

Gutiérrez, A. (2004): Investigación en didáctica de la geometría: La medida de áreas, en Luengo, R. (ed.), *Líneas de investigación en educación matemática vol. 1* (colección “Investigación en educación matemática” nº 1) (pp. 83-108). Badajoz: Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas.

---

## **Investigación en didáctica de la geometría: La medida de áreas**

Angel Gutiérrez

Dpto. de Didáctica de la Matemática

Universidad de Valencia

### **1. Introducción.**

Tanto en los currículos oficiales como en los índices de los libros de texto de Primaria y Secundaria, la medida de magnitudes es un tema que aparece unas veces como parte de la sección de Geometría y otras veces separado de ésta. Un motivo para separarlo de la Geometría es que el enfoque propuesto potencie el componente numérico de cálculo mediante conteo o aplicación de fórmulas memorizadas. Por el contrario, al estudio de la longitud, la superficie y el volumen se le debe dar un tratamiento geométrico que forme la base para el aprendizaje comprensivo y dé sentido al inevitable componente de cálculo numérico, en particular a las fórmulas, su estructura y uso.

En este texto ofrezco, en primer lugar, una revisión de varias investigaciones didácticas sobre la medida de áreas de superficies planas. Después, presento en detalle una investigación (Corberán, 1996), en la cual se elaboró un test diagnóstico para identificar los conocimientos y errores de los estudiantes de los diferentes niveles educativos y se diseñó una unidad de enseñanza para la ESO con más énfasis en las carencias detectadas en los estudiantes.

### **2. Revisión de investigaciones sobre medida de áreas.**

Son numerosas las investigaciones realizadas a lo largo de los años que han analizado los procesos de comprensión y aprendizaje de los conceptos relacionados con las magnitudes geométricas. Chamorro, Belmonte (1988) ofrece información sobre investigaciones destacadas realizadas hasta entonces relacionadas con la medida de longitud y en Olmo, Moreno, Gil (1989) sobre las relacionadas con el área y el volumen. Una recopilación sobre el área más completa, y que incluye trabajo más recientes, puede encontrarse en Corberán (1996). Mi objetivo en esta sección

Gutiérrez, A. (2004): Investigación en didáctica de la geometría: La medida de áreas, en Luengo, R. (ed.), *Líneas de investigación en educación matemática vol. 1* (colección “Investigación en educación matemática” nº 1) (pp. 83-108). Badajoz: Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas.

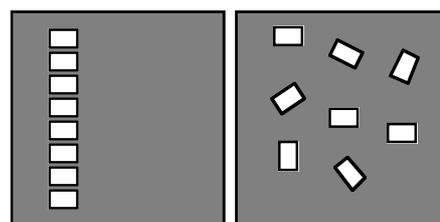
---

no es realizar una revisión exhaustiva de este campo de investigación, sino centrarme en las que tienen una relación más directa con el estudio que presento en las secciones siguientes.

La primera investigación relevante sobre el aprendizaje de la medida de superficies está formada por los trabajos de J. Piaget. Es necesario conocer y comprender la obra de Piaget ya que resulta difícil sustraerse a su influencia cuando se investiga sobre medida de magnitudes geométricas, como lo prueba el hecho de que buena parte de las investigaciones posteriores en este campo se basan, por lo menos parcialmente, en sus propuestas. Piaget se centró en el estudio de la conservación y la medición de la longitud, superficie y volumen.

Los tests de conservación pretenden evaluar la comprensión por los niños de la invarianza de las magnitudes cuando se somete a los objetos medidos a determinadas transformaciones. En el caso de la conservación del área, la transformación más importante es la de partición y recomposición de la superficie. Uno de los tests diseñados por Piaget se basa en la utilización de piezas cuadradas iguales que forman dos configuraciones de 12 piezas cada una. En principio las configuraciones son congruentes (rectángulos de las mismas dimensiones). Cuando el niño acepta que ambos rectángulos tienen la misma área, se cambia en uno de ellos la posición de varias piezas, para formar dos configuraciones diferentes. Después, se pregunta al niño si las configuraciones siguen teniendo o no la misma área.

Otro conocido test consiste en presentar al niño dos rectángulos iguales de cartulina verde, que son prados donde pastan vacas. Cuando el niño acepta que las vacas tienen la misma cantidad de hierba para comer en ambos prados, se ponen en los prados casas (pequeños rectángulos iguales), de una en una, distribuidas como se ve en la figura. A continuación, se pregunta al niño si las vacas tienen o no la misma cantidad de hierba en ambos prados.



Como conclusión principal de la experimentación con estos tests, Piaget identifica tres etapas en la adquisición del concepto de conservación del área:

Etapa I: De no conservación del área: Las comparaciones cambian según la posición o la forma

---

Gutiérrez, A. (2004): Investigación en didáctica de la geometría: La medida de áreas, en Luengo, R. (ed.), *Líneas de investigación en educación matemática vol. 1* (colección "Investigación en educación matemática" nº 1) (pp. 83-108). Badajoz: Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas.

---

y se basan en características perceptivas. Los niños no comprenden la actividad propuesta.

Etapa II: Respuestas intermedias, reflejando conservación o no según los casos, o con cambios de respuestas al fijarse el niño en uno u otro elemento de las superficies. En ocasiones esta etapa se divide en dos subetapas, diferenciadas por la (in)capacidad de los niños para admitir la igualdad inicial de las áreas o por la menor o mayor perfección de sus respuestas.

Etapa III: Respuestas correctas que muestran que los niños reconocen y utilizan correctamente la conservación del área.

Los tests de medición pretenden evaluar la capacidad de los niños para realizar mediciones de áreas de superficies en distintas situaciones, algunas de las cuales necesitan aplicar la transitividad. Se basan en varios tipos de actividades: 1) Medición de una superficie por cubrimiento con tantas unidades congruentes como sea necesario. 2) Medición de una superficie por cubrimiento mediante iteración de una unidad. En ambos casos, se ofrecen a los niños superficies con varias formas diferentes así como diversas unidades de medida (cuadrado, rectángulo equivalente a 2 cuadrados y triángulo equivalente a medio cuadrado). 3) Medición de una superficie usando procedimientos aritméticos.

También para los tests de medición Piaget identifica tres etapas de características similares a las anteriores (no adquisición, adquisición parcial y adquisición completa de la capacidad de medición). Algunos autores identifican para la medida de superficie y de volumen una cuarta etapa, caracterizada por el uso de las unidades del sistema métrico y las relaciones multiplicativas entre diferentes unidades.

Piaget no estaba interesado en la faceta escolar de la adquisición de los diferentes conceptos matemáticos que analizó, por lo que nunca se preocupó por observar la influencia de la forma de enseñanza o de los contenidos enseñados en el desarrollo de los conceptos matemáticos. Sin embargo, son numerosos los estudios posteriores que sí han abordado la problemática escolar de la enseñanza y aprendizaje de la medida de áreas.

Uno de estos estudios es el "Concepts in Secondary Mathematics and Science Project" (CSMS) (Hart, 1981). Su objetivo inicial era obtener información sobre el conocimiento que los

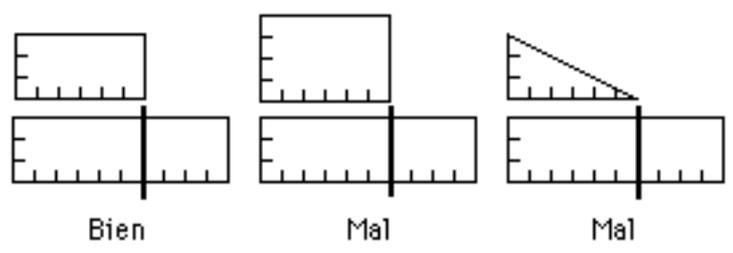
Gutiérrez, A. (2004): Investigación en didáctica de la geometría: La medida de áreas, en Luengo, R. (ed.), *Líneas de investigación en educación matemática vol. 1* (colección “Investigación en educación matemática” nº 1) (pp. 83-108). Badajoz: Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas.

