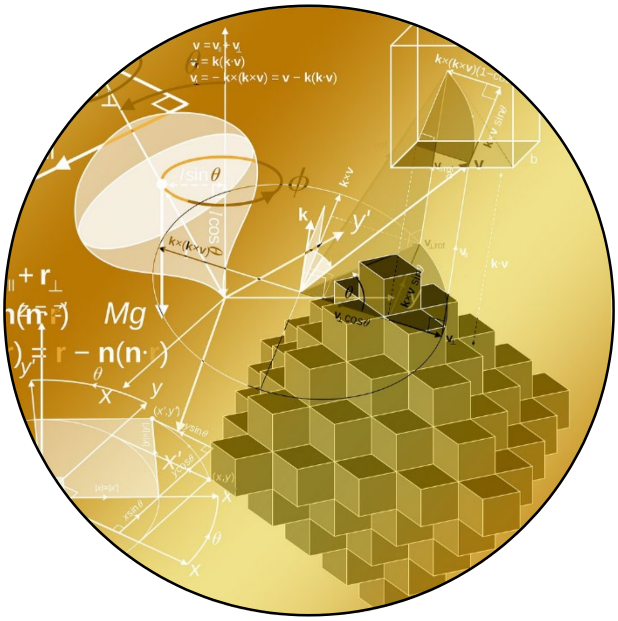
V JID+ Jornades d'Innovació Docent en Matemàtiques
en Educació Superior



ACTAS DE LAS V JID+

Jornades d’Innovació Docent en Matemàtiques en Educació Superior

Burjassot (València), 10 y 11 de julio de 2025

Edita:

Proyecto de Innovación Educativa y Calidad Docente: "CO^{3}MAT: COntextualización, COmunicación y COncretización en los grados de MATemáticas ." (UV-SFPIE_PIEE-3327524).

Burjassot (València) 2025

ISBN: 978-84-09-75584-4

En esta publicación se presentan los resúmenes escritos de las comunicaciones de las V JID+ Jornades d'Innovació Docent en Matemàtiques en Educació Superior, celebradas en la Facultad de Matemáticas de la Universitat de València los días 10 y 11 de julio de 2025 en el marco del Proyecto de Innovación Educativa "**CO^{3}MAT**: **CO**ntextualización, **CO**municación y **CO**ncretización en los grados de **MAT**emáticas"

Las jornadas se realizaron en formato semipresencial y se emitieron en directo en formato on-line. Toda la información relativa a las jornadas puede encontrarse en la página web https://www.uv.es/gidmes/posts/2025/VJID+.html

ÍNDICE

docencIA

Francisco de Casa González[1], Esther Sanabria-Codesal [2]

[1] ***Eleva tu punto de vista, Valencia, Spain, e-mail: fcg@elequipoe.com.***
[2] ***Departamento de Matemática Aplicada, Universitat Politècnica de València, Camino de vera s/n, 46022, Valencia, Spain, e-mail: esanabri@mat.upv.es.***

teAIching

RESUMEN

La inteligencia artificial (IA) ya está presente en nuestras aulas y es necesario tener en cuenta esta nueva herramienta a la hora de planificar e implementar las metodologías de enseñanza y evaluación en la enseñanza universitaria. En este trabajo, reflexionamos sobre los retos, oportunidades y dilemas que plantea la IA en este contexto educativo, con la convicción de que el cambio está en marcha y ha llegado para quedarse. La irrupción de la IA generativa obliga a repensar el papel del profesorado y del alumnado, abriendo nuevas posibilidades para la personalización del aprendizaje, la optimización de recursos y el desarrollo del pensamiento crítico. Sin embargo, su integración también implica afrontar riesgos asociados a la equidad, la transparencia, la fiabilidad de la información y la necesidad de una regulación clara para fomentar un uso responsable y pedagógicamente relevante de la IA en la universidad.

Palabras clave: Inteligencia Artificial, Innovación docente

ABSTRACT

Artificial intelligence (AI) is already present in our classrooms, and it is essential to consider this new tool when planning and implementing teaching and assessment methodologies in higher education. In this paper, we reflect on the challenges, opportunities, and dilemmas posed by AI in this educational context, with the conviction that change is underway and here to stay. The emergence of generative AI compels us to rethink the roles of both teachers and students, opening up new possibilities for personalized learning, resource optimization, and the development of critical thinking. However, its integration also involves addressing risks related to equity, transparency, information reliability, and the need for clear regulation to foster responsible and pedagogically relevant use of AI at the university level.

Keywords: Artificial Intelligence, Teaching Innovation

INTRODUCCIÓN

La Inteligencia Artificial (IA) está plenamente integrada en la sociedad y su presencia en la educación universitaria es una realidad ineludible, como indica el informe publicado

en mayo del 2025 por la Fundación Conocimiento y Desarrollo (CYD): *INTELIGENCIA ARTIFICIAL Y UNIVERSIDAD: Uso y percepción de la IA en el entorno universitario* [4]. Los recientes avances, especialmente en el ámbito de la IA generativa, han supuesto una disrupción sin precedentes en los procesos de enseñanza y aprendizaje, afectando tanto a estudiantes como a docentes [2].
El objetivo de este artículo es reflexionar sobre los beneficios y riesgos de la IA en la docencia, así como aportar ejemplos prácticos y orientaciones para su uso responsable y pedagógicamente relevante en la enseñanza universitaria, dentro del marco del reglamento europeo [8].

EVOLUCIÓN DE LA IA

La evolución de la IA ha estado marcada por hitos como el test de Turing, el desarrollo de los sistemas expertos, los "inviernos" de la IA, Deep Blue, AlexNet, Imagenet, AlphaGo y la actual explosión de herramientas generativas como ChatGPT, como vemos en la Figura 1.

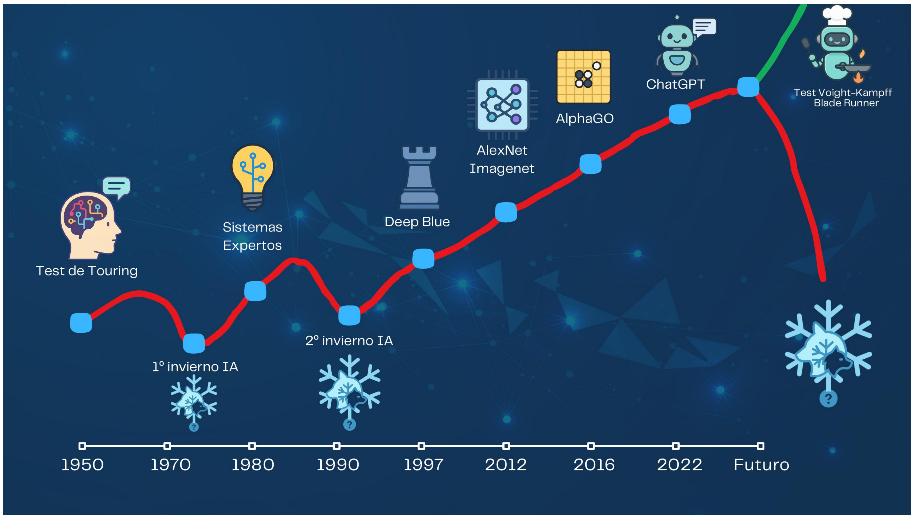


Figura 1: Evolución de la IA.
(Fuente: Elaboración propia)

Este recorrido ha transformado el modo en que se generan y gestionan textos, imágenes, vídeos, música o código, y ha abierto nuevas posibilidades para la docencia universitaria. Al igual que en el pasado la introducción de la calculadora o el software de cálculo supuso una transformación del trabajo docente, la IA exige ahora repensar los roles, metodologías y competencias a desarrollar.

USO ACTUAL EN LA UNIVERSIDAD

El uso de herramientas de inteligencia artificial generativa está ampliamente extendido tanto entre los estudiantes universitarios como a nivel institucional. Los estudiantes aprovechan estas tecnologías principalmente para resolver dudas académicas y recopilar información relevante, mientras que los profesores y las universidades las utilizan en la creación de materiales y el impulso de la investigación.
Según el reciente informe de la CYD, aproximadamente del 89 % del alumnado universitario utiliza herramientas de IA en su día a día, siendo ChatGPT, Gemini y DeepSeek

las más habituales. Un tercio de los estudiantes las emplea a diario y casi la mitad varias veces a la semana. Los usos principales incluyen: resolución de dudas, búsqueda de información, recopilación de datos y elaboración de trabajos académicos, como vemos en la Figura 2.

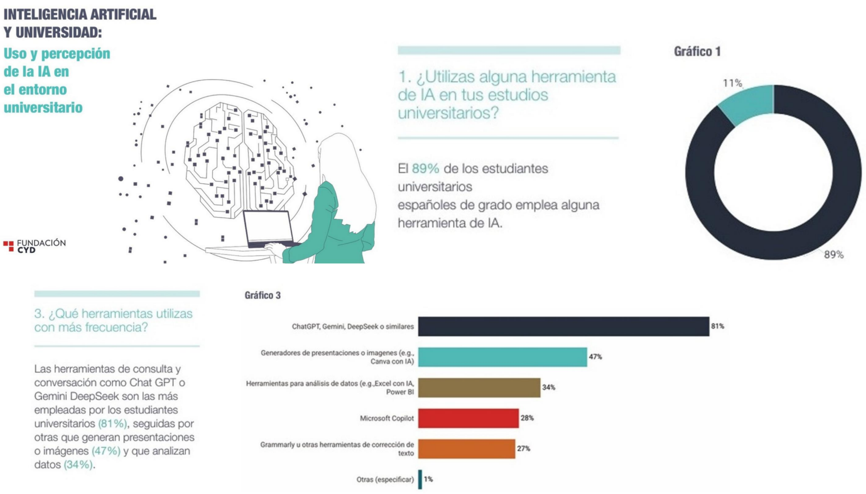


Figura 2: Uso y percepción de la IA en el entorno universitario (Fuente: CyD)

La IA se percibe por los estudiantes como una herramienta que ahorra tiempo, permite personalizar resultados y facilita el acceso a recursos educativos, aunque su uso convive con otras fuentes más tradicionales como plataformas de apuntes y ejercicios resueltos, como *El rincón del vago*, *Wuolah*, etc.
El profesorado universitario también ha incorporado la IA generativa en su labor profesional, como indican los datos recogidos por el Observatorio del Impacto de la Tecnología en las Profesiones de la Universidad Alfonso X el Sabio (UAX).
Su uso en este caso abarca principalmente la generación de recursos educativos personalizados, como textos, ejercicios y actividades, adaptados a las necesidades del alumnado con el objetivo de mejorar su aprendizaje y la evaluación, a través de la creación de ejercicios y pruebas que permiten valorar el grado de comprensión de los estudiantes y ofrecer retroalimentación inmediata y personalizada sobre su desempeño [9].
Tanto estudiantes, como profesores y las propias instituciones universitarias perciben la inteligencia artificial como una oportunidad para avanzar en la calidad educativa. El alumnado valora especialmente su capacidad para mejorar el rendimiento académico, mientras que las universidades destacan el potencial de la IA para adaptar la enseñanza a las características individuales de cada estudiante y fortalecer los procesos de enseñanza-aprendizaje.
No obstante, existen preocupaciones compartidas: los estudiantes muestran inquietud por aspectos relacionados con la seguridad y la protección de sus datos, y las universidades advierten sobre el aumento del riesgo de plagio, ya que han detectado respuestas generadas por IA en los exámenes, y la dificultad de identificar contenidos generados por IA en los actos de evaluación, así como la posibilidad de que su uso promueva aprendizajes menos profundos o disminuya la implicación del alumnado.

IA EN LA DOCENCIA

Desde nuestro punto de vista, la resistencia a estas nuevas herramientas es inútil y resulta mucho más práctico analizar las posibilidades que tiene en nuestras asignaturas para mejorar los procesos de enseñanza-aprendizaje, intentando minimizar en lo posible sus inconvenientes.

Limitaciones

Una de las limitaciones principales de la IA es crear productos finales muy específicos, como por ejemplo obtener una imagen exacta que se tiene en mente, ya que el resultado puede aproximarse pero no reproducir exactamente la idea original. Es útil como herramienta de boceto, pero no como sustituto del trabajo artístico o creativo final.
Otro problema que debemos tener en cuenta es la presencia de sesgos en los datos de entrenamiento: la mayor parte de los datos provienen de contextos anglosajones u occidentales, lo que puede sesgar las respuestas.
La IA tampoco distingue siempre entre información científica y opiniones no verificadas, puede mezclar prácticas validadas con simples opiniones de blogs. Por ello, siempre se recomienda solicitar fuentes y realizar comprobaciones adicionales.
Por otro lado, la IA tiende a responder de forma segura y convincente incluso cuando la información es incorrecta, por lo que hacer “copy-paste” acrítico no es recomendable y debe evitarse.

Ventajas

Entre las ventajas más destacadas de la inteligencia artificial en el ámbito educativo destaca su capacidad para adaptar el proceso de aprendizaje a las características individuales de cada estudiante [6], lo que permite ajustar los recursos y actividades según las necesidades, habilidades e intereses particulares. Esto facilita la creación de itinerarios formativos acordes a cada nivel y forma de aprender, por lo que contribuye tanto al progreso de quienes requieren un mayor acompañamiento como de aquellos que tienen altas capacidades.
La IA permite adaptar las explicaciones al estudiante, favoreciendo un aprendizaje más personalizado y la inclusión de estudiantes con necesidades diversas o que emplean lenguas minoritarias. Puede resumir información, esquematizar conceptos y generar evaluaciones o autoevaluaciones, ayudando tanto en el aprendizaje como en la evaluación de los conocimientos.
Es especialmente útil como intermediario para estudiantes inseguros que no se atreven a preguntar al profesor, y para repasar conocimientos previos. Además, permite al profesorado monitorizar el progreso y adaptar la docencia a partir del análisis de las dudas más frecuentes detectadas en los chats o actividades realizadas con IA.

REGULACIÓN DE LA IA

La integración de la inteligencia artificial en el ámbito educativo no solo implica aprovechar sus ventajas, sino también adaptarse a un marco regulatorio en constante evolución. Para poder aprovechar de manera efectiva las ventajas que ofrece la inteligencia artificial en el aula, es fundamental conocer la normativa vigente sobre su uso.
En este sentido, la Unión Europea ha sido pionera a nivel mundial al aprobar el primer reglamento específico sobre inteligencia artificial: Reglamento (UE) 2024/1689 del Parlamento Europeo [8].
Este marco legal clasifica el ámbito educativo como un sector de alto riesgo cuando se emplean sistemas de IA, lo que implica la necesidad de extremar la transparencia, la

seguridad y la supervisión humana en todas las aplicaciones docentes. Por tanto, es imprescindible que tanto docentes como instituciones estén informados y actúen conforme a estas regulaciones para garantizar un uso responsable y seguro de la IA en la educación. En la normativa se señalan como aspectos clave: la equidad y diversidad, igual acceso a herramientas de calidad para todos los estudiantes, la minimización de sesgos, la privacidad y la protección de datos, la solidez técnica y la responsabilidad, así como la sostenibilidad medioambiental debido al alto consumo de recursos que tienen estos sistemas.
El reglamento exige la existencia de una política de uso clara y conocida por estudiantes y docentes, que detalle qué prácticas son admisibles, el uso responsable, la denuncia de malas prácticas y las consecuencias asociadas. Es responsabilidad de las instituciones universitarias asegurar la formación y supervisión adecuada de estas prácticas.

USO DE LA IA EN MATEMÁTICAS

En este apartado creamos un tutor socrático con ChatGPT 4.1, adaptado a una asignatura de matemáticas utilizando materiales propios, como vemos en la Figura 3.
Para ello, debemos seguir los siguientes pasos:

1. **Accede a ChatGPT Plus:** Es necesario disponer de una cuenta con acceso a las opciones de creación de “custom GPT”, actualmente disponible en ChatGPT Plus.
2. **Crea una máquina personalizada:** Entra en la sección de *Explore GPTs* o selecciona *Crear nuevo GPT*, y define el nombre y propósito, por ejemplo: “Tutor Socrático de Matemáticas II”.
3. **Configura el comportamiento socrático:** Añade instrucciones específicas en la configuración del GPT, como:
   - No respondas directamente a las preguntas, sino guía con preguntas y sugerencias.
   - Ayuda al alumno a razonar y encontrar la respuesta por sí mismo.
   - Adapta las explicaciones al nivel del usuario y utiliza ejemplos de los documentos.
4. **Carga los materiales:** Sube los archivos PDF con los contenidos de la asignatura que consideres interesantes, como teoría, ejercicios propuestos y resueltos, etc. al entorno de tu custom GPT.
5. **Ajusta el acceso a archivos:** Indica al GPT que utilice solo la información contenida en esos PDF para responder y explicar.
6. **Realiza pruebas:** Prueba el tutor con preguntas reales de alumnos, comprobando que no da respuestas directas, sino que fomenta el razonamiento y explica según los contenidos proporcionados.
7. **Ajusta según resultados:** Si es necesario, modifica las instrucciones o añade nuevos archivos para mejorar la personalización y la adaptación al alumnado.
8. **Comparte la URL de acceso:** Una vez finalizado, obtén el enlace único de tu custom GPT y compártelo con tus estudiantes para que puedan acceder y utilizar el tutor socrático de manera sencilla.

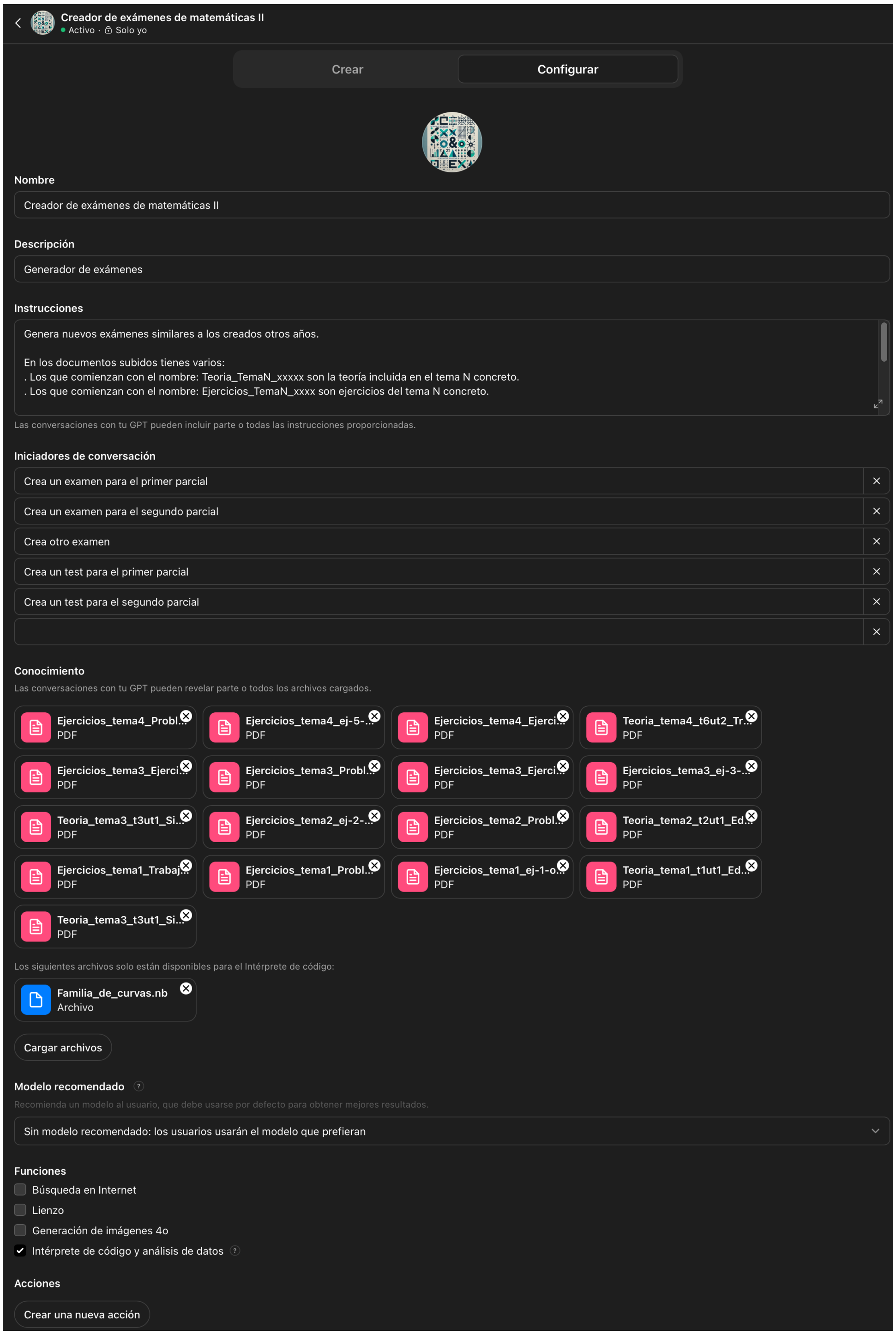


Figura 3: Creación para preparación de exámenes tipo test con ChatGPT 4.1 (Fuente: Elaboración propia)

Este tutor puede resultarnos útil, entre otras actividades, para:

- Generar preguntas y tests automáticos a partir de los materiales que le hayas proporcionado, la IA puede crear tests de opción múltiple, generando tanto el enunciado como las respuestas y explicaciones, en formatos como LaTeX.

- Realizar tutorías, el sistema dialoga con el estudiante, adaptando el discurso a su perfil y ayudándole a razonar sin dar la respuesta directa, reforzando el aprendizaje activo y el pensamiento crítico.
- Adaptar las explicaciones a cada estudiante, reformulando explicaciones según su perfil y proporcionando analogías o ejemplos ajustados a sus intereses o conocimientos previos.
- Evaluar el progreso, ya que permite a los estudiantes comprobar su nivel y detectar conceptos mal entendidos, practicando cuantas veces sea necesario y recibiendo feedback inmediato.

Durante este curso 2025-2026, se ha puesto en práctica este tutor socrático con el alumnado de la asignatura Matemáticas II del Grado en Ingeniería Mecánica de la Universitat Politècnica de València. Esta asignatura, situada en el segundo curso del grado, tiene una carga de 6 créditos ECTS y cuenta con aproximadamente 75 estudiantes matriculados. La experiencia se está llevando a cabo de manera experimental, ofreciendo al estudiantado la posibilidad de utilizar la herramienta como apoyo complementario para resolver dudas y reforzar conceptos. Los primeros resultados son positivos: los estudiantes que lo han empleado destacan su utilidad para repasar contenidos y comprender mejor los razonamientos, mostrando en general un alto grado de satisfacción con la experiencia. Estos resultados son coherentes con investigaciones recientes que confirman el potencial de los tutores conversacionales personalizados en matemáticas para favorecer el razonamiento paso a paso y la retroalimentación inmediata [5], así como con estudios comparativos que evidencian que el diálogo socrático guiado por IA puede desarrollar competencias de pensamiento crítico similares a las alcanzadas con tutores humanos [3]. Asimismo, trabajos recientes advierten de que la IA generativa, por sí sola, no garantiza un aprendizaje matemático profundo si no está integrada en un marco pedagógico reflexivo y supervisado [1]. Nuestra intención es recoger estas percepciones de manera más sistemática mediante una encuesta de opinión y analizar los datos obtenidos, con el fin de aprovechar al máximo el potencial de este tipo de herramientas y aprender de la propia experiencia docente.

CONCLUSIONES

La integración de la IA en la docencia universitaria es una realidad, con un uso muy extendido actualmente entre estudiantes, profesores e instituciones universitarias. La clave reside en aprovechar sus ventajas: personalización del aprendizaje, apoyo al pensamiento crítico, eficiencia en tareas repetitivas y minimizar los riesgos tales como sesgos, información incorrecta, superficialidad.
Es imprescindible definir políticas claras de uso, formar a estudiantes y docentes en su utilización responsable y garantizar la equidad en el acceso a este tipo de herramientas. Como en anteriores revoluciones tecnológicas en educación, la IA no debe ser vista como una amenaza, sino como una herramienta más que enriquece el proceso de aprendizaje, manteniendo al profesorado como guía y supervisor del proceso formativo.

REFERENCIAS

[1] Chen, E., Judicke, S., Beigh, K., Tang, X., Xiao, Z., Li, C., Li, S., Luttmer, R., Singh, S., Yampolsky, M., Parikh, N., Zhao, Y., Chen, M., Huang, S., Mohanty, A., Johnson, G., Mackey, J., Lin, J. and Koedinger, K. . Generative AI alone may not be enough: Evaluating AI support for learning mathematical proof. (2025). Preprint arXiv:2509.16778.

[2] Cordón García, O. Inteligencia Artificial en Educación Superior: Oportunidades y Riesgos. *RiiTE, Revista interuniversitaria de investigación en tecnología educativa*, 15, 16–27 (2023). DOI: https://doi.org/10.6018/riite.591581.

[3] Fakour, M. and Imani, M. Socratic wisdom in the age of AI: A comparative study of ChatGPT and human tutors in enhancing critical thinking skills. Frontiers in Education, 10, 1528603. (2025). DOI: https://doi.org/10.3389/feduc.2025.1528603

[4] Fundación CYD. *Inteligencia Artificial y Universidad: uso y percepción de la IA en el entorno universitario.* Fundación Conocimiento y Desarrollo (CYD), Barcelona (2025).

