# Justificar en matemática: logros y dificultades de estudiantes a partir de una propuesta de innovación


**Emilio Lacambra[1], Marta Fabiana Pauletich[1]**
**Andrea Bermúdez Cicchino[1]**

*[1]Facultad de Ciencias Agrarias y Forestales. Universidad Nacional de La Plata. (Argentina), Calle 60 y 119. La Plata (1900) Buenos Aires. Argentina emilio.lacambra@agro.unlp.edu.ar*


# Argumentation in mathematics: students' achievements and difficulties based on an innovation proposal


## RESUMEN

Matemática es una materia de primer año de las carreras de Ingeniería Agronómica e Ingeniería Forestal. Como parte de un proceso de innovación que comenzó en 2023, la cátedra cambió el enfoque de las clases teóricas y su relación con las prácticas enfatizando la interpretación de los resultados y la fundamentación de las estrategias de resolución elegidas. En una comunicación anterior, compartimos una reflexión sobre la nueva propuesta didáctica desde el estudio de la guía de trabajos prácticos y la evaluación del tema «Límite y continuidad». En continuidad con dicho análisis, en el presente trabajo nos enfocamos en las respuestas de estudiantes a un ejercicio de examen del mismo tema que hace hincapié en la justificación, la interpretación de gráficos y la aplicación de conceptos teóricos a situaciones prácticas, identificando dificultades y logros de los estudiantes. Esto nos permite problematizar algunos aspectos de la propuesta que se está poniendo en práctica.



**Palabras clave:** innovación, argumentación, justificación, respuesta de los estudiantes



## ABSTRACT

Mathematics is a first-year course in the career of Agronomic Engineering and Forestry Engineering. As part of a renewal process initiated in 2023, the course revised its approach to theoretical classes and their connection to practice sessions, emphasizing the interpretation of results and the justification of chosen problem-solving strategies. In a previous communication, we shared a new didactic approach based on the study of the practical work guide and the evaluation of the topic "Limits and continuity." Following up on that analysis, this work focuses on students' answers to a midterm exam question on the same topic, which emphasizes justification, interpretation of graphs, and the application of theoretical concepts to practical exercises, identifying both students' difficulties and achievements. This allows us to understand key aspects of the approach currently being implemented.

**Keywords:** innovation, argumentation, justification, student responses

## INTRODUCCIÓN

Matemática es una materia de primer año de las carreras de Ingeniería Agronómica e Ingeniería Forestal, de la Facultad de Ciencias Agrarias y Forestales de la Universidad Nacional de La Plata, Argentina. A partir del 2023 se implementó una innovación pedagógica en la cátedra, cambiando el enfoque de las clases teóricas y su relación con las prácticas enfatizando la interpretación de los resultados y la fundamentación de las estrategias de resolución elegidas. En [1] se describe la nueva propuesta didáctica desde el estudio de una guía de trabajos prácticos y su evaluación. Esta propuesta se inscribe en una reflexión más amplia sobre la enseñanza de la matemática a estudiantes cuya formación profesional no está orientada específicamente hacia esta disciplina, aunque la requieren como herramienta fundamental. Desde una perspectiva que entiende la innovación según lo expresado por Dumrauf y Cordero [2] como un cambio planificado y contextualizado, la propuesta puede considerarse innovadora ya que modifica, entre otros aspectos, la forma en que se venía impartiendo la asignatura. Hasta entonces, la enseñanza se centraba exclusivamente en los algoritmos y el cálculo formal; la propuesta actual incorpora actividades que requieren la interpretación de gráficos y la argumentación, habilidades clave en la formación de ingenieros agrónomos y forestales. El trabajo mencionado incluye, además, un análisis didáctico de las actividades propuestas al estudiantado en una guía de trabajos prácticos, así como de los ejercicios incluidos en las evaluaciones, comparando sus versiones previa y posterior a la innovación.

