rangle = 0 \quad , \quad \text{para toda } \ \psi \in D(A).$$

  Entonces $\varphi = 0$, ya que por hipótesis $Ran(A \pm \mathrm{i}) = H$.

  Ahora, sea $\psi \in D(A^*)$, entonces $(A^* \pm \mathrm{i})\psi \in H$, por hipótesis, existe un $\varphi \in D(A)$ tal que

  $$(A^* \pm \mathrm{i})\psi = (A \pm \mathrm{i})\varphi.$$

  Por ser A un operador simétrico, $\varphi \in D(A^*)$, entonces

  $$(A^* \pm \mathrm{i})(\psi - \varphi) = 0,$$

  así, $\psi - \varphi \in \ker(A^* \pm \mathrm{i}) = \{0\}$. Entonces, $\psi = \varphi \in D(A)$ y $D(A^*) \subset D(A)$. Concluimos que A es autoadjunto.

∎

Observación 11 (Funciones absolutamente continuas) *Una función $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ se llama* **absolutamente continua** *si para todo $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que para toda familia $\{(a_i, b_i)\}$ de intervalos disjuntos en $[a,b]$ tal que $\int sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i) < \delta$, se cumple*

$$\sum_{i=1}^{n} |F(b_i) - F(a_i)| < \epsilon.$$

Denotamos por $AC\,[a,b]$ el conjunto de las funciones absolutamente continuas en $[a,b]$. A continuación enumeramos algunas propiedades de conjunto $AC\,[a,b]$, las cuales usaremos más adelante.

- *$AC\,[a,b]$ es un espacio vectorial.*
- *$AC\,[a,b] \subset C([a,b])$.*
- *Si $F \in AC\,[a,b]$, entonces F es derivable c.t.p.*
- *Sea $f \in L^1(a,b)$, definimos $F(x) = \int_a^x f(t)dt$. Entonces $F \in AC\,[a,b]$.*
- *Si $F \in AC\,[a,b]$, entonces $F(x) = F(a) + \int_a^x F'(t)dt$.*
- *Si $F \in AC\,[a,b]$, entonces F es acotada en $[a,b]$.*

5.2.2. Ejemplo. Operador simétrico pero no autoadjunto

Sea el operador $T : D(T) \to L^2(0,1)$, definido por $Tf = i\frac{d}{dx}f$, donde

$$D(T) = \{f \in AC\,[0,1] \mid f(0) = 0 = f(1), \frac{d}{dx}f \in L^2(0,1)\}.$$

A continuación mostramos algunas propiedades del operador T.

1. T es simétrico. En efecto, sean $f, g \in D(T)$ y por integración por partes

$$\langle Tf, g\rangle - \langle f, Tg\rangle = \int_0^1 Tf\overline{g} - \int_0^1 f\overline{Tg} = \mathrm{i}\int_0^1 f'\overline{g} + \mathrm{i}\int_0^1 f\overline{g'} = \mathrm{i}\,(f\overline{g})\,|_0^1 = 0.$$

2. T es cerrado. En efecto, sea $(f_n) \in L^2(0,1)$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f \qquad , \qquad \lim_{n\to\infty} Tf_n = g. \tag{5.1}$$

La convergencia es en norma $L^2(0,1)$. Entonces

$$\mathrm{i}f(x) = \mathrm{i}\lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty}\int_0^x \mathrm{i}f_n'(t)dt = \lim_{n\to\infty}\int_0^x Tf_n = \int_0^x g(t)dt.$$

Así, $Tf = g$. Además, de la ecuación (5.1): $f(0) = 0 = f(1)$. Por lo cual, $f \in D(T)$.

3. Se sabe que el conjunto $D(T)$ es denso en $L^2(0,1)$. Por lo tanto, el operador T^* está bien definido.

Ahora calculamos el operador T^*. Para ello, pordefinición, debemos encontrar todas las funciones $g, g^* \in L^2(0,1)$ tal que

$$\int_0^1 \mathrm{i}f'\overline{g} = \langle Tf, g\rangle = \langle f, g^*\rangle = \int_0^1 f\overline{g^*} \ \ , \ \ f \in D(T). \tag{5.2}$$

Sea $g^{**}(x) = \int_0^x g^*(t)dt$, la integral está bien definida ya que $g^* \in L^2(0,1)$ y $x \in [0,1]$. Luego, por integración por partes y de la ecuación (5.2), tenemos

$$\int_0^1 \mathrm{i}f'\overline{g} = \int_0^1 f\overline{g^*} = \int_0^1 f\overline{g^{**\prime}} = -\int_0^1 f'\overline{g^{**}} \ \ , \ \ f \in D(T).$$

