CÓMO HACER COSAS A PEDAZOS (EN ESPACIOS DE BANACH).

RICARDO GARCÍA (UNIVERSIDAD DE EXTREMADURA /IMUEX)

Hay una parte de la teoría de Espacios de Banach, denominada teoría local, que pretende describir las propiedades de un espacio en términos de sus subespacios de dimensión finita. Esta teoría es muy extensa, intervienen muchos conceptos y contiene una gran cantidad de líneas de trabajo que la desarrollan. Para este taller pretendemos que los alumnos elijan un camino, y lo recorran. Partiremos del concepto de *representación finita*, pasaremos por el Principio de Reflexividad Local y llegaremos a un objetivo, la noción de complementación local y algunas de sus aplicaciones.

Presentamos a nuestros compañeros de viaje: los espacios (normados) de dimensión finita. Comenzamos con el concepto básico de la representación finita en espacios de Banach. Un poco a lo lejos podemos divisar el impresionante Teorema de Dvoretzky ([D]), que prueba que todo espacio de Banach contiene subespacios de Hilbert ℓ_2^n de cualquier dimensión ε-isométricamente.

De forma natural surgen en el camino los espacios tipo $\mathcal{L}_p$, para $1 \leq p \leq \infty$ (introducidos por Lindenstrauss, Pełczyński y Rosenthal [LP, LR]). Son espacios de Banach cuyos subespacios de dimensión finita son "como" ℓ_p^n; es decir, serían espacios "localmente" L_p. Contemplando esta idea con atención llegamos al Principio de Reflexividad Local (PRL) de Lindenstrauss y Rosenthal [LR] que dice que los espacios de dimensión finita del bidual X^{**} son "iguales" a los del propio X (en el lenguaje anterior: X^{**} está finitamente representado en X).

Este sendero nos lleva a la noción de complementación local introducida por Fakhoury [F] y Kalton [K]): Un espacio X está λ-localmente complementado en Y si para cada $\varepsilon > 0$ y cada $E \subset Y$ subespacio de dimensión finita existe un operador $T : E \to X$ tal que $T(x) = x$ si $x \in E \cap Y$ y $\|T\| \leq \lambda + \varepsilon$. Por ejemplo, todo espacio de Banach X está 1-localmente complementado en X^{**} por el PRL. Extenderemos estas ideas al mundo de las sucesiones exactas $0 \to X \to Y \to Y/X \to 0$ de espacios de Banach incorporando de forma natural el espacio cociente Y/X, lo que nos da nueva información muy útil ([CGS]).

Es el momento de pararse y contemplar el paisaje que hemos recorrido: en el que aparece, ahora que lo vemos desde lo alto, la existencia de un operador de extensión de X^* a Y^* que nos permite afrontar problemas generales de extensión (y lifting) de aplicaciones (operadores, polinomios, funciones holomorfas,...). Y, si el camino no se hace largo, contemplaremos cómo la homología y la complementación local interaccionan entre sí y se van hacia el horizonte dejando tras de sí un rastro de productos tensoriales y resultados interesantes, como que c_0 –que no está complementado en ℓ_∞ como todo el mundo sabe– está localmente complementado en ℓ_∞. De hecho todo espacio tipo $\mathcal{L}_\infty$ (incluido c_0, claro) está localmente complementado en todo el mundo (y sólo ellos).

Referencias

[D] A. Dvoretzky, *Some results on convex bodies and Banach spaces*, Proc. Internat. Sympos. Linear Spaces (Jerusalem, 1960). Jerusalem Academic Press. pp. 123–160.

[LP] J. Lindenstrauss, and A. Pełczyński, *Absolutely summing operators in $\mathcal{L}_p$-spaces and their applications*, Studia Mathematica 23, n. 3 (1968), 275–326.

[LR] J. Lindenstrauss and H.P. Rosenthal, *The $\mathcal{L}_p$-spaces*, Israel J. Math. 7 (1969), 325–349.

[F] H. Fakhoury, *Sélections Linéaires Associées au Théorème de Hahn-Banach,* J. Funct. Anal., 11, (1972), 436–452.

[K] N.J. Kalton, *Locally complemented subspaces and $\mathcal{L}_p$-spaces for* $0 < p < 1$, Math. Nachr., 115, (1984), 71–97.

[CGS] J.M.F. Castillo, R. García, and J. Súarez, *Extension and lifting of operators and polynomials*, Mediterranean J. Math., 9 (2012), 767–788.