[5] Liu, B., Zhang, J., Lin, F., Jia, X. and Peng, M. One size doesn't fit all: A personalized conversational tutoring agent for mathematics instruction. (2025). Preprint arXiv:2502.12633.

[6] OCDE. *The potential impact of Artificial Intelligence on equity and inclusion in education.* OCDE, 2024. https://doi.org/10.1787/15df715b-en.

[7] Torres-Salinas, D., Montero Martínez, S., Ortiz Garduño, H., Castillo Pérez, E., Robinson-García, N., Arroyo-Machado, W. *BOTLAB: Diseño e implementación de GPT-bots de ChatGPT orientados a la tutorización y aprendizaje asistido.* Ediciones InfluScience, Universidad de Granada, Granada (2025). DOI: 10.5281/zenodo.15493990.

[8] Unión Europea. Reglamento (UE) 2024/1689 del Parlamento Europeo y del Consejo de 13 de junio de 2024 relativo a la inteligencia artificial y por el que se modifican determinados actos legislativos de la Unión. https://www.boe.es/doue/2024/1689/L00001-00144.pdf.

[9] Vivas Urias, M. D., Ruiz Rosillo, M. A. (coords.) *Inteligencia artificial generativa. Buenas prácticas docentes en Educación Superior.* Octaedro Editorial, Barcelona (2025). ISBN: 978-84-10282-57-5.

Evaluación de conceptos clave de Matemáticas en Ciencia de Materiales

A. Pruna[a,1], E.M. Sánchez-Orgaz[b,2], Estívaliz Lozano-Mínguez[c,3]

[a,b] Departamento de Ingeniería Mecánica y de Materiales. ETSID. Universitat Politècnica de València (UPV) (SPAIN)

[c] Departamento de Ingeniería de los Medios Continuos y Teoría de Estructuras. ETSCCP. Universitat Politècnica de València (UPV) (SPAIN)

[1]apruna@itm.upv.es; [2]evsncor@upvnet.upv.es; [3]eslomin@upv.es

Assessment of Threshold Mathematical Concepts in Materials Science

RESUMEN

Las Matemáticas son fundamentales en todas las ramas de la ingeniería, al facilitar la comprensión de fenómenos físicos y el abordaje de problemas técnicos complejos. Por ello, el presente trabajo describe el diseño e implementación de una herramienta didáctica para evaluar conceptos umbral de matemáticas en la asignatura de Ciencia de Materiales. La propuesta se ha desarrollado para estudiantes internacionales de intercambio en la Universitat Politècnica de València (UPV), durante los cursos 2023-2024 y 2024-2025. El objetivo es analizar la relación entre los conocimientos previos y la evolución del aprendizaje durante el curso. Para ello, se ha aplicado un test diagnóstico inicial cuyos resultados se comparan con los del examen final. Este enfoque permite identificar tanto el grado de consolidación de los conceptos clave como la persistencia de errores conceptuales. Los resultados muestran debilidades en el aprendizaje y evidencian la utilidad de la herramienta como apoyo docente en entornos multiculturales.

Palabras clave: Matemáticas; Ciencia de Materiales; Conceptos umbral; Multiculturalidad en el aula

ABSTRACT

It is a fact that prior understanding eases the acquisition of a new concept. The aim of this study is to observe the evolution of threshold concepts within a Material Science subject and identify whether there is a deficient transfer of knowledge impeding the acquisition of discipline concepts. Given the importance of Mathematics background in the discipline of Materials Science, a voluntary multiple-choice quiz was designed for Mathematics concept checks and applied in class, during the first course session. The quiz consisted of 2 concepts, namely measuring units and formulas which were assessed in 2 dimensions: factual recalls and applications. The work group refers to International Exchange students incoming to Universitat Politècnica de València during the academic year 2024-2025. During the course, the mentioned Mathematics concepts were revisited together with the discipline's ones in varying examples, to reinforce them and the transfer of prior knowledge. The evolution of threshold concepts was observed from the frequency of faulty / absent concepts and deficient transfer of knowledge in the initial quiz and in the midterm and final official examinations. The satisfaction survey results on the reinforcing instrument were contrasted with the evolution of concept frequency. The results of this study allow the identification of faulty or absent threshold concepts, as well as deficient transfer of Mathematics knowledge and the effect on the learning process within the discipline of Materials Science.

Keywords: Mathematics; threshold concept; quiz; international exchange; Materials Science

INTRODUCCIÓN

Los logros académicos se ven claramente afectados por los antecedentes del estudiantado, así como por otros factores como el género o la edad. Los factores que más afectan al proceso de aprendizaje son la ausencia o la deficiencia en los conocimientos previamente adquiridos. Estas carencias suponen un peor desempeño del estudiantado y un decremento en la calidad del aprendizaje [1, 2].

La importancia de los conceptos matemáticos dentro de las asignaturas de ingeniería es muy elevada, constituyendo la base para muchas de ellas. De hecho, en los planes de estudios de las asignaturas de Ciencia de Materiales se indica que los conceptos matemáticos son conocimientos umbral para poder aprobar la asignatura. Teniendo en cuenta estas circunstancias, se requiere la evaluación de conocimientos previos de Matemáticas como apoyo al proceso de aprendizaje [3]. La elección de conceptos a evaluar y el cronograma de evaluación son los factores más relevantes en relación a la realización de un test de conocimientos previos [4]. En este sentido, la realización del test de conocimientos previos a principio de curso sería lo más apropiado [5]. Por otra parte, los test de respuesta múltiple pueden contribuir a reactivar aquellos conocimientos menos consolidados [6].

En un estudio previo, se diseñó un test de respuesta múltiple para evaluar los conceptos previos de Matemáticas considerando conceptos como unidades de medida y fórmulas [7]. Esta herramienta se testó desde el curso académico 2022-2023 con estudiantes de ingeniería de la Universitat Politècnica de València (UPV). El cuestionario sobre conceptos umbral estaba compuesto por un 20% de preguntas de recuerdo factual y un 80% de preguntas de aplicación de conceptos. La encuesta de satisfacción acerca de la utilidad del test de conocimientos previos al inicio del curso para la mejora del proceso de aprendizaje indicó que el 82% del estudiantado que la cumplimentó estaba satisfecho [7]. Los resultados previos indicaron que todos los estudiantes presentaban dificultades con los conocimientos aprendidos de memoria y con la aplicación de conocimientos complejos. El desempeño de los estudiantes en las preguntas que requerían de la utilización de la memoria mecánica y de fórmulas mejoró a final de curso, a pesar del hecho de que el número de conceptos estudiados y su complejidad había aumentado a lo largo del curso. Las calificaciones finales mejoraron debido a la motivación del estudiantado antes del examen final, debido a que adoptaron una actitud más consciente acerca de sus capacidades que ayudó a determinar su puntuación final [8].

Hay evidencias científicas que demuestran que evaluar el conocimiento puede ayudar a mejorar el proceso de aprendizaje [9], ya que permite utilizar preguntas sencillas que requieran únicamente de la utilización de la memoria mecánica [10] y de la transferencia de conocimiento [11]. Así pues, se llevó a cabo una experiencia donde el estudiantado podía realizar test de práctica online como una herramienta útil para la mejora de conocimientos previos de Matemáticas en los planes de estudios de ingeniería [12]. La motivación y el proceso de aprendizaje del estudiantado mejoró con la utilización de las pruebas prácticas, gracias al apoyo que brindan en la transferencia de conocimiento.

En la literatura se pueden encontrar un elevado número de investigaciones acerca de las herramientas de evaluación, sin embargo, en la información disponible acerca de la evaluación de conocimientos previos de Matemáticas en estudiantes de ingeniería es limitada. Además, el caso de estudiantes de intercambio es más complejo debido a los diferentes sistemas educativos e idiomas, sumados al hecho de vivir en el extranjero. Se ha observado que es relevante investigar la evolución de los conceptos matemáticos a lo largo del curso. Con este propósito, se realizó una prueba acerca de los conceptos iniciales de Matemáticas. Los test de prácticas se pusieron a disposición del estudiantado con el objetivo de mejorar su conocimiento acerca de los conocimientos previos y testar su aprendizaje antes de los exámenes oficiales. El tipo de error de concepto se identificó con la ayuda del test inicial, y los exámenes de mitad y final de curso. La frecuencia con la que aparecieron estos errores de concepto se comparó entre diferentes semestres para evaluar la mejora de los conocimientos previos. Se empleó un escenario sin riesgo (es decir, sin consecuencias académicas) como enfoque para permitir que el testeo de conocimientos de conceptos umbral fuera considerado por los estudiantes como un evento de aprendizaje, sin elementos que inhibieran su desempeño o rendimiento [13].

METODOLOGÍA

Los instrumentos propuestos se testaron en un pequeño grupo de individuos que incluía a 10 estudiantes de ingeniería extranjeros matriculados en diferentes semestres durante los años académicos 2023-2025 en la UPV (los estudiantes involucrados en cada semestre eran diferentes). Los instrumentos propuestos consistieron en una prueba voluntaria online acerca de conocimientos básicos de Matemáticas que son necesarios para cualquier estudiante de ingeniería matriculado en el curso de Ciencia de Materiales. La prueba se llevó a cabo durante la primera semana de curso. La estructura del test incluyó dos conceptos, nombrados como unidades de medida y fórmulas, con un peso del 20% y del 80% respectivamente. La prueba contenía preguntas de respuesta múltiple con una única respuesta correcta. Los resultados correctos se contabilizaban con 1 punto y con 0 los incorrectos o no respondidos. Las puntuaciones obtenidas no se incluyeron en la calificación de la asignatura. Dado que los test eran voluntarios, el número de cuestiones fue restringido a 10 con el objetivo de mejorar el ratio de respuestas. Los conceptos erróneos se identificaron en la prueba inicial, además de en el examen de mitad y de final de semestre. Las pruebas voluntarias se pusieron a disposición del estudiantado para que pudiesen estudiar y mejorar su conocimiento.

RESULTADOS

Los conceptos matemáticos se evaluaron en el test inicial con el propósito de identificar los conceptos erróneos, sin que estos resultados influyesen en la calificación final de la asignatura. La Tabla 1 muestra la frecuencia con la que los estudiantes fallaron en alguno de los conceptos previos a evaluar. Como se puede observar, se registraron menos fallos en los conceptos matemáticos aprendidos de memoria que en aquellos que requerían pensar sobre cómo aplicarlos a una tarea concreta.

Tabla 1: Frecuencia de errores en conceptos de conocimientos previos de Matemáticas

Concepto	***Tipo***	***Frecuencia Otoño24 (%)***	***Frecuencia Primavera24 (%)***	***Frecuencia Otoño23 (%)***
Unidades de medida	Memoria	25.00	0.00	16.67
Unidades de medida	Aplicación de conceptos	75.00	66.67	33.33
Fórmulas	Memoria	50.00	33.33	0.00
Fórmulas	Aplicación de conceptos	75.00	100.00	83.33

Fuente: Elaboración propia.

En cuanto a las unidades de medida, el estudiantado que cometió menos fallos, tanto en unidades de medida como en aplicación de fórmulas, fue el matriculado el semestre de Otoño23. Las preguntas acerca de las fórmulas matemáticas permitieron observar una mayor frecuencia de fallos en términos de memoria que las unidades de medida, lo que parece querer indicar que hay una transferencia de conocimiento defectuosa. La menor frecuencia de fallos en lo que a aplicación de fórmulas se refiere ha demostrado ser la de los estudiantes matriculados en el semestre de Otoño23. La frecuencia más elevada de errores en términos de recordar fórmulas se registró en los estudiantes del semestre de Otoño24.

A medida que los estudiantes tenían la oportunidad de mejorar su proceso de aprendizaje a través del acceso a los test voluntarios de prácticas, se pudo evaluar la evolución de los fallos en conceptos previos de Matemáticas en el examen de mitad de semestre. En este punto cabe destacar que los errores del mismo tipo solamente se contabilizaron la primera vez que aparecían en el examen. Además, la ausencia de un concepto también se contabilizó como un error en la evaluación. El examen de mitad de semestre tenía menos conceptos nuevos que el de fin de curso, por lo que en este último también se analizaron los resultados.

En la Figura 1 se muestra que los estudiantes matriculados durante el semestre de Otoño23 cometieron más errores de unidades de medida durante el examen de mitad de semestre que en el examen final. En cuanto a las fórmulas, los errores en preguntas de memoria aumentaron durante los exámenes de mitad de semestre y final, pero la aplicación de los conceptos fue buena.

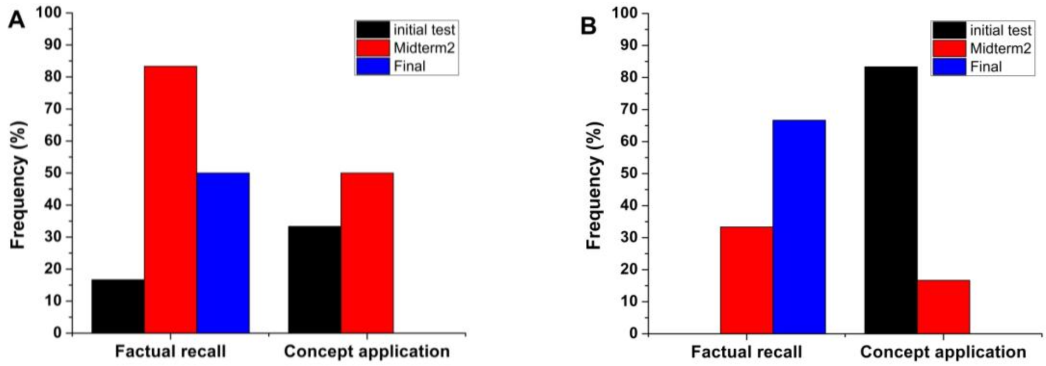


Figura 1: Frecuencia de fallos de conceptos previos de Matemáticas a lo largo del semestre: a) unidades de medida; b) fórmulas durante el semestre Otoño23.
(Fuente: Elaboración propia)

Con respecto a los estudiantes matriculados durante el semestre de Primavera24, la Figura 2 muestra la evolución de la frecuencia de errores en los conceptos previos de Matemáticas. Se observó la misma tendencia, es decir, que los estudiantes generalmente mostraron una frecuencia de errores más elevada durante el de mitad de semestre, pero esta disminuyó en el examen final, lo que apunta a un aumento de la procrastinación a lo largo del semestre, con un aumento de la conciencia de los estudiantes solo al final.

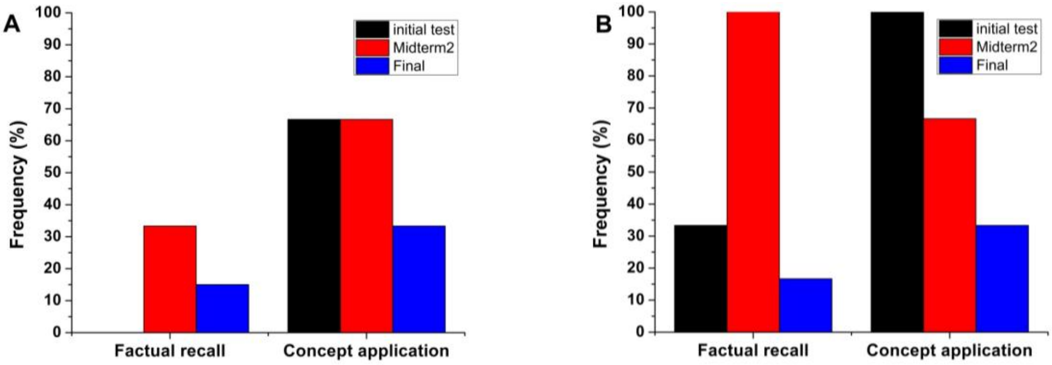


Figura 2: Frecuencia de fallos de conceptos previos de Matemáticas a lo largo del semestre: a) unidades de medida; b) fórmulas durante el semestre Primavera24.
(Fuente: Elaboración propia)

Los estudiantes matriculados durante el semestre Otoño24, en cambio, mostraron una tendencia continuada de disminución en la frecuencia de fallos. Así, la caída en la frecuencia de fallos presentada en la Figura 3 indica una mejora en los conceptos de aproximadamente el 50% con respecto a la prueba inicial para medir el concepto de unidades y mejoras de alrededor del 30-35% en el concepto de fórmulas. Estos resultados apuntan a una actitud más despreocupada inicialmente hacia la prueba de conocimientos previos, y la constante evolución de los estudiantes durante los exámenes oficiales muestra una buena transferencia de conocimientos de los conceptos de Matemáticas para esta generación de estudiantes.

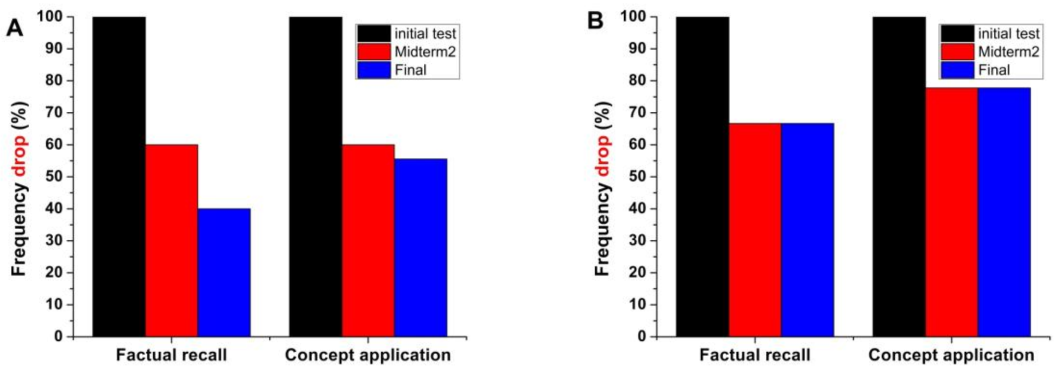


Figura 3: Frecuencia de fallos de conceptos previos de Matemáticas a lo largo del semestre: a) unidades de medida; b) fórmulas durante el semestre Otoño24.
(Fuente: Elaboración propia)

El concepto de fórmulas registró una frecuencia de errores más alta que las unidades de medida, lo que se puede atribuir a una mayor complejidad de comprensión. La frecuencia de errores más alta se pudo observar en la aplicación del concepto de la fórmula. Por otro lado, el examen de mitad de semestre indicó que la frecuencia de errores en las unidades de medida aumentó, lo que se puede atribuir a los nuevos conocimientos del tema explicados durante el curso. El concepto de fórmula no mostró errores, lo que podría atribuirse a una mejora en el aprendizaje a lo largo del curso y a una mayor conciencia por parte de los estudiantes.

Con el objetivo de comprender mejor la evolución de los conceptos anteriores a lo largo del curso, se compararon las calificaciones promedio de los exámenes parciales oficiales para cada generación de estudiantes y su correlación con la frecuencia de errores en la prueba de conocimiento previo inicial. La Tabla 2 también presenta las calificaciones promedio en los exámenes parciales junto con las puntuaciones de autoevaluación de los estudiantes en una encuesta de percepción, respecto a su comprensión sobre la materia y su entusiasmo por adquirir nuevos conceptos. Como regla general, se observó que las calificaciones en el examen de mitad de curso están fuertemente correlacionadas con la comprensión del estudiante; es decir, los estudiantes que se autoevaluaron con baja comprensión de la materia mostraron una menor frecuencia de errores y tuvieron un mejor desempeño en el examen de mitad de curso, mientras que la generación de estudiantes que se autoevaluó con la mayor comprensión registró las calificaciones más bajas en el examen de mitad de curso. Estos resultados apuntan a una procrastinación cuando los estudiantes se sienten más seguros de su conocimiento y a un mayor esfuerzo por hacer frente a nuevos conceptos cuando se sienten menos seguros. Como todas las generaciones se autoevaluaron con más entusiasmo que la media hacia la materia, y por lo tanto hacia la adquisición de nuevos conceptos y el aumento de la transferencia de conocimiento, sus calificaciones mejoraron en el examen final, como lo indica la menor frecuencia de fallos presentada arriba. En general, se encontró que el aumento de calificaciones hacia el examen final estaba correlacionado con el entusiasmo inicial mostrado por el estudiantado, así que un mayor entusiasmo resultó en el mayor aumento de calificaciones de aproximadamente un 22%. La generación de estudiantes que mostró menos frecuencia de fallos también registró la calificación más alta en el examen final. Los resultados pueden atribuirse a una combinación de factores sociales e individuales. Asimismo, el elevado nivel de satisfacción manifestado por el estudiantado al finalizar el curso, tanto con la enseñanza como con su propio aprendizaje, sugiere que las mejoras en el rendimiento académico se reflejan en un mayor entusiasmo y en una mayor autoconfianza al término de la asignatura. Además, el alumnado también ha mostrado un alto grado de satisfacción con la aplicación del cuestionario inicial sobre conceptos clave, al considerarlo una herramienta útil para motivar y concienciar sobre sus conocimientos de partida. En cualquier caso, el entusiasmo del estudiantado constituye un fenómeno complejo y de gran interés, por lo que se plantea profundizar en su análisis en estudios futuros.

Tabla 2: Puntuación acerca de entusiasmo y comprensión hacia la materia de Ciencia de Materiales en la encuesta de percepción en una escala de Likert del 1 al 5 (1 – ninguno; 5 – sobresaliente) y las calificaciones obtenidas.

Curso	***Comprensión***	***Entusiasmo***	***Calificación mitad de semestre***	***Calificación final***
Primavera24	*3.7*	*4.0*	*5.9*	*7.2*
Otoño24	2.7	3.6	6.33	7.16
Otoño23	2.3	3.3	7.4	8.8

Fuente: Elaboración propia.

CONCLUSIONES

Una prueba inicial de Matemáticas que incluye conceptos básicos sobre unidades de medida y fórmulas fue diseñada como un cuestionario voluntario de opción múltiple de 10 preguntas dentro del curso de Ciencia de Materiales. Los estudiantes también se autoevaluaron respecto a su comprensión del tema y su entusiasmo por adquirir nuevos conceptos y su transferencia. La estructura del cuestionario inicial incluía preguntas que requerían utilizar conceptos aprendidos de memoria (20%) y aplicaciones conceptuales (80%). Los resultados obtenidos confirman que los estudiantes muestran más carencias de conocimiento en relación con los conceptos de fórmula y hacia la aplicación de conceptos que en el recuerdo fáctico. La evolución de los fallos conceptuales a lo largo del semestre para diferentes generaciones indicó que los estudiantes generalmente procrastinan hasta el examen final, cuando aumenta la concienciación. Las dificultades para afrontar diferentes sistemas educativos también pueden tenerse en cuenta para la evolución al inicio de los semestres. Las calificaciones promedio en los exámenes oficiales reflejan la autoevaluación del estudiante respecto a su comprensión de la materia, donde una menor comprensión indujo más conciencia, lo que a su vez redujo los errores y aumentó las calificaciones. La mejora hacia el final del semestre, y por ende la calificación final, está fuertemente relacionada con el entusiasmo de los estudiantes hacia la adquisición de nuevos conceptos.

AGRADECIMIENTOS

Las autoras agradecen a la UPV por su financiación a través del Proyecto de Innovación y Mejora Educativa, PIME/22-23/342.

REFERENCIAS

[1] Duff, A., Understanding academic performance and progression of first-year accounting and business economics undergraduates: The role of approaches to learning and prior academic achievement, *Accounting Education*, 13(4), 409-430 (2004).

[2] Engerman, K., Bailey, U.J.O., “Family decision-making style, peer group affiliation and prior academic achievement as predictor of the academic achievement of African American students.” *The Journal of Negro Education*, 75(3), 443-457 (2006).

[3] Shapiro, A.M., How including prior knowledge as a subject variable may change the outcomes of learning research. *American Educational Research Journal*, 41(1), 159–189 (2004).

[4] Ayán, M.N.R., García, M.T.C., Prediction of university students’ academic achievement by linear and logistic models. *Journal of Psychology*, 11 (1), 275-288 (2008).

[5] Martin, A.J., Wilson, R., Liem, G.A.D., Ginns, P., Academic momentum at university/college: Exploring the roles of prior learning, life experience, and ongoing performance in academic achievement across time. *The Journal of Higher Education*, 84 (5), 640-674, 2016.

[6] Cantor, A.D., Eslick, A.N., Marsh, E.J., Bjork, R.A., Bjork, E.L., Multiple-choice tests stabilize access to marginal knowledge. *Memory Cognitive*, 43, 193–205 (2015).

[7] Pruna, A.I., Salas, F., Vicente Escuder, A., Sánchez-Orgaz, E.M., Martínez-Sanchis, S., Experiences in designing threshold math concepts quiz for a materials science course. *EDULEARN23 Proceedings,* ISBN: 978-84-09-52151-7, 3231-3236 (2023) doi: 10.21125/edulearn.2023.0895.

[8] Pruna, A., Vicente Escuder, A., Sánchez-Orgaz, E.M., Martínez-Sanchis, S., Experiences in Instrument designing for improving threshold concepts within a Materials science course *EDULEARN24* Proceedings, ISBN: 978-84-09-62938-1, 5680-5685 (2024), doi: 10.21125/edulearn.2024.1373.

