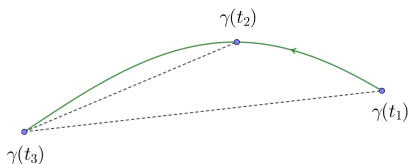


Geometría de las curvas solución de sistemas de tipo gradiente convexo

Andrés Laín Sanclemente, Antonio Jesús Martínez Aparicio, Carmen María Martínez Pérez,
Gregorio Martínez Sempere, Miguel Martínez Teruel

Tutora: Estibalitz Durand Cartagena



XI Escuela-Taller de Análisis Funcional Bernardo Cascales

Marzo 2022

1 Motivación

2 Curvas

- Curvas autocontractivas
- Curvas evolutivas

3 Teorema de longitud acotada

- Teorema de longitud acotada en \mathbb{R}^2
- Teorema de longitud acotada en \mathbb{R}^n

4 Extensiones

5 Aplicaciones

- Algoritmo de búsqueda para conjuntos estrellados
- Greedy drawing
- Algoritmo proximal

Índice

1 Motivación

2 Curvas

- Curvas autocontractivas
- Curvas evolutivas

3 Teorema de longitud acotada

- Teorema de longitud acotada en \mathbb{R}^2
- Teorema de longitud acotada en \mathbb{R}^n

4 Extensiones

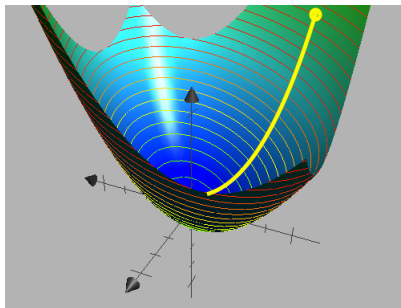
5 Aplicaciones

- Algoritmo de búsqueda para conjuntos estrellados
- Greedy drawing
- Algoritmo proximal

Motivación

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -\nabla f(x(t)), & t > 0, \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

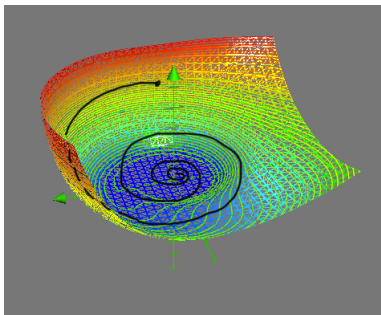
¿Bajo qué condiciones sobre f la curva solución tiene longitud finita?



Motivación

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -\nabla f(x(t)), & t > 0, \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

¿Bajo qué condiciones sobre f la curva solución tiene longitud finita?



Índice

1 Motivación

2 Curvas

- Curvas autocontractivas
- Curvas evolutivas

3 Teorema de longitud acotada

- Teorema de longitud acotada en \mathbb{R}^2
- Teorema de longitud acotada en \mathbb{R}^n

4 Extensiones

5 Aplicaciones

- Algoritmo de búsqueda para conjuntos estrellados
- Greedy drawing
- Algoritmo proximal

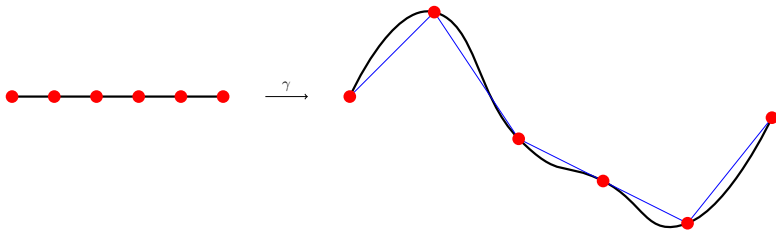
Curvas en espacios métricos

Definición 1.

Una curva en un espacio métrico (X, d) es una función continua $x : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow X$. Definimos la longitud de x como

$$\ell(x) := \sup \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} d(x(t_i), x(t_{i+1})) \right\},$$

donde el supremo se toma sobre todas las particiones $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$.



Curvas autocontractivas

Definición 2 ([DLS]).

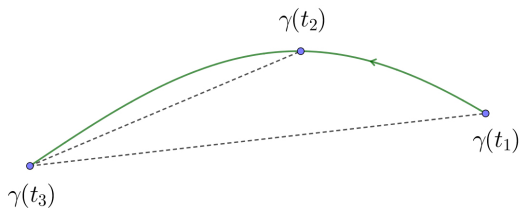
Una curva $x: I \subset \mathbb{R} \rightarrow (X, d)$ se dice autocontractiva si para todo $t_1 \leq t_2 \leq t_3$ en I se tiene que

$$d(x(t_1), x(t_3)) \geq d(x(t_2), x(t_3))$$

o, equivalentemente, si la función

$$t \mapsto d(x(t), x(t_3))$$

es decreciente en $I \cap (-\infty, t_3]$ para cada $t_3 \in I$.



Curvas autocontractivas

Definición 2 ([DLS]).

