Operadores *sparse* y estimaciones L^p con peso para ciertos operadores en el contexto de Bessel

Lourdes Rodríguez Mesa

Departamento de Análisis Matemático,
Universidad de La Laguna

XVII Encuentro de la Red de Análisis Funcional y Aplicaciones

12 de marzo de 2022

Antecedentes:

Problema

Sea $1 < p < \infty$. Dados T un operador (en $\mathbb{R}^n$) y w un peso (w medible, $w \geq 0$), ¿existe $C_p(T,n,w) > 0$ de manera que

$$\|T(f)\|_{L^p(w)} \leq C_p(T,n,w)\|f\|_{L^p(w)}, \quad f \in L^p(w)? \tag{1}$$

- Estimaciones cualitativas: ¿Cómo son los pesos w que satisfacen (1)? Clase de Muckenhoupt ($A_p(\mathbb{R}^n)$): $w \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, $w \geq 0$ tales que

$$[w]_{A_p} = \sup_{Q \text{ cubo}} \frac{1}{|Q|}\int_Q w(x)dx \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w(x)^{-\frac{1}{p-1}}dx\right)^{p-1} < \infty$$

- Estimaciones cuantitativas: ¿Cómo es la constante $C_p(T,n,w)$? Determinar la menor constante $\alpha(p)$ para la que se cumple:

$$\|T(f)\|_{L^p(w)} \leq C_p(T,n)[w]_{A_p}^{\alpha(p)}\|f\|_{L^p(w)}, \quad f \in L^p(w)$$

Antecedentes:

Problema

Sea $1 < p < \infty$. Dados T un operador (en $\mathbb{R}^n$) y w un peso (w medible, $w \geq 0$), ¿existe $C_p(T, n, w) > 0$ de manera que

$$\|T(f)\|_{L^p(w)} \leq C_p(T, n, w)\|f\|_{L^p(w)}, \quad f \in L^p(w)? \tag{1}$$

- Estimaciones cualitativas: ¿Cómo son los pesos w que satisfacen (1)?
  Clase de Muckenhoupt ($A_p(\mathbb{R}^n)$): $w \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, $w \geq 0$ tales que

$$[w]_{A_p} = \sup_{Q\,\mathrm{cubo}} \frac{1}{|Q|}\int_Q w(x)dx \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w(x)^{-\frac{1}{p-1}}dx\right)^{p-1} < \infty$$

- Estimaciones cuantitativas: ¿Cómo es la constante $C_p(T, n, w)$?
  Determinar la menor constante $\alpha(p)$ para la que se cumple:

$$\|T(f)\|_{L^p(w)} \leq C_p(T, n)[w]_{A_p}^{\alpha(p)}\|f\|_{L^p(w)}, \quad f \in L^p(w)$$

Antecedentes:

✎ Buckley (1993), ✎ Petermilch y Volberg (2002), ✎ Petermilch (2007), ✎ Beznosova (2008)
Operador maximal de Hardy-Littlewood, transformada de Beurling, transformada de Hilbert, transformada de Riesz, paraproductos diádicos.

Operador de Calderón-Zygmund

T un operador lineal acotado en $L^q(\mathbb{R}^n)$ para algún $q \in (1, \infty)$ tal que:

$$T(f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x,y) f(y) dy, \quad x \notin \operatorname{supp} f,$$

y se tiene:

- Condición de tamaño: $|K(x,y)| \leq \frac{C}{|x-y|^n}, \quad x \neq y$
- Condición de regularidad:

$$|K(x,y) - K(x',y)| + |K(y,x) - K(y,x')| \leq \frac{|x-x'|}{|x-y|^{n+1}}, \quad 2|x-x'| < |x-y|, \, x \neq y.$$

Conjetura A_2: $\alpha(p) = \max\{1, \frac{1}{p-1}\}$

✎Dragičević, Grafakos, Pereyra, Petemilch (2005): Teor. de extrapolación de Rubio de Francia

✎Hytönen (2012): prueba la conjetura A_2

✎Lerner (2012): aporta una prueba sencilla de la conjetura A_2 (usando operadores sparse)

Antecedentes:

✎ Buckley (1993), ✎ Petermilch y Volberg (2002), ✎ Petermilch (2007), ✎ Beznosova (2008)
Operador maximal de Hardy-Littlewood, transformada de Beurling, transformada de Hilbert, transformada de Riesz, paraproductos diádicos.

Operador de Calderón-Zygmund

T un operador lineal acotado en $L^q(\mathbb{R}^n)$ para algún $q \in (1,\infty)$ tal que:

$$T(f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x,y)f(y)dy, \quad x \notin \operatorname{supp} f,$$

y se tiene:

- Condición de tamaño: $|K(x,y)| \leq \frac{C}{|x-y|^n}, \quad x \neq y$
- Condición de regularidad:

  $|K(x,y) - K(x',y)| + |K(y,x) - K(y,x')| \leq \frac{|x-x'|}{|x-y|^{n+1}}, \quad 2|x-x'| < |x-y|,\ x \neq y.$

Conjetura A_2: $\alpha(p) = \max\{1, \frac{1}{p-1}\}$

✎Dragičević, Grafakos, Pereyra, Petemilch (2005): Teor. de extrapolación de Rubio de Francia

✎Hytönen (2012): prueba la conjetura A_2

✎Lerner (2012): aporta una prueba sencilla de la conjetura A_2 (usando operadores sparse)

Antecedentes:

✎ Buckley (1993), ✎ Petermilch y Volberg (2002), ✎ Petermilch (2007), ✎ Beznosova (2008)
Operador maximal de Hardy-Littlewood, transformada de Beurling, transformada de Hilbert, transformada de Riesz, paraproductos diádicos.

Operador de Calderón-Zygmund

T un operador lineal acotado en $L^q(\mathbb{R}^n)$ para algún $q \in (1,\infty)$ tal que:

$$T(f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x,y) f(y)\, dy, \quad x \notin \operatorname{supp} f,$$

y se tiene:

- Condición de tamaño: $|K(x,y)| \leq \frac{C}{|x-y|^n}, \quad x \neq y$
- Condición de regularidad:

$$|K(x,y) - K(x',y)| + |K(y,x) - K(y,x')| \leq \frac{|x-x'|}{|x-y|^{n+1}}, \quad 2|x-x'| < |x-y|,\ x \neq y.$$

Conjetura A_2: $\alpha(p) = \max\{1, \frac{1}{p-1}\}$

✎Dragičević, Grafakos, Pereyra, Petemilch (2005): Teor. de extrapolación de Rubio de Francia

✎Hytönen (2012): prueba la conjetura A_2

✎Lerner (2012): aporta una prueba sencilla de la conjetura A_2 (usando operadores sparse)

Argumento del control *sparse*

Dados un operador T y una función f adecuada, existe una familia *sparse* de cubos $\mathscr{S}$ de manera que

$$T(f) \leq CA_{\mathscr{S}}(f), \tag{2}$$

siendo

$$A_{\mathscr{S}}(f) = \sum_{Q \in \mathscr{S}} \langle f \rangle_Q \mathscr{X}_Q \qquad \left(\langle f \rangle_Q = \frac{1}{|Q|} \int_Q f(x)dx \right).$$

- La *suma* que define a $A_{\mathscr{S}}$, ¿en qué sentido?
- ¿Cómo se entiende el control en (2)? en norma, puntualmente.
- Utilidad de (2): Obtener estimaciones para T de las correspondientes para $A_{\mathscr{S}}$
- La familia $\mathscr{S}$ depende de la función f

Argumento del control *sparse*

Dados un operador T y una función f adecuada, existe una familia *sparse* de cubos $\mathscr{S}$ de manera que

$$T(f) \leq CA_{\mathscr{S}}(f), \tag{2}$$

siendo

$$A_{\mathscr{S}}(f) = \sum_{Q \in \mathscr{S}} \langle f \rangle_Q \mathscr{X}_Q \qquad \left(\langle f \rangle_Q = \frac{1}{|Q|} \int_Q f(x)dx \right).$$

- La *suma* que define a $A_{\mathscr{S}}$, ¿en qué sentido?
- ¿Cómo se entiende el control en (2)? en norma, puntualmente.
- Utilidad de (2): Obtener estimaciones para T de las correspondientes para $A_{\mathscr{S}}$
- La familia $\mathscr{S}$ depende de la función f

Argumento del control *sparse*

Dados un operador T y una función f adecuada, existe una familia *sparse* de cubos $\mathscr{S}$ de manera que

$$T(f) \leq C A_{\mathscr{S}}(f), \tag{2}$$

siendo

$$A_{\mathscr{S}}(f) = \sum_{Q \in \mathscr{S}} \langle f \rangle_Q \mathscr{X}_Q \qquad \left(\langle f \rangle_Q = \frac{1}{|Q|} \int_Q f(x)dx \right).$$

