Cómo hacer cosas a pedazos en espacios de Banach

David Cabezas Berrido, Miguel Herreros Gaona, David Muñoz Lahoz, Maria Torras Pérez, Javier Villar Ortega

Dirigido por Ricardo García

XI Escuela-Taller de Análisis Funcional Bernardo Cascales

Taller 1

La Laguna. 10 de marzo de 2022

Índice

1. Introducción
2. Finita representación
3. Local Complementación
4. Espacios $\mathcal{L}_p$

Índice

1. Introducción

2. Finita representación

3. Local Complementación

4. Espacios $\mathcal{L}_p$

Los pedazos: espacios de dimensión finita

$$\ell_p^n = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p) \text{ con } 1 \leq p \leq \infty$$

- Todas las normas en un espacio de dimensión finita son equivalentes.
- Todo espacio normado de dimensión finita es un espacio de Banach.
- Todas las aplicaciones lineales son contínuas en un espacio de dimensión finita.
- Un espacio normado es de dimensión finita **(una propiedad algebraica)** si y solo si su bola unidad es compacta **(una propiedad topológica)**.

Introducción

Los pedazos: espacios de dimensión finita

$$\ell_p^n = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p) \text{ con } 1 \leq p \leq \infty$$

- Todas las normas en un espacio de dimensión finita son equivalentes.
- Todo espacio normado de dimensión finita es un espacio de Banach.
- Todas las aplicaciones lineales son contínuas en un espacio de dimensión finita.
- Un espacio normado es de dimensión finita **(una propiedad algebraica)** si y solo si su bola unidad es compacta **(una propiedad topológica)**.

Los mayores: espacios clásicos de dimensión infinita.

- Espacios de sucesiones: ℓ_1, ℓ_p, c_0, ℓ_∞.
- Espacios de funciones: L_1, L_p, $C(K)$, L_∞.
- Otros: X, X^*, X^{**}.

Introducción

Nuestro objetivo será estudiar algunas propiedades globales de los espacios de Banach que se deducen de sus subespacios de dimensión finita, o que no.

Pregunta: Si dos espacios tienen los "mismos" subespacios de dimensión finita, ¿que relación hay entre ellos? ¿Una propiedad pasa de uno a otro?

Introducción

Nuestro objetivo será estudiar algunas propiedades globales de los espacios de Banach que se deducen de sus subespacios de dimensión finita, o que no.

Pregunta: Si dos espacios tienen los "mismos" subespacios de dimensión finita, ¿que relación hay entre ellos? ¿Una propiedad pasa de uno a otro?

Teoría local de espacios de Banach

Según Vitali Milman, la teoría local estudia las propiedades de la estructura de los espacios normados de dimensión finita y su comportamiento asintótico cuando su dimensión tiende a infinito.

Introducción

Nuestro objetivo será estudiar algunas propiedades globales de los espacios de Banach que se deducen de sus subespacios de dimensión finita, o que no.

Pregunta: Si dos espacios tienen los "mismos" subespacios de dimensión finita, ¿que relación hay entre ellos? ¿Una propiedad pasa de uno a otro?

Teoría local de espacios de Banach

Según Vitali Milman, la teoría local estudia las propiedades de la estructura de los espacios normados de dimensión finita y su comportamiento asintótico cuando su dimensión tiende a infinito.

Primer ejemplo

Para $1 \leq p < \infty$, tenemos $\ell_p = \overline{\bigcup_n \ell_p^n}$. Si $X = \overline{\bigcup_n \ell_p^n}$, ¿qué podemos decir de X?

Índice

1. Introducción
2. Finita representación
3. Local Complementación
4. Espacios $\mathcal{L}_p$

Finita representación: definiciones

Distancia de Banach-Mazur

Sean X e Y dos espacios normados isomorfos. Definimos su *distancia de Banach-Mazur* como

$$d(X,Y) = \text{ínf}\{\, \|T\|\|T^{-1}\| \mid T : X \to Y \text{ isomorfismo}\,\}.$$

Finita representación: definiciones

Distancia de Banach-Mazur

Sean X e Y dos espacios normados isomorfos. Definimos su *distancia de Banach-Mazur* como

$$d(X,Y) = \text{ínf}\{\, \|T\|\|T^{-1}\| \mid T : X \to Y \text{ isomorfismo}\,\}.$$

Finita representación

Se dice que X *es finitamente representable en* Y si para cada $\varepsilon > 0$ y cada subespacio $E \in F(X)$ existe un subespacio $F \in F(Y)$ tal que $d(E,F) < 1 + \varepsilon$.

Finita representación: resultados

Todo espacio de Banach X es finitamente representable en c_0.

Sea $0 < \varepsilon < 1$ y sea E un subespacio de X de dimensión finita. Elejimos un recubrimiento de B_{E^*} con bolas de tamaño $\nu > 0$ con $1/(1-\nu) < 1+\varepsilon$:

$$B_{E^*} \subseteq \bigcup_{j=1}^{N} B(e_j^*, \nu).$$

Vemos $\ell_\infty^N \subset c_0$ y definimos

$$\begin{array}{rccc} T: & E & \longrightarrow & \ell_\infty^N \\ & x & \longmapsto & (e_j^*(x))_{j=1}^N, \end{array}$$

Se ve fácilmente que $\|T\| \leq 1$, y escogiendo para cada $x \in E$ un funcional $x^* \in B_{E^*}$ con $x^*(x) = \|x\|$ deducimos

$$(1-\nu)\|x\| \leq \|Tx\| \implies \|T^{-1}\| \leq 1+\varepsilon.$$

Finita representación: resultados

Todo espacio de Banach X es finitamente representable en c_0.

Sea $0 < \varepsilon < 1$ y sea E un subespacio de X de dimensión finita. Elejimos un recubrimiento de B_{E^*} con bolas de tamaño $\nu > 0$ con $1/(1-\nu) < 1+\varepsilon$:

$$B_{E^*} \subseteq \bigcup_{j=1}^{N} B(e_j^*, \nu).$$

Vemos $\ell_\infty^N \subset c_0$ y definimos

$$\begin{array}{rccc} T: & E & \longrightarrow & \ell_\infty^N \\ & x & \longmapsto & (e_j^*(x))_{j=1}^N, \end{array}$$

Se ve fácilmente que $\|T\| \leq 1$, y escogiendo para cada $x \in E$ un funcional $x^* \in B_{E^*}$ con $x^*(x) = \|x\|$ deducimos

$$(1-\nu)\|x\| \leq \|Tx\| \implies \|T^{-1}\| \leq 1+\varepsilon.$$

La finita representabilidad no implica inclusión.

Finita representación: resultados

L_p es finitamente representable en ℓ_p para $1 \leq p < \infty$.

Para cada p tomamos E_n como el subespacio de L_p generado por las funciones características $\chi_{((k-1)/2^n, k/2^n)}$ para $1 \leq k \leq 2^n$. Entonces la unión $\cup_{n=1}^{\infty} E_n$ es densa en L_p y cada E_n es isométrico a un subespacio de ℓ_p.

