Capítulo 3

Los Ritos en la Enseñanza de la Regla de Tres

Bernardo Gómez
Departament de Didàctica de la Matemàtica
Universitat de València

Resumen

El enfoque de la enseñanza de la *regla de tres* en los libros de texto ha sufrido modificaciones a lo largo de la historia por la lógica evolución de las teorías dominantes del aprendizaje, pero también, por la doble consideración aritmético-algebraica de sus fundamentos teóricos y de sus enfoques de resolución.

Con este trabajo se pretende contribuir al estudio de estas modificaciones, centrando la atención en el episodio de la historia de la enseñanza de las matemáticas que se relata en el *Tratado* de Vallejo. Episodio que señala un punto de inflexión en la enseñanza de la *regla de tres*, al marcar el paso del *método de resolución aritmético* al *método de resolución algebraico* en España.

INTRODUCCIÓN

La importancia de *la regla de tres* de las matemáticas tradicionales es de sobra conocida por sus aplicaciones. En la enseñanza tiene una larga tradición y es un tema que ha sido considerado como la culminación de los aprendizajes aritméticos elementales. Está ligada a problemas de estructura multiplicativa, los cuáles han sido objeto de interés para la investigación didáctica reciente en el marco de la psicología del aprendizaje (Vergnaud, 1983, 1988). Pero el enfoque investigador sobre este tema ha dejado por cubrir huecos que corresponden al marco investigador propio de la Didáctica de las matemáticas, el denominado *análisis histórico epistemológico*. Este es el marco de referencia que se toma aquí para llevar a cabo una aproximación al conocimiento de los cambios en los enfoques metodológicos y conceptuales que se han sucedido históricamente en la enseñanza de la *regla de tres*.

Para describir y caracterizar estos cambios es fundamental situarse en el momento histórico en que la enseñanza de la aritmética comienza a asumir planteamientos que son propios del álgebra. Ese momento puede situarse en España en las primeras décadas del siglo XIX y coincide con los años en que está configurándose el sistema general y público de enseñanza. Las obras texto de referencia en ese momento clave de la educación y formación matemática española, son en opinión generalizada, el *Tratado Elemental de Matemáticas* de Vallejo y el *Curso Completo Elemental de Matemáticas Puras* de Lacroix.

El *Tratado* de Vallejo es el que se toma aquí como documento principal para efectuar el análisis en los aspectos concretos que interesan a este trabajo. Para centrar el estudio de estos aspectos se han tomado tres ejes de indagación principales:

- El método de enseñanza, reflejado en desarrollo del contenido: el orden que se sigue en la presentación de las nociones matemáticas de la regla de tres y su enlace, modo de exponerla y extensión.
- Las concepciones epistemológicas, reflejadas las definiciones y fundamento de los conceptos de la regla de tres; en los ejemplos y problemas elegidos para ilustrarlos; y en los métodos de resolución enseñados para resolverlos.
- Su relación con el contexto matemático de la época en que se insertan a la vista de lo que se dice en los textos equiparables más o menos vigentes en ese momento histórico.

EL *TRATADO* DE VALLEJO EN SU CONTEXTO HISTÓRICO

El *Tratado Elemental de Matemáticas* de José Mariano Vallejo (1779-1846) comenzó a publicarse en 1813, en una época en que el interés por el estudio de la matemática no se situaba tanto en la sociedad civil como en las instituciones militares. Este interés será argüido por Vallejo para defender la necesidad de escuelas de instrucción primaria, porque así será posible *"tener un buen plantel de cabos y sargentos"* (1841, p. 287). Aunque los matemáticos que impartían docencia en ellas no realizaron precisamente aportaciones a las matemáticas en sí misma, se puede decir que si hicieron aportes a su enseñanza, pues actualizaron los libros de texto de matemáticas renovando de esta forma la bibliografía matemática española.

Éstos autores, ofrecieron obras enciclopédicas en las que presentaron avances de las matemáticas del siglo XVIII que no se habían publicado o difundido en España, con una doble finalidad: la de dar una visión general de las matemáticas y la de ser utilizadas como libros de texto para las instituciones en las que trabajan sus autores. Estas obras, en las que se sintetizaron y copiaron a autores precedentes de prestigio, mostraban una gran preocupación por el rigor, coherencia interna y método de presentación de las ideas que, junto con un buen trabajo de reelaboración, las hizo especialmente valiosas y reconocidas.

El *Tratado* de Vallejo (1812-1813), escrito en 5 tomos, fue una obra del estilo que acabamos de señalar. Sufrió cuatro reediciones, la última que es la que se utilizado aquí, se publicó en 1841 tras el periplo europeo que Vallejo realizó por razones políticas y que le sirvió para adquirir nuevos conocimientos con los que amplió y perfeccionó su obra.

En 1851 fue aprobado en el concurso de textos para la segunda enseñanza (Maz, 2005), pero ese año, el panorama de los manuales españoles era muy diferente al de 1813, ya que el fulgor de los autores franceses y la escasa producción española, había traído consigo la aparición de traducciones de los manuales de más éxito o más populares de las escuelas militares y técnicas francesas, entre ellos el de Lacroix, que fue utilizado como de texto en las facultades (llamadas de Filosofía en la época) para desarrollar los contenidos de las matemáticas superiores.

