

EL MULTIPLICANDO Y EL MULTIPLICADOR

¿ Es necesario distinguirlos o es indiferente? ,

Gómez Alfonso, B
Departamento de Didáctica de
Matemática.
Universidad de Valencia

Puchalt Guillem, L. IES Pere Boil. MANISES. VALENCIA.
Vivó Gomis, M. Estudiante 3^{er} ciclo. UNIVERSIDAD DE
VALENCIA.
Diez del Olmo, P. IES Eduardo Merello. PUERTO DE SAGUNTO.
VALENCIA.
Pastor Martín, C. IES Nuestra Sra. De la Cueva Santa. SEGORBE.
CASTELLÓN.
Jordá Ripoll, M. Estudiante 3^{er} ciclo. UNIVERSIDAD DE
VALENCIA.
De la Rosa Loera, J.P. Estudiante 3^{er} ciclo. UNIVERSIDAD DE
VALENCIA.

Resumen

Se presenta un trabajo de investigación sobre las concepciones del multiplicando y del multiplicador, a la vista de los que ha quedado reflejado en los libros de texto, tanto antiguos como modernos.

EL MULTIPLICANDO Y EL MULTIPLICADOR

¿ Es necesario distinguirlos o es indiferente? ,

Resumen

Se presenta un trabajo de investigación sobre las concepciones del multiplicando y del multiplicador, a la vista de los que ha quedado reflejado en los libros de texto, tanto antiguos como modernos.

Introducción

En la multiplicación de números naturales hay una tradición que asigna denominaciones diferentes a los factores, esta denominación es la de multiplicador y multiplicando.

Una discusión relacionada con estas denominaciones surgió en una clase de doctorado de Didáctica de las Matemáticas, cuando el profesor intentaba explicar que desde el punto de vista del análisis de los problemas de estructura multiplicativa la distinción era importante. En medio del discurso, al poner un ejemplo en el que aparecía la expresión 3×4 , el profesor dijo que el 3 actuaba como multiplicador y el 4 como multiplicando, en ese momento se produjo un murmullo en la sala, al preguntar a los estudiantes que era lo que lo había motivado; éstos contestaron que para ellos el 3 era el multiplicando y el 4 el multiplicador. Esto provocó un debate sobre el tema que tuvo que zanjarse acudiendo a la revisión de libros de texto. Los resultados del análisis preliminar sorprendieron a los protagonistas de esta historia y les estimularon a seguir investigando sobre el tema.

Problemática.

Primero hubo que delimitar la problemática que se quería investigar, para lo cual se señaló que la cuestión principal era la de identificar qué factor es el multiplicando y cual el multiplicador en la expresión multiplicativa horizontal axb ; en otras palabras, lo que se quería saber es si el multiplicador es el que va delante o el que va detrás. Esta cuestión requería indagar sobre otra previa y más general, como es la de precisar las nociones de multiplicando y multiplicador. En última instancia, lo que subyacía era la cuestión de si es realmente necesario distinguir los factores, poniéndoles nombres diferentes, habida cuenta que la multiplicación es conmutativa en las estructuras numéricas, aunque no se puede decir que también lo sea desde el punto de vista de los números con contexto.

Metodología.

La metodología de investigación que se propuso se sustentó en el análisis de los libros de texto tanto antiguos como modernos, la revisión histórica del tema y la investigación afín publicada en la literatura profesional.

Concepciones de partida

Las concepciones de partida de los participantes en la discusión acerca de lo que es el multiplicando y el multiplicador estaban vinculadas inicialmente a la adición repetida y a que es la posición la que los identifica, tal y como quedaron reflejadas en los comentarios siguientes.

Profesor. El multiplicador es el que se escribe primero, ya que cuando se escribe 4×5 y se interpreta el signo de multiplicar como sustituto de “veces”, 4×5 significa 4 veces 5 o $5 + 5 + 5 + 5$, por lo que el 4 es el multiplicador y el 5 el multiplicando.

Estudiante 1: No, 4×5 significa $4 + 4 + 4 + 4 + 4$, por lo que 4 es el multiplicando y 5 el multiplicador. Y así me lo han enseñado a mí.

Estudiante 2. Cuando se multiplica en columnas: uno arriba y otro debajo, no hay duda, el que va debajo es el multiplicador.

Estudiante 3: En una operación indicada, como $4 \times (12 - 5)$ el multiplicador es el 4. Luego el multiplicador es el que va delante.

Resultados de la revisión histórica

Las referencias más antiguas que se han encontrado en la revisión de los libros de historia, o de contenido histórico, de las matemáticas sobre las denominaciones en cuestión, multiplicando y multiplicador, se remontan a los árabes. Su origen es remoto, y en la forma que los conocemos hoy provienen de la expresión latina utilizada para distinguir entre el número que multiplica y el número por el que se multiplica.

