Relación entre multiplicadores de Fourier en $\mathbb{R}^N$, $\mathbb{T}^N$ y $\mathbb{Z}^N$

Daniel Isert Sales, Larry Andrés Matta Plaza, Bernat Ramis Vich, Jorge Santiago Ibáñez Marcos y Carlos Vila Pereira

UV, US, UPC, UNIZAR y UEX

Taller/Escuela de Análisis Funcional, La Laguna. Marzo 2022

Índice

Preliminares

Se trata de relacionar operadores relacionados con la transformada de Fourier en tres contextos diferentes: en $\mathbb{R}^N$, $\mathbb{T}^N$, y $\mathbb{Z}^N$.

Preliminares

Se trata de relacionar operadores relacionados con la transformada de Fourier en tres contextos diferentes: en $\mathbb{R}^N$, $\mathbb{T}^N$, y $\mathbb{Z}^N$.

- Dada una función $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$, su transformada de Fourier viene dada por

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi}\, dx, \;\; \xi \in \mathbb{R}^N$$

- La transformada de Fourier inversa de la función $\hat{f}(\xi) \in L^1(\mathbb{R}^N)$ viene dada por

$$f(x) = (\hat{f})^{\vee}(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x \cdot \xi}\, d\xi, \;\; \text{a.e. } x \in \mathbb{R}^N$$

Preliminares

Identificando $\mathbb{T}^N$ con el intervalo $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^N$ tenemos que

Preliminares

Identificando $\mathbb{T}^N$ con el intervalo $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^N$ tenemos que

- Dada una función $f \in L^1(\mathbb{T}^N)$, sus coeficientes de Fourier vienen dada por

$$\hat{f}(n) = \int_{\mathbb{T}^N} f(x) e^{-2\pi i x \cdot n} \, dx, \;\; n \in \mathbb{Z}^N$$

- Podemos recuperar la función f a partir de sus coeficientes de Fourier, en condiciones de regularidad sobre f, como

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^N} \hat{f}(n) e^{2\pi i x \cdot n}, \;\; x \in \mathbb{T}^N$$

Preliminares

Por último, dada una sucesión $a = \{a(n)\}_{n \in \mathbb{Z}^N} \in \ell^1(\mathbb{Z}^N)$ tenemos que

Preliminares

Por último, dada una sucesión $a = \{a(n)\}_{n\in\mathbb{Z}^N} \in \ell^1(\mathbb{Z}^N)$ tenemos que

- Su transformada de Fourier es la función periódica y continua dada por

$$\hat{a}(\xi) = \sum_{n\in\mathbb{Z}^N} a(n)e^{-2\pi i\xi\cdot n}, \ \xi \in \mathbb{T}^N$$

- Podemos recuperar la sucesión a, a partir de su transformada de Fourier $\hat{a}$, mediante

$$a(n) = \int_{\mathbb{T}^N} \hat{a}(\xi)e^{2\pi i\xi\cdot n}, \ n \in \mathbb{Z}^N$$

Preliminares

Recordamos la propiedad fundamental de la transformada de Fourier respecto al producto de convolución en el contexto continuo, discreto o periódico

$$(K * f)\hat{}(\xi) = \hat{K}(\xi)\hat{f}(\xi) = m(\xi)\hat{f}(\xi), \ \xi \in \mathbb{R}^N.$$

$$(K * f)\hat{}(n) = \hat{K}(n)\hat{f}(n) = m(n)\hat{f}(n), \ n \in \mathbb{Z}^N.$$

$$(K_d \star a)\hat{}(\xi) = \hat{K}(\xi)\hat{f}(\xi) = m(\xi)\hat{f}(\xi), \ \xi \in \mathbb{T}^N.$$

Preliminares

Existen diversos trabajos clásicos en la literatura que relacionan operadores de convolución en $\mathbb{R}^N$, $\mathbb{T}^N$, y $\mathbb{Z}^N$. Dichos operadores puede definirse mediante la acción de los multiplicadores correspondientes en el lado de la transformada de Fourier, multiplicadores de Fourier. Si m es una función continua en $\mathbb{R}^N$ definimos

$$(Cf)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} m(\xi)\hat{f}(\xi)e^{2\pi i x\cdot\xi}\, d\xi,\ x \in \mathbb{R}^N, \tag{1}$$

para una función f definida en $\mathbb{R}^N$.

$$(Pg)(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^N} m(k)\hat{g}(k)e^{2\pi i k\cdot x},\ x \in \mathbb{T}^N, \tag{2}$$

para una función g periódica en $\mathbb{T}^N$.

$$(Da)(n) = \int_{[-1/2,1/2]^N} m(\xi)P(\xi)e^{2\pi i n\cdot\xi},\ n \in \mathbb{Z}^N, \tag{3}$$

para $a = \{a(n)\}_n$ una sucesión en $\mathbb{Z}^N$ y $P(\xi) = \sum_m a(m)e^{-2\pi i m\cdot\xi}$.