LA REGLA DE TRES DE LAS MATEMÁTICAS TRADICIONALES

La *Regla de Tres* o *Regla de Oro* se encuentra en las primeras aritméticas conocidas. Se relaciona con problemas para cuya solución se establecen reglas fijas que dependen de una igualdad de razones. Según Gheverghese (1996, p. 290), se aplicó por primera vez en China. Sus rastros más antiguos se remontan al *Chiu Chang Suan Shu*, del siglo I de nuestra era. Un ejemplo de los problemas recogidos en este texto es el siguiente:

> *"Dos piculs y medio (una medida de peso transportada por un hombre sobre sus espaldas, aproximadamente 65 kgs) de arroz se compran por de un taiel de plata. ¿Cuántos (piculs de arroz) se pueden comprar con 9 taiels."* (p. 221).

El mismo autor señala (p. 352) que el primer tratamiento sistemático de la regla de tres se encuentra en el manuscrito de *Bakhshali*, compuesto en los primeros siglos de nuestra era.

Más tarde, en los inicios de la matemática árabe, aparece la regla de tres, de modo específico en la obra de *Al-Biruni* (s. X) denominada *Fi Rasikat al-hind*, título que significa *Sobre las reglas de tres de la India*. En esta obra encontramos la preocupación característica de los matemáticos de los países islámicos por fundamentar las reglas utilizadas en las matemáticas aplicadas sobre las teorías matemáticas griegas (Youschkevitch, 1976).

Desde entonces los problemas de *regla de tres*, no han dejado de estar presentes en los libros de aritmética, con un fundamento matemático que se relaciona con los conceptos de la teoría de las razones y proporciones de Euclídes. Así, por ejemplo aparece en el libro de Pérez de Moya (1562):

> *"Dícese regla de tres porque en ella ocurren 3 números continuos o discontinuos proporcionales, y toda práctica no es otra cosa sino hallar otro cuarto número ignoto que se aya en tal proporción con el tercero como el segundo con el primero. Lo cual muestra Euclides en la decimosexta del sexto, a do dice: dadas 3 quantidades continuas proporcionales, para hallar la quarta multiplicarás la segunda por la tercera y partirás por la primera*." (p. 220)

LOS RITOS DE LA ENSEÑANZA TRADICIONAL DE LA REGLA DE TRES SIMPLE

La larga tradición en la enseñanza de estos problemas acabó por configurar una estructura que los ubicaba en un bloque de contenidos al final de la aritmética. Se comenzaba por desarrollar la teoría de las razones y proporciones, considerada como una de las más importantes por sus numerosas aplicaciones y se seguía estudiando éstas con ejemplos prácticos que se agrupaban bajo los nombres clásicos de:

- la *regla de tres simple* (problemas de hallar un cuarto proporcional conocidos los otros tres) y *compuesta* (más de una regla de tres)
- la *regla de compañías* (reparto del beneficio),
- la *regla conjunta* (trueques),
- la *regla de aligación* (precio medio y composición de una mezcla o aleación en cantidades convenidas),
- la *regla de interés* (beneficio de un capital a una tasa convenida),
- la *regla de descuento* (comercial),
- las *reglas de falsa posición* (usar números arbitrarios y supuestos para encontrar el verdadero)
- las *acciones simultáneas* (problemas de *grifos, relojes, móviles, trabajos en conjunto* y similares).
- las *herencias, parentescos o testamentos.*
- los *arrendamientos,*
- las *Baratas* (Trueque de una mercancía por otra)
- los *cambios* (de una moneda por otra)
- las *escalas*.
- la *tara*, el *seguro*, el *descuento*, la *avería* (porcentajes)

La metodología de enseñanza se sustentaba en la idea que el aprendizaje de la regla de tres era una cuestión de adiestramiento en torno a ciertos ritos relacionados con el empleo de palabras clave, el orden de los términos, la disposición práctica de los datos numéricos, el método de resolución y la secuencia de presentación de las ideas.

Las Palabras Clave

El uso de palabras clave para describir los términos de la proporción se remonta a los textos hindúes, donde aparecen en un lenguaje poético. Así, por ejemplo, en el manuscrito de *Bakhshali*, se hallan bajo la siguiente formulación:

> *"Si p (argumento, o pramana) produce f (fruto, o phala), qué producirá i (lo pedido o iccha)? Se sugiere que las tres cantidades se escriban así:*

p	*f*	*i*

donde p e i son de la misma denominación, y f es de una denominación diferente. Para obtener el resultado buscado hay que multiplicar la cantidad media por la última cantidad y dividir por la primera” (Gheverghese, 1996, p. 352).

O, lo que es lo mismo:

“En la regla de tres multiplica el fruto por el deseo y divide por la medida. El resultado será el fruto del deseo” (*Aryabhatiya*, citado en Boyer, 1968, p. 275).

En las aritméticas italianas del Renacimiento se introdujo la referencia a *agentes y pacientes*. El primer término de la proporción es el agente presente, y su paciente correspondiente es el segundo; el tercer término es el agente futuro, y su paciente es la cantidad demandada (Brooks, 1880, p.329). Las aritméticas comerciales con sus problemas de mercadería, que se refieren a transacciones entre productos con valores dependientes linealmente, introdujeron la referencia al *valor o precio y ganancia o pérdida* que se encuentra en los textos españoles de los siglos XVI a XVIII.