En el presente trabajo y a modo de continuidad del anterior, se analizan las respuestas de los estudiantes a un ejercicio de examen, con el objetivo de avanzar en la comprensión de los logros y las dificultades que surgen al aplicar este nuevo enfoque. Consideramos valioso recuperar las producciones estudiantiles como una forma de visibilizar aquello que lograron resolver — entendiendo la resolución como la integración entre los fundamentos teóricos y los procedimientos — así como las dificultades que enfrentaron, desde una perspectiva cualitativa que trasciende los resultados numéricos de los exámenes o las estadísticas de aprobación. Sostenemos que detenernos a reflexionar en torno a esta evaluación de los aprendizajes puede brindarnos información significativa para valorar la innovación en la propuesta de enseñanza y fortalecerla. Asimismo, podría resultar útil para seguir repensando la propia evaluación, en consonancia con los objetivos que orientan dicha innovación.

## ALGUNOS POSICIONAMIENTOS TEÓRICOS

Siguiendo los lineamientos de Homero Flores [3] entendemos por *práctica argumentativa* al conjunto de acciones y razonamientos que un individuo pone en juego para justificar o explicar un resultado, o bien para validar una conjetura surgida durante el proceso de resolución de un problema. Cabe aclarar que entendemos que *la justificación de un resultado* consiste en su validación mediante una afirmación que establezca con claridad por qué dicho resultado es correcto. Para ello, resulta fundamental establecer una distinción clara entre lo que vamos a entender por *resolución* y *justificación* en el contexto de este trabajo. Entendemos por resolución a la presentación de datos, resultados numéricos o procedimientos — como una tabla de valores, un gráfico o un cálculo — que apoyan una argumentación. La justificación, en cambio, implica explicar por qué esa resolución es válida o por qué es pertinente aplicar determinado teorema o propiedad en una situación específica. Justificar, por lo tanto, requiere que los estudiantes articulen la resolución con los fundamentos teóricos que respaldan sus procedimientos, integrando definiciones, teoremas y propiedades matemáticas relevantes en su argumentación.

## METODOLOGÍA

Para el análisis se utilizaron como insumo exámenes del año 2024, en particular, se seleccionaron respuestas a un ejercicio sobre el mismo tema abordado en [1] límite y continuidad (Figura 1). Se eligió específicamente un ejercicio que pone mayor énfasis en la justificación, tanto en su consigna como en la corrección, y que además articula los conceptos de límite y continuidad con la interpretación de un gráfico. Es decir, se optó por aquel en el que la innovación propuesta se manifiesta de forma más evidente.

4) Dada la gráfica de la función $s(x)$, mostrada en la **Figura 1**, determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. **Justificar**.

a) $s(x)$ es continua en el intervalo $(0,2)$.

b) El $\lim_{x\to 3^-} s(x)$ no existe.

c) Como el límite cuando $x$ tiende a $-1$ existe, sabemos que la función es continua en $x$ igual a $-1$.

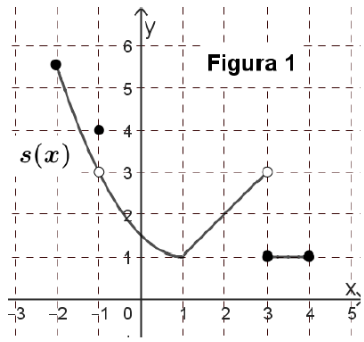



Figura 1: Ejercicio de examen utilizado para analizar las respuestas de los estudiantes.

