Nuevos modelos espacio-temporales de covarianza y densidad espectral en epidemiología

E. Porcu[1], J. Mateu[2] y F. Saura[2]
[1]Dipartimento di Metodi Quantitativi per le Scienze Economiche ed Aziendali. Università di Milano Bicocca.
[2]Department of Mathematics. Universitat Jaume I

Palabras clave: covarianza espacio-temporal mixta; densidad espectral; modelo Matérn; no separabilidad.

Introducción

En los últimos años hemos asistido a muchos esfuerzos por proponer y construir nuevas familias de estructuras espacio-temporales válidas y no separables. De hecho la necesidad de este tipo de estructuras es prominente en muy variadas disciplinas como medioambiente, epidemiología , geología, medicina o geofísica.

Las primeras aproximaciones en la construcción de covarianzas espacio-temporales (ver, por ejemplo, Kyriakidis y Journel, 1999) se basaban en la extensión natural de los métodos espaciales o temporales al caso y dimensión espacio-temporal. Y así, cuando la información espacial era más densa que la temporal, se consideraban procesos espaciales multivariantes (Egbert y Lettenmaier, 1986). En caso contrario, se consideraban procesos temporales multivariantes (Solow y Gorelik, 1986). Sin embargo, este acercamiento ha sido posteriormente criticado por varias razones. Posteriormente, Guttorp et al. (1992) propusieron estructuras separables de covarianza a partir de un producto tensorial de covarianza espacial y temporal. Sampson y Guttorp (1992) consideraron la variabilidad temporal dentro de la tendencia para modelizar sólo una componente espacial. En el contexto no separable vale la pena citar a Jones y Zhang (1997); Cressie y Huang (1999); Christakos (2000); De˜Cesare et al. (2001); Gneiting (2002); Ma (2003); Stein (2003). La mayoría de estas contribuciones se basan en covarianzas espacio-temporales estacionarias asumiendo isotropía en espacio y tiempo.

Nuestro objetivo en este trabajo es proporcionar diferentes metodologías para la construcción de nuevas familias de modelos espacio-temporales. Siguiendo el trabajo de Stein (2003), y sus críticas a los modelos de Gneiting (2002) propondremos: (a) nuevos modelos de densidades espectrales a partir del producto de otras dos densidades espectrales; (b) generalizaremos la familia de Matérn de forma adecuada para el espacio-tiempo; (c) introduciremos una construcción alternativa basada en el producto tensorial, la suma y una combinación de ambas operaciones de funciones de covarianza.

En este trabajo asumimos al menos estacionariedad intrínseca, para disponer de variogramas que dependen sólo de los intervalos espaciales y temporales. Además, los modelos no estacionarios se suelen construir a partir de los modelos estacionarios.

La extension de las propiedades espaciales al caso espacio-temporal se debe principalmente a Cressie y Huang (1999) quienes desarrollaron la forma del teorema de Bochner para el caso espacio-tiempo. Como consecuencia, tenemos que un variograma espacio-temporal $\gamma(\mathbf{h}, u)$ debe ser una función positiva, par, no decreciente e idénticamente igual a cero cuando es evaluada en el origen, i.e. $\gamma(\mathbf{0}, 0) = 0$. Además, su valor límite cuando $\mathbf{h}$ y u tienden a infinito define la varianza del proceso espacio-temporal.

Varias propuestas metodológicas

Modelos para la densidad espectral de un proceso espacio-temporal

Nuestra propuesta consiste en definir una nueva densidad espectral como producto de otras dos de la siguiente forma. Sean $f_1, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos funciones de densidad espectral, no necesariamente distintas. Entonces definimos f como el producto tensorial de f_1 y f_2. Debido a las propiedades de f_1 y f_2 (continuidad, simetría, no negatividad e integrabilidad) y al comportamiento de las transformaciones lineales y de las funciones norma, tenemos que f es una densidad espectral y, en virtud del teorema de Bochner, existe una cierta función de covarianza cuya transformada de Fourier es f.