- La *suma* que define a $A_{\mathscr{S}}$, ¿en qué sentido?
- ¿Cómo se entiende el control en (2)? en norma, puntualmente.
- Utilidad de (2): Obtener estimaciones para T de las correspondientes para $A_{\mathscr{S}}$
- La familia $\mathscr{S}$ depende de la función f

Argumento del control *sparse*

Dados un operador T y una función f adecuada, existe una familia *sparse* de cubos $\mathscr{S}$ de manera que

$$T(f) \leq CA_{\mathscr{S}}(f), \tag{2}$$

siendo

$$A_{\mathscr{S}}(f) = \sum_{Q \in \mathscr{S}} \langle f \rangle_Q \mathscr{X}_Q \qquad \left(\langle f \rangle_Q = \frac{1}{|Q|} \int_Q f(x)dx \right).$$

- La *suma* que define a $A_{\mathscr{S}}$, ¿en qué sentido?
- ¿Cómo se entiende el control en (2)? en norma, puntualmente.
- Utilidad de (2): Obtener estimaciones para T de las correspondientes para $A_{\mathscr{S}}$
- La familia $\mathscr{S}$ depende de la función f

Argumento del control *sparse*

Dados un operador T y una función f adecuada, existe una familia *sparse* de cubos $\mathscr{S}$ de manera que

$$T(f) \leq CA_{\mathscr{S}}(f), \tag{2}$$

siendo

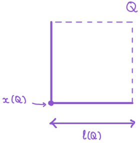
$$A_{\mathscr{S}}(f) = \sum_{Q\in\mathscr{S}} \langle f\rangle_Q \mathscr{X}_Q \qquad \left(\langle f\rangle_Q = \frac{1}{|Q|}\int_Q f(x)dx\right).$$

- La *suma* que define a $A_{\mathscr{S}}$, ¿en qué sentido?
- ¿Cómo se entiende el control en (2)? en norma, puntualmente.
- Utilidad de (2): Obtener estimaciones para T de las correspondientes para $A_{\mathscr{S}}$
- La familia $\mathscr{S}$ depende de la función f

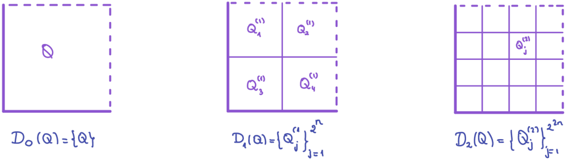
Lattices diádicas (en $\mathbb{R}^n$)

Consideramos cubos Q de la forma:

$$Q = \prod_{j=1}^{n} [x_j, x_j + \ell_Q),\ x_Q = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ \ell_Q > 0.$$



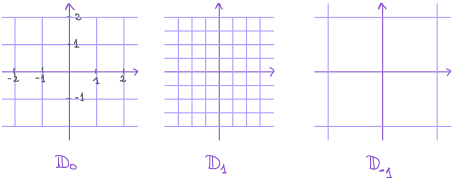
- *Lattice* diádica local: Sea Q un cubo en $\mathbb{R}^n$



$$D(Q) = \bigcup_{k=0}^{\infty} D_k(Q)$$

$$D_k(Q) = \{Q_j^{(k)}\}_{j=1}^{2^{kn}}$$

- *Lattice* diádica clásica: $\mathbb{D} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \mathbb{D}_k$ siendo $\mathbb{D}_k = \{Q_m^k = 2^{-k}([0,1)^n + m),\ m \in \mathbb{Z}^n\}$

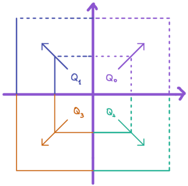


- $k \to +\infty$ (contracción)

  $k \to -\infty$ (expansión)
- $Q \in \mathbb{D} \Longrightarrow D(Q) \subset \mathbb{D}$

Inconvenientes de la *lattice* diádica clásica

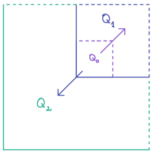
- Hay cubos que no tienen un antepasado común.
- Existen conjuntos compactos que no están contenidos en ningún cubo de $\mathbb{D}$.



- *Lattice* diádica general (✎ Lerner y Nazarov (2018)):

$\mathscr{D}$: colección de cubos en $\mathbb{R}^n$ verificando:

- Si $Q \in \mathscr{D}$, entonces $D(Q) \subset \mathscr{D}$;
- Si $R, S \in \mathscr{D}$, entonces existe $Q \in \mathscr{D}$ tal que $R, S \in D(Q)$ (antepasado común).
- Si $K \subset \mathbb{R}^n$ es compacto, existe $Q \in \mathscr{D}$ tal que $K \subset Q$.



$$\mathscr{D} = \bigcup_{j=0}^{\infty} D(Q_j)$$

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{j=0}^{\infty} \mathrm{int}(Q_j)$$

Lattices diádicas en espacios de tipo homogéneo

Espacio de tipo homogéneo (✎ Coifman y Weiss, 1971)

(X,d,μ): X un conjunto, d métrica y μ una medida doblante respecto a d, esto es, existe $c_\mu \geq 1$ tal que $\mu(B_d(x,2r)) \leq c_\mu\, \mu(B_d(x,r))$, $x \in X$, $r > 0$.

Sistema (δ, a, A)-diádico

Sean $\delta \in (0,1)$ y $0 < a \leq A < \infty$.

$$\mathscr{D} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \mathscr{D}_k, \qquad \mathscr{D}_k = \{Q_\alpha^k \subset X \text{ medible}\}_{\alpha\in I_k} \ \ (I_k \text{ numerable})$$

tales que:

(i) $Q_\alpha^k \cap Q_\beta^k = \emptyset$, $\alpha \neq \beta$, y $X = \bigcup_{\alpha\in I_k} Q_\alpha^k$, $k \in \mathbb{Z}$.

(ii) Si $\ell \geq k$ entonces, $Q_\alpha^\ell \subseteq Q_\beta^k$ ó $Q_\alpha^\ell \cap Q_\beta^k = \emptyset$.

(iii) Existe $M \in \mathbb{N}$: para todo $k \in \mathbb{Z}$ y $\alpha \in I_k$
$$\operatorname{card}\{\beta \in I_{k+1} : \ Q_\beta^{k+1} \subseteq Q_\alpha^k\} \leq M,$$
y $Q_\alpha^k = \bigcup\{Q : \ Q \in \mathscr{D}_{k+1}, Q \subseteq Q_\alpha^k\}$.

(iv) Existe $x_\alpha^k \in X$: $B_d(x_\alpha^k, a\delta^k) \subseteq Q_\alpha^k \subseteq B_d(x_\alpha^k, A\delta^k)$. Además, si $\ell \geq k$ y $Q_\beta^\ell \subseteq Q_\alpha^k$, entonces
$$B_d(x_\beta^\ell, A\delta^\ell) \subseteq B_d(x_\alpha^k, A\delta^k).$$

Lattices diádicas en espacios de tipo homogéneo

Espacio de tipo homogéneo (✎ Coifman y Weiss, 1971)

(X,d,μ): X un conjunto, d métrica y μ una medida doblante respecto a d, esto es, existe $c_\mu \geq 1$ tal que $\mu(B_d(x,2r)) \leq c_\mu\, \mu(B_d(x,r))$, $x \in X$, $r > 0$.

Sistema (δ, a, A)-diádico

Sean $\delta \in (0,1)$ y $0 < a \leq A < \infty$.

$$\mathscr{D} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \mathscr{D}_k, \qquad \mathscr{D}_k = \{Q_\alpha^k \subset X \text{ medible}\}_{\alpha\in I_k} \ (I_k \text{ numerable})$$

tales que:

(i) $Q_\alpha^k \cap Q_\beta^k = \emptyset$, $\alpha \neq \beta$,
y $X = \bigcup_{\alpha\in I_k} Q_\alpha^k$, $k \in \mathbb{Z}$.

(ii) Si $\ell \geq k$ entonces,
$Q_\alpha^\ell \subseteq Q_\beta^k$ ó $Q_\alpha^\ell \cap Q_\beta^k = \emptyset$.

(iii) Existe $M \in \mathbb{N}$: para todo $k \in \mathbb{Z}$ y $\alpha \in I_k$
$$\operatorname{card}\{\beta \in I_{k+1} : \ Q_\beta^{k+1} \subseteq Q_\alpha^k\} \leq M,$$
y $Q_\alpha^k = \bigcup\{Q : \ Q \in \mathscr{D}_{k+1}, Q \subseteq Q_\alpha^k\}$.