Finita representación: resultados

L_p es finitamente representable en ℓ_p para $1 \leq p < \infty$.

Para cada p tomamos E_n como el subespacio de L_p generado por las funciones características $\chi_{((k-1)/2^n, k/2^n)}$ para $1 \leq k \leq 2^n$. Entonces la unión $\cup_{n=1}^{\infty} E_n$ es densa en L_p y cada E_n es isométrico a un subespacio de ℓ_p.

Teorema de Dvoretzky

ℓ_2 es finitamente representable en cualquier espacio de dimensión infinita.

Se tenía la idea de que los espacios de dimensión grande eran modelizados por espacios de dimensión infinita. El teorema de Dvoretzky dio la confirmación concluyente de que este hecho era rotundamente falso.

Jesús Bastero Eleizalde

Filtros: definición y ejemplos

Objetivo

Sean X e Y espacios de Banach de dimensión infinita. Entonces Y es finitamente representable en X si y solo si existe un ultraproducto $X_{\mathcal{U}}$ tal que Y es isométrico a un subespacio de $X_{\mathcal{U}}$.

Filtros: definición y ejemplos

Objetivo

Sean X e Y espacios de Banach de dimensión infinita. Entonces Y es finitamente representable en X si y solo si existe un ultraproducto $X_{\mathcal{U}}$ tal que Y es isométrico a un subespacio de $X_{\mathcal{U}}$.

Definición

Sea $\mathcal{I}$ un conjunto infinito. Un filtro en $\mathcal{I}$ es una familia de subconjuntos $\mathcal{F}$ de $\mathcal{I}$ tal que

Filtros: definición y ejemplos

Objetivo

Sean X e Y espacios de Banach de dimensión infinita. Entonces Y es finitamente representable en X si y solo si existe un ultraproducto $X_{\mathcal{U}}$ tal que Y es isométrico a un subespacio de $X_{\mathcal{U}}$.

Definición

Sea $\mathcal{I}$ un conjunto infinito. Un filtro en $\mathcal{I}$ es una familia de subconjuntos $\mathcal{F}$ de $\mathcal{I}$ tal que

- $\emptyset \notin \mathcal{F}$.

Filtros: definición y ejemplos

Objetivo

Sean X e Y espacios de Banach de dimensión infinita. Entonces Y es finitamente representable en X si y solo si existe un ultraproducto $X_{\mathcal{U}}$ tal que Y es isométrico a un subespacio de $X_{\mathcal{U}}$.

Definición

Sea $\mathcal{I}$ un conjunto infinito. Un filtro en $\mathcal{I}$ es una familia de subconjuntos $\mathcal{F}$ de $\mathcal{I}$ tal que

- $\emptyset \notin \mathcal{F}$.
- *Si $A \subseteq B$ y $A \in \mathcal{F}$ entonces $B \in \mathcal{F}$.*

Filtros: definición y ejemplos

Objetivo

Sean X e Y espacios de Banach de dimensión infinita. Entonces Y es finitamente representable en X si y solo si existe un ultraproducto $X_{\mathcal{U}}$ tal que Y es isométrico a un subespacio de $X_{\mathcal{U}}$.

Definición

Sea $\mathcal{I}$ un conjunto infinito. Un filtro en $\mathcal{I}$ es una familia de subconjuntos $\mathcal{F}$ de $\mathcal{I}$ tal que

- $\emptyset \notin \mathcal{F}$.
- *Si* $A \subseteq B$ *y* $A \in \mathcal{F}$ *entonces* $B \in \mathcal{F}$.
- *Si* $A, B \in \mathcal{F}$ *entonces* $A \cap B \in \mathcal{F}$.

Filtros: definición y ejemplos

Objetivo

Sean X e Y espacios de Banach de dimensión infinita. Entonces Y es finitamente representable en X si y solo si existe un ultraproducto $X_{\mathcal{U}}$ tal que Y es isométrico a un subespacio de $X_{\mathcal{U}}$.

Definición

Sea $\mathcal{I}$ un conjunto infinito. Un filtro en $\mathcal{I}$ es una familia de subconjuntos $\mathcal{F}$ de $\mathcal{I}$ tal que

- $\emptyset \notin \mathcal{F}$.
- *Si* $A \subseteq B$ *y* $A \in \mathcal{F}$ *entonces* $B \in \mathcal{F}$.
- *Si* $A, B \in \mathcal{F}$ *entonces* $A \cap B \in \mathcal{F}$.

Definición

Una función $f : \mathcal{I} \to \mathbb{R}$ se dice que converge a ξ a través de $\mathcal{F}$, y se escribe $\lim_{\mathcal{F}} f(x) = \xi$, si para todo entorno U de ξ se verifica que $f^{-1}(U) \in \mathcal{F}$.

Ejemplo

Consideremos el filtro

$$\mathcal{F}_\infty = \{\, A \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mid [n, \infty) \subseteq A \text{ para un cierto } n \geq 1 \,\}.$$

Entonces $\lim_{\mathcal{F}_\infty} \xi_n = \xi$ si y solo si $\lim_{n\to\infty} \xi_n = \xi$ en el sentido usual.

Ejemplo

Consideremos el filtro

$$\mathcal{F}_\infty = \{ A \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mid [n, \infty) \subseteq A \text{ para un cierto } n \geq 1 \}.$$

Entonces $\lim_{\mathcal{F}_\infty} \xi_n = \xi$ si y solo si $\lim_{n\to\infty} \xi_n = \xi$ en el sentido usual.

Definición

Un ultrafiltro $\mathcal{U}$ es un filtro maximal con respecto a la inclusión.

Ejemplo

Consideremos el filtro

$$\mathcal{F}_\infty = \{\, A \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mid [n, \infty) \subseteq A \text{ para un cierto } n \geq 1 \,\}.$$

Entonces $\text{lím}_{\mathcal{F}_\infty} \xi_n = \xi$ si y solo si $\text{lím}_{n\to\infty} \xi_n = \xi$ en el sentido usual.

Definición

Un ultrafiltro $\mathcal{U}$ es un filtro maximal con respecto a la inclusión.

- Toda $f : \mathcal{I} \to \mathbb{R}$ acotada converge con respecto a un ultrafiltro.

Ultrafiltros

Ejemplo

Consideremos el filtro

$$\mathcal{F}_\infty = \{\, A \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mid [n, \infty) \subseteq A \text{ para un cierto } n \geq 1 \,\}.$$

Entonces $\lim_{\mathcal{F}_\infty} \xi_n = \xi$ si y solo si $\lim_{n\to\infty} \xi_n = \xi$ en el sentido usual.

Definición

Un ultrafiltro $\mathcal{U}$ es un filtro maximal con respecto a la inclusión.

