Relación entre multiplicadores de Fourier en $\mathbb{R}^N$, $\mathbb{T}^N$, y $\mathbb{Z}^N$.

Santiago Boza Rocho. Universitat Politècnica de Catalunya.

Existen diversos trabajos clásicos en la literatura que relacionan operadores de convolución en $\mathbb{R}^N$, $\mathbb{T}^N$, y $\mathbb{Z}^N$. Dichos operadores puede definirse mediante la acción de los multiplicadores correspondientes en el lado de la transformada de Fourier.

Así, si m es una función continua en $\mathbb{R}^N$, para $t > 0$, definimos

$$(C_t f)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} m(t\xi)\hat{f}(\xi)e^{2\pi i x\cdot\xi}\, d\xi,\ x \in \mathbb{R}^N, \tag{1}$$

para una función f definida en $\mathbb{R}^N$,

$$(P_t g)(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^N} m(tk)\hat{g}(k)e^{2\pi i k\cdot x},\ x \in \mathbb{T}^N, \tag{2}$$

para una función g periódica en $\mathbb{T}^N$, y

$$(D_t a)(n) = \int_{[-1/2,1/2]^N} m(t\xi)P(\xi)e^{2\pi i n\cdot\xi},\ n \in \mathbb{Z}^N, \tag{3}$$

para $a = \{a(n)\}_n$ una sucesión en $\mathbb{Z}^N$ y $P(\xi) = \sum_m a(m)e^{2\pi i m\cdot\xi}$.

(**??**) representa la acción de un multiplicador $m(t\cdot)$ en $\mathbb{R}^N$, (**??**) la de un multiplicador $\{m(tn)\}_n$ en $\mathbb{Z}^N$, mientras que (**??**) es la acción de la extensión periódica de la función $m(t\cdot)\chi_{[-1/2,1/2]^N}(\cdot)$ como multiplicador sobre $\mathbb{T}^N$. Asimismo, pueden considerarse los correspondientes operadores maximales continuo, periódico y discreto.

Un resultado de K. de Leeuw de 1965 ([**?**]) establece que para $1 < p < \infty$, el operador C_1 es acotado en $L^p(\mathbb{R}^N)$ si y sólo si el operador P_t es acotado en $L^p(\mathbb{T}^N)$ uniformemente en $t > 0$. En [**?**] se obtuvo una prueba de este resultado mediante métodos de transferencia. Kenig y Tomas en 1980 ([**?**]) extendieron este resultado a los operadores maximales anteriormente descritos.

En 1992, P. Auscher y María J. Carro ([**?**]) prueban resultados de discretización para operadores de convolución definidos en espacios de Lebesgue haciendo uso de las propiedades de muestreo válidas para funciones de tipo exponencial o funciones cuya transformada de Fourier es de soporte compacto.

Más exactamente, si representamos por K a la distribución temperada cotransformada de Fourier de m, podemos escribir, al menos formalmente, los operadores (**??**) y (**??**) como convoluciones

$$(C_t f)(x) = (K_t * f)(x), \quad (D_t a)(n) = \sum_m a(m)(K_t * \mathrm{sinc})(n-m),$$

donde $\mathrm{sinc}\, x := \prod_{j=1}^{N} \frac{\sin \pi x_j}{\pi x_j}$, cuya transformada de Fourier es la función $\chi_{[-1/2,1/2]^N}(\xi)$. Además, el papel de la función sinc aparece de forma natural al expresar D_t como operador de convolución discreto y puede ser sustituido por el de otras funciones cuya transformada de Fourier sea de soporte compacto, dando lugar a operadores más generales D_t^φ.

En [**?**], se prueba que, bajo ciertas hipótesis sobre la función φ de tipo exponencial, el operador de convolución continuo es acotado en L^p si y sólo si el operador discreto D_t^φ es acotado en $\ell^p(\mathbb{Z}^N)$, uniformemente en $t > 0$.

Referencias

[1] P. Auscher y M. J. Carro, On relations between operators on $\mathbb{R}^N$, $\mathbb{T}^N$ and $\mathbb{Z}^N$. Studia. Math. 101 (1992), 165–182.
[2] R. Coifmann y G. Weiss, Transference Methods in analysis, CBMS Regional Conf. Ser. in Math. 31 (1976), 1–59.
[3] C. Kenig y P. Tomas, Maximal Operators defined by Fourier multipliers. Studia. Math. 68 (1980), 79–83.
[4] K. de Leeuw, On L^p multipliers. Ann. of Math. 81 (1965), 364–379.
[5] E. Stein y Guido Weiss, Introduction to Fourier analysis on euclidean spaces. Princeton University Press (1971).