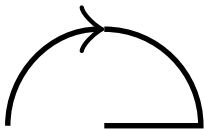
Una curva $x: I \subset \mathbb{R} \rightarrow (X, d)$ se dice autocontractiva si para todo $t_1 \leq t_2 \leq t_3$ en I se tiene que

$$d(x(t_1), x(t_3)) \geq d(x(t_2), x(t_3))$$

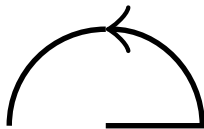
o, equivalentemente, si la función

$$t \mapsto d(x(t), x(t_3))$$

es decreciente en $I \cap (-\infty, t_3]$ para cada $t_3 \in I$.



Autocontractiva



NO Autocontractiva

Caracterización de función convexa

Lema 1.

Si $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable, entonces son equivalentes las condiciones

- f es convexa.
- Para cada $x, y \in \mathbb{R}^n$, $f(y) - f(x) \geq \langle \nabla f(x), y - x \rangle$.

Caracterización de función convexa

Lema 1.

Si $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable, entonces son equivalentes las condiciones

- ❶ f es convexa.
- ❷ Para cada $x, y \in \mathbb{R}^n$, $f(y) - f(x) \geq \langle \nabla f(x), y - x \rangle$.

Demostración (\implies):

Como f es convexa,

$$f(ty + (1-t)x) \leq tf(y) + (1-t)f(x);$$

$$\frac{f(x + t(y-x)) - f(x)}{t} \leq f(y) - f(x).$$

Tomando límites cuando $t \rightarrow 0^+$,

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x + t(y-x)) - f(x)}{t} = \langle \nabla f(x), y - x \rangle \leq f(y) - f(x).$$



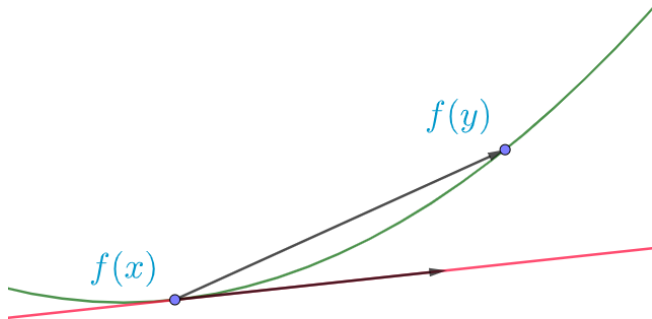
Caracterización de función convexa

Lema 1.

Si $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable, entonces son equivalentes las condiciones

- ❶ f es convexa.
- ❷ Para cada $x, y \in \mathbb{R}^n$, $f(y) - f(x) \geq \langle \nabla f(x), y - x \rangle$.

Demostración (\implies):



Solución autocontractiva de un sistema de tipo gradiente

Lema 2.

Sea $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función convexa diferenciable. Las curvas $x: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ solución del sistema $\dot{x}(t) = -\nabla f(x(t))$ con $t \in I$ son autocontractivas.

Solución autocontractiva de un sistema de tipo gradiente

Lema 2.

Sea $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función convexa diferenciable. Las curvas $x: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ solución del sistema $\dot{x}(t) = -\nabla f(x(t))$ con $t \in I$ son autocontractivas.

Demostración:

$$\frac{d}{dt} (\|x(t_0) - x(t)\|^2) = 2\langle -\dot{x}(t), x(t_0) - x(t) \rangle = 2\langle \nabla f(x(t)), x(t_0) - x(t) \rangle.$$

Solución autocontractiva de un sistema de tipo gradiente

Lema 2.

Sea $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función convexa diferenciable. Las curvas $x: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ solución del sistema $\dot{x}(t) = -\nabla f(x(t))$ con $t \in I$ son autocontractivas.

Demostración:

$$\frac{d}{dt} (\|x(t_0) - x(t)\|^2) = 2\langle -\dot{x}(t), x(t_0) - x(t) \rangle = 2\langle \nabla f(x(t)), x(t_0) - x(t) \rangle.$$

Aplicando el lema anterior, obtenemos que

$$\langle \nabla f(x(t)), x(t_0) - x(t) \rangle \leq f(x(t_0)) - f(x(t)).$$

Solución autocontractiva de un sistema de tipo gradiente

Lema 2.

Sea $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función convexa diferenciable. Las curvas $x: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ solución del sistema $\dot{x}(t) = -\nabla f(x(t))$ con $t \in I$ son autocontractivas.

Demostración:

$$\frac{d}{dt} (\|x(t_0) - x(t)\|^2) = 2\langle -\dot{x}(t), x(t_0) - x(t) \rangle = 2\langle \nabla f(x(t)), x(t_0) - x(t) \rangle.$$

Aplicando el lema anterior, obtenemos que

$$\langle \nabla f(x(t)), x(t_0) - x(t) \rangle \leq f(x(t_0)) - f(x(t)).$$

$$\frac{d}{dt} (f(x(t_0)) - f(x(t))) = \langle -\nabla f(x(t)), \dot{x}(t) \rangle = \|\nabla f(x(t))\|^2 \geq 0, \forall t < t_0.$$

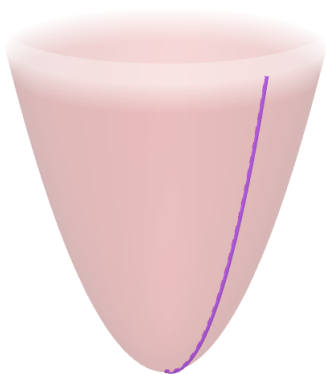
Como la función $f(x(t_0)) - f(x(t))$ es creciente y es nula en el punto t_0 , deducimos que la función $\|x(t_0) - x(t)\|^2$ es decreciente.