[9] Brame, C.J., Biel, R., Test-enhanced learning: the potential for testing to promote greater learning in undergraduate science courses. *CBE Life Science Education,* 14(2), 14:es4 (2015).

[10] Smith, M.A., Karpicke J.D., Retrieval practice with short-answer, multiple-choice, and hybrid tests. 22, 784–802 (2014).

[11] Butler, A.C., Repeated testing produces superior transfer of learning relative to repeated studying. *Journal Experiments Psychology Learning Memory Cognitive,* 36, 1118–1133 (2010).

[12] Pruna, A., Reyes-Tolosa, M.D., Sánchez-Orgaz, E.M., Martínez-Sanchis, S., Threshold concepts within a materials science course: international exchange students, ICERI2024 Proceedings of ISBN: ISBN: 978-84-09-63010-3, 6676 (2024).

[13] Pulfrey, C., Buchs, C., Butera, F., Why grades engender performance-avoidance goals: the mediating role of autonomous motivation., *Journal of Educational Psychology*, 103, 683–700 (2011).

Experiencia con el uso de `R Markdown` a través de `R-Commander` en el Grado en Biología

Miguel Ángel Beltrán-Sánchez, Adina Alexandra Iftimi, Gabriel Calvo-Bayarri

Departamento de Estadística e Investigación Operativa, Facultad de Ciencias Matemáticas, Universidad de Valencia
Carrer del Dr. Moliner, 50, 46100, Burjassot, Valencia, Spain
e-mail: angel.beltran@uv.es, adina.iftimi@uv.es, gabriel.calvo@uv.es

Experience with the use of `R Markdown` through `R-Commander` in the Biology Degree Program

RESUMEN

`R Markdown` es una herramienta que permite generar informes combinando texto y código, lo que facilita la comunicación de resultados estadísticos de forma clara y reproducible. Por su parte, `R-Commander` ofrece una interfaz gráfica amigable para `R`, ideal para usuarios con poca o ninguna experiencia en programación. De hecho, `R-Commander` lleva varios años utilizándose ampliamente en los distintos grados universitarios en los que el Departamento de Estadística e Investigación Operativa imparte docencia. Como propuesta de innovación docente, hemos incorporado la enseñanza de `R Markdown` —integrado dentro de `R-Commander`— en las Prácticas de Bioestadística del Grado en Biología, la cual es una asignatura nueva del plan de estudios de segundo curso. El objetivo ha sido ofrecer al alumnado una herramienta adicional para la elaboración de informes dinámicos, reforzando así tanto la comprensión de las instrucciones de los análisis estadísticos como la interpretación de los resultados obtenidos; mostrándoles, además, una solución efectiva ante el actual problema de reproducibilidad y replicabilidad que sufre, en muchas ramas, la ciencia. En este trabajo compartimos nuestra experiencia, presentamos un resumen de los resultados más relevantes de una encuesta de satisfacción realizada al estudiantado y proponemos mejoras para futuras ediciones.

Palabras clave: Bioestadística, Prácticas, `R-Commander`, `R Markdown`, Datos de encuestas

ABSTRACT

`R Markdown` is a tool that allows users to generate reports by combining text and code, facilitating the clear and reproducible communication of statistical results. `R-Commander`, in turn, provides a user-friendly graphical interface for `R`, making it ideal for users with little or no programming experience. In fact, `R-Commander` has been widely used for several years across various degree programs where the Department of Statistics and Operations Research contributes to teaching. As part of an innovation initiative, we have introduced the use of R Markdown—integrated within R-Commander—in the Biostatistics practical sessions of the Biology Degree Program, a new second-year course in the academic program. The aim has been to offer students an additional tool for creating dynamic reports, thereby enhancing both their understanding of statistical analysis procedures and their interpretation of the results. Moreover, it introduces them to an effective solution to the current reproducibility and replicability crisis affecting many areas of science. In this work, we share our experience, present a summary of the most relevant results from a student satisfaction survey, and propose improvements for future editions of the course.

Keywords: Biostatistics, Practical sessions, R-Commander, R Markdown, Survey data

INTRODUCCIÓN

La asignatura de Bioestadística se imparte en el segundo curso del Grado en Biología de la Universidad de Valencia (UV). Es una materia nueva desde el curso académico 2024-2025, consta de $4{,}5$ créditos y es de segundo cuatrimestre. Los contenidos de esta asignatura son los habituales de cualquier Estadística Básica de grado universitario, incluyendo análisis exploratorio de datos, inferencia en una población, análisis de dos muestras, análisis de k muestras independientes, análisis de datos categóricos y regresión lineal. Los contenidos relacionados con Probabilidad se abordan en la asignatura de Matemáticas de primer curso. La asignatura consta de 26 horas teóricas, 16 horas de prácticas en aula de informática y 3 horas de tutorías. Para más información de la asignatura de Bioestadística, se recomienda visitar la guía docente correspondiente [1].

En las prácticas en aula de informática de asignaturas similares es habitual que se planteen y resuelvan problemas mediante algún *software* especializado, como R [2]. A menudo, se opta por interfaces gráficas como R-Commander [3], ya que este tipo de alumnado no tiene experiencia previa programando. La evaluación de las prácticas suele consistir en exámenes o entregas por parejas (o grupos reducidos). En cualquier caso, el alumnado acaba entregando informes elaborados con un procesador o documento de texto. Esto implica, entre otras dificultades, la inclusión manual de capturas de pantalla de los análisis realizados y sus resultados, lo que lleva demasiado tiempo, desviando la atención de lo realmente importante, la correcta aplicación de los contenidos vistos en teoría.

Como propuesta de innovación docente, planteamos la enseñanza de R Markdown [4] (dentro de R-Commander) como herramienta alternativa al procesador de texto para generar informes interactivos y dinámicos, permitiendo integrar directamente código, resultados y texto explicativo en un único documento. Así pues, esta propuesta tiene como objetivos: (1) dotar al alumnado de una herramienta moderna y eficaz para elaborar informes; (2) reforzar su comprensión e interpretación de los análisis estadísticos; y (3) mostrar una solución efectiva al problema de la reproducibilidad y replicabilidad en la ciencia. Otros estudios ya han explorado la incorporación de R Markdown en las aulas [5, 6], aunque no desde R-Commander.

El trabajo se organiza de la siguiente manera: la sección de Metodología detalla el uso de R-Commander y R Markdown en las prácticas en aula de informática, así como nuestra experiencia este curso. La sección de Resultados contiene un análisis descriptivo de una encuesta de satisfacción con R Markdown realizada a final de curso. Finalmente, la sección de Conclusiones contiene una discusión y posibles mejoras para futuras ediciones.

METODOLOGÍA

`R-Commander` es una interfaz gráfica amigable para `R`, especialmente útil para estudiantes con poca o ninguna experiencia previa en programación. Esta herramienta se ha utilizado durante años en diversas titulaciones en las que participa el Departamento de Estadística e Investigación Operativa, como Biología, Biotecnología, Farmacia, Nutrición, Óptica... Su funcionamiento se puede apreciar en la Figura 1. En la parte superior aparecen las diferentes opciones que permiten, entre otras cosas, la carga y análisis de bancos de datos. Por ejemplo, mediante `Datos` se puede cargar un conjunto de datos; con `Estadísticos` realizar la descriptiva numérica del conjunto de datos activo, así como hacer inferencia; y con `Gráficas` la descriptiva gráfica. A través de la ventana `R Script`, el alumnado puede visualizar las instrucciones ejecutadas mediante la interfaz, mientras que en la ventana `Salida` se muestran los resultados generados por la consola de `R`.

Figura 1: *Ventanas `R Script` y `Salida` de `R-Commander`.*

Por su parte, `R Markdown` permite combinar texto y código en un único documento, facilitando la elaboración de informes dinámicos, claros y reproducibles. Desde `R-Commander`, el alumnado puede trabajar directamente con esta herramienta, viendo los bloques de código (`chunks`) y generando informes en varios formatos. En efecto, en la ventana `R Markdown` (ver la Figura 2) se muestran las instrucciones ejecutadas con la interfaz, pero en formato `chunk`. En dicha ventana el alumnado puede también redactar las explicaciones entre los bloques de código, o crear secciones y subsecciones para organizar el documento. Cabe señalar que `R-Commander` genera automáticamente secciones y subsecciones según qué instrucciones ejecutemos con la interfaz.

Finalmente, con la opción `Generar informe` se obtiene el correspondiente documento, por ejemplo, en formato `HTML` (ver la Figura 3). Tal y como se puede observar, la plantilla, aunque bastante sencilla, es muy práctica. Asimismo, en `R-Commander` se pueden cargar otros ficheros `Rmd`, lo que permite al alumnado trabajar con otra plantilla, por ejemplo, alguna que ya contenga los enunciados de los ejercicios a realizar en la tarea. Así, el alumnado se enfocaría en analizar los datos y contestar razonadamente cada apartado.

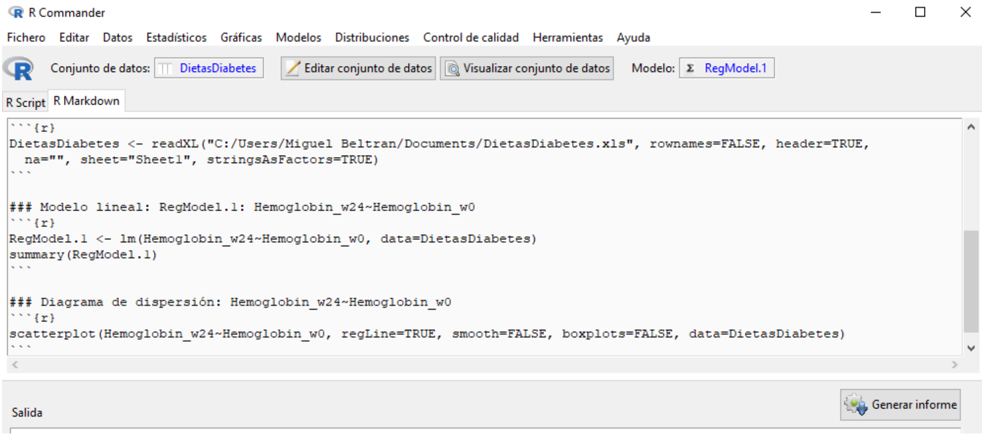
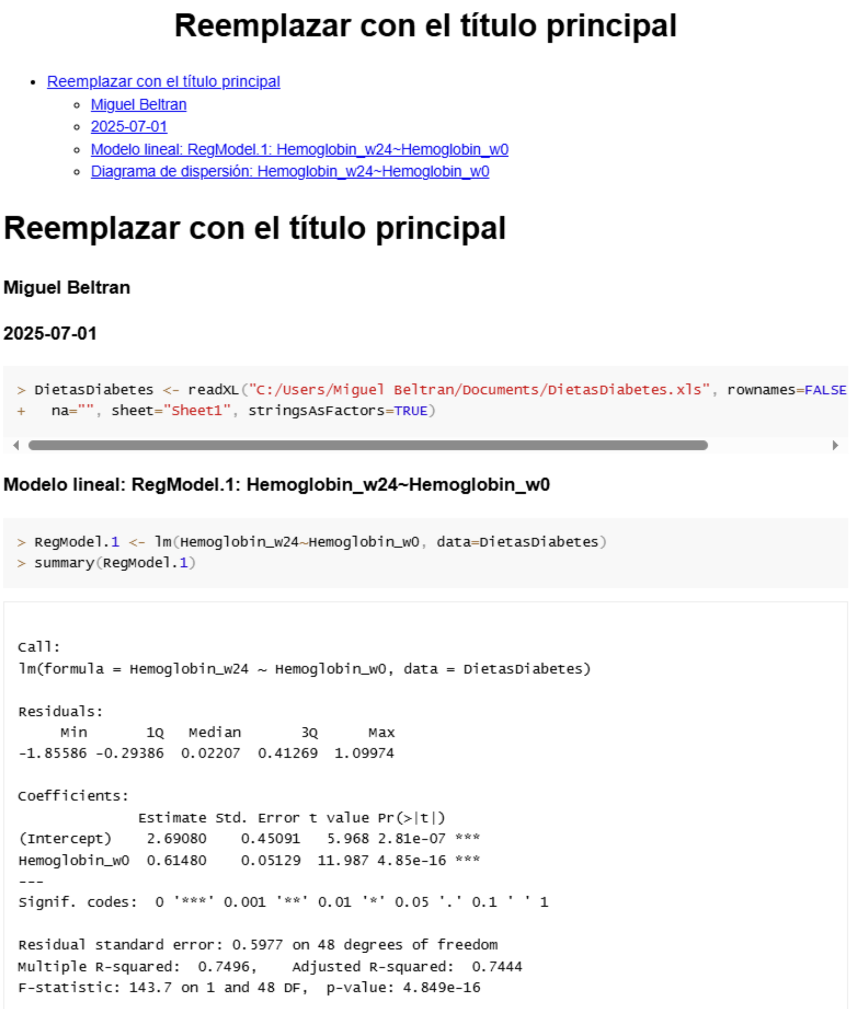


Figura 2: *Ventana* `R Markdown` *de* `R-Commander`*.*



Reemplazar con el título principal

- Reemplazar con el título principal
  - Miguel Beltran
  - 2025-07-01
  - Modelo lineal: RegModel.1: Hemoglobin_w24~Hemoglobin_w0
  - Diagrama de dispersión: Hemoglobin_w24~Hemoglobin_w0

Reemplazar con el título principal

Miguel Beltran

2025-07-01

```
> DietasDiabetes <- readXL("C:/Users/Miguel Beltran/Documents/DietasDiabetes.xls", rownames=FALSE
+   na="", sheet="Sheet1", stringsAsFactors=TRUE)
```

Modelo lineal: RegModel.1: Hemoglobin_w24~Hemoglobin_w0

```
> RegModel.1 <- lm(Hemoglobin_w24~Hemoglobin_w0, data=DietasDiabetes)
> summary(RegModel.1)
```

```

Call:
lm(formula = Hemoglobin_w24 ~ Hemoglobin_w0, data = DietasDiabetes)

Residuals:
     Min       1Q   Median       3Q      Max 
-1.85586 -0.29386  0.02207  0.41269  1.09974 

Coefficients:
              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)    
(Intercept)    2.69080    0.45091   5.968 2.81e-07 ***
Hemoglobin_w0  0.61480    0.05129  11.987 4.85e-16 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 0.5977 on 48 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.7496,	Adjusted R-squared:  0.7444 
F-statistic: 143.7 on 1 and 48 DF,  p-value: 4.849e-16
```

Figura 3: *Informe* `HTML` *generado con* `R Markdown` *dentro de* `R-Commander`*.*

Respecto a la experiencia del profesorado en el curso académico 2024-2025, en primer lugar, se actualizó y adaptó el material existente de teoría y tutorías para ajustarlo al nuevo plan de estudios. Como parte de esta renovación, se elaboraron 7 documentos de prácticas, entre ellos una "Práctica 0" centrada en la introducción y manejo básico de `R-Commander`, seguida de 6 prácticas más, una por cada uno de los temas. Todos estos documentos incluían una descripción detallada de los objetivos y problemas a resolver. La dinámica es siempre la misma: el profesorado presenta en detalle el guion de la práctica correspondiente, resuelve junto al alumnado algunos problemas y, a continuación, les deja trabajar de forma autónoma. Aunque inicialmente no se contemplaba el uso de `R Markdown`, tras la primera sesión se optó por incorporarlo como alternativa a un procesador de texto. La evaluación de las prácticas se realizó mediante 2 exámenes por parejas, uno a mitad y otro a final de cuatrimestre, de 1 hora de duración, cada uno con un valor de un punto sobre la nota final. Además, en sesiones previas, se proporcionó a los estudiantes plantillas `Rmd` de `R Markdown`, para que pudieran cargarlas y trabajar directamente sobre ellas, de forma similar a como lo tendrían que hacer en los exámenes.

El uso de `R Markdown` ha mostrado varias ventajas en la sesiones: está disponible en los equipos del aula sin necesidad de instalar paquetes adicionales; les ahorra mucho tiempo en la creación de informes (ideal en pruebas con tiempo reducido); y les ayuda a prestar más atención a los análisis estadísticos que ejecutan. No obstante, también se detectaron ciertas incomodidades en el alumnado: la confusión inicial entre las ventanas `R Script` y `R Markdown`; la necesidad de cortar y pegar los `chunks`, pues se insertan por defecto al final del documento; el desplazamiento horizontal al redactar párrafos extensos; y la gestión de archivos (`Rmd`, `HTML`, `PDF`, `Excel`...), junto a su guardado.

RESULTADOS

Una vez los y las estudiantes habían terminado ambos exámenes, se realizó una encuesta de satisfacción anónima mediante el Aula Virtual en la última semana de clases. La Tabla 1 recoge la información de todas las preguntas de la encuesta. Hubo una participación de 27 alumnos del grupo de Valenciano (sobre 50 estudiantes matriculados) y 20 del grupo de Castellano (sobre 57).

Ítem	**Formulación de la pregunta**	**Tipo de respuesta**
1. Subgrupo	¿Cuál es tu Subgrupo de Prácticas?	Binaria
2. Existencia de `R`	¿Conocías la existencia de `R` para hacer análisis estadísticos?	Binaria
3. Existencia de `R Markdown`	¿Conocías la existencia de `R Markdown` para generar informes?	Binaria
4. Frustración	¿Has sentido frustración mientras aprendías `R Markdown`?	Binaria
5. Desaparición de la frustración	En caso afirmativo, ¿esa frustración ha terminado por desaparecer?	Binaria
6. Facilitar la entrega	¿Consideras que `R Markdown` te ha facilitado la entrega de tareas?	Binaria
7. Dificultad de aprender	¿Cómo calificarías la dificultad de aprender `R Markdown`?	Ordinal
8. Comprensión de análisis	¿`R Markdown` te ha facilitado comprender los análisis estadísticos?	Ordinal
9. Grado de satisfacción	¿Cuál ha sido tu grado de satisfacción utilizando `R Markdown`?	Ordinal
10. Herramienta útil	¿Consideras que `R Markdown` es una herramienta útil?	Binaria
11. `Word` vs. `R Markdown`	En el futuro, ¿recurrirías a `Word` o `R Markdown`?	Binaria
12. Recomendación	¿Recomendarías el aprendizaje de `R Markdown`?	Binaria
13. Lo mejor	Lo que más me ha gustado de `R Markdown` es...	Texto
14. Lo peor	Lo que menos me ha gustado de `R Markdown` es...	Texto
15. Lo más costoso	Lo que más me ha costado de `R Markdown` es...	Texto
16. Mejoras de clases	¿Cómo mejorarías las clases en el uso de `R Markdown`?	Texto

Tabla 1: *Cuestionario de satisfacción con el uso de `R Markdown`.*

Respecto al Ítem 1, de entre el total de estudiantes que contestaron la encuesta, 7 ($15{,}22\,\%$) pertenecían al subgrupo AI1 de Valenciano; 19 ($41{,}30\,\%$) al subgrupo AI2 de

Valenciano; 12 ($26{,}09\,\%$) al subgrupo BI1 de Castellano; y 8 ($17{,}39\,\%$) al subgrupo BI2 de Castellano. Asimismo, solo 6 estudiantes ($12{,}77\,\%$) dijo conocer previamente la existencia de `R` como *software* para realizar análisis estadísticos (Ítem 2), pero nadie había escuchado de `R Markdown` como alternativa para generar informes (Ítem 3).

En la Figura 4 se tiene la descriptiva gráfica para los Ítems 4-12. Observamos que la mayoría de estudiantes en cada subgrupo de prácticas manifestó haber sentido frustración en algún momento durante el proceso de aprendizaje de `R Markdown`. Sin embargo, en tres de los cuatro subgrupos parece que esa frustración fue desapareciendo con el tiempo. Además, la mayor parte del alumnado considera que `R Markdown` le facilitó la entrega de tareas y, aunque parecen valorar la dificultad de aprendizaje como intermedia, no lo consideran ni especialmente fácil ni difícil. En cuanto a la comprensión de los análisis estadísticos, el alumnado parece percibir que el uso de `R Markdown` no le supone un obstáculo en su aprendizaje. El nivel de satisfacción general parece ser relativamente bueno, y la mayoría considera a `R Markdown` una herramienta útil para sus estudios. De hecho, en tres de los cuatro subgrupos expresaron preferencia por seguir utilizando `R Markdown` en el futuro, en lugar de procesadores de texto como `Word`. Además, recomendarían su aprendizaje a otros y otras estudiantes.

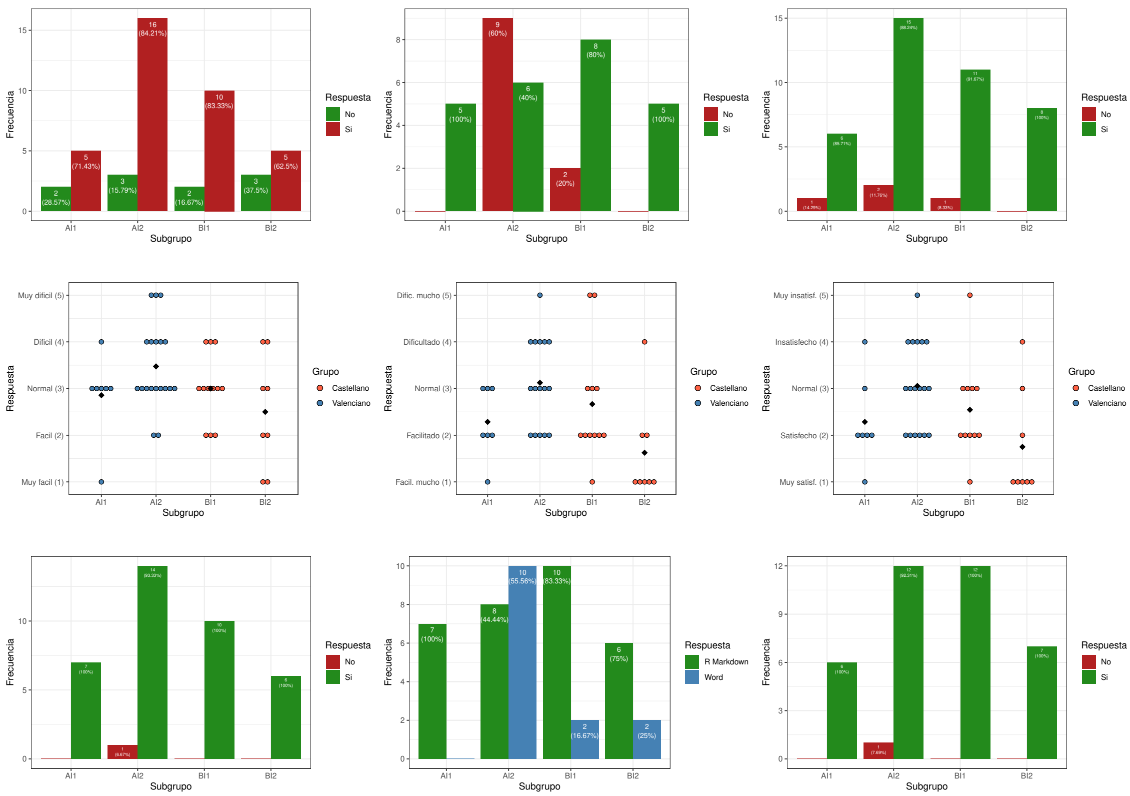


Figura 4: *De izquierda a derecha, de arriba a abajo, resultados de los Ítems* 4-12.

Las últimas cuatro preguntas de la encuesta eran de texto libre (Ítems 13-16). Para este tipo de preguntas son interesantes mapas de palabras que permitan visualizar aquellas de mayor frecuencia en sus respuestas (ver Figura 5). Entre los aspectos más valorados de `R Markdown` destaca la facilidad y rapidez para generar análisis estadísticos, gráficos e informes, en comparación con el uso de procesadores de texto convencionales. Por otro lado, las principales molestias detectadas son el desplazamiento horizontal requerido al redactar párrafos extensos, y el hecho de que las instrucciones ejecutadas con la interfaz se inserten siempre al final del documento, lo que dificulta reorganizar el contenido. En cuanto a lo más costoso del aprendizaje de `R Markdown`, el alumnado señaló que, en un primer momento, es complicado adaptarse al ritmo de la clase y al propio *software*, así como reconocer y gestionar los distintos tipos de archivos. Finalmente, entre las sugerencias para mejorar la enseñanza del uso de `R Markdown`, el alumnado propuso reducir el ritmo de las clases y añadir más explicaciones detalladas sobre las funciones del *software* en el guion de cada una de las prácticas.

Figura 5: *De izquierda a derecha, de arriba a abajo, mapas de palabras (Ítems* 13-16*).*

Todos los detalles están disponibles en un repositorio de `GitHub` [7] que contiene los datos de la encuesta y el código de `R` que permite reproducir el estudio.

CONCLUSIONES

El alumnado del curso 2024-2025 recomendaría el aprendizaje de `R Markdown`, ya que lo considera una herramienta útil que le ha facilitado la entrega de las tareas de evaluación. A pesar de las dificultades iniciales y la posible frustración que es habitual experimentar, el alumnado se familiariza rápidamente tanto con `R-Commander` como `R Markdown`, y termina sintiéndose cómodo utilizándolos.