- En Chabert, et al. (1994), refiriéndose a la historia del algoritmo de la multiplicación, se recoge un extracto del libro Ibn al Banna (s. XIII), en el que al explicar el método “del enrejado” se dice: “coloca el multiplicando encima del cuadrilátero, haciendo corresponder cada una de sus posiciones con una columna. Después, colocas el multiplicador a la izquierda o a la derecha del cuadrilátero, (p. 29).

- Smith (1925, señala que el término “multiplicando” es una contracción de “*numerus multiplicandus*”, su significado tal y como viene recogido, por ejemplo, en *The Crafte of Nombrynge* (1300), es el de “número por el que hay que multiplicar” (p. 104). El término multiplicador significa “*numerus multiplicans*”, y de aquí : “multiplicante”, “multiplicator”, “multipliant” y “multiplier” (Ibid., 104).

Resultados del análisis de los libros de texto.

A partir de una selección de libros de texto históricos, importantes por su influencia a lo largo de la historia de la educación matemática española, se han identificado diversas concepciones del multiplicando y del multiplicador. Estas concepciones están ligadas a los diversos acercamientos que aparecen en los libros en relación con la noción de multiplicar.

Acercamientos a la noción de multiplicar:

En nuestro análisis histórico de libros de textos nos han aparecido los siguientes:

1. El que interpreta la multiplicación en términos de proporción.
2. El que interpreta la multiplicación como adición repetida, o como tomar varias veces un número.
3. El que interpreta la multiplicación como el cardinal de un conjunto producto, o como el número de combinaciones que se pueden hacer con los elementos de dos conjuntos dados

La primera interpretación está relacionada con la reconceptualización que permite extender la multiplicación más allá del campo numérico de los naturales. También está relacionada con el lenguaje de los textos actuales, mientras que la segunda es más propia de los textos antiguos. La tercera, está relacionada con el movimiento denominado de la “matemáticas modernas”, estuvo en vigor en los textos de los años 70.

Además de estos acercamientos, también cabe señalar los que diferencian entre la multiplicación concreta y la multiplicación abstracta, ya que ambas tienen que ver con la forma de conceptualizar el multiplicando y el multiplicador.

Las concepciones identificadas del multiplicador y el multiplicando

En nuestro análisis de los libros históricos se han identificado las siguientes:

- El multiplicador es, en particular, el precio o valor de la cosa comprada o vendida, y en general, es el número que es de la misma especie que el producto. (Ver Pérez de Moya, 1562, p. 82-89).
- El multiplicador no es de la especie del producto, sino que es un número abstracto (Ver Vallejo, 1841, p. 33; Cirodde, 1865, p. 12)
- El multiplicador es el número que es a la unidad como el producto es al multiplicando. (Euclides, cit. Perez de Moya, 1562, p. 82; Cirodde, 1865, p. 11; Fernández y Cardin, 1865, p. 20; Mataix, 1953, p. 15).
- El multiplicador es el número que indica cuantas veces hay que añadir una cantidad a sí misma, o el que indica cuantas veces hay que tomar el otro, o el número de sumandos iguales que forman una suma (Ulloa, 1706, p. 11; Vallejo, 1841, p. 32; Rey Pastor, J. y Puig Adam, P., 1935, p. 60)
- El multiplicador es el número por el cual se multiplica (De Bajo, 1877, p. 25; H. S. R., 1945; p. 206-207).
- El multiplicador es el número que va segundo, o el que va a continuación del multiplicando (Mataix, 1953, p. 15; Rey Pastor, J. y Puig Adam, P., 1935, p. 60; 3ºEGB, Prima Luce, 1976, Castro et al, pp. 54-55)
- El multiplicador es el número que se pone debajo en el algoritmo de columnas (De Ulloa, 1706, p. 11).

Además de estos acercamientos, también cabe señalar los que consideran que el multiplicador es

- El cardinal de un conjunto
- El número menor

La investigación afín: El análisis de los problemas multiplicativos

La revisión de los libros revela que el uso de las expresiones multiplicando y multiplicador ha sido una constante en los libros de aritmética, bien en el curso de la definición de la multiplicación, bien en la interpretación de los factores, o bien para asignar un orden en la escritura de los mismos. Sin embargo, estos usos no explican por qué, siendo como es la multiplicación conmutativa, es necesario distinguir entre multiplicando y multiplicador; de hecho las definiciones conjuntistas de la multiplicación no lo hacen.

Los trabajos de investigación publicados en la literatura científica, Fischbein, et al., 1985; Vergnaud, 1990; Schwarz, 1988; Kouba, 1989; Bell y otros, 1984), han revelado que las diferencias entre el multiplicador y el multiplicando no son neutrales, ya que están en el origen de las diferentes complejidades que presentan los problemas de multiplicación y división. Estas diferencias, debidas a lo que indican cada uno de los factores de la multiplicación, afectan a las estrategias de solución de los estudiantes, por lo que se han utilizado para hacer distinciones en los problemas de verbales de multiplicación y división en términos de mayor o menor complejidad, e influyen en la decisión que media para anticipar la operación que hay que realizar.

