NUEVAS PERSPECTIVAS EN LAS DESIGUALDADES DE SOBOLEV

OSCAR DOMÍNGUEZ
UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID, SPAIN

Abstract. Las desigualdades de Sobolev constituyen una parte importante del análisis funcional moderno con un amplio abanico de aplicaciones remarcables en la teoría de ecuaciones en derivadas parciales, cálculo variacional, geometría y física matemática. A un nivel elemental, las desigualdades de Sobolev expresan las propiedades de integrabilidad y/o suavidad de una función f en términos de alguna propiedad de integrabilidad para las derivadas de f.

Una de las bellezas de las desigualdades de Sobolev es que establecen conexiones entre diferentes áreas de investigación, las cuales originalmente fueron desarrolladas desde perspectivas distintas. Nuestro objetivo central es estudiar algunas de estas conexiones. A continuación, describiremos de forma algo más precisa el esquema del programa a seguir.

En la primera parte del programa, nos centraremos en la revisión de la prueba original dada por Sobolev [8], la cual está basada en sofisticadas *fórmulas de representación integrales*. Veremos cómo esta prueba se puede simplificar considerablemente empleando la *teoría de interpolación* de espacios de Banach (ver [7] y [1]). La relación entre las desigualdades de Sobolev y las desigualdades geométricas (a saber, la célebre *desigualdad isoperimétrica*) se llevará a cabo a través del método de truncación de Maz'ya [4, 5] (ver también [6]) junto con la propiedad de automejora. En este contexto, la estrecha relación entre el perfil isoperimétrico del espacio de medida subyacente y las desigualdades de Sobolev logarítmicas juega un papel fundamental [3].

En segundo lugar, discutiremos recientes conexiones [2] entre las desigualdades de Sobolev y las *desigualdades de Ulyanov-Kolyada*. Estas últimas ocupan un lugar central en la teoría de aproximación. Haremos especial hincapié en el conjunto de nuevas herramientas empleada para establecer este nuevo puente entre desigualdades de Sobolev y la teoría de aproximación, a saber, técnicas de interpolación límite junto con teoremas de extrapolación inversos en el espíritu del dado por Tao [9].

References

[1] Cwikel, M., Pustylnik, E.: *Sobolev type embeddings in the limiting case.* J. Fourier Anal. Appl. **4**, 433–446 (1998).

[2] Domínguez, O., Tikhonov, S.: *Embeddings of smoothn function spaces, extrapolations, and related inequalities.* ArXiv: 1909.12818

[3] Martín, J., Milman, M.: *Pointwise symmetrization inequalities for Sobolev functions and applications.* Adv. Math. **225**, 121–199 (2010).

[4] Maz'ya, V.: *Classes of regions and imbedding theorems for function spaces.* Dokl. Akad. Nauk SSSR **133**, 527–530 (1960) (in Russian); English translation in Soviet Math. Dokl. **1**, 882–885 (1960).

[5] Maz'ya, V.: *On p-conductivity and theorems on embedding certain functional spaces into a C-space.* Dokl. Akad. Nauk SSSR **140**, 299–302 (1961) (in Russian).

[6] Maz'ya, V.: *Sobolev Spaces with Applications to Elliptic Partial Differential Equations,* Second, revised and augmented edition. Springer, Heidelberg, 2011.

[7] Peetre, J.: *Espaces d'interpolation et théorème de Soboleff.* Ann. Inst. Fourier **16**, 279–317 (1966).

[8] Sobolev, S.L.: *On a theorem of functional analysis.* Mat. Sbornik **4**, 471–497 (1938) (in Russian); English translation in Amer. Math. Soc. Transl. **34**, 39–68 (1963).

[9] Tao, T.: *A converse extrapolation theorem for translation-invariant operators.* J. Funct. Anal. **180**, 1–10 (2001).