

# **Desarrollo histórico de la enseñanza de la Aritmética: el caso de los algoritmos de cálculo**

**Bernardo Gómez Alfonso**

**Departamento de Didáctica de la Matemática. Universitat de València**

## **Introducción**

La enseñanza de los algoritmos de cálculo aritméticos ni es inmutable, ni ha estado siempre bajo la misma filosofía, ni bajo la misma manera de presentación. En su evolución a lo largo de su historia reflejada en los libros de texto se distinguen, a muy grandes rasgos, cinco métodos predominantes de presentación, estos son: el reglado, el razonado, el de repeticiones, el intuitivo y el orientado a la estructura.

El propósito de este artículo es describir los rasgos característicos de estos métodos y, fundamentándose en ello, hacer una propuesta de futuro.

## **Desarrollo histórico de la enseñanza del cálculo aritmético**

Conocer el desarrollo histórico de la enseñanza del cálculo puede proporcionar una base sólida desde la cual concebir cualquier nueva propuesta docente. Para evitar dar un salto en el vacío las propuestas hay que fundamentarlas en el marco de la ciencia, de las necesidades sociales y de las teorías psicopedagógicas; pero, además, es necesario mirar el pasado para aprovechar lo que en él había de valioso y rechazar lo que, visto desde hoy, hay de obsoleto. Para arrojar luz en este sentido, haremos un breve bosquejo de cómo se ha configurado a lo largo de la historia la enseñanza de un saber al que se le dedica la mayor parte del tiempo escolar y que ha tenido desde siempre un espacio asegurado en el curriculum.

## **El método de reglas**

La aritmética hindú y árabe supuso el desarrollo del cálculo. En una época en que no había calculadoras, ésta tenía un nivel de exigencia que hoy consideraríamos excesivo. Un buen calculista no sólo tenía que saber calcular bien sino que tenía que hacerlo lo más rápido posible. Esto explicaría el empeño que tuvieron los autores antiguos en desarrollar los métodos más

cómodos, simples, seguros y breves posibles. Por eso, aportaron una gran variedad de métodos para el cálculo aritmético, que son el resultado del deseo de ahorrar tarea, aliviar la dificultad, evitar errores, comprobar resultados, ser rápidos, o sencillamente utilizar el camino más corto que no el innecesariamente más largo, porque en matemáticas siempre se ha considerado que esto es más elegante y brillante.

Desde entonces los métodos de cálculo derivados del sistema de numeración decimal están esencialmente configurados como los conocemos hoy en día.

En el largo período que llega hasta el final del siglo XVIII, la tónica dominante consistía en presentar de modo reglado los métodos de cálculo sobre ejemplos ilustrativos; llama la atención la ausencia de argumentaciones que se parezcan a lo que hoy entendemos por fundamentación; coexisten unos junto a los otros los algoritmos generales con los particulares y los más populares con los menos conocidos. Se daba mucha importancia a las pruebas de las operaciones tales como "la del nueve". Esto era debido a que tradicionalmente el cálculo era con ábacos, tableros cubiertos con polvo, sábanas con harina, etc., en ellos los resultados intermedios se borraban y era imposible repasar la operación, por lo que era necesario efectuar la prueba.

### **El método razonado**

En los comienzos del siglo XIX se produce el establecimiento de un curriculum obligatorio común para los estudiantes de un mismo nivel educativo. Esto se plasmó en una propuesta de enseñanza para los niños en la que se incluía la aritmética. De esta época destacan tres novedades importantes: la primera es el deseo de poner de manifiesto la lógica de las reglas de cálculo y el análisis de los motivos que la sustentan; la segunda es la inclusión en el texto de sugerencias para los profesores; la tercera es un programa dividido en lecciones, las cuales encierran cada una lo que es posible presentar en una sola sesión y no conviene separar en trozos (Condorcet, 1799).

A lo largo de los textos que siguen este método no hay demostraciones, en el sentido formal, sino reglas con su justificación correspondiente, practicándose esas reglas con ejemplos concretos. En los prólogos se suelen dar orientaciones para la enseñanza que, por ejemplo en el caso de Vallejo (1813), preconizan la comprensión del concepto de número por el niño, el aprendizaje comprensivo del sistema de numeración, y el uso de material didáctico. Prescripciones éstas

muy avanzadas para su época ya que tratan de tener en cuenta, en términos generales, la formación intelectual y las capacidades de los escolares (Gómez, Rico y Sierra, 1995).