(iv) Existe $x_\alpha^k \in X$: $B_d(x_\alpha^k, a\delta^k) \subseteq Q_\alpha^k \subseteq B_d(x_\alpha^k, A\delta^k)$.
Además, si $\ell \geq k$ y $Q_\beta^\ell \subseteq Q_\alpha^k$, entonces
$$B_d(x_\beta^\ell, A\delta^\ell) \subseteq B_d(x_\alpha^k, A\delta^k).$$

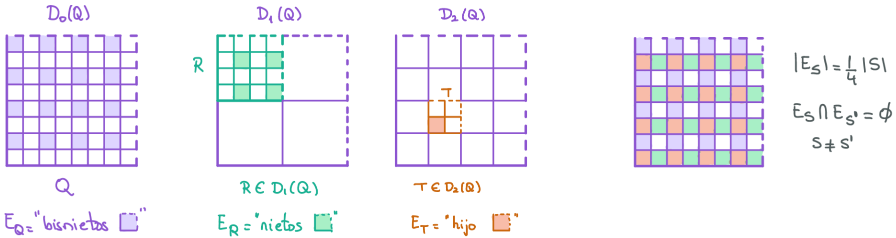
Familias η-sparse ($0 < \eta < 1$)

Sea $\mathscr{D}$ una *lattice* diádica en (X, d, μ) (en general, una familia de conjuntos medibles).

Se dice que $\mathscr{S} \subset \mathscr{D}$ es una familia η-sparse cuando para todo $Q \in \mathscr{S}$, existe un conjunto E_Q medible tal que $E_Q \subseteq Q$ y se verifica:

- $\mu(E_Q) \geq \eta\, \mu(Q)$;
- $E_Q \cap E_R = \emptyset$, $Q, S \in \mathscr{S}$, $Q \neq S$.
  (alternativa: Existe $c \geq 1$ tal que $\sum_{Q \in \mathscr{S}} \mathscr{X}_{E_Q}(x) \leq c$)

Ejemplo: $Q = [0,1) \times [0,1)$ y $\mathscr{S} = D_0(Q) \cup D_1(Q) \cup D_2(Q)$ ($\mathscr{S}$ es $\frac{1}{4}$-sparse)



Operadores *sparse*

Sean $\mathscr{D}$ una *lattice* diádica en (X,d,μ) y $\mathscr{S}\subset\mathscr{D}$ una familia η-sparse.
Se define $A_{\mathscr{S}}(f)$, $f\in L^1_{\mathrm{loc}}(X)$, mediante

$$A_{\mathscr{S}}(f)=\sum_{Q\in\mathscr{S}}\langle f\rangle_Q\mathscr{X}_Q, \qquad \langle f\rangle_Q=\frac{1}{\mu(Q)}\int_Q f\,d\mu$$

Teorema (acotación de un operador sparse)

Para todo $1<p<\infty$ y $w\in A_p(X)$ se tiene que

$$\|A_{\mathscr{S}}(f)\|_{L^p(X,w)}\le C_p(X,\eta)[w]_{A_p}^{\max\{1,\frac{1}{p-1}\}}\|f\|_{L^p(X,w)}, \quad f\in L^p(X,w).$$

Generalización: $A_{\mathscr{S},r}(f)$, $f\in L^r_{\mathrm{loc}}(X)$.

- $1\le r<\infty$, $\langle f\rangle_{Q,r}=\langle|f|^r\rangle_Q^{1/r}$
- $r<p<\infty$, $w\in A_{p/r}(X)$ y $[w]_{A_{p/r}}^{\max\{1,\frac{1}{p-r}\}}$

- ✎ Cruz-Uribe, Martell y Pérez (2010): $\mathbb{R}^n$
- ✎ Lerner (2016): $\mathbb{R}^n$, $A_{\mathscr{S},r}$
- ✎ Lorist (2020): (X,d,μ) homogéneo

Operadores *sparse*

Sean $\mathscr{D}$ una *lattice* diádica en (X,d,μ) y $\mathscr{S}\subset\mathscr{D}$ una familia η-sparse.
Se define $A_{\mathscr{S}}(f)$, $f\in L^1_{\mathrm{loc}}(X)$, mediante

$$A_{\mathscr{S}}(f)=\sum_{Q\in\mathscr{S}}\langle f\rangle_Q\mathscr{X}_Q,\qquad \langle f\rangle_Q=\frac{1}{\mu(Q)}\int_Q f\,d\mu$$

Teorema (acotación de un operador sparse)

Para todo $1<p<\infty$ y $w\in A_p(X)$ se tiene que

$$\|A_{\mathscr{S}}(f)\|_{L^p(X,w)}\le C_p(X,\eta)[w]_{A_p}^{\max\{1,\frac{1}{p-1}\}}\|f\|_{L^p(X,w)},\quad f\in L^p(X,w).$$

Generalización: $A_{\mathscr{S},r}(f)$, $f\in L^r_{\mathrm{loc}}(X)$.

- $1\le r<\infty$, $\langle f\rangle_{Q,r}=\langle|f|^r\rangle_Q^{1/r}$
- $r<p<\infty$, $w\in A_{p/r}(X)$ y $[w]_{A_{p/r}}^{\max\{1,\frac{1}{p-r}\}}$

- ✎ Cruz-Uribe, Martell y Pérez (2010): $\mathbb{R}^n$
- ✎ Lerner (2016): $\mathbb{R}^n$, $A_{\mathscr{S},r}$
- ✎ Lorist (2020): (X,d,μ) homogéneo

Operadores *sparse*

Sean $\mathscr{D}$ una *lattice* diádica en (X,d,μ) y $\mathscr{S} \subset \mathscr{D}$ una familia η-sparse.
Se define $A_{\mathscr{S}}(f)$, $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(X)$, mediante

$$A_{\mathscr{S}}(f) = \sum_{Q \in \mathscr{S}} \langle f \rangle_Q \mathscr{X}_Q, \qquad \langle f \rangle_Q = \frac{1}{\mu(Q)} \int_Q f \, d\mu$$

Teorema (acotación de un operador sparse)

Para todo $1 < p < \infty$ y $w \in A_p(X)$ se tiene que

$$\|A_{\mathscr{S}}(f)\|_{L^p(X,w)} \le C_p(X,\eta)[w]_{A_p}^{\max\{1,\frac{1}{p-1}\}} \|f\|_{L^p(X,w)}, \quad f \in L^p(X,w).$$

Generalización: $A_{\mathscr{S},r}(f)$, $f \in L^r_{\mathrm{loc}}(X)$.

- $1 \le r < \infty$, $\langle f \rangle_{Q,r} = \langle |f|^r \rangle_Q^{1/r}$
- $r < p < \infty$, $w \in A_{p/r}(X)$ y $[w]_{A_{p/r}}^{\max\{1,\frac{1}{p-r}\}}$

- ✎ Cruz-Uribe, Martell y Pérez (2010): $\mathbb{R}^n$
- ✎ Lerner (2016): $\mathbb{R}^n$, $A_{\mathscr{S},r}$
- ✎ Lorist (2020): (X,d,μ) homogéneo

Operadores *sparse*

Sean $\mathscr{D}$ una *lattice* diádica en (X,d,μ) y $\mathscr{S} \subset \mathscr{D}$ una familia η-sparse.
Se define $A_{\mathscr{S}}(f)$, $f \in L^1_{\text{loc}}(X)$, mediante

$$A_{\mathscr{S}}(f) = \sum_{Q \in \mathscr{S}} \langle f \rangle_Q \mathscr{X}_Q, \qquad \langle f \rangle_Q = \frac{1}{\mu(Q)} \int_Q f \, d\mu$$

Teorema (acotación de un operador sparse)

Para todo $1 < p < \infty$ y $w \in A_p(X)$ se tiene que

$$\|A_{\mathscr{S}}(f)\|_{L^p(X,w)} \leq C_p(X,\eta)[w]_{A_p}^{\max\{1,\frac{1}{p-1}\}} \|f\|_{L^p(X,w)}, \quad f \in L^p(X,w).$$

Generalización: $A_{\mathscr{S},r}(f)$, $f \in L^r_{\text{loc}}(X)$.