- Toda $f : \mathcal{I} \to \mathbb{R}$ acotada converge con respecto a un ultrafiltro.
- Los ultrafiltros de $\mathbb{N}$ que contienen $\mathcal{F}_\infty$ se llaman *ultrafiltros no principales*.

Definición de ultraproducto

Definición

Sea X un espacio de Banach infinito y sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro. Consideremos en el espacio $\ell_\infty(X)$ la seminorma definida por

$$\|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_{\mathcal{U}} = \lim_{\mathcal{U}} \|x_n\|.$$

Tomemos el subespacio $c_{0,\mathcal{U}}(X)$ de $\ell_\infty(X)$ formado por las sucesiones $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ tales que $\lim_{\mathcal{U}} \|x_n\| = 0$. Entonces es claro que $\|\cdot\|_{\mathcal{U}}$ induce una norma en el cociente

$$X_{\mathcal{U}} = \ell_\infty(X)/c_{0,\mathcal{U}}(X).$$

$X_{\mathcal{U}}$ se conoce como el ultraproducto de X.

Definición de ultraproducto

Definición

Sea X un espacio de Banach infinito y sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro. Consideremos en el espacio $\ell_\infty(X)$ la seminorma definida por

$$\|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_{\mathcal{U}} = \lim_{\mathcal{U}} \|x_n\|.$$

Tomemos el subespacio $c_{0,\mathcal{U}}(X)$ de $\ell_\infty(X)$ formado por las sucesiones $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ tales que $\lim_{\mathcal{U}} \|x_n\| = 0$. Entonces es claro que $\|\cdot\|_{\mathcal{U}}$ induce una norma en el cociente

$$X_{\mathcal{U}} = \ell_\infty(X)/c_{0,\mathcal{U}}(X).$$

$X_{\mathcal{U}}$ se conoce como el ultraproducto de X.

Proposición

Sea X un espacio de Banach de dimensión infinita. Entonces cualquier ultraproducto $X_{\mathcal{U}}$ es finitamente representable en X.

Ultraproductos y finita representación

Teorema

Sean X e Y espacios de Banach de dimensión infinita. Entonces Y es finitamente representable en X si y solo si existe un ultraproducto $X_{\mathcal{U}}$ tal que Y es isométrico a un subespacio de $X_{\mathcal{U}}$.

Ultraproductos y finita representación

Teorema

Sean X e Y espacios de Banach de dimensión infinita. Entonces Y es finitamente representable en X si y solo si existe un ultraproducto $X_{\mathcal{U}}$ tal que Y es isométrico a un subespacio de $X_{\mathcal{U}}$.

Supondremos que Y es separable y tomaremos $\mathcal{U}$ un ultrafiltro no principal de $\mathbb{N}$.

Teorema

Sean X e Y espacios de Banach de dimensión infinita. Entonces Y es finitamente representable en X si y solo si existe un ultraproducto $X_{\mathcal{U}}$ tal que Y es isométrico a un subespacio de $X_{\mathcal{U}}$.

Supondremos que Y es separable y tomaremos $\mathcal{U}$ un ultrafiltro no principal de $\mathbb{N}$. Sea $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión creciente de subespacios vectoriales de dimensión finita tal que $E = \cup_{n=1}^{\infty} E_n$ es denso en Y. Existen operadores $T_n : E_n \to X$ tales que

$$(1 - \frac{1}{n})\|e\| \leq \|T_n e\| \leq \|e\|, \text{ con } e \in E,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Definimos entonces la aplicación $L : E \to \ell_\infty(X)$ como $L(y) = \xi$, donde

$$\xi(k) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \notin E_k \\ T_k(y) & \text{si } y \in E_k. \end{cases}$$

Ultraproductos y finita representación

Definimos entonces la aplicación $L : E \to \ell_\infty(X)$ como $L(y) = \xi$, donde

$$\xi(k) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \notin E_k \\ T_k(y) & \text{si } y \in E_k. \end{cases}$$

Notemos que esta aplicación no es lineal en $\ell_\infty(X)$.

Definimos entonces la aplicación $L : E \to \ell_\infty(X)$ como $L(y) = \xi$, donde

$$\xi(k) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \notin E_k \\ T_k(y) & \text{si } y \in E_k. \end{cases}$$

Notemos que esta aplicación no es lineal en $\ell_\infty(X)$. Sin embargo, las sucesiones $L(x+y)$ y $L(x)+L(y)$ son iguales a partir de un cierto índice k_0, para el cual $x, y, x+y \in E_k$ si $k \geq k_0$. Por tanto,

$$L(x+y) - L(x) - L(y) \in c_{00}(X) \subseteq c_{0,\mathcal{U}}(X)$$

y L sí que es lineal en $X_{\mathcal{U}}$.

Definimos entonces la aplicación $L : E \to \ell_\infty(X)$ como $L(y) = \xi$, donde

$$\xi(k) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \notin E_k \\ T_k(y) & \text{si } y \in E_k. \end{cases}$$

Notemos que esta aplicación no es lineal en $\ell_\infty(X)$. Sin embargo, las sucesiones $L(x+y)$ y $L(x) + L(y)$ son iguales a partir de un cierto índice k_0, para el cual $x, y, x+y \in E_k$ si $k \geq k_0$. Por tanto,

$$L(x+y) - L(x) - L(y) \in c_{00}(X) \subseteq c_{0,\mathcal{U}}(X)$$

y L sí que es lineal en $X_\mathcal{U}$. Por último, tomemos $y \in E$ y $\xi = L(y)$, entonces $\xi(k) = T_k(y)$ para todo $k \geq k_0$, lo cual implica que

$$\|Ty\|_\mathcal{U} = \lim_{\mathcal{U}} \|\xi(k)\| = \|y\|$$

por cómo hemos escogido las T_k. $\square$

Principio de Reflexividad Local

Teorema (Principio de Reflexividad Local)

Sea X un espacio de Banach. Para cada subespacio $F \in F(X^{**})$ y dado $\varepsilon > 0$ existe un subespacio $E \in F(X)$ conteniendo a $F \cap X$ con $\dim E = \dim F$ y un isomorfismo $T : F \to E$ con $\|T\|\|T^{-1}\| \leq 1 + \varepsilon$ tal que

$$T(x) = x \quad \forall x \in F \cap X.$$

En particular X^{**} es finitamente representable en X.

Índice

1 Introducción

2 Finita representación

3 Local Complementación

4 Espacios $\mathcal{L}_p$

Local Complementación

X espacio de Banach, $Y \subset X$ subespacio cerrado.

Local Complementación

X espacio de Banach, $Y \subset X$ subespacio cerrado.

Y complementado en X

Existe un retracto (proyección) lineal y continuo

$$r : X \to Y,\ r(x) = x \quad \forall x \in Y.$$

Local Complementación

X espacio de Banach, $Y \subset X$ subespacio cerrado.

Y complementado en X

Existe un retracto (proyección) lineal y continuo

$$r : X \to Y, \; r(x) = x \;\; \forall x \in Y.$$

Y localmente complementado en X

Existen secciones locales uniformemente acotadas.

