EN BUSCA DE LA LINEALIDAD EN MATEMÁTICAS

Juan Benigno Seoane Sepúlveda.
Facultad de Ciencias Matemáticas.
Universidad Complutense de Madrid (Madrid, España).

Hace aproximadamente una década se introdujo (ver [2–4, 6]) el concepto de *lineabilidad* que (con el de *espaciabilidad* y *algebrabilidad*) hace referencia al "tamaño" (algebraico) de un conjunto. El resultado que motivó la aparición de este término fue el famoso *Monstruo de Weierstrass*. En 1872, K. Weierstrass construyó una función continua en $\mathbb{R}$ y no diferenciable en ningún punto de $\mathbb{R}$ (conocido como *monstruo de Weierstrass* en la literatura). Multitud de funciones que poseen esta *patología* han sido construidas desde entonces por una infinidad de autores. V. Gurariy (en 1966) demostró que existe un espacio vectorial infinito dimensional de funciones que, salvo por la función nula, son continuas y no diferenciables en ningún punto de $\mathbb{R}$ (de donde diremos que el conjunto de las funciones continuas y no diferenciables en ningún punto de $\mathbb{R}$, $CND(\mathbb{R})$, es *lineable*). En 1999 V. Fonf, V. Gurariy y V. Kadeč demostraron que el espacio vectorial anterior puede construirse cerrado en $\mathcal{C}[0,1]$ (de donde se dirá que el conjunto $CND(\mathbb{R})$ es *espaciable*).

La idea básica de este taller consiste en, a través del texto monográfico [1], estudiar (dado un subconjunto M de un espacio vectorial topológico X) qué tipo de estructuras "viven" dentro de $M \cup \{0\}$ (espacios vectoriales de dimensión finita, infinita, cerrados, completos, álgebras infinitamente generadas, etc.)

Tras una breve introducción en la materia (mediante un "tour" rápido sobre el tema) se plantearán a los alumnos algunos teoremas y resultados seleccionados (y "sorprendentes") de este área en la última década (y que involucran a muchas áreas diferentes, como Análisis Real y Complejo, Álgebra, Teoría de Operadores, Caos e Hiperciclicidad, Teoría de la Probabilidad, Teoría Axiomática de Conjuntos, etc.)

Se trabajará con los alumnos en estos resultados seleccionados (y en sus correspondientes demostraciones), proporcionando técnicas de "lineabilización" y comentando algunos problemas que, a pesar de ser *"aparententemente inofensivos"* (y fácilmente comprensibles para cualquier alumno de grado en matemáticas), siguen abiertos tras los muchos intentos de resolución por parte de matemáticos actuales.

REFERENCIAS.

[1] R. M. Aron, L. Bernal González, D. M. Pellegrino, and J. B. Seoane Sepúlveda, *Lineability: the search for linearity in mathematics*, Monographs and Research Notes in Mathematics, CRC Press, Boca Raton, FL, 2016.

[2] R. M. Aron, V. I. Gurariy, and J. B. Seoane Sepúlveda, *Lineability and spaceability of sets of functions on* $\mathbb{R}$, Proc. Amer. Math. Soc. **133** (2005), no. 3, 795–803.

[3] L. Bernal González, D. Pellegrino, and J. B. Seoane Sepúlveda, *Linear subsets of nonlinear sets in topological vector spaces*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **51** (2014), no. 1, 71–130. MR3119823

[4] D. Cariello and J. B. Seoane-Sepúlveda, *Basic sequences and spaceability in* ℓ_p *spaces*, J. Funct. Anal. **266** (2014), no. 6, 3797–3814.

[5] P. H. Enflo, V. I. Gurariy, and J. B. Seoane-Sepúlveda, *Some results and open questions on spaceability in function spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **366** (2014), no. 2, 611–625.

[6] J. B. Seoane Sepúlveda, *Chaos and lineability of pathological phenomena in analysis*, ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 2006. Doctoral Thesis (Ph.D.)–Kent State University, USA.