Solución autocontractiva de un sistema de tipo gradiente

Lema 2.

Sea $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función convexa diferenciable. Las curvas $x: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ solución del sistema $\dot{x}(t) = -\nabla f(x(t))$ con $t \in I$ son autocontractivas.



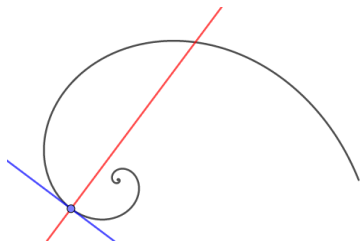
Curvas evolutivas

Definición 3 ([MaPu]).

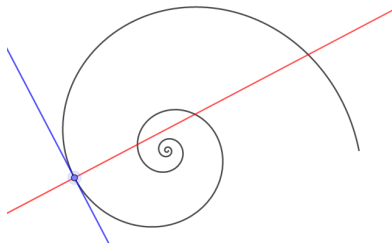
Una curva $x: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ derivable en casi todo punto es una curva evolutiva si para cada $t \in I$ tal que $\dot{x}(t)$ existe se tiene que

$$\langle \dot{x}(t), x(t) - x(s) \rangle \geq 0$$

para todo $s \in I$ tal que $s \leq t$.



Evolutiva



NO Evolutiva

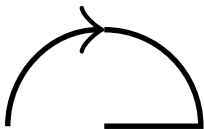
Curvas evolutivas

Definición 3 ([MaPu]).

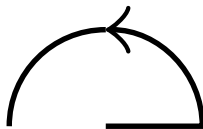
Una curva $x: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ derivable en casi todo punto es una curva evolutiva si para cada $t \in I$ tal que $\dot{x}(t)$ existe se tiene que

$$\langle \dot{x}(t), x(t) - x(s) \rangle \geq 0$$

para todo $s \in I$ tal que $s \leq t$.



NO Evolutiva



Evolutiva

Equivalencia entre ambas definiciones

Proposición 1.

Una curva $x: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ absolutamente continua es evolutiva si y solo si x^- es una curva autocontractiva.

Equivalencia entre ambas definiciones

Proposición 1.

Una curva $x: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ absolutamente continua es evolutiva si y solo si x^- es una curva autocontractiva.

Demostración (\implies):

Fijemos $t_1 \in [a, b]$. Si x es evolutiva,

$$\langle \dot{x}(t), x(t) - x(t_1) \rangle \geq 0, \text{ para } t \in [t_1, b].$$

o, equivalentemente,

$$\frac{d}{dt} \|x(t) - x(t_1)\|^2 \geq 0, \text{ para } t \in [t_1, b].$$

Por lo tanto, $\|x(t) - x(t_1)\|$ es creciente para $t \in [t_1, b]$. Así,

$$\|x(-s) - x(t_1)\|$$

es decreciente para $s \in [-b, -t_1]$. Si denotamos $s_1 = -t_1$, concluimos que

$$\|x^-(s) - x^-(s_1)\|$$

es decreciente para $s \in [-b, s_1]$, con lo que x^- es autocontractiva.

Índice

1 Motivación

2 Curvas

- Curvas autocontractivas
- Curvas evolutivas

3 Teorema de longitud acotada

- Teorema de longitud acotada en \mathbb{R}^2
- Teorema de longitud acotada en \mathbb{R}^n

4 Extensiones

5 Aplicaciones

- Algoritmo de búsqueda para conjuntos estrellados
- Greedy drawing
- Algoritmo proximal

Las curvas evolutivas tienen longitud acotada

Teorema 1 ([MaPu, 3.IX.]).

Toda curva $x(t) : [0, a) \rightarrow \mathbb{R}^n$ evolutiva cuya imagen está contenida en un conjunto acotado tiene longitud finita.

Teorema 2 ([MaPu, 2.IV.]).

Toda curva $x(t) : [0, a) \rightarrow \mathbb{R}^2$ evolutiva cuya imagen está contenida en un conjunto K convexo y acotado tiene longitud menor o igual al perímetro de K .

Caso límite

Existen curvas cuya longitud coincide con el perímetro de su envolvente convexa.

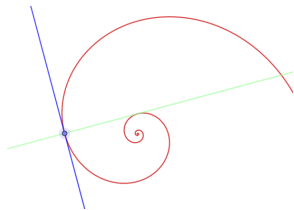


Figura: Longitud igual al perímetro.

$$v(t) = e^{-\omega t} (\cos t, \sin t), \quad t \geq c(\mu),$$

$$\omega = \exp\left(-\frac{3\pi\omega}{2}\right).$$

Lemas previos para el caso de \mathbb{R}^2 (I)**Resultado 1.**

Sean $K_1, K_2 \subseteq \mathbb{R}^2$ dos conjuntos convexos acotados tales que $K_1 \subseteq K_2$. Entonces,

$$\text{perímetro}(K_1) \leq \text{perímetro}(K_2).$$

Lemas previos para el caso de \mathbb{R}^2 (II)

Resultado 2.