De cara al futuro, se plantean varias mejoras para optimizar la experiencia docente. En primer lugar, se propone adaptar la "Práctica 0" para incluir información detallada sobre `R Markdown`, ya que en el momento de la creación de su documento de prácticas no se tenía intención de incorporar su aprendizaje. Además, se buscará mejorar el contenido del resto de documentos de prácticas incorporando explicaciones más detalladas y completas sobre el funcionamiento del *software*. También, se espera incluir en cada práctica una plantilla en formato `Rmd` para que los y las estudiantes la puedan cargar y usar directamente, facilitando así aún más su trabajo y preparación para las entregas de evaluación. Finalmente, se pretende reforzar la importancia de la reproducibilidad y replicabilidad en la ciencia, posiblemente integrando este concepto en la misma "Práctica 0" con algunos ejercicios que permitan evidenciar la utilidad de `R Markdown` en este aspecto.

REFERENCIAS

[1] Universitat de València. Guía docente de Bioestadística, Grado en Biología. Curso 2024-2025. Guía docente online. [Consulta 15 de julio de 2025]

[2] R Core Team. `R`: A Language and Environment for Statistical Computing. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria (2025). https://www.R-project.org.

[3] Fox, J. The `R-Commander`: A Basic Statistics Graphical User Interface to `R`. *Journal of Statistical Software*, 14(9), 1-42 (2005). https://www.jstatsoft.org/article/view/v014i09.

[4] Xie, Y., Allaire, J.J., Grolemund, G. `R Markdown`: The Definitive Guide. *Chapman and Hall/CRC* (2018). https://bookdown.org/yihui/rmarkdown.

[5] Grayson, K.L., Hilliker, A.K., Wares, J.R. R Markdown as a dynamic interface for teaching: Modules from math and biology classrooms. *Mathematical Biosciences*, 349 (2022), doi: 10.1016/j.mbs.2022.108844.

[6] Baumer, B., Cetinkaya-Rundel, M., Bray, A., Loi, L., Horton, N.J. R Markdown: Integrating A Reproducible Analysis Tool into Introductory Statistics. *Technology Innovations in Statistics Education*, 8(1) (2014), doi: 10.5070/T581020118.

[7] Repositorio de `GitHub`. [Consulta 15 de julio de 2025]

Experiencias adquiridas y nueva propuesta futura

Isabel Cordero-Carrión[1], **David Zorío**[1]

[1] ***Departament de Matemàtiques, Universitat de València, Dr Moliner, 50, 46100, Burjassot, València, Spain, e-mails: isabel.cordero@uv.es, david.zorio@uv.es.***

Experiences gained and new future proposal

RESUMEN

En este manuscrito presentaremos las conclusiones y experiencias adquiridas tras varios cursos académicos de actividades innovadoras en la asignatura de *Métodos numéricos para el álgebra lineal* (área de matemática aplicada) de segundo curso del grado de Matemáticas en la Universitat de València. Estas actividades han sido llevadas a cabo por diferentes personas como miembros del profesorado de la asignatura con alto grado de satisfacción tanto entre el profesorado como el alumnado. Esta asignatura forma parte de una propuesta coordinada, transversal y progresiva a lo largo de todo este grado. Como propuesta complementaria, se planteará y argumentará los puntos principales de una idea a desarrollar para el próximo curso académico de una actividad de innovación en la asignatura optativa *Ampliación de ecuaciones diferenciales* (de la misma área) de cuarto curso del mismo grado. Esta nueva idea se basa en la existencia de experimentos numéricos como ejemplos de experimentos en matemáticas.

Palabras clave: Experiencias adquiridas, nueva propuesta, experimento numérico.

ABSTRACT

In this manuscript we will present the conclusions and experiences gained after several academic years of innovative activities in the subject *Numerical methods for linear algebra* (applied mathematics area) of second year of Mathematics degree in the University of Valencia. These activities have been carried out by several professors with high degree of satisfaction for both professors and students. This subject is part of a coordinated, transversal and progressive proposal along the whole degree. As a complementary proposal, we will present and argue the main points of an idea to be developed during the next academic year as innovative activity in the optional subject *Extension of differential equations* (same area) of fourth year of the same degree. This new idea is based on the existence of numerical experiments as examples of experiments in Mathematics.

Keywords: Experiences gained, new proposal, numerical experiment.

INTRODUCCIÓN

La innovación educativa es un campo en constante evolución, cuyo objetivo principal es mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje mediante la implementación de nuevas estrategias, metodologías y tecnologías. En un contexto donde la motivación del alumnado desempeña un papel crucial en el éxito de dichas actividades, resulta fundamental entender las dinámicas que influyen en la motivación tanto intrínseca como extrínseca. La motivación intrínseca, relacionada con el interés y la satisfacción personal derivados de la realización de una tarea, ha sido identificada como un factor clave para promover un aprendizaje profundo y duradero [1]. Por otro lado, la motivación extrínseca, que se basa en recompensas externas como calificaciones o reconocimientos, puede ser un catalizador inicial que facilite la participación y el compromiso del alumnado [1].

Diversos estudios sugieren que la transición progresiva de la motivación extrínseca hacia la intrínseca puede potenciar significativamente el interés y la internalización de los conocimientos [2]. Esta dinámica es particularmente relevante en actividades de innovación docente, donde la motivación inicial puede facilitar la participación, pero la verdadera transformación en el aprendizaje se logra cuando los estudiantes encuentran un valor personal en la actividad y desarrollan un interés genuino por los contenidos.

En este contexto, la implementación de actividades innovadoras, como proyectos de creación de vídeos o presentaciones creativas, puede desempeñar un papel esencial en la promoción de una motivación más intrínseca. La posibilidad de que el alumnado conecte los conceptos aprendidos con aplicaciones prácticas reales, y de expresar su creatividad en formatos originales, favorece una actitud participativa y comprometida [3]. Además, la incorporación de elementos de evaluación que reconozcan tanto el esfuerzo académico como la originalidad contribuye a fortalecer el interés genuino por la materia.

Este documento presenta la descripción de una actividad de innovación educativa diseñada y adaptada en respuesta a circunstancias imprevistas, con el objetivo de promover un aprendizaje activo y motivado en los estudiantes. Se abordarán aspectos relacionados con la planificación, implementación, evaluación y experiencias observadas, haciendo especial énfasis en cómo la actividad favorece la transición de la motivación extrínseca a la intrínseca, y en los beneficios potenciales que ello reporta para el proceso formativo.

METODOLOGÍA

Planteamiento

La actividad se llevó a cabo en los grupos A y B de la asignatura de *Métodos numéricos para el Álgebra Lineal*, cuyo planteamiento y estructura guardó continuidad con respecto a la idea original llevada a cabo por otros docentes de la asignatura en cursos anteriores. Esta consistió en proponer al alumnado, por grupos formados entre 2 y 5 personas, que buscasen por su cuenta alguna aplicación práctica relacionada con uno o varios conceptos trabajados en la asignatura. A continuación, expondrían el trabajo delante del resto de compañeros y compañeras, dando libertad en el formato de exposición y permitiendo de esa forma que lo planteasen con un margen de originalidad suficiente.

Desafortunadamente, las inundaciones provocadas por una DANA, con las pérdidas humanas y daños materiales asociados, obligó a suspender las clases durante varias semanas, y a reanudarlas sin presencialidad durante otras tantas. Esto también generó la necesidad de adaptar el formato de la actividad a otro alternativo que permitiese tanto su realización como su exposición de forma remota, poniendo especial atención al alumnado que se vió directa o indirectamente afectado por la catástrofe natural mencionada anteriormente.

Esencialmente, dicha replanificación de la actividad consistió en cambiar su formato a otro asíncrono, con la realización y entrega de un vídeo exponiendo la actividad en cuestión. Este vídeo, en última instancia, se subiría al Aula Virtual de la asignatura y, además del profesorado, también se permitiría su visionado al resto de compañeras y compañeros, tratando así de sortear todas las posibles limitaciones o restricciones del nuevo formato con respecto a la modalidad presencial planteada inicialmente.

Evaluación

El modo de evaluación también guardó continuidad con respecto al planteamiento de años anteriores, con las adaptaciones necesarias para el carácter no presencial de la misma. La actividad en cuestión permite la obtención de hasta un punto adicional en la nota final de la asignatura, con lo que la realización de esta actividad no supone por tanto ningún tipo de penalización, y viene desglosada a través de los criterios siguientes:

- **Planteamiento / búsqueda bibliográfica: 20 %**

  Fundamentación del planteamiento del problema, acompañado de una búsqueda bibliográfica que lo respalde. Se valorará positivamente la capacidad de búsqueda que demuestre cada grupo, así como la capacidad de buscar y procesar información y resultados matemáticos de forma autónoma.

- **Contenidos de la asignatura: 20 %**

  Capacidad de conectar diferentes contenidos vistos en la asignatura con el tema que se esté tratando en el trabajo. No implica enlazar todos los conceptos vistos en los diferentes temas de la asignatura, sino únicamente aquellos que encajen mejor con el tema tratado.

- **Creatividad / originalidad: 20 %**

  Creatividad en la creación del trabajo. Las formas en las que puede presentarse un tema mediante un vídeo admiten muchas posibilidades, por lo que se tiene en cuenta el grado de originalidad en este sentido.

- **Comunicación / síntesis: 20 %**

  Buena capacidad de comunicación y síntesis, procesando adecuadamente toda la información y mostrando los aspectos más relevantes de la misma de una forma clara y ordenada. Aquí se incluye también la capacidad de generar un formato atractivo para el alumnado de la propia asignatura y fomentar su implicación (en el momento o posteriormente).

- **Votación popular: 10 %**

  El día posterior al vencimiento del plazo para enviar los vídeos, estos se publican en el Aula Virtual de la asignatura para que puedan ser visualizados por todas las personas participantes en esta actividad. Paralelamente, se abre una votación popular para que cada participante pueda votar el trabajo del grupo que considere de mayor calidad. El grupo que tenga un mayor respaldo en esta votación obtiene la puntuación total correspondiente de este apartado.

  Aunque se ha permitido la autovotación a lo largo de los diferentes cursos académicos en los que se ha implementado esta actividad, el hecho es que en general esto no se ha producido. No obstante, en este último curso académico con circunstancias especiales por la catástrofe y la modalidad asíncrona de la actividad, no se permitieron autovotos, por lo que cada grupo debía votar un vídeo diferente al suyo. Por otra parte, es obligatorio visualizar los vídeos del resto de grupos y votar en consecuencia. Para fomentar la participación íntegra, toda persona que no participe en la votación queda excluida de la evaluación del trabajo y, por tanto, no obtiene puntuación adicional alguna del mismo.

- **Votación profesorado: 10 %**

  Votación específica por parte del profesorado. De la misma forma que en el apartado anterior, el trabajo que obtenga una mejor valoración entre el profesorado participante (de la asignatura y a veces alguna persona adicional del profesorado de la facultad) será el que obtendrá la puntuación total correspondiente de este apartado.

RESULTADOS

Cabe destacar que, en líneas generales y esencialmente en todos los aspectos, la experiencia fue positiva, permitiendo valorar los beneficios que puede acarrear una innovación docente correctamente implementada. Esto implicó que aplicar la actividad no solamente fuese un reto interesante y motivador, sino también una forma de ampliar dicha experiencia y continuar trazando el camino para futuras innovaciones.

Ciñéndonos ya al caso específico de esta actividad, la experiencia fue muy positiva, destacando en especial en los puntos siguientes:

- **Motivación del alumnado:**

  Como es natural, una actividad que permite obtener una cantidad significativa de puntuación adicional en la nota final de la asignatura es, por sí sola, una motivación (en este caso, extrínseca) para acometer su realización. No obstante, limitarse a este factor no aportaría ningún valor añadido a la actividad en cuestión. Lo que termina de conferirle todo el valor es que esta motivación, inicialmente extrínseca, pasó progresivamente a ser intrínseca. En concreto, una buena parte de los grupos pasó a tener un interés genuino en profundizar sobre el tema que habían elegido y conectarlo con los conceptos relacionados que se llegaban a impartir en la asignatura, y conseguir además generar un impacto en el resto de sus compañeros y compañeras (tanto por contenido como por formato de presentación). Esto se vio especialmente reflejado en una buena cantidad de intercambios de correos electrónicos y peticiones de tutorías solicitando asesoramiento en esos términos.

  Y, lo que es todavía más destacable, tras la visualización de los vídeos fruto del resultado final de su trabajo, se comprobó que no solamente hubo un esfuerzo importante en tratar de profundizar en el tema elegido y conectarlo con la asignatura, sino que también hubo un gran esfuerzo invertido en que la exposición y su formato fuesen lo más motivadores y atractivos posibles tanto para docentes como para el resto de compañeros y compañeras. Esto también podría explicarse como una mera motivación extrínseca, dado que un 10 % de la puntuación dependía de ser la presentación más votada por el alumnado; sin embargo, al tratarse de un porcentaje tan modesto, unida a la satisfacción personal con el proceso de realización de la actividad verbalizada por varios representantes de diferentes grupos, hace pensar que hubo también una componente motivacional intrínseca significativa.

- **Actitud:**

  Cabe destacar que al haber realizado la actividad con los dos grupos en los que está dividida la asignatura, se ha podido establecer una comparativa de su actitud durante las clases ordinarias con respecto a su rendimiento en la actividad. Tras su realización, se ha detectado un contraste destacable, ya que uno de los grupos, con una actitud bastante peor que el otro en las clases de teoría (conversaciones continuas durante las intervenciones del profesorado, poca participación, dificultades para conectar con el grupo y generar motivación...), mostraron un rendimiento similar, e incluso ligeramente superior en promedio, al del otro grupo, con trabajos que destacan tanto en originalidad como calidad conceptual. Probablemente, la componente de papel activo y protagonista que adquiere el alumnado durante la actividad marque una diferencia.

  En definitiva, con esta actividad se pudo comprobar que incluso un grupo aparentemente problemático o apático en muchos aspectos puede terminar rindiendo adecuadamente si se consigue generar una motivación adecuadamente. Esto también sugiere que las líneas de trabajo futuro deberían ir encaminadas a que la conexión entre la actividad y las clases de teoría fluyan mejor en esa otra dirección; es decir, conseguir que cuando asistan a las clases de teoría vean también en ellas un instrumento fundamental no solamente para su formación particular, sino para la actividad que están realizando y sus respectivas aplicaciones en contextos cercanos a la vida real.

- **Aprendizaje:**

  Si bien es cierto que algunos trabajos se centraron más en hacer la presentación atractiva y divulgativa, en otros tantos se optó por ir más allá de los conceptos vistos en la asignatura y presentar ideas más avanzadas; en casos específicos, también puede decirse que los trabajos destacaron en ambos aspectos. No obstante, en cualquiera de los casos, se puede decir que hubo un aprendizaje significativo, ya sea en términos del desarrollo de habilidades de comunicación, en materia más avanzada que la impartida en la asignatura o en ambos aspectos.

  Se desconoce, por otra parte, si hubo algún efecto positivo significativo en la nota final (obviando la puntuación extra que la actividad ya otorga por sí sola). Para ello, se tendría que haber analizado sobre el mismo grupo de control su rendimiento con y sin la actividad de innovación, lo cual es un aspecto que podría considerarse y analizarse en cursos posteriores. Al margen de lo anterior, cabe reseñar que hubo un aprendizaje en los dos elementos mencionados anteriormente y que, en términos cualitativos, la experiencia tanto para el alumnado como para el cuerpo docente fue altamente satisfactoria.

NUEVA PROPUESTA

Motivación

La propuesta de esta actividad de innovación se enmarca en un proyecto transversal enfocado, entre otras cosas, a preparar la defensa pública del Trabajo Final de Grado (TFG) en el Grado de Matemáticas. Por ello, la preparación del alumnado para la presentación atractiva pero rigurosa de contenido matemático es fundamental. No obstante, en una defensa pública de TFG tenemos dos partes claramente diferenciadas: (i) la exposición pública, y (ii) el turno de preguntas por parte del tribunal. En general, el tribunal está formado por profesorado de la facultad a la que se asocia el grado, pero no necesariamente del departamento o área del tema elegido por la persona que defiende el TFG. La primera parte puede entrenarse directamente con la/s persona/s que tutoriza/n el TFG, mientras que la segunda parte requiere de entrenamiento para responder a preguntas no conocidas de antemano con una cierta solvencia y espontaneidad. El entrenamiento de esta segunda parte ni es tan sencillo ni tan frecuente como nos gustaría.

La formulación de preguntas es un pilar básico en la innovación educativa [4]. Esta formulación, al igual que toda actividad de innovación educativa, necesita de la generación de contextos educativos creativos con emociones positivas que eviten el rechazo, incluso el miedo, al juicio ajeno y desarrollen la confianza en el trabajo propio realizado [5]. Como el proyecto transversal implementado atiende a la incorporación progresiva de dificultad en las actividades propuestas, consideramos que esta capacidad de respuesta a preguntas no conocidas de antemano debería localizarse en los últimos niveles de este camino. De ahí la propuesta de incluir una actividad de innovación educativa en la asignatura optativa del último curso (cuarto) del grado de Matemáticas *Ampliación de ecuaciones diferenciales*.

Planteamiento

Además del entrenamiento a la respuesta de preguntas no conocidas de antemano, en los objetivos de esta actividad se suma el hecho de querer profundizar en el concepto de “experimento” en matemáticas, que no resulta tan habitual en las áreas tradionalmente más abstractas. Sin embargo, nos resulta familiar hablar de “experimentos aleatorios” en estadística y probabilidad, y también de “experimentos numéricos” en el área de la matemática aplicada. Partimos de una visita de un grupo de alumnado de instituto, que venga con la idea de una visita al centro universitario correspondiente (en este caso la Facultad de Matemáticas) en la línea del programa *Conéixer* de la Universitat de València, con docentes de ese instituto que estén al tanto de la actividad que va a tener lugar. La idea consiste, por un lado, en la elaboración de un guión por parte del alumnado de la asignatura del grado, previa a la visita por parte del alumnado de instituto, que establezca las líneas generales del desarrollo de la interacción teatralizada con docente y alumnado de instituto que realiza la visita, y que ponga en cuestión la afirmación “En matemáticas no hay experimentos”. Por otro lado, además de desarrollar el guión, el alumnado de la asignatura del grado tendrá que llevarla a cabo, teniendo en cuenta que el alumnado de instituto no es consciente de que esa interacción ha sido planificada previamente y tendrá permitido la realización de preguntas y comentarios en todo momento.

Evaluación

Como propuesta inicial, que probablemente sea modificada a la vista de la experiencia y resultados que se puedan obtener, contamos con una rúbrica general y con una rúbrica individual para cada alumno o alumna de la asignatura del grado en la que se incluye esta actividad de innovación educativa. En la rúbrica general se tendrán en cuenta los siguientes aspectos y pesos respectivos: relación con los contenidos de la asignatura, con un 25 % de peso; valoración de la actividad por parte del alumnado de instituto con un 15 % de peso; y valoración del profesorado tanto de la asignatura del grado como del instituto visitante, con un 10 % de peso. En cuanto a la rúbrica individual, se considerará la capacidad de comunicación con un 25 % de peso y la interacción individual con el alumnado del instituto con otro 25 % de peso.

CONCLUSIONES

La experiencia con la actividad de innovación educativa demostró que la motivación inicial extrínseca, en forma de recompensa académica, puede convertirse en un motor de motivación intrínseca, lo que a su vez facilita un aprendizaje más profundo y genuino. La libertad creativa en el diseño de las presentaciones permitió al alumnado conectar de manera significativa con los contenidos de la asignatura, favoreciendo tanto su autonomía como el desarrollo de habilidades de comunicación y síntesis. Esta transformación en la motivación también fue observada en el esfuerzo por hacer las presentaciones atractivas y relevantes, lo que refleja un aprendizaje que va más allá de los requisitos mínimos y enriquecido con la participación activa. Además, la adaptación de la actividad a un formato no presencial ante las situaciones imprevistas puso de manifiesto la importancia de la flexibilidad en la planificación educativa y cómo una adaptación adecuada ante estos desafíos puede resultar en una experiencia de aprendizaje igualmente enriquecedora.

Por otro lado, la evaluación participativa, mediante votación popular tanto entre el alumnado como el profesorado, fomentó un ambiente de colaboración y competencia saludable que motivó a los y las estudiantes a mejorar la calidad de sus trabajos. No obstante, se identificó que la conexión entre las clases teóricas y las actividades prácticas podría mejorarse, de manera que el alumnado comprenda mejor la utilidad real de los conceptos aprendidos. Aunque los efectos en el rendimiento académico no se pudieron evaluar de forma precisa, los resultados cualitativos sugieren que la innovación educativa no solo potencia el aprendizaje, sino que también fortalece la satisfacción del alumnado. Finalmente, la propuesta futura de entrenar a los estudiantes en la capacidad de responder preguntas espontáneamente en la defensa del TFG subraya la importancia de preparar a nuestros y nuestras estudiantes no solo en la exposición, sino también en su habilidad para interactuar de manera reflexiva y crítica con los miembros del tribunal, lo que resulta fundamental para su desarrollo profesional.

REFERENCIAS

[1] R. M. Ryan y E. L. Deci, *Intrinsic and extrinsic motivations: Classic definitions and new directions*. Contemporary Educational Psychology, vol. 25, no. 1, pp. 54–67, 2000.

[2] W. S. Grolnick y R. P. Ryan, *Autonomy in children's learning: An experimental and individual difference investigation*. Journal of Educational Psychology, vol. 89, no. 4, pp. 522–533, 1997.

[3] D. H. Schunk, J. A. Meece, y P. R. Pintrich, *Motivation in Education: Theory, Research, and Practice*. Pearson Higher Ed, 2014.

[4] C.G. Benoit Ríos, *La formulación de preguntas como estrategia didáctica para motivar la reflexión en el aula*. Cuadernos de Investigación Educativa, vol. 11, no. 2, pp. 95–115, 2020.

[5] Ematris innovación y emprendimiento, *La importancia de las preguntas para el aprendizaje y la innovación*.

`https://www.linkedin.com/pulse/la-importancia-de-las-preguntas-para-qhjre/`

Justificar en matemática: logros y dificultades de estudiantes a partir de una propuesta de innovación

Emilio Lacambra[1], Marta Fabiana Pauletich[1]
Andrea Bermúdez Cicchino[1]

[1]Facultad de Ciencias Agrarias y Forestales. Universidad Nacional de La Plata. (Argentina), Calle 60 y 119. La Plata (1900) Buenos Aires. Argentina emilio.lacambra@agro.unlp.edu.ar

Argumentation in mathematics: students' achievements and difficulties based on an innovation proposal

RESUMEN

Matemática es una materia de primer año de las carreras de Ingeniería Agronómica e Ingeniería Forestal. Como parte de un proceso de innovación que comenzó en 2023, la cátedra cambió el enfoque de las clases teóricas y su relación con las prácticas enfatizando la interpretación de los resultados y la fundamentación de las estrategias de resolución elegidas. En una comunicación anterior, compartimos una reflexión sobre la nueva propuesta didáctica desde el estudio de la guía de trabajos prácticos y la evaluación del tema «Límite y continuidad». En continuidad con dicho análisis, en el presente trabajo nos enfocamos en las respuestas de estudiantes a un ejercicio de examen del mismo tema que hace hincapié en la justificación, la interpretación de gráficos y la aplicación de conceptos teóricos a situaciones prácticas, identificando dificultades y logros de los estudiantes. Esto nos permite problematizar algunos aspectos de la propuesta que se está poniendo en práctica.

Palabras clave: innovación, argumentación, justificación, respuesta de los estudiantes

ABSTRACT

Mathematics is a first-year course in the career of Agronomic Engineering and Forestry Engineering. As part of a renewal process initiated in 2023, the course revised its approach to theoretical classes and their connection to practice sessions, emphasizing the interpretation of results and the justification of chosen problem-solving strategies. In a previous communication, we shared a new didactic approach based on the study of the practical work guide and the evaluation of the topic "Limits and continuity." Following up on that analysis, this work focuses on students' answers to a midterm exam question on the same topic, which emphasizes justification, interpretation of graphs, and the application of theoretical concepts to practical exercises, identifying both students' difficulties and achievements. This allows us to understand key aspects of the approach currently being implemented.

Keywords: innovation, argumentation, justification, student responses

INTRODUCCIÓN

Matemática es una materia de primer año de las carreras de Ingeniería Agronómica e Ingeniería Forestal, de la Facultad de Ciencias Agrarias y Forestales de la Universidad Nacional de La Plata, Argentina. A partir del 2023 se implementó una innovación pedagógica en la cátedra, cambiando el enfoque de las clases teóricas y su relación con las prácticas enfatizando la interpretación de los resultados y la fundamentación de las estrategias de resolución elegidas. En [1] se describe la nueva propuesta didáctica desde el estudio de una guía de trabajos prácticos y su evaluación. Esta propuesta se inscribe en una reflexión más amplia sobre la enseñanza de la matemática a estudiantes cuya formación profesional no está orientada específicamente hacia esta disciplina, aunque la requieren como herramienta fundamental. Desde una perspectiva que entiende la innovación según lo expresado por Dumrauf y Cordero [2] como un cambio planificado y contextualizado, la propuesta puede considerarse innovadora ya que modifica, entre otros aspectos, la forma en que se venía impartiendo la asignatura. Hasta entonces, la enseñanza se centraba exclusivamente en los algoritmos y el cálculo formal; la propuesta actual incorpora actividades que requieren la interpretación de gráficos y la argumentación, habilidades clave en la formación de ingenieros agrónomos y forestales. El trabajo mencionado incluye, además, un análisis didáctico de las actividades propuestas al estudiantado en una guía de trabajos prácticos, así como de los ejercicios incluidos en las evaluaciones, comparando sus versiones previa y posterior a la innovación.