Entendido esto, resta dar la orden que se ha de tener en saber aplicar esta regla de proporción a las cosas tocantes a los tratos de la vida, para lo qual ay necesidad de saber quál es primera quantidad y quál ha de ser segunda, y quál tercera. Lo qual se sabrá teniendo aviso que de las tres quantidades la que que tuviere notorio y cierto su valor, o precio, o ser, ésta tal será primero número, y el precio, o su valor, o ganancia, o perdida es el segundo, y la tercera será un número cuyo valor y ser, o ganancia, o pérdida está por saber Ejemplo. Si 20 fardeles me costaron 12 reales, pregunto: ¿30 fardeles del mesmo valor y quantidad y peso qué me costarán al mesmo respecto? En esta demanda los 20 es el número primero, su valor, que es 12, es el segundo, los 30, que es lo que quieres saber qué valdrán, es el tercero. Pues la regla es multiplicar el segundo número (que en este ejemplo es 12) por el tercero, que es 30, y montará 360; parte 360 por el número primero, que es 20, y vendrá a la partición 18, lo quales es la respuesta de la demanda, y es el cuarto número proporcional (Pérez de Moya, 1998, pp. 219-220).

También, es similar a la de *causas y efectos* que se introduce posteriormente al considerar los problemas de proporción como de comparación entre dos causas y dos efectos; dando por supuesto que los efectos son proporcionales a las causas. Esta es la forma que usará Vallejo junto con los términos: circunstancias, cantidades principales y relativas, el supuesto y la pregunta.

Regla de tres es la que enseña a determinar los efectos por medio de las causas o las causas por medio de los efectos (*), cuando se conoce el enlace o dependencia que tienen entre sí.

(*) Cuando se ve que una cosa es capaz de producir otra, a la que produce se le llama causa y a la producción efecto. Por ejemplo: desde que vemos que la cera se derrite constantemente por la aplicación de cierto grado de calor, damos al calor el nombre de causa, y al derretirse la cera el nombre e efecto; cuando un labrador siembra

trigo y coge, el trigo que siembra es la causa que produce el trigo que coge, el cual es el efecto.

La regla de tres puede ser de dos modos: simple y compuesta; la simple es aquella en que para determinar el efecto o la causa que se busca, solo se necesita atender a una circunstancia; y compuesta es aquella en que se necesita atender a dos o más circunstancias.

La regla de tres simple se subdivide o puede ser de otros dos modos: directa o inversa; directa es aquella en que se trata de averiguar el efecto que produce una causa, o la causa de que proviene un efecto, cuando se conoce el efecto producido por una causa de la misma especie; y la inversa es aquella en que se trata de averiguar la causa que se necesita para producir, junta con otra dada, el mismo efecto que han producido ya otras dos causas de la misma especie (…)

Toda cuestión que conduce a una regla de tres, ha de constar de dos partes, a saber, del supuesto y la pregunta; en el supuesto se da la dependencia que tiene la causa con el efecto, y en la pregunta la causa o efecto que se da para determinar el efecto o causa que se busca.

En toda regla de tres simple entran tres cantidades conocidas: dos del supuesto, y una de la pregunta (Vallejo, 1841, p. 348).

El Orden de los Términos

Desde sus orígenes se adoptó una forma de estándar de ordenar los términos, parecida a la que se ha visto en *Bakhshali*. Para esta ordenación se tenían en cuenta dos condiciones: que el primer y tercer término fueran de la misma especie o denominación, y que el resultado o cuarto número, obtenido al hacer el producto del segundo por el tercero, fuera de la especie del segundo número.

"Entendido quál sea el primero número y quál segundo y quál tercero, ay necesidad de saber ciertas concordancias que se han de guardar en esta regla antes que se declare su operación.

La primera es que el número primo y tercero han de ser de una specie, aunque no en quantidad ni en valor; quiero decir que si el primero número es dineros, o tiempo, el tercero lo sea también.

La segunda es que quando multiplicares el segundo número por el tercero lo que viniere es del specie del segundo número, y no del tercero.

La tercera es que el cuarto número que buscamos en esta regla siempre es del specie de la moneda o cosa que fuere el segundo" (Pérez de Moya, 1998, p. 219-220).

En el siglo XIX esta ordenación todavía se considera fundamental. En el texto siguiente se muestra como aparece en el *Curso Elemental* de Lacroix (1846):

"Es necesario distinguir en primer lugar los dos términos de cada especie, y examinar si el término desconocido debe ser mayor o menor que el correspondiente de su especie. Hecho esto, habremos de estar bien seguros de que el cuociente del término mayor de la segunda especie, dividido por el menor de la misma, es igual al cuociente del

mayor término de la primera especie, dividido por el más pequeño de ésta; y de este modo nos resultará la proporción:

El término mas pequeño de la primera especie

es

al mayor de la misma

como

el término menor de la segunda especie

es

al término mayor de esta otra.

Supongamos en primer lugar que habiendo hecho un jornalero 217,5 varas de obra en 9 días, se nos pregunta ¿cuántos días necesitará el mismo jornalero para hacer 423,9 varas de la misma obra en igualdad de todas las demás circunstancias?