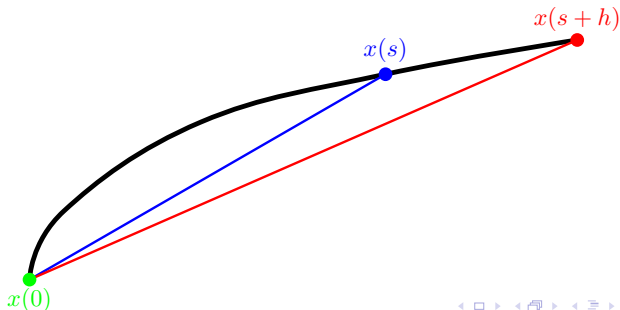
Sean $a \in \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$, $x : [0, a) \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva absolutamente continua y

$$\Gamma(s) := \{x(r) : 0 \leq r \leq s\} \quad \forall s \in [0, a).$$

Entonces,

$$p(s) := \text{perímetro}(\text{conv}(\Gamma(s))) \quad \forall s \in [0, a)$$

es una función creciente y por tanto, derivable en casi todo punto.



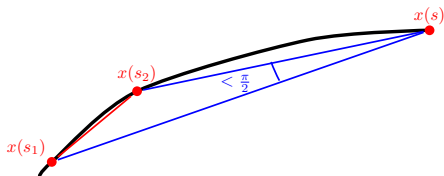
Lemas previos para el caso de \mathbb{R}^2 (III)

Lema 3.

Sea $x(t) : I \rightarrow \mathbb{R}$ una curva evolutiva. $\|x(s) - x(s_1)\|$ es no decreciente, luego si $s_1 \leq s_2 \leq s$,

$$\|x(s_2) - x(s_1)\| \leq \|x(s) - x(s_1)\|.$$

En el triángulo $x(s_1)$, $x(s_2)$ y $x(s)$, el lado $x(s_2) - x(s_1)$ no es el más largo. Por tanto, el ángulo entre los vectores $x(s_1) - x(s)$, $x(s_2) - x(s)$ es menor que $\frac{\pi}{2}$.



Corolario 1.

El ángulo del sector proyectante a $\text{conv}(\Gamma(s))$ en $x(s)$ es menor o igual que $\frac{\pi}{2}$.

Demostración del caso \mathbb{R}^2 (I)**Teorema 3 ([MaPu, 2.IV.]).**

Toda curva $x(t) : [0, a) \rightarrow \mathbb{R}^2$ evolutiva cuya imagen está contenida en un conjunto K convexo cumple

$$p(s) \geq l(s).$$

- Sea $p(s)$ el perímetro de $\text{conv}(\Gamma(s))$, siendo $\Gamma(s) := \{x(r) : 0 \leq r \leq s\}$.

Demostración del caso \mathbb{R}^2 (I)**Teorema 3 ([MaPu, 2.IV.]).**

Toda curva $x(t) : [0, a) \rightarrow \mathbb{R}^2$ evolutiva cuya imagen está contenida en un conjunto K convexo cumple

$$p(s) \geq l(s).$$

- Sea $p(s)$ el perímetro de $\text{conv}(\Gamma(s))$, siendo $\Gamma(s) := \{x(r) : 0 \leq r \leq s\}$.
- Sea $l(s)$ la longitud de $\Gamma(s)$. Podemos asumir sin pérdida de generalidad que la curva está parametrizada por el arco, por lo que $l(s) = s$.

Demostración del caso \mathbb{R}^2 (I)**Teorema 3 ([MaPu, 2.IV.]).**

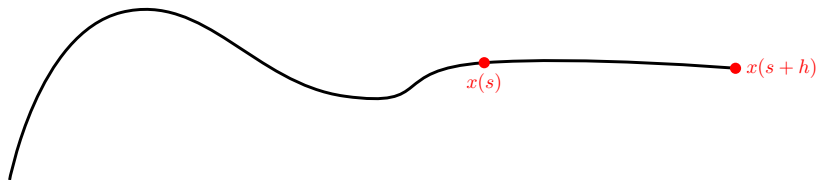
Toda curva $x(t) : [0, a) \rightarrow \mathbb{R}^2$ evolutiva cuya imagen está contenida en un conjunto K convexo cumple

$$p(s) \geq l(s).$$

- Sea $p(s)$ el perímetro de $\text{conv}(\Gamma(s))$, siendo $\Gamma(s) := \{x(r) : 0 \leq r \leq s\}$.
- Sea $l(s)$ la longitud de $\Gamma(s)$. Podemos asumir sin pérdida de generalidad que la curva está parametrizada por el arco, por lo que $l(s) = s$.
- Nuestro objetivo es probar $p(s) \geq l(s) = s$; para ello, como $p(0) = l(0) = 0$, basta ver que $p'(s) \geq 1$ para casi todo punto $s \in [0, a)$.