En definitiva se defiende que la enseñanza de la aritmética debe ser razonada, lo que significa que los alumnos deben poseer el conocimiento y la explicación de los principios de la Aritmética. En otras palabras, no hay que callar el porqué de las reglas, sino explicar su lógica y hacer el análisis de los motivos que las sustentan.

### **El método de las repeticiones**

En los años 20, la enseñanza de la aritmética está dominada por el el método de las repeticiones. En ese método, el aprendizaje era mecánico, los temas se presentaban como una secuencia de pequeños pasos y no como una totalidad, y la atención se dirigía a estos pasos o elementos del proceso, antes que a comprender los principios aritméticos y las relaciones propias del proceso en su totalidad.

Se seguían las directrices marcadas por Thorndike (1924) en su Aritmética acerca de la formación de automatismos, éstos se refieren sobre todo a los procedimientos de cálculo. Según extraemos de Eyalor (1935), calcular ha de ser primero un automatismo para que la atención pueda quedar libre en la persecución de la solución del problema planteado, y sobre todo para que las operaciones se realicen con la misma rapidez y exactitud con que lo haría una máquina de calcular. Junto a esto apenas si tiene relieve el aprendizaje de definiciones, reglas y fórmulas. El automatismo se obtiene a costa de repeticiones del acto. Determinar cuántas repeticiones son necesarias y suficientes para fijar un automatismo es una cuestión muy importante, que varía con cada niño y con las formas de cálculo. Así  $5+4$  es más fácil que  $8+7$  y algunas son preparadas por otras: saber  $7+7$  facilita  $8+7$ .

Las reglas del automatismo son:

1. Los automatismos se forman más fácilmente en la infancia y por ello es adecuada la edad escolar para la adquisición del mecanismo del cálculo.

2. Todo estado de sugestión facilita la adquisición del automatismo, bien provenga del prestigio personal (ver y oír al maestro), del número o del ritmo (p. e. cantar en coro con los demás alumnos las tablas).

3. Es esencial el deseo de adquirir el automatismo y el interés por hallar el resultado.

4. Cuando un automatismo es compuesto se necesita el pleno dominio de los automatismos elementales de que se compone (Eyalar, 1935).

### **El método intuitivo**

Poco a poco los enfoques conceptuales de la pedagogía de las matemáticas comenzaron a ganar terreno a los enfoques procedimentales, basados en el cálculo. Se extendió el interés por desarrollar nuevos métodos de enseñanza que sirviesen para que el aprendizaje de la matemática fuese significativo.

Este es el caso de la denominada "enseñanza intuitiva de la matemática". Entiéndase que lo intuitivo no es lo contrapuesto a lo racional, en el sentido de empírico, sino que se trata de lo razonado, pero con razonamientos apoyados siempre en imágenes muy concretas; de este modo se procura cultivar tanto la intuición con el raciocinio del niño, huyendo lo mismo del formalismo abstracto que del empirismo mecánico y ramplón (Rey Pastor y Puig Adam, 1932).

La idea de que la matemática escolar no debe ser una cosa típicamente abstracta sino que debe convertirse en ciencia experimental, se sustenta en la incapacidad del niño para hacer abstracciones y en que, en último término, los conocimientos matemáticos son hijos de la experiencia. Por ello se defiende que se debe empezar por medir, pesar, recortar, dibujar, etc. para no prescindir del elemento intuitivo, y, sobre todo, que la matemática sea una cuestión de comprender, ya que se considera que no tiene valor alguno lo que se aprende de memoria (Comas, 1925).

Se entiende que los procedimientos para hacer intuitiva la enseñanza de la aritmética se reducen a materializar los números de modo que puedan aparecer sus relaciones y propiedades. La intuición tiene gradaciones según que se empleen objetos (palillos, haces de diez palillos atados, etc. para los diferentes órdenes de unidad), imágenes (dibujos) o símbolos ( $u$ , para unidades,  $d$ ,

decenas,  $c$ , ...). También hay variantes en la representación. Así además de la representación de los números mediante objetos para operar con ellos, se tiene la representación geométrica de los números para estudiar sus propiedades, como por ejemplo cuando se usa una figura rectangular para mostrar la propiedad distributiva; o la representación gráfica, como cuando se trata de hacer intuitivas las relaciones entre magnitudes tales como la variación de una en función de otra.