Para el análisis de las respuestas, se utilizó una matriz valorativa con tres dimensiones: la completitud y validez del argumento (I), el uso de lenguaje matemático (II) y la conexión entre teoría y práctica (III) (Tabla 1). En la dimensión (I) se valoró si el argumento contiene todo lo necesario para llegar a la conclusión y la corrección lógica del razonamiento utilizado. En la dimensión (II) “uso de lenguaje matemático” se analizó si los estudiantes utilizan lenguaje matemático y simbólico de manera adecuada o si expresan sus justificaciones mediante lenguaje cotidiano y en qué grado. Mientras que la dimensión (III) “conexión teoría-práctica” da cuenta de en qué grado los estudiantes articulan los conceptos teóricos con las resoluciones.

| Dimensión | Nivel 1 | Nivel 2 | Nivel 3 | Nivel 4 |
|---|---|---|---|---|
| **Completitud y validez del argumento (I)** | Ausencia de justificación o sólo muestra el resultado final o con errores conceptuales graves. | Justificación parcial, algunos pasos están explicados pero faltan conexiones lógicas o imprecisiones. | Justificación completa que conecta todos los pasos principales de manera válida y precisa. | Justificación exhaustiva que anticipa posibles objeciones y clarifica sutilezas. |
| **Uso del lenguaje matemático (II)** | Uso predominante de lenguaje coloquial con escaso vocabulario técnico. | Mezcla de lenguaje coloquial y términos matemáticos con algunas imprecisiones. | Uso correcto y consistente de terminología matemática. | Uso preciso y adecuado del lenguaje matemático y simbólico. |
| **Conexión teoría-práctica (III)** | No menciona conceptos teóricos en la resolución. | Menciona conceptos teóricos pero sin explicitar su aplicación en la resolución. | Explica cómo los conceptos teóricos se aplican a pasos específicos de la resolución. | Integra fluidamente la teoría con la práctica, mostrando comprensión de los fundamentos conceptuales. |

Tabla 1: Matriz valorativa utilizada en el análisis de las respuestas de los estudiantes a un ejercicio de examen del tema "límite y continuidad".

Para cada una de las dimensiones se consideraron cuatro niveles de valoración. Cabe mencionar que la matriz como dispositivo, y los criterios con los que se construyó, no corresponden con los criterios utilizados originalmente para corregir y calificar dicho ejercicio en los exámenes.

Con el objetivo de tener un panorama sobre las dificultades y los logros de los estudiantes, se seleccionaron 12 de los 95 exámenes presentados en esa fecha. La selección buscó garantizar una muestra con distintos niveles de rendimiento. En primer lugar, los 95 exámenes se dividieron en tres grupos según la calificación obtenida en la corrección del ejercicio seleccionado: exámenes con el ejercicio bien, exámenes con el ejercicio regular y un tercer grupo con exámenes con el ejercicio mal o sin realizar. Se analizaron exámenes de cada uno de esos grupos hasta que el análisis de nuevos exámenes dejó de aportar información relevante a los propósitos del trabajo, es decir no surgían nuevos niveles o patrones de apropiación del lenguaje simbólico o de conexión entre teoría y práctica, ni nuevos errores conceptuales en las justificaciones.