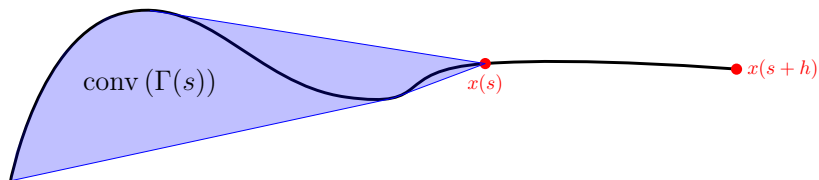
Demostración del caso \mathbb{R}^2 (II)

Sea $h \in \mathbb{R}^+$. Consideremos la curva.



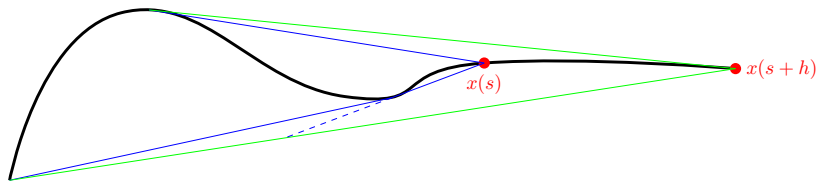
Demostración del caso \mathbb{R}^2 (III)

Sea la envolvente convexa de $\Gamma(s)$.



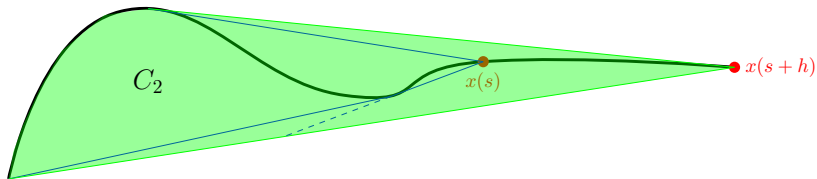
Demostración del caso \mathbb{R}^2 (IV)

Añadimos sectores proyectantes de la envolvente convexa de $\Gamma(s)$ desde $x(s)$ y desde $x(s+h)$.



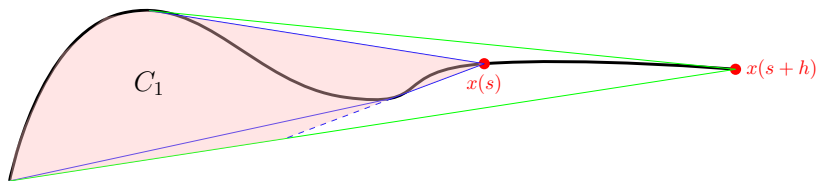
Demostración del caso \mathbb{R}^2 (V)

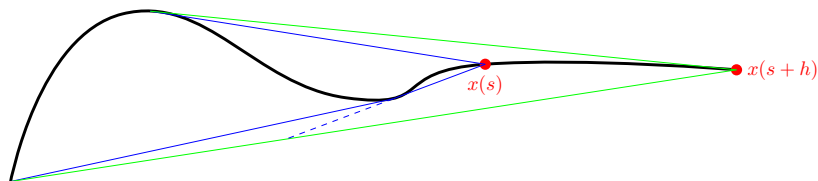
$$C_2 := \text{conv}(\Gamma(s) \cup \{x(s+h)\}).$$



Demostración del caso \mathbb{R}^2 (VI)

$$C_1 := C_2 \cap \{\text{sector proyectante desde } x(s)\}.$$



Demostración del caso \mathbb{R}^2 (VII)

Por construcción se tiene la cadena de contenidos

$$\text{conv}(\Gamma(s)) \subseteq C_1 \subseteq C_2 \subseteq \text{conv}(\Gamma(s+h))$$

y, por el Resultado 1, se tiene

$$p(s) \leq p_1(s) \leq p_2(s) \leq p(s+h),$$

siendo p_1, p_2 los perímetros de C_1, C_2 respectivamente. En consecuencia,

$$p(s+h) - p(s) \geq p_2(s) - p_1(s).$$

Demostración del caso \mathbb{R}^2 (VIII)

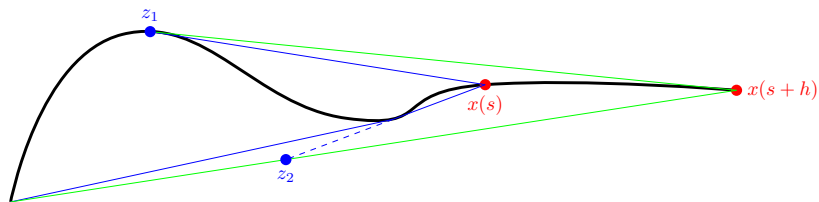
Nuestro objetivo es calcular

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{p(s+h) - p(s)}{h} \geq \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{p_2(s) - p_1(s)}{h},$$

para lo que trabajaremos con $p_2(s) - p_1(s)$.

Demostración del caso \mathbb{R}^2 (IX)

Definamos z_1, z_2 como los puntos donde los lados del sector proyectante coinciden con la frontera de C_1 .