- $1 \leq r < \infty$, $\langle f \rangle_{Q,r} = \langle |f|^r \rangle_Q^{1/r}$
- $r < p < \infty$, $w \in A_{p/r}(X)$ y $[w]_{A_{p/r}}^{\max\{1,\frac{1}{p-r}\}}$

- ✎ Cruz-Uribe, Martell y Pérez (2010): $\mathbb{R}^n$
- ✎ Lerner (2016): $\mathbb{R}^n$, $A_{\mathscr{S},r}$
- ✎ Lorist (2020): (X,d,μ) homogéneo

Control por operadores sparse

Teorema (versión $\mathbb{R}^n$) (Lerner y Ombrosi, 2020)

Sean $1 \leq q \leq r < \infty$, T un operador sublineal de tipo débil (q,q) tal que $\mathscr{M}^{\#}_{T,3}$ es de tipo débil (r,r). Entonces, para cada $f \in L^r(\mathbb{R}^n)$ de soporte compacto, existe una familia sparse $\mathscr{S}$ de cubos tal que

$$|T(f)(x)| \leq C A_{\mathscr{S},r}(f)(x), \quad a.e.\ x \in \mathbb{R}^n,$$

siendo $C = c_{n,q,r}(\|T\|_{L^q \to L^{q,\infty}} + \|\mathscr{M}^{\#}_{T,3}\|_{L^r \to L^{r,\infty}})$.

$$\mathscr{M}^{\#}_{T,3}(f)(x) = \sup_{Q \ni x} \operatorname*{ess\,sup}_{x',x'' \in Q} |T(f\mathscr{X}_{\mathbb{R}^n \setminus (3Q)})(x') - T(f\mathscr{X}_{\mathbb{R}^n \setminus (3Q)})(x'')|, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

- ✎ Lorist (2020): versión (X,d,μ) homogéneo y operadores Banach-valuados.
- $\mathscr{S}$ depende de f: por Lema de descomposición de Calderón-Zygmund.
- $\mathscr{S}$: familia de cubos (no diádicos). The three lattice theorem (Lerner, Nazarov, 2018): $\mathscr{S} \subset \bigcup_{j=1}^{3^n} \mathscr{D}_j$ y si $Q \in \mathscr{S}$, $j = 1, \ldots, 3^n$, existe un único $R_j \in \mathscr{D}_j$ tal que $Q \subset R_j$ y $\ell_{R_j} = 3\ell_Q$.

Control por operadores sparse

Teorema (versión $\mathbb{R}^n$) (Lerner y Ombrosi, 2020)

Sean $1 \leq q \leq r < \infty$, T un operador sublineal de tipo débil (q,q) tal que $\mathscr{M}^{\#}_{T,3}$ es de tipo débil (r,r). Entonces, para cada $f \in L^r(\mathbb{R}^n)$ de soporte compacto, existe una familia sparse $\mathscr{S}$ de cubos tal que

$$|T(f)(x)| \leq C A_{\mathscr{S},r}(f)(x), \quad a.e.\ x \in \mathbb{R}^n,$$

siendo $C = c_{n,q,r}(\|T\|_{L^q \to L^{q,\infty}} + \|\mathscr{M}^{\#}_{T,3}\|_{L^r \to L^{r,\infty}})$.

$$\mathscr{M}^{\#}_{T,3}(f)(x) = \sup_{Q \ni x} \operatorname*{ess\,sup}_{x',x'' \in Q} |T(f\mathscr{X}_{\mathbb{R}^n \setminus (3Q)})(x') - T(f\mathscr{X}_{\mathbb{R}^n \setminus (3Q)})(x'')|, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

- ✎ Lorist (2020): versión (X,d,μ) homogéneo y operadores Banach-valuados.
- $\mathscr{S}$ depende de f: por Lema de descomposición de Calderón-Zygmund.
- $\mathscr{S}$: familia de cubos (no diádicos). The three lattice theorem (Lerner, Nazarov, 2018): $\mathscr{S} \subset \bigcup_{j=1}^{3^n} \mathscr{D}_j$ y si $Q \in \mathscr{S}$, $j = 1, \ldots, 3^n$, existe un único $R_j \in \mathscr{D}_j$ tal que $Q \subset R_j$ y $\ell_{R_j} = 3\ell_Q$.

Control por operadores sparse

Teorema (versión $\mathbb{R}^n$) (Lerner y Ombrosi, 2020)

Sean $1 \leq q \leq r < \infty$, T un operador sublineal de tipo débil (q,q) tal que $\mathscr{M}^{\#}_{T,3}$ es de tipo débil (r,r). Entonces, para cada $f \in L^r(\mathbb{R}^n)$ de soporte compacto, existe una familia sparse $\mathscr{S}$ de cubos tal que

$$|T(f)(x)| \leq CA_{\mathscr{S},r}(f)(x), \quad a.e.\ x \in \mathbb{R}^n,$$

siendo $C = c_{n,q,r}(\|T\|_{L^q \to L^{q,\infty}} + \|\mathscr{M}^{\#}_{T,3}\|_{L^r \to L^{r,\infty}})$.

$$\mathscr{M}^{\#}_{T,3}(f)(x) = \sup_{Q \ni x} \operatorname*{ess\,sup}_{x',x'' \in Q} |T(f\mathscr{X}_{\mathbb{R}^n \setminus (3Q)})(x') - T(f\mathscr{X}_{\mathbb{R}^n \setminus (3Q)})(x'')|, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

- ✎ Lorist (2020): versión (X,d,μ) homogéneo y operadores Banach-valuados.
- $\mathscr{S}$ depende de f: por Lema de descomposición de Calderón-Zygmund.
- $\mathscr{S}$: familia de cubos (no diádicos). The three lattice theorem (Lerner, Nazarov, 2018): $\mathscr{S} \subset \bigcup_{j=1}^{3^n} \mathscr{D}_j$ y si $Q \in \mathscr{S}$, $j = 1, \ldots, 3^n$, existe un único $R_j \in \mathscr{D}_j$ tal que $Q \subset R_j$ y $\ell_{R_j} = 3\ell_Q$.

El contexto de Bessel

Consideramos $\lambda > 0$.

$$((0,\infty), |\cdot|, m_\lambda), \text{ siendo } dm_\lambda(x) = x^{2\lambda}dx \text{ (doblante).}$$

Operador de Bessel: $\Delta_\lambda = -\frac{d^2}{dx^2} - \frac{2\lambda}{x}\frac{d}{dx}$

Transformación de Hankel (en $L^1((0,\infty), m_\lambda)$):

$$h_\lambda(f)(x) = \int_0^\infty (xy)^{-\lambda+1/2} J_{\lambda-1/2}(xy) f(y) y^{2\lambda} dy$$

Convolución y traslación de Hankel:

$$(f\#_\lambda g)(x) = \int_0^\infty f(y)\, \tau_x^\lambda(g)(y) y^{2\lambda} dy$$

$$\tau_x^\lambda(g)(y) = \frac{\Gamma(\lambda+1/2)}{\Gamma(\lambda)\sqrt{\pi}} \int_0^\pi g(\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\theta})(\sin\theta)^{2\lambda-1} d\theta$$

- $h_\lambda(f\#_\lambda g) = h_\lambda(f) h_\lambda(g)$, $f, g \in L^1((0,\infty), m_\lambda)$.
- $h_\lambda(\Delta_\lambda f)(x) = x^2 h_\lambda(f)(x)$, $f \in S(0,\infty)$.

El contexto de Bessel

Consideramos $\lambda > 0$.

$$((0,\infty), |\cdot|, m_\lambda), \text{ siendo } dm_\lambda(x) = x^{2\lambda}dx \text{ (doblante).}$$

Operador de Bessel: $\Delta_\lambda = -\frac{d^2}{dx^2} - \frac{2\lambda}{x}\frac{d}{dx}$

Transformación de Hankel (en $L^1((0,\infty), m_\lambda)$):

$$h_\lambda(f)(x) = \int_0^\infty (xy)^{-\lambda+1/2} J_{\lambda-1/2}(xy) f(y) y^{2\lambda} dy$$

Convolución y traslación de Hankel:

$$(f\#_\lambda g)(x) = \int_0^\infty f(y)\, \tau_x^\lambda(g)(y) y^{2\lambda} dy$$

$$\tau_x^\lambda(g)(y) = \frac{\Gamma(\lambda+1/2)}{\Gamma(\lambda)\sqrt{\pi}} \int_0^\pi g(\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\theta})(\sin\theta)^{2\lambda-1} d\theta$$

- $h_\lambda(f\#_\lambda g) = h_\lambda(f)h_\lambda(g)$, $f, g \in L^1((0,\infty), m_\lambda)$.
- $h_\lambda(\Delta_\lambda f)(x) = x^2 h_\lambda(f)(x)$, $f \in S(0,\infty)$.