Local Complementación

X espacio de Banach, $Y \subset X$ subespacio cerrado.

Y complementado en X

Existe un retracto (proyección) lineal y continuo

$$r : X \to Y, \; r(x) = x \;\; \forall x \in Y.$$

Y localmente complementado en X

Existen secciones locales uniformemente acotadas.

Existe $\lambda > 0$ tal que para todo $E \in F(X)$ hay un retracto lineal y continuo

$$r_E : E \to Y, \; r_E(x) = x \;\; \forall x \in E \cap Y \text{ y } \|r_E\| \leq \lambda.$$

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, hook] & X \\
& E \arrow[u, hook] \arrow[ul, "r_E"]
\end{tikzcd}$$

Local complementación y propiedades globales

Teorema. "Locally complemented subspaces and $\mathcal{L}_p$-spaces", N.J. Kalton (1984)

X espacio de Banach, $Y \overset{i}{\hookrightarrow} X$ subespacio cerrado. Equivalen:

1. Y localmente complementado en X.
2. Existe un operador de extensión lineal y continuo $L : Y^* \to X^*$ tal que $L(y^*)(x) = y^*(x)$ para cada $y^* \in Y^*$, $x \in Y$. Dicho de otro modo, $i^* \circ L = \mathrm{Id}_{Y^*}$.
3. Y^{**} está complementado en X^{**}.
4. Y posee la propiedad de extensión de compactos (CEP): Existe una constante $\lambda > 0$ tal que todo operador compacto $k : Y \to W$ admite una extensión compacta $K : X \to W$ satisfaciendo $\|K\| \leq \lambda \|k\|$.

Argumento de compacidad de Lindenstrauss

Argumento de compacidad de Lindenstrauss

$I = F(X)$ ordenados por inclusión.

Argumento de compacidad de Lindenstrauss

$I = F(X)$ ordenados por inclusión.

$\forall E \in I, \exists r_E : E \to Y : r_E(y) = y \ \forall y \in E \cap Y$ y $\|r_E\| \leq \lambda$

Argumento de compacidad de Lindenstrauss

$I = F(X)$ ordenados por inclusión.

$\forall E \in I$, $\exists r_E : E \to Y : r_E(y) = y \ \forall y \in E \cap Y$ y $\|r_E\| \leq \lambda$

Consideramos el operador $L_E : Y^* \to X^*$ dado por

$$L_E(y^*)(x) = \begin{cases} y^* \circ r_E(x), & x \in E \\ 0, & x \notin E. \end{cases}$$

Argumento de compacidad de Lindenstrauss

$I = F(X)$ ordenados por inclusión.

$\forall E \in I$, $\exists r_E : E \to Y : r_E(y) = y \ \forall y \in E \cap Y$ y $\|r_E\| \leq \lambda$

Consideramos el operador $L_E : Y^* \to X^*$ dado por

$$L_E(y^*)(x) = \begin{cases} y^* \circ r_E(x), & x \in E \\ 0, & x \notin E. \end{cases}$$

$\forall x \in X$, $\exists E_0 \in I : E_0 \subset E \in I \Rightarrow L_E(y^*)(x) = y^* \circ r_E(x) \ \forall y^* \in Y^*$

Argumento de compacidad de Lindenstrauss

$I = F(X)$ ordenados por inclusión.

$\forall E \in I, \exists r_E : E \to Y : r_E(y) = y \ \forall y \in E \cap Y$ y $\|r_E\| \leq \lambda$

$\forall x \in X, \exists E_0 \in I : E_0 \subset E \in I \Rightarrow L_E(y^*)(x) = y^* \circ r_E(x) \ \forall y^* \in Y^*$

$\exists L : Y^* \to X^*, \ L_E(y^*)(x) \to L(y^*)(x) \quad \forall x \in X, \ y^* \in Y^*$

Argumento de compacidad de Lindenstrauss

$I = F(X)$ ordenados por inclusión.

$\forall E \in I$, $\exists r_E : E \to Y : r_E(y) = y \ \forall y \in E \cap Y$ y $\|r_E\| \leq \lambda$

$\forall x \in X$, $\exists E_0 \in I : E_0 \subset E \in I \Rightarrow L_E(y^*)(x) = y^* \circ r_E(x) \ \forall y^* \in Y^*$

$\exists L : Y^* \to X^*$, $L_E(y^*)(x) \to L(y^*)(x) \ \ \forall x \in X$, $y^* \in Y^*$

$$\|L_E(y^*)\| \leq \lambda \|y^*\| \Longrightarrow (L_E)_{E \in I} \subset \mathcal{P} := \prod_{y^* \in Y^*} B_{X^*}(0, \lambda\|y^*\|)$$

Argumento de compacidad de Lindenstrauss

$I = F(X)$ ordenados por inclusión.

$\forall E \in I$, $\exists r_E : E \to Y : r_E(y) = y \ \forall y \in E \cap Y$ y $\|r_E\| \leq \lambda$

$\forall x \in X$, $\exists E_0 \in I : E_0 \subset E \in I \Rightarrow L_E(y^*)(x) = y^* \circ r_E(x) \ \forall y^* \in Y^*$

$\exists L : Y^* \to X^*$, $L_E(y^*)(x) \to L(y^*)(x) \ \ \forall x \in X$, $y^* \in Y^*$

$$\|L_E(y^*)\| \leq \lambda \|y^*\| \Longrightarrow (L_E)_{E \in I} \subset \mathcal{P} := \prod_{y^* \in Y^*} B_{X^*}(0, \lambda \|y^*\|)$$

$\mathcal{P}$ es compacto (Tª Tychonoff), luego $(L_E)_{E \in I}$ admite una subred convergente. Podemos suponer $L_E \to L \in \mathcal{P}$.

Argumento de compacidad de Lindenstrauss

$I = F(X)$ ordenados por inclusión.

$\forall E \in I$, $\exists r_E : E \to Y : r_E(y) = y \ \forall y \in E \cap Y$ y $\|r_E\| \leq \lambda$

$\forall x \in X$, $\exists E_0 \in I : E_0 \subset E \in I \Rightarrow L_E(y^*)(x) = y^* \circ r_E(x) \ \forall y^* \in Y^*$

$\exists L : Y^* \to X^*$, $L_E(y^*)(x) \to L(y^*)(x) \ \ \forall x \in X$, $y^* \in Y^*$

L lineal

Para $a \in \mathbb{K}$, $y^*, z^* \in Y^*$ y $x \in X$ existe $E_0 \in I$ tal que si $E \supset E_0$,

$$L_E(y^*)(x) = y^* \circ r_E(x), \ L_E(z^*)(x) = z^* \circ r_E(x),$$
$$L_E(ay^* + z^*)(x) = (ay^* + z^*) \circ r_E(x).$$

Argumento de compacidad de Lindenstrauss

$I = F(X)$ ordenados por inclusión.