Preliminares

Usualmente los operadores definidos por multiplicadores de Fourier se definen sobre una clase densa en L^p y se extienden por densidad a todo el espacio L^p.
En $\mathbb{R}^N$, partiendo de $m \in L^\infty$, se trata de ver, por ejemplo, cuándo el operador de convolución de núcleo $K \in \mathcal{S}'$ (distribuciones temperadas), definido para funciones $f \in \mathcal{S}$ (clase de Schwartz)

$$T_m f = f * K,$$

extiende a un operador acotado en L^p, donde $\hat{K} = m$.
Si G es uno de los grupos $\mathbb{R}^N$, $\mathbb{T}^N$ o $\mathbb{Z}^N$, denotaremos por $\mathcal{M}_p(G)$ al espacio de los multiplicadores que definen operadores acotados en $L^p(\mathbb{R}^N)$, $\ell^p(\mathbb{Z}^N)$ y $L^p(\mathbb{T}^N)$, respectivamente.

Relación entre $\mathcal{M}_p(\mathbb{R}^N)$ y $\mathcal{M}_p(\mathbb{Z}^N)$

En dimensión $N = 1$, el principal resultado que relaciona estas dos clases de multiplicadores atribuible a Karel de Leeuw (1965) afirma

$$m \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \{m(tn)\}_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{Z}).$$

uniformemente en $t > 0$.

Relación entre $\mathcal{M}_p(\mathbb{R}^N)$ y $\mathcal{M}_p(\mathbb{Z}^N)$

En dimensión $N = 1$, el principal resultado que relaciona estas dos clases de multiplicadores atribuible a Karel de Leeuw (1965) afirma

$$m \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \{m(tn)\}_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{Z}).$$

uniformemente en $t > 0$.

Observación: Si asumimos que $m \in L^\infty$, hemos de suponer ciertas hipótesis de regularidad sobre m, más generales que el hecho de que m sea continua. Hemos de asumir que m sea normalizada o, dicho de otro modo, que todo punto $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ sea de Lebesgue respecto a la función m.

Relación entre $\mathcal{M}_p(\mathbb{R}^N)$ y $\mathcal{M}_p(\mathbb{Z}^N)$

Teorema. Sea $1 \leq p \leq \infty$ y $m \in \mathcal{M}^p(\mathbb{R}^N)$ el operador multiplicador de Fourier T_m asociado a la función m continua en todo punto de $\mathbb{Z}^N$. Existe un único operador periódico $\tilde{T}_m$ definido por

$$(\tilde{T}_m f)(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^N} m(n) a(n) e^{2\pi i\, n\cdot x},$$

para

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^N} a(n) e^{2\pi i\, n\cdot x},$$

de forma que $\{m(n)\}_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathcal{M}^p(\mathbb{Z}^N)$. Además,

$$\|\tilde{T}_m\| \leq \|T_m\|.$$

Relación entre $\mathcal{M}_p(\mathbb{R}^N)$ y $\mathcal{M}_p(\mathbb{Z}^N)$

Lema 1. Si f es una función continua y periódica en $\mathbb{R}^N$, entonces

$$\lim_{\epsilon\to 0} \epsilon^{N/2} \int_{\mathbb{R}^N} f(x) e^{-\epsilon\pi|x|^2} dx = \int_{Q^N} f(x)dx \quad , \text{con } Q^N = [0,1]^N.$$

Lema 2. Si P y Q son polinomios trigonométricos, $T_m : L^p(\mathbb{R}^N) \to L^p(\mathbb{R}^N)$ un operador de tipo multiplicador. $\tilde{T}_m$, se ha definido en la base de polinomios trigonométricos. Definimos $w_\delta(y) := e^{-\pi\delta|y|^2}$, $\delta > 0$, $y \in \mathbb{R}^N$. Entonces, para α, $\beta > 0$ tales que $\alpha + \beta = 1$,

$$\lim_{\epsilon\to 0} \epsilon^{N/2} \int_{\mathbb{R}^N} T_m(P w_{\epsilon\alpha})(x) \overline{Q(x)} w_{\epsilon\beta}(x) dx = \int_{Q^N} (\tilde{T}_m P)(x) \overline{Q(x)} dx.$$