En el ejemplo anterior tendremos inmediatamente, observando la regla, la siguiente proporción:

$217{,}5^v : 423{,}9^v :: 9^d : x^d;$

En atención a que el término desconocido debe ser mayor que 9, por ser necesarios tantos mas días cuantas mas varas de obra haya que ejecutar." (p. 290).

La Disposición Práctica de los Datos Numéricos

La costumbre más extendida entre las aritméticas italianas del Renacimiento era separar los números con una línea horizontal: *a* — *b* — *c*, y así se hacía en España. Otros autores, como Tartaglia, planteaban la proporción con líneas verticales: *a* || *b* || *c*, o incluso con la forma en cuadro que usamos hoy en día, que era la forma utilizada por el inglés Recorde (1543). Con el tiempo, cuando se quiso resaltar la proporción que subyace en los problemas de regla de tres, se recurrió a los signos que denotaban la razón y la igualdad de razones: el punto y los dos puntos, de la siguiente manera: *a . b : : c.*

Después, para distinguir la proporción geométrica de la aritmética se optó por el punto en un caso, y por el doble punto en el otro, para separar los términos de la razón. Dos dobles puntos indicaban la igualdad de razones. Está, que será la forma universalmente empleada, es la que se encuentra en Vallejo: a : b :: c : . Finalmente, se introdujo la raya de fracción para indicar que la proporción está en forma de ecuación: a/b = c/x, forma que también empleará Vallejo (1841).

"La razón aritmética (por diferencia) se señala poniendo el antecedente, después un punto, y luego el consecuente; la Geométrica (por cociente) poniendo dos puntos entre el antecedente y el consecuente … La razón aritmética se debería señalar poniendo el signo – entre el antecedente y el consecuente, porque no viene a ser otra cosa que la indicación de una operación de restar. La Geométrica está perfectamente señalada; pues los dos puntos son el signo de la división." (pgs. 327 y 328).

La Secuencia de Presentación de las Ideas

También se adoptó pronto una secuencia de presentación de las ideas que ha sufrido pocos cambios a lo largo del tiempo, salvo por lo que se refiere a los fundamentos matemáticos de la regla y a la mayor o menor extensión que con que se ha tratado.

En el manuscrito de Bakhshali, donde los temas se organizaban en la forma de *Sutras*, que son reglas breves expresadas en forma de aforismos, la secuencia consistía en formular la regla y a continuación, dar un ejemplo relevante, primero en palabras y luego en forma de notación. Seguía la solución y finalmente, una "demostración" o "prueba" (Gheverghese, 1996, p. 349).

Esta secuencia evolucionó, añadiendo primero la explicación del objeto o finalidad de la regla, y después su relación con la proporcionalidad

> *"Por ser esta regla la primera de las compuestas, me detendré, y trataré un poco de lo mucho que ay que dezir acerca desta materia, cuyo sujeto es pretender, y buscar un oculto numero, por la noticia de tres numeros notables y manifiestos, el primero de los cuales es cosa comprada, o vendida. El segundo, es el precio y valor de aquella cosa. Y el tercero numero es la otra cosa en cantidad mas o menos, que avemos comprado, o queremos comprar del mismo genero, y condicion de la primera cosa: y queremos saber lo que valdra en respeto de aquella, y precio de la qual, puesto que aun no lo sabemos, mediante la practica siguiente lo alcançaremos.*
>
> *Exemplo primero. Si tres melones me cuestan dos reales, doze melones que me costarán? Estando formada la regla de tres del modo que aquí he propuesto, está bien ordenada para alcançar lo que deseamos, conviene saber, aquellos reales que valdran los doze melones. Manda la regla de tres multiplicar el numero de en medio, que es 2, por el 3, que es 12. ó a la contra, y lo procedido que es 24 sea partido a tres compañeros, conviene a saber por el 3, que es el numero primero, y vendrá al cociente 8, y tantos reales costaran los 12 melones...*
>
> *La definicion de la regla de tres es hallar un numero quarto como has visto que tal proporcion tenga con el tercero numero, que es su antecedente, como el segundo numero con el primero* (Santa Cruz, 1794, p. 189)".

Para evitar errores en la aplicación de la regla, se hacían avisos para andarse con ojo con los enunciados de los problemas atendiendo a cómo están ordenados los tres datos del problema, para ver si la regla era *legítima* o *bastarda*. La *legítima* era cuando el primer número y el tercero son de la misma especie y la *bastarda* cuando lo eran el segundo y el tercero.

> *"Nota, que siempre el dicho quarto numero sea del mismo genero, y especie del segundo, como en este exemplo has visto. Empero quando el primer numero, y el segundo fueren de un especie, que también en el tercero, y quarto, podrán ser de otra especie ambos a dos. Exemplo desto. si con 8 reales gano 12 reales, con 30 maravedis que ganaré ...*

> *Agora quise dividir la regla de tres en dos especies, es saber, en legitima, y en bastarda, donde toda regla de tres, que fuere propuesta en la forma que propuse en el exemplo primero deste capitulo, será dicha legitima, solamente porque el primero numero, y tercero son de una especie, asi en ser causas de sus efectos, como en ser de una naturaleza, segun avemos notado 3, melones, y 12, melones, empero los dos reales concurrieron en medio de aquellos que es el diferente...*
>
> *Si con 12 reales compré cuatro gallinas, para comprar 15 gallinas, quantos reales he menester? Nota, que por ser el numero de enmedio semejante con el tercero en especie, no en cantidad, es dicha esta regla de tres bastarda, como son 4 gallinas, y 15 gallinas, empero 12 reales, que es el diferente, se multiplicará por los 15, y el producto, que es, 180, le partirás a quatro compañeros, el cociente advenido será 45, y tantos reales serán menester para comprar las quinze gallinas* (Santa Cruz, 1794, p. 189)".