Otras características del método intuitivo es que debe ser cíclico. Es decir, una operación o una regla no es dominada de una vez por el alumno, sino que se presenta primero en forma concreta y sensible, y es abandonada después por cierto tiempo. Más adelante se recapitula, se derivan algunos principios o aplicaciones más difíciles y se deja de nuevo, antes de que los niños tengan tiempo de cansarse, y así, de año en año, se amplía y se profundiza hasta que se domine la cosa completamente (Comas, 1925).

También debe ser dinámico. Esto es, no darle al alumno los conocimientos matemáticos como cosa hecha, sino hacerle ver su proceso, capacitarle para el descubrimiento de nuevas verdades tiene más interés que enseñarle las fundamentales (Comas, 1925).

Cuando se aplica este método, desaparece la tradicional división entre aritmética abstracta y concreta, ya que se considera absurdo presentar una Aritmética concreta como aplicación de la abstracta, cuando aquella es, en rigor, el germen de ésta.

### **La enseñanza orientada a la estructura**

En los años 40, el deseo de orientar la enseñanza para que fuese *significativa* se dirigió hacia la presentación de la aritmética con ejercicios prácticos que se relacionaban con la vida diaria, y, después, a partir de los últimos años 50 y primeros 60, hacia la comprensión de la estructura del contenido, entendida como los conceptos básicos de los procedimientos y las relaciones sobre las que se basan.

Pero ahora, como han señalado Resnick y Ford, (1990), el motivo de este enfoque de la comprensión de la estructura se justificaba no en términos de enseñar a los niños la aplicabilidad de la aritmética en las tareas de la vida real, sino de sus consecuencias psicológicas y pedagógicas. "En otras palabras, si la

enseñanza pudiese servir para que los estudiantes consiguiesen una comprensión de la estructura de las matemáticas presentando las razones básicas de las operaciones matemáticas y clarificando los conceptos que asocian una operación con otra, entonces dichos estudiantes serían capaces en último extremo de mantener en la memoria sus nuevos conocimientos, de generalizar su comprensión aplicándola a una amplia gama de fenómenos y de transferir su aprendizaje específico a nuevas situaciones y tareas".

En el enfoque de la enseñanza orientado a la estructura está implícito una gran confianza en la capacidad de pensar de los estudiantes, en su capacidad intelectual, en que los niños pequeños serán capaces de comprender temas matemáticos más bien complejos, siempre que se presenten de forma adecuada a su nivel de desarrollo intelectual. Aquí aparecen las ideas de Bruner (1988), si cualquier materia puede ser enseñada a cualquier edad siempre que la forma de presentación sea la asequible para el niño de acuerdo con su nivel de desarrollo intelectual, y si el contenido del aprendizaje debe estar constituido no tanto por los detalles, sino por la estructura, a medida que las posibilidades de aprendizaje del niño así lo permitan, la estructura deberá ir ampliándose y profundizándose. Resulta, en consecuencia, que el plan de estudios no debe ser lineal sino en espiral, retomando el tema a niveles cada vez superiores en función de las secuencias de desarrollo conceptual. Sobre esto Bruner señaló que las estructuras básicas matemáticas se pueden ir formando a base de experiencias que permitan desarrollar representaciones de la actuación (enactivas), icónicas y simbólicas de los conceptos, en este orden. La distinción entre éstas se concreta en el uso de respuestas motrices, imágenes o símbolos.

Dado que la estructura matemática no es evidente en los procedimientos, los defensores de la enseñanza orientada a la estructura vieron en los materiales manipulativos una ayuda para su comprensión. Dienes propuso crear materiales de enseñanza que materializasen la estructura y permitiesen acercarlas a los niños. Bajo el principio de que hay que situar al niño en un entorno rico que le permita investigar, descubrir y construir a partir de su propia actividad, porque sólo así puede el niño constituir sus conocimientos, se propone un cambio en la secuencia de enseñanza tradicional. En lugar de empezar con definiciones y seguir con ejemplos que los alumnos harán como ejercicios, se propone que se empiece por las aplicaciones sobre las cuales los niños experimentarán y progresarán hacia la forma matemática que las resume y expresa.