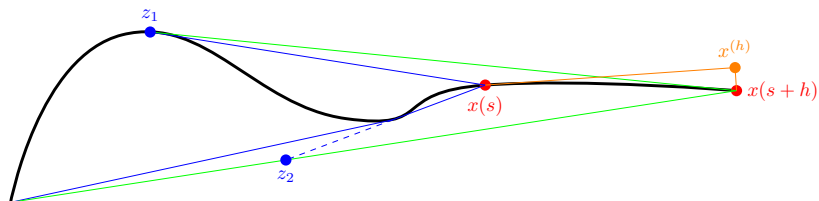


Se puede ver que

$$p_2(s) - p_1(s) = \sum_{i=1}^2 (\|x(s+h) - z_i\| - \|x(s) - z_i\|).$$

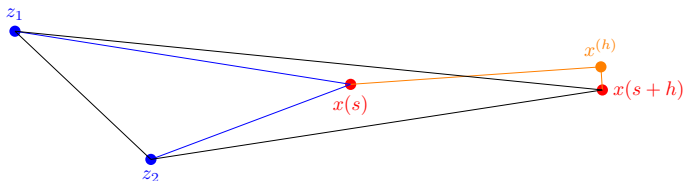
Demostración del caso \mathbb{R}^2 (X)

Calculemos la proyección de $x(s+h)$ sobre la recta tangente a la curva en $x(s)$.

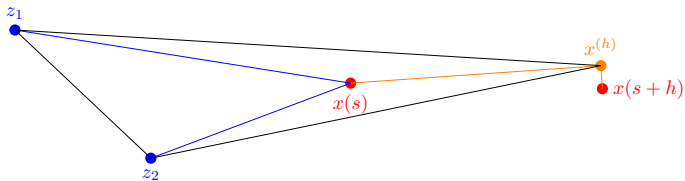


Demostración del caso \mathbb{R}^2 (XI)

Eliminado del diagrama anterior la curva, obtenemos



Como se puede probar fácilmente que $\|x(s+h) - x(s)\| = o(h)$, podemos considerar en su lugar



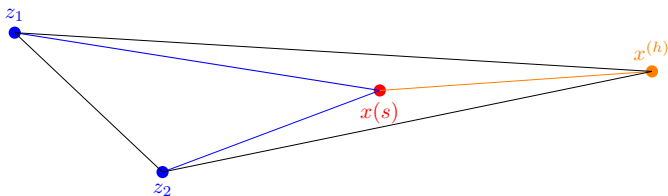
Demostración del caso \mathbb{R}^2 (XII)

Así, podemos sustituir

$$p_2(s) - p_1(s) = \sum_{i=1}^2 (\|x(s+h) - z_i\| - \|x(s) - z_i\|)$$

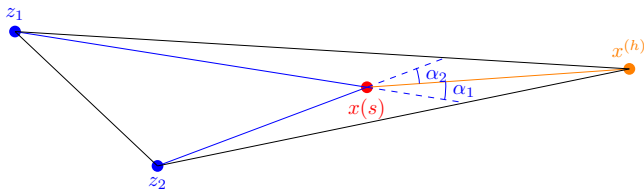
por

$$p_2(s) - p_1(s) \geq \sum_{i=1}^2 \left(\left\| x^{(h)} - z_i \right\| - \left\| x^{(h)} - z_i \right\| \right) + o(h).$$



Demostración del caso \mathbb{R}^2 (XIII)

Teniendo en cuenta que dos de las diagonales del triángulo son los lados de cierto sector proyectante, por el lema 3, se cumple que $\alpha_1 + \alpha_2 \leq \frac{\pi}{2}$.



Por un argumento geométrico no trivial, puede probarse que $\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2 \geq 1$ y, de esta manera,

$$\begin{aligned} p_2(s) - p_1(s) &\geq \sum_{i=1}^2 \left(\left\| x^{(h)} - z_i \right\| - \left\| x^{(h)} - z_i \right\| \right) + o(h) \geq \\ &\geq \left\| x^{(h)} - x(s) \right\| (\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2) + o(h). \end{aligned}$$

Demostración del caso \mathbb{R}^2 (XIV)

Dividiendo por h en ambos miembros y tomando límites cuando $h \rightarrow 0^+$, se llega a

$$\begin{aligned} p'(s) &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{p_2(h) - p_1(h)}{h} \geq \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \left(\|x^{(h)} - x(s)\| (\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2) + o(h) \right) \\ &= \|\dot{x}(s)\| (\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2) \geq \|\dot{x}(s)\| = 1. \end{aligned}$$

□

Generalización del Teorema a \mathbb{R}^n (I)

Teorema 4.

Toda curva $x(t) : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}^n$ evolutiva cuya imagen está contenida en un conjunto K acotado tiene longitud finita.

Definición 4 (Anchura media).