En el presente trabajo y a modo de continuidad del anterior, se analizan las respuestas de los estudiantes a un ejercicio de examen, con el objetivo de avanzar en la comprensión de los logros y las dificultades que surgen al aplicar este nuevo enfoque. Consideramos valioso recuperar las producciones estudiantiles como una forma de visibilizar aquello que lograron resolver — entendiendo la resolución como la integración entre los fundamentos teóricos y los procedimientos — así como las dificultades que enfrentaron, desde una perspectiva cualitativa que trasciende los resultados numéricos de los exámenes o las estadísticas de aprobación. Sostenemos que detenernos a reflexionar en torno a esta evaluación de los aprendizajes puede brindarnos información significativa para valorar la innovación en la propuesta de enseñanza y fortalecerla. Asimismo, podría resultar útil para seguir repensando la propia evaluación, en consonancia con los objetivos que orientan dicha innovación.

ALGUNOS POSICIONAMIENTOS TEÓRICOS

Siguiendo los lineamientos de Homero Flores [3] entendemos por *práctica argumentativa* al conjunto de acciones y razonamientos que un individuo pone en juego para justificar o explicar un resultado, o bien para validar una conjetura surgida durante el proceso de resolución de un problema. Cabe aclarar que entendemos que *la justificación de un resultado* consiste en su validación mediante una afirmación que establezca con claridad por qué dicho resultado es correcto. Para ello, resulta fundamental establecer una distinción clara entre lo que vamos a entender por *resolución* y *justificación* en el contexto de este trabajo. Entendemos por resolución a la presentación de datos, resultados numéricos o procedimientos — como una tabla de valores, un gráfico o un cálculo — que apoyan una argumentación. La justificación, en cambio, implica explicar por qué esa resolución es válida o por qué es pertinente aplicar determinado teorema o propiedad en una situación específica. Justificar, por lo tanto, requiere que los estudiantes articulen la resolución con los fundamentos teóricos que respaldan sus procedimientos, integrando definiciones, teoremas y propiedades matemáticas relevantes en su argumentación.

METODOLOGÍA

Para el análisis se utilizaron como insumo exámenes del año 2024, en particular, se seleccionaron respuestas a un ejercicio sobre el mismo tema abordado en [1] límite y continuidad (Figura 1). Se eligió específicamente un ejercicio que pone mayor énfasis en la justificación, tanto en su consigna como en la corrección, y que además articula los conceptos de límite y continuidad con la interpretación de un gráfico. Es decir, se optó por aquel en el que la innovación propuesta se manifiesta de forma más evidente.

4) Dada la gráfica de la función $s(x)$, mostrada en la **Figura 1**, determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. **Justificar**.

a) $s(x)$ es continua en el intervalo $(0,2)$.

b) El $\lim_{x\to 3^-} s(x)$ no existe.

c) Como el límite cuando x tiende a -1 existe, sabemos que la función es continua en x igual a -1.

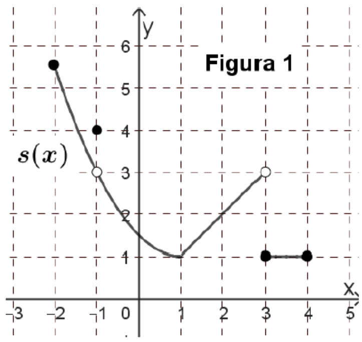


Figura 1: Ejercicio de examen utilizado para analizar las respuestas de los estudiantes.

Para el análisis de las respuestas, se utilizó una matriz valorativa con tres dimensiones: la completitud y validez del argumento (I), el uso de lenguaje matemático (II) y la conexión entre teoría y práctica (III) (Tabla 1). En la dimensión (I) se valoró si el argumento contiene todo lo necesario para llegar a la conclusión y la corrección lógica del razonamiento utilizado. En la dimensión (II) “uso de lenguaje matemático” se analizó si los estudiantes utilizan lenguaje matemático y simbólico de manera adecuada o si expresan sus justificaciones mediante lenguaje cotidiano y en qué grado. Mientras que la dimensión (III) “conexión teoría-práctica” da cuenta de en qué grado los estudiantes articulan los conceptos teóricos con las resoluciones.

Dimensión	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3	Nivel 4
Completitud y validez del argumento (I)	Ausencia de justificación o sólo muestra el resultado final o con errores conceptuales graves.	Justificación parcial, algunos pasos están explicados pero faltan conexiones lógicas o imprecisiones.	Justificación completa que conecta todos los pasos principales de manera válida y precisa.	Justificación exhaustiva que anticipa posibles objeciones y clarifica sutilezas.
Uso del lenguaje matemático (II)	Uso predominante de lenguaje coloquial con escaso vocabulario técnico.	Mezcla de lenguaje coloquial y términos matemáticos con algunas imprecisiones.	Uso correcto y consistente de terminología matemática.	Uso preciso y adecuado del lenguaje matemático y simbólico.
Conexión teoría-práctica (III)	No menciona conceptos teóricos en la resolución.	Menciona conceptos teóricos pero sin explicitar su aplicación en la resolución.	Explica cómo los conceptos teóricos se aplican a pasos específicos de la resolución.	Integra fluidamente la teoría con la práctica, mostrando comprensión de los fundamentos conceptuales.

Tabla 1: Matriz valorativa utilizada en el análisis de las respuestas de los estudiantes a un ejercicio de examen del tema "límite y continuidad".

Para cada una de las dimensiones se consideraron cuatro niveles de valoración. Cabe mencionar que la matriz como dispositivo, y los criterios con los que se construyó, no corresponden con los criterios utilizados originalmente para corregir y calificar dicho ejercicio en los exámenes.

Con el objetivo de tener un panorama sobre las dificultades y los logros de los estudiantes, se seleccionaron 12 de los 95 exámenes presentados en esa fecha. La selección buscó garantizar una muestra con distintos niveles de rendimiento. En primer lugar, los 95 exámenes se dividieron en tres grupos según la calificación obtenida en la corrección del ejercicio seleccionado: exámenes con el ejercicio bien, exámenes con el ejercicio regular y un tercer grupo con exámenes con el ejercicio mal o sin realizar. Se analizaron exámenes de cada uno de esos grupos hasta que el análisis de nuevos exámenes dejó de aportar información relevante a los propósitos del trabajo, es decir no surgían nuevos niveles o patrones de apropiación del lenguaje simbólico o de conexión entre teoría y práctica, ni nuevos errores conceptuales en las justificaciones.

RESULTADOS

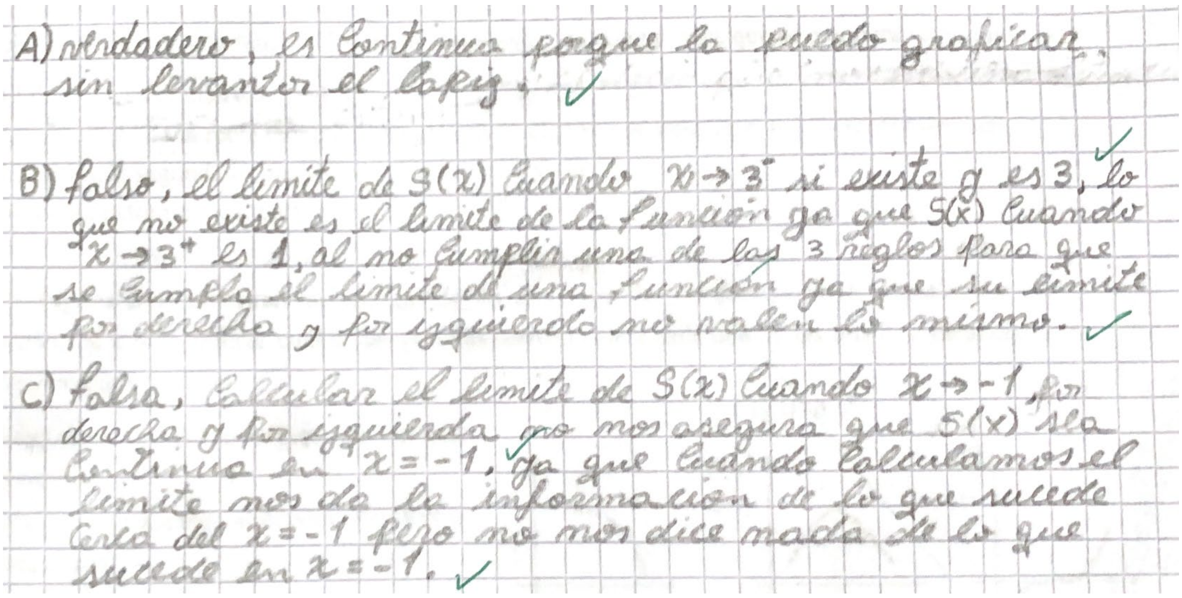
En la Tabla 2 se resume el nivel alcanzado por cada estudiante en las dimensiones I, II y III de la matriz valorativa para cada uno de los incisos (4a, 4b y 4c) del examen.

examen	4a			4b			4c		
	I	II	III	I	II	III	I	II	III
1	1	1	1	2	1	1	3	1	1
2	1	1	1	1	1	2	1	2	1
3	1	1	1	1	2	1	2	2	1
4	2	2	2	2	2	2	1	3	2
5	1	1	1	1	2	1	1	1	1
6	3	1	1	4	2	3	4	2	3
7	1	2	2	3	4	1	2	4	4
8	2	4	2	1	2	1	1	2	1
9	2	2	2	2	1	1	2	1	2
10	2	2	2	4	3	2	2	2	4
11	3	2	2	3	2	3	1	2	3
12	-	-	-	3	1	3	2	2	3

Tabla 2: Niveles alcanzados por cada estudiante en las respuestas a cada inciso del ejercicio de examen seleccionado (Figura 1) según las dimensiones de la matriz valorativa (Tabla 1)

Como caracterización general, se puede observar diversidad en los niveles alcanzados de cada dimensión y en cada inciso. Más particularmente, se encontró que un mismo estudiante, dependiendo del inciso del ejercicio, alcanzó niveles distintos en las dimensiones analizadas en la rúbrica. Si bien los incisos tratan sobre el mismo tema, se relacionan con distintos conceptos, presentan las consignas de diferentes maneras y ponen en juego habilidades diferentes. Asimismo, una respuesta a un inciso por parte de un estudiante puede alcanzar distintos niveles según la dimensión analizada. Es decir que se pudieron encontrar, por ejemplo, argumentos con mucha validez (niveles altos en la dimensión I) sin que haya muestra de un desarrollo de un lenguaje matemático preciso o una articulación explícita de conceptos teóricos con la práctica (por ejemplo, el estudiante 1 en el inciso c, o el estudiante 6 en el inciso a); o bien respuestas con lenguaje específico y buena conexión teoría-práctica sin que eso, por sí solo, permita poner en evidencia un argumento completo y válido para la situación dada en la consigna (como el estudiante 7 en el inciso c o el estudiante 8 en el inciso a).

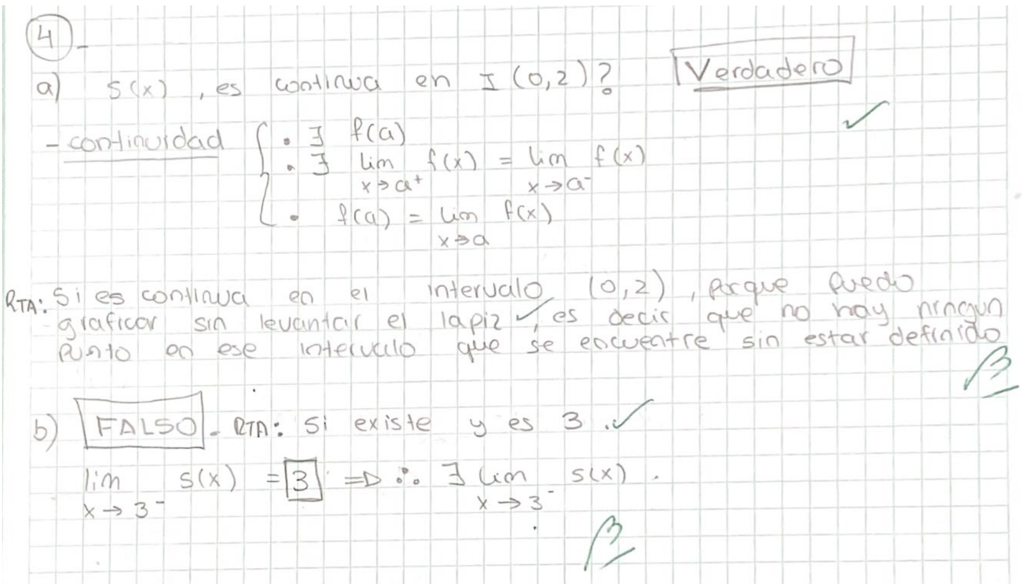
A continuación, se muestran dos ejemplos de respuestas a los tres incisos del ejercicio por parte de dos estudiantes (Figuras 2 y 3). Las mismas son ilustrativas de logros y dificultades observadas en relación a las dimensiones de la matriz en exámenes que fueron valorados con buen puntaje en la corrección.


A) verdadero, es continua porque la puedo graficar sin levantar el lapiz.

B) falso, el limite de $S(x)$ cuando $x \to 3^-$ si existe y es 3, lo que no existe es el limite de la funcion ya que $S(x)$ cuando $x \to 3^+$ es 1, al no cumplir una de las 3 reglas para que se cumpla el limite de una funcion ya que su limite por derecha y por izquierda no valen lo mismo.

C) falso, calcular el limite de $S(x)$ cuando $x \to -1$, por derecha y por izquierda no nos asegura que $S(x)$ sea continua en $x=-1$, ya que cuando calculamos el limite nos da la informacion de lo que sucede cerca del $x=-1$ pero no nos dice nada de lo que sucede en $x=-1$.

Figura 2: Respuesta del estudiante 6 al ejercicio.


4 -

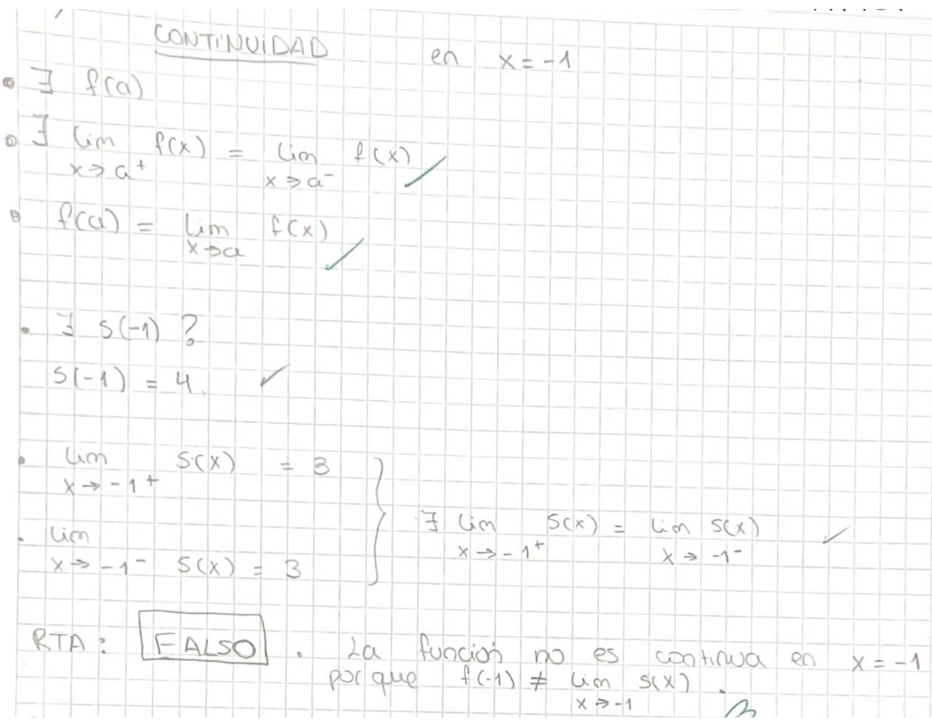
a) $S(x)$, es continua en $I\ (0,2)$? $\boxed{\text{Verdadero}}$

- continuidad $\begin{cases} \bullet\ \exists\ f(a) \\ \bullet\ \exists \lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) \\ \bullet\ f(a) = \lim_{x \to a} f(x) \end{cases}$

RTA: Si es continua en el intervalo (0,2), porque puedo graficar sin levantar el lapiz, es decir que no hay ningun punto en ese intervalo que se encuentre sin estar definido

b) $\boxed{\text{FALSO}}$ - RTA: Si existe y es 3.

$\lim_{x \to 3^-} S(x) = \boxed{3} \Rightarrow \therefore \exists \lim_{x \to 3^-} S(x)$.



CONTINUIDAD en $x = -1$

- $\exists\ f(a)$
- $\exists \lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x)$
- $f(a) = \lim_{x \to a} f(x)$

- $\exists\ s(-1)$?

$s(-1) = 4.$

- $\lim_{x \to -1^+} s(x) = 3$
- $\lim_{x \to -1^-} s(x) = 3$

$\exists \lim_{x \to -1^+} s(x) = \lim_{x \to -1^-} s(x)$

RTA: $\boxed{\text{FALSO}}$. La función no es continua en $x = -1$ porque $f(-1) \neq \lim_{x \to -1} s(x)$.

Figuras 3a y 3b: Respuesta del estudiante 2 al ejercicio. Los incisos a y b se encuentran resueltos en la Figura 3a, y el último inciso en la Figura 3b.

En la Figura 2 se muestra la respuesta del estudiante 6, la misma está completa, con la mención explícita a conceptos asociados a la temática de la consigna y una justificación acorde, sin embargo, el estudiante utilizó mayormente lenguaje cotidiano, con nociones intuitivas asociadas al gráfico que fueron discutidas en clase, como por ejemplo el concepto de continuidad como la posibilidad de no levantar el lápiz al trazar la curva o el concepto de límite como el valor al que se acerca la función.

En la Figura 3 se muestra la respuesta del estudiante 7, en la que utiliza lenguaje simbólico adecuado, haciendo mención explícita a conceptos asociados a la temática (la definición de continuidad, por ejemplo). Sin embargo, la explicitación de dichos conceptos no implicó que el estudiante pueda establecer una relación con el resto de la respuesta ni vincular ese concepto con lo solicitado en concreto en la consigna, como se observa en las respuestas a los incisos a y c. Esto muestra, por un lado, cierta adquisición de los conceptos e incluso de la pertinencia para el caso en particular, y al mismo tiempo una falta de apropiación para su utilización o bien dificultades para entender la consigna, que también involucra comprensión conceptual del tema y adquisición de lenguaje matemático.

El ejercicio seleccionado posibilitó el análisis de los diferentes niveles que alcanzaron los estudiantes para las tres dimensiones establecidas en la rúbrica. Por un lado, permite la evaluación de la completitud y validez de las justificaciones de las consignas, pero además pone en evidencia diferentes niveles de apropiación del lenguaje simbólico y matemático, como así también distintos niveles de conexión entre la teoría y la práctica que alcanzaron los estudiantes, estos últimos podrían estar directamente relacionados con el grado de comprensión y apropiación de los conceptos. En general se observó que la explicitación de los conceptos teóricos, como ser definiciones o propiedades, no necesariamente implicó que el estudiante pueda aplicar dichos conceptos teóricos para responder la consigna.

Cabe mencionar que en ejemplos de exámenes con bajo puntaje en la corrección, se encuentran casos en que se esbozan justificaciones en las que se evidencian errores conceptuales y/o falta de desarrollo o precisión en la respuesta. Por ejemplo, como respuestas al inciso c: “el límite sí existe cuando x tiende a -1 por derecha e izquierda pero la función en ese punto no está definida pero f(-1)=4” (del estudiante 2); “falso porque el límite cuando x tiende a menos 1 existe sólo en 1 punto y no es el de la función” (del estudiante 5).

CONCLUSIONES

Este trabajo presenta la respuesta de los estudiantes a un ejercicio de examen, con el objetivo de analizar el impacto que tuvo en el alumnado el proceso de innovación comenzado hace algunos años en la cátedra de matemática. La actividad seleccionada para realizar dicho análisis está en línea con los objetivos de la propuesta de enseñanza, que hace hincapié en la justificación, la interpretación de gráficos y la aplicación de conceptos teóricos a situaciones prácticas, y permitió poner en evidencia la utilización de conceptos teóricos en su resolución.

El ejercicio de justificar, incluso en consignas que en principio no son abiertas (como un verdadero o falso), requiere de decisiones en torno a qué conceptos teóricos utilizar, de qué manera hacerlo y cómo presentarlos verbalmente para ponerlos articulados con la situación concreta. Esta práctica propicia la adquisición de habilidades específicas, jerarquizando objetivos de enseñanza transversales a las carreras, que están ligados al razonamiento y la validación de argumentos y pueden ser de utilidad para estudiantes universitarios y futuros profesionales de las ramas de las ingenierías. La diversidad de respuestas obtenidas y de estrategias seguidas por los estudiantes para la justificación de las consignas dejaron de manifiesto no sólo distintos grados de apropiación de los conceptos objeto de enseñanza, sino también las dificultades propias de la adquisición de dichas competencias argumentativas. Esto invita a los docentes de la cátedra a repensar las estrategias de enseñanza para poder orientar a los estudiantes en la construcción de criterios para tomar dichas decisiones, y al mismo tiempo pone en valor la propuesta de enseñanza más allá de los contenidos disciplinares específicos explicitados en el programa.

Por último, si bien la rúbrica utilizada en este trabajo con fines investigativos, no se aplica en la evaluación de los estudiantes, la experiencia de su aplicación en este trabajo podría ser de utilidad para repensar la forma en que se diseñan los criterios de evaluación, se dan a conocer los resultados y se realizan las retroalimentaciones a los estudiantes, ponderando los mencionados objetivos transversales y pensándose en forma progresiva a lo largo del desarrollo de la materia. Asimismo, se concluye que las consignas de actividades como la analizada, resultan potentes para poner en evidencia los niveles de aprendizajes en las tres dimensiones seleccionadas, en la evaluación de los estudiantes, a diferencia de lo que ocurre con los ejercicios que se resuelven aplicando un procedimiento y no requieren fundamentación u otro tipo de verbalización en los que se pongan en juego explícitamente conceptos teóricos.

REFERENCIAS

[1] Bermúdez Cicchino, A., Lacambra, E., Pauletich, M.F y Trípoli, M. La Interpretación de gráficos y la argumentación de resoluciones matemáticas como motivación para repensar los trabajos prácticos. IX Congreso nacional y VII Congreso internacional de educación en las ciencias agropecuarias. Libro de conferencias y trabajos. 1ª ed Morón, 430-437 (2024).

[2] Dumrauf, A., y Cordero, S. Tramas entre escuela y universidad. Formación docente, innovación e investigación colaborativa. Series: Educación. 1a ed. La Plata: EDULP (2017).

[3] Homero Flores, A. Esquemas de argumentación en profesores de matemáticas del bachillerato. Educación matemática, 19 (1), 63-98. (2007).

“La economía en directo: cómo utilizar las ruedas de prensa del BCE en la enseñanza de las Matemáticas Financieras”

Felipe Sánchez-Coll[1], Colin Donaldson[2] y *Jorge Villagrasa*[3]

[1] Departamento de Contabilidad y Finanzas, EDEM Centro Universitario, Plaça de l'Aigua, nº 1, 46024, Valencia, fsanchez@edem.es
[2] Departamento de Emprendimiento, EDEM Centro Universitario, Plaça de l'Aigua, nº 1, 46024, Valencia, cdonaldson@edem.es
[3] Departamento de Estrategia, EDEM Centro Universitario, Plaça de l'Aigua, nº 1, 46024, Valencia, jvillagrasa@edem.es

"Economics Live: How to Use ECB Press Conferences in the Teaching of Financial Mathematics"

RESUMEN

Esta comunicación presenta una experiencia docente innovadora en el marco de la asignatura Financial Mathematics (FM), impartida en inglés en el segundo curso del grado en Administración y Dirección de Empresas de EDEM. La propuesta consiste en la proyección en clase de las ruedas de prensa que celebra cada 6 semanas el Banco Central Europeo (BCE), seguidas de debates guiados respecto a las decisiones sobre los tipos de interés anunciadas por su presidenta, Christine Lagarde. Este enfoque conecta conceptos teóricos, como el cálculo de cuotas de préstamos o la valoración de bonos, con aplicaciones prácticas inmediatas, utilizando datos macroeconómicos en tiempo real. De este modo se promueve una mayor motivación estudiantil, pensamiento crítico y alfabetización financiera. Los resultados, basados en encuestas abiertas, reflejan una mayor percepción de aplicabilidad y utilidad de este tipo de contextos reales por parte del alumnado, tanto en el ámbito profesional como en la toma de decisiones personales.

