Sumas torcidas de espacios $C(K)$: menú degustación

Alberto Salguero Alarcón

Universidad de Extremadura

XVII Encuentro de la Red de Análisis Funcional y Aplicaciones
La Laguna, 10-12 Marzo 2022

Esta actividad es parte del proyecto PID-2019-103961GB-C21, financiado por MCIN/AEI/10.13039/501100011033, de la ayuda FPU1800990 financiada por MCIN/AEI/10.13039/501100011033 y por FSE Invierte en tu futuro, y del proyecto IB20038 financiado por la Junta de Extremadura.

MINISTERIO DE CIENCIA E INNOVACIÓN

UNIÓN EUROPEA
Fondo Social Europeo
El FSE invierte en tu futuro

AGENCIA ESTATAL DE INVESTIGACIÓN

Unión Europea

Fondo Europeo de Desarrollo Regional
Una manera de hacer Europa

JUNTA DE EXTREMADURA
Consejería de Economía, Ciencia y Agenda Digital

Sumas torcidas de espacios de Banach

Sumas torcidas de espacios de Banach

Una *suma torcida* de dos espacios de Banach Y y X es otro espacio Z tal que

Sumas torcidas de espacios de Banach

Una *suma torcida* de dos espacios de Banach Y y X es otro espacio Z tal que

- $Y \hookrightarrow Z$.

Sumas torcidas de espacios de Banach

Una *suma torcida* de dos espacios de Banach Y y X es otro espacio Z tal que

- $Y \hookrightarrow Z$.
- $Z/Y \simeq X$.

Sumas torcidas de espacios de Banach

Una *suma torcida* de dos espacios de Banach Y y X es otro espacio Z tal que

- $Y \hookrightarrow Z$.
- $Z/Y \simeq X$.

☞ *Sucesiones exactas:*

$$0 \longrightarrow Y \xrightarrow{j} Z \xrightarrow{q} X \longrightarrow 0$$

Sumas torcidas de espacios de Banach

Una *suma torcida* de dos espacios de Banach Y y X es otro espacio Z tal que

- $Y \hookrightarrow Z$.
- $Z/Y \simeq X$.

☞ *Sucesiones exactas:*

$$0 \longrightarrow Y \xrightarrow{j} Z \xrightarrow{q} X \longrightarrow 0$$

Cuando:

Sumas torcidas de espacios de Banach

Una *suma torcida* de dos espacios de Banach Y y X es otro espacio Z tal que

- $Y \hookrightarrow Z$.
- $Z/Y \simeq X$.

☞ *Sucesiones exactas:*

$$0 \longrightarrow Y \xrightarrow{j} Z \xrightarrow{q} X \longrightarrow 0$$

Cuando:

- $j(Y)$ está complementado en Z.

Sumas torcidas de espacios de Banach

Una *suma torcida* de dos espacios de Banach Y y X es otro espacio Z tal que

- $Y \hookrightarrow Z$.
- $Z/Y \simeq X$.

☞ *Sucesiones exactas:*

$$0 \longrightarrow Y \xrightarrow{j} Z \xrightarrow{q} X \longrightarrow 0$$

Cuando:

- $j(Y)$ está complementado en Z.
- q admite una sección continua.

Sumas torcidas de espacios de Banach

Una *suma torcida* de dos espacios de Banach Y y X es otro espacio Z tal que

- $Y \hookrightarrow Z$.
- $Z/Y \simeq X$.

☞ *Sucesiones exactas:*

$$0 \longrightarrow Y \stackrel{j}{\longrightarrow} Z \stackrel{q}{\longrightarrow} X \longrightarrow 0$$

Cuando:

- $j(Y)$ está complementado en Z.
- q admite una sección continua.

se dice que la suma torcida es *trivial*.

Sumas torcidas de espacios de Banach

Una *suma torcida* de dos espacios de Banach Y y X es otro espacio Z tal que

- $Y \hookrightarrow Z$.
- $Z/Y \simeq X$.