Prueba del Teorema:

- Caso $1 < p < +\infty$: P y Q polinomios trigonométricos.

$$\left| \int_{\mathbb{R}^N} (T_m(Pw_{\epsilon\alpha}))(x)\overline{Q(x)}w_{\epsilon\beta(x)dx} \right| \leq \|T_m\| \|Pw_{\epsilon\alpha}\|_p \|Qw_{\epsilon\beta}\|_q \tag{4}$$

Tomamos $\alpha = \frac{1}{p}$ y $\beta = \frac{1}{q}$.

$$\lim_{\epsilon \to 0} \epsilon^{N/2} \left| \int_{\mathbb{R}^N} (T_m(Pw_{\epsilon\alpha}))(x)\overline{Q(x)}w_{\epsilon\beta(x)dx} \right| \overset{\text{Lema 2}}{=} \int_{Q^N} (\tilde{T}_m P)(x)\overline{Q(x)}dx \tag{5}$$

Relación entre $\mathcal{M}_p(\mathbb{R}^N)$ y $\mathcal{M}_p(\mathbb{Z}^N)$

$$\int_{Q^N} (\tilde{T}_m P)(x)\overline{Q(x)}dx \leq \|T_m\| \lim_{\epsilon\to 0} \epsilon^{N/2} \|P w_{\frac{\epsilon}{p}}\|_p \|Q w_{\frac{\epsilon}{q}}\|_q$$

$$= \|T_m\| \lim_{\epsilon\to 0} \left[\epsilon^{N/2} \int_{\mathbb{R}^N} |P(x)|^p e^{-\epsilon\pi|x|^2} dx\right]^{\frac{1}{p}} \left[\epsilon^{N/2} \int_{\mathbb{R}^N} |Q(x)|^q e^{-\epsilon\pi|x|^2} dx\right]^{\frac{1}{q}}$$

$$\overset{\text{Lema 1}}{=} \|T_m\| \|P\|_{L^p(Q^N)} \|Q\|_{L^q(Q^N)}$$

Tomando supremos en $\|P\|_{L^p(Q^N)} \leq 1$ y $\|Q\|_{L^q(Q^N)} \leq 1$, se concluye que $\|\tilde{T}_m\| \leq \|T_m\|$.

Relación entre $\mathcal{M}_p(\mathbb{R}^N)$ y $\mathcal{M}_p(\mathbb{Z}^N)$

El recíproco del teorema anterior puede formularse como sigue:

Relación entre $\mathcal{M}_p(\mathbb{R}^N)$ y $\mathcal{M}_p(\mathbb{Z}^N)$

El recíproco del teorema anterior puede formularse como sigue:

Teorema. Sea $1 \leq p \leq \infty$ y m una función continua en $\mathbb{R}^N$. Supongamos que para todo $\epsilon > 0$, la sucesión $\{m(\epsilon n)\}_{n\in\mathbb{Z}^N} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{Z}^N)$ definiendo un operador periódico $\tilde{T}_\epsilon$ con normas uniformemente acotadas. Entonces, $m \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}^N)$ y define un operador T acotado en $L^p(\mathbb{R}^N)$. Además,

$$\|T\| \leq \sup_{\epsilon>0} \|\tilde{T}_\epsilon\|.$$

Relación entre $\mathcal{M}_p(\mathbb{R}^N)$ y $\mathcal{M}_p(\mathbb{Z}^N)$

Lema 3. Existe una función continua no negativa, η, con soporte compacto en $\mathbb{R}^n$ que satisface las siguientes dos propiedades