Los Métodos De Resolución

1. El método reglado. Es la forma tradicional de resolución de los problemas de regla de tres, consiste en la ejecución de una lista de pasos que, sin necesidad de conocer la razón ni la explicación de los mismos, llevan a obtener la respuesta de una manera mecánica, breve y fácil de memorizar.

2. El método de la proporción. La preocupación árabe por dar fundamento a la regla de tres como una aplicación de la doctrina de las razones y proporciones, llevó a enunciarla en forma general como la regla que tiene por objeto hallar el cuarto término de una proporción. De esta manera el método de resolución consistía en plantear la proporción y aplicarle las propiedades que previamente se habían estudiado.

En el ejemplo siguiente se usa la propiedad que dice que *dos quebrados de un mismo denominador están en la misma razón que sus numeradores* para simplificar la primera razón y después se aplica la propiedad del *producto de medios es igual al producto de extremos* para hallar el resultado.

> *"La primera regla que se funda en la doctrina hasta aquí enseñada de las razones y proporciones, es la que todos llaman Regla de Tres o Regla de Oro por causa de su excelencia y uso continuo. Aunque hay varias reglas de tres, el fin de todas es hallar el quarto término de una proporción cuyos tres primeros son conocidos (…)*
>
> *Cuestión. Si 40 hombres hacen en cierto tiempo 268 varas de obra, ¿quanta obra harán 60 hombres en el mismo tiempo?*
>
> *Las cantidades de un mismo nombre son aquí 40^h y 60^h, y como estos son más que aquellos, también el número de varas que trabajarán será mayor que el número que el número que han trabajado los primeros. Vamos por lo mismo de lo mas a lo mas, esto es de mas hombres a mas varas, por cuyo motivo la regla es directa. Pongo las tres cantidades en proporción*
>
> $$40^h : 60^h :: 268^v :$$

> *partiendo ambos términos de la primer razón por su máximo común divisor 20, lo que no altera la razón (86), y debe practicarse siempre que se pueda, por lo mucho que simplifica la operación*
>
> $$2^h : 3^h :: 268^v :$$
>
> *Multiplico por lo dicho (151) 268 por 3; el producto 804 le parto por 2, y sale al cociente 402, número de varas que trabajarán los 60 hombres."* (Bails, 1805, p. 149).

3. El método algebraico. Al comenzar el siglo XIX, era ya una creencia generalizada que el método algebraico era él mejor para resolver determinados problemas de larga tradición aritmética. Este método, tenía según Lacroix (1846) dos partes: la primera, que consiste en traducir al lenguaje algebraico las condiciones del problema o relaciones que establece, lo que se llama poner el problema en ecuaciones; y la segunda, que consiste en deducir de la ecuación la fórmula que nos indique la serie de operaciones que debemos ejecutar con las cantidades conocidas para determinar el valor de la incógnita, esto es lo que se llama resolver la ecuación o despejar la incógnita.

El *método algebraico* se aplicaba a los problemas de razón y proporción cuando se planteaba su resolución considerando las razones como fracciones y la proporción como ecuación. Como dice Vallejo (1841), en este método subyacen las ideas de Vieta, aunque él consideraba que la ecuación ya era la resolución de la proporción:

> *"Ocurre con mucha frecuencia el tener que poner en proporción una ecuación y al contrario; y así según Vieta, se podía decir, que "proporción era lo que constituía la ecuación, y ecuación la resolución de la proporción."* (p. 334).

Al recurrir al auxilio del álgebra comenzó un proceso de cambio de ubicación de los problemas de regla de tres y las que dependen de ella, pasando de la aritmética al álgebra, después del estudio de las ecuaciones.

La incorporación del lenguaje álgebra modificó el aspecto del método de la proporción de dos maneras: Donde antes se usaba el lenguaje de puntos, ahora se usa la igualdad de razones y la incógnita (a : b :: c : . → a/b = c/x); y donde antes se aplicaban las propiedades de las proporciones, ahora se despeja la incógnita.

Así lo hace Vallejo, como también algún otro autor precedente como Juan Justo García (ver *Los Elementos*) en el marco de la corriente dominante en otros países (ver, por ejemplo, los cursos que se impartieron en la Escuela Normal Francesa tras la revolución. Dhombres, 1992). Vallejo, sitúa "la regla de tres y las que dependen de ella" en la segunda parte del álgebra de su *Tratado*, después de los capítulos dedicados a la resolución de las ecuaciones; pero se resiste a prescindir de la vieja teoría *de la razones y proporciones*, que incorpora a su álgebra con este mismo título, entre el capítulo dedicado a la *resolución de ecuaciones* y el dedicado a la *regla de tres y de compañía*.