---

estudiantes británicos de secundaria tenían de los principales conceptos de matemáticas y ciencias. El análisis de los datos obtenidos debía dar lugar a una jerarquía o secuencia de niveles de tipo piagetiano de comprensión de cada concepto. Por este motivo, los investigadores tomaron los trabajos de Piaget como base teórica y fuente de ítems para sus cuestionarios. Para la medida de superficies, diseñaron ítems sobre conservación del área por partición y recomposición, medida de superficies por cubrimiento con unidades cuadradas y aplicación de las fórmulas de triángulos y rectángulos. Además de cubrir el objetivo inicial mencionado, los datos recogidos en la fase experimental de esta investigación dieron lugar a una completa descripción de estrategias de resolución, concepciones y errores frecuentes de los estudiantes que ha supuesto una importante base para el trabajo de los investigadores posteriores. En Hart (1981) hay una detallada descripción del test sobre medida de magnitudes geométricas y los resultados obtenidos.

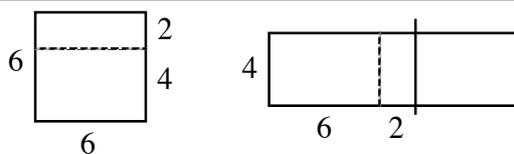
Hirstein, Lamb, Osborne (1978), en un estudio más específico que el británico, analizaron el uso de la unidad de superficie mediante la comparación de figuras triangulares, cuadrangulares y rectangulares con cuadrícula interior, con marcas en los lados o con fondo blanco. Los datos obtenidos indican que las mediciones más fáciles son las de figuras dibujadas sobre una cuadrícula y las más difíciles son las de figuras con marcas en los lados. Un problema típico de esta investigación consiste en dar una figura a los estudiantes y pedirles que obtengan un rectángulo de altura prefijada con la misma área que dicha figura. Las estrategias erróneas más frecuentes son:

- 1) Comparación basada en igualar las bases cuando las alturas no coinciden.

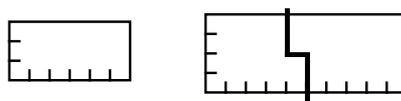


- 2) Uso de métodos primitivos de compensación (más frecuentes en las figuras con marcas o sobre fondo blanco).

Gutiérrez, A. (2004): Investigación en didáctica de la geometría: La medida de áreas, en Luengo, R. (ed.), *Líneas de investigación en educación matemática vol. 1* (colección “Investigación en educación matemática” nº 1) (pp. 83-108). Badajoz: Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas.



3) Uso de estrategias erróneas de conteo. Los niños que interpretan la unidad como un todo indeformable e indivisible tienen dificultades cuando la figura que tienen que construir no tiene una base de longitud entera.



4) Medición del perímetro. En las figuras con cuadrícula o con marcas, se cuenta el número de unidades de los lados de la figura dada y después se cuenta el mismo número de unidades para construir el rectángulo.

Desde mediados de los 70, diversos investigadores franceses han realizado estudios tendentes a caracterizar algunos aspectos de la comprensión y el aprendizaje de las magnitudes geométricas, entre ellas el área. Destacan los estudios de Vergnaud, Rogalski, Douady y Perrin-Glorian. Vergnaud dirigió investigaciones para estudiar las dificultades de los estudiantes relacionadas con la estructura multiplicativa del área y el volumen, cuyos resultados están recogidos en diversas publicaciones como Ricco, Vergnaud, Rouchier (1983) y Vergnaud y otros (1978, 1983).

Por su parte, Rogalski investigó la problemática de la adquisición de la multidimensionalidad por estudiantes de los últimos cursos de Primaria y primeros de Secundaria. Una parte de su diseño experimental (Rogalski, 1982) se centró en pedir a los estudiantes medir superficies mediante pavimentado con unidades de diversas formas y tamaños. Una de las principales conclusiones de Rogalski es que los estudiantes adquieren pronto el modelo lineal, propio de las longitudes, pero tardan mucho en entender que este modelo no es adecuado para las áreas y volúmenes y en asimilar el modelo multilíneo. En los experimentos de Rogalski se observa cómo la forma de la unidad de área empleada y la posibilidad de pavimentar completamente o no la superficie dada influyen claramente en que los estudiantes utilicen para resolver los problemas el modelo lineal o el bilíneo.

He dejado para el final de esta sección la descripción de los trabajos de tres investigadores que, como se verá en las secciones siguientes, han resultado fundamentales para la definición del

Gutiérrez, A. (2004): Investigación en didáctica de la geometría: La medida de áreas, en Luengo, R. (ed.), *Líneas de investigación en educación matemática vol. 1* (colección "Investigación en educación matemática" nº 1) (pp. 83-108). Badajoz: Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas.

---

marco teórico y el desarrollo de nuestro estudio. Los tres abordan la problemática del aprendizaje del área basándose en enfoques teóricos, si bien se trata de teorías diferentes.

Freudenthal (1983) propone la fenomenología didáctica como contexto en el que iniciar el aprendizaje de diversos conceptos matemáticos, entre ellos el de área. Su estudio del área es de carácter teórico, analizando este concepto desde la perspectiva de la utilización práctica del área y desde la perspectiva matemática, en particular de la teoría de la medida. Con ello, Freudenthal pone de relieve la enorme distancia existente entre el concepto matemático puro de área y las concepciones (objetos mentales en términos de Freudenthal) de los individuos, en particular de los estudiantes no universitarios.

Para Freudenthal, la formación del objeto mental área es previa a la adquisición del concepto matemático área, y necesaria para dicha adquisición, si bien en el contexto escolar no es necesario llegar a comprender el concepto matemático (tal vez sea imposible), por lo que, para ayudar a los estudiantes a crear este objeto mental correctamente, los profesores deben usar procedimientos experimentales. Freudenthal sugiere el enfoque de la fenomenología didáctica, es decir presentar a los estudiantes el objeto mental área mediante fenómenos organizados por ella y enseñarles, al mismo tiempo, las manipulaciones necesarias para poder organizar dichos fenómenos.

Son muy numerosos los tipos de fenómenos relacionados con el área. Freudenthal los clasifica en los siguientes enfoques:

- De reparto justo: Aprovechando las regularidades, estimando o midiendo.
- De reproducir y comparar (con otra forma): Por inclusión, por transformaciones de deshacer y recomponer, por estimación, por medición o por medio de transformaciones (congruencias, afinidades, cizallamientos).
- De medir: Cubriendo con una unidad y con subunidades, por aproximaciones desde el interior y exterior, por conversión de transformaciones de deshacer y recomponer, aplicando relaciones geométricas generales, por medio de fórmulas, por medio de principios (como el de Cavalieri) o por medio de transformaciones (congruencias, afinidades, cizallamientos).

Freudenthal señala que no está claro que todos estos enfoques fenomenológicos induzcan el

Gutiérrez, A. (2004): Investigación en didáctica de la geometría: La medida de áreas, en Luengo, R. (ed.), *Líneas de investigación en educación matemática vol. 1* (colección "Investigación en educación matemática" nº 1) (pp. 83-108). Badajoz: Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas.

---

mismo objeto mental área, por lo que desde el punto de vista didáctico, lo razonable es presentar a los estudiantes varios de ellos, aquéllos que puedan abordar con éxito.

Durante varios años, R. Douady y M.J. Perrin-Glorian desarrollaron investigaciones sobre el aprendizaje de la medida de áreas por estudiantes de Primaria y Secundaria (Douady, Perrin-Glorian, 1983, 1984, 1985, 1986, 1989). Los principales objetivos de estas investigaciones son caracterizar los procesos de aprendizaje del concepto de área y desarrollar secuencias de enseñanza. El colofón de esta línea de investigación es la tesis doctoral Perrin-Glorian (1992). Su metodología es típica de la Escuela Francesa, centrada en la construcción de una ingeniería didáctica que incluye como parte central la realización de experimentos de enseñanza y la evaluación de sus resultados mediante entrevistas clínicas y pruebas escritas. Para ello, analizó diversos componentes del concepto de área y de diferentes conceptos estrechamente relacionados con éste.