☞ *Sucesiones exactas:*

$$0 \longrightarrow Y \xrightarrow{j} Z \xrightarrow{q} X \longrightarrow 0$$

Cuando:

- $j(Y)$ está complementado en Z.
- q admite una sección continua.

se dice que la suma torcida es *trivial*.

$$0 \longrightarrow Y \longrightarrow Y \times X \longrightarrow X \longrightarrow 0$$

$\mathrm{Ext}(X, Y)$

$\mathrm{Ext}(X, Y)$

$$\mathrm{Ext}(X, Y) = \frac{\{\text{sumas torcidas de } Y \text{ con } X\}}{\equiv}$$

$\operatorname{Ext}(X, Y)$

$$\operatorname{Ext}(X, Y) = \frac{\{\text{sumas torcidas de } Y \text{ con } X\}}{\equiv}$$

☞ $\operatorname{Ext}(X, Y) = 0 \iff$ toda suma torcida de Y con X es trivial.

$\mathrm{Ext}(X,Y)$

$$\mathrm{Ext}(X,Y) = \frac{\{\text{sumas torcidas de } Y \text{ con } X\}}{\equiv}$$

☞ $\mathrm{Ext}(X,Y) = 0 \iff$ toda suma torcida de Y con X es trivial.

1. Teorema de Hahn-Banach:

$$0 \longrightarrow \ell_\infty \longrightarrow Z \longrightarrow X \longrightarrow 0$$

$\mathrm{Ext}(X, Y)$

$$\mathrm{Ext}(X,Y) = \frac{\{\text{sumas torcidas de } Y \text{ con } X\}}{\equiv}$$

☞ $\mathrm{Ext}(X,Y) = 0 \iff$ toda suma torcida de Y con X es trivial.

1. Teorema de Hahn-Banach:

$$0 \longrightarrow \ell_\infty \longrightarrow Z \longrightarrow X \longrightarrow 0$$

2. Teorema de Sobczyk:

$$0 \longrightarrow c_0 \longrightarrow Z \longrightarrow S \longrightarrow 0$$

$\mathrm{Ext}(X, Y)$

$$\mathrm{Ext}(X, Y) = \frac{\{\text{sumas torcidas de } Y \text{ con } X\}}{\equiv}$$

☞ $\mathrm{Ext}(X, Y) = 0 \iff$ toda suma torcida de Y con X es trivial.

1. Teorema de Hahn-Banach:

$$0 \longrightarrow \ell_\infty \longrightarrow Z \longrightarrow X \longrightarrow 0$$

2. Teorema de Sobczyk:

$$0 \longrightarrow c_0 \longrightarrow Z \longrightarrow S \longrightarrow 0$$

3. Propiedad de "lifting" de ℓ_1:

$$0 \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow \ell_1 \longrightarrow 0$$

Sumas torcidas de espacios $C(K)$

Sumas torcidas de espacios $C(K)$

- *Aplicación cociente* $\pi : L \to K$

Sumas torcidas de espacios $C(K)$

- *Aplicación cociente* $\pi : L \to K$

$$0 \longrightarrow C(L) \xrightarrow{\pi^\circ} C(K) \longrightarrow Z \longrightarrow 0$$

donde $\pi^\circ : C(K) \to C(L),\ \pi^\circ(f) = f \circ \pi.$

Sumas torcidas de espacios $C(K)$

- *Aplicación cociente* $\pi : L \to K$

$$0 \longrightarrow C(L) \xrightarrow{\pi^\circ} C(K) \longrightarrow Z \longrightarrow 0$$

donde $\pi^\circ : C(K) \to C(L)$, $\pi^\circ(f) = f \circ \pi$.

- *Inclusión* $\iota : K \to L$:

Sumas torcidas de espacios $C(K)$

- *Aplicación cociente* $\pi : L \to K$

$$0 \longrightarrow C(L) \xrightarrow{\pi^\circ} C(K) \longrightarrow Z \longrightarrow 0$$

donde $\pi^\circ : C(K) \to C(L)$, $\pi^\circ(f) = f \circ \pi$.

- *Inclusión* $\iota : K \to L$:

$$0 \longrightarrow \ker \iota^\circ \longrightarrow C(L) \xrightarrow{\iota^\circ} C(K) \longrightarrow 0$$

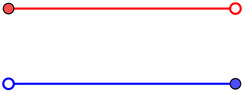
donde $\iota^\circ : C(L) \to C(K)$, $\iota^\circ(g) = g \circ \iota$.