El contexto de Bessel

Consideramos $\lambda > 0$.

$$((0,\infty), |\cdot|, m_\lambda), \text{ siendo } dm_\lambda(x) = x^{2\lambda}dx \text{ (doblante).}$$

Operador de Bessel: $\Delta_\lambda = -\frac{d^2}{dx^2} - \frac{2\lambda}{x}\frac{d}{dx}$

Transformación de Hankel (en $L^1((0,\infty), m_\lambda)$):

$$h_\lambda(f)(x) = \int_0^\infty (xy)^{-\lambda+1/2} J_{\lambda-1/2}(xy) f(y) y^{2\lambda} dy$$

Convolución y traslación de Hankel:

$$(f\#_\lambda g)(x) = \int_0^\infty f(y)\, \tau_x^\lambda(g)(y) y^{2\lambda} dy$$

$$\tau_x^\lambda(g)(y) = \frac{\Gamma(\lambda+1/2)}{\Gamma(\lambda)\sqrt{\pi}} \int_0^\pi g(\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\theta})(\sin\theta)^{2\lambda-1} d\theta$$

- $h_\lambda(f\#_\lambda g) = h_\lambda(f)h_\lambda(g)$, $f, g \in L^1((0,\infty), m_\lambda)$.
- $h_\lambda(\Delta_\lambda f)(x) = x^2 h_\lambda(f)(x)$, $f \in S(0,\infty)$.

El contexto de Bessel

Consideramos $\lambda > 0$.

$$((0,\infty), |\cdot|, m_\lambda), \text{ siendo } dm_\lambda(x) = x^{2\lambda}dx \text{ (doblante).}$$

Operador de Bessel: $\Delta_\lambda = -\frac{d^2}{dx^2} - \frac{2\lambda}{x}\frac{d}{dx}$

Transformación de Hankel (en $L^1((0,\infty), m_\lambda)$):

$$h_\lambda(f)(x) = \int_0^\infty (xy)^{-\lambda+1/2} J_{\lambda-1/2}(xy) f(y) y^{2\lambda} dy$$

Convolución y traslación de Hankel:

$$(f \#_\lambda g)(x) = \int_0^\infty f(y)\, \tau_x^\lambda(g)(y) y^{2\lambda} dy$$

$$\tau_x^\lambda(g)(y) = \frac{\Gamma(\lambda+1/2)}{\Gamma(\lambda)\sqrt{\pi}} \int_0^\pi g(\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\theta})(\sin\theta)^{2\lambda-1} d\theta$$

- $h_\lambda(f \#_\lambda g) = h_\lambda(f) h_\lambda(g)$, $f, g \in L^1((0,\infty), m_\lambda)$.
- $h_\lambda(\Delta_\lambda f)(x) = x^2 h_\lambda(f)(x)$, $f \in S(0,\infty)$.

Nuestros operadores

Espacio Z^λ (Da. Yang y Do. Yang, 2011)

$\phi \in C^2(0,\infty)$:

(i) $|\phi(x)| \leq \frac{C}{(1+x^2)^{\lambda+1}}$ (ii) $|\phi'(x)| \leq C\frac{x}{(1+x^2)^{\lambda+2}}$ (iii) $|\phi''(x)| \leq \frac{C}{(1+x^2)^{\lambda+2}}$

- Operador maximal:

$$\phi_*^\lambda(f) = \sup_{t>0} |f \#_\lambda \phi_t| \quad \left(\phi_t(x) = t^{-2\lambda-1}\phi\left(\tfrac{x}{t}\right)\right)$$

- Función cuadrado:

$$g_\phi^\lambda(f)(x) = \left(\int_0^\infty |f\#_\lambda \phi_t(x)|^2 \frac{dt}{t}\right)^{1/2}$$

- Operador ρ-variación ($\rho > 2$):

$$V_\rho^\lambda(\{\phi_t\}_{t>0})(f)(x) = \sup_{\substack{0<t_n<t_{n-1}<\cdots<t_1 \\ n\in\mathbb{N}}} \left(\sum_{j=1}^{n-1} |f\#_\lambda\phi_{t_j}(x) - f\#_\lambda\phi_{t_{j+1}}(x)|^\rho\right)^{1/\rho}$$

Nuestros operadores

Espacio Z^λ (Da. Yang y Do. Yang, 2011)

$\phi \in C^2(0,\infty)$:

(i) $|\phi(x)| \leq \frac{C}{(1+x^2)^{\lambda+1}}$ (ii) $|\phi'(x)| \leq C\frac{x}{(1+x^2)^{\lambda+2}}$ (iii) $|\phi''(x)| \leq \frac{C}{(1+x^2)^{\lambda+2}}$

- Operador maximal:

$$\phi_*^\lambda(f) = \sup_{t>0} |f \#_\lambda \phi_t| \quad \left(\phi_t(x) = t^{-2\lambda-1}\phi\left(\tfrac{x}{t}\right)\right)$$

- Función cuadrado:

$$g_\phi^\lambda(f)(x) = \left(\int_0^\infty |f \#_\lambda \phi_t(x)|^2 \frac{dt}{t}\right)^{1/2}$$

- Operador ρ-variación ($\rho > 2$):

$$V_\rho^\lambda(\{\phi_t\}_{t>0})(f)(x) = \sup_{\substack{0<t_n<t_{n-1}<\cdots<t_1 \\ n\in\mathbb{N}}} \left(\sum_{j=1}^{n-1} |f \#_\lambda \phi_{t_j}(x) - f \#_\lambda \phi_{t_{j+1}}(x)|^\rho\right)^{1/\rho}$$

Nuestros operadores

Espacio Z^λ (Da. Yang y Do. Yang, 2011)

$\phi \in C^2(0,\infty)$:

(i) $|\phi(x)| \leq \frac{C}{(1+x^2)^{\lambda+1}}$ (ii) $|\phi'(x)| \leq C\frac{x}{(1+x^2)^{\lambda+2}}$ (iii) $|\phi''(x)| \leq \frac{C}{(1+x^2)^{\lambda+2}}$

- Operador maximal:

$$\phi_*^\lambda(f) = \sup_{t>0} |f\#_\lambda \phi_t| \quad \left(\phi_t(x) = t^{-2\lambda-1}\phi\left(\tfrac{x}{t}\right)\right)$$

- Función cuadrado:

$$g_\phi^\lambda(f)(x) = \left(\int_0^\infty |f\#_\lambda \phi_t(x)|^2 \frac{dt}{t}\right)^{1/2}$$

- Operador ρ-variación ($\rho > 2$):

$$V_\rho^\lambda(\{\phi_t\}_{t>0})(f)(x) = \sup_{\substack{0<t_n<t_{n-1}<\cdots<t_1 \\ n\in\mathbb{N}}} \left(\sum_{j=1}^{n-1} |f\#_\lambda \phi_{t_j}(x) - f\#_\lambda \phi_{t_{j+1}}(x)|^\rho\right)^{1/\rho}$$

Nuestros operadores

Espacio Z^λ (Da. Yang y Do. Yang, 2011)

$\phi \in C^2(0,\infty)$:

(i) $|\phi(x)| \leq \frac{C}{(1+x^2)^{\lambda+1}}$ (ii) $|\phi'(x)| \leq C\frac{x}{(1+x^2)^{\lambda+2}}$ (iii) $|\phi''(x)| \leq \frac{C}{(1+x^2)^{\lambda+2}}$

- Operador maximal:

$$\phi_*^\lambda(f) = \sup_{t>0} |f\#_\lambda \phi_t| \quad \left(\phi_t(x) = t^{-2\lambda-1}\phi(\tfrac{x}{t})\right)$$

- Función cuadrado:

$$g_\phi^\lambda(f)(x) = \left(\int_0^\infty |f\#_\lambda \phi_t(x)|^2 \frac{dt}{t}\right)^{1/2}$$

- Operador ρ-variación ($\rho > 2$):

$$V_\rho^\lambda(\{\phi_t\}_{t>0})(f)(x) = \sup_{\substack{0<t_n<t_{n-1}<\cdots<t_1 \\ n\in\mathbb{N}}} \left(\sum_{j=1}^{n-1} |f\#_\lambda \phi_{t_j}(x) - f\#_\lambda \phi_{t_{j+1}}(x)|^\rho\right)^{1/\rho}$$

Sea $(E, \|\cdot\|_E)$ un espacio de Banach de funciones medibles definidas en $(0,\infty)$ y

$$T^{\lambda}_{\phi;E}(f)(x) = \|f \#_{\lambda} \phi_{\cdot}(x)\|_E, \quad x \in (0,\infty)$$

- $\phi^{\lambda}_{*} = T^{\lambda}_{\phi; L^{\infty}(0,\infty)}$
- $g^{\lambda}_{\phi} = T^{\lambda}_{\phi; L^2((0,\infty), \frac{dt}{t})}$
- $V^{\lambda}_{\rho}(\{\phi_t\}_{t>0}) = T^{\lambda}_{\phi; v_{\rho}}$