Al revisar libros de texto y programas oficiales de distintas épocas, Perrin-Glorian identifica diferentes significados del término "área", siendo el más interesante para ella el que considera el área de una superficie como una magnitud medible de la superficie. Esta caracterización implica, por una parte, la diferenciación entre una superficie (objeto) y su área (magnitud) y, por otra, la diferenciación entre un área (magnitud) y el resultado de medirla (generalmente numérico).

Las hipótesis didácticas en las que se basa la ingeniería didáctica diseñada por Perrin-Glorian son: i) La presentación a los estudiantes del área como magnitud les permitirá identificar los marcos de actividad geométrico y numérico así como establecer las relaciones entre ambos. ii) La presentación a los estudiantes de las magnitudes geométricas (longitud, área y volumen) de forma que se identifiquen las magnitudes con los números de sus mediciones favorece la confusión entre las diferentes magnitudes (problema de la multilinealidad), por lo que hay que evitarla.

Basándose en estas hipótesis, los objetivos de la secuencia de enseñanza que se propone diseñar son: i) Que el área aparezca como magnitud autónoma, independiente de la superficie y del número resultante de la medida, ii) que se desarrollen métodos de medición del área de superficies pavimentables y no pavimentables y iii) que se hagan explícitas las relaciones y diferencias entre áreas y perímetros (longitudes) de superficies.

Gutiérrez, A. (2004): Investigación en didáctica de la geometría: La medida de áreas, en Luengo, R. (ed.), *Líneas de investigación en educación matemática vol. 1* (colección “Investigación en educación matemática” nº 1) (pp. 83-108). Badajoz: Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas.

---

Por último, la secuencia de enseñanza está formada por tres tipos de actividades: i) Actividades geométricas (comparación de superficies; distinción entre área y longitud sin usar medidas). ii) Actividades geométrico-numéricas (cubrimiento con diversas unidades; variación del área por transformaciones de la superficie; cambio de unidad). iii) Actividades numéricas (el  $\text{cm}^2$ ; cuadrículado de superficies; área del rectángulo y otros polígonos; variación de la medida por transformaciones geométricas).

El punto de vista adoptado por Héraud (1989) es radicalmente diferente de los dos anteriores. Basándose en el modelo constructivista de comprensión de Bergeron y Herscovics, elabora una propuesta para describir el proceso de construcción del concepto de área de un rectángulo por los estudiantes de Primaria, según la cual dicho proceso consta de dos fases, cada una de las cuales está dividida en varias etapas:

1ª fase) Comprensión del concepto físico preliminar de superficie. Consta de las etapas:

- Comprensión intuitiva, en la cual se forma la noción de superficie como extensión (visual).
- Comprensión procedimental, en la cual se construyen los procedimientos de cálculo, como los de superposición o recorte y redistribución.
- Abstracción lógico-física, en la cual se llega a la comprensión de la invarianza ante transformaciones como las isometrías, división, o recorte y redistribución.

2ª fase) Comprensión del concepto matemático de área de una superficie. Consta de las etapas:

- Comprensión procedimental, en la cual se aprende a utilizar algunos procedimientos para el cálculo de áreas en los que intervienen elección de una unidad adecuada, iteración u obtención de fórmulas básicas.
- Abstracción lógico-matemática, en la cual se comprende la (in)varianza del área de una superficie por determinados cambios, como invarianza por ciertas transformaciones de la superficie, la relación con la unidad de área empleada o la relación inversa entre valor del área y tamaño de la unidad.
- Formalización, en la cual se establece la relación entre el área y las magnitudes lineales de la superficie usadas en las fórmulas (sus dimensiones).

Gutiérrez, A. (2004): Investigación en didáctica de la geometría: La medida de áreas, en Luengo, R. (ed.), *Líneas de investigación en educación matemática vol. 1* (colección "Investigación en educación matemática" nº 1) (pp. 83-108). Badajoz: Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas.

---

Aunque Héraud se limita a trabajar con estudiantes de Primaria y la enseñanza de la fórmula del área del rectángulo, las fases y etapas anteriores son aplicables de manera más amplia.

### **3. Comprensión del concepto de área de superficies: Descripción de una investigación.**

El resto de este texto lo dedico a describir con detalle una investigación que se plasmó en la tesis doctoral que Rosa M. Corberán defendió, bajo mi dirección, en 1996 en la Universidad de Valencia (Corberán, 1996). El interés por este tema surge de la observación año tras año de las dificultades que tienen los estudiantes de secundaria cuando tratan de resolver problemas en los que, directa o indirectamente, está presente el concepto de área de una superficie. Inmediatamente se observan diversas concepciones inadecuadas, procedimientos erróneos de cálculo, etc.

En los siguientes párrafos ofrezco un resumen secuencial y ordenado de dicha tesis doctoral. En la sección 4 describo el marco teórico de la investigación, en el cual se basan y justifican la estructura, contenidos y análisis de datos de la fase experimental de la investigación. Este marco teórico surge de la necesidad de realizar un análisis didáctico completo y detallado del concepto de área de superficies planas y se concreta en la integración de resultados procedentes principalmente de tres investigadores, H. Freudenthal, M.J. Perrin-Glorian y B. Héraud, que, como hemos visto, adoptan posturas diferentes pero complementarias ante el mismo problema. Una importante aportación de la investigación que describo es dicha integración que, junto a los aspectos puramente matemáticos del concepto de área, se plasmaron en un complejo mapa conceptual.

En la sección 5 presento la primera parte de la investigación, consistente en un estudio diagnóstico para describir los conocimientos de los estudiantes de los diferentes niveles educativos, desde Primaria hasta la Universidad, sobre la red de conceptos relacionados con el área de superficies planas. Este se concreta en un test a lo largo del cual los estudiantes deben poner en juego los diferentes conceptos integrantes de dicha red.

Por último, en la sección 6 describo la segunda parte de la investigación, consistente en el diseño y experimentación de una unidad de enseñanza para la ESO. El diseño de la unidad se basó en los resultados del estudio diagnóstico, y hace más énfasis en aquellos componentes del concepto

Gutiérrez, A. (2004): Investigación en didáctica de la geometría: La medida de áreas, en Luengo, R. (ed.), *Líneas de investigación en educación matemática vol. 1* (colección "Investigación en educación matemática" nº 1) (pp. 83-108). Badajoz: Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas.

---

de área que aparecen como más difíciles o peor comprendidos por los estudiantes.

Como casi siempre, la redacción final de los documentos no recoge el desarrollo temporal de la investigación, en el que hay una interacción constante entre la caracterización del marco teórico, la determinación de las herramientas metodológicas y la realización de las experimentaciones piloto o definitivas.