Dado un conjunto convexo y no vacío $K \subset \mathbb{R}^n$, la *anchura* de K en una dirección $u \in \mathbb{S}^{n-1}$ es la longitud de la proyección ortogonal $P_u(K)$ de K sobre $\mathbb{R}u$. La *anchura media* de un conjunto convexo es el promedio de la anchura de K sobre todas las posibles direcciones de \mathbb{S}^{n-1} , esto es,

$$W(K) := \frac{1}{\sigma_n} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \mathcal{H}^1(P_u(K)) \, du,$$

donde du es la medida de Hausdorff $(n-1)$ -dimensional sobre \mathbb{S}^{n-1} y

$$\sigma_n = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} du = \frac{n\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)},$$

esto es, una constante que hace que $W(\mathbb{S}^{n-1}) = 1$.

Generalización del Teorema a \mathbb{R}^n (II)

Lema 4.

Sean $K_1, K_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ dos conjuntos convexos acotados tales que $K_1 \subseteq K_2$. Entonces,

$$W(K_1) \leq W(K_2).$$

Teorema 5 ([MaPu, 3.IX.]).

Sea $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva Lipschitz evolutiva cuya imagen está contenida en un conjunto convexo y acotado K . Entonces existe una constante C_n (que depende solo de la dimensión) tal que

$$\ell(\gamma) \leq C_n W(K).$$

Índice

1 Motivación

2 Curvas

- Curvas autocontractivas
- Curvas evolutivas

3 Teorema de longitud acotada

- Teorema de longitud acotada en \mathbb{R}^2
- Teorema de longitud acotada en \mathbb{R}^n

4 Extensiones

5 Aplicaciones

- Algoritmo de búsqueda para conjuntos estrellados
- Greedy drawing
- Algoritmo proximal

¿Hasta dónde podemos llegar?

¿Hasta dónde podemos llegar?

- \mathbb{R}^n caso discontinuo (2015: Daniiliidis, David, Durand, Lemenant)
- Espacios normados finito dimensionales (2017: Stepanov, Teplitskaya)

Contraejemplo en dimensión infinita

Curva de longitud infinita contenida en un compacto

$$\begin{aligned} x: [0, 1] &\longrightarrow L^2[0, 1] \\ t &\longmapsto \mathbf{1}_{[0, t]} \end{aligned}$$

Como $\|x(t) - x(s)\|_2 = \sqrt{|t - s|}$, entonces

- x es continua (por ello la curva es compacta).
- x es autocontractiva.
- x no es rectificable porque cualquier partición $\{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ uniforme de $[0, 1]$,

$$\sum_{i=0}^{n-1} \|x(t_{i+1}) - x(t_i)\|_2 = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}.$$

Índice

- 1 Motivación
- 2 Curvas
 - Curvas autocontractivas
 - Curvas evolutivas
- 3 Teorema de longitud acotada
 - Teorema de longitud acotada en \mathbb{R}^2
 - Teorema de longitud acotada en \mathbb{R}^n
- 4 Extensiones
- 5 Aplicaciones
 - Algoritmo de búsqueda para conjuntos estrellados
 - Greedy drawing
 - Algoritmo proximal

Sala del museo

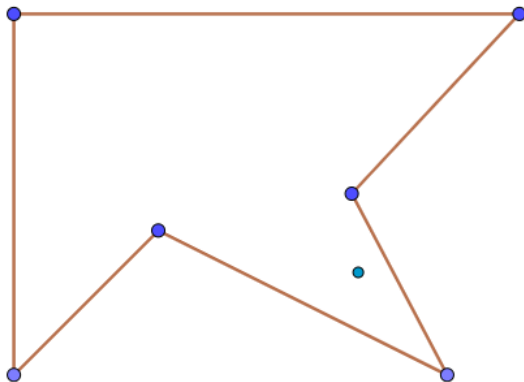


Figura: Polígono estrellado no convexo.

Paredes visibles

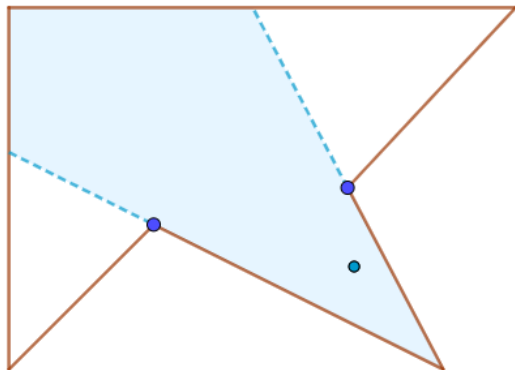


Figura: Construcción del polígono visible.

Cono de direcciones

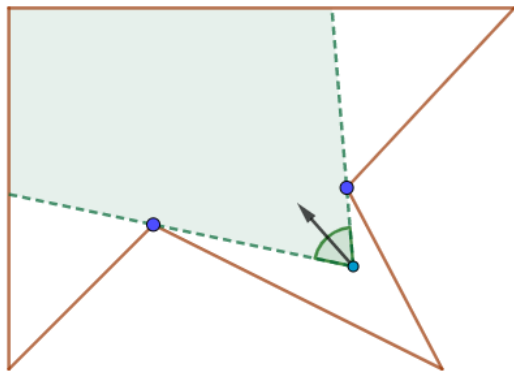


Figura: Elección de la dirección.

