EL TEOREMA DE KULIKOV-PERSSON-PINKHAM MITJANÇANT ELS MODELS DLT

JOSE GALINDO I JIMÉNEZ

Abstract. We give an alternative proof of the Kulikov-Persson-Pinkham Theorem for a Kähler proper degeneration of K-trivial smooth surfaces. After running the Minimal Model Program, the obtained minimal dlt model has mild singularities which we resolve via Brieskorn's simultaneous resolutions and toric resolutions.

1. Introducció

A final dels 70 Kulikov aconseguí una fita important per al progrés de la teoria de singularitats i l'estudi de les degeneracions. Donada una degeneració de $K3$ superfícies va poder construir una model semiestable birracional.

Teorema 1.1 (Kulikov [Kul77], Persson-Pinkham [PP81])**.** *Siga $f : \mathcal{Y} \to \mathbb{D}$ un morfisme semiestable*[1] *a un disc complex tal que*

(1) $\mathcal{Y}_t$ és una superfície suau i K-trivial per a $t \in \mathbb{D}, t \neq 0$ i
(2) totes les components irreductibles de la fibra especial $\mathcal{Y}_0 = f^{-1}(0)$ són algebraiques.

Aleshores existeix una degeneració semiestable birracionalment equivalent $f' : \mathcal{X} \to \mathbb{D}$ tal que $K_{\mathcal{X}} \sim_{f'} \mathcal{O}_{\mathcal{X}}$.

A la bibliografia, a una degeneració $f : \mathcal{X} \to C$ amb fibres generals $\mathcal{X}_t$ satisfent $K_{\mathcal{X}_t} \sim_{\mathbb{Q}} \mathcal{O}_{\mathcal{X}_t}$ es defineix com a *Model de Kulikov* si $K_{\mathcal{X}} \sim_{\mathbb{Q},f} \mathcal{O}_{\mathcal{X}}$. Una característica essencial d'aquests és que poden ser classificats en termes de la dimensió del complex dual de la fibra central o, de manera equivalent, l'acció de la monodromia sobre $H^2(\mathcal{X}_t)$ (cf. [Kul77, Theorem II] i [Per77, Proposition 3.3.1]. Fent-ne ús foren estudiats amb profunditat a final del segle passat (cf. [Per77] o [FM83] entre altres). Així mateix, aquest resultar seguí clau en el desenvolupament de la geometria birracional, en particular el naixement del Programa del Model Minimal (en anglés: *Minimal Model Program* abreviat com a *MMP*).

L'autor ha rebut finançament del Govern Basc (Eusko Jaurlaritza) a través del programa BERC 2022-2025 i l'acreditació BCAM Severo Ochoa 2023-2027 finançada per MICIU/AEI/10.13039/501100011033.

[1]És ben conegut que pel Teorema de Reducció Semiestable de Mumford (cf. [KKMSD73, Ch. 4]) qualsevol degeneració pròpia i plana de espais analítics complexos o esquemes sobre cossos de característica 0 pot ser transformada en un model semiestable després d'aplicar un canvi de base surjectiu i finit i modificacions birracionals. A més, aquest es pot fer projectiu si el darrer ho era.

La demostració original per a $K3$ superfícies de Kulikov (cf. [Kul77]) era relativament obscura[2]. Seguint les seues idees el resultat fou generalitzat i la demostració aclarida per Persson i Pinkham a [PP81]. L'estratègia rau en arguments combinatoris i construccions analític-complexes prou subtils (freqüentment no algebraiques) com les *contraccions genèriques* i les *quasi-degeneracions*. Per tal d'evitar-les gastarem l'*MMP*.

Fujino provà que per a degeneracions de varietats K-trivials es pot aplicar el *MMP*, cf. [Fuj11, Theorem 1.1]. Hom obté un *model minimal dlt*[3] des del model semiestable, essencialment la versió *MMP* feble d'un model minimal semiestable. Aquest ha sigut estudiat més enllà i en té aplicacions molt interessants com per exemple en recents avanços de la conjectura SYZ, cf. [KX16] i [NXY19] entre altres.

En particular, Kollár, Laza, Saccà i Voisin demostraren que una degeneració minimal dlt de varietats hyper-Kähler manifolds funciona com a anàleg n-dimensional al model de Kulikov. Comparteixen moltes propietats, concretament en relació a l'acció de la monodromia i la topologia dels complexos duals associats, cf. [KLSV18, Theorem 0.11].

Açò propicia la pregunta: Pot hom obtindre un model de Kulikov des d'aquests models dlt? El cas complex analític fou estudiat per Iskovkikh i Shokurov, cf. [IS05, §7], i el d'espais algebraics per Odaka, cf. [Oda21, Appendix A]. Els primers demostraren que hom pot aplicar el *MMP* a una 3-varietat projectiva amb fibres de dimensió de Kodaira no-negativa mantenint-se a la classe de les *singularitats semiestables*. Amb això conclouen que el model és suau amb només singularitats Du Val a l'interior de les components, després les suavitzen amb la $\mathbb{Q}$-factorialització analítica.