#### **4. Marcos teórico.**

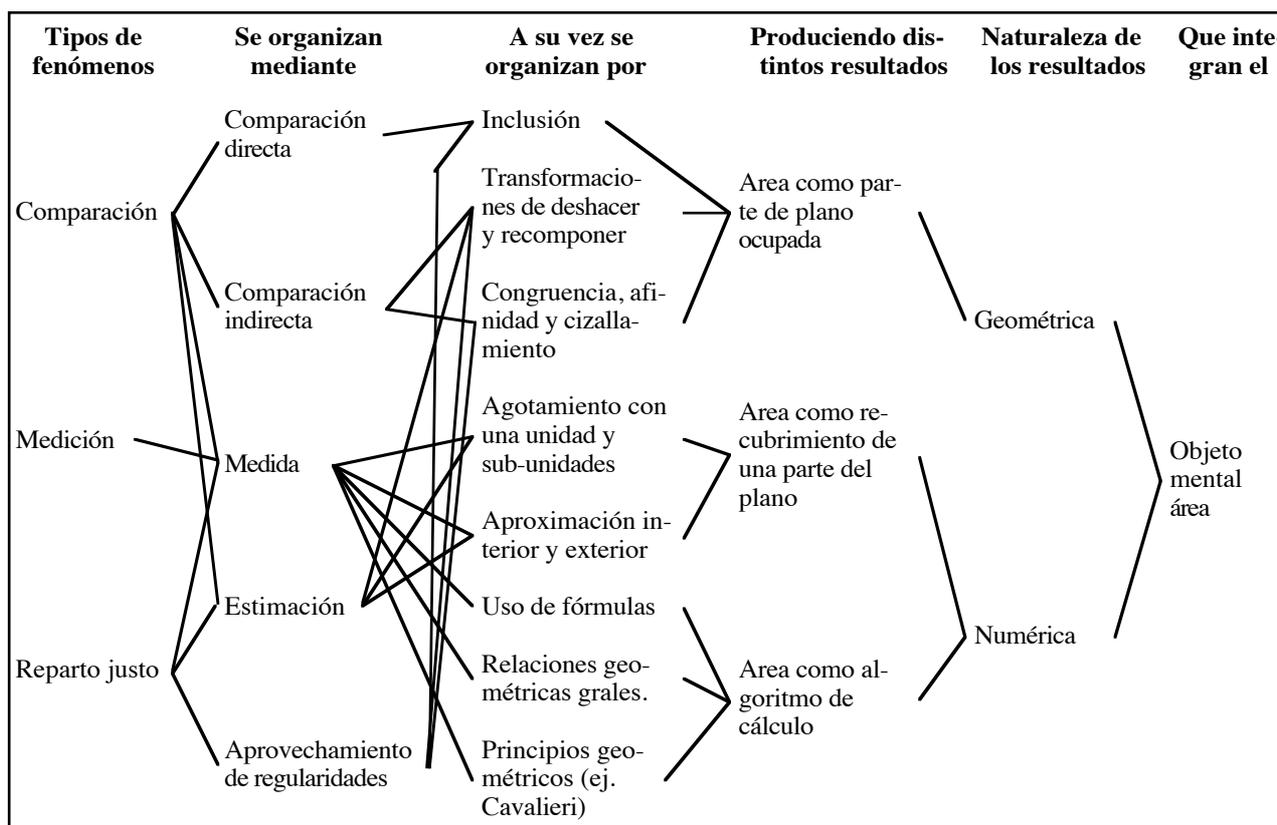
Llegar a comprender en profundidad el concepto de área es complejo y necesita varios años de estudio, ya que junto a dicho concepto es necesario comprender de manera integrada varios conceptos relacionados, la mayoría de los cuales, a su vez, están formados por diversos aspectos destacados. Esta complejidad se refleja en las investigaciones didácticas, ya que todas ellas se centran en determinados aspectos del concepto de área o los conceptos relacionados con éste e ignoran otros aspectos igualmente importantes. Por ello, en un intento de lograr una visión detallada y global del concepto de área de superficies planas, se procedió a identificar investigadores que aportaran visiones destacadas y diferenciadas, los principales de los cuales son los que he citado en la sección 2. De entre ellos, se decidió trabajar con las publicaciones de H. Freudenthal, M.J. Perrin-Glorian y B. Héraud para integrarlas y formar el marco teórico de esta investigación. En esta sección hago diversas consideraciones respecto de las publicaciones de estos tres autores y detallo la aportación de cada uno al marco teórico de nuestra investigación. Finalmente presento de forma esquemática y resumida dicho marco teórico.

Con frecuencia resulta difícil interpretar los textos de Freudenthal, estar seguros de que lo que el lector cree que dice Freudenthal es lo que él realmente quiso decir. En el caso de la fenomenología del área de una superficie plana (Freudenthal, 1983), esta dificultad se debe, en parte, a que Freudenthal no completó su análisis teórico con un ejemplo de aplicación a la enseñanza, sino que se limitó a hacer algunas sugerencias. Ello supuso, para concretar el marco teórico de esta investigación, la necesidad de interpretar de una forma creativa las ideas de Freudenthal y de prolongarlas mostrando una posible conexión con el aprendizaje del concepto de

Gutiérrez, A. (2004): Investigación en didáctica de la geometría: La medida de áreas, en Luengo, R. (ed.), *Líneas de investigación en educación matemática vol. 1* (colección “Investigación en educación matemática” n° 1) (pp. 83-108). Badajoz: Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas.

área en el contexto escolar.

Por otra parte, hemos visto que Freudenthal sugiere que al trabajar con diferentes tipos de fenómenos se puede llegar a distintos objetos mentales (concepciones) de área, lo cual ocupa también una posición central en la definición del marco teórico. El siguiente esquema resume la interpretación de las propuestas de Freudenthal hecha en la investigación.



Las investigaciones de Perrin-Glorian ofrecen un enfoque de la enseñanza del área muy detallado, completo y claro. Resulta particularmente interesante su propuesta de considerar los conceptos de superficie, área de una superficie y medida de un área, para organizar la enseñanza del área de manera que ésta aparezca como una magnitud independiente de la forma de la superficie y del número resultante de su medición mediante una unidad determinada. La incorporación de sus ideas en este marco teórico supone la posibilidad de analizar de manera adecuada algunos de los principales errores de los estudiantes, concretamente los que tienen que ver con las falsas relaciones que éstos suelen establecer entre el área de una superficie y su forma, su perímetro o la unidad de medida empleada. Análogamente, las investigaciones de Perrin-Glorian dan pautas para organizar

Gutiérrez, A. (2004): Investigación en didáctica de la geometría: La medida de áreas, en Luengo, R. (ed.), *Líneas de investigación en educación matemática vol. 1* (colección "Investigación en educación matemática" nº 1) (pp. 83-108). Badajoz: Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas.

---

actividades dirigidas a la enseñanza comprensiva de estas características del área y a eliminar las falsas concepciones y creencias de numerosos estudiantes.

Las investigaciones de Héraud son muy limitadas y, consideradas de forma aislada, pobres, pues están centradas en la enseñanza de la fórmula del área del rectángulo. No obstante, no resulta complicado considerar su único objetivo de enseñanza del área (el aprendizaje de la fórmula de cálculo) como parte de un objetivo de enseñanza más amplio, y es posible extrapolar sus propuestas a la enseñanza del área de otros polígonos. Héraud también proporciona argumentos para justificar la importancia de distinguir entre una superficie y su área, ya que en sus textos surgen diversos significados para los términos superficie y área:

- La superficie como extensión.
- La superficie como porción de espacio ocupado.
- La medida del área como expresión de una relación entre un todo y una parte suya.
- La medida del área como el número obtenido a partir de una fórmula que relaciona las medidas correspondientes a magnitudes de diferente naturaleza.

Aunque la fórmula del área del rectángulo se considera generalmente como una de las más fáciles de aprender y comprender, Héraud aporta reflexiones sobre la complejidad que esconden las fórmulas, incluso las aparentemente simples como la del rectángulo, derivada de la manipulación simultánea de magnitudes de distinta dimensión.