1. $\eta(0) = 1$,
2. $\displaystyle\sum_{m\in\mathbb{Z}^N} (\eta(x+m))^p = 1.$

Relación entre $\mathcal{M}_p(\mathbb{R}^N)$ y $\mathcal{M}_p(\mathbb{Z}^N)$

Consideramos primero el caso $1 \leq p < \infty$. Supongamos que $\|\tilde{T}_\epsilon\|_p \leq 1$ para todo $\epsilon > 0$, entonces $|m(\epsilon n)| \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{Z}^N$ y $\epsilon > 0$. Podemos definir Tf para $f \in \mathcal{D}$ como la función que tiene por transformada de Fourier $m\hat{f}$, es decir

$$\widehat{Tf}(x) = m(x)\hat{f}(x).$$

Dilatamos y periodizamos f de forma que obtenemos la siguiente función

$$\tilde{f}_\epsilon(x) = \epsilon^{-n} \sum_{n \in \mathbb{Z}^N} f(\frac{x+n}{\epsilon}).$$

De donde se deduce, mediante la fórmula de sumación de Poisson, que

$$\lim_{\epsilon \to 0} \epsilon^n (\tilde{T}_\epsilon \tilde{f}_\epsilon)(\epsilon x) = \int_{\mathbb{R}^n} m(t)\hat{f}(t)e^{2\pi ixt}dt = Tf(x).$$

Relación entre $\mathcal{M}_p(\mathbb{R}^N)$ y $\mathcal{M}_p(\mathbb{Z}^N)$

Por el lema anterior, como η es continua y $\eta(0) = 1$ deducimos que

$$\lim_{\epsilon \to 0} \epsilon^n (\tilde{T}_\epsilon \tilde{f}_\epsilon)(\epsilon x)\eta(\epsilon x) = Tf(x).$$

Entonces la relación

$$\epsilon^{np} \int_{\mathbb{R}^n} |\tilde{T}_\epsilon \tilde{f}_\epsilon(\epsilon x)\eta(\epsilon x)|^p dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx,$$

y el lema de Fatou nos permiten concluir que

$$\|Tf\|_p \leq \|f\|_p.$$

Relación entre $\mathcal{M}_p(\mathbb{R}^N)$ y $\mathcal{M}_p(\mathbb{T}^N)$

Lema 4. Sea $1 \leq p \leq \infty$, entonces existe una consante C tal que:

$$\|(g)^d\|_{\ell^p} \leq C\|g\|_{L^p}$$

Para cualquier $g \in E_R$

Lo demostramos para $R = 1$ en los casos $p = 1, p = \infty$ y mediante el Teorema de Interpolación de Riesz-Torin extendemos a todo p. Para el caso $R > 0$, realizamos una dilatación en g.

Lema 5. Sea $1 \leq p \leq \infty$, $\hat{\varphi} \in L^\infty\left(\mathbb{R}^N\right)$ con $\hat{\varphi} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}^N)$ y sop $\hat{\varphi} \subset [-R, R]^N$. Entonces $\varphi \in L^p$ y existe C constante tal que:

$$\| \sum_{m \in \mathbb{Z}^N} a(m)\varphi(\cdot - m)\|_{L^p} \leq C\|\hat{\varphi}\|_{\mathcal{M}_p}\|a\|_{\ell^p}$$

De forma análoga al caso anterior, se resuelve el caso con $R = 1$ y mediante dilataciones se extiende a al caso $R > 0$.

Teorema. Sea $1 \leq p \leq \infty$, $\hat{\varphi} \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que:

- $\hat{\varphi} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}^N)$
- sop $\hat{\varphi} \subset [-R, R]^N$

Si K es un núcleo de convolución K tal que $\|K * f\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p}$ con $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$, entonces

$$\|K^\varphi \star a\|_{\ell^p} \leq A\|a\|_{\ell^p}$$

Sea $a \in \ell^p$ y $f(x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^N} a(m)\varphi(x-m)$. Se puede ver que $(K^\varphi \star a)(n) = (K * f)(n)$ si $n \in \mathbb{Z}^N$. Por los lemas anteriores, se obtiene el resultado

Relación entre $\mathcal{M}_p(\mathbb{R}^N)$ y $\mathcal{M}_p(\mathbb{T}^N)$

Teorema. Sea $1 \leq p < \infty$. Supongamos que $\hat{\varphi}$ satisface:

- sop $\hat{\varphi} \subset [-R, R]^N$, $R < 1$
- para cierto $\varepsilon > 0$ existe $h \in C^\infty((-\varepsilon, \varepsilon)^N)$, $h \equiv 1$ sobre $[-\varepsilon/2, \varepsilon/2]^N$, $h/\hat{\varphi} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}^N)$. Si denotamos por $K_t(x) = t^{-N}K(t^{-1}x)$ a la familia de núcleos que proviene de la dilatación de un núcleo fijo K, entonces la desigualdad

$$\|(K_t * \varphi)^d \star a\|_{\ell^p} \leq \|a\|_{\ell^p}, \ a \in \ell^p(\mathbb{Z}^N),$$

uniformemente en $t > 0$, implica

$$\|K * f\|_{L^p} \leq A\|f\|_{L^p}, \ f \in L^p(\mathbb{R}^N),$$

donde $A \leq M_p(h/\hat{\varphi})$.