Un campo donde se han propuesto secuencias de enseñanza en esta línea es el de los algoritmos de cálculo. Para que tal o cual algoritmo se aprenda con "significado", se considera que se deberían comprender sus relaciones estructurales con los conceptos de los sistemas de base de numeración: valor de posición, órdenes de unidad, agrupamientos, y las formas equivalentes de escribir un número, y con las propiedades de las operaciones: distributiva, asociativa y conmutativa. La notación vertical, contraída, simbólica y formal debería surgir después del trabajo con representaciones concretas y otras cada vez más simbólicas (representaciones con formas informales y extendidas), bajo la idea de que es preciso retrasar la presentación simbólica hasta que se haya comprendido lo que representa.

### **Objeciones a los distintos métodos**

Los métodos anteriores: reglado, razonado, intuitivo y orientado a la estructura, todavía están presentes, en mayor o menor medida unos que otros, y más o menos disfrazados, en la práctica escolar. Todos ellos han sido concebidos como intento de solución a los requerimientos que los problemas de la enseñanza plantean. Todos sin excepción han sido objeto de objeciones. El método reglado porque oculta la lógica de los procedimientos, el método razonado porque exige a los niños un nivel de reflexión para el que no están capacitado, el método de las repeticiones porque es mecánico, el método intuitivo porque se centra en la materialización de los procedimientos y propiedades y no en mostrar la estructura de las matemáticas. El método orientado a la estructura porque relega la práctica, cuando no la elimina, ya que se considera que los programas basados en los ejercicios de práctica no responden a las necesidades sociales y emocionales de los niños, son aburridos y destruyen su motivación. En consecuencia, deben apartarse o incluso eliminarse los ejercicios del currículum de matemáticas, y sustituirse por métodos de enseñanza que permitan a los niños descubrir por sí mismos ciertas generalizaciones y principios, permitiéndoles así gozar del aprendizaje y participar en algunos de los procesos creadores con los que han disfrutado los matemáticos a lo largo de los siglos (Resnick y Ford, 1990).

Pero, la idea de que hacer hincapié en los conceptos relegando la práctica proporciona un aprendizaje más efectivo y una comprensión más profunda, puede ser objetada diciendo que quizá sea más efectivo presentar primero el

algoritmo y luego introducir los principios básicos del mismo cuando el niño ya esté familiarizado con los pasos del algoritmo.

En definitiva, ¿es cierto que la enseñanza de la estructura con materializaciones múltiples proporciona un aprendizaje mejor que la enseñanza directamente basada en el cálculo? ¿Realmente se enseña la estructura matemática con este enfoque? ¿En qué consiste exactamente "comprender" la estructura matemática? ¿Al hablar de estructura matemática a qué se refieren? A veces hay distintas posibilidades de acercamiento a un tema, entonces ¿es la comprensión de la estructura indiferente el acercamiento que se elija, o son diferentes las estructuras que se comprenden?

### **El futuro**

Desde siempre la Aritmética ha tenido un lugar asegurado en los planes para la formación de las personas. Pero desde el siglo pasado ha tenido que competir para hacerse sitio en el currículum obligatorio con otras materias, tales como historia, ciencias naturales, idiomas o literatura. Los argumentos para su justificación han sido el de la utilidad social y el de la formación del individuo. Con respecto a lo segundo, el tema de la transferencia del conocimiento ha jugado un papel principal, que ha orientado el enfoque de la enseñanza de la matemática. Cuando se está convencido de que el conocimiento matemático se transfiere, se pone el énfasis en un currículum bien definido, en la claridad de las explicaciones del profesor y en los contenidos del libro de texto. Cuando se da prioridad a la construcción, la exploración y el descubrimiento, el énfasis se desplaza a la estructura, a las elaboraciones cognitivas de los estudiantes, al proceso en vez de al producto.

Pero a la vista de los resultados que se siguen observando en los escolares se podría pensar que el enfoque orientado a la estructura no es la solución de la enseñanza. Lo que no quiere decir que sea preciso una vuelta atrás, ya que tampoco fue solución el enfoque basado en el cálculo. Sin embargo, el enfoque de la "significación" presenta aspectos dignos de tener en cuenta, como es el respeto a la inteligencia de los niños, pensador con inquietudes, que, como dice Castro (1995), "intenta darle sentido a lo nuevo en el contexto de lo que ya conoce", y, también aspectos discutibles, como es que no está claro que deba orientarse a la estructura, al menos mientras no se haya dilucidado cuál es la estructura básica matemática que realmente conviene enseñar.