Espacio v_{ρ}: $g : (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{C}$ medibles :

$$\|g\|_{v_{\rho}} = \sup_{\substack{0<t_n<t_{n-1}<\ldots<t_1 \\ n\in\mathbb{N}}} \left(\sum_{k=1}^{n-1} |g(t_k) - g(t_{k+1})|^{\rho} \right)^{1/\rho} < \infty.$$

Objetivo

Obtener estimaciones L^p con peso (cuantitativas) para nuestros operadores

Pesos $A^{\lambda}_p(0,\infty)$, $1 < p < \infty$

Función medible w tal que $w(x) > 0$, c.t. $x \in (0,\infty)$:

$$[w]_{A^{\lambda}_p} := \sup_{\substack{I\subset(0,\infty) \\ I \text{ interval}}} \left(\frac{1}{m_{\lambda}(I)} \int_I w(x) x^{2\lambda} dx \right) \left(\frac{1}{m_{\lambda}(I)} \int_I w(x)^{-\frac{1}{p-1}} x^{2\lambda} dx \right)^{p-1} < \infty$$

Sea $(E, \|\cdot\|_E)$ un espacio de Banach de funciones medibles definidas en $(0,\infty)$ y

$$T^{\lambda}_{\phi;E}(f)(x) = \|f\#_{\lambda}\phi_{\cdot}(x)\|_E, \quad x \in (0,\infty)$$

- $\phi^{\lambda}_{*} = T^{\lambda}_{\phi;L^{\infty}(0,\infty)}$
- $g^{\lambda}_{\phi} = T^{\lambda}_{\phi;L^2((0,\infty),\frac{dt}{t})}$
- $V^{\lambda}_{\rho}(\{\phi_t\}_{t>0}) = T^{\lambda}_{\phi;v_{\rho}}$

Espacio v_{ρ}: $g : (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{C}$ medibles :

$$\|g\|_{v_{\rho}} = \sup_{\substack{0<t_n<t_{n-1}<\ldots<t_1 \\ n\in\mathbb{N}}} \left(\sum_{k=1}^{n-1} |g(t_k) - g(t_{k+1})|^{\rho}\right)^{1/\rho} < \infty.$$

Objetivo

Obtener estimaciones L^p con peso (cuantitativas) para nuestros operadores

Pesos $A^{\lambda}_{p}(0,\infty)$, $1 < p < \infty$

Función medible w tal que $w(x) > 0$, c.t. $x \in (0,\infty)$:

$$[w]_{A^{\lambda}_{p}} := \sup_{\substack{I\subset(0,\infty) \\ I \text{ interval}}} \left(\frac{1}{m_{\lambda}(I)}\int_I w(x)x^{2\lambda}dx\right)\left(\frac{1}{m_{\lambda}(I)}\int_I w(x)^{-\frac{1}{p-1}}x^{2\lambda}dx\right)^{p-1} < \infty$$

Sea $(E, \|\cdot\|_E)$ un espacio de Banach de funciones medibles definidas en $(0,\infty)$ y

$$T^{\lambda}_{\phi;E}(f)(x) = \|f\#_{\lambda}\phi_{\cdot}(x)\|_E, \quad x \in (0,\infty)$$

- $\phi^{\lambda}_{*} = T^{\lambda}_{\phi;L^{\infty}(0,\infty)}$
- $g^{\lambda}_{\phi} = T^{\lambda}_{\phi;L^2((0,\infty),\frac{dt}{t})}$
- $V^{\lambda}_{\rho}(\{\phi_t\}_{t>0}) = T^{\lambda}_{\phi;v_{\rho}}$

Espacio v_{ρ}: $g : (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{C}$ medibles :

$$\|g\|_{v_{\rho}} = \sup_{\substack{0<t_n<t_{n-1}<\ldots<t_1 \\ n\in\mathbb{N}}} \left(\sum_{k=1}^{n-1} |g(t_k)-g(t_{k+1})|^{\rho}\right)^{1/\rho} < \infty.$$

Objetivo

Obtener estimaciones L^p con peso (cuantitativas) para nuestros operadores

Pesos $A^{\lambda}_p(0,\infty)$, $1 < p < \infty$

Función medible w tal que $w(x) > 0$, c.t. $x \in (0,\infty)$:

$$[w]_{A^{\lambda}_p} := \sup_{\substack{I\subset(0,\infty) \\ I \text{ interval}}} \left(\frac{1}{m_{\lambda}(I)}\int_I w(x)x^{2\lambda}dx\right)\left(\frac{1}{m_{\lambda}(I)}\int_I w(x)^{-\frac{1}{p-1}}x^{2\lambda}dx\right)^{p-1} < \infty$$

Teorema (Almeida, Betancor, Fariña y R.-M., arXiv: 3961330, 2021)

Sean $1 < p < \infty$, $\lambda > 0$, $\rho > 2$ and $\phi \in Z^{\lambda}$ y consideramos $w \in A_p^{\lambda}(0,\infty)$.
Si T representa a ϕ_*^{λ}, g_{ϕ}^{λ} ó V_{ρ}^{λ}, entonces T puede extenderse como operador acotado de $L^p((0,\infty),w,m_{\lambda})$ en sí mismo y existe $C > 0$ independiente de w tal que

$$\|T(f)\|_{L^p((0,\infty),w,m_\lambda)} \leq C[w]_{A_p^{\lambda}}^{\max\{1,\frac{1}{p-1}\}}\|f\|_{L^p((0,\infty),w,m_\lambda)}, \quad f \in L^p((0,\infty),w,m_\lambda).$$

Elementos de la prueba:

- $\phi_*^{\lambda}(f)(x) \leq C\mathscr{M}_{\lambda}(f)(x)$ (Maximal H-L respecto a m_λ (✎ Bui y Duong, 2020))
- Lorist (2020): control sparse, acotación operadores sparse.
- Acotación de T y de $\mathscr{M}_{T,3}^{\#}$

  (de $L^p((0,\infty),m_\lambda)$ en sí mimo, cuando $1 < p < \infty$, y de $L^1((0,\infty),m_\lambda)$ en $L^{1,\infty}((0,\infty),m_\lambda)$.)
  - g_{ϕ}^{λ}: Teoría de C-Z vector-valuada (✎ Rubio de Francia, Ruiz y Torrea, 1986)
  - V_{ρ}^{λ}: comparando con el operador de variación clásico (✎ Campbell, Jones, Reinhold y Wierd, 2000)
  - $\mathscr{M}_{T,3}^{\#}(f)(x) \leq C\mathscr{M}_{\lambda}(f)(x)$ (✎ Bui y Duong, 2020)

Teorema (Almeida, Betancor, Fariña y R.-M., arXiv: 3961330, 2021)

Sean $1 < p < \infty$, $\lambda > 0$, $\rho > 2$ and $\phi \in Z^{\lambda}$ y consideramos $w \in A_p^{\lambda}(0,\infty)$.
Si T representa a ϕ_*^{λ}, g_{ϕ}^{λ} ó V_{ρ}^{λ}, entonces T puede extenderse como operador acotado de $L^p((0,\infty), w, m_\lambda)$ en sí mismo y existe $C > 0$ independiente de w tal que

$$\|T(f)\|_{L^p((0,\infty),w,m_\lambda)} \leq C[w]_{A_p^{\lambda}}^{\max\{1,\frac{1}{p-1}\}} \|f\|_{L^p((0,\infty),w,m_\lambda)}, \quad f \in L^p((0,\infty), w, m_\lambda).$$

Elementos de la prueba:

- $\phi_*^{\lambda}(f)(x) \leq C\mathscr{M}_\lambda(f)(x)$ (Maximal H-L respecto a m_λ (✎ Bui y Duong, 2020))
- Lorist (2020): control sparse, acotación operadores sparse.
- Acotación de T y de $\mathscr{M}^{\#}_{T,3}$

  (de $L^p((0,\infty), m_\lambda)$ en sí mimo, cuando $1 < p < \infty$, y de $L^1((0,\infty), m_\lambda)$ en $L^{1,\infty}((0,\infty), m_\lambda)$.)
  - g_{ϕ}^{λ}: Teoría de C-Z vector-valuada (✎ Rubio de Francia, Ruiz y Torrea, 1986)
  - V_{ρ}^{λ}: comparando con el operador de variación clásico (✎ Campbell, Jones, Reinhold y Wierd, 2000)
  - $\mathscr{M}^{\#}_{T,3}(f)(x) \leq C\mathscr{M}_\lambda(f)(x)$ (✎ Bui y Duong, 2020)

Teorema (Almeida, Betancor, Fariña y R.-M., arXiv: 3961330, 2021)