Relación entre $\mathcal{M}_p(\mathbb{R}^N)$ y $\mathcal{M}_p(\mathbb{T}^N)$

Supongamos que sop $\widehat{f} \subset [-\delta, \delta]^N$, donde $\delta < \epsilon/2$ y $\delta < 1 - R$. Entonces

$$\begin{aligned}\widehat{f}(\xi)e^{2\pi i x\xi} &= ((\widehat{f}h/\widehat{\varphi})(\xi)e^{2\pi i u\xi})\widehat{\varphi}(\xi)e^{2\pi i n\xi} \\ &= \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^N}\left(\frac{\widehat{f}h}{\widehat{\varphi}}e^{2\pi i u\cdot}\right)(\xi+k)\right)\widehat{\varphi}(\xi)e^{2\pi i n\xi},\end{aligned}$$

donde $x = n + u, n \in \mathbb{Z}^N, u \in [0,1)^N$. La serie se anula cuando $k \neq 0$ y define una función cuyos coeficientes de Fourier son

$$a^u(m) = \int_{\mathbb{R}^N}(\widehat{f}h/\widehat{\varphi})(\xi)e^{2\pi i u\xi}e^{2\pi i m\xi}d\xi.$$

Relación entre $\mathcal{M}_p(\mathbb{R}^N)$ y $\mathcal{M}_p(\mathbb{T}^N)$

Por lo anterior, obtenemos la fórmula

$$(C_t f)(x) = (D_t^{\varphi} a^u)(n), \quad x = n + u.$$

Entonces

$$\|C_t f\|_p^p = \int_{[0,1)^N} \sum_n |(D_t^{\varphi} a^u)(n)|^p du \leq \int_{[0,1)^N} \|a^u\|_p^p du$$
$$= \int_{\mathbb{R}^N} \left| \int_{\mathbb{R}^N} \widehat{f}(\xi)(h/\widehat{\varphi})(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi \right|^p dx \leq M_p(h/\widehat{\varphi})^p \|f\|_p^p.$$

Transformada de Hilbert

Consideramos el núcleo asociado a la tranformada de Hilbert $K = PV(\frac{1}{\pi x})$, su multiplicador de Fourier es $m(\xi) = -\mathrm{i}\ \mathrm{sign}(\xi)$. Sea φ una función par, sop $\widehat{\varphi} \subseteq [-R, R]$ y $\widehat{\varphi} \in C^{\infty}(\mathbb{R})$, y $\widehat{\varphi}(0) = 1$ notemos que

$$K_t^{\varphi}(m) = (K_t * \varphi)(m) = \int_{\mathbb{R}} -\mathrm{i}\ \mathrm{sign}(\xi)\widehat{\varphi}(\xi)e^{2\pi i m\xi}d\xi =$$

$$= 2\int_0^{+\infty} \widehat{\varphi}(\xi)\sin(2\pi m\xi)d\xi = \frac{1}{\pi m} + O\left(\frac{1}{m^2}\right).$$

Transformada de Hilbert

Deducimos por tanto que

$$(K_t^{\varphi} \star a)(n) = H^d a(n) + Ca(n).$$

Donde H^d és la transformada de Hilbert discreta definida como sigue

$$H^d a(n) = \sum_{m \neq n} \frac{a(m)}{\pi(n-m)}.$$

La tranformada de Hilbert es acotada en $L^p(\mathbb{R})$ para $1 < p < \infty$, por tanto por el teorema visto anteriormente deducimos que el operador transformada de Hilbert discreta es acotado en $l^p(\mathbb{Z})$ para $1 < p < \infty$.

Referencias

- P. Auscher y M. J. Carro, *On relations between operators on* $\mathbb{R}^N$, $\mathbb{T}^N$ *and* $\mathbb{Z}^N$. Studia. Math. 101 (1992), 165–182.
- E. Stein y Guido Weiss, *Introduction to Fourier analysis on euclidean spaces.* Princeton University Press (1971).