$\forall E \in I$, $\exists r_E : E \to Y : r_E(y) = y \ \forall y \in E \cap Y$ y $\|r_E\| \leq \lambda$

$\forall x \in X$, $\exists E_0 \in I : E_0 \subset E \in I \Rightarrow L_E(y^*)(x) = y^* \circ r_E(x) \ \forall y^* \in Y^*$

$\exists L : Y^* \to X^*$, $L_E(y^*)(x) \to L(y^*)(x) \quad \forall x \in X$, $y^* \in Y^*$

L lineal

Para $a \in \mathbb{K}$, $y^*, z^* \in Y^*$ y $x \in X$ existe $E_0 \in I$ tal que si $E \supset E_0$,

$$L_E(y^*)(x) = y^* \circ r_E(x), \ L_E(z^*)(x) = z^* \circ r_E(x),$$
$$L_E(ay^* + z^*)(x) = (ay^* + z^*) \circ r_E(x).$$

Por tanto, $L_E(ay^* + z^*) = aL_E(y^*) + L_E(z^*)$, y tomando límite obtenemos $L(ay^* + z^*) = aL(y^*) + L(z^*)$.

Argumento de compacidad de Lindenstrauss

$I = F(X)$ ordenados por inclusión.

$\forall E \in I, \exists r_E : E \to Y : r_E(y) = y \ \forall y \in E \cap Y$ y $\|r_E\| \leq \lambda$

$\forall x \in X, \exists E_0 \in I : E_0 \subset E \in I \Rightarrow L_E(y^*)(x) = y^* \circ r_E(x) \ \forall y^* \in Y^*$

$\exists L : Y^* \to X^*, \ L_E(y^*)(x) \to L(y^*)(x) \quad \forall x \in X, \ y^* \in Y^*$

L lineal

$\|L\| \leq \lambda$

$|L_E(y^*)(x)| = |y^* \circ r_E(x)| \leq \lambda \|y^*\| \|x\| \Rightarrow |L(y^*)(x)| \leq \lambda \|y^*\| \|x\|,$

luego $\|L(y^*)\| \leq \lambda \|y^*\|.$

Argumento de compacidad de Lindenstrauss

$I = F(X)$ ordenados por inclusión.

$\forall E \in I, \exists r_E : E \to Y : r_E(y) = y \; \forall y \in E \cap Y$ y $\|r_E\| \leq \lambda$

$\forall x \in X, \exists E_0 \in I : E_0 \subset E \in I \Rightarrow L_E(y^*)(x) = y^* \circ r_E(x) \; \forall y^* \in Y^*$

$\exists L : Y^* \to X^*, \; L_E(y^*)(x) \to L(y^*)(x) \quad \forall x \in X, \; y^* \in Y^*$

L lineal

$\|L\| \leq \lambda$

$L(y^*)(y) = y^*(y)$

Argumento de compacidad de Lindenstrauss

$I = F(X)$ ordenados por inclusión.

$\forall E \in I$, $\exists r_E : E \to Y : r_E(y) = y \ \forall y \in E \cap Y$ y $\|r_E\| \leq \lambda$

$\forall x \in X$, $\exists E_0 \in I : E_0 \subset E \in I \Rightarrow L_E(y^*)(x) = y^* \circ r_E(x) \ \forall y^* \in Y^*$

$\exists L : Y^* \to X^*$, $L_E(y^*)(x) \to L(y^*)(x) \quad \forall x \in X,\ y^* \in Y^*$

L lineal

$\|L\| \leq \lambda$

$L(y^*)(y) = y^*(y)$

$y \in Y \Rightarrow r_E(y) = y$, luego

$$L_E(y^*)(y) = y^* \circ r_E(y) = y^*(y),$$

y tomamos límite.

Operador de extensión $\Longrightarrow$ Bidual complementado

Teorema. "Locally complemented subspaces and $\mathcal{L}_p$-spaces", N.J. Kalton (1984)

X espacio de Banach, $Y \overset{i}{\hookrightarrow} X$ subespacio cerrado. Equivalen:

2. Existe un operador de extensión lineal y continuo $L : Y^* \to X^*$ tal que $L(y^*)(x) = y^*(x)$ para cada $y^* \in Y^*$, $x \in Y$. Dicho de otro modo, $i^* \circ L = \mathrm{Id}_{Y^*}$.
3. Y^{**} está complementado en X^{**}.

La traspuesta $L^* : X^{**} \to Y^{**}$ es una proyección lineal. Además, $\|L^*\| = \|L\|$.

Bidual complementado $\Longrightarrow$ Localmente complementado

Teorema. "Locally complemented subspaces and $\mathcal{L}_p$-spaces", N.J. Kalton (1984)

X espacio de Banach, $Y \overset{i}{\hookrightarrow} X$ subespacio cerrado. Equivalen:

1. Y localmente complementado en X.
3. Y^{**} está complementado en X^{**}.

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, hook, "i"] & X \supset E \arrow[d, "J_X"] \\ Y^{**} \arrow[u, "r|_{r'|_E(E)}"] & X^{**} \arrow[l, "r'"'] \end{tikzcd}$$

Componemos la restricción a E de r' con la proyección de $r'|_E(E)$ a Y.

Esta última existe por el PRL.

Localmente complementado $\Longrightarrow$ CEP

Teorema. "Locally complemented subspaces and $\mathcal{L}_p$-spaces", N.J. Kalton (1984)

X espacio de Banach, $Y \overset{i}{\hookrightarrow} X$ subespacio cerrado. Equivalen:

1. Y localmente complementado en X.
4. Y posee la propiedad de extensión de compactos (CEP): Existe una constante $\lambda > 0$ tal que todo operador compacto $k : Y \to W$ admite una extensión compacta $K : X \to W$ satisfaciendo $\|K\| \leq \lambda \|k\|$.

Argumento de compacidad de Lindenstrauss con la red $K_E = k \circ r_E : X \to W$.

Localmente complementado $\Longrightarrow$ CEP

Teorema. "Locally complemented subspaces and $\mathcal{L}_p$-spaces", N.J. Kalton (1984)

X espacio de Banach, $Y \overset{i}{\hookrightarrow} X$ subespacio cerrado. Equivalen:

1. Y localmente complementado en X.
4. Y posee la propiedad de extensión de compactos (CEP): Existe una constante $\lambda > 0$ tal que todo operador compacto $k : Y \to W$ admite una extensión compacta $K : X \to W$ satisfaciendo $\|K\| \leq \lambda \|k\|$.

Argumento de compacidad de Lindenstrauss con la red $K_E = k \circ r_E : X \to W$.

$(K_E)_{E \in F(X)}$ yace en un compacto por la compacidad de k.

Localmente complementado $\Longrightarrow$ CEP

Teorema. "Locally complemented subspaces and $\mathcal{L}_p$-spaces", N.J. Kalton (1984)

X espacio de Banach, $Y \overset{i}{\hookrightarrow} X$ subespacio cerrado. Equivalen:

1. Y localmente complementado en X.
4. Y posee la propiedad de extensión de compactos (CEP): Existe una constante $\lambda > 0$ tal que todo operador compacto $k : Y \to W$ admite una extensión compacta $K : X \to W$ satisfaciendo $\|K\| \leq \lambda \|k\|$.