Una de las principales características de este modelo es que incluye ambos casos en el dominio espectral, el separable y no separable, definiendo una clase muy general de modelos.

Una propiedad que debe cumplir este modelo es la diferenciabilidad de la función de covarianza. Esto puede ser estudiado por medio de ciertas propiedades de su densidad espectral asociada, cuando existe. Este aspecto es estudiado por Stein (2003), y nosotros adaptamos su planteamiento al comportamiento de f. En particular,, las proposiciones 4 y 5 de Stein (2003) se pueden adaptar a nuestro contexto.

Generalización del modelo de Matérn para el caso espacio-temporal

En una segunda propuesta presentamos una generalización de la expresión de la función de covarianza de Matérn. La idea de extender el modelo de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}^2$ aunque intuitiva no es correcta, ya que no tiene sentido tratar las coordenadas espacial y temporal como las componentes de un vector tres-dimensional pues juegan papeles diferentes en la definición del campo aleatorio. Por tanto, proponemos generalizar el modelo Matérn's por medio de una función paramétrica f_θ.

Hay que hacer notar que debemos elegir f_θ para que C sea una función de covarianza. Sin embargo, estas condiciones no son muy restrictivas ya que sólo necesitamos que f sea positiva. Este modelo generaliza los modelos uni y bi-dimensionales conteniendo multitud de modelos como casos particulares. Al mismo tiempo, sabemos que K es $2n$ veces diferenciable para $n < \nu$ (Stein, 1999), y por otra parte, haciendo uso de la regla de la cadena, sólo necesitamos disponer del mismo orden de diferenciabilidad de las f para conseguir que C sea n veces diferenciable.

Formas mixtas (suma y producto) de familias de covarianzas espacio-temporales

Proponemos ahora una nueva idea para construir familias de covarianzas espacio-temporales. En particular, en la nueva familia queremos eliminar algunos rasgos "no deseables"de otros modelos como sugiere Stein (2003) en relación a la propuesta de Gneiting (2002). Específicamente, Stein (2003) observa que modelos del tipo $\exp(-|\mathbf{x}| - |t|)$, obtenidos a partir de un producto tensorial de dos funciones de covarianza exponencial en el espacio y tiempo, no son diferenciables en el origen y carecen de diferenciabilidad a lo largo de ciertos ejes lo que implica la existencia de discontinuidades. Además, Stein (2003) manifiesta la necesidad de funciones de covarianza espacio-temporal suficientemente suaves lejos del origen. Para ello, proponemos la versión simétrica de Gneiting (2002) y con este punto de partida, proporcionamos nuevos modelos a partir del producto tensorial, de la suma o de la suma-producto (De˜Cesare et al., 2001). De forma particular, mostramos que siempre que elijamos las dos funciones completamente monótonas proporcionales a la función de Matérn-Whittle, podemos obtener algunos casos particulares de funciones de covarianza espacio-temporal que no dependen de estructuras exponenciales negativas, evitando problemas de diferenciabilidad en el origen.

Introducimos ahora algunos resultados que fundamentan las nuevas familias propuestas en este trabajo.

Resultado 1. (*Versión simétrica de Gneiting (2002)*. Sea $\varphi(t)$ una función completamente monótona ($t \geq 0$) y sea $\psi(t)$ una función positiva con derivada completamente monótona. Entonces la versión simétrica de Gneiting es una función de covarianza espacio-temporal.

Resultado 2. Sean $C_1(\mathbf{h}, u), \quad C_2(\mathbf{h}, u), \quad (\mathbf{h}, u) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ funciones de covarianza espacio-temporal válidas y sea $b > 0$. Entonces, tanto $C_1(\mathbf{h}, u) + C_2(\mathbf{h}, u)$ como $bC_1(\mathbf{h}, u)$ son funciones de covarianza espacio-temporal válidas en $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$. Este resultado se sigue de la propiedad de convexidad de la familia de covarianzas (De˜Iaco et al., 2001, 2002).