El intervalo partido

El intervalo partido

"Alexandroff's double arrow space" (1929)

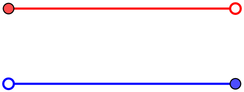
$$\mathbb{S} = \big((0,1] \times \{0\}\big) \cup \big([0,1) \times \{1\}\big)$$



El intervalo partido

"Alexandroff's double arrow space" (1929)

$$\mathbb{S} = \big((0,1] \times \{0\}\big) \cup \big([0,1) \times \{1\}\big)$$

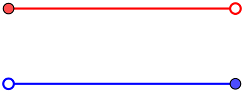


☞ *Convergencia de sucesiones en $\mathbb{S}$:*

El intervalo partido

"Alexandroff's double arrow space" (1929)

$$\mathbb{S} = \big((0,1] \times \{0\}\big) \cup \big([0,1) \times \{1\}\big)$$

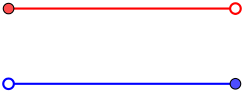


☞ *Convergencia de sucesiones en $\mathbb{S}$:*
Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $[0,1]$.

El intervalo partido

“Alexandroff’s double arrow space” (1929)

$$\mathbb{S} = \big((0,1] \times \{0\}\big) \cup \big([0,1) \times \{1\}\big)$$



☞ *Convergencia de sucesiones en $\mathbb{S}$:*

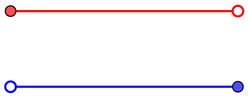
Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $[0,1]$.

- Si x_n es creciente y $x = \sup_n x_n$, entonces $(x_n, i_n) \to (x, 0)$.

El intervalo partido

"Alexandroff's double arrow space" (1929)

$$\mathbb{S} = \big((0,1] \times \{0\}\big) \cup \big([0,1) \times \{1\}\big)$$



☞ *Convergencia de sucesiones en $\mathbb{S}$:*

Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $[0,1]$.

- Si x_n es creciente y $x = \sup_n x_n$, entonces $(x_n, i_n) \to (x, 0)$.
- Si x_n es decreciente y $x = \inf_n x_n$, entonces $(x_n, i_n) \to (x, 1)$.

$$C(\mathbb{S}) \Longleftrightarrow D[0,1]$$

donde $D[0,1]$ es el espacio de funciones $[0,1] \to \mathbb{R}$ acotadas, continuas por la izquierda y con límite finito por la derecha.

$$C(\mathbb{S}) = D[0,1]$$

donde $D[0,1]$ es el espacio de funciones $[0,1] \to \mathbb{R}$ acotadas, continuas por la izquierda y con límite finito por la derecha.

- A partir de $\pi : \mathbb{S} \to [0,1]$, $\pi(x,i) = x$, obtenemos:

$$C(\mathbb{S}) \;=\!=\!=\; D[0,1]$$

donde $D[0,1]$ es el espacio de funciones $[0,1] \to \mathbb{R}$ acotadas, continuas por la izquierda y con límite finito por la derecha.

- A partir de $\pi : \mathbb{S} \to [0,1]$, $\pi(x,i) = x$, obtenemos:

$$0 \longrightarrow C[0,1] \xrightarrow{\pi^\circ} C(\mathbb{S}) \longrightarrow \cdot \longrightarrow 0$$

$$C(\mathbb{S}) \;=\!=\!=\; D[0,1]$$

donde $D[0,1]$ es el espacio de funciones $[0,1] \to \mathbb{R}$ acotadas, continuas por la izquierda y con límite finito por la derecha.

- A partir de $\pi : \mathbb{S} \longrightarrow [0,1]$, $\pi(x,i) = x$, obtenemos:

$$0 \longrightarrow C[0,1] \xrightarrow{\pi^\circ} C(\mathbb{S}) \longrightarrow \cdot \longrightarrow 0$$

- *¿Y el espacio cociente?*

$$C(\mathbb{S}) \Longleftrightarrow D[0,1]$$

donde $D[0,1]$ es el espacio de funciones $[0,1] \to \mathbb{R}$ acotadas, continuas por la izquierda y con límite finito por la derecha.