Conclusiones

Como prólogo a esta pequeña investigación habían surgido algunas preguntas, ¿es realmente necesaria la distinción entre los factores de un producto, y si lo es, es posible definir los términos de multiplicando y multiplicador? ¿se les debe identificar con una posición fija? ...

En nuestro análisis se observa que ha habido una enseñanza basada en la posición del multiplicando y del multiplicador. Unos libros lo enseñan explícitamente y otros libros implícitamente, utilizando siempre la misma posición en todos los ejemplos. Algunos autores son incluso incoherentes al intentar dar una posición de multiplicando y multiplicador que no lo requería.

P. ejemplo: “ Llamamos producto al cardinal del producto cartesiano

El segundo factor se llama multiplicador

El primer factor se llama multiplicando

$$2 \times 3 = 3+3 = 6 ”$$

(Prima-Luce 1976)

Pero, la identificación de una posición determinada para el multiplicando y el multiplicador, está vinculada a que sólo se utilice una de las conceptualizaciones de la multiplicación como es, la suma repetida, o una contextualización preferentemente, como es la de “a veces b”, lo que dificulta que el alumno pueda pasar a un sistema de pensamiento más abstracto.

Ante la expresión “ 2×3 ” indudablemente no podemos hablar de multiplicando y multiplicador, hablamos de factores, nos encontramos en un nivel de abstracción en el que los números aparecen desconceptualizados y descontextualizados, un nivel superior de esta abstracción sería por ejemplo en el álgebra.

Por tanto y como conclusión, se puede afirmar que las preguntas inicialmente planteadas no tienen una respuesta sencilla, porque dependen de una determinada concepción y contextualización, y hay otras que es preciso tener en cuenta. Como ha señalado Freudhental en su análisis fenomenológico (citado por Puig 1995, p. 79), es cierto que el soporte lingüístico de la multiplicación en el lenguaje vernáculo: los términos doble, triple, las expresiones con veces, y la realización material de las acciones que expresan (3 veces 4 canicas) se traduce de forma natural en la multiplicación como suma de sumandos iguales, y que esto sea, pues, el modo más natural de construir las tablas de multiplicar y el primer modo de aproximarse a la operación de multiplicar en la escuela. Pero también es cierto que hay otras interpretaciones diferentes de la multiplicación,

entra esta y la adición repetida a través de la idea la multiplicación como área. Aún así, hay otros problemas, situaciones o fenómenos, como, por ejemplo, los que se representan mediante árboles o circuitos que no necesitan distinguir entre multiplicando y multiplicador.

Referencias bibliográficas

- Cerdán, F. y Puig, L. (1995) *Problemas aritméticos escolares. Síntesis*
- Chabert, et al. (1994). *Histoire d'algorithmes. Du caillou à la puce*. París. Belin.
- Cirodde, P. L. (1865). *Lecciones de Aritmética*. (Traducido por Francisco Zoleo). Undécima tirada. Madrid. Carlos Bailly-Bailliere.
- Fernández y Cardin, J. M. (1865). *Elementos de Matemáticas. Obra de Texto para segunda Enseñanza. Aritmética. Cuarta edición*. Madrid. Imprenta de Fuentenebro.
- H. S. R. (1945). *Nueva Enciclopedia Escolar. Grado Segundo. 21ª Edición*. Burgos. Hijos de Santiago Rodríguez.
- Pérez de Moya, J. (1562). *Arithmetica práctica y speculativa*. Salamanca. Matías Gast. Madrid. Biblioteca Castro. Ediciones de la Fundación José Antonio de Castro. 1998.
- Smith, D. E. (1958 reed). *History of mathematics*. New York. Dover Publications, Inc. 1925
- Verganud, G. (1990). *La Theorie des champs conceptuels. Recherches en didactique des mathematiques. Vol 10. Nº 2 y 3. Pgs. 133-170*
- De Bajo e Ibañez, Ramón (1877). *Nociones de Aritmética y álgebra*. Vitoria. Imprenta de Domingo Sar.
- De Ulloa, Pedro (1706). *Elementos Mathematicos ...* En Madrid: Por Antonio Gonçalez de Reyes.
- Mataix, C. (1953). *Aritmética general y mercantil. 5ª Ed. Madrid. Ed. Dossat..*
- Matemáticas de 3º. (1976). Serie de libros de texto. Barcelona: Prima Luce., pp. 54-55)
- Rey Pastor, J. y Puig Adam, P. (1935). *Elementos de Aritmética*. Col. Elemental intuitiva. Tomo I. Octava tirada. Madrid. Unión Poligráfica
- Vallejo, J. M. (1841). *Tratado Elemental de Matemáticas* .escrito de orden de S. M. para uso de los caballeros seminaristas del seminario de nobles de Madrid y demás casas de educación del Reino. Cuarta edición corregida y considerablemente aumentada. Tomo I. Parte primera, que contiene la Aritmética y Álgebra. Madrid. Imp Garrayasaza.