Palabras clave: alfabetización financiera, educación financiera, educación matemática, tipos de interés

ABSTRACT

This communication presents an innovative teaching experience within the Financial Mathematics course, taught in English during the second year of the Business Administration degree at EDEM. The approach involves projecting the European Central Bank’s press conferences (held every six weeks) and facilitating guided debates on the interest rate decisions announced by its president, Christine Lagarde. This method bridges theoretical concepts, such as loan payment calculations and bond valuation, with real-time macroeconomic data and practical applications. It aims to enhance student motivation, critical thinking, and financial literacy. Open-ended survey responses show that students perceive these real-world contexts as highly applicable and useful, both in the professional and personal spheres when making financial decisions.

Keywords: financial literacy, financial education, mathematical education, interest rates.

INTRODUCCIÓN

Resulta especialmente significativo que, en el dictamen final de la Comisión de Investigación sobre la crisis financiera en España, se proponga "estudiar la posibilidad de incorporar conceptos relacionados con la educación financiera en los currículos escolares y desarrollar planes en materia de educación y cultura financiera" dirigidos a la población española [1]. Dicha Comisión, constituida en febrero de 2017 con el objetivo de analizar las causas y consecuencias de la crisis financiera que asoló el país en 2008, presentó en diciembre de 2018 un informe de 273 páginas que incluye una serie de reflexiones y propuestas destinadas a prevenir la repetición de un desastre de tal magnitud. Entre sus conclusiones, el informe destaca la necesidad de avanzar decididamente hacia una mejora de la Alfabetización Financiera (o *Financial Literacy*, en su acepción anglosajona) de la ciudadanía.

Esta necesidad se justifica por el hecho de que la Alfabetización Financiera (AF), entendida como la capacidad de las personas para procesar información económica y tomar decisiones informadas sobre planificación financiera, acumulación de ahorro, pensiones y gestión de la deuda [2], se ha convertido en una de las competencias clave para la ciudadanía del siglo XXI [3]. No sorprende, por tanto, que la propia Comisión Europea [4] afirme que una mejor comprensión de las finanzas permite a la ciudadanía gestionar con mayor eficacia sus recursos y participar con mayor seguridad y confianza en los mercados financieros. Esta mejor comprensión favorecerá una mayor resiliencia financiera de los ciudadanos y ciudadanas ante eventos inesperados, lo que contribuirá a que consiguieran un mayor bienestar financiero.

Además, el fomento de esta competencia se enmarca en el proyecto de la Comisión Europea para construir una Unión de los Mercados de Capitales, orientada a facilitar la libre circulación del capital de inversores y ahorradores a lo largo de la Unión. En este sentido, el *Capital Markets Union Action Plan* de 2020 [5] dedica su Acción 7 a "Empoderar a los ciudadanos a través de la educación financiera", subrayando que "toda persona debería ser capaz de entender los riesgos que implica endeudarse o invertir dinero". Asimismo, se señala que la educación financiera contribuye a proteger a los ciudadanos frente al sobreendeudamiento, la asunción excesiva de riesgos, el fraude y los riesgos cibernéticos, en un entorno económico y financiero crecientemente digitalizado.

Lamentablemente, el nivel de Alfabetización Financiera (AF) entre la población sigue siendo bajo. En el ámbito internacional, la *Global Financial Literacy Survey* de 2023 muestra que solo el 34 % de las personas adultas posee conocimientos básicos en finanzas. Asimismo, este estudio (realizado en 39 países, de los cuales 8 pertenecen al G20) revela que apenas el 42 % de la población adulta es capaz de identificar correctamente una tasa de interés compuesta [6]. El caso español confirma esta preocupación. Según la Encuesta de Competencias Financieras de 2021, elaborada por la CNMV y el Banco de España, cerca del 30 % de las mujeres presenta niveles bajos o muy bajos de conocimientos financieros, frente al 17 % de los hombres. Por edad, el 35 % de las personas mayores de 65 años se sitúa en los niveles más bajos de conocimiento [7]. Este bajo nivel de AF tiene consecuencias relevantes. La literatura científica ha mostrado que los consumidores con menor conocimiento financiero tienden a ahorrar menos, acumular más deuda y pagar un coste mayor por ella, tanto en términos de tipos de interés como de comisiones [8] [9]. En este mismo sentido, otras investigaciones apuntan a que incluso las nuevas generaciones de jóvenes con estudios universitarios, como los Millennials, muestran bajos niveles de formación financiera, lo que los lleva a incurrir en errores similares [10].

Por el contrario, una mejor formación en finanzas acarrea aspectos positivos. Así, las personas con una sólida alfabetización financiera tienden a planificar mejor sus ingresos y a ahorrar con mayor eficacia para la jubilación [2]. Asimismo, es más probable que diversifiquen sus inversiones, distribuyendo el riesgo entre distintas empresas o fondos [11]. También, la evidencia empírica sugiere algo que nos gusta recordar al alumnado. A saber, que los estudiantes que han recibido formación en asignaturas como *Financial Mathematics* (FM) muestran una mejor gestión financiera, ya que acumulan menos deuda, ahorran más y presentan tasas de mora más bajas [12].

En este contexto, la asignatura de FM contribuye de forma directa al Objetivo de Desarrollo Sostenible número 4 (educación de calidad), al mejorar los niveles de Educación Financiera (EF). En el ámbito personal, proporciona habilidades clave que permiten a la ciudadanía afrontar con mayor preparación su inevitable interacción con las instituciones financieras, lo que conllevará tomar decisiones monetarias que generaran un impacto duradero en sus economías domésticas [4]. En el plano profesional, una mayor competencia financiera entre directivos se asocia con una mejor elaboración de la información financiera, lo que puede facilitar el acceso a financiación externa [13]. En conjunto, estos beneficios adquieren una importancia aún mayor en un entorno económico caracterizado por una creciente complejidad y dinamismo.

Por último, existe un componente esencial de la educación financiera que está estrechamente vinculado con la competencia numérica o alfabetización matemática, y este es la actitud emocional hacia los números. Ciertamente, la familiaridad y fluidez en su manejo constituyen un pilar fundamental de la alfabetización financiera, ya que tomar decisiones económicas conlleva el uso de habilidades numéricas como el cálculo de ratios, estimaciones o probabilidades [14]. En esta línea, la propia OCDE, en el marco del programa PISA, define la alfabetización matemática como la capacidad de razonar matemáticamente y de formular, utilizar e interpretar las matemáticas al abordar problemas en diversos contextos del mundo real [15].

El valor del contexto: la vida real cuenta en el aprendizaje

Para que las matemáticas sean verdaderamente eficaces en la vida del estudiantado, es fundamental que su aprendizaje se sitúe en contextos sociales y culturales con significado. Según Cobb [16], el aprendizaje matemático debe entenderse como un proceso dual. Por una parte, implica la construcción personal de significados a través de la resolución de situaciones cotidiana (por ejemplo, calcular mentalmente el precio por kilo de un producto en el supermercado a partir del precio de un envase de 200 gramos); por otra, requiere también la apropiación de los procedimientos, convenciones y formas de argumentar que son propias de la comunidad matemática y, en general, de la sociedad (por ejemplo los estándares de medida en pesos, distancias, temperatura, etc…). Así, la formación matemática del individuo no solo le permite dar respuesta a sus necesidades inmediatas, sino que le faculta también para participar de manera competente y crítica en los contextos sociales, educativos y profesionales en los que las matemáticas desempeñan un papel central.

En la misma línea, Jablonka afirma que la alfabetización matemática no puede entenderse únicamente como la posesión de conocimientos matemáticos abstractos, sino como la capacidad funcional de aplicar dicho conocimiento en situaciones reales [17]. Esta perspectiva, compartida también por Sullivan, resalta cómo los problemas contextualizados permiten a los estudiantes conectar con su experiencia cotidiana, lo que no solo favorece el aprendizaje, sino que también mejora su compromiso y motivación hacia la materia [18].

Este enfoque es central en la corriente conocida como *Realistic Mathematics Education* (RME), desarrollada en los Países Bajos [19]. Inspirado por la figura del matemático Hans Freudenthal, este planteamiento parte de la idea de que las matemáticas son una actividad humana que debe estar conectada con la realidad del estudiantado y con su entorno más próximo [20]. En este sentido, la educación matemática debe proporcionar oportunidades guiadas para explorar, aprender haciendo y aplicar los conceptos en situaciones prácticas, algo que encaja profundamente con el estilo pedagógico de las escuelas de negocios.

Contexto financiero del curso 2024–25

El curso académico 2024–25 arrancó en un entorno económico y financiero profundamente distinto al que se dio al inicio del curso anterior. A lo largo del año 2023, la inflación comenzó a remitir de manera sostenida. De hecho, en septiembre de 2023 la inflación en la zona euro se situaba en el 4,3 %, mientras que en septiembre de 2024 descendía ya al 1,7 %. Esta evolución permitió al

Banco Central Europeo (BCE) a la Reserva Federal estadounidense, abandonar el enfoque estrictamente contractivo de política monetaria y comenzar un proceso progresivo de reducción de los tipos de interés, desde niveles cercanos al 4 % de enero de 2024 al 3% de diciembre de 2024.

Este cambio de rumbo tuvo consecuencias inmediatas sobre las decisiones de inversión. En un entorno de tipos más bajos, los activos financieros tradicionales de bajo riesgo, como las letras del Tesoro, comienzan a perder atractivo por su menor rentabilidad. Paralelamente, los mercados de renta variable tienden a repuntar, pues los inversores están más dispuestos a asumir riesgo para alcanzar los niveles de rentabilidad que antes obtenían mediante activos seguros [21,22]. Este comportamiento es consistente con la teoría financiera: cuando los tipos de interés caen, el capital se desplaza hacia activos de mayor riesgo, lo que provoca un aumento de la demanda y, con ello, del precio de esos activos [23]. Como resultado, los retornos esperados se comprimen. Además, el aumento de la liquidez en el sistema impulsa una mayor oferta de productos financieros, muchos de ellos con estructuras más complejas o riesgo menos evidente [24]. Por el contrario, cuando los tipos suben, los inversores tienden a replegarse hacia activos de menor riesgo que ofrecen retornos más atractivos, lo que reduce la liquidez disponible para opciones más arriesgadas.

En suma, el escenario financiero al inicio del curso 2024–25 era sustancialmente diferente al del año previo. Este giro obligaba a replantear muchas de las decisiones de asignación de activos y representaba un contexto idóneo para el desarrollo práctico de competencias financieras en el aula.

METODOLOGÍA

La experiencia aquí descrita se desarrolla en el Grado en Administración y Dirección de Empresas (ADE) de EDEM Centro Universitario, concretamente en la asignatura de Financial Maths (Matemáticas Financieras) del segundo año. El curso, impartido en inglés, se articula en 30 sesiones distribuidas entre septiembre y diciembre, con un examen parcial a finales de octubre y evaluación final en enero. El estudiantado matriculado en la asignatura se divide en 3 grupos de unos 36-37 estudiantes por clase. El manual de referencia es el de Zima y Brown [25], ampliamente utilizado en la enseñanza aplicada de las matemáticas financieras por su enfoque conceptual claro y muy en la línea de la RME holandesa descrita previamente.

La estructura de las sesiones responde a un esquema común, aunque con margen para la adaptación según el ritmo de cada grupo y la actualidad económica. El patrón general es el siguiente. En primer lugar, se lleva a cabo un debate abierto, generalmente al principio de cada semana y durante unos 20 o 25 minutos. Este debate se propone como un espacio de discusión sobre alguna noticia de actualidad económica, idealmente vinculada con los contenidos del curso. Si ningún estudiante propone un tema, es el profesor quien lo aporta, priorizando noticias de la prensa financiera, comunicados del BCE u otros eventos relevantes del ámbito financiero. Esta parte responde a una lógica de aprendizaje activo, en la que el rol del docente es facilitar el debate, no transmitir directamente toda la información. Para ello, es necesario que el profesorado se mantenga actualizado de forma diaria mediante el seguimiento de prensa económica. El objetivo es que el alumnado ejercite el razonamiento financiero aplicado, adoptando progresivamente una mirada crítica e interpretativa sobre la actualidad.

En segundo lugar, se desarrolla una clase interactiva de aproximadamente 35 minutos. En este bloque, el profesor introduce de forma sintética los conceptos teóricos relevantes mediante una breve exposición (5-15 minutos), normalmente apoyada en presentaciones con diapositivas. A continuación, se resuelve de manera conjunta un problema práctico (10-20 minutos), y posteriormente se proponen ejercicios adicionales para que el alumnado los trabaje de forma individual o en pequeños grupos. Gran parte de los enunciados están inspirados en situaciones reales y actuales como la adquisición de Letras del Tesoro o la financiación ofrecida por la automovilística Toyota para comprar uno de sus vehículos, lo que refuerza el carácter aplicado del curso y permite conectar los contenidos con decisiones financieras concretas.

El uso de las ruedas de prensa del Banco Central Europeo (BCE)
Actualmente, el BCE celebra 8 de estas reuniones al año, con una cadencia de una aproximadamente cada 6 semanas. En ellas se suele emitir el anuncio inicial de política monetaria a las 13:45 CET (hora local) y se desarrolla una conferencia de prensa posterior a partir de las 14:45 CET. Las reuniones celebradas durante el presente curso escolar han sido un total de tres. De estas, centraremos nuestro análisis en la sesión correspondiente al mes de diciembre.

En EDEM, las clases de FM se imparten en turno de tarde. En el grupo en el que enseña el autor principal de este estudio, las sesiones comienzan habitualmente a las 15:00 horas, lo que implica que la visualización del evento del BCE se puede realizar con un decalaje aproximado de apenas veinte minutos desde que éste tiene lugar, como ocurrió en el caso del presente curso. En las ocasiones en que la rueda de prensa o evento del BCE no coincide con un día lectivo, la actividad didáctica se traslada al siguiente día en que haya clase. Los otros dos profesores responsables de esta misma asignatura, que imparten clases en grupos diferentes, también son informados con antelación del día de cada evento, de modo que proceden de manera análoga en sus respectivas aulas, aunque sus horarios de inicio varían entre las 17:00 y las 19:00 horas.

Como se ha mencionado, las reuniones a lo largo del curso han sido tres, y nos enfocaremos especialmente en la sesión del 12 de diciembre. Esta fecha coincidió con la clase número 28 de un total de 30 programadas para el curso. Para entonces, el alumnado se encuentra en la etapa final del programa, con sólo una semana restante para concluirlo, habiendo recibido ya la mayoría de los contenidos teóricos y prácticos previstos en el plan docente. Esta situación es especialmente relevante, pues permite realizar la observación y el análisis en un momento en que el grupo presenta un nivel de madurez académico considerable, así como una mayor familiaridad con las herramientas, metodologías y dinámicas empleadas a lo largo del curso. Por tanto, esta sesión resulta particularmente representativa para evaluar el impacto de la propuesta pedagógica implementada, al capturar la respuesta y el rendimiento de los estudiantes en un contexto próximo a la finalización de la materia.

La metodología aplicada consiste en lo siguiente. En primer lugar, para preparar la sesión los profesores deben descargar y leer el anuncio oficial[1] de política monetaria que se emite a las 13:45 para preparar la sesión. Después, y ya una vez en el aula, se visualizan los primeros 3 minutos de la rueda de prensa[2] en la que la presidenta de la institución, Christine Lagarde, comunica la decisión del Consejo de Gobierno del BCE sobre los tipos de interés. A partir de aquí comienza un debate interactivo con los alumnos en el que se trabajan cuestiones estratégicas y prácticas. En la dimensión estratégica, se describen las razones económicas que han llevado al consejo a tomar esta decisión. Mientras, en la parte práctica se trata de comprender cómo los efectos de la decisión impactan en los contenidos del curso. Principalmente bajo dos prismas: cómo afecta a la inversión y al ahorro.

En el caso concreto de la reunión del 12 de diciembre de 2024, el Consejo de Gobierno del BCE decidió reducir los tres tipos de interés clave en 25 puntos básicos, incluyendo la facilidad de depósito, la cual se situó en el 3%. Era el cuarto recorte consecutivo de 0,25% desde junio, lo que significaba que el tipo de interés de la facilidad de depósito se había quedado en su nivel más bajo desde marzo de 2023. Esta decisión era consecuencia de que las proyecciones inflacionarias mostraban en ese momento una tendencia estable hacia el objetivo del BCE de inflación del 2% en el medio plazo. De hecho, las proyecciones del propio BCE estimaban una inflación media del 2,1 % para 2025, del 1,9 % en 2026 y nuevamente del 2,1 % en 2027.

Estas cifras indicaban que las expectativas inflacionistas de los agentes económicos estaban sólidamente ancladas a ese objetivo del 2%. Por tanto, el BCE tenía margen para seguir en el futuro con ese recorte de tipos, lo que enviaba una clara señal estratégica a las empresas que tenían que, por ejemplo, refinanciar sus deudas o emitir bonos en los próximos meses. Ello también nos sirvió para ilustrar que gran parte de la política monetaria moderna se basa más en la comunicación que en la ejecución. Como suele transmitirse en clase, aproximadamente el 80 % del impacto de la política monetaria se logra a través de la comunicación, y solo un 20 % mediante ajustes efectivos en los tipos de interés. Esta simplificada proporción se usa para mostrar la importancia que la comunicación de los bancos centrales tiene a la hora de reducir la incerteza de los participantes en los mercados de capitales, siendo consistente con la

[1] Enlace al anuncio oficial de política monetaria del BCE del 12 de diciembre de 2024. https://www.ecb.europa.eu/press/pr/date/2024/html/ecb.mp241212~2acab6e51e.en.html
[2] Enlace a la rueda de prensa del BCE del 12 de diciembre de 2024: https://www.ecb.europa.eu/press/press_conference/html/index.en.html?date=2024-12-12

perspectiva que defienden diversos estudios académicos [26] [27] [28].

A continuación, en la parte práctica de la sesión nos centramos en responder dos preguntas. La primera fue: ¿cómo impacta el descenso del tipo de interés en el mercado hipotecario? La segunda fue: ¿cómo afecta esa bajada de tipos a las y los ahorradores que compran letras del tesoro español a un año? Respecto a la primera, la respuesta intuitiva de los alumnos fue que el coste del crédito hipotecario se abarataba. Para demostrarlo, utilizamos el simulador hipotecario del Banco de España[3], el cual funciona siguiendo la teoría y las fórmulas que se explican durante el curso. Así, planteamos un sencillo ejemplo. Dado un préstamo de 200.000€ para una hipoteca, si éste se devuelve con pagos mensuales durante 25 años, ¿en cuánto se reduciría el importe del pago mensual si el tipo de interés pasaba del 3,25% al 3%? El resultado es que el pago pasaba de 974,63€ mensuales a 948,42€. Ello suponía un ahorro mensual de 26,01€, anual del 314,52€ y en total de 7.862,93€, durante los 25 años (véase Figura 1).

Figura 1: Transparencia de la clase del 12 de diciembre de 2024.

En cuanto a la segunda cuestión, para entender cómo la bajada de tipos de interés impacta a unos activos financieros muy comunes y queridos entre las y los ahorradores españoles como las Letras del tesoro[4] [29], lo que hacemos es comparar el resultado de la subasta de septiembre (a principios de curso) y la de diciembre (a finales de curso). El vencimiento elegido es a 12 meses, por lo que comparamos el resultado de las emisiones con vencimiento hasta septiembre de 2025 y diciembre de 2025. Así, el tipo de interés implícito en la operación se reduce del 2,970%, al 2,228% a un año. Un resultado que implica una caída en la remuneración y una menor rentabilidad de la inversión de las y los

[3] Simuladores del BdE: https://clientebancario.bde.es/pcb/es/menu-horizontal/podemosayudarte/simuladores/

[4] Las letras del Tesoro son instrumentos de renta fija a corto plazo emitidos por el Estado, que se compran al descuento y se amortizan por su valor nominal al vencimiento. La rentabilidad para el inversor se obtiene de la diferencia entre el precio de adquisición y el valor nominal, constituyendo un ejemplo sencillo de cálculo de interés implícito.

ahorradores. Sencillamente, porque el precio de las nuevas emisiones sube para acomodarse a ese nuevo escenario de tipos más bajos.

Este comportamiento de las letras del Tesoro es similar al que se observa en el mercado de bonos[5], ya que el rendimiento de ambos instrumentos financieros responde a la misma lógica. De forma resumida, cuando un banco central reduce los tipos de interés, los gobiernos pueden emitir nueva deuda a un coste inferior. Esta bajada en el coste financiero también repercute en la deuda corporativa, ya que las empresas privadas no necesitan ofrecer cupones tan elevados para competir con la rentabilidad de la deuda pública.

Así, cuando los tipos de interés descienden, el precio de los bonos ya emitidos suele subir, puesto que sus cupones se vuelven más atractivos frente a los de las nuevas emisiones, que reflejarán el nuevo entorno de tipos más bajos. Es decir, los inversores compraran esos bonos antiguos que ofrecen un cupón más alto, lo que hará que el precio del bono suba y que el rendimiento de la operación financiera de adquisición de ese bono se iguale al rendimiento ofrecido en el mercado para ese tipo de activos. Por el contrario, una subida de tipos provoca un descenso en el precio de mercado de los bonos en circulación. La razón es que los inversores venderán los bonos "viejos" con cupones bajos para adquirir nuevas emisiones que ofrezcan cupones más altos. Las ventas del bono harán que el precio de este activo caiga, con lo que el rendimiento de la operación se igualará con el rendimiento del mercado. Una relación inversa entre tipos y precios clave para entender la dinámica de los mercados financieros.

En la sesión número 28, la correspondiente al 12 de diciembre de 2024, el temario había alcanzado la unidad 6, dedicada a los bonos, lo que permitió ilustrar en clase los fenómenos financieros previamente descritos. Así, se analizó el comportamiento del precio de varios bonos corporativos ante una bajada de tipos de interés, todos ellos negociados en el segmento de renta fija de la Bolsa de Fráncfort, uno de los mercados de referencia en la eurozona. En particular, se estudió un bono emitido por la compañía de telecomunicaciones Telecom Italia, con un atractivo cupón del 7,75% y vencimiento en marzo de 2033[6].

[5] Los bonos son instrumentos de renta fija que representan una deuda que el emisor contrae con el comprador, comprometiéndose el emisor a pagar intereses periódicos y a devolver el principal en una fecha de vencimiento determinada.
[6] La página web que se mostró a los alumnos en la sesión fue la siguiente https://www.boerse-frankfurt.de/bond/xs0161100515-telecom-italia-finance-s-a-7-75-03-33?mic=XFRA. En ella se observa la evolución del bono de Telecom Italia con código identificativo ISIN XS0161100515.

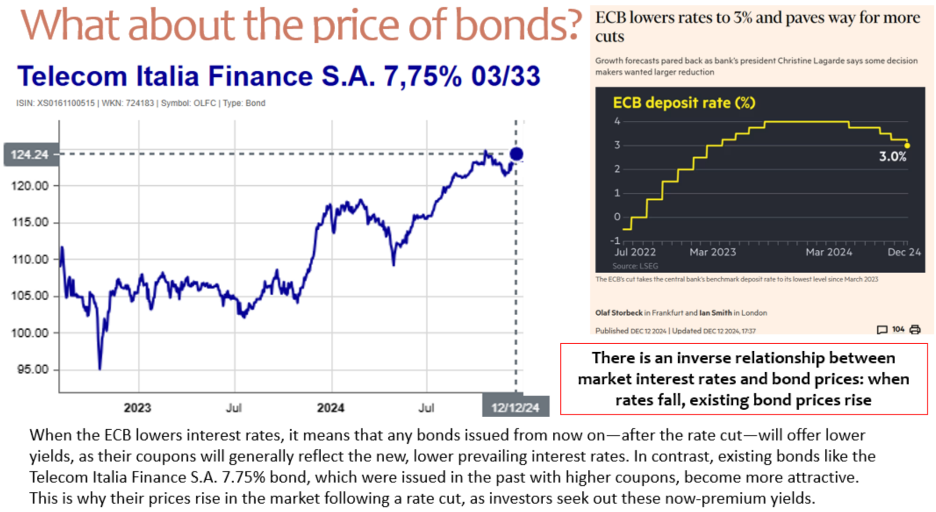


Figura 2: Transparencia añadida tras la clase del 12 de diciembre.

Como se observa en la Figura 2, el precio del bono no deja de subir acompañando las bajadas de tipos de interés que se van sucediendo en la eurozona. De esta manera, el precio del bono que se registró al cierre el 12 de diciembre de 2024 fue de 124,24 lo que suponía una rentabilidad (o yield) en el mercado de alrededor el 4%, en línea con lo que ofrecía el mercado para este tipo de activos. Es decir, un inversor estaba dispuesto a pagar 1.242,40€ por cada 1.000€ nominales de cupón, por los que obtendría un cupón anual de 77,50€ (el 7,75%). Además, el día de vencimiento recibiría 1.000€, con lo que la Tasa Interna de Rentabilidad (TIR) de la operación alcanzaría ese 4%.