De lo cual, se obtiene la siguiente identidad

$$0 = \int_0^1 f'\left(\overline{g + \mathrm{i}g^{**}}\right) = \int_0^1 f'\overline{h} \ \ , \ \ f \in D(T), \tag{5.3}$$

donde $h(x) = g(x) + \mathrm{i}g^{**}(x)$. Sea $c = \int_0^1 h(t)dt$, entonces

$$\|h - c\|^2_{L^2(0,1)} = \int_0^1 (h-c)(\overline{h-c}) = \int_0^1 (h-c)\overline{h} - \int_0^1 (h-c)\overline{c} = \int_0^1 (h-c)\overline{h} \tag{5.4}$$

Consideramos la función $f(x) = \int_0^x h(t)dt - cx$. Es claro que $f \in D(T)$, además $f'(x) = h(x) - c$. Por lo tanto, de las ecuaciones (5.3) y 85.4), se tiene

$$\|h - c\|^2_{L^2(0,1)} = \int_0^1 (h-c)\overline{h} = \int_0^1 f'\overline{h} = 0.$$

Entonces

$$h(x) = g(x) + \mathrm{i}g^{**}(x) = c \;\; , \;\; \text{c.t.p} \;\; x \in [0,1] \, .$$

Derivando ambos mienbros de la igualdad, se tiene que $g' + \mathrm{i}g^* = 0$. Por lo tanto, $T^*g = g^* = \mathrm{i}g'$.

Concluimos que el operador $T^* : D(T^*) \to L^2(0,1)$, está definido por $T^* = \mathrm{i}\frac{d}{dx}$, donde

$$D(T^*) = \{g \in AC\,[0,1] \;|\; \frac{d}{dx}g \in L^2(0,1)\}.$$

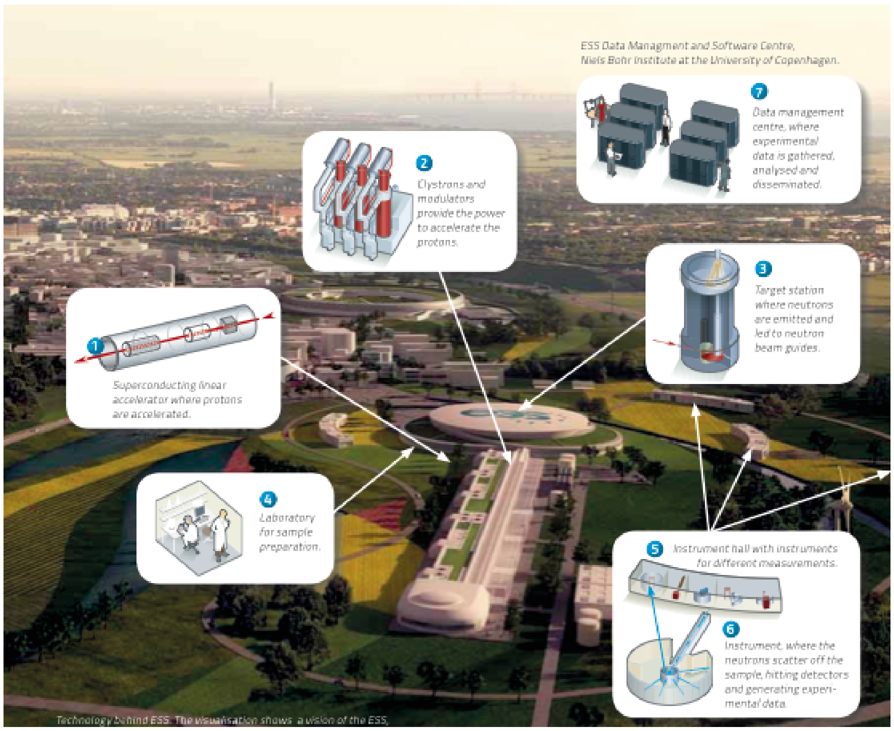
El operador T^* es una extensión autoadjunta propia de T, ya que su dominio no posee restricciones. En particular, T no es autoadjunto.

5.3. Parte Santiago

En construcción

5.4. Parte Odei

5.4.1. Dinámica de espalación de neutrones



1. Mediante una **fuente de iones** se producen iones de hidrógeno negativamente cargados. Cada ión contiene un protón orbitado por dos electrones.