Sean $1 < p < \infty$, $\lambda > 0$, $\rho > 2$ and $\phi \in Z^\lambda$ y consideramos $w \in A_p^\lambda(0,\infty)$.
Si T representa a ϕ_*^λ, g_ϕ^λ ó V_ρ^λ, entonces T puede extenderse como operador acotado de $L^p((0,\infty), w, m_\lambda)$ en sí mismo y existe $C > 0$ independiente de w tal que

$$\|T(f)\|_{L^p((0,\infty),w,m_\lambda)} \leq C[w]_{A_p^\lambda}^{\max\{1,\frac{1}{p-1}\}} \|f\|_{L^p((0,\infty),w,m_\lambda)}, \quad f \in L^p((0,\infty), w, m_\lambda).$$

Elementos de la prueba:

- $\phi_*^\lambda(f)(x) \leq C\mathscr{M}_\lambda(f)(x)$ (Maximal H-L respecto a m_λ (✎ Bui y Duong, 2020))
- Lorist (2020): control sparse, acotación operadores sparse.
- Acotación de T y de $\mathscr{M}_{T,3}^{\#}$

  (de $L^p((0,\infty), m_\lambda)$ en sí mimo, cuando $1 < p < \infty$, y de $L^1((0,\infty), m_\lambda)$ en $L^{1,\infty}((0,\infty), m_\lambda)$.)
  - g_ϕ^λ: Teoría de C-Z vector-valuada (✎ Rubio de Francia, Ruiz y Torrea, 1986)
  - V_ρ^λ: comparando con el operador de variación clásico

    (✎ Campbell, Jones, Reinhold y Wierd, 2000)
  - $\mathscr{M}_{T,3}^{\#}(f)(x) \leq C\mathscr{M}_\lambda(f)(x)$ (✎ Bui y Duong, 2020)

Teorema (Almeida, Betancor, Fariña y R.-M., arXiv: 3961330, 2021)

Sean $1 < p < \infty$, $\lambda > 0$, $\rho > 2$ and $\phi \in Z^\lambda$ y consideramos $w \in A_p^\lambda(0,\infty)$.
Si T representa a ϕ_*^λ, g_ϕ^λ ó V_ρ^λ, entonces T puede extenderse como operador acotado de $L^p((0,\infty),w,m_\lambda)$ en sí mismo y existe $C > 0$ independiente de w tal que

$$\|T(f)\|_{L^p((0,\infty),w,m_\lambda)} \leq C[w]_{A_p^\lambda}^{\max\{1,\frac{1}{p-1}\}} \|f\|_{L^p((0,\infty),w,m_\lambda)}, \quad f \in L^p((0,\infty),w,m_\lambda).$$

Elementos de la prueba:

- $\phi_*^\lambda(f)(x) \leq C\mathscr{M}_\lambda(f)(x)$ (Maximal H-L respecto a m_λ (✎ Bui y Duong, 2020))
- Lorist (2020): control sparse, acotación operadores sparse.
- Acotación de T y de $\mathscr{M}_{T,3}^\#$
  (de $L^p((0,\infty),m_\lambda)$ en sí mimo, cuando $1 < p < \infty$, y de $L^1((0,\infty),m_\lambda)$ en $L^{1,\infty}((0,\infty),m_\lambda)$.)
  - g_ϕ^λ: Teoría de C-Z vector-valuada (✎ Rubio de Francia, Ruiz y Torrea, 1986)
  - V_ρ^λ: comparando con el operador de variación clásico
    (✎ Campbell, Jones, Reinhold y Wierd, 2000)
  - $\mathscr{M}_{T,3}^\#(f)(x) \leq C\mathscr{M}_\lambda(f)(x)$ (✎ Bui y Duong, 2020)

Teorema (Almeida, Betancor, Fariña y R.-M., arXiv: 3961330, 2021)

Sean $1 < p < \infty$, $\lambda > 0$, $\rho > 2$ and $\phi \in Z^\lambda$ y consideramos $w \in A_p^\lambda(0,\infty)$.
Si T representa a ϕ_*^λ, g_ϕ^λ ó V_ρ^λ, entonces T puede extenderse como operador acotado de $L^p((0,\infty), w, m_\lambda)$ en sí mismo y existe $C > 0$ independiente de w tal que

$$\|T(f)\|_{L^p((0,\infty),w,m_\lambda)} \leq C[w]_{A_p^\lambda}^{\max\{1,\frac{1}{p-1}\}} \|f\|_{L^p((0,\infty),w,m_\lambda)}, \quad f \in L^p((0,\infty), w, m_\lambda).$$

Elementos de la prueba:

- $\phi_*^\lambda(f)(x) \leq C\mathscr{M}_\lambda(f)(x)$ (Maximal H-L respecto a m_λ (✎ Bui y Duong, 2020))
- Lorist (2020): control sparse, acotación operadores sparse.
- Acotación de T y de $\mathscr{M}_{T,3}^{\#}$
  (de $L^p((0,\infty), m_\lambda)$ en sí mimo, cuando $1 < p < \infty$, y de $L^1((0,\infty), m_\lambda)$ en $L^{1,\infty}((0,\infty), m_\lambda)$.)
  - g_ϕ^λ: Teoría de C-Z vector-valuada (✎ Rubio de Francia, Ruiz y Torrea, 1986)
  - V_ρ^λ: comparando con el operador de variación clásico (✎ Campbell, Jones, Reinhold y Wierd, 2000)
  - $\mathscr{M}_{T,3}^{\#}(f)(x) \leq C\mathscr{M}_\lambda(f)(x)$ (✎ Bui y Duong, 2020)

Teorema (Almeida, Betancor, Fariña y R.-M., arXiv: 3961330, 2021)

Sean $1 < p < \infty$, $\lambda > 0$, $\rho > 2$ and $\phi \in Z^\lambda$ y consideramos $w \in A_p^\lambda(0,\infty)$.
Si T representa a ϕ_*^λ, g_ϕ^λ ó V_ρ^λ, entonces T puede extenderse como operador acotado de $L^p((0,\infty),w,m_\lambda)$ en sí mismo y existe $C > 0$ independiente de w tal que

$$\|T(f)\|_{L^p((0,\infty),w,m_\lambda)} \leq C[w]_{A_p^\lambda}^{\max\{1,\frac{1}{p-1}\}} \|f\|_{L^p((0,\infty),w,m_\lambda)}, \quad f \in L^p((0,\infty),w,m_\lambda).$$

Elementos de la prueba:

- $\phi_*^\lambda(f)(x) \leq C\mathscr{M}_\lambda(f)(x)$ (Maximal H-L respecto a m_λ (✎ Bui y Duong, 2020))
- Lorist (2020): control sparse, acotación operadores sparse.
- Acotación de T y de $\mathscr{M}_{T,3}^{\#}$
  (de $L^p((0,\infty),m_\lambda)$ en sí mimo, cuando $1 < p < \infty$, y de $L^1((0,\infty),m_\lambda)$ en $L^{1,\infty}((0,\infty),m_\lambda)$.)
  - g_ϕ^λ: Teoría de C-Z vector-valuada (✎ Rubio de Francia, Ruiz y Torrea, 1986)
  - V_ρ^λ: comparando con el operador de variación clásico (✎ Campbell, Jones, Reinhold y Wierd, 2000)
  - $\mathscr{M}_{T,3}^{\#}(f)(x) \leq C\mathscr{M}_\lambda(f)(x)$ (✎ Bui y Duong, 2020)

Teorema (Almeida, Betancor, Fariña y R.-M., arXiv: 3961330, 2021)

Sean $1 < p < \infty$, $\lambda > 0$, $\rho > 2$ and $\phi \in Z^\lambda$ y consideramos $w \in A_p^\lambda(0,\infty)$.
Si T representa a ϕ_*^λ, g_ϕ^λ ó V_ρ^λ, entonces T puede extenderse como operador acotado de $L^p((0,\infty),w,m_\lambda)$ en sí mismo y existe $C > 0$ independiente de w tal que

$$\|T(f)\|_{L^p((0,\infty),w,m_\lambda)} \leq C[w]_{A_p^\lambda}^{\max\{1,\frac{1}{p-1}\}} \|f\|_{L^p((0,\infty),w,m_\lambda)}, \quad f \in L^p((0,\infty),w,m_\lambda).$$

Elementos de la prueba:

- $\phi_*^\lambda(f)(x) \leq C\mathscr{M}_\lambda(f)(x)$ (Maximal H-L respecto a m_λ (✎ Bui y Duong, 2020))
- Lorist (2020): control sparse, acotación operadores sparse.
- Acotación de T y de $\mathscr{M}_{T,3}^{\#}$
  (de $L^p((0,\infty),m_\lambda)$ en sí mimo, cuando $1<p<\infty$, y de $L^1((0,\infty),m_\lambda)$ en $L^{1,\infty}((0,\infty),m_\lambda)$.)
  - g_ϕ^λ: Teoría de C-Z vector-valuada (✎ Rubio de Francia, Ruiz y Torrea, 1986)
  - V_ρ^λ: comparando con el operador de variación clásico
    (✎ Campbell, Jones, Reinhold y Wierd, 2000)
  - $\mathscr{M}_{T,3}^{\#}(f)(x) \leq C\mathscr{M}_\lambda(f)(x)$ (✎ Bui y Duong, 2020)

Teorema (Almeida, Betancor, Fariña y R.-M., arXiv: 3961330, 2021)

Sean $1 < p < \infty$, $\lambda > 0$, $\rho > 2$ and $\phi \in Z^\lambda$ y consideramos $w \in A_p^\lambda(0,\infty)$.
Si T representa a ϕ_*^λ, g_ϕ^λ ó V_ρ^λ, entonces T puede extenderse como operador acotado de $L^p((0,\infty), w, m_\lambda)$ en sí mismo y existe $C > 0$ independiente de w tal que

$$\|T(f)\|_{L^p((0,\infty),w,m_\lambda)} \leq C[w]_{A_p^\lambda}^{\max\{1,\frac{1}{p-1}\}} \|f\|_{L^p((0,\infty),w,m_\lambda)}, \quad f \in L^p((0,\infty), w, m_\lambda).$$

Elementos de la prueba:

- $\phi_*^\lambda(f)(x) \leq C\mathscr{M}_\lambda(f)(x)$ (Maximal H-L respecto a m_λ (✎ Bui y Duong, 2020))
- Lorist (2020): control sparse, acotación operadores sparse.
- Acotación de T y de $\mathscr{M}_{T,3}^{\#}$
  (de $L^p((0,\infty), m_\lambda)$ en sí mimo, cuando $1 < p < \infty$, y de $L^1((0,\infty), m_\lambda)$ en $L^{1,\infty}((0,\infty), m_\lambda)$.)
  - g_ϕ^λ: Teoría de C-Z vector-valuada (✎ Rubio de Francia, Ruiz y Torrea, 1986)
  - V_ρ^λ: comparando con el operador de variación clásico
    (✎ Campbell, Jones, Reinhold y Wierd, 2000)
  - $\mathscr{M}_{T,3}^{\#}(f)(x) \leq C\mathscr{M}_\lambda(f)(x)$ (✎ Bui y Duong, 2020)

Aplicaciones

- Semigrupo de Poisson asociado a Δ_λ: $P^\lambda(x) = c_\lambda(1+x^2)^{-\lambda-1}$

$$T_t(f) = t^m\partial_t^m P_t^\lambda(f) = (t^m\partial_t^m P_t^\lambda)\#_\lambda f, \quad t>0 \ \ (m\in\mathbb{N})$$

- Semigrupo del calor asociado a Δ_λ: $W^\lambda(x) = \alpha_\lambda e^{-x^2/2}$

$$T_t(f) = t^m\partial_t^m W_t^\lambda(f) = (t^m\partial_t^m W_t^\lambda)\#_\lambda f, \quad t>0 \ \ (m\in\mathbb{N})$$

- Multiplicador de Bochner-Riesz de parámetro $\alpha>0$:

$$T_t(f) = B_t^{\lambda,\alpha}(f) = h_\lambda\left(\left(1-\frac{y^2}{t^2}\right)_+^\alpha h_\lambda(f)\right) = \phi_{1/t}^{\lambda,\alpha}\#_\lambda f, \quad t>0,$$

$$(z)_+ = \max\{0,z\},\ z\in\mathbb{R},$$

$$\phi^{\lambda,\alpha}(z) = 2^\alpha\Gamma(\alpha+1)z^{-\alpha-\lambda-1/2}J_{\alpha+\lambda+1/2}(z),\ z\in(0,\infty).$$

Conmutadores de orden superior

Sean b una función medible en $(0,\infty)$ y $m \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$.

- $\phi_{*,b}^{\lambda,m}(f)(x) = \left\| \left(\phi_t \#_\lambda \left[(b(\cdot)-b(x))^m f\right]\right)(x) \right\|_{L^\infty(0,\infty)}$
- $g_{\phi,b}^{\lambda,m}(f)(x) = \left\| \left(\phi_t \#_\lambda \left[(b(\cdot)-b(x))^m f\right]\right)(x) \right\|_{L^2((0,\infty),\frac{dt}{t})}$
- $V_{\rho,b}^{\lambda,m}(f)(x) = \left\| \left(\phi_t \#_\lambda \left[(b(\cdot)-b(x))^m f\right]\right)(x) \right\|_{v_\rho}$

Teorema (Almeida, Betancor, Fariña, R.-M., arXiv: 3961330, 2021)

Sean $1<p<\infty$, $\rho>2$, $m\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$, $\phi\in Z^\lambda$. Si T representa a $\phi_{*,b}^{\lambda,m}$, $g_{\phi,b}^{\lambda,m}$ ó $V_{\rho,b}^{\lambda,m}$, y $w_1, w_2 \in A_p^\lambda(0,\infty)$ entonces, para $w=\left(\frac{w_1}{w_2}\right)^{1/(mp)}$ se tiene

$$\|T(f)\|_{L^p((0,\infty),w_2,m_\lambda)} \le C\|b\|^m_{BMO_w^\lambda}\left([w_1]_{A_p^\lambda}[w_2]_{A_p^\lambda}\right)^{\frac{m+1}{2}\max\{\frac{1}{p-1},1\}}\|f\|_{L^p((0,\infty),w_1,m_\lambda)}$$

$$\|b\|_{BMO_w^\lambda} := \sup_{\substack{I\subset(0,\infty)\\ I \text{ interval}}} \frac{1}{w_\lambda(I)}\int_I |b(y)-b_I|y^{2\lambda}dy<\infty, \qquad \begin{pmatrix} b_I=\frac{1}{m_\lambda(I)}\int_I b(y)y^{2\lambda}dy \\ w_\lambda(I)=\int_I w(x)x^{2\lambda}dx \end{pmatrix}$$

Prueba: ✎ Duong, Gong, Kuffner, Li, Wick, Yang (2021)

Conmutadores de orden superior

Sean b una función medible en $(0,\infty)$ y $m \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$.

- $\phi_{*,b}^{\lambda,m}(f)(x) = \left\| \left(\phi_t \#_\lambda \left[(b(\cdot)-b(x))^m f\right]\right)(x) \right\|_{L^\infty(0,\infty)}$
- $g_{\phi,b}^{\lambda,m}(f)(x) = \left\| \left(\phi_t \#_\lambda \left[(b(\cdot)-b(x))^m f\right]\right)(x) \right\|_{L^2((0,\infty),\frac{dt}{t})}$
- $V_{\rho,b}^{\lambda,m}(f)(x) = \left\| \left(\phi_t \#_\lambda \left[(b(\cdot)-b(x))^m f\right]\right)(x) \right\|_{v_\rho}$

Teorema (Almeida, Betancor, Fariña, R.-M., arXiv: 3961330, 2021)

Sean $1 < p < \infty$, $\rho > 2$, $m \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, $\phi \in Z^\lambda$. Si T representa a $\phi_{*,b}^{\lambda,m}$, $g_{\phi,b}^{\lambda,m}$ ó $V_{\rho,b}^{\lambda,m}$, y $w_1, w_2 \in A_p^\lambda(0,\infty)$ entonces, para $w = \left(\frac{w_1}{w_2}\right)^{1/(mp)}$ se tiene

$$\|T(f)\|_{L^p((0,\infty),w_2,m_\lambda)} \leq C\|b\|_{BMO_w^\lambda}^m \left([w_1]_{A_p^\lambda}[w_2]_{A_p^\lambda}\right)^{\frac{m+1}{2}\max\{\frac{1}{p-1},1\}} \|f\|_{L^p((0,\infty),w_1,m_\lambda)}$$

$$\|b\|_{BMO_w^\lambda} := \sup_{\substack{I\subset(0,\infty)\\ I \text{ interval}}} \frac{1}{w_\lambda(I)}\int_I |b(y)-b_I| y^{2\lambda}dy < \infty, \qquad \begin{pmatrix} b_I = \frac{1}{m_\lambda(I)}\int_I b(y)y^{2\lambda}dy \\ w_\lambda(I) = \int_I w(x)x^{2\lambda}dx \end{pmatrix}$$

Prueba: ✎ Duong, Gong, Kuffner, Li, Wick, Yang (2021)

¡Muchas gracias!