Argumento de compacidad de Lindenstrauss con la red $K_E = k \circ r_E : X \to W$.

$(K_E)_{E \in F(X)}$ yace en un compacto por la compacidad de k.

Tychonoff proporciona la extensión compacta $K : X \to W$.

CEP $\Longrightarrow$ Operador de extensión

Teorema. "Locally complemented subspaces and $\mathcal{L}_p$-spaces", N.J. Kalton (1984)

X espacio de Banach, $Y \overset{i}{\hookrightarrow} X$ subespacio cerrado. Equivalen:

2. Existe un operador de extensión lineal y continuo $L : Y^* \to X^*$ tal que $L(y^*)(x) = y^*(x)$ para cada $y^* \in Y^*$, $x \in Y$. Dicho de otro modo, $i^* \circ L = \mathrm{Id}_{Y^*}$.
4. Y posee la propiedad de extensión de compactos (CEP): Existe una constante $\lambda > 0$ tal que todo operador compacto $k : Y \to W$ admite una extensión compacta $K : X \to W$ satisfaciendo $\|K\| \leq \lambda \|k\|$.

Argumento de compacidad de Lindenstrauss

Para cada $E \in F(Y^*)$, $i_E^*|_Y : Y \to E^*$ compacto.

CEP $\Longrightarrow$ Operador de extensión

Teorema. "Locally complemented subspaces and $\mathcal{L}_p$-spaces", N.J. Kalton (1984)

X espacio de Banach, $Y \overset{i}{\hookrightarrow} X$ subespacio cerrado. Equivalen:

2. Existe un operador de extensión lineal y continuo $L : Y^* \to X^*$ tal que $L(y^*)(x) = y^*(x)$ para cada $y^* \in Y^*$, $x \in Y$. Dicho de otro modo, $i^* \circ L = \mathrm{Id}_{Y^*}$.
4. Y posee la propiedad de extensión de compactos (CEP): Existe una constante $\lambda > 0$ tal que todo operador compacto $k : Y \to W$ admite una extensión compacta $K : X \to W$ satisfaciendo $\|K\| \leq \lambda \|k\|$.

Argumento de compacidad de Lindenstrauss

Para cada $E \in F(Y^*)$, $i_E^*|_Y : Y \to E^*$ compacto.

$\exists I_E : X \to E^*$ extensión compacta.

CEP $\Longrightarrow$ Operador de extensión

Teorema. "Locally complemented subspaces and $\mathcal{L}_p$-spaces", N.J. Kalton (1984)

X espacio de Banach, $Y \overset{i}{\hookrightarrow} X$ subespacio cerrado. Equivalen:

2. Existe un operador de extensión lineal y continuo $L : Y^* \to X^*$ tal que $L(y^*)(x) = y^*(x)$ para cada $y^* \in Y^*$, $x \in Y$. Dicho de otro modo, $i^* \circ L = \mathrm{Id}_{Y^*}$.
4. Y posee la propiedad de extensión de compactos (CEP): Existe una constante $\lambda > 0$ tal que todo operador compacto $k : Y \to W$ admite una extensión compacta $K : X \to W$ satisfaciendo $\|K\| \leq \lambda \|k\|$.

Argumento de compacidad de Lindenstrauss

Para cada $E \in F(Y^*)$, $i_E^*|_Y : Y \to E^*$ compacto.

$\exists I_E : X \to E^*$ extensión compacta.

Tomamos la red $I_E^* : Y^* \to X^*$ y Tychonoff.

Aplicación: caracterización de espacios de Hilbert

Teorema. "Locally complemented subspaces and $\mathcal{L}_p$-spaces", N.J. Kalton (1984)

X espacio de Banach, $Y \overset{i}{\hookrightarrow} X$ subespacio cerrado. Equivalen:

1. Y localmente complementado en X.
2. Existe un operador de extensión lineal y continuo $L : Y^* \to X^*$ tal que $L(y^*)(x) = y^*(x)$ para cada $y^* \in Y^*$, $x \in Y$. Dicho de otro modo, $i^* \circ L = \mathrm{Id}_{Y^*}$.
3. Y^{**} está complementado en X^{**}.
4. Y posee la propiedad de extensión de compactos (CEP): Existe una constante $\lambda > 0$ tal que todo operador compacto $k : Y \to W$ admite una extensión compacta $K : X \to W$ satisfaciendo $\|K\| \leq \lambda \|k\|$.

Aplicación: caracterización de espacios de Hilbert

Teorema. "Locally complemented subspaces and $\mathcal{L}_p$-spaces", N.J. Kalton (1984)

X espacio de Banach, $Y \overset{i}{\hookrightarrow} X$ subespacio cerrado. Equivalen:

1. Y localmente complementado en X.
2. Existe un operador de extensión lineal y continuo $L : Y^* \to X^*$ tal que $L(y^*)(x) = y^*(x)$ para cada $y^* \in Y^*$, $x \in Y$. Dicho de otro modo, $i^* \circ L = \mathrm{Id}_{Y^*}$.
3. Y^{**} está complementado en X^{**}.
4. Y posee la propiedad de extensión de compactos (CEP): Existe una constante $\lambda > 0$ tal que todo operador compacto $k : Y \to W$ admite una extensión compacta $K : X \to W$ satisfaciendo $\|K\| \leq \lambda \|k\|$.

Teorema. "Local complementation and the extension of bilinear mappings" (2012)

Un espacio de Banach X es de Hilbert si y solo si todo subespacio es localmente complementado en X.

Ejemplos

Teorema. "Locally complemented subspaces and $\mathcal{L}_p$-spaces", N.J. Kalton (1984)

X espacio de Banach, $Y \overset{i}{\hookrightarrow} X$ subespacio cerrado. Equivalen:

1. Y localmente complementado en X.
2. Existe un operador de extensión lineal y continuo $L : Y^* \to X^*$ tal que $L(y^*)(x) = y^*(x)$ para cada $y^* \in Y^*$, $x \in Y$. Dicho de otro modo, $i^* \circ L = \mathrm{Id}_{Y^*}$.
3. Y^{**} está complementado en X^{**}.
4. Y posee la propiedad de extensión de compactos (CEP): Existe una constante $\lambda > 0$ tal que todo operador compacto $k : Y \to W$ admite una extensión compacta $K : X \to W$ satisfaciendo $\|K\| \leq \lambda \|k\|$.