Observació 1.2. Les singularitats semiestables en són un cas especial de singularitats en dimensió 3. Tenen bones propietats i admeten una descripció explícita (cf. [Sho93, §1]). No obstant això, no hi són als reculls populars del *MMP* (cf. [Kol13], [KM98] o [BCHM10]). Així que romanen desconeguts per a molts.

En contraposició, estudiem el model minimal amb la descripció i propietats estàndard de les singularitats dlt. Aquestes estan definides a un àmbit més general i han sigut àmpliament estudiades. D'aquesta anàlisi recuperem el Teorema 1.1.

Teorema 1.3. *Siga $f : \mathcal{Y} \to C$ un morfisme propi, pla, dlt i surjectiu d'un espai analític complex a una corba suau C. Suposant que*

(1) $\mathcal{Y}$ és (globalment) $\mathbb{Q}$-factorial i Kähler;
(2) que les fibres generals de f, $\mathcal{Y}_t$ sobre punts tancats $t \in C$, són superfícies suaus amb $K_{\mathcal{Y}_t} \sim \mathcal{O}_{\mathcal{Y}_t}$ fora d'un conjunt finit C^0.

Aleshores existeix un canvi de base finit i surjectiu $\pi : C' \to C$ i un mapa birracional p amb un diagrama commutatiu

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X} & \xrightarrow{\quad p \quad} & \mathcal{Y} \times_C C' \\ & {\scriptstyle f'} \searrow \quad \swarrow {\scriptstyle \pi_2} & \\ & C' & \end{array}$$

[2]Fins al punt que al moment d'ésser publicada alguns van dubtar sobre la validesa d'aquesta (veure la ressenya al seu article a Mathematical Reviews 58, # 2208).

[3]Ací gastem la paraula model en el sentit del *MMP* [KM98], és a dir una varietat birracionalment equivalent amb divisor canònic nef en la mateixa classe de singularitats.

tal que $f' : \mathcal{X} \to C'$ és un model de Kulikov i p és un isomorfisme sobre $\pi^{-1}(C \backslash C^0)$. π_2 denota la projecció natural a C'.

Observació 1.4. Les hipòtesi del teorema impliquen que el model té singularitats semiestables (comparar amb [IS05, Definition 7.2])

La demostració es du a terme en 3 passos

Pas 1 Comencem amb un model dlt/semiestable d'una degeneració de superfícies K-trivials i com a [Fuj11] obtenim un model dlt relativament K-trivial dlt mitjançant el *MMP*.

Pas 2 Demostrar que aquest model minimal dlt és snc fora dels llocs d'intersecció de les fibres especials. Concretament, l'espai total en té com a màxim singularitats terminals (no-regulars) sobre singularitats (no-regulars) aïllades de superfície a l'interior de les components irreductibles de les fibres especials, veure cf. Proposició 3.4.

Pas 3 Com que les singularitats canòniques de superfície són singularitats Du Val, les podem resoldre de manera *crepant*, després d'un canvi de base finit i surjectiu, mitjançant les resolucions de Brieskorn i les resolucions tòriques, gastant un argument de Friedman.

Observació 1.5.

i. A l'apèndix del seu article inèdit [Oda21], Odaka ho va provar per a espais algebraics sota unes hipòtesis un poc més generals, acceptant singularitats no $\mathbb{Q}$-factorials, amb una estratègia similar. De fet més fort puix que al Pas 3 demostra que no cal fer el canvi de base per aplicar la resolució simultània, cf. [Oda21, Lemma A.5]. Per a espais complexos analítics va observar que deuria ser possible fer el mateix però no és clar que les referències citades l'impliquen directament, cf. [Oda21, Remark A.6].

ii. El Pas 2 va ser demostrat essencialment amb més generalitat per Nicaise, Xu i Yue, ells proven que un model minimal dlt (bo) $(\mathcal{X}, D)$ per a dimensió arbitrària amb $K_{\mathcal{X}} + D$ Cartier és snc al voltant dels estrats lc unidimensionals (cf. [NXY19, Theorem 4.5]). En la nostra exposició la geometria de les singularitats a dimensió 3 ens permeten aplicar un argument més simple, veure Observació 3.3.

Agraïments. L'autor es sent molt agraït amb Evgeny Shinder i Philip Engel per la seua ajuda i orientació. També amb Vyacheslav Shokurov i Yuji Odaka per les seues observacions, així com amb Mattias Jonsson i Hyunsuk Kim per assenyalar unes errades menors.

2. Notació i resultats preliminars

2.1. **Definicions bàsiques del Programa del Model Minimal.** Generalment gastarem les definicions i notació de [KM98] i [Kol13].

Un *parell* (X, Δ) consisteix d'una varietat complexa analítica normal X i un $\mathbb{Q}$-(Weil) divisor Δ sobre aquest. Considerem parells (X, Δ) sobre una varietat suau S satisfent les següents condicions:

(1) X és una varietat normal i pròpia que en té feix dualitzant $\omega_{X/S}$ i
(2) siga $\Delta = \sum a_i D_i$ la descomposició irreductible de Δ aleshores cap D_i té el seu suport contingut a $\mathrm{Sing}(X)$.