- A partir de $\pi : \mathbb{S} \longrightarrow [0,1]$, $\pi(x,i) = x$, obtenemos:

$$0 \longrightarrow C[0,1] \xrightarrow{\pi^\circ} C(\mathbb{S}) \longrightarrow \cdot \longrightarrow 0$$

- *¿Y el espacio cociente?*

$$\|\bar{f}\| = \frac{1}{2} \max_{x \in [0,1]} (f(x,1) - f(x,0))$$

- *Operador "salto"*: $Jf(x) = \frac{1}{2}(f(x,1) - f(x,0))$.

- *Operador "salto":* $Jf(x) = \frac{1}{2}(f(x,1) - f(x,0))$.
- El rango de J es $c_0[0,1]$.

- *Operador "salto"*: $Jf(x) = \frac{1}{2}(f(x,1) - f(x,0))$.
- El rango de J es $c_0[0,1]$.

Proposición

Existe una sucesión exacta no trivial:

$$0 \longrightarrow C[0,1] \xrightarrow{\pi^\circ} C(\mathbb{S}) \xrightarrow{J} c_0[0,1] \longrightarrow 0$$

- *Operador "salto":* $Jf(x) = \frac{1}{2}(f(x,1) - f(x,0))$.
- El rango de J es $c_0[0,1]$.

Proposición

Existe una sucesión exacta no trivial:

$$0 \longrightarrow C[0,1] \xrightarrow{\pi^\circ} C(\mathbb{S}) \xrightarrow{J} c_0[0,1] \longrightarrow 0$$

Demostración: $C(\mathbb{S})$ es subespacio de ℓ_∞, pero $C[0,1] \times c_0[0,1]$ no. $\square$

Compactos generados por familias casi-disjuntas

Sea $\mathscr{A}$ una familia de subconjuntos infinitos de $\mathbb{N}$.

Compactos generados por familias casi-disjuntas

Sea $\mathscr{A}$ una familia de subconjuntos infinitos de $\mathbb{N}$.

Definición

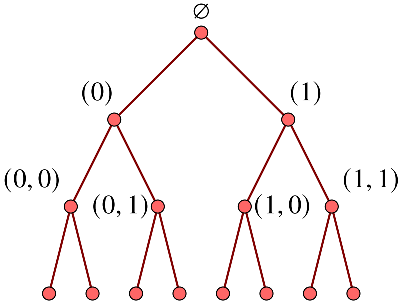
$\mathscr{A}$ es *casi-disjunta* si $A \cap B$ es finito para cualesquiera $A, B \in \mathscr{A}$ distintos.

Compactos generados por familias casi-disjuntas

Sea $\mathscr{A}$ una familia de subconjuntos infinitos de $\mathbb{N}$.

Definición

$\mathscr{A}$ es *casi-disjunta* si $A \cap B$ es finito para cualesquiera $A, B \in \mathscr{A}$ distintos.



Compactos de Alexandroff-Urysohn (1926):

Compactos de Alexandroff-Urysohn (1926):

$$K_{\mathscr{A}} = \mathbb{N} \cup \{p_A : A \in \mathscr{A}\} \cup \{\infty\}$$

Compactos de Alexandroff-Urysohn (1926):

$$K_{\mathscr{A}} = \mathbb{N} \cup \{p_A : A \in \mathscr{A}\} \cup \{\infty\}$$

donde

- Los puntos de $\mathbb{N}$ son aislados.

Compactos de Alexandroff-Urysohn (1926):

$$K_{\mathscr{A}} = \mathbb{N} \cup \{p_A : A \in \mathscr{A}\} \cup \{\infty\}$$

donde

- Los puntos de $\mathbb{N}$ son aislados.
- Entorno básico de p_A:

$$\{p_A\} \cup (A \setminus F)$$

  donde F es un conjunto finito de $\mathbb{N}$.

Compactos de Alexandroff-Urysohn (1926):

$$K_{\mathscr{A}} = \mathbb{N} \cup \{p_A : A \in \mathscr{A}\} \cup \{\infty\}$$

donde

- Los puntos de $\mathbb{N}$ son aislados.
- Entorno básico de p_A:

$$\{p_A\} \cup (A \setminus F)$$

  donde F es un conjunto finito de $\mathbb{N}$.