Resultado 3. Sean $C_1(\mathbf{h}, u), \quad C_2(\mathbf{h}, u), \quad (\mathbf{h}, u) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ funciones de covarianza espacio-temporal válidas. Entonces, su producto tensorial $C_1(\mathbf{h}, u) \cdot C_2(\mathbf{h}, u)$ es también una función de covarianza espacio-temporal válida.

Resultado 4. (*Formas Mixtas*). Sea $C_1(\mathbf{h}, u), \quad C_2(\mathbf{h}, u), \quad (\mathbf{h}, u) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ funciones de covarianza espacio-temporal válidas. Sean $C_3(\mathbf{h}), C_4(u)$ funciones de covarianza espacial y temporal válidas, respectivamente. Entonces, ciertas combinaciones de sumas y productos de estas funciones proporcionan funciones de covarianza espacio-temporal válidas.

Conclusiones y discusión

Algunos de los modelos propuestos en este trabajo son claramente diferentes a los seis ejemplos propuestos en Cressie y Huang (1999) donde siempre se proponen formas exponenciales para obtener estructuras no separables. Estas funciones de covarianza exponenciales han sido bastante criticadas por Stein (1999) argumentando que llevan a predicciones sesgadas. Nuestros modelos no adolecen de este inconveniente.

Cada procedimiento aquí mostrado nos lleva a una cantidad considerable de ejemplos y casos particulares que cubren un amplio abanico de situaciones que nos podemos encontrar en la práctica de la modelización en problemas epidemiológicos. En este trabajo nos restringimos a la presentación teórica para que sirva de base a futuras aplicaciones de interés.

Referencias

Christakos, G. (2000). *Modern Spatiotemporal Geostatistics*. New York: Oxford University Press.

Cressie, N. y Huang, H. (1999). Classes of nonseparable, spatiotemporal stationary covariance functions. *Journal of the American Statistical Association* 94:1330–1340.

De Cesare, L., Myers, D. y Posa, D. (2001). Product-sum covariance for space-time modeling: an environmental application. *Environmetrics* 12:11–23.

De Iaco, S., Myers, D. y Posa, D. (2001). Space-time analysis using a general product-sum model. *Statistics and Probability Letters* 52:21–28.

De Iaco, S., Myers, D. y Posa, D. (2002). Nonseparable space-time covariance models: some parametric families. *Mathematical Geology* 34:23–41.

Egbert, G. y Lettenmaier, D. (1986). Stochastic modeling of the space-time structure of atmospheric chemical deposition. *Water Resources Research* 22:165–179.

Gneiting, T. (2002). Stationary covariance functions for space-time data. *Journal of the American Statistical Association* 97:590–600.

Guttorp, P., Sampson, P. D. y Newman, K. (1992). Non-parametric estimation of spatial covariance with application to monitoring network evaluation. A. Walden y P. Guttorp (eds.), *Statistics in the Environmental and Earth Sciences*, 39–51. Halstead Press.

Jones, R. H. y Zhang, Y. (1997). Models for continuous stationary space-time processes. T. G. Gregoire, D. R. Brillinger, P. J. Diggle, E. Russek-Cohen, W. G. Warren y R. D. Wolfinger (eds.), *Modelling Longitudinal and Spatially Correlated Data*, 289–298. New York: Springer Verlag.

Kiriakidis, P. C. y Journel, A. G. (1999). Geostatistical space-time models: a review. *Mathematical Geology* 31(6):651–684.

Ma, C. (2003). Families of spatio-temporal stationary covariance models. *Journal of Statistical Planning and Inference*. In press.

Sampson, P. D. y Guttorp, P. (1992). Nonparametric estimation of nonstationary spatial covariance structures. *Journal of the American Statistical Association* 87:108–119.

Solow, A. R. y Gorelik, S. M. (1986). Estimating missing streamflow values by cokriging. *Mathematical Geology* 18:785–809.

Stein, M. (1999). *Interpolation of Spatial Data. Some Theory of Kriging*. Springer-Verlag, New York.

Stein, M. (2003). Space time covariance functions. T. Rep., University of Chicago.