Per a un morfisme birracional $f : Y \to X$, amb divisors excepcionals $\{E_i\}_{i\in I}$, si $K_X + \Delta$ és $\mathbb{Q}$-Cartier hom pot escriure

$$K_Y + f_*^{-1}\Delta \sim_{\mathbb{Q}} f^*(K_X + \Delta) + \sum_{E_i \text{ excepcional}} a(X, \Delta, E_i)E_i, \tag{1}$$

on $a(X, E_i, \Delta)$ es diu la *discrepància* de E_i. A més, establim $a(Y, \Delta, D) = -\operatorname{coeff}_D \Delta$ per als divisors no-excepcionals $D \subset Y$.

Siga (X, Δ) un parell, per a tot morfisme birracional $f : Y \to X$ i per a tot divisor irreductible $E \subset Y$ hom diu que

$$(X,\Delta) \text{ is } \begin{cases} \textit{terminal} \\ \textit{canònic} \\ \textit{plt} \text{ or } \textit{log terminal} \\ \textit{log canònic} \text{ (lc)} \end{cases} \quad \text{if } a(X,\Delta,E) \begin{cases} > 0 \text{ per a tot } E \text{ excepcional}, \\ \geq 0 \text{ per a tot } E \text{ excepcional}, \\ > -1 \text{ per a tot } E \text{ excepcional}, \\ \geq -1 \text{ per a tot } E. \end{cases}$$

Si $\Delta = 0$, llavors diem que X és terminal (resp. canònic, etc.) si $(X, 0)$ és terminal (resp. canònic, etc). Localment a un punt $(p \in X, \Delta)$ és terminal (resp. canònic, etc.) si existeix un entorn obert $p \in U$ tal que $(U, \Delta|_U)$ és terminal (resp. canònic, etc.).

i. Siga (X, Δ) un parell lc, aleshores una subvarietat irreductible $Z \subset X$ és in *centre log canònic* or *centre lc* si existeix un morfisme birracional $f : Y \to X$ i un divisor $E \subset Y$ tal que $a(X, \Delta, E) = -1$ i $\overline{f(E)}^X = Z$. Ací $\overline{(\cdot)}^X$ denota la clausura analítica. Més en general, per a qualsevol divisor $E \subset Y$ tal que $\overline{f(E)}^X \subseteq Z$ hom diu que E és un *divisor sobre* Z.
ii. Diem que (X, Δ) és d'*encreuaments simples i normals* o *snc*, per les seues segles en anglés (*simple normal crossings*), si X és suau i Δ és un divisor d'encreuaments normals i simples. L'obert maximal $X^{snc} \subset X$ tal que $(X^{snc}, \Delta|_{X^{snc}})$ és un parell snc es diu *lloc d'encreuaments simples i normals* o *lloc snc*. Un morfisme pla i propi $f : X \to C$ es diu *semiestable* si (X, X_t) és snc per a tot punt tancat $t \in C$, on $X_t = f^{-1}(t)$ amb estructura reduïda.
iii. Un centre log canònic es diu *divisorial log terminal* o *dlt* si cap centre lc de (X, Δ) viu sobre $X \backslash X^{snc}$. Anàlogament un morfisme $f : X \to C$ es diu *dlt* si (X, X_t) és dlt per a tot punt tancat $t \in C$.
iv. Un varietat X es diu (globalment) $\mathbb{Q}$-*factorial* si tot divisor de Weil sobre X és $\mathbb{Q}$-Cartier.
v. Diem que un parell $f : (X, \Delta) \to S$ és *minimal* si $K_X + \Delta$ és f-nef, és a dir nef per a tota corba tancada i irreductible continguda en una fibra tancada de f.
vi. Un mapa birracional $f : (X, \Delta_X) \dashrightarrow (Y, \Delta_Y)$ es diu *crepant*[4] si $K_X + \Delta_X \sim f^*(K_Y + \Delta_Y)$ i $\Delta_Y = f_*\Delta_X$.

2.2. **Parells dlt i el diferent.** Repassem algunes propietats dels parells dlt i el diferent. En general ens interessa tenir control sobre els parells dlt quan Δ és reduït. Per aquesta raó considerem

Teorema 2.1. [Kol13, Theorem 4.16] *Siga (X, Δ) un parell dlt i $V_1, ..., V_r$ els divisors irreductibles de Δ que apareixen amb coeficient 1.*

[4]L'encunyament del terme *crepant* a l'anglés va ser obra de Reid seguint la lògica que no és un morfisme *discrepant* (discrepant en català), çò és amb discrepàncies (cf. [Kol13, Definition 2.23]). En català fem el procés anàleg per traduir-lo així.