Ejemplos

Teorema. "Locally complemented subspaces and $\mathcal{L}_p$-spaces", N.J. Kalton (1984)

X espacio de Banach, $Y \overset{i}{\hookrightarrow} X$ subespacio cerrado. Equivalen:

1. Y localmente complementado en X.
2. Existe un operador de extensión lineal y continuo $L : Y^* \to X^*$ tal que $L(y^*)(x) = y^*(x)$ para cada $y^* \in Y^*$, $x \in Y$. Dicho de otro modo, $i^* \circ L = \mathrm{Id}_{Y^*}$.
3. Y^{**} está complementado en X^{**}.
4. Y posee la propiedad de extensión de compactos (CEP): Existe una constante $\lambda > 0$ tal que todo operador compacto $k : Y \to W$ admite una extensión compacta $K : X \to W$ satisfaciendo $\|K\| \leq \lambda \|k\|$.

- X en X^{**}.

Ejemplos

Teorema. "Locally complemented subspaces and $\mathcal{L}_p$-spaces", N.J. Kalton (1984)

X espacio de Banach, $Y \overset{i}{\hookrightarrow} X$ subespacio cerrado. Equivalen:

1. Y localmente complementado en X.
2. Existe un operador de extensión lineal y continuo $L : Y^* \to X^*$ tal que $L(y^*)(x) = y^*(x)$ para cada $y^* \in Y^*$, $x \in Y$. Dicho de otro modo, $i^* \circ L = \mathrm{Id}_{Y^*}$.
3. Y^{**} está complementado en X^{**}.
4. Y posee la propiedad de extensión de compactos (CEP): Existe una constante $\lambda > 0$ tal que todo operador compacto $k : Y \to W$ admite una extensión compacta $K : X \to W$ satisfaciendo $\|K\| \leq \lambda \|k\|$.

- X en X^{**}.
- X en cualquier ultrapotencia $X_{\mathcal{U}}$.

Ejemplos

Teorema. "Locally complemented subspaces and $\mathcal{L}_p$-spaces", N.J. Kalton (1984)

X espacio de Banach, $Y \overset{i}{\hookrightarrow} X$ subespacio cerrado. Equivalen:

1. Y localmente complementado en X.
2. Existe un operador de extensión lineal y continuo $L : Y^* \to X^*$ tal que $L(y^*)(x) = y^*(x)$ para cada $y^* \in Y^*$, $x \in Y$. Dicho de otro modo, $i^* \circ L = \mathrm{Id}_{Y^*}$.
3. Y^{**} está complementado en X^{**}.
4. Y posee la propiedad de extensión de compactos (CEP): Existe una constante $\lambda > 0$ tal que todo operador compacto $k : Y \to W$ admite una extensión compacta $K : X \to W$ satisfaciendo $\|K\| \leq \lambda\|k\|$.

- X en X^{**}.
- X en cualquier ultrapotencia $X_{\mathcal{U}}$.
- Cualquier subespacio complementado:

Ejemplos

Teorema. "Locally complemented subspaces and $\mathcal{L}_p$-spaces", N.J. Kalton (1984)

X espacio de Banach, $Y \overset{i}{\hookrightarrow} X$ subespacio cerrado. Equivalen:

1. Y localmente complementado en X.
2. Existe un operador de extensión lineal y continuo $L : Y^* \to X^*$ tal que $L(y^*)(x) = y^*(x)$ para cada $y^* \in Y^*$, $x \in Y$. Dicho de otro modo, $i^* \circ L = \mathrm{Id}_{Y^*}$.
3. Y^{**} está complementado en X^{**}.
4. Y posee la propiedad de extensión de compactos (CEP): Existe una constante $\lambda > 0$ tal que todo operador compacto $k : Y \to W$ admite una extensión compacta $K : X \to W$ satisfaciendo $\|K\| \leq \lambda \|k\|$.

- X en X^{**}.
- X en cualquier ultrapotencia $X_{\mathcal{U}}$.
- Cualquier subespacio complementado: ℓ_∞ en cualquier espacio que lo contenga.

Ejemplos

Teorema. "Locally complemented subspaces and $\mathcal{L}_p$-spaces", N.J. Kalton (1984)

X espacio de Banach, $Y \overset{i}{\hookrightarrow} X$ subespacio cerrado. Equivalen:

1. Y localmente complementado en X.
2. Existe un operador de extensión lineal y continuo $L : Y^* \to X^*$ tal que $L(y^*)(x) = y^*(x)$ para cada $y^* \in Y^*$, $x \in Y$. Dicho de otro modo, $i^* \circ L = \mathrm{Id}_{Y^*}$.
3. Y^{**} está complementado en X^{**}.
4. Y posee la propiedad de extensión de compactos (CEP): Existe una constante $\lambda > 0$ tal que todo operador compacto $k : Y \to W$ admite una extensión compacta $K : X \to W$ satisfaciendo $\|K\| \leq \lambda \|k\|$.

- X en X^{**}.
- X en cualquier ultrapotencia $X_{\mathcal{U}}$.
- Cualquier subespacio complementado: ℓ_∞ en cualquier espacio que lo contenga. ¿c_0?

Índice

1. Introducción
2. Finita representación
3. Local Complementación
4. Espacios $\mathcal{L}_p$

Definición (Espacio $\mathcal{L}_{p,\lambda}$, espacio $\mathcal{L}_p$)

Sean $1 \leq p \leq \infty$ y $1 \leq \lambda < \infty$. Un espacio de Banach X es un espacio $\mathcal{L}_{p,\lambda}$ si $\forall E \in F(X)$ $\exists F \in F(X)$ con $E \subset F$ tal que $d(F, \ell_p^n) \leq \lambda$ con $n = dim\, F$. Un espacio de Banach X se dice que es un espacio $\mathcal{L}_p$ con $1 \leq p \leq \infty$ si $\exists \lambda < \infty$ tal que X es $\mathcal{L}_{p,\lambda}$.

Definición (Espacio $\mathcal{L}_{p,\lambda}$, espacio $\mathcal{L}_p$)

Sean $1 \leq p \leq \infty$ y $1 \leq \lambda < \infty$. Un espacio de Banach X es un espacio $\mathcal{L}_{p,\lambda}$ si $\forall E \in F(X)$ $\exists F \in F(X)$ con $E \subset F$ tal que $d(F, \ell_p^n) \leq \lambda$ con $n = dim\, F$. Un espacio de Banach X se dice que es un espacio $\mathcal{L}_p$ con $1 \leq p \leq \infty$ si $\exists \lambda < \infty$ tal que X es $\mathcal{L}_{p,\lambda}$.

- Como cabría esperar, los espacios ℓ_p, L_p y $C(K)$ son ejemlpos de espacios $\mathcal{L}_p$, pues estos últimos los generalizan.

Definición(Espacio $\mathcal{L}_{p,\lambda}$, espacio $\mathcal{L}_p$)

Sean $1 \leq p \leq \infty$ y $1 \leq \lambda < \infty$. Un espacio de Banach X es un espacio $\mathcal{L}_{p,\lambda}$ si $\forall E \in F(X)$ $\exists F \in F(X)$ con $E \subset F$ tal que $d(F, \ell_p^n) \leq \lambda$ con $n = dim\, F$. Un espacio de Banach X se dice que es un espacio $\mathcal{L}_p$ con $1 \leq p \leq \infty$ si $\exists \lambda < \infty$ tal que X es $\mathcal{L}_{p,\lambda}$.