4. **El método de reducción a la unidad**. Las resistencias a sacar los problemas de regla de tres de la aritmética para llevarlas al álgebra tal vez se debieran a la comprensible "inercias del pasado" y al miedo a la innovación, pero también, a los condicionantes de una realidad escolar en la que la mayoría estudiantes no llegaban a estudiar el álgebra. Era bastante normal terminar los estudios de matemáticas con la aritmética y se consideraba que los problemas de proporcionalidad eran la culminación de los estudios escolares, al poner en juego los números fraccionarios, las operaciones elementales, las proporciones y las regla de tres y sus derivadas, en aplicaciones a situaciones de la vida real.

En esa tesitura, comenzó a imponerse un método para resolver los problemas de regla de tres basado en un estilo de razonamiento, que no depende de las proporciones ni de las ecuaciones, sino del *análisis* de la cuestión y la deducción de las consecuencias que resultan de este análisis, para encontrar la solución sin tener que depender del recuerdo de reglas más o menos artificiosas. Una de las formas de este método analítico será conocida bajo el nombre de *método de reducción a la unidad* (así aparece ya en Cirodde, 1865, pág. 218; Sánchez Vidal, 1866, pág. 321; Solís, 1892, p. 42; Bourdon, 1848, p. 235). Consiste en buscar el valor de la magnitud de la misma especie de la incógnita que corresponde a un valor de la otra magnitud igual a 1.

> *"Hay una clase de problemas cuyos términos son homogéneos dos a dos, problemas que dan lugar a la llamada regla de tres y que en casi todos los tratados de Aritmética se resuelven solamente por medio de proporciones; pero que conviene anticipar el estudio de tales problemas, ya porque ocurren con mucha frecuencia en el cálculo ordinario, ya porque su resolución cabe luego, sin el auxilio de las proporciones, mediante la aplicación de un método tan sencillo y natural como el de reducción a la unidad"* (Solís, 1892, p. 42)
>
> Aparece en Lacroix (1846, p. 280), de la siguiente manera:
>
> *"Supongamos en primer lugar que habiéndose sabido con entera certeza que 13 varas de un cierto lienzo han costado todas 130 reales, se nos pregunte ¿cuántos reales costarán al mismo precio 18 varas del mismo lienzo?*
>
> *Por descontado nos será muy fácil determinar el verdadero precio de cada vara de lienzo, hallando el cuociente 10 reales que resulta de la división del valor total 130 reales por las 13 varas que se suponen compradas primeramente, y ya que sabemos este precio, si lo multiplicamos ahora por 18, que es el número de varas de la segunda compra, nos resultará por producto 180 reales, verdadero valor total que se nos preguntaba.*
>
> *Propongámonos enseguida esta otra cuestión: un correo que camina constantemente con igual velocidad, ha corrido en 3 horas 5 leguas; y se desea saber ¿cuántas leguas andará en 11 horas, continuando su carrera con la misma velocidad?*
>
> *Discurriendo como en el ejemplo anterior, nos es fácil ver que este correo anduvo en cada una de las 3 primeras horas la tercera parte de 5 leguas, o lo que viene a ser lo mismo,* $\frac{5}{3}$ *de legua; y de consiguiente en las segundas 11 horas le corresponde andar once veces* $\frac{5}{3}$ *de legua o* $\frac{55}{3}$ *de legua, equivalentes a 18 leguas y* $\frac{1}{3}$ *de otra.*

5. El método aritmético-algebraico de Vallejo. Vallejo (p. 350 y 351) hace suyo el método de reducción a la unidad para hacer el *análisis* de la cuestión, y con el objetivo puesto en la deducción de la regla:

> *"Toda la dificultad en la resolución de la regla de tres consiste en plantearla; porque después de planteada todo está en hallar el cuarto término de una proporción geométrica. Así, debemos indagar si se puede hallar a priori alguna regla que en la práctica nos pueda conducir a dicho planteo sin equivocar la cuestión, que es lo que suele suceder mayormente cuando la regla de tres es inversa.*
>
> *Supongamos ante todas cosas que la regla de tres es directa, y que se pide el efecto que producirá una cantidad c sujeta a las mismas circunstancias en que la cantidad a ha producido el efecto b; como nosotros no conocemos este efecto que buscamos, le llamaremos x, y tendremos que siendo b el efecto que ha producido la cantidad a, $\frac{b}{a}$ será el efecto que habrá producido cada unidad de las que contenga a; y como c debe ser de la misma especie que a, y está sujeta a las mismas leyes, por cada unidad que contenga producirá $\frac{b}{a}$; luego toda la cantidad c producirá tantas veces el efecto $\frac{b}{a}$ como unidades haya en c; luego el efecto de c estará representado por $\frac{b}{a}\times c$, y por lo mismo será $x = \frac{b}{a}\times c = \frac{cb}{a}$, que quitando el divisor da ax = bc o poniendo en proporción será a:b::c:x ó ac::bx*
>
> *Luego, en general, para plantear una regla de tres directa se deberá poner por primer término la cantidad principal del supuesto, después cualquiera de las otras dos, a saber, la relativa del supuesto o la principal de la pregunta, después la otra y el cuarto término de la proporción será lo que se busca; que para encontrarle no hay mas que multiplicar el segundo por el tercero, y partir esto por el primero".*

Una vez establecida la regla, Vallejo pasa a ejemplificar la práctica (p. 351 y 352), que no es otra cosa que mostrar ejemplos resueltos. Pero ahora ya no vuelve a hacer el análisis de cada problema, uno a uno, sino que como ya tiene una regla deducida se limita a mostrar como se aplica. Aquí es donde se distancia del método que propone Lacroix, para quién el análisis de la cuestión es en sí mismo el método de solución.