(1) *Els centres lc k-codimensionals de (X, Δ) són precisament les components irreductibles dels diversos $V_{i_1} \cap ... \cap V_{i_k}$.*
(2) *Cada component irreductible de $V_{i_1} \cap ... \cap V_{i_k}$ és normal de codimensió pura k.*
(3) *Siga $Z \subset X$ qualsevol centre lc. Suposant que V_i és ($\mathbb{Q}$-)Cartier per a algun i i $Z \nsubseteq V_i$. Llavors cada component irreductible de $V_i|_Z$ és ($\mathbb{Q}$-)Cartier.*

Definició 2.2. Siga un parell (X, Δ) i V_i, $i \in I$ les components primeres de Δ. Un *estrat* de Δ és una component connexa de la intersecció esquemàtica $\Delta_J = \cap_{j \in J} V_j$ amb $J \subset I$ no buit.

En concret, amb les hipòtesi del teorema anterior si Δ és reduït i efectiu les components irreductibles de cada estrat corresponen als centres log canònics.

A l'hora de treballar amb divisors sempre és útil tindre algun tipus de formula d'adjunció, però les singularitats obstrueixen la fórmula d'adjunció usual. Afortunadament per als parells dlt existeix un terme corrector per obtenir una adjunció (açò està definit per a hipòtesi més amples, veure [Kol13, §4.1])

Def./Prop. 2.3. [Fuj07, Remark 8.2] Siga (X, Δ) un parell dlt i V una component irreductible amb coefficient 1 a Δ. Llavors existeix un únic $\mathbb{Q}$-divisor $\mathrm{Diff}_V(\Delta - V)$ sobre V, definit per l'equació

$$(K_X + \Delta)|_V = K_V + \mathrm{Diff}_V(\Delta - V),$$

aquest és conegut com el *diferent* (en anglés: *the different*). Addicionalment, $(V, \mathrm{Diff}_V(\Delta - V))$ és un parell dlt.

En particular adoneu-vos-en que el diferent hereta la propietat dlt. Computar el diferent en general no és gaire fàcil però sota bones hipòtesi és possible. Hom dedueix fàcilment del Teorema 2.1 i [Fuj07, Proposition 9.2] la següent descripció del diferent

Corol·lari 2.4. [KX16, Paràgrafs 6 i 15] *Siga (X, Δ) un parell dlt tal que Δ és efectiu i reduït amb components irreductibles V_i i $K_X + \Delta$ és ($\mathbb{Q}$-)Cartier. Siga D_i la suma dels estrats de codimensió 2 de Δ amb support a V_i. Llavors*

$$\mathrm{Diff}_{V_i}(\Delta - V_i) = D_i,$$

i D_i és ($\mathbb{Q}$-)Cartier. Conseqüentment, el parell (V_i, D_i) és dlt i satisfà la fòrmula d'adjunció

$$(K_X + \Delta)|_{V_i} = K_{V_i} + D_i.$$

3. Demostració del Teorema de Kulikov-Persson-Pinkham.

Volem seguir-ne l'estratègia disposada a l'introducció. El primer pas només consistirà en aplicar el *MMP*, per tal d'obtindre un espai complex analític minimal $\mathcal{X}$ que siga terminal i $\mathbb{Q}$-factorial analytic space $\mathcal{X}$ amb $(\mathcal{X}, \mathcal{X}_t)$ sent dlt. El segon consisteix en estudiar la geometria dels parells dlt de la secció prèvia per tal d'obtindre una descripció acurada de les seues singularitats.

Proposició 3.1. *Siga X tridimensional i (X, Δ) un parell dlt tal que Δ és efectiu i reduït amb components irreductibles V_i $\mathbb{Q}$-Cartier*[5]*. Suposem que $K_X + \Delta$ és*

[5]En el marc de morfismes dlt i degeneracions aquesta condició s'esmenta com a verticalment $\mathbb{Q}$-Cartier (en anglés:*vertically $\mathbb{Q}$-Cartier*), veure [BFJ16], o un bon model dlt(en anglés:*good dlt model*), veure [NXY19].

Cartier, aleshores els V_i tenen com a màxim singularitats aïllades canòniques lluny dels estrats unidimensionals.

Demostració. Siga D_i la suma dels estrats unidimensionals amb suport a V_i. Pel Teorema 2.1 tots els V_i en són normals i per tant en tenen com a màxim singularitats aïllades. També ho són les components irreductibles de D_i i per tant són corbes suaus.

Pel Corol·lari 2.4 (V_i, D_i) és dlt i $K_{V_i} + D_i$ és Cartier. Per definició de parell dlt existeix un tancat $Z := V_i \backslash V_i^{snc}$ tal que qualsevol divisor sobre Z en té discrepància > -1. Com que $K_{V_i} + D_i$ és Cartier, per la fórmula (1) les discrepàncies són enters i per tant la discrepància ha de ser ≥ 0.