## RESULTADOS

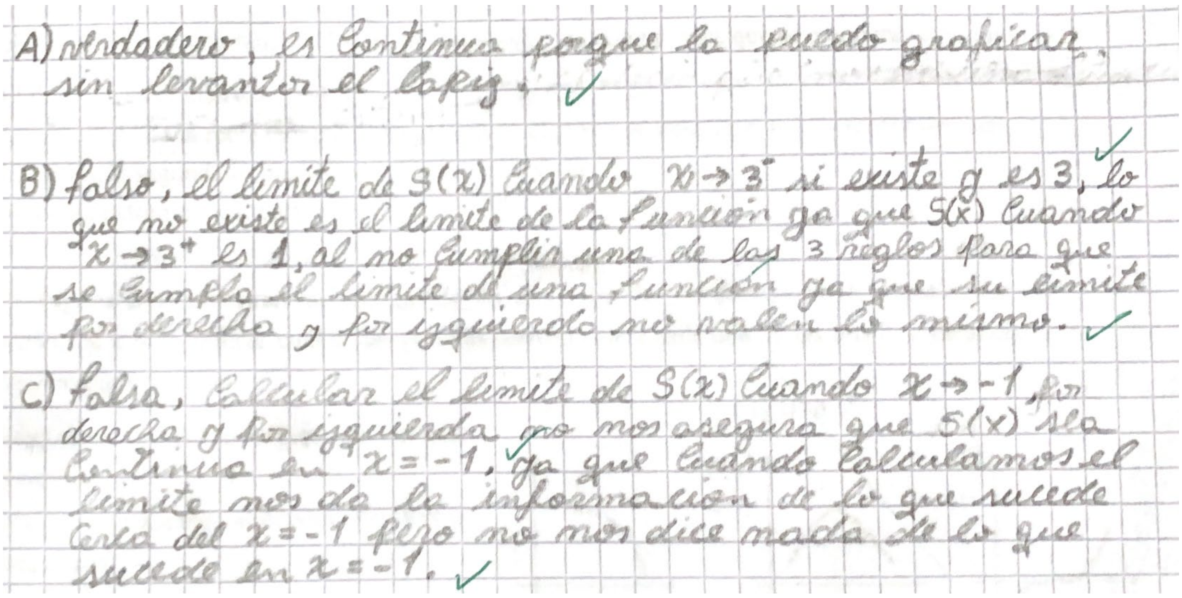
En la Tabla 2 se resume el nivel alcanzado por cada estudiante en las dimensiones I, II y III de la matriz valorativa para cada uno de los incisos (4a, 4b y 4c) del examen.

| examen | 4a | | | 4b | | | 4c | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | I | II | III | I | II | III | I | II | III |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 3 | 1 | 1 |
| 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 |
| 3 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 |
| 4 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 3 | 2 |
| 5 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 6 | 3 | 1 | 1 | 4 | 2 | 3 | 4 | 2 | 3 |
| 7 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 1 | 2 | 4 | 4 |
| 8 | 2 | 4 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 |
| 9 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 |
| 10 | 2 | 2 | 2 | 4 | 3 | 2 | 2 | 2 | 4 |
| 11 | 3 | 2 | 2 | 3 | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 |
| 12 | - | - | - | 3 | 1 | 3 | 2 | 2 | 3 |

*Tabla 2:* Niveles alcanzados por cada estudiante en las respuestas a cada inciso del ejercicio de examen seleccionado (Figura 1) según las dimensiones de la matriz valorativa (Tabla 1)

Como caracterización general, se puede observar diversidad en los niveles alcanzados de cada dimensión y en cada inciso. Más particularmente, se encontró que un mismo estudiante, dependiendo del inciso del ejercicio, alcanzó niveles distintos en las dimensiones analizadas en la rúbrica. Si bien los incisos tratan sobre el mismo tema, se relacionan con distintos conceptos, presentan las consignas de diferentes maneras y ponen en juego habilidades diferentes. Asimismo, una respuesta a un inciso por parte de un estudiante puede alcanzar distintos niveles según la dimensión analizada. Es decir que se pudieron encontrar, por ejemplo, argumentos con mucha validez (niveles altos en la dimensión I) sin que haya muestra de un desarrollo de un lenguaje matemático preciso o una articulación explícita de conceptos teóricos con la práctica (por ejemplo, el estudiante 1 en el inciso c, o el estudiante 6 en el inciso a); o bien respuestas con lenguaje específico y buena conexión teoría-práctica sin que eso, por sí solo, permita poner en evidencia un argumento completo y válido para la situación dada en la consigna (como el estudiante 7 en el inciso c o el estudiante 8 en el inciso a).