- Los iones se inyectan en un **acelerador lineal**, que los acelera a una energía muy alta. Los iones pasan a traves de una lámina que despoja de cada ión los dos electrones, convirtiendo el ión en una protón.

2. Los protones pasan a **un anillo** donde se acumulan en grupos. Cada grupo de protones se libera del anillo como un pulso.

- Los pulsos de protones de alta energía golpean un blanco de metal pesado, usualmente un contenedor de mercurio líquido. A este proceso se le denomina **ESPALACIÓN DE NEUTRONES**, en el que se liberan pulsos de neutrones.

3. Los pulsos de neutrones liberados por el proceso de espalación se desaceleran en un **moderador**.

4. Los pulsos moderados se guían a las áreas que contienen **instrumentos altamente especializados** para la realización de experimentos. Aquí es donde ocurre el proceso de **ESPALACIÓN O SCATTERING** que explicaremos en esta sección.

5.4.2. Propiedades básicas del neutrón

- El neutrón es una partícula nucleica con masa $m_n = 1{,}675 * 10^{-27} kg$.
- No existe naturalmente de forma libre, pero se desintegra de un protón, un electrón y un neutrino.
- La vida de un neutrón es de aproximadamente 886 segundos.
- Es eléctricamente neutro, pero contiene momento magnético.
- El neutrón interactúa con el núcleo mediante las fuertes fuerzas nucleares y con los momentos magnéticos mediante las fuerzas magnéticas.

5.4.3. Dualidad onda-partícula

Una de las consecuencias de la mecánica cuántica es que la materia, en particular el electrón, se puede tratar como partícula u onda. En la dispersión de neutrones, los neutrones se comportan como partículas cuando son creadas, como ondas cuando se dispersan y nuevamente como partículas cuando se detectan. Más específicamente, a una partícula moviéndose a velocidad constante $v(m/s)$, se le atribuye longitud de onda (de Boglie):

$$\lambda = \frac{2\pi\hat{h}}{mv} \tag{5.5}$$

donde $\hat{h} = 1{,}034^{-34} Js$ es la constante de Plank.

En la dispersión de neutrones, la interpretación como onda se refiere en términos del número de onda del neutrón. $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, un vector de onda de longitud k y misma dirección que la velocidad,

$$k = \frac{m_n v}{\hat{h}}(\dot{A}^{-1}) \tag{5.6}$$

Para nuestro propósito consideramos el neutrón como no-relativista, por lo que su energía cinética viene dada por:

$$E = \frac{\hat{h}^2 k^2}{2m_n}(eV) \tag{5.7}$$

donde $1eV = 1{,}602 * 10^{-19} J$.

En construcción .....

Bibliografía

[1] —— N. Arrizabalaga, J. Duoandikoetxea and L. Vega *Self-adjoint extensions of Dirac operators with Coulomb type singularity*, arXiv:1211.5476. 2012.

[2] —— N. Arrizabalaga, A. Mas and L. Vega *Self-adjoint extensions of Dirac operators*, preprint.

[3] H. Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer,1983.

[4] J. Duoandikoetxea, *Fourier Anlysis*, American Mathematical Society,2001.

[5] L. Escauriaza, C. E. Kening, G. Ponce y L. Vega, *The sharp Hardy uncertainty principle for Schrödinger evolutions.*

[6] L. Escauriaza, C. E. Kening, G. Ponce y L. Vega, *Hardy's uncertainty principle, convexity and Schrödinger evolutions*, Mat. Journal, 155(2010), 163-187.

[7] L. Escauriaza, C. E. Kening, G. Ponce y L. Vega, *uniqueness properties of solutions to Schrödinger equations*, Am. J. Soc. , 49(2012), 415-442.

[8] L. C. Evans, *Partial Differential Equations*, American Mathematical Society, 1998.

[9] A. Fernandez, *El principio de incertidumbre de Hardy y la ecuación de Schrödinger*, Tesina de Máster de Inic. a la Inv. en Mat., 2012.

[10] G. Folland, *Introduction to Partial Diferential Equations*, Princeton University,1995.

[11] J. , *Partial Differential Equations*, American Mathematical Society, 1998.

[12] P. Mattila, *Geometry of Sets and Measures in Euclidean Spaces*, Cambridge University Press,1995.

[13] F. Riesz, B. Nagy *Functional Analysis*, Michigan University,1956.

[14] M. Reed, B. Simon *Functional Analysis I*, Methods of Modern Mathematical Physics ,1980.