Z no pot contenir ni els estrats 0-dimensionals de D_i ni una corba irreductible amb suport a D_i ja que aquests són centres log canònics pel Teorema 2.1. Suposem que existeix un punt tancat $p \in \operatorname{Sup} D_i \cap Z$ com que la discrepància és ≥ 0 el punt és canònic i per tant regular en V_i per [Kol13, Theorem 2.29]. Conseqüentment $\operatorname{Sup} D_i$ és al lloc suau de V_i. Lluny d'aquest en té com a màxim singularitats canòniques. □

Corol·lari 3.2. *Siga (X, Δ) un parell dlt tal que X és tridimensional i Gorenstein i Δ és efectiu i reduït amb components irreductibles V_i $\mathbb{Q}$-Cartier. Suposant que $K_X + \Delta$ és Cartier i $X \backslash \operatorname{Sup} \Delta \subset X^{snc}$. Aleshores*

$$X \backslash X^{snc} = \cup_i \operatorname{Sing}(V_i)$$

on $\operatorname{Sing}(V_i)$ *consisteix només en singularitats canòniques aïllades a l'interior de V_i i X és terminal. En particular si (X, Δ) és snc a un entorn obert dels estrats unidimensionals.*

Demostració. Per la proposició anterior només cal demostrar que els V_i són Cartier perquè llavors un punt no-regular de X també en serà un punt no-regular de V_i.

Asseverem que X és terminal. Com que (X, Δ) és dlt llavors qualsevol divisor E que no estiga sobre el lloc snc satisfà $a(E, X, \Delta) > -1$. Però $K_X + \Delta$ és Cartier i per tant com abans $a(E, X, \Delta) \geq 0$. Com que $X \backslash \operatorname{Sup} \Delta \subset X^{snc}$ pel [KM98, Lemma 2.27] obtenim $a(E, X, 0) > 0$.

Com que X és tridimensional, terminal i Gorenstein [Kaw88, Lemma 5.1] implica que tot divisor $\mathbb{Q}$-Cartier sobre X és Cartier. Per tant els V_i són Cartier i hom dedueix que $\operatorname{Sing}(X) \subset \cup_i \operatorname{Sing}(V_i)$ i per tant $X \backslash X^{snc} = \cup_i \operatorname{Sing}(V_i)$. □

Observació 3.3. Una asseveració similar va ser demostrada amb més generalitat a [NXY19, Theorem 4.5] per a qualsevol dimensió. La demostració difereix de la nostra a l'hora de demostrar que els V_i són Cartier al voltant dels estrats unidimensionals. Ells ho proven amb un argument sofisticat però per al nostre cas és prou aplicar-ne el lemma de Kawamata.

Proposició 3.4. *Siga $f : \mathcal{Y} \to C$ un morfisme propi, pla, dlt i surjectiu d'un espai analític complex a una corba suau C. Suposant que*

(1) $\mathcal{Y}$ és (globalment) $\mathbb{Q}$-factorial i Kähler;
(2) que les fibres generals de f, $\mathcal{Y}_t$ sobre punts tancats $t \in C$, són superfícies suaus amb $K_{\mathcal{Y}_t} \sim \mathcal{O}_{\mathcal{Y}_t}$ fora d'un conjunt finit C^0.

Aleshores existeix un morfisme birracional $p : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ i un diagrama commutatiu

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Y} & \xrightarrow{\quad p \quad} & \mathcal{X} \\ & {\scriptstyle f}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle f'} & \\ & C & \end{array}$$

tal que p és un isomorfisme sobre $C\backslash C^0$ i

1. *$\mathcal{X}$ és terminal, $\mathbb{Q}$-factorial i $K_{\mathcal{X}} \sim_f \mathcal{O}_{\mathcal{X}}$.*
2. *$(\mathcal{X}, \mathcal{X}_t)$ és un parell dlt per a tot punt tancat $t \in C$ i snc al voltant dels estrats unidensionals de $\mathcal{X}_t$.*
3. *Les components irreductibles de $V_{i,t}$ of $\mathcal{X}_t$ tenen com a màxim singularitats canòniques i*

$$\mathcal{X}\backslash\mathcal{X}^{snc} = \cup_{i,t} \operatorname{Sing}(V_{i,t}).$$

Demostració. **Pas 1.** Podem aplicar l'*MMP*, cf. [HP16, Theorem 1.1], i hom obté $f' : \mathcal{X} \to C$ un morfisme dlt amb $\mathcal{X}$ terminal i $\mathbb{Q}$-factorial tal que $K_{\mathcal{X}}$ és f'-nef. A més, per [Fuj11, Theorem 1.1] hom dedueix que si $K_{\mathcal{Y}_t} \sim \mathcal{O}_{\mathcal{Y}_t}$ per a una fibra general aleshores $K_{\mathcal{X}} \sim_{f'} \mathcal{O}_{\mathcal{X}}$.

Per a qualsevol fibra tancada $\mathcal{X}_t$, per adjunció (cf. [Kol13, Sec 4.1]) obtenim

$$\mathcal{O}_{\mathcal{X}_t} \sim (K_{\mathcal{X}} + \mathcal{X}_t)|_{\mathcal{X}_t} = K_{\mathcal{X}_t}.$$

Així mateix, una fibra general $\mathcal{Y}_t$ és K-trivial i per tant per adjunció un divisor qualsevol de $K_{\mathcal{Y}}$ indueix un divisor principal a $\mathcal{Y}_t$ i com a conseqüència $|K_{\mathcal{Y}}|$ consisteix d'una combinació lineal de les fibres especials. Així que $K_{\mathcal{Y}}$ interseca trivialment amb qualsevol corba d'una fibra general $\mathcal{Y}_t$. Conseqüentment, no poden ser contretes per cap pas del *MMP*, així doncs p és un isomorfisme sobre $C\backslash C^0$.