Direcciones

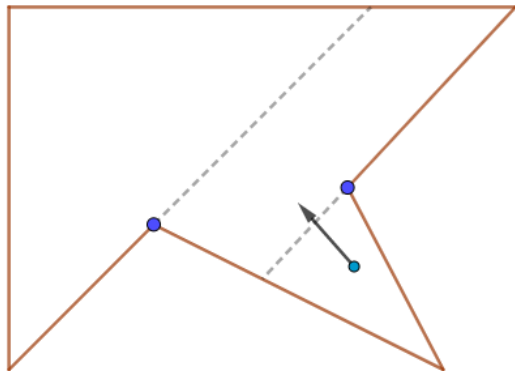


Figura: Regiones donde se reformula el problema.

Curva solución

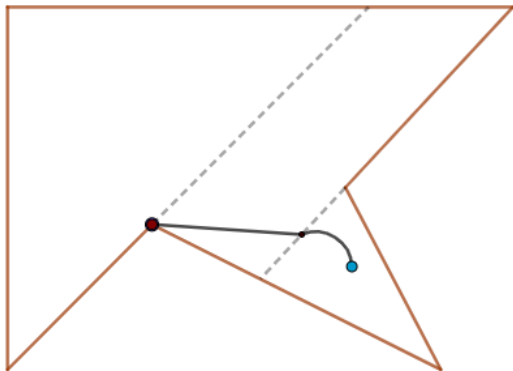


Figura: Curva generada por el algoritmo.

Iteraciones

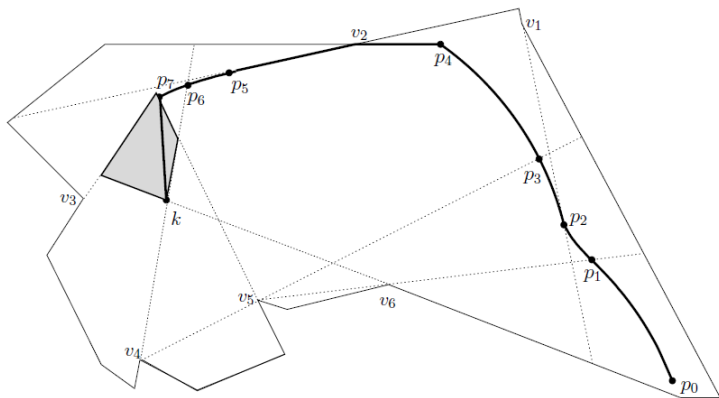


Figura: [IKL]

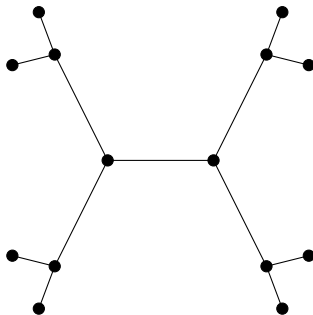
Greedy drawing

Definición: Greedy Drawing

Dado un grafo, dados dos vértices s_0, s_N se dice que un $s_0 s_N$ -camino es un *greedy drawing* si

$$d(s_{i+1}, s_N) \leq d(s_i, s_N)$$

para todo $0 \leq i < N$.



Algoritmo proximal

Definición 5.

Dada $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función convexa. Se define la subdiferencial de f en x como

$$\partial f(x) := \{\xi \in \mathbb{R}^n : \alpha - f(x) \geq \langle \xi, y - x \rangle, \forall \alpha \geq f(y)\}$$

Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función convexa acotada inferiormente y una sucesión $\{t_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subseteq (0, 1]$. Dado $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $i \in \mathbb{N}$, se define x_{i+1} como

$$x_{i+1} = \operatorname{argmin}_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ f(x) + \frac{1}{2t_i} \|x - x_i\|^2 \right\}.$$

Esto es equivalente a decir que

$$0 \in \partial f(x_{i+1}) + \frac{1}{t_i} (x_{i+1} - x_i).$$

Bibliografía

-  [ACGLP] S. Alamdari, T.M. Chan, E. Grant, A. Lubiw, V. Pathak: Self-approaching Graphs. *Springer* 12 (2013), 260–271.
-  [DDDL] A. Daniilidis, G. David, E. Durand-Cartagena, A. Lemenant: Rectifiability of self-contracted curves in the euclidean space and applications. *J. Geom. Analysis* 25 (2015), 1211–1239.
-  [DLS] A. Daniilidis, O. Ley, S. Sabourau: Asymptotic behaviour of self-contracted planar curves and gradient orbits of convex functions, *J. Math. Pures Appl.* 94 (2010), 183–199.
-  [MaPu] P. Manselli, C. Pucci.: Maximum length of steepest descent curves for quasi-convex functions, *Geom. Dedicata* 38 (1991), 211–227.
-  [IKL] C. Icking , R. Klein, E. Langetepe: Searching for the Kernel of a Polygon: A Competitive Strategy Using Self-Approaching Curves. *Proceedings of the eleventh annual symposium on Computational geometry* (1995).
-  [ST] E. Stepanov, Y. Teplitskaya: Self-contracted curves have finite length *J. London Math. Soc.* Volume 96, Issue 2 (2017), 455–481.

¡Gracias por su atención!