- Como cabría esperar, los espacios ℓ_p, L_p y $C(K)$ son ejemlpos de espacios $\mathcal{L}_p$, pues estos últimos los generalizan.
- Los espacios de la forma $\ell_p \oplus \ell_2$, $\ell_p(\ell_2)\ldots$ son espacios $\mathcal{L}_p$ no isomorfos a ℓ_p para $p \neq 2$

- Sea X un espacio de Banach. Entonces, X es $\mathcal{L}_p$ si y solo si X^* es $\mathcal{L}_q$. Con $1 \leq p, q \leq \infty$ y $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

- Sea X un espacio de Banach. Entonces, X es $\mathcal{L}_p$ si y solo si X^* es $\mathcal{L}_q$. Con $1 \leq p, q \leq \infty$ y $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
- Todo subespacio complementado de un $C(K)$ es $\mathcal{L}_\infty$.

Propiedades. "The $\mathcal{L}_p$ Spaces", J. Lindenstrauss, H. P. Rosenthal (1969)

- Sea X un espacio de Banach. Entonces, X es $\mathcal{L}_p$ si y solo si X^* es $\mathcal{L}_q$. Con $1 \leq p, q \leq \infty$ y $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
- Todo subespacio complementado de un $C(K)$ es $\mathcal{L}_\infty$.
- Todo subespacio complementado de un L_1 es $\mathcal{L}_1$

A CLASS OF SPECIAL $\mathcal{L}_\infty$ SPACES

BY

J. BOURGAIN and F. DELBAEN

Vrije Universiteit
Brussel, Belgium

1. Introduction

We shall construct Banach spaces X and Y having some peculiar properties.

(a) X is a separable $\mathcal{L}_\infty$ space.

(b) X is a Radon-Nikodym space. Since a separable $\mathcal{L}_\infty$ space cannot be imbedded isomorphically into a separable dual space, this example solves negatively the following conjecture of Uhl: Is every separable Radon-Nikodym space isomorphic to a subspace of a separable dual space?

(c) X is a Schur space, i.e. weak and norm compactness coincide in X. This answers negatively a conjecture of Lindenstrauss who asked in [10] whether a space which has the weakly compact extension property is necessarily finite dimensional (see also Theorem 2.4). In [11] Pełczynski and Lindenstrauss and in [12] Lindenstrauss and Rosenthal asked whether every $\mathcal{L}_\infty$ space contains a subspace isomorphic to c_0. Our example disproves this conjecture.

(d) X is weakly sequentially complete. Since X^* is a $\mathcal{L}_1$ space, X^* is also weakly sequentially complete. For a long time it was conjectured that a Banach space is reflexive if and only if both X and X^* are weakly sequentially complete.

(a′) The Banach space Y is a separable $\mathcal{L}_\infty$ space.

(b′) The Banach space Y is a Radon-Nikodym space.

(c′) Y is somewhat reflexive, i.e. every infinite dimensional subspace of Y contains an infinite dimensional subspace which is reflexive.

Los espacios $\mathcal{L}_\infty$ y $\mathcal{L}_1$

Teorema (Lindestrauss-Rosenthal (1969))

Son equivalentes los siguientes pares de afirmaciones:

- Y *es* $\mathcal{L}_\infty$
- $\forall W, X$ *espacios de Banach con* $Y \subseteq X$, *y todo operador compacto* $k\colon Y \to W$, $\exists K\colon X \to W$ *extensión compacta de* k

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, hook] \arrow[d, "k"'] & X \arrow[dl, "K"] \\ W & \end{tikzcd}$$

- Z *es* $\mathcal{L}_1$
- $\forall X$ *espacio de Banach*, $\forall q\colon X \to Z$ *cociente y* $\forall k\colon W \to Z$ *operador compacto*, $\exists K\colon W \to X$ *levantamiento compacto de* k

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "q"] & Z \\ & W \arrow[ul, "K"] \arrow[u, "k"'] \end{tikzcd}$$

Los espacios $\mathcal{L}_\infty$ y $\mathcal{L}_1$

Lema

ℓ_∞^n es inyectivo para todo n, es decir, está uniformemente complementado en todo espacio en el que se incluye (la norma de la proyección no crece con n).

Lema

ℓ_∞^n es inyectivo para todo n, es decir, está uniformemente complementado en todo espacio en el que se incluye (la norma de la proyección no crece con n).

(Demostración del teorema anterior).

Sea Y $\mathcal{L}_\infty$. Basta probar que Y es localmente complementado en X.
Sea $E \in F(X)$. Consideramos $E_1 = E \cap Y \in F(Y)$. Por ser Y $\mathcal{L}_\infty$, se tiene que $\exists E_2 \in F(Y)$ con $E_2 \supseteq E_1$ y E_2 copia isomorfa de ℓ_∞^n con $d(E_2, \ell_\infty^n) \leq \lambda$. Por el lema anterior, se sigue la tesis. □

Lema

ℓ_∞^n es inyectivo para todo n, es decir, está uniformemente complementado en todo espacio en el que se incluye (la norma de la proyección no crece con n).

(Demostración del teorema anterior).

Sea Y $\mathcal{L}_\infty$. Basta probar que Y es localmente complementado en X.
Sea $E \in F(X)$. Consideramos $E_1 = E \cap Y \in F(Y)$. Por ser Y $\mathcal{L}_\infty$, se tiene que $\exists E_2 \in F(Y)$ con $E_2 \supseteq E_1$ y E_2 copia isomorfa de ℓ_∞^n con $d(E_2, \ell_\infty^n) \leq \lambda$. Por el lema anterior, se sigue la tesis. $\square$

Teorema

Todo espacio $\mathcal{L}_\infty$ está localmente complementado en cualquier espacio que lo contenga (y esto los caracteriza). Esto incluye, por ejemplo, c_0 y los espacios Bourgain-Delbaen

Referencias

[1] Fernando Albiac and Nigel J. Kalton. *Topics in Banach Space Theory*. Graduate Texts in Mathematics 233. Springer, 2006.

[2] J. M. F. Castillo et al. «Local complementation and the extension of bilinear mappings». In: *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* 152.1 (2012), pp. 153–166. DOI: 10.1017/S0305004111000533.

[3] N. J. Kalton. «Locally complemented subspaces and $\mathcal{L}_p$-spaces for $0 < p < 1$». In: *Math. Nachr.* 115 (1984), pp. 71–97. DOI: 10.1002/mana.19841150107.

[4] J. Lindenstrauss and H. P. Rosenthal. «The $\mathcal{L}_p$ spaces». In: *Israel J. Math.* 7 (1969), pp. 325–349. ISSN: 0021-2172. DOI: 10.1007/BF02788865.

Fin.

Gracias por la atención.