En la actualidad, la mayor parte del tiempo escolar de primaria continúa dedicándose a la enseñanza-aprendizaje de los algoritmos de cálculo. Sin embargo la mayor parte de los cálculos en la vida diaria se hacen de cabeza o con calculadora. Los educadores deberían preguntarse:

¿Debemos seguir enseñando los algoritmos. Si es así, por qué y cómo?

Sobre esto no hay una respuesta consensuada, aunque sí la hay sobre la necesidad de efectuar un cambio que disminuya el énfasis sobre "las cuatro reglas" en favor del cálculo variado: una integración del cálculo escrito, estimado, mental y con calculadora según convenga (DCB, 1989; Estandares del NCTM, 1989).

Dejando aparte el cálculo mental y el cálculo estimado, para no salirnos del propósito de este artículo y evitar extendernos excesivamente, la propuesta de efectuar un cambio en la enseñanza del cálculo escrito abre un abanico de posibilidades. Veamos tres de ellas:

a) Desde el punto de vista de la integración del cálculo escrito y la calculadora, no sólo hay que pensar en que la calculadora sustituya al lápiz y papel, sino en algo más. Para explicar esto pondré un ejemplo:

Con la capacidad usual la calculadora permite resolver operaciones como éstas:

$$\begin{array}{r} 1654321 \\ - 876543 \\ \hline 777778 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 432 \\ \times 432 \\ \hline 186624 \end{array}$$

Pero qué ocurre si hay más cifras en la calculadora:

$$\begin{array}{r} 1654321654321 \\ - 876543876543 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 43214321 \\ \times 43214321 \\ \hline \end{array}$$

¡La calculadora da error. El resultado sólo admite 8 dígitos!

¿Cómo podemos resolver este problema? ¿Qué necesitaríamos saber para abordarlo con éxito? En mi opinión necesitaríamos discernir las ideas aritméticas que rigen los algoritmos, para poder aplicarlas ahora de la manera más adecuada. Discernimiento que está obstaculizado por la forma en que los

hemos aprendido y por la práctica y el adiestramiento (Freudhental, 1980). Recordemos estas ideas:

- Conceptos de valor de posición que rigen la descomposición y reagrupamiento decimal, como cuando el que sustenta la disminución de un dígito en una unidad para aumentar en diez unidades el inmediato de su derecha.
- Alteraciones invariantes, como la de compensación basada en el principio de conservación de la diferencia que justifica lo que llamamos "llevar" en la resta.
- Leyes que determinan la estrategia del proceso, como la doble distribución (propiedad distributiva dos veces) que justifica el algoritmo de la multiplicación.

El conocimiento de cómo estas ideas rigen la operatoria es necesario para resolver con éxito desafíos de cálculo no contemplados en la instrucción usual, pero, además, este conocimiento permite asentar firmemente las bases que sustentan la operatoria algebraica elemental, conocida como el cálculo literal.

b) Muchas de las normas para la disposición práctica de los resultados parciales nos aparecen como de obligado cumplimiento, cuando la historia nos enseña que hay múltiples variantes, y que, por ejemplo, igual da poner el divisor a la derecha del dividendo que a la izquierda, y los restos parciales abajo que arriba, lo importante es calcularlos correctamente y mantener las reglas de valor de posición, como así hacen en otros países. Pero no sólo la disposición práctica es convencional, tampoco es cierto que sólo haya una manera de hacerlo.

En contra de la rigidez en la presentación de los algoritmos y del enfoque orientado a la estructura, aunque dentro del enfoque de la "significación" y conectando con el enfoque intuitivo, una alternativa surgida en los años 80, ponía el énfasis en una construcción progresiva basada en el significado de las operaciones (Treffers, 1987), en ésta se enfatizaba que los estudiantes encuentren sus propios caminos, apoyándose en modelos visuales para la disposición práctica de las operaciones.

Saber discernir lo que es fundamental o imprescindible de lo que es superfluo en la disposición práctica de los algoritmos, y saber que existen estrategias alternativas a la usual, es un conocimiento valioso que permite encontrar canales personales para el cálculo.

El análisis de algoritmos alternativos como los siguientes se plantea como ejercicio para entender esta argumentación.

¿Cuáles son los criterios que determinan estas disposiciones prácticas?