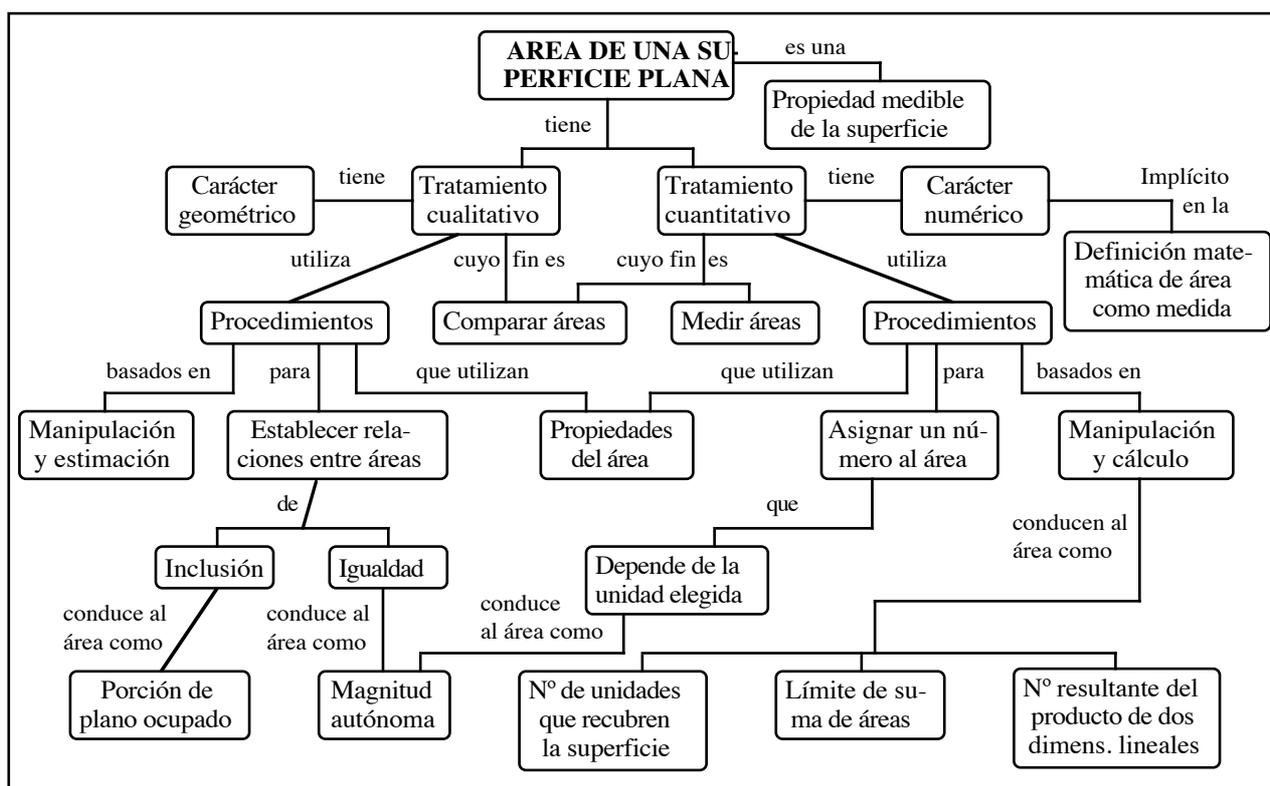
El análisis de los trabajos de estos tres autores permite constatar que, a pesar de sus grandes diferencias, no hay discrepancias entre ellos, por lo que es posible tratar de integrarlos en una sola propuesta. Tal integración, junto con algunas aportaciones propias, constituye el núcleo del marco teórico de esta investigación, que se centra en el análisis didáctico y matemático global (es decir, desde diversos puntos de vista) del concepto de área de una superficie, y que en Corberán (1996) se sintetiza en un mapa conceptual del que aquí sólo puedo ofrecer una visión parcial limitada a sus principales elementos.

## **5. Diseño experimental: Estudio diagnóstico. Resumen de los resultados.**

Gutiérrez, A. (2004): Investigación en didáctica de la geometría: La medida de áreas, en Luengo, R. (ed.), *Líneas de investigación en educación matemática vol. 1* (colección "Investigación en educación matemática" nº 1) (pp. 83-108). Badajoz: Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas.

La primera parte de la investigación, de tipo diagnóstico, consistió en la elaboración y administración de un test que permita obtener información sobre:

- \* El grado de comprensión del concepto de área por los estudiantes de los últimos cursos de los diferentes niveles educativos: 8º de E.G.B., 2º de B.U.P., C.O.U., 3º de la Diplomatura de Profesorado de EGB (Magisterio) y 5º de la Licenciatura en Matemáticas.



- \* Los conocimientos específicos de los estudiantes, sus procedimientos de resolución de problemas y los errores y dificultades más habituales.
- \* La posible evolución experimentada por la comprensión de los estudiantes durante su avance por los sucesivos niveles educativos, aunque no haya habido enseñanza explícita del área.
- \* Los aspectos del concepto de área y las herramientas o procedimientos de medida que deberían reforzarse en los cursos de secundaria.

En cuanto al contenido concreto del test, la bibliografía consultada para definir el marco teórico y el análisis didáctico del concepto de área derivado del mismo permitieron determinar los componentes del concepto de área que interesaba evaluar:

Gutiérrez, A. (2004): Investigación en didáctica de la geometría: La medida de áreas, en Luengo, R. (ed.), *Líneas de investigación en educación matemática vol. 1* (colección "Investigación en educación matemática" nº 1) (pp. 83-108). Badajoz: Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas.

---

- \* Concepciones del área.
- \* Concepciones de la unidad de área:
  - Importancia del papel de la unidad en el proceso de medida.
  - Uso y reconocimiento de unidades estándar y no estándar de medida.
  - Carácter de no discretitud de la unidad de medida.
  - Carácter de recubrimiento de la unidad de medida.
- \* Relación inversa entre el tamaño de una unidad y el número de unidades que recubren la superficie.
- \* Concepciones de la conservación del área:
  - Por recorte y pegado.
  - Por deslizamiento de un vértice o lado sobre una línea paralela a la base.
- \* Relación entre área y perímetro de una superficie:
  - Confusión conceptual entre área y perímetro.
  - Confusión operativa entre área y perímetro.
  - Relación entre el área y el perímetro al realizar alguna modificación (menor área y mayor perímetro o menor área e igual perímetro).
- \* Relación entre área y forma de una superficie.
- \* Bidimensionalidad del área:
  - Relación entre el área de una figura y sus dimensiones lineales cuando se modifican las dimensiones o se modifica el área.
  - Carácter dimensional de las fórmulas.
- \* Fórmulas para el cálculo de áreas:
  - Conocimiento de las fórmulas usuales de cálculo de áreas (círculo, triángulo, paralelogramo, rectángulo y cuadrado).
  - Comprensión del significado de la fórmula para el cálculo del área de un triángulo.
- \* Significado geométrico del teorema de Pitágoras.
- \* Papel de la percepción visual en la comparación de áreas.

Gutiérrez, A. (2004): Investigación en didáctica de la geometría: La medida de áreas, en Luengo, R. (ed.), *Líneas de investigación en educación matemática vol. 1* (colección “Investigación en educación matemática” nº 1) (pp. 83-108). Badajoz: Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas.

---

- \* Relación entre el área de un rectángulo y las de un rombo, un paralelogramo y un trapecio.
- \* Procedimientos utilizados en la resolución de problemas de comparación y medida de áreas:
  - Procedimientos de naturaleza geométrica.
  - Procedimientos de naturaleza numérica.
- \* Conservación y/o variación del área y/o perímetro de una superficie al hacer:
  - Recorte y pegado.
  - Deslizamiento de un vértice sobre una línea paralela a la base.
  - Abatimiento de un lado.

El resultado de este planteamiento teórico es un test formado por 36 ítems. No es posible reproducir aquí el test completo, pero en el anexo 1 incluyo los ítems que evalúan los conocimientos de los estudiantes sobre la independencia entre área y perímetro de una superficie. Por motivos prácticos, el test quedó dividido en dos partes, de 8 y 28 ítems respectivamente, que casi siempre se administraron en días diferentes. Al seleccionar los ítems de la primera parte del test, se tuvo en cuenta que éstos no proporcionaran a los estudiantes información que pudiera ayudarles a resolver los ítems de la segunda parte.