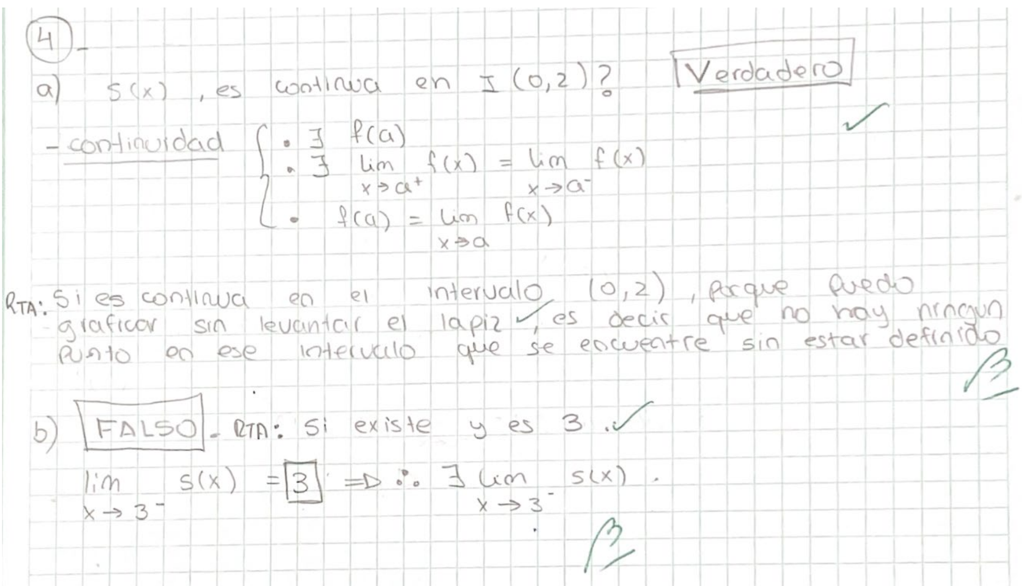
A continuación, se muestran dos ejemplos de respuestas a los tres incisos del ejercicio por parte de dos estudiantes (Figuras 2 y 3). Las mismas son ilustrativas de logros y dificultades observadas en relación a las dimensiones de la matriz en exámenes que fueron valorados con buen puntaje en la corrección.


A) verdadero, es continua porque la puedo graficar sin levantar el lapiz.

B) falso, el limite de S(x) cuando $x \to 3^-$ si existe y es 3, lo que no existe es el limite de la funcion ya que S(x) cuando $x \to 3^+$ es 1, al no cumplir una de las 3 reglas para que se cumpla el limite de una funcion ya que su limite por derecha y por izquierdo no valen lo mismo.

C) falso, calcular el limite de S(x) cuando $x \to -1$, por derecha y por izquierda no nos asegura que S(x) sea continua en $x = -1$, ya que cuando calculamos el limite nos da la informacion de lo que sucede cerca del $x = -1$ pero no nos dice nada de lo que sucede en $x = -1$.

Figura 2: Respuesta del estudiante 6 al ejercicio.