☞ *Convergencia de sucesiones en* $K_{\mathscr{A}}$:

Compactos de Alexandroff-Urysohn (1926):

$$K_{\mathscr{A}} = \mathbb{N} \cup \{p_A : A \in \mathscr{A}\} \cup \{\infty\}$$

donde

- Los puntos de $\mathbb{N}$ son aislados.
- Entorno básico de p_A:

$$\{p_A\} \cup (A \setminus F)$$

  donde F es un conjunto finito de $\mathbb{N}$.

☞ *Convergencia de sucesiones en* $K_{\mathscr{A}}$:

- Sea $A \in \mathscr{A}$, $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Entonces $a_n \to p_A$.

Compactos de Alexandroff-Urysohn (1926):

$$K_{\mathscr{A}} = \mathbb{N} \cup \{p_A : A \in \mathscr{A}\} \cup \{\infty\}$$

donde

- Los puntos de $\mathbb{N}$ son aislados.
- Entorno básico de p_A:

$$\{p_A\} \cup (A \setminus F)$$

  donde F es un conjunto finito de $\mathbb{N}$.

☞ *Convergencia de sucesiones en* $K_{\mathscr{A}}$:

- Sea $A \in \mathscr{A}$, $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Entonces $a_n \longrightarrow p_A$.
- Si $A_n \in \mathscr{A}$, entonces $p_{A_n} \longrightarrow \infty$.

- $\{p_A : A \in \mathscr{A}\} \cup \{\infty\} \simeq \alpha\mathscr{A}.$

- $\{p_A : A \in \mathscr{A}\} \cup \{\infty\} \simeq \alpha\mathscr{A}$.
- A partir de $\iota : \alpha\mathscr{A} \to K_{\mathscr{A}}$ obtenemos:

$$0 \longrightarrow \cdot \longrightarrow C(K_{\mathscr{A}}) \xrightarrow{\iota^\circ} c(\mathscr{A}) \longrightarrow 0$$

- $\{p_A : A \in \mathscr{A}\} \cup \{\infty\} \simeq \alpha\mathscr{A}$.
- A partir de $\iota : \alpha\mathscr{A} \to K_{\mathscr{A}}$ obtenemos:

$$0 \longrightarrow \cdot \longrightarrow C(K_{\mathscr{A}}) \xrightarrow{\iota^\circ} c(\mathscr{A}) \longrightarrow 0$$

- *¿Y el subespacio?*

$$\ker \iota^\circ = \{f \in C(K_{\mathscr{A}}) : f|_{\{p_A : A \in \mathscr{A}\} \cup \{\infty\}} = 0\} = C_0(\mathbb{N})$$

- $\{p_A : A \in \mathscr{A}\} \cup \{\infty\} \simeq \alpha\mathscr{A}$.
- A partir de $\iota : \alpha\mathscr{A} \to K_{\mathscr{A}}$ obtenemos:

$$0 \longrightarrow \cdot \longrightarrow C(K_{\mathscr{A}}) \xrightarrow{\iota^\circ} c(\mathscr{A}) \longrightarrow 0$$

- *¿Y el subespacio?*

$$\ker \iota^\circ = \{f \in C(K_{\mathscr{A}}) : f|_{\{p_A : A \in \mathscr{A}\} \cup \{\infty\}} = 0\} = C_0(\mathbb{N})$$

Proposición

Si $\mathscr{A}$ es no numerable, existe una sucesión exacta no trivial:

$$0 \longrightarrow c_0 \longrightarrow C(K_{\mathscr{A}}) \xrightarrow{\iota^\circ} c(\mathscr{A}) \longrightarrow 0$$

- $\{p_A : A \in \mathscr{A}\} \cup \{\infty\} \simeq \alpha\mathscr{A}$.
- A partir de $\iota : \alpha\mathscr{A} \to K_{\mathscr{A}}$ obtenemos:

$$0 \longrightarrow \cdot \longrightarrow C(K_{\mathscr{A}}) \xrightarrow{\iota^\circ} c(\mathscr{A}) \longrightarrow 0$$