Pas 2. $\mathcal{X}$ és relativament K-trivial de manera que $K_{\mathcal{X}}$ i $K_{\mathcal{X}} + \mathcal{X}_t$ són Cartier. A més a més, cada divisor és $\mathbb{Q}$-Cartier per $\mathbb{Q}$-factorialitat. En conseqüència lluny de les altres fibres especials en algun entorn $\mathcal{U} \subset \mathcal{X}$ de $\mathcal{X}_t$ el parell $(\mathcal{U}, \mathcal{X}_t)$ satisfà les hipòtesi del Corol·lari 3.2 d'on es dedueix l'asseveració del teorema.

□

D'aquesta proposició hom dedueix que l'única obstrucció a obtindre un model de Kulikov genuí després d'aplicar el *MMP* són les singularitats canòniques restants a les fibres especials. Aquestes en són exactament singularitats Du Val, veure [KM98, Theorem 4.5] les quals hi admeten una resolució simultània en família després d'un canvi de base surjectiu i finit. Aquest canvi de base en produeix singularitats als llocs d'intersecció que en resolem *crepant*-ment amb un truc de Friedman.

Demostració del Teorema 1.3. Després d'aplicar la Proposició 3.4 és prou demostrar que hom pot resoldre totes les singularitats Du Val aïllades del model minimal dlt crepantment.

Pas 3. Sense pèrdua de generalitat suposem que només n'hi ha una fibra singular anomenada $\mathcal{Y}_0$. Tria una singularitat Du Val $x \in V_i$ a la component irreductible de $\mathcal{Y}_0$. Llavors existeix un entorn de $x \in \mathcal{U} \subseteq \mathcal{Y}$ per al qual només n'hi han singularitats Du Val. Aleshores per [Bri71] existeix un canvi de base finit, surjectiu

i ramificat $\pi_0 : \tilde{C} \to C$ i un diagrama Cartesià

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Z} & \xrightarrow{g} & \mathcal{Y} \\ {\scriptstyle h}\downarrow & \lrcorner & \downarrow{\scriptstyle f_0} \\ \tilde{C} & \xrightarrow[\pi_0]{} & C \end{array}$$

que admet una resolució simultània q

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{\mathcal{Z}} & \xrightarrow{q} & \mathcal{V} \subset \mathcal{Z} & \xrightarrow{g} & x \in \mathcal{U} \subset \mathcal{Y} \\ {\scriptstyle \tilde{h}}\downarrow & & {\scriptstyle h}\downarrow & \lrcorner & \downarrow{\scriptstyle f_0} \\ \tilde{C} & \xrightarrow[=]{} & \tilde{C} & \xrightarrow[\pi_0]{} & C \end{array} .$$

Ens hi adonem què $\mathcal{Z}$ és h-trivial ja que el divisor canònic relatiu no hi canvia per a un canvi de base finit, surjectiu i ramificat. A més q és una resolució minimal a cada fibra i per tant q és un isomorfisme en codimensió 1. Així doncs $q^*K_{\mathcal{Z}} \sim K_{\tilde{\mathcal{Z}}}$. Globalment obtenim

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{\mathcal{Z}} & \xrightarrow{q} & \mathcal{Z} & \xrightarrow{g} & \mathcal{Y} \\ {\scriptstyle \tilde{h}}\downarrow & & {\scriptstyle h}\downarrow & \lrcorner & \downarrow{\scriptstyle f_0} \\ \tilde{C} & \xrightarrow[=]{} & \tilde{C} & \xrightarrow[\pi_0]{} & C \end{array} .$$

Ara $\tilde{\mathcal{Z}}$ pot tenir singularitats sobrevingudes per l'efecte del canvi de base al lloc d'intersecció.

Asseveració. *Existeix un morfisme crepant i birracional*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Z}' & \xrightarrow{\quad j \quad} & \tilde{\mathcal{Z}} \\ & {\scriptstyle h'}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle \tilde{h}} & \\ & \tilde{C} & \end{array}$$

tal que és un isomorfisme llevat d'un entorn $\mathcal{V}_0$ del lloc d'intersecció de $\tilde{\mathcal{Z}}_0$; és una log-resolució de singularitats a $\mathcal{V}_0$ i $h' : \mathcal{Z}' \to \tilde{C}$ és un morfisme pla i propi.

La demostració de l'asseveració s'obté aplicant els arguments de [Fri83, Proposition 1.2]. Un canvi de base d'ordre $n : 1$ crea singularitats tòriques que localment analíticament als punts triples en són així

$$\operatorname{Spec} \mathbb{C}[x, y, z, t]/(xyz - t^n)$$

i les corbes dobles esdevenen corbes de singularitats A_{n-1}. Aquestes es poden resoldre amb la resolució tòrica estàndard obtinguda subdividint els ventalls corresponents. El més important és que aquest procés és crepant. Açò es fa localment al voltant dels llocs d'intersecció lluny de les singularitats canòniques i per tant és equivalent al cas snc descrit a l'article de Friedman.