En suma, tal y como se ha descrito, esta metodología de utilización de casos del mercado de capitales busca generar una experiencia de aprendizaje activa y conectada con el mundo real, que ayude al alumnado a desarrollar una comprensión más profunda y funcional de los conceptos financieros. La incorporación sistemática de eventos económicos relevantes, como las decisiones del BCE, permite no solo ilustrar la aplicabilidad práctica de los contenidos teóricos, sino también fomentar una mayor implicación del estudiantado. Esta aproximación se alinea con enfoques pedagógicos centrados en la resolución de problemas contextualizados y en el desarrollo de competencias críticas para la toma de decisiones financieras estratégicas en entornos cambiantes.

RESULTADOS

El análisis cualitativo de las encuestas abiertas realizadas al finalizar la asignatura de FM ha revelado una percepción positiva por parte del alumnado hacia la metodología centrada en el uso de contextos reales. Los comentarios más representativos apuntan a una mayor comprensión, utilidad percibida y conexión con el entorno económico actual. Entre las respuestas recogidas, destacan afirmaciones como “Nos explica todo con ejemplos, resuelve todas las dudas, ha hecho que la asignatura parezca más fácil”, “Muchos ejemplos y casos prácticos, hace que veamos la utilidad de su asignatura” y “Siempre busca la aplicabilidad práctica de lo impartido en clase y compararlo con la actualidad económica y financiera”.

Estos testimonios subrayan el efecto positivo del enfoque basado en la resolución de problemas contextualizados, lo cual refuerza el compromiso del alumnado con la asignatura. Este hallazgo es coherente con trabajos anteriores [30] desarrollados en la misma asignatura en EDEM para analizar el impacto de distintas metodologías, donde ya se puso de manifiesto la preferencia del alumnado por problemas con un contexto real y cercano, pues son considerados como herramientas útiles para su futuro profesional.

Sin embargo, tal y como se concluyó también en aquel trabajo, esta predisposición no se traslada con la misma intensidad a los contenidos teóricos. La teoría, especialmente cuando requiere razonamiento abstracto, sigue generando una menor implicación por parte del alumnado, probablemente debido a que no se percibe como inmediatamente aplicable.

Por último, si bien los testimonios recogidos ofrecen una visión valiosa del impacto percibido, estos resultados deben interpretarse con cautela, ya que proceden de una única cohorte y se basan en percepciones cualitativas, sin mediciones objetivas complementarias.

CONCLUSIONES

La experiencia aquí expuesta muestra que el uso de contextos reales, como las decisiones de política monetaria del BCE, favorece un aprendizaje más significativo y motivador en la enseñanza de las FM. Este enfoque, alineado con los principios de la educación matemática realista [19][20], permite transformar situaciones económicas actuales (como la renovación de un préstamo hipotecario o el cálculo del coste de una mensualidad al adquirir un vehículo para uso particular) en preguntas matemáticas estructuradas que pueden resolverse utilizando las fórmulas y técnicas trabajadas durante el curso. De este modo, se refuerza la conexión percibida entre los contenidos académicos y su aplicación práctica, al tiempo que se desarrollan competencias que podrán servir tanto en el plano personal como profesional.

Desde el punto de vista didáctico, la actividad ha contribuido al desarrollo de habilidades analíticas, la disposición al debate informado y el uso crítico de la información, en sintonía con las recomendaciones del marco europeo de competencias financieras para adultos [4] y la literatura académica sobre alfabetización financiera [2] [14]. Asimismo, el uso de material institucional auténtico ha reforzado la conexión entre el aula y el entorno económico y social actual, fortaleciendo el aprendizaje funcional y contextualizado [17] [18].

Sin embargo, deben señalarse ciertas limitaciones. El estudio se ha desarrollado en un único curso académico (2024-25), en una sola institución (EDEM) y con una muestra limitada de estudiantes (3 grupos de entre 36 y 37 alumnos cada uno). Además, la evaluación del impacto se ha centrado en percepciones cualitativas, lo que requiere ser complementado con instrumentos objetivos y longitudinales en futuras investigaciones. La generalización de los resultados exige replicar la experiencia en diferentes cohortes, niveles y contextos.

Como líneas futuras de trabajo, se proponen distintas opciones. Primero, expandir la muestra a otros cursos y a otras universidades que también impartan la asignatura de Matemáticas Financieras, manteniendo el foco en situaciones reales de impacto económico. Segundo, diseñar instrumentos mixtos de evaluación que combinen indicadores cualitativos y cuantitativos para medir la adquisición de competencias matemáticas y financieras. Tercero, fomentar el trabajo cooperativo, por ejemplo, mediante la elaboración de presentaciones o informes de análisis sobre decisiones del BCE y su repercusión en distintos sectores. Cuarto, colaborar con otros departamentos (como Economía) para enriquecer el enfoque interdisciplinar de las tareas propuestas.

Para terminar, cabe señalar que el diseño de actividades y ejercicios de FM con contexto real es un proceso complejo y exigente. Requiere un conocimiento sólido de la materia, e incluso que el profesorado tenga cierta experiencia profesional en los mercados de capitales, pero también demanda un esfuerzo adicional y deliberado para conectar el contexto financiero real con las experiencias y la vida del alumnado. Cuanto mayor es esa conexión, mayor es también su implicación. Sin embargo, los estudiantes suelen mostrar preferencia por problemas mecánicos en los que únicamente deben seleccionar ciertos datos del enunciado y aplicar una fórmula. Por ello, es fundamental sacarlos de esta zona de confort y promover una filosofía docente que les enfrente con problemas situados en contextos auténticos, transformándolos en situaciones susceptibles de un tratamiento matemático riguroso.

En definitiva, promover una alfabetización financiera sólida y contextualizada es un objetivo prioritario en la educación superior, especialmente en los estudios vinculados al ámbito empresarial. La conexión entre teoría matemática y realidad económica, adecuadamente diseñada y evaluada puede convertirse en una herramienta eficaz para preparar a las y los futuros profesionales que deberán afrontar los desafíos financieros del mundo contemporáneo.

REFERENCIAS

[1] Congreso de los Diputados. *Dictamen de la Comisión de Investigación sobre la crisis financiera de España y el programa de asistencia financiera*. Boletín Oficial de las Cortes Generales, Serie D, n.º 481, pp. 1–281, 17 de enero de 2019. Disponible en: https://www.congreso.es/public_oficiales/L12/CONG/BOCG/D/BOCG-12-D-481.PDF

[2] Lusardi, A. y Mitchell, O.S. *The Economic Importance of Financial Literacy: Theory and Evidence*. Journal of Economic Literature, 52(1), 5–44 (2014).

[3] Lusardi, A. *Financial literacy skills for the 21st century: evidence from PISA*. Journal

of Consumer Affairs, 49, 639–659 (2015). doi:10.1111/joca.12099

[4] European Union / OECD. *Financial competence framework for adults in the European Union*. 2022. Disponible en: https://finance.ec.europa.eu/system/files/2022-01/220111-financial-competence-framework-adults_en.pdf [Consulta: 4 de agosto de 2025].

[5] European Commission. *Capital Markets Union: Commission to boost Europe's capital markets*. 24 de septiembre de 2020. Disponible en: https://ec.europa.eu/commission/presscorner/detail/en/IP_20_1677

[6] Global Financial Literacy Excellence Center (GFLEC). Global Financial Literacy Survey 2023. https://gflec.org/global-finlit-survey-2023/ [Consulta: 5 de agosto de 2025]

[7] Martínez García, I., Ispierto Maté, A., & Ruiz Suárez, G. *Educación financiera y decisiones de ahorro e inversión: un análisis de la Encuesta de Competencias Financieras (ECF)*. Documentos de trabajo (CNMV), 75 (2021).

[8] Lusardi, A., & Tufano, P. Debt literacy, financial experiences, and over-indebtedness. *Journal of Pension Economics and Finance*, 14 (4), 332–368 (2015).

[9] Stango, V., & Zinman, J. What Do Consumers Really Pay on Their Checking and Credit Card Accounts? Explicit, Implicit, and Avoidable Costs. *American Economic Review*, 99 (2), 424–429 (2009).

[10] de Bassa Scheresberg, C., Lusardi, A., & Yakoboski, P. J. College-Educated Millennials: An Overview of Their Personal Finances. *TIAA-CREF Institute, Global Financial Literacy Excellence Center* (2014).

[11] Abreu, M., & Mendes, V. Financial literacy and portfolio diversification. *Quantitative Finance*, 10 (5), 515–528 (2010).

[12] Brown, M., Grigsby, J., Van Der Klaauw, W., Wen, J., & Zafar, B. Financial education and the debt behavior of the young. *The Review of Financial Studies*, 29 (9), 2490–2522 (2016).

[13] Hussain, J., Salia, S., & Karim, A. Is knowledge that powerful? Financial literacy and access to finance: An analysis of enterprises in the UK. *Journal of Small Business and Enterprise Development*, 25 (6), 985–1003 (2018).

[14] Skagerlund, K., Lind, T., Strömbäck, C., Tinghög, G., & Västfjäll, D. Financial literacy and the role of numeracy–How individuals' attitude and affinity with numbers influence financial literacy. *Journal of Behavioral and Experimental Economics*, 74, 18–25 (2018).

[15] OECD. *PISA 2022 Mathematics Framework*. 2018. https://pisa2022-maths.oecd.org/files/PISA%202022%20Mathematics%20Framework%20Draft.pdf

[16] Cobb, P. Where is the mind? Constructivist and sociocultural perspectives on mathematical development. *Educational Researcher*, 23 (7), 13–20 (1994).

[17] Jablonka, E. Mathematical literacy. In Bishop, A. J., Clements, M. A., Keitel, C., Kilpatrick, J., & Leung, F. K. S. (Eds.), *Second international handbook of mathematics education*, pp. 75–102. Dordrecht: Kluwer (2003).

[18] Sullivan, P. *Teaching Mathematics: Using research-informed strategies* (Australian Education Review, No.59). Melbourne: ACER Press (2011).

[19] Van den Heuvel-Panhuizen, M., & Drijvers, P. Realistic mathematics education. *Encyclopedia of mathematics education*, 713–717 (2020).

[20] Freudenthal, H. *Revisiting mathematics education: China lectures*. Vol. 9. Springer. Science & Business Media (2005).

[21] Lian, C., Ma, Y., & Wang, C. Low interest rates and risk-taking: Evidence from individual investment decisions. *The Review of Financial Studies*, 32 (6), 2107–2148 (2019).

[22] Di Maggio, M., & Kacperczyk, M. The unintended consequences of the zero lower bound policy. *Journal of Financial Economics*, 123 (1), 59–80 (2017).

[23] Hau, H., & Lai, S. Asset allocation and monetary policy: Evidence from the eurozone. *Journal of Financial Economics*, 120 (2), 309–329 (2016).

[24] Rajan, R. G. Has finance made the world riskier?. *European Financial Management*, 12 (4), 499–533 (2006).

[25] Zima, P., Brown, R. L. *Mathematics of Finance (Schaum's Outlines), Second Edition*. McGraw-Hill Education, New York (2006).

[26] Woodford, M. Central-Bank Communication and Policy Effectiveness. NBER Working Paper No. 11898, National Bureau of Economic Research (2005). https://www.nber.org/system/files/working_papers/w11898/w11898.pdf [Consulta: 6 de agosto de 2025]

[27] Blinder, A., Ehrmann, M., Fratzscher, M., De Haan, J., Jansen, D. J. Central Bank Communication and Monetary Policy: A Survey of Theory and Evidence. ECB Working Paper No. 898 (2008). https://www.ecb.europa.eu/pub/pdf/scpwps/ecbwp898.pdf [Consulta: 6 de agosto de 2025]

[28] International Monetary Fund. Central Bank Communications. In: Technical Assistance Handbook for Monetary and Financial Policies. IMF (2022). https://www.imf.org/-/media/Files/Publications/Miscellaneous/English/2022/mcm-technical-assistance-handbook/central-bank-communications.ashx [Consulta: 6 de agosto de 2025]

[29] López-Fonseca, Ó. *Furor y colas en el Banco de España por las letras del Tesoro: "No compensa la inflación, pero es mejor que nada"*. *El País*, 1 de febrero (2023). Disponible en: https://elpais.com/economia/2023-02-01/furor-y-colas-en-el-banco-de-espana-por-las-letras-del-tesoro-no-compensa-la-inflacion-pero-es-mejor-que-nada.html

[30] Sánchez Coll, F., Donaldson, C., Villagrasa, J. *Narrowing the Gap Between the Classroom and the Capital Markets: The Use of Real-Life Context in a Financial Mathematics Course*. EDEM Centro Universitario. Comunicación presentada en EDULEARN23 (2023)

Las matemáticas que se pueden ver y también tocar

Lucía Rotger-García, Juan Miguel Ribera-Puchades

Departament de Ciències Matemàtiques i Informàtica, Universitat de les Illes Balears, Crta. De Valldemossa, km. 7,5, 07122, Palma de Mallorca (Illes Balears), Spain e-mail: {lucia.rotger, j.ribera}@uib.es

Mathematics that can be seen and also handled

RESUMEN

Este trabajo estudia cómo diferentes herramientas y representaciones pueden contribuir a la mejora de la resolución de problemas de geometría tridimensional, con especial atención al papel de las habilidades de visualización y la atención a la diversidad. Se presentan recursos manipulativos físicos, entornos digitales interactivos y representaciones simbólicas organizadas en función de su utilidad didáctica, así como una colección de problemas basados en la triple forma, una figura con proyecciones ortogonales de triángulo, cuadrado y círculo. Los problemas se clasifican en torno a categorías como exploración, análisis de propiedades, comparación y clasificación, promoviendo el uso de múltiples representaciones y estrategias. Se concluye que la integración de estas herramientas amplía las posibilidades de acceso al conocimiento geométrico y favorece una enseñanza más inclusiva y equitativa.

Palabras clave: visualización, resolución de problemas, geometría 3D, representaciones múltiples, accesibilidad

ABSTRACT

This work explores how different tools and representations can enhance the resolution of three-dimensional geometry problems, with a particular focus on spatial visualization skills and attention to diversity. It presents physical manipulatives, interactive digital environments, and symbolic representations organized according to their didactic value, along with a collection of problems inspired by the “triple form,” a figure with orthogonal projections of a triangle, square, and circle. The problems are grouped into categories such as exploration, property analysis, comparison, and classification, encouraging the use of multiple representations and strategies. The study concludes that integrating these tools broadens access to geometric understanding and fosters a more inclusive and equitable approach to mathematics education.

Keywords: visualization, problem solving, 3D geometry, multiple representations, accessibility

INTRODUCCIÓN

La resolución de problemas constituye una de las competencias fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas, especialmente en el área de la geometría [1]. En este contexto, los procesos de visualización espacial permiten interpretar, manipular y transformar representaciones de objetos geométricos [2]. Sin embargo, las dificultades del alumnado para abordar problemas de geometría tridimensional suelen estar vinculadas, en gran parte, a las limitaciones inherentes a los formatos bidimensionales tradicionalmente empleados en los materiales educativos. Estas limitaciones pueden obstaculizar la comprensión profunda de las propiedades espaciales y dificultar el desarrollo de estrategias eficaces de resolución [3].

Desde la perspectiva del Diseño Universal para el Aprendizaje (DUA) [4], se plantea la necesidad de ofrecer múltiples formas de representación de los objetos matemáticos para garantizar la accesibilidad y la equidad en el aprendizaje. En este sentido, integrar herramientas que favorezcan la manipulación directa, la interacción dinámica o la modelización tridimensional de las figuras geométricas permite atender a la diversidad del alumnado y potenciar distintas rutas de comprensión [5]. Esta pluralidad de representaciones resulta especialmente pertinente en el caso de estudiantes con dificultades de percepción espacial, pero también en contextos de altas capacidades, donde se requieren problemas abiertos ajustados a las capacidades del alumnado. El éxito en la resolución de problemas está fuertemente relacionado con la capacidad de los estudiantes para manejar diferentes tipos de representaciones y realizar traducciones entre ellas [6].

La incorporación de tecnologías emergentes, materiales manipulativos y entornos digitales interactivos se configura, por tanto, como una vía para enriquecer la enseñanza de la geometría. Estas herramientas facilitan tanto la interpretación y exploración de objetos tridimensionales como la apertura de nuevas posibilidades para el planteamiento y la resolución de problemas vinculados a la exploración tridimensional y la visualización espacial, conectados con el mundo físico y el pensamiento computacional. El objetivo de este trabajo es presentar diferentes recursos que, desde una mirada didáctica, pueden ayudar a superar las barreras de los soportes planos y promover experiencias significativas de visualización matemática en el aula.

METODOLOGÍA

Herramientas para ver y también tocar

A diferencia de otros enfoques centrados en la visualización como objetivo, aquí se abordan las herramientas desde su función como mediadoras en el proceso de resolución de problemas, facilitando la transición entre diferentes registros semióticos. De esta forma, las herramientas propuestas se organizan en tres categorías principales:

1. **Herramientas manipulativas físicas**
    a. **Impresión 3D**: Permite construir físicamente objetos geométricos que pueden ser, o bien, diseñados por el alumnado a través de programas de modelado 3D, o bien utilizados directamente para la manipulación física y la comprobación empírica de propiedades geométricas. Esta herramienta refuerza la comprensión espacial al permitir una interacción tangible con los modelos matemáticos.
    b. **Plastilina o materiales modelables**: Permiten construir, deformar y reinterpretar libremente formas tridimensionales con las manos, favoreciendo la exploración táctil del volumen, la simetría y las transformaciones espaciales. Resulta especialmente útil en niveles iniciales o contextos con acceso limitado a tecnología, y se alinea con un enfoque sensorial de la visualización geométrica. Su carácter flexible facilita representar modelos mentales en evolución durante la resolución de problemas.

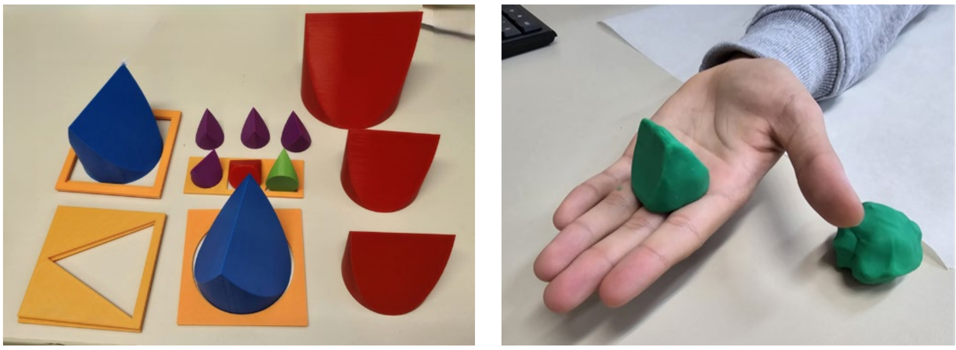


Figura 1: A la izquierda, figura geométrica impresa en 3D; a la derecha, representación construida con plastilina. Fuente: elaboración propia.

2. **Herramientas híbridas físico-digitales**
    a. **Cubo holográfico (Merge Cube)**: Combina la manipulación física de un objeto real con la proyección aumentada de modelos tridimensionales interactivos. Esta herramienta permite al alumnado explorar objetos geométricos cuya visualización en realidad aumentada se ajusta en tiempo real a los movimientos físicos del cubo, uniendo lo tangible con lo virtual, y facilitando así una comprensión más integrada de la estructura espacial.

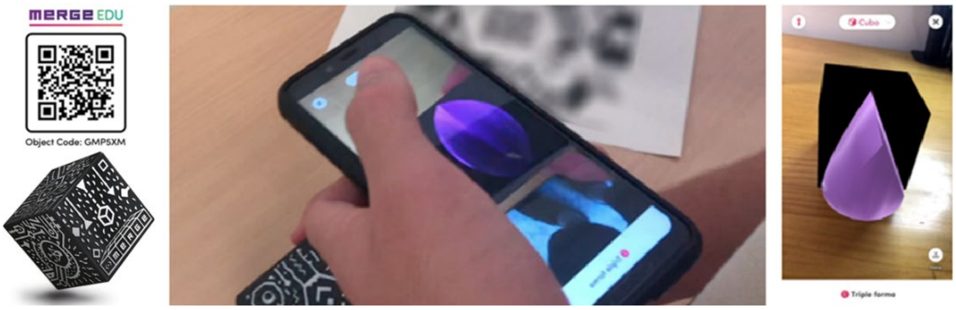


Figura 2: Uso del Merge Cube para la visualización aumentada de objetos tridimensionales. Fuente: elaboración propia.

3. Herramientas virtuales para el modelado y la exploración

a. **Tinkercad**: Plataforma basada en la manipulación directa de formas geométricas elementales. Es especialmente útil en etapas iniciales por su accesibilidad e interfaz gráfica intuitiva. Permite diseñar modelos de forma libre y desarrollar conceptos como volumen, simetría y combinación y sustracción de sólidos. Su uso fue presentado en las I JID+ [7].

b. **Blockscad/OpenSCAD**: Blockscad utiliza bloques de programación visual, mientras que OpenSCAD emplea sintaxis textual para modelar objetos tridimensionales. Ambas herramientas se enfocan en la construcción paramétrica, permitiendo definir modelos mediante variables y expresiones lógicas. Estas plataformas favorecen el pensamiento algorítmico y una mayor precisión en los diseños, siendo más adecuadas para alumnado con experiencia previa. Esta herramienta se incluyó como recurso representativo en las II JID+[8].

c. **GeoGebra 3D**: Herramienta de geometría dinámica que permite la representación algebraica y gráfica simultánea de objetos tridimensionales. A diferencia de las anteriores, se centra en la visualización de funciones y relaciones matemáticas a través de superficies, intersecciones y construcciones dinámicas basadas en ecuaciones.

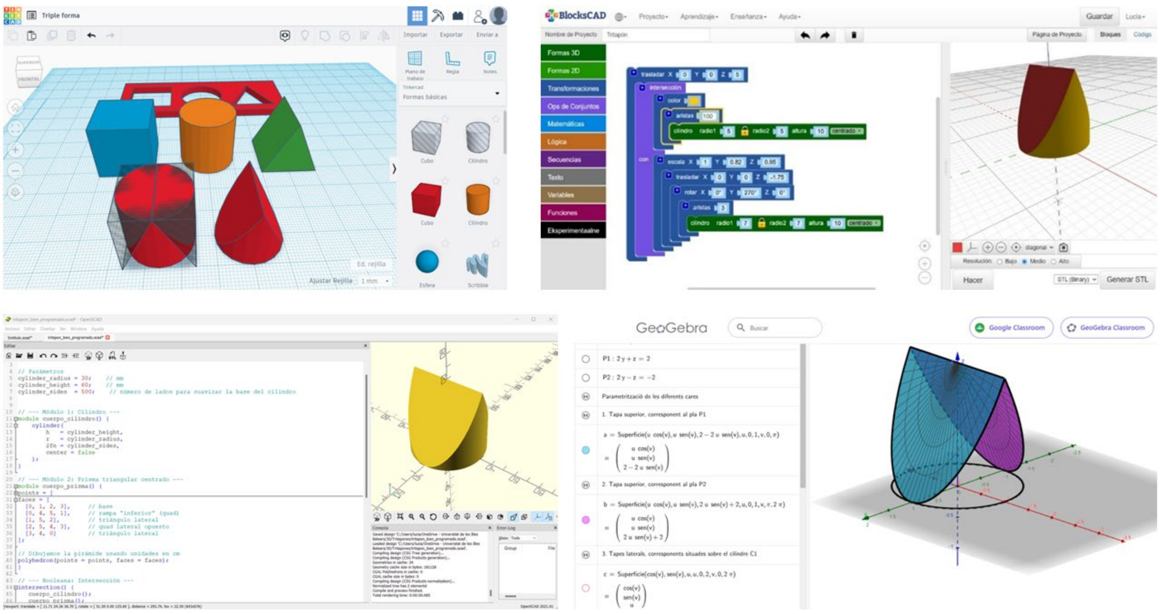


Figura 3: Herramientas digitales para el modelado y la visualización tridimensional. De izquierda a derecha y de arriba abajo: Tinkercad, Blockscad, OpenSCAD y GeoGebra 3D. Fuente: elaboración propia.

4. **Herramientas virtuales para la visualización inmersiva**
    a. **Assemblr EDU**: Aplicación de realidad aumentada que permite visualizar objetos modelados en el espacio físico a través de dispositivos móviles con cámara, favoreciendo una exploración contextualizada y accesible de las figuras tridimensionales.
    b. **CoSpaces EDU**: Entorno de realidad virtual que permite al alumnado crear y programar mundos tridimensionales interactivos, incorporando modelos geométricos, animaciones y secuencias lógicas mediante código visual o JavaScript. Facilita una inmersión total en escenarios diseñados con fines didácticos. Esta herramienta, junto con la anterior, fue analizada en la III JID+ [9].