> *"Entendido esto pasaremos a resolver algunos ejemplos.*
>
> *1º Se sabe que 300 soldados han abierto en un tiempo cualquiera 1200 varas de trinchera; para abrir 6000 varas en el mismo tiempo, cuantos soldados se necesitarán? Aquí la cantidad principal y su relativa son 1200 varas y 300 soldados, luego plantearemos la cuestión del modo siguiente:*
>
> $1200\ v^s : 6000\ v^s :: 300^s : x : x = \frac{300x6000}{1200} = \frac{300x5x12}{12} = 300x5 = 1500,$
>
> *y saco que se necesitan poner a trabajar 1500 hombres.*

2º Un sujeto desea saber lo que le producirán 86235 rs. que va a imponer en un fondo al 5 por 100. Aquí la cantidad principal del supuesto es 100, porque la cuestión quiere decir que 100 reales le han dado de rédito al año 5 reales; y así la operación se ejecutará como aquí se ve:

100 rs. : 5rs. :: 86235 rs. : 4311,75 rs. = 4311 rs. Y 25,5 mrs.

3º Un sujeto quiere averiguar el capital que le produce 42321 rs.. al tres por 100. Aquí la cantidad principal del supuesto es 3; y así, ejecutando la operación, sacaré que el capital que tiene en el fondo es 1410700 rs.

4º Sé que 1728 varas de Aragon equivalen a 1597 españolas; si quiero averiguar las varas españolas que componen 5000 aragonesas, ejecutaré la operación como aquí se ve: 1728 vs – ar. : 1597 esp. :: 5000 ar. : 4620,949 esp.”.

Obsérvese que Vallejo plantea primero la proporción y lo hace en el viejo lenguaje de puntos, comparando entre sí las cantidades de la misma especie, una de las cuales es la incógnita x; después, plantea la fórmula en la que aparece la incógnita x despejada. Vallejo, por tanto, no opera la incógnita y en este sentido su método no se puede decir que sea verdaderamente algebraico, a pesar de que incorpora, como ocurre hoy en los libros de aritmética, elementos del lenguaje algebraico.

Por otra parte, a pesar de que Vallejo asigna al método de reducción a la unidad el papel de dar fundamento a la regla, y lo usa para deducirla, no confía en su potencialidad como método de resolución, ya que afirma que no es útil para los principiantes.

“Para hacer dicho examen se necesita poseer o tener un espíritu del que no todos están dotados; y por lo mismo nuestra regla, que no exige más que el conocimiento de las cantidades de una misma especie para plantear inmediatamente la proporción, está mas al alcance de los principiantes” (p. 351).

Con el tiempo el método de reducción a la unidad acabara por ocupar un espacio predominante en la enseñanza, pero su aceptación estará condicionada a que se haga uso exclusivo de él.

“*El método que se designa bajo el nombre de reducción a la unidad, es aplicable a todos los problemas que dependen de la teoría de las proporciones; y uno de los mejores autores, M. Reynaud, ha creído deber hacer exclusivamente uso de él en su tratado de aritmética. Pero si este método tiene la ventaja de ser más analítico que el nuestro, tiene, según nosotros, el inconveniente de ser más prolijo en sus detalles. De todos modos, estamos muy lejos de despreciarle; al contrario, lo recomendamos a los profesores, como un excelente ejercicio”* (Bourdon, 1848, p. 235).

“Los problemas que dan lugar a una o más proporciones se pueden resolver sin el auxilio de éstas por el método de reducción a la unidad, que considera por separado y resuelve por multiplicaciones y divisiones sucesivas cada una de las cuestiones simples, contenidas en

una cuestión compleja; pero este método esencialmente analítico, no debe excluir en la práctica los métodos sintéticos, que además de útiles, muchas veces son necesarios. Tampoco puede reemplazarlos en absoluto sin embrollar el cálculo, ni hacer siempre el oficio que en matemáticas desempeñan las proporciones, con las cuales interesa familiarizarse" (Solís, 189?, p. 11).

CONCLUSIONES

En los párrafos anteriores se ha hecho una breve descripción de los ritos de la regla de tres. Se ha puesto énfasis en mostrar su evolución y particularmente en sus métodos de resolución y se ha señalado cuál ha sido la posición de Vallejo. Para completar el panorama faltaría por comentar los nuevos enfoques que ha traído el siglo XX, más en concreto el enfoque de la aplicación y función lineal, la tabla de doble entrada y la representación gráfica. En la actualidad, se ha recuperado el enfoque de la proporción con el auxilio del álgebra, pero de dos nuevas maneras: una es una variante del método de reducción a la unidad que utiliza *la constante de proporcionalidad* o valor unitario:

"¿Cuánto hay que pagar por 100 copias si por 3 se pagan 15 PTA?

Sea x el precio de 100 copias

La relación de proporcionalidad es: $\frac{x}{100} = \frac{15}{3} = 5$

Utilizando la constante de proporcionalidad se tiene: x =100·5 = 500 PTA." (SM.1998, 2º Secundaria. p.105).