- *¿Y el subespacio?*

$$\ker \iota^\circ = \{f \in C(K_{\mathscr{A}}) : f|_{\{p_A : A \in \mathscr{A}\} \cup \{\infty\}} = 0\} = C_0(\mathbb{N})$$

Proposición

Si $\mathscr{A}$ es no numerable, existe una sucesión exacta no trivial:

$$0 \longrightarrow c_0 \longrightarrow C(K_{\mathscr{A}}) \xrightarrow{\iota^\circ} c(\mathscr{A}) \longrightarrow 0$$

Demostración: $C(K_{\mathscr{A}})$ es subespacio de ℓ_∞, pero $c_0 \times c(\mathscr{A})$ no. □

¿Cómo es un subespacio complementado de un $C(K)$?

¿Cómo es un subespacio complementado de un $C(K)$?

$$X \text{ complementado en } c_0(I) \quad \Rightarrow \quad X \simeq c_0(J)$$

(Granero)

¿Cómo es un subespacio complementado de un $C(K)$?

X complementado en $c_0(I)$ $\quad\Rightarrow\quad$ $X \simeq c_0(J)$
(Granero)

X complementado en ℓ_∞ $\quad\Rightarrow\quad$ $X \simeq \ell_\infty$
(Lindenstrauss)

¿Cómo es un subespacio complementado de un $C(K)$?

X complementado en $c_0(I)$ $\Rightarrow$ $X \simeq c_0(J)$
(Granero)

X complementado en ℓ_∞ $\Rightarrow$ $X \simeq \ell_\infty$
(Lindenstrauss)

X complementado en $C(\omega^\omega)$ $\Rightarrow$ $\left\{ \begin{matrix} X \simeq c_0 \\ X \simeq C(\omega^\omega) \end{matrix} \right\}$
(Benyamini)

¿Cómo es un subespacio complementado de un $C(K)$?

X complementado en $c_0(I)$ $\Rightarrow$ $X \simeq c_0(J)$
(Granero)

X complementado en ℓ_∞ $\Rightarrow$ $X \simeq \ell_\infty$
(Lindenstrauss)

X complementado en $C(\omega^\omega)$ $\Rightarrow$ $\left\{ \begin{matrix} X \simeq c_0 \\ X \simeq C(\omega^\omega) \end{matrix} \right\}$
(Benyamini)

X complementado en $C[0,1]$
X^* no separable $\Rightarrow$ $X \simeq C[0,1]$
(Rosenthal)

¿Todo subespacio complementado de un $C(K)$ es un $C(K)$?

¿Todo subespacio complementado de un $C(K)$ es un $C(K)$?

Teorema (Plebanek, S-A.)

Existen dos familias casi disjuntas $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ y una aplicación cociente $\pi : K_{\mathscr{B}} \to K_{\mathscr{A}}$ tal que

$$C(K_{\mathscr{B}}) \simeq \pi^{\circ}[C(K_{\mathscr{A}})] \times Z$$

y Z no es isomorfo a un $C(K)$.

¿Cómo reconocer un $C(K)$?

¿Cómo reconocer un $C(K)$?

Sea X un espacio de Banach y $F \subseteq B_{X^*}$ débil-* compacto.

¿Cómo reconocer un $C(K)$?

Sea X un espacio de Banach y $F \subseteq B_{X^*}$ débil-* compacto.

$$T : X \to C(F) \quad , \quad Tx(x^*) = \langle x^*, x \rangle$$

¿Cómo reconocer un $C(K)$?

Sea X un espacio de Banach y $F \subseteq B_{X^*}$ débil-* compacto.

$$T : X \longrightarrow C(F) \quad , \quad Tx(x^*) = \langle x^*, x \rangle$$

Diremos que F es

¿Cómo reconocer un $C(K)$?

Sea X un espacio de Banach y $F \subseteq B_{X^*}$ débil-* compacto.

$$T : X \longrightarrow C(F) \quad , \quad Tx(x^*) = \langle x^*, x \rangle$$

Diremos que F es

- *c-normante* $(0 < c \leq 1)$ si T es inyectivo, tiene imagen cerrada y $\|T^{-1}\| \leq \frac{1}{c}$.