Després d'aplicar l'asseveració, $(\mathcal{Z}', (\mathcal{Z}'_0))$ és snc lluny de les singularitats Du Val, en té una singularitat Du Val manys que $(\mathcal{Y}, \mathcal{Y}_0)$ i manté la K-trivialitat. Repetint aquest procés a $(\mathcal{Z}', \mathcal{Z}'_0)$ de forma inductiva dona un morsfisme finit i surjectiu

$\pi : C' \to C$, un mapa birracional

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X} & \overset{p}{\dashrightarrow} & \mathcal{Y} \times_C C' \\ & {\scriptstyle f'} \searrow \quad \swarrow & \\ & C' & \end{array}$$

i un morfisme pla i propi $f' : \mathcal{X} \to C'$. Ara qualsevol singularitat ($x \in \mathcal{X}$) ha de jaure sobre l'interior de les components irreductibles V_i ja que $\mathcal{X}_0$ és un divisor Cartier. Açò no ocurreix perquè hem resolt totes les singularitats i per tant $\mathcal{X}$ és suau, $K_{\mathcal{X}} \sim_{f'} \mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ i $\mathcal{X}_0$ és un divisor snc q.e.d. □

Corol·lari 3.5 (Teorema Kulikov-Persson-Pinkham)**.** *Siga $f : \mathcal{X} \to \mathbb{D}$ una degeneració Kähler pròpia de superfícies suaus K-trivials sobre el disc complex. Aleshores existeix un canvi de base surjectiu i finit $\pi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$, $\mathcal{X}'$ una varietat suau i un diagrama commutatiu*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X}' & \overset{p}{\dashrightarrow} & \mathcal{X} \times_{\mathbb{D}} \mathbb{D} \\ & {\scriptstyle f'} \searrow \quad \swarrow {\scriptstyle \pi_2} & \\ & \mathbb{D} & \end{array} .$$

On p és un mapa birracional tal que és un isomorfisme llevat de a la fibra central i $f' : \mathcal{X}' \to \mathbb{D}$ és una degeneració semiestable amb $K_{\mathcal{X}'} \sim_{f'} \mathcal{O}_{\mathcal{X}'}$.

Demostració. Aplicar el Teorema de Reducció Semiestable de Mumford [KKMSD73, Ch. 4] i després el Teorema 1.3. □

Observació 3.6. [Oda21, Remark A.6] Per al Teorema 1.1 originalment a [Kul77] Persson i Pinkham no hi assumiren que la varietat fos Kähler només que les fibres fossen algebraiques. Aquesta hipòtesi s'assumeix per tal de poder aplicar l'*MMP* per a espais analítics complexos ja que no ha sigut establert amb la generalitat del Teorema 1.1.

N'hi ha una obstrucció a la generalització. Una degeneració de superfícies $K3$ que no admet cap model de Kulikov va ser construït a [Nis88, §4]. Aquesta degeneració satisfà que la fibra central conté una superfície analítica complexa no-algebraica com a component irreductible (una superfície de classe de Kodaira VII).

Observació 3.7 (Cas de superfícies amb $\kappa(\mathcal{X}_t) = 0$)**.** Els models de Kulikov no existeixen sempre per a superfícies suaus amb divisor canònic *numèricament* trivial. Un contraexemple de degeneracions de superfícies d'Enriques ve donat pels "tests de flors" a [Per77, 3.3 and Appendix 2]. Pel [Fuj11, Theorem 1.2] aplicant el *MMP* s'obté un model minimal dlt $f : \mathcal{X} \to C$ amb $K_{\mathcal{X}} \sim_{\mathbb{Q},f} \mathcal{O}_{\mathcal{X}}$.

El que fallaria és al segon pas ja que és crucial que $K_{\mathcal{X}}$ siga Cartier: Per deduir que les discrepàncies de (V_i, D_i) són enters i que les components irreductibles V_i són Cartier.

Observació 3.8 (Degeneracions maximals de superfícies Abelianes)**.** El cas més interessant de model de Kulikov és l'anomenat de Tipus III, el qual hui dia també es coneix com a *Maximally Unipotent degeneration* (cf. [KLSV18, Definition 6.10]) o *maximally degenerate family* (cf. [NXY19, §1.2]). Per a superfícies, això vol dir que la acció de la monodromia sobre $H^2(\mathcal{X}_t)$, amb $\mathcal{X}_\sqcup$ una fibra general, té un bloc de Jordan de rang 2 o, equivalentment, que el complex dual de la fibra té dimensió 2, çò és, la fibra singular en té punts triples.

Donat un model de Kulikov de Tipus III de superfícies Abelianes, cada component irreductible de la fibra singular és tòrica; de fet, el complement de les corbes dobles és isomorf a $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ (cf. [FM83, pp. 21-22]). Per tant, a la prova del Teorema 1.3 no es resol cap singularitat. Així, el model obtés a la Proposició 3.4 ja és semiestable. Hom dedueix que al cas algebraic de l'observació anterior també s'obté un model semiestable.