4) -

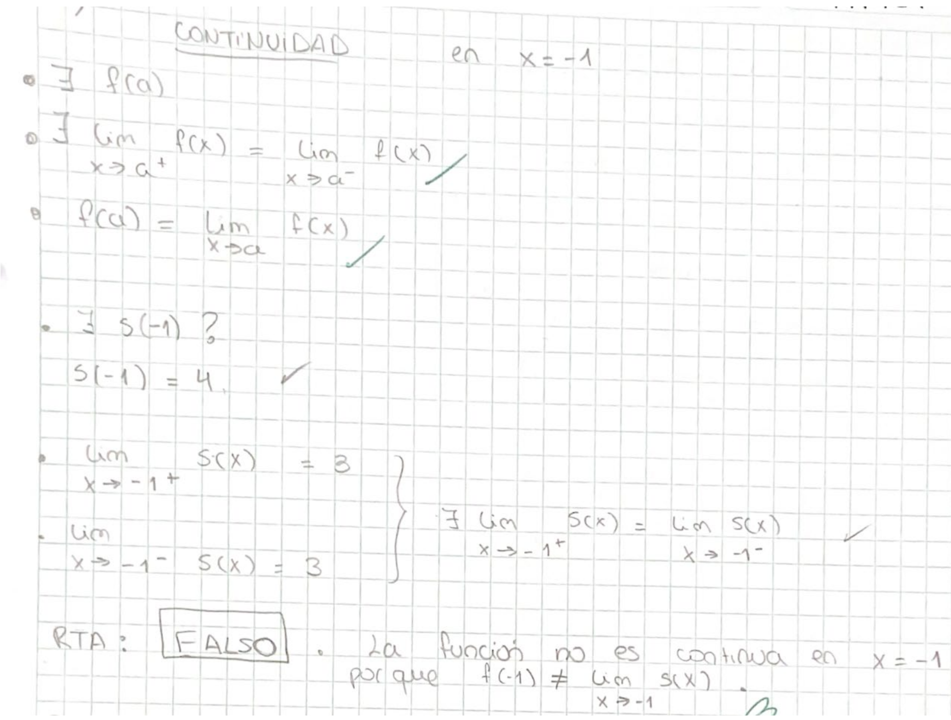
a) S(x), es continua en I (0,2)? $\boxed{\text{Verdadero}}$

- continuidad
$$\begin{cases} \bullet\ \exists\ f(a) \\ \bullet\ \exists \lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) \\ \bullet\ f(a) = \lim_{x \to a} f(x) \end{cases}$$

RTA: Si es continua en el intervalo (0,2), porque puedo graficar sin levantar el lapiz, es decir que no hay ningun punto en ese intervalo que se encuentre sin estar definido

b) $\boxed{\text{FALSO}}$ - RTA: Si existe y es 3.

$$\lim_{x \to 3^-} S(x) = \boxed{3} \Rightarrow \therefore \exists \lim_{x \to 3^-} S(x).$$



Figuras 3a y 3b: Respuesta del estudiante 2 al ejercicio. Los incisos a y b se encuentran resueltos en la Figura 3a, y el último inciso en la Figura 3b.

En la Figura 2 se muestra la respuesta del estudiante 6, la misma está completa, con la mención explícita a conceptos asociados a la temática de la consigna y una justificación acorde, sin embargo, el estudiante utilizó mayormente lenguaje cotidiano, con nociones intuitivas asociadas al gráfico que fueron discutidas en clase, como por ejemplo el concepto de continuidad como la posibilidad de no levantar el lápiz al trazar la curva o el concepto de límite como el valor al que se acerca la función.

En la Figura 3 se muestra la respuesta del estudiante 7, en la que utiliza lenguaje simbólico adecuado, haciendo mención explícita a conceptos asociados a la temática (la definición de continuidad, por ejemplo). Sin embargo, la explicitación de dichos conceptos no implicó que el estudiante pueda establecer una relación con el resto de la respuesta ni vincular ese concepto con lo solicitado en concreto en la consigna, como se observa en las respuestas a los incisos a y c. Esto muestra, por un lado, cierta adquisición de los conceptos e incluso de la pertinencia para el caso en particular, y al mismo tiempo una falta de apropiación para su utilización o bien dificultades para entender la consigna, que también involucra comprensión conceptual del tema y adquisición de lenguaje matemático.

El ejercicio seleccionado posibilitó el análisis de los diferentes niveles que alcanzaron los estudiantes para las tres dimensiones establecidas en la rúbrica. Por un lado, permite la evaluación de la completitud y validez de las justificaciones de las consignas, pero además pone en evidencia diferentes niveles de apropiación del lenguaje simbólico y matemático, como así también distintos niveles de conexión entre la teoría y la práctica que alcanzaron los estudiantes, estos últimos podrían estar directamente relacionados con el grado de comprensión y apropiación de los conceptos. En general se observó que la explicitación de los conceptos teóricos, como ser definiciones o propiedades, no necesariamente implicó que el estudiante pueda aplicar dichos conceptos teóricos para responder la consigna.