¿Cómo reconocer un $C(K)$?

Sea X un espacio de Banach y $F \subseteq B_{X^*}$ débil-* compacto.

$$T : X \longrightarrow C(F) \quad , \quad Tx(x^*) = \langle x^*, x\rangle$$

Diremos que F es

- *c-normante* $(0 < c \leq 1)$ si T es inyectivo, tiene imagen cerrada y $\|T^{-1}\| \leq \frac{1}{c}$.
- *libre* si T es epiyectivo.

¿Cómo reconocer un $C(K)$?

Sea X un espacio de Banach y $F \subseteq B_{X^*}$ débil-* compacto.

$$T : X \longrightarrow C(F) \quad , \quad Tx(x^*) = \langle x^*, x \rangle$$

Diremos que F es

- *c-normante* ($0 < c \leq 1$) si T es inyectivo, tiene imagen cerrada y $\|T^{-1}\| \leq \frac{1}{c}$.
- *libre* si T es epiyectivo.

Proposición

Un espacio de Banach X es isomorfo a un $C(K)$ si, y solo si, existe un subconjunto $F \subseteq B_{X^*}$ c-normante y libre.

¿Cómo reconocer un subespacio complementado?

¿Cómo reconocer un subespacio complementado?

Sea $\pi : L \to K$ una aplicación cociente.

$$0 \longrightarrow C(K) \xrightarrow{\pi^\circ} C(L) \longrightarrow Z \longrightarrow 0$$

¿Cómo reconocer un subespacio complementado?

Sea $\pi : L \to K$ una aplicación cociente.

$$0 \longrightarrow C(K) \xrightarrow{\pi^\circ} C(L) \longrightarrow Z \longrightarrow 0$$

Proposición (Pełczyńszki)

Son equivalentes:

¿Cómo reconocer un subespacio complementado?

Sea $\pi : L \to K$ una aplicación cociente.

$$0 \longrightarrow C(K) \xrightarrow{\pi^\circ} C(L) \longrightarrow Z \longrightarrow 0$$

Proposición (Pełczyńszki)

Son equivalentes:

1. Existe una proyección $P : C(L) \to C(K)$ para π° tal que $\|P\| \leq \lambda$.

¿Cómo reconocer un subespacio complementado?

Sea $\pi : L \to K$ una aplicación cociente.

$$0 \longrightarrow C(K) \xrightarrow{\pi^\circ} C(L) \longrightarrow Z \longrightarrow 0$$

Proposición (Pełczyńszki)

Son equivalentes:

1. Existe una proyección $P : C(L) \to C(K)$ para π° tal que $\|P\| \leq \lambda$.
2. Existe una aplicación continua $\varphi : K \to (\lambda \cdot B_{M(L)}, w^*)$ tal que
   - $\operatorname{supp} \varphi(t) \subseteq \pi^{-1}(t)$.
   - $\varphi(t)[\pi^{-1}(t)] = 1$.

Ser o no ser (un $C(K)$)

Ser o no ser (un $C(K)$)

- Existe una construcción

$$C(L) = C(K) \times Z$$

donde Z no es un $C(K)$.

Ser o no ser (un $C(K)$)

- Existe una construcción

$$C(L) = C(K) \times Z$$

donde Z no es un $C(K)$.
- En la misma línea:

$$0 \longrightarrow c_0 \longrightarrow X \longrightarrow c_0(\mathfrak{c}) \longrightarrow 0$$

de manera que X no es un $C(K)$.

Ser o no ser (un $C(K)$)

- Existe una construcción

$$C(L) = C(K) \times Z$$

donde Z no es un $C(K)$.

- En la misma línea:

$$0 \longrightarrow c_0 \longrightarrow X \longrightarrow c_0(\mathfrak{c}) \longrightarrow 0$$

de manera que X no es un $C(K)$.

☞ ¿Es Q un $C(K)$?

$$0 \longrightarrow C[0,1] \longrightarrow L_\infty[0,1] \longrightarrow Q \longrightarrow 0$$

Muchas gracias
por vuestra atención