Para la administración del test cuyos resultados se recogen en Corberán (1996) se procedió a realizar una selección aleatoria de 4 centros públicos de primaria y otros 4 de secundaria de la ciudad de Valencia. Además se administró a los alumnos de 5º curso de la Facultad de Matemáticas y a los de 3º de Ciencias de la E.U. de Profesorado de EGB (Magisterio). La tabla siguiente resume la distribución de la muestra.

<b>Curso</b>	<b>Número de alumnos</b>
8º de EGB	102
2º de BUP	131
COU Letras	102
COU Ciencias	110
3º de Magisterio	44
5º de Matemáticas	32

Después de corregido el test se procedió a seleccionar varios alumnos de cada grupo para

Gutiérrez, A. (2004): Investigación en didáctica de la geometría: La medida de áreas, en Luengo, R. (ed.), *Líneas de investigación en educación matemática vol. 1* (colección "Investigación en educación matemática" nº 1) (pp. 83-108). Badajoz: Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas.

---

realizarles entrevistas clínicas, con el doble objetivo de i) verificar la validez y fiabilidad de algunos ítems y ii) verificar que la interpretación que se había hecho de sus respuestas era correcta.

No es posible reproducir aquí todos los **resultados y conclusiones** obtenidos de la administración del test, sino sólo los más destacables:

\* Concepciones del área. Las concepciones correctas se pueden catalogar como:

- Concepción geométrica, cuando el estudiante entiende el área de una superficie como el lugar ocupado por esa superficie en el plano.
- Concepción numérica, cuando el estudiante entiende el área de una superficie como un número.
- Concepción fórmula, cuando el estudiante entiende el área de una superficie como el resultado de los cálculos derivados de aplicar una fórmula.

Las concepciones erróneas se deben, mayoritariamente, a las siguientes dificultades:

- Confusión del área de una superficie con su perímetro o su volumen, cuando realizan cálculos incorrectos.
- Confusión del área de una superficie con la propia superficie, cuando se refieren a la superficie al hablar de su área.
- Confusión del área con el perímetro más el área, cuando manejan simultáneamente el área y el perímetro en vez de sólo el área.

Excepto los alumnos de 8º de EGB, entre los que hay una cantidad significativa de concepciones erróneas, la práctica totalidad de los demás estudiantes de la muestra tienen una concepción correcta de área, siendo la concepción geométrica la mayoritaria.

\* Concepciones de la unidad de área.

- El primer resultado que atrae la atención es la costumbre mayoritaria de los estudiantes de no indicar las unidades ni en los cálculos intermedios ni en los resultados finales.
- Existe, de manera generalizada, un mayor desconocimiento de las unidades de área que de las de longitud o volumen. Las más recordadas por los estudiantes son el  $\text{cm}^2$ , entre las unidades estándar de área, y la unidad con forma de cuadrado entre las no estándar.

Gutiérrez, A. (2004): Investigación en didáctica de la geometría: La medida de áreas, en Luengo, R. (ed.), *Líneas de investigación en educación matemática vol. 1* (colección "Investigación en educación matemática" nº 1) (pp. 83-108). Badajoz: Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas.

---

- La mayoría de los estudiantes de cada curso conocen y utilizan las tres propiedades básicas de las unidades de área, su no discretitud, su carácter de cubrimiento iterativo y la relación inversa entre el tamaño de la unidad y el valor del área.

\* Concepciones de la conservación del área.

- La práctica totalidad de los estudiantes reconocen y aceptan la propiedad de la conservación del área ante transformaciones de recorte y pegado. Sin embargo, en problemas numéricos, muchos estudiantes se centran en la realización de los cálculos y no utilizan esta propiedad, que les permitiría resolver el problema sin tener que hacer esos cálculos.
- Por el contrario, la mayoría de estudiantes de los cursos inferiores (EGB, BUP y COU de Letras) no identifica la conservación del área ante otros tipos de transformaciones.

\* Relación entre área y perímetro de una superficie.

- Al analizar los errores de los estudiantes, es necesario distinguir los que tienen un origen conceptual de los que son resultado de cálculos incorrectos causados, por ejemplo, por aplicar una fórmula equivocada. Se constata que una mayoría de alumnos utilizan las fórmulas sin comprender su significado, lo cual les lleva a no darse cuenta de que están aplicando una fórmula incorrecta. Así hay alumnos que muestran una confusión conceptual entre área y perímetro de una figura pero calculan las áreas de polígonos aplicando fórmulas correctas, mientras que otros alumnos diferencian claramente los conceptos de área y perímetro pero no se dan cuenta de que están aplicando una fórmula incorrecta porque no la entienden.
- Son muchos los estudiantes de todos los cursos que tienen dificultades para analizar la conservación o no del área y el perímetro de una superficie cuando ésta sufre transformaciones, y para entender las relaciones entre estas magnitudes al transformar la superficie.

\* Fórmulas para el cálculo de áreas.

- Salvo los estudiantes de la Facultad de Matemáticas, los estudiantes de la muestra tenían un conocimiento bastante pobre de las fórmulas usuales para el cálculo de áreas (cuadrado,

Gutiérrez, A. (2004): Investigación en didáctica de la geometría: La medida de áreas, en Luengo, R. (ed.), *Líneas de investigación en educación matemática vol. 1* (colección "Investigación en educación matemática" nº 1) (pp. 83-108). Badajoz: Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas.

---

rectángulo, paralelogramo, triángulo y círculo). Sólo entre un 50% y un 70% de estudiantes de cada curso eran capaces de recordar tres o más de las fórmulas mencionadas antes.

- Que un alumno conozca una fórmula no quiere decir que la comprenda ni que sepa cómo o cuándo utilizarla. Esto es particularmente acusado para la fórmula del área del triángulo.

\* Papel de la percepción visual en la comparación de áreas.

- El uso de la percepción visual para resolver problemas va disminuyendo al aumentar el nivel educativo, hasta desaparecer por completo en los estudiantes de 5º de Matemáticas.
- En algunos casos los estudiantes han contrastado el resultado de un procedimiento numérico con su percepción visual y, en caso de discrepancia, han dado más credibilidad a la percepción visual.

\* Procedimientos utilizados en la resolución de problemas de comparación y medida de áreas.

- Aunque la concepción geométrica de área es mayoritaria entre los estudiantes, éstos no están familiarizados con los procedimientos geométricos de resolución de problemas (por ej., comparar áreas descomponiendo adecuadamente las superficies para poder superponerlas). De hecho, en los problemas planteados en contextos geométricos se observa que una mayoría de los estudiantes se inclina claramente por el uso de procedimientos numéricos incluso en problemas cuya resolución por medios geométricos es mucho más fácil.

Otro dato que concuerda con el anterior es que los estudiantes con una concepción numérica del área han obtenido mejores resultados en la resolución de problemas. Esto pone de relieve un claro sesgo de la enseñanza en favor de los métodos numéricos de cálculo rutinario y en contra de los métodos geométricos, que exigen más creatividad y mejor comprensión de los conceptos.

- En los estudiantes de los cursos superiores se ha detectado que la integral definida actúa como un obstáculo cuando han tratado de aplicarla para resolver problemas que les recordaban dicho concepto.
- Los peores resultados en la resolución de problemas se han obtenido en 2º de BUP y COU de Letras, probablemente porque en estos grupos están los estudiantes con menor

Gutiérrez, A. (2004): Investigación en didáctica de la geometría: La medida de áreas, en Luengo, R. (ed.), *Líneas de investigación en educación matemática vol. 1* (colección "Investigación en educación matemática" nº 1) (pp. 83-108). Badajoz: Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas.

---

disposición hacia las matemáticas y con peor formación previa.

\* Conservación y/o variación del área y/o perímetro de una superficie.