Cabe mencionar que en ejemplos de exámenes con bajo puntaje en la corrección, se encuentran casos en que se esbozan justificaciones en las que se evidencian errores conceptuales y/o falta de desarrollo o precisión en la respuesta. Por ejemplo, como respuestas al inciso c: "el límite sí existe cuando x tiende a -1 por derecha e izquierda pero la función en ese punto no está definida pero f(-1)=4" (del estudiante 2); "falso porque el límite cuando x tiende a menos 1 existe sólo en 1 punto y no es el de la función" (del estudiante 5).

## CONCLUSIONES

Este trabajo presenta la respuesta de los estudiantes a un ejercicio de examen, con el objetivo de analizar el impacto que tuvo en el alumnado el proceso de innovación comenzado hace algunos años en la cátedra de matemática. La actividad seleccionada para realizar dicho análisis está en línea con los objetivos de la propuesta de enseñanza, que hace hincapié en la justificación, la interpretación de gráficos y la aplicación de conceptos teóricos a situaciones prácticas, y permitió poner en evidencia la utilización de conceptos teóricos en su resolución.

El ejercicio de justificar, incluso en consignas que en principio no son abiertas (como un verdadero o falso), requiere de decisiones en torno a qué conceptos teóricos utilizar, de qué manera hacerlo y cómo presentarlos verbalmente para ponerlos articulados con la situación concreta. Esta práctica propicia la adquisición de habilidades específicas, jerarquizando objetivos de enseñanza transversales a las carreras, que están ligados al razonamiento y la validación de argumentos y pueden ser de utilidad para estudiantes universitarios y futuros profesionales de las ramas de las ingenierías. La diversidad de respuestas obtenidas y de estrategias seguidas por los estudiantes para la justificación de las consignas dejaron de manifiesto no sólo distintos grados de apropiación de los conceptos objeto de enseñanza, sino también las dificultades propias de la adquisición de dichas competencias argumentativas. Esto invita a los docentes de la cátedra a repensar las estrategias de enseñanza para poder orientar a los estudiantes en la construcción de criterios para tomar dichas decisiones, y al mismo tiempo pone en valor la propuesta de enseñanza más allá de los contenidos disciplinares específicos explicitados en el programa.

Por último, si bien la rúbrica utilizada en este trabajo con fines investigativos, no se aplica en la evaluación de los estudiantes, la experiencia de su aplicación en este trabajo podría ser de utilidad para repensar la forma en que se diseñan los criterios de evaluación, se dan a conocer los resultados y se realizan las retroalimentaciones a los estudiantes, ponderando los mencionados objetivos transversales y pensándose en forma progresiva a lo largo del desarrollo de la materia. Asimismo, se concluye que las consignas de actividades como la analizada, resultan potentes para poner en evidencia los niveles de aprendizajes en las tres dimensiones seleccionadas, en la evaluación de los estudiantes, a diferencia de lo que ocurre con los ejercicios que se resuelven aplicando un procedimiento y no requieren fundamentación u otro tipo de verbalización en los que se pongan en juego explícitamente conceptos teóricos.

## REFERENCIAS

[1] Bermúdez Cicchino, A., Lacambra, E., Pauletich, M.F y Trípoli, M. La Interpretación de gráficos y la argumentación de resoluciones matemáticas como motivación para repensar los trabajos prácticos. IX Congreso nacional y VII Congreso internacional de educación en las ciencias agropecuarias. Libro de conferencias y trabajos. 1ª ed Morón, 430-437 (2024).

[2] Dumrauf, A., y Cordero, S. Tramas entre escuela y universidad. Formación docente, innovación e investigación colaborativa. Series: Educación. 1a ed. La Plata: EDULP (2017).

[3] Homero Flores, A. Esquemas de argumentación en profesores de matemáticas del bachillerato. Educación matemática, 19 (1), 63-98. (2007).