References

[Art74] M. Artin. Algebraic construction of Brieskorn's resolutions. *J. Algebra*, 29:330–348, 1974.

[BCHM10] Caucher Birkar, Paolo Cascini, Christopher D. Hacon, and James McKernan. Existence of minimal models for varieties of log general type. *J. Am. Math. Soc.*, 23(2):405–468, 2010.

[BFJ16] Sébastien Boucksom, Charles Favre, and Mattias Jonsson. Singular semipositive metrics in non-Archimedean geometry. *J. Algebr. Geom.*, 25(1):77–139, 2016.

[Bri71] Egbert Brieskorn. Singular elements of semi-simple algebraic groups. In *Proc. Int. Cong. Math., Nice*. Gauthier-Villars, 1971.

[FM83] Robert Friedman and David R. Morrison. *The Birational Geometry of Degenerations*, volume 29 of *Progress in mathematics*. Birkhäuser, 1983.

[Fri83] Robert Friedman. Base change, automorphisms, and stable reduction for type III K3 surfaces. *The birational geometry of degenerations (Cambridge, Mass., 1981)*, 29:277–298, 1983.

[Fuj07] Osamu Fujino. What is log terminal? *Flips for 3-folds and 4-folds*, 35:49–62, 2007.

[Fuj11] Osamu Fujino. Semi-stable minimal model program for varieties with trivial canonical divisor. *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.*, 87(3):25–30, 2011.

[HP16] Andreas Höring and Thomas Peternell. Minimal models for Kähler threefolds. *Invent. Math.*, 203(1):217–264, 2016.

[IS05] Vasily A. Iskovskikh and Vyacheslav V. Shokurov. Birational models and flips. *Russ. Math. Surv.*, 60(1):27–94, 2005.

[Kaw88] Yujiro Kawamata. Crepant blowing-up of 3-dimensional canonical singularities and its application to degenerations of surfaces. *Ann. Math. (2)*, 127(1):93–163, 1988.

[Kaw94] Yujiro Kawamata. Semistable minimal models of threefolds in positive or mixed characteristic. *J. Algebr. Geom.*, 3(3):463, 1994.

[KKMSD73] G. Kempf, F. Knudsen, D. Mumford, and Bernard Saint-Donat. *Toroidal embeddings. I*, volume 339 of *Lect. Notes Math.* Springer, 1973.

[KLSV18] János Kollár, Radu Laza, Giulia Saccà, and Claire Voisin. Remarks on degenerations of hyper-Kähler manifolds. *Ann. Inst. Fourier*, 68(7):2837–2882, 2018.

[KM98] János Kollár and Shigefumi Mori. *Birational Geometry of Algebraic Varieties*, volume 134 of *Camb. Tracts Math.* Cambridge University Press, 1998.

[Kol98] János Kollár. Real algebraic threefolds. I: Terminal singularities. *Collect. Math.*, 49(2-3):335–360, 1998.

[Kol99] János Kollár. Real algebraic threefolds. II: Minimal model program. *J. Am. Math. Soc.*, 12(1):33–83, 1999.

[Kol13] János Kollár. *Singularities of the minimal model program.*, volume 200 of *Camb. Stud. Adv. Math.* Cambridge University Press, 2013.

[Kul77] Viktor Kulikov. Degenerations of K3 surfaces and Enriques surfaces. *Math. USSR, Izv.*, 11(5):957, 1977.

[KX16] János Kollár and Chenyang Xu. The dual complex of Calabi-Yau pairs. *Invent. Math.*, 205(3):527–557, 2016.

[Mor88] Shigefumi Mori. Flip theorem and the existence of minimal models for 3-folds. *J. Am. Math. Soc.*, 1(1):117–253, 1988.

[Nis88] Kenji Nishiguchi. Degeneration of K3 surfaces. *J. Math. Kyoto Univ.*, 28(2):267–300, 1988.

[NXY19] Johannes Nicaise, Chenyang Xu, and Tony Yue Yu. The non-archimedean SYZfibration. *Compos. Math.*, 155(5):953–972, 2019.

[Oda21] Yuji Odaka. On log minimality of weak K-moduli compactifications of Calabi-Yau varieties. Preprint, arXiv:2108.03832 [math.AG] (2021), 2021.

[Per77] Ulf Persson. *On degenerations of algebraic surfaces*, volume 189 of *Mem. Am. Math. Soc.* American Mathematical Society, 1977.

[PP81] Ulf Persson and Henry Pinkham. Degeneration of surfaces with trivial canonical bundle. *Ann. Math. (2)*, 113:45–66, 1981.

[Sho93] Vyacheslav V. Shokurov. Semistable 3-fold flips. *Russ. Acad. Sci., Izv., Math.*, 42(2):371–425, 1993.

Departament de Matemàtiques, Universitat de València, Carrer del Doctor Moliner 50, Burjassot, 46100, País Valencià

Email address: jose.galindo@uv.es