- Hay varias transformaciones típicas que permiten ver la no relación entre la conservación o variación del área y del perímetro de una superficie. Los ítems 2.22 y 2.23 del test (ver el anexo 1) son dos típicos ejemplos de transformaciones que conservan el área pero no el perímetro (ítem 2.22) y viceversa (ítem 2.23). El segundo problema ha resultado más difícil que el primero, con más de un 50% de respuestas erróneas en cada curso. Una vez más, el contexto puramente geométrico ha supuesto una gran dificultad, siendo numerosos los estudiantes, en especial de 5º de Matemáticas, que respondieron que no tenían suficientes datos para llegar a una conclusión.
- Un elevado número de alumnos dieron argumentos en los que se nota claramente que se han dejado guiar por su percepción visual, lo cual casi siempre va acompañado de una falta de recursos para resolver los problemas mediante justificaciones matemáticamente válidas. Por ejemplo, la deformación del triángulo del ítem 2.22 induce la impresión visual de que su área disminuye.

## **6. Diseño experimental: Experimento de enseñanza. Resumen de los resultados.**

Esta fase de la investigación consistió en el diseño, experimentación y análisis de una unidad de enseñanza del conjunto de conceptos relacionados con el área de superficies para estudiantes de Secundaria. La complejidad de esta red conceptual hace que su enseñanza deba hacerse durante los sucesivos ciclos educativos, desde Primaria (primera toma de contacto y mediciones experimentales) hasta la Universidad (estudio de teorías de la medida). Como consecuencia, la manera de organizar la enseñanza de esta red conceptual en los sistemas educativos y currículos oficiales suele ser parcial, carente de continuidad y con lagunas importantes.

Puesto que los estudiantes de Secundaria empezaron a estudiar estos conceptos en Primaria, el objetivo de esta unidad de enseñanza no es trabajar con los alumnos como si fueran conceptos nuevos para ellos, sino mejorar su comprensión de los mismos, corrigiendo algunos de sus errores

Gutiérrez, A. (2004): Investigación en didáctica de la geometría: La medida de áreas, en Luengo, R. (ed.), *Líneas de investigación en educación matemática vol. 1* (colección "Investigación en educación matemática" nº 1) (pp. 83-108). Badajoz: Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas.

---

más habituales y completando sus conocimientos. Para ello, el diseño de la unidad de enseñanza se hizo teniendo en cuenta los resultados de la administración del test que he comentado en la sección anterior, y suponiendo que el grupo de estudiantes con los que se experimentaría posteriormente tendría unos conocimientos y errores similares a los de sus compañeros que respondieron al test.

La implementación se realizó en un grupo de 4º de ESO experimental (equivalente en edad y estudios previos a 2º de BUP) con 24 alumnos, durante tres clases ordinarias del grupo. Las clases fueron impartidas por el profesor habitual del grupo, pero también estuvo presente, como observadora activa, la autora de la tesis doctoral. Los 24 alumnos trabajaron divididos en subgrupos de 4 alumnos, con momentos de trabajo en subgrupo y otros de puesta en común. Para evaluar la experimentación se administró a los estudiantes como pretest y posttest el test elaborado en la fase diagnóstica de la investigación.

El diseño de las actividades de la unidad de enseñanza se hizo teniendo en cuenta el análisis didáctico del concepto de área incluido en el marco teórico de la investigación y los resultados de la administración del test en la fase diagnóstica, si bien en el último momento se realizaron algunos cambios como consecuencia de los resultados de la administración del pretest. Las actividades pretenden, de manera global, lograr que los estudiantes profundicen en la disociación entre el área de una superficie y la forma de dicha superficie, su perímetro, y la unidad empleada para realizar la medición. Esto se llevó a la práctica diferenciando dos tipos de actividades:

- \* Actividades para el tratamiento cualitativo del área de una superficie. Tomando como punto de partida la interpretación del área como valoración de la porción del plano ocupado por una superficie, se elaboraron actividades que pusieran de relieve:
  - Diversos procedimientos geométricos de valoración de áreas basados en comparación directa (por superposición) o comparación indirecta (por recorte y pegado, descomposición conveniente, o reconfiguración por complementariedad).
  - La independencia del área respecto de la forma y del perímetro de la superficie.
  - La conservación y/o variación del área y/o perímetro de una superficie mediante transformaciones que conserven sólo el área, sólo el perímetro o que no conserven ni área

Gutiérrez, A. (2004): Investigación en didáctica de la geometría: La medida de áreas, en Luengo, R. (ed.), *Líneas de investigación en educación matemática vol. 1* (colección "Investigación en educación matemática" nº 1) (pp. 83-108). Badajoz: Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas.

---

ni perímetro.

\* Actividades para el tratamiento cuantitativo del área de una superficie. Tomando como punto de partida la interpretación del área como número de unidades que recubren exactamente una superficie, se elaboraron actividades que pusieran de relieve:

- Diversos procedimientos numéricos de medición de áreas basados en: La iteración de la unidad cuando la superficie se puede cubrir exactamente con una cantidad de unidades enteras (mediante cubrimiento físico o cubrimiento dibujado) o cuando dicho cubrimiento exacto no es posible (en cuyo caso hay que fraccionar o que recortar y recomponer la unidad). El uso de fórmulas.
- Las propiedades de la unidad de medida de áreas.
- El uso de unidades de área cuadradas y no cuadradas.
- La independencia del área respecto de la forma y el perímetro de la superficie y respecto del número que la mide.

El resultado de este planteamiento teórico es una unidad de enseñanza formada por 33 actividades. No es posible reproducir aquí la unidad completa, pero en el anexo 2 incluyo las actividades que inciden en la independencia entre área y perímetro de una superficie.

La evaluación de la unidad de enseñanza se realizó mediante la comparación de las respuestas al pretest y al postest de cada estudiante. Ahora el interés no es observar las concepciones, estrategias de trabajo o errores de los estudiantes, sino determinar los cambios producidos como consecuencia de la unidad de enseñanza.

Como resumen de diversas conclusiones específicas obtenidas en relación con cada aspecto del concepto de área mencionado en las páginas anteriores, las siguientes son las principales **conclusiones generales** respecto de la influencia de la unidad de enseñanza en las concepciones de los estudiantes:

\* Concepciones del área:

- Aunque, a lo largo de la unidad de enseñanza, los estudiantes han trabajado en contextos que potencian las dos concepciones más adecuadas del área (geométrica y numérica), y sus

Gutiérrez, A. (2004): Investigación en didáctica de la geometría: La medida de áreas, en Luengo, R. (ed.), *Líneas de investigación en educación matemática vol. 1* (colección "Investigación en educación matemática" nº 1) (pp. 83-108). Badajoz: Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas.

---

respuestas muestran que comprenden bien ambas concepciones, en el postest todos los estudiantes menos uno optan por la concepción geométrica del área.

- La unidad de enseñanza ha permitido a los alumnos distinguir entre el área de una superficie, la forma de esa superficie y el número que la mide.
- La mayoría de los estudiantes han conseguido distinguir el área de una superficie de su perímetro.

\* Concepciones de la unidad de área:

- Los estudiantes no tuvieron dificultad alguna para medir el área de una superficie utilizando diferentes unidades bidimensionales ni para comprender que al área de una superficie le pueden corresponder números distintos según las unidades de medida empleadas.

\* Procedimientos utilizados en la resolución de problemas de comparación y medida de áreas:

- El tratamiento cualitativo del área ha propiciado que los estudiantes utilicen, cuando ello era beneficioso, procedimientos geométricos para resolver problemas planteados en contextos numéricos.
- Los alumnos se familiarizaron rápidamente con los procedimientos geométricos basados en la comparación directa o indirecta de las superficies.

\* Fórmulas para el cálculo de áreas.

- Ha aumentado ligeramente el número de alumnos que conocen las diferentes fórmulas usuales de cálculo de áreas y han desaparecido casi por completo los errores derivados de la identificación incorrecta de algún componente de las fórmulas, del cálculo del perímetro en vez del área, o del uso de fórmulas erróneas.