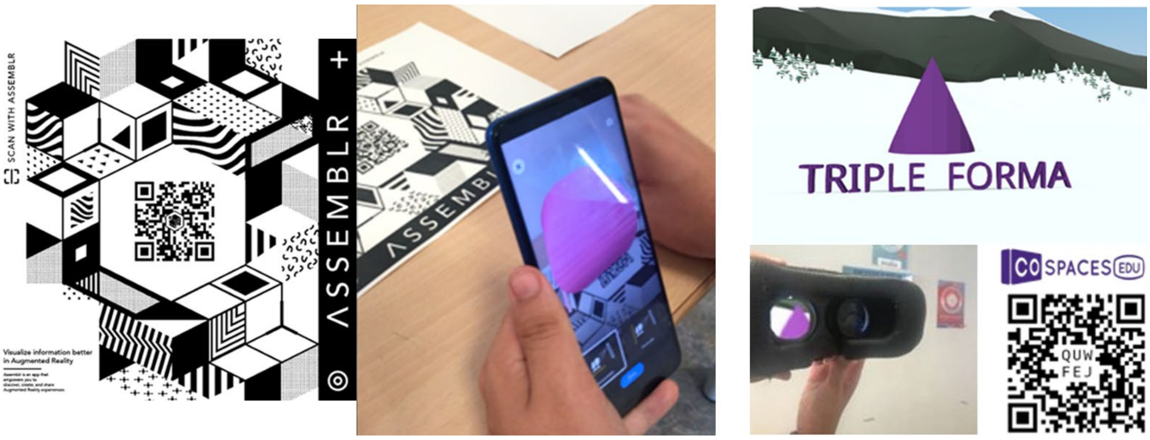


Figura 4: Herramientas de visualización inmersiva. A la izquierda, Assemblr EDU y a la derecha, CoSpaces EDU. Fuente: elaboración propia.

5. **Representaciones estáticas o simbólicas**
    a. **Dibujos planos**: Representaciones ortogonales o en perspectiva que permiten deducir o inferir propiedades geométricas. Este tipo de representaciones es el más habitual en libros de texto, y sirve como base para interpretar las formas tridimensionales desde vistas bidimensionales estándar, facilitando la transición entre lo visual y lo simbólico.
    b. **Ecuaciones algebraicas**: Definen con precisión superficies y relaciones espaciales, facilitando un análisis más formal y riguroso de las propiedades matemáticas implicadas. Esta representación resulta especialmente útil para establecer conexiones entre la geometría y el álgebra, y para formalizar modelos que posteriormente pueden aplicarse en contextos de diseño o fabricación digital. Su relación con la impresión 3D fue analiza en las IV JID+ [10]
    c. **Diagramas y esquemas**: Útiles en fases iniciales del problema para organizar información, identificar patrones de simetría, representar conexiones entre elementos geométricos o estructurar posibles vías de resolución a partir de esquemas visuales.

Una colección de problemas accesible

En este apartado se propone una colección de problemas matemáticos inspirados en la figura tridimensional que posee proyecciones ortogonales con forma de triángulo, cuadrado y círculo. Este problema fue popularizado por Yakov I. Perelmán en su libro "Problemas y experimentos recreativos" [11], publicado por primera vez en 1913. A partir de esta situación geométrica, se plantea una nueva perspectiva centrada en el diseño y la exploración de variaciones problemáticas que exijan distintas formas de razonamiento, vinculen representaciones múltiples y fomenten procesos de resolución más allá de la mera identificación de propiedades. La propuesta se articula en torno a varias categorías de problemas:

1. Exploración inicial de representaciones

- ¿Qué otras figuras podrían pasar por dos de los tres agujeros?
- ¿Son únicas?

2. Problemas de predicción de secciones planas

- Si se realiza un corte con un plano oblicuo a la figura, ¿qué tipo de sección aparecería?
- ¿Cómo varían las secciones si se modifica el ángulo o la orientación del plano de corte?

3. Problemas de comparación y clasificación

- Compara la figura con otras que puedan pasar por solo dos orificios. ¿Qué propiedades hacen posible o impiden que una figura pase por tres?
- Clasifica un conjunto de figuras propuestas en función de sus proyecciones. ¿A qué familias geométricas podrían pertenecer?

4. Problemas de análisis de propiedades geométricas

- ¿Qué simetrías presenta la figura y cómo se manifiestan en las proyecciones?
- ¿Qué orientación debe adoptar la figura para pasar por los tres orificios?

5. Problemas de construcción geométrica inversa

- ¿Es posible construir otra figura diferente con las mismas proyecciones ortogonales? ¿Qué condiciones debe cumplir?
- Diseña una figura cuyas proyecciones sean un pentágono, un óvalo y un trapecio. ¿Qué dificultades aparecen?

Estos problemas pueden implementarse en distintas fases de la secuencia didáctica o como actividades diferenciadas para evaluar competencias específicas vinculadas a la visualización, la argumentación, la comunicación matemática o el uso de herramientas tecnológicas.

Además, se recomienda invitar al alumnado a formular nuevos problemas a partir de una variación de la condición inicial (por ejemplo, cambiar las formas de las proyecciones, trabajar en otras orientaciones espaciales o considerar el uso de secciones planas no ortogonales), promoviendo así el pensamiento matemático creativo y el desarrollo progresivo de estrategias de resolución de problemas.

CONCLUSIONES

Las herramientas analizadas —manipulativas físicas, híbridas y virtuales, junto con las representaciones simbólicas— ofrecen diferentes posibilidades para abordar la geometría tridimensional desde perspectivas complementarias. Su uso combinado favorece el tránsito entre representaciones, permitiendo adaptar el enfoque a distintas formas de razonamiento y mejorar la resolución de problemas. Las manipulativas físicas facilitan la interacción directa con los objetos; las híbridas integran lo tangible con lo digital ampliando las posibilidades de exploración; las virtuales permiten el modelado, la modificación y la inmersión en entornos tridimensionales; y las simbólicas ayudan a formalizar propiedades y conectar con otros dominios matemáticos.

Desde una perspectiva inclusiva, la diversificación de representaciones y herramientas no solo enriquece la comprensión matemática, sino que también amplía el acceso a la resolución de problemas. Ofrecer problemas con múltiples formas de entrada —ya sea a través de la manipulación, la exploración digital o el análisis simbólico— permite que más estudiantes encuentren vías accesibles para enfrentarse al reto propuesto. Esta estrategia no consiste en simplificar los contenidos, sino en garantizar que todos los alumnos puedan iniciar el proceso de resolución desde sus propias fortalezas, contribuyendo así a una educación matemática más equitativa y significativa.

REFERENCIAS

[1] Duval, R. A cognitive analysis of problems of comprehension in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61 (1–2), 103–131 (2006).

[2] Gutiérrez, A. Visualization in 3-dimensional geometry: In search of a framework. In L. Puig & A. Gutiérrez (Eds.), *Proceedings of the 20th PME Conference* (Vol. 1, pp. 3–19). Universidad de Valencia (1996).

[3] Parzysz, B. “Knowing” vs “seeing”. Problems of the plane representation of space geometry figures. *Educational Studies in Mathematics*, 19 (1), 79–92 (1988).

[4] CAST (Center for Applied Special Technology). *Universal Design for Learning guidelines version 2.0*. Author. Traducción al español versión 2.0 (2013) por Pastor, C. A., Sánchez Hípola, P., Sánchez Serrano, J. M. & Zubillaga del Río, A. *Pautas sobre el Diseño Universal para el Aprendizaje (DUA)*. Versión 2.0 (2011).

[5] Kondo, Y., Fujita, T., Kunimune, S., Jones, K. & Kumakura, H. The influence of 3D representations on students’ level of 3D geometrical thinking. In P. Liljedahl, S. Oesterle, C. Nicol & D. Allan (Eds.), *Proceedings of the Joint Meeting PME 38 and PME-NA 36* (Vol. 4, pp. 25–33). Vancouver: PME (2014).

[6] Villegas, J. L., Castro, E. & Gutiérrez, J. Representaciones en resolución de problemas: Un estudio de caso con problemas de optimización. *Electronic Journal of Research in Education Psychology*, 7 (17), 279–308 (2017). https://doi.org/10.25115/ejrep.v7i17.1342

[7] Rotger, L. & Ribera, J. M. Visualizando las matemáticas en la tercera dimensión a través de Tinkercad. In *Actas de las I JID+, Jornades d’Innovació Docent en*

Matemàtiques en Educació Superior (pp. 63–69). Valencia (2021). ISBN 978-84-09-32639-6

[8] Rotger, L. & Ribera, J. M. BlocksCAD para la construcción de figuras tridimensionales a través de la programación por bloques. *II JID+, Jornades d'Innovació Docent en Matemàtiques en Educació Superior*, Valencia (11–12 de julio de 2022). [Ponencia].

[9] Rotger García, L., Ribera-Puchades, J. M. & Cuadrado Sáez, M. L. Estrategias inclusivas para la visualización de contenido matemático tridimensional. In *Actas de las III Jornades d'Innovació Docent en Matemàtiques en Educació Superior* (pp. 43–50). Universitat de València (2023). https://www.uv.es/gidmes/JID/2023/files/ActasIIIJID%2B23.pdf

[10] Rotger-García, L., Bibiloni, P. & Ribera-Puchades, J. M. Diseño e implementación de materiales manipulativos, impresos en 3D, para la mejora de la visualización y estudio de las superficies cuádricas. In *Actas de las IV Jornades d'Innovació Docent en Matemàtiques en Educació Superior* (pp. 14–20). Universitat de València (2024). https://www.uv.es/gidmes/JID/2024/files/24A2.pdf

[11] Perelmán, Y. I. *Problemas y experimentos recreativos*. Moscú: Editorial Mir (1975).

Una intervención docente basada en la detección de errores del alumnado

Carmen Melchor Borja[1]

[1] Departament de Didàctica de la Matemàtica-Facultat de Formació del Professorat, Universitat de València, Av. Tarongers 4, 46022 València, Spain, carmen.melchor-borja@uv.es

A teaching intervention based on the detection of student errors

RESUMEN

Esta contribución presenta una intervención docente en la asignatura Didáctica de la Geometría, la Medida y la Probabilidad y la Estadística del Grado en Maestro/a en Educación Primaria, centrada en el análisis de errores por parte del alumnado mediante autoevaluación, evaluación entre pares y retroalimentación docente. La propuesta se aplica a los cuatro bloques temáticos de la materia y se articula a partir de pruebas iniciales en cada uno de ellos. En este trabajo se ejemplifica su implementación en los dos primeros temas, correspondientes al área de geometría. Los resultados evidencian mejoras en la comprensión conceptual, la capacidad de argumentación y el rendimiento académico, y ponen de relieve el potencial de esta estrategia como herramienta didáctica eficaz, replicable y adaptable a otros contenidos.

Palabras clave: Análisis de errores, Autoevaluación, Evaluación por pares, Retroalimentación docente.

ABSTRACT

This contribution presents a teaching intervention in the subject Didactics of Geometry, Measurement, Probability and Statistics in the Primary Education Teacher Training Degree, focused on the analysis of errors made by students through self-assessment, peer assessment and teacher feedback. The proposal is applied to the four thematic blocks of the subject and is structured around initial tests in each of them. This paper illustrates its implementation in the first two topics, corresponding to the area of geometry. The results show improvements in conceptual understanding, argumentation skills and academic performance, and highlight the potential of this strategy as an effective teaching tool that can be replicated and adapted to other content.

Translated with DeepL.com (free version)

Keywords: Error analysis, Self-assessment, Peer assessment, Teacher feedback.

INTRODUCCIÓN

La enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria se enfrentan a retos particulares debido a la naturaleza abstracta y progresiva de los contenidos. La geometría, la medida, la probabilidad y la estadística requieren no solo la memorización de definiciones o la aplicación de algoritmos, sino también el desarrollo de capacidades cognitivas como la visualización, la clasificación, la argumentación lógica y la interpretación crítica de representaciones. En este contexto, los errores cometidos por el estudiantado constituyen una fuente de información de gran valor. Lejos de considerarlos únicamente como fallos que deben evitarse, los errores ofrecen información sobre cómo se están construyendo los conceptos y qué obstáculos dificultan su comprensión. Radatz (1980) señalaba ya hace décadas que los errores constituyen indicadores valiosos del proceso de aprendizaje, mientras que Borasi (1987) los concebía como oportunidades pedagógicas para profundizar en la comprensión. Esta perspectiva, ampliamente respaldada por investigaciones posteriores como las de McLaren et al. (2012) y Rushton (2018), subraya la necesidad de integrar el análisis de errores en las metodologías de enseñanza de las matemáticas.

En el marco de la LOMLOE y del Espacio Europeo de Educación Superior (EEES), la formación inicial del profesorado requiere estrategias pedagógicas que fomenten no solo el conocimiento disciplinar, sino también el desarrollo de competencias evaluativas. En particular, conocer las dificultades y los errores en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas de la educación primaria y los procesos cognitivos es una de las competencias específicas propia de las Didáctica de las Matemáticas sobre las que se organiza el grado. Por tanto, en este contexto resulta clave introducir herramientas metodológicas que no sólo transmitan conocimiento, sino que desarrollen la capacidad crítica del futuro docente para interpretar y responder a los errores de su alumnado. Esta estrategia, además, conecta con modelos educativos actuales que apuestan por metodologías activas, autorregulación del aprendizaje y evaluación formativa.

Este trabajo se sitúa en el marco de la asignatura Didáctica de la Geometría, la Medida y la Probabilidad y la Estadística, que forma parte del cuarto curso del Grado en Maestro/a en Educación Primaria. Dicha asignatura se organiza en cuatro grandes bloques temáticos que abarcan la enseñanza y el aprendizaje de formas planas y cuerpos tridimensionales, la orientación, la visualización y las transformaciones geométricas, la medida y, finalmente, la probabilidad y la estadística. En cada uno de estos bloques se trabajan contenidos específicos, se analizan las dificultades habituales y se proponen recursos didácticos para la enseñanza de la matemática escolar.

Esta intervención tiene alcance sobre los cuatro temas en su implementación completa, pero este trabajo se centra únicamente en ejemplificar la propuesta en los dos primeros, los dedicados a las formas planas y los cuerpos tridimensionales y a la orientación, la visualización y las transformaciones geométricas. Estos dos bloques resultan especialmente adecuados para mostrar cómo el análisis de errores contribuye al aprendizaje, ya que se caracterizan por la fuerte influencia de los prototipos, la confusión entre definiciones e imágenes conceptuales y las dificultades derivadas de la visualización espacial.

METODOLOGÍA

La propuesta metodológica se diseñó siguiendo una secuencia común en todos los temas de la asignatura, aunque en este trabajo se presentan únicamente las experiencias correspondientes a los dos primeros bloques. En primer lugar, se aplicó una prueba diagnóstica inicial destinada a identificar los errores más comunes del estudiantado antes de la enseñanza formal del tema. Esta prueba incluyó actividades seleccionadas de acuerdo con la literatura previa sobre dificultades en geometría y visualización del alumnado de la etapa de Educación Primaria (Barrantes-López y Zapata-Esteves, 2008; Battista, 2007). A continuación, se desarrollaron los contenidos mediante sesiones en las que se combinaron explicaciones sobre los marcos teóricos que fundamentan la didáctica subyacente en el proceso de enseñanza y aprendizaje. Se ejemplificaron errores y dificultades cometidos por alumnado de la etapa de Educación Primaria y se propusieron recursos didácticos para la enseñanza.

A continuación, se realizó una sesión de autoevaluación de la prueba inicial, en la que cada persona debía detectar y clasificar sus propios errores sin disponer de un modelo de solución. Se habían trabajo ejemplos de errores similares en sesiones anteriores, pero no se proporcionó la solución a la prueba. Después se realizó la coevaluación, en la que cada estudiante revisó la prueba de un compañero o una compañera, nuevamente sin ejemplos resueltos. Finalmente y en otra sesión, se produjo la corrección de la prueba por parte de la docente, que proporcionó la soluciones correctas, comentó los errores más frecuentes y valoró especialmente la calidad del razonamiento manifestado durante la autoevaluación y la coevaluación.

El fundamento teórico de la propuesta en el primer tema se apoyó en el modelo de razonamiento geométrico de Van Hiele (1986), que distingue entre distintos niveles de progresión desde el reconocimiento visual hasta el rigor formal, y en las aportaciones de Vinner (1991), quien diferenció entre la imagen conceptual y la definición conceptual, mostrando cómo muchos errores se derivan de la influencia excesiva de los prototipos visuales frente a las propiedades formales. En el segundo tema, centrado en orientación, visualización y transformaciones geométricas, se retomaron las investigaciones de Piaget e Inhelder (1956) sobre el desarrollo de las nociones espaciales, así como los estudios de Bishop (1989) y Presmeg (1986) sobre imágenes mentales y visualización. También se consideraron las aportaciones de Del Grande (1990) acerca de las habilidades de visualización y los trabajos de Jaime y Gutiérrez (1996) y Gualdrón y Gutiérrez (2006) sobre errores frecuentes en la comprensión de isometrías y semejanzas.

Las tareas seleccionadas en ambas pruebas respondieron a la necesidad de hacer aflorar errores documentados en la literatura. En el primer tema, se incluyeron figuras en posiciones no prototípicas, cuerpos tridimensionales representados en proyección plana y clasificaciones que exigían un uso preciso de la terminología. En el segundo tema, las actividades se centraron en la rotación, la simetría, la traslación, el plegado y desplegado de figuras y el trazado de trayectorias en planos y mapas. La autoevaluación y la coevaluación se apoyaron en guías que pedían identificar el error, clasificarlo, explicar su origen y proponer una corrección fundamentada en propiedades matemáticas.

Para el análisis de resultados se establecieron categorías de errores inspiradas en la investigación previa: errores de orientación, de estructuración, terminológicos, de definición y clasificación, de visualización espacial y de transformaciones geométricas. Esta clasificación permitió sistematizar las producciones del estudiantado y sus análisis de los errores.

RESULTADOS

El análisis de las pruebas iniciales mostró que en el primer tema se repetían con frecuencia errores derivados de la dependencia de prototipos y de la confusión entre imagen y definición conceptual. Era habitual que figuras con orientaciones atípicas no fueran reconocidas como ejemplos válidos de una categoría geométrica, o que se confundieran rombos con cuadrados debido a su semejanza visual. También se observaron errores terminológicos, como denominar trapezoide a cualquier cuadrilátero convexo, y dificultades para interpretar cuerpos tridimensionales representados en dos dimensiones. Estas dificultades coinciden con lo señalado por Barrantes-López y Zapata-Esteves (2008), quienes identifican los distractores de orientación y estructuración como obstáculos frecuentes en la enseñanza de las figuras geométricas.

En el segundo tema, los errores más comunes se relacionaron con la anticipación de resultados de transformaciones geométricas. Muchas personas confundían giros con traslaciones, no lograban identificar correctamente el centro de giro o el eje de simetría y producían representaciones gráficas incoherentes con la descripción verbal. Este tipo de dificultades ya habían sido documentadas por Alberti (2004), así como por Jaime y Gutiérrez (1996) en sus estudios sobre el aprendizaje de las isometrías. En la Tabla 1 se sintetizan ejemplos de los errores detectados en las pruebas, así como la explicación de cómo se corrigieron.

Tabla 1: Errores detectados en las pruebas correspondientes a los dos primeros temas.

Tipo de error	**Ejemplo concreto detectado**	**Corrección durante el proceso**
Orientación	Confusión causada por la posición o rotación de figures. Por ejemplo, no reconocen cuadrados girados	Se trabaja la definición formal y propiedades independientes de la posición

Tipo de error	Ejemplo concreto detectado	Corrección durante el proceso
Estructuración	Dificultad para distinguir propiedades formales. Por ejemplo, confunden rombos con cuadrados	Se discuten diferencias usando atributos formales (lados y ángulos)
Terminológico	Uso incorrecto de vocabulario geométrico. Por ejemplo, llaman trapezoide a todo cuadrilátero convexo	Se clarifica la terminología y se realizan ejercicios de clasificación
Definición/conceptualización	Confusión entre prototipo visual y definición conceptual. Por ejemplo, solo identifican rectángulos en posición horizontal	Se proponen ejemplos variados para reconocer la categoría más allá del prototipo visual
Visualización espacial	Problemas en interpretar objetos tridimensionales en plano. Por ejemplo, dificultades al identificar cubos en proyección plana	Se emplean manipulativos y representaciones gráficas múltiples
Transformaciones geométricas	Confunden giros con traslaciones, errores en centro de giro	Se plantean actividades de simulación y trayectorias claras

Fuente: Elaboración propia.

Tras la secuencia de intervención basada en autoevaluación, coevaluación y evaluación a partir de la resolución de la docente se pudo observar una mejora en la ejecución del examen final de la asignatura en comparación con los resultados de los cursos previos a la implementación de esta propuesta. Se redujo la dependencia de los prototipos visuales y se aumentó la proporción de explicaciones basadas en propiedades matemáticas. Las justificaciones escritas fueron más rigurosas y también se redujeron los errores terminológicos y se fortaleció la capacidad de clasificación. En el segundo tema, se constató un avance en la identificación de centros de giro, ejes de simetría y amplitudes de rotación, así como una mayor coherencia entre descripciones y representaciones.

La evaluación y coevaluación desarrolladas en la intervención fueron exclusivamente de tipo cualitativo. El proceso se centró en el análisis, clasificación y argumentación de los errores detectados por el propio alumnado y por sus pares, sin que se asignaran puntuaciones numéricas en ningún momento. Se valoró principalmente la profundidad de las justificaciones y la capacidad de fundamentar las correcciones en propiedades matemáticas, lo que permitió observar mejoras tanto en la expresión de los razonamientos como en la comprensión conceptual. Al analizar los errores de sus compañeros, el estudiantado reconocía dificultades semejantes a las propias y desarrollaba una mayor conciencia metacognitiva sobre sus procesos de razonamiento. La corrección de las pruebas por parte de la docente contribuyó a consolidar estos avances, ofreciendo modelos de corrección y enfatizando la importancia del razonamiento formal.

CONCLUSIONES

La experiencia presentada confirma que el análisis de errores puede convertirse en una estrategia didáctica de gran valor, tanto en la formación inicial del profesorado como en la enseñanza de las matemáticas en Primaria. La metodología basada en la autoevaluación y la coevaluación sin ejemplos resueltos obliga al estudiantado a generar explicaciones propias, contrastar criterios y fundamentar sus decisiones en propiedades matemáticas, lo que favorece un aprendizaje más profundo y duradero.

Aunque la propuesta metodológica se aplicó en los cuatro bloques de la asignatura, este trabajo ejemplifica únicamente su aplicación en los dos primeros, centrados en formas planas y cuerpos tridimensionales y en orientación, visualización y transformaciones geométricas. En estos temas, la intervención permitió reducir la dependencia de prototipos, mejorar la precisión terminológica y fortalecer la comprensión de las transformaciones geométricas. Los resultados obtenidos se alinean con las aportaciones de Van Hiele (1986) sobre niveles de razonamiento geométrico y con las investigaciones de Vinner (1991) acerca de la tensión entre imagen y definición conceptual, al tiempo que corroboran la eficacia del análisis de errores destacada en estudios más recientes (McLaren et al., 2012; Rushton, 2018).

Persisten, sin embargo, retos importantes. La gestión de la coevaluación plantea la necesidad de garantizar la amonificación de las pruebas para reducir posibles sesgos, y algunas dificultades de visualización espacial compleja continúan presentes después de la intervención, lo que sugiere la conveniencia de explorar nuevas estrategias didácticas. Aun con estas limitaciones, la experiencia confirma que aprender de los errores es un camino efectivo hacia la construcción del conocimiento matemático. Formar docentes capaces de detectar, interpretar y aprovechar los errores como oportunidades de aprendizaje resulta fundamental para avanzar hacia una enseñanza de las matemáticas que sea inclusiva, crítica y significativa.

REFERENCIAS

[1] Alberti, M. (2004). Errores y dificultades en la orientación y la visualización espacial. Revista de Educación Matemática, 16(2), 35–52.
[2] Barrantes-López, B., & Zapata-Esteves, E. (2008). Obstáculos y errores en la enseñanza-aprendizaje de las figuras geométricas. Campo Abierto. Revista de Educación, 27(1), 55–71.
[3] Battista, M. (2007). The development of geometric and spatial thinking. En F. Lester (Ed.), Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning (pp. 843–908). IAP.

[4] Borasi, R. (1987). Exploring mathematics through the analysis of errors. For the Learning of Mathematics, 7(3), 2–8.
[5] Gualdrón, E., & Gutiérrez, A. (2006). Estrategias correctas y erróneas en tareas relacionadas con la semejanza. En Actas del X Simposio de la SEIEM (pp. 63–82).
[6] Jaime, A., & Gutiérrez, A. (1996). El grupo de las isometrías del plano. Madrid: Síntesis.
[7] McLaren, B., Adams, D., & Mayer, R. (2012). Delayed learning effects with erroneous examples. Journal of Educational Psychology, 104(4), 970–985.
[8] Piaget, J., & Inhelder, B. (1956). La representación del espacio en el niño. Morata.
[9] Presmeg, N. (1986). Visualisation in high school mathematics. For the Learning of Mathematics, 6(3), 42–46.
[10] Radatz, H. (1980). Students' errors in the mathematical learning process: A survey. For the Learning of Mathematics, 1(1), 16–25.
[11] Rushton, N. (2018). Learning from mistakes: Error analysis as a tool for improvement. Mathematics Teacher, 111(7), 546–551.
[12] Van Hiele, P. M. (1986). Structure and Insight: A Theory of Mathematics Education. Academic Press.
[13] Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. En D. Tall (Ed.), Advanced Mathematical Thinking (pp. 65–81). Kluwer.