43	43	43	43	472	4739
<u>x 59</u>	<u>x 59</u>	<u>x 59</u>	<u>x 12</u>	<u>x 42</u>	<u>x 357</u>
32	2580	1290	<u>258</u>	944	33173
67	<u>- 43</u>	<u>1290</u>	516	944	<u>65865</u>
21	2537	2480		<u>944</u>	691823
<u>05</u>		<u>- 43</u>		19824	
2537		2537			

Soluciones: productos parciales escritos en diagonal,  $59=60-1$ ,  $59=30 \times 2-1$ ,  $12=2 \times 6$ ,  $42=2+2 \times 20$ ,  $357=7+7 \times 5 \times 10$

## Resumen

Inicialmente el cálculo se presentaba de un modo "reglado" y "variado" en lo escrito. Al instaurarse la educación obligatoria, aparece el cálculo razonado y restringido a un solo método por operación: "las cuatro reglas". En los años 20 el cálculo está dominado por el método de las repeticiones, en el segundo cuarto de siglo emerge el método intuitivo, y más recientemente el enfoque orientado a la estructura. La reforma que arranca en nuestros días abre nuevas posibilidades de actuación al orientarse al cálculo variado, en ese marco nuestra propuesta de futuro es que la enseñanza de los algoritmos de cálculo debería sustentarse:

- en el conocimiento de las ideas aritméticas que rigen la operatoria,
- en la disponibilidad de este conocimiento para que los estudiantes encuentren sus propios canales de expresión, o que hagan sus construcciones antes de dirigirles a la forma final del algoritmo,
- en el análisis de los efectos de las alteraciones en los datos por el resultado.

## Referencias

Bruner, J. (1988). *Desarrollo cognitivo y educación. Selección de textos por Jesús Palacios*. Madrid. Morata.

Castro, E. (1995). *Proyecto docente, para optar a la plaza de PTU en el área Didáctica de la Matemática*. Granada (Manuscrito).

Comas, M. (1925). *Cómo se enseña la aritmética y la geometría*. Segunda edición renovada. Madrid. Publicaciones de la Revista de Pedagogía, serie metodológica.

Condorcet (1799). *Moyens d'apprendre a compter sûrement et avec facilité, Ouvrage posthume de Condorcet*. París. Art, Culture, Lecture-Éditions. 1988.

DCB (1989). *Diseño Curricular Base. Educación primaria*. Ministerio de Educación y Ciencia.

Estandares del NCTM (1991). *Estandares curriculares y de evaluación para la educación matemática* (Edición original: Curriculum and evaluation. Standards for School Mathematics. 1989. National Council of Teachers of Mathematics. Reston, VA: Author). Sevilla. S.A.E.M. Thales.

Eyalar, J. M. (1935). *Metodología de la Matemática*. Madrid. Instituto Editorial Reus.

Freudenthal, H. (1992). Problemas mayores en educación matemática (Edición original: Major Problems of Mathematics Education. Educational Studies in Mathematics 12, 1981, 133-150). En *Antología en educación matemática*. México, D. F., CINVESTAV.

Gómez, B., Sierra, M. y Rico, L. (1995). El número y la forma. Libros impresos para la enseñanza del cálculo y la geometría. En Agustín Escolano (Ed.) *Historia ilustrada del libro escolar en España*. Vol. 2. Fundación G. S. Ruipérez (En prensa).

Rey Pastor, J. y Puig Adam, P. (1932). *Elementos de Aritmética*. Col. Elemental Intuitiva. Tomo I. Sexta Edición. Madrid. Imp. A. Marzo.

Resnik, L. B. y Ford, W. W. (1990) *La enseñanza de las matemáticas y sus fundamentos psicológicos* (Edición original: The Psychology of Mathematics for Instrucción. 1981. Hillsdale, NJ: Erlbaum). Barcelona. Paidós. MEC.

Thorndike, Eduardo Lee. (1924, 1926). *Las Aritméticas de Thorndike*. Libros primero y segundo. Nueva York y Chicago: Rand McNally y Compañía.

Treffers, A. (1987). *Three Dimensions. A model of Goal and Theory Description in Mathematics Instruction-The Wiscobas Project*. D. Reidel Publishing Company.

Vallejo, Jose M. (1813). *Tratado Elemental de Matemáticas*. Cuarta edición corregida y considerablemente aumentada. Tomo I. Parte primera, que contiene la Aritmética y Álgebra. Madrid. Imp Garrayasaza. 1841.