Obsérvese el valor 5, del ejemplo, es el valor unitario. En cierto modo, este método parece ser una versión funcional y abstracta del método de *reducción a la unidad*, pero aunque su fundamento es el mismo el análisis de la cuestión no lo es. De hecho en los libros de texto actuales coexisten ambos métodos.

La otra, es una variante del método de la proporción, basada en la tabla de doble entrada, que utiliza el *producto cruzado:*

"Para hacer compota de manzana, por cada 4 kilos de manzanas se necesitan 3 kilos de azúcar. Si tenemos 9 kilos de azúcar, ¿cuántos kilos de manzanas habrá que utilizar?:

Kilos de manzanas	*4*	*x*
Kilos de azúcar	*3*	*9*

La relación de proporcionalidad es: $\frac{4}{3} = \frac{x}{9}$

Utilizando el método de productos cruzados: 4·9=3x." (SM.1998, 2º Secundaria. p.105)

Tampoco aquí el análisis de la cuestión es el mismo porque a diferencia del método primitivo, las razones se establecen entre los valores correspondientes de distinta especie, pero tienen en común que en vez de despejar la incógnita usan las propiedades de la igualdad de razones.

No se puede decir, por tanto, que en la enseñanza haya un método preferido en la actualidad, ni que haya una posición unánimemente aceptada sobre cuál debería ser el enfoque metodológico más conveniente. La datos aquí presentados arrojan luz sobre las posibles alternativas, pero no se decantan por ninguna de ellas. Los lectores interesados en la cuestión están emplazados a buscar la respuesta con ayuda de la necesaria investigación cognitiva complementaria que el análisis histórico epistemológico no puede abordar.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.

Bails, B. (1805). *Principios de Matemática de la Real Academia de San Fernando.* Tomo I. Quarta edición, añadida. Madrid: En la Imprenta de la hija de D. Joaquín Ibarra.

Bourdon, M. (1848). *Aritmética.* (Traducida por Agustín Gómez Santa Maria. Tratado completo de matemáticas. Tomo I. Según la 21 edición francesa. 1ª edición: 1797). Madrid: Imprenta de D. J. M. Alonso.

Boyer, C. (1986). *Historia de la matemática*. Madrid: Alianza U.

Brooks, E. (1880). *The philosophy of arithmetic as developed from the three fundamental processes of synthesis, analysis, and comparison containing also a history of arithmetic*. Lancaster, PA: Normal publishing company

Cirodde, P. L. (1865). *Lecciones de Aritmética.* (Traducido por Francisco Zoleo). Décima tirada. Madrid: Carlos Bailly-Bailliere.

Dhombres, J. (1992). *L'École normale de l'an III. Leçons de Mathematiques. Laplace-Lagrange-Monge*. Paris: Dunod

Gheverghese, G. (1996). La cresta del pavo real. Las matemáticas y sus raíces no europeas. Madrid: Pirámide.

Lacroix, S. F. (1846). *Tratado elemental de Aritmética* compuesto en francés para uso de la Escuela Central de las cuatro naciones por S. F. Lacroix y traducido segunda vez por don Josef Rebollo y Morales, catedrático de los Caballeros Pages de S. M., Tomo I. setima edición. Madrid: En la Imprenta Real.

Maz, A. (2005). *Los números negativos en España en los siglos XVIII y XIX*. Tesis doctoral. Universidad de Granada. Granada.

Pérez de Moya, J. (1998). *Arithmetica práctica y speculativa.* Salamanca. Biblioteca Castro. Madrid: Ediciones de la Fundación José Antonio de Castro. (Trabajo original publicado en 1562).

Recorde, R. (1543). *The ground of Arts* . En F. Yeldham, 1938, *The Teaching of Arithmetic Trough Four Hundred Years*. Ed. George G. Harrap y Co. Ltd. London. 1535-1935).

SM. (1998). *2º de Secundaria*. (Serie de libros de texto “Aritmos”. Máximo Anzola y José Ramón Vizmanos). Madrid: Ediciones SM.

Sánchez Vidal, B. (1866, 2ª Ed.). *Lecciones de Aritmética.* Madrid: Ed. Imprenta de F. Martínez García.

Santa Cruz, Miguel Gerónimo (1794). *Dorado contador. Arithmética. especulativa y práctica*. Madrid (1ª Ed. 1594).

Solís y Miguel, Prudencio (189?). *Problemas*. Valencia: Imprenta de F. Vives Mora (¿?).

Vallejo, Jose M. (1841). *Tratado Elemental de Matemáticas escrito de orden de S. M. para uso de los caballeros seminaristas del seminario de nobles de Madrid y demás casas de educación del Reino. Cuarta edición corregida y considerablemente aumentada*. Tomo I. Parte primera, que contiene la Aritmética y Álgebra. Madrid: Imp Garrayasaza.

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. En R. Lesh y M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematical concepts and processes* (pp. 127-174). N. Y.: Academic Press, pp.

Vergnaud, G. (1988). Multiplicative structures. En J. Hiebert y M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 141-161). Hillsdale, N. J.: Lawrence Erlbaum Associates y NCTM.

Youschkevitch, A. P. (1976). *Les mathématiques arabes (VIII^{e}–XV^{e} siécles)*. Paris: Vrin.