\* Conservación y/o variación del área y/o perímetro de una superficie:

- Para que los estudiantes puedan resolver problemas de comparación del área de dos superficies cuando los procedimientos geométricos son insuficientes, o analizar la variación que sufre el área de una superficie cuando ésta es sometida a determinada transformación, es necesario que los estudiantes comprendan las fórmulas del área y sus elementos, es decir, que sean capaces de analizar las posibles variaciones de estos elementos y su

Gutiérrez, A. (2004): Investigación en didáctica de la geometría: La medida de áreas, en Luengo, R. (ed.), *Líneas de investigación en educación matemática vol. 1* (colección "Investigación en educación matemática" nº 1) (pp. 83-108). Badajoz: Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas.

---

influencia en el valor del área.

\* Algunas conclusiones globales:

- Después de la experimentación los estudiantes poseen un mayor conocimiento de los distintos aspectos del área estudiados, y una mayor capacidad para resolver correctamente y de forma comprensiva distintos tipos de problemas.
- Por el contrario, los estudiantes no modificaron su conocimiento de los aspectos del área no estudiados explícitamente en la unidad de enseñanza (por ejemplo el carácter bidimensional del área).

## **7. Bibliografía.**

A continuación incluyo las referencias de las publicaciones mencionadas en el texto y otras referencias de publicaciones recientes interesantes relacionadas con este tema.

Baturo, A. & Nason, R. (1996). Student teachers' subject matter knowledge within the domain of area measurement. *Educational Studies in Mathematics*, 31.3, 235-268.

Chamorro, C. & Belmonte, J.M. (1988). *El problema de la medida. Didáctica de las magnitudes lineales* (colección "Matemáticas: Cultura y aprendizaje" nº 17). Madrid: Síntesis.

Cobo, P. (1996). Análisis de las actuaciones de los alumnos de 3º de BUP en la resolución de problemas que comparan áreas de figuras geométricas. *Enseñanza de las Ciencias*, 14.2, 195-207.

Cobo, P. & Fortuny, J.M. (2000). Social interactions and cognitive effects in contexts of area-comparison problem solving. *Educational Studies in Mathematics*, 42.2, 115-140.

Comiti, C. & Moreira, B.P. (1997). Learning process for the concept of area of planar regions in 12-13 year olds. *Proceedings of the 21th PME Conference*, 3, 264-271.

Corberán, R.M. (1996). *Análisis del concepto de área de superficies planas. Estudio de su comprensión por los estudiantes desde Primaria a la Universidad* (tesis doctoral). Valencia: Univ. de Valencia.

De Bock, D., Verschaffel, L. & Janssens, D. (1998). The predominance of the linear model in secondary school students' solutions of word problems involving length and area of similar plane figures. *Educational Studies in Mathematics*, 35.1, 65-83.

Douady, R. & Perrin-Glorian, M.J. (1983). *Measure des longueurs et des aires* (Brochure 48). París: IREM de la Univ. Paris 7.

Douady, R. & Perrin-Glorian, M.J. (1984). Aires de surfaces planes (1e partie). *Petit X*, 6, 5-33.

Gutiérrez, A. (2004): Investigación en didáctica de la geometría: La medida de áreas, en Luengo, R. (ed.), *Líneas de investigación en educación matemática vol. 1* (colección “Investigación en educación matemática” nº 1) (pp. 83-108). Badajoz: Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas.

---

Douady, R. & Perrin-Glorian, M.J. (1985). Aires de surfaces planes (2e partie). *Petit X*, 8, 5-30.

Douady, R. & Perrin-Glorian, M.J. (1986). Concerning conceptions of area (pupils aged 9-11). *Proceedings of the 10th PME Conference*, 253-258.

Douady, R. & Perrin-Glorian, M.J. (1989). Un processus d'apprentissage du concept d'aire de surface plane. *Educational Studies in Mathematics*, 20, 387-424.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht, Holanda: D. Reidel/Kluwer.

Furinghetti, F. & Paola, D. (1999). Exploring students' images and definitions of area. *Proceedings of the 23th PME Conference*, 2, 345-352.

Hart, K. (ed.) (1981). *Children's understanding of mathematics: 11-16*. Londres: John Murray.

Héraud, B. (1989). L'intégration de la compréhension de l'aire au curriculum. *Actes de la 44 Rencontre Internationale de la CIEAEM*, 1-12.

Hirstein, J.J., Lamb, C.E. & Osborne, A. (1978). Student misconceptions about area measure. *Arithmetic Teacher*, 25.7, 10-16.

Olmo, M.A., Moreno, M.F. & Gil, F. (1989). *Superficie y volumen. ¿Algo más que el trabajo con fórmulas?* (colección “Matemáticas: Cultura y aprendizaje” nº 19). Madrid: Síntesis.

Outhred, L.N. & Mitchelmore, M.C. (2000). Young children's intuitive understanding of rectangular area measurement. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31.2, 144-167.

Perrin-Glorian, M.J. (1992). *Aires de surfaces planes et nombres décimaux. Questions didactiques liées aux élèves en difficulté aux niveaux CM-6ème* (tesis doctoral de estado). París: Univ. Paris 7.

Reynolds, A. & Wheatley, G.H. (1996). Elementary students' construction and coordination of units in an area setting. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27.5, 564-581.

Ricco, G., Vergnaud, G. & Rouchier, A. (1983). Representation du volume et arithmétisation - Entretiens individuelles avec des élèves de 11 à 15 ans. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 4.1, 27-69.

Rogalski, J. (1982). Acquisition de notions relatives à la dimensionalité des mesures spatiales (longueur, surface). *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 3.3, 343-396.

Segovia, I., Castro, E. & Flores, P. (1996). El área del rectángulo. *Uno*, 10, 63-77.

Turégano, P. (1996). Reflexiones didácticas acerca del concepto de área y su medida. *Uno*, 10, 9-27.

Vergnaud, G. y otros (1978). Quelles connaissances les enfants de sixième ont-ils des “structures multiplicatives” élémentaires? Un sondage. *Bulletin de l'APMEP*, 313, 331-357.

Vergnaud, G. y otros (1983). Une expérience didactique sur le concept de volume en classe de cinquième (12 -13 ans). *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 4.1, 71-120.

---

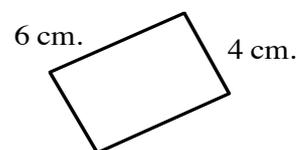
**Anexo 1: Items del test sobre independencia entre área y perímetro de una superficie  
(Corberán, 1996)**

**Item 2.2.** La siguiente superficie tiene una determinada área y un cierto perímetro. Realiza sobre ella la modificación que creas oportuna de manera que se obtenga una nueva superficie de menor área y con un perímetro mayor.

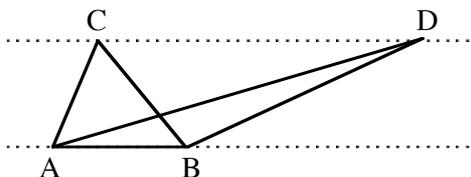


**Item 2.14.** Dibuja un rectángulo que tenga el mismo perímetro que el rectángulo de la figura pero con un área menor.

Si crees que esto no es posible, indícalo y explica el porqué de ello.



**Item 2.22.** El triángulo ABC se ha transformado en el nuevo triángulo ABD. Compara las áreas y los perímetros de estos dos triángulos.



a) Marca con una “X” la respuesta que creas verdadera:

- El área de ABC es mayor que la de ABD.
- El área de ABC es menor que la de ABD.
- Los dos triángulos tienen igual área.
- No puedes decir si uno tiene mayor área que el otro.

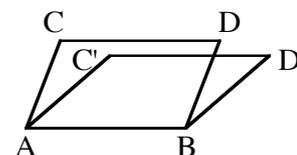
Razona la respuesta.

b) Marca con una “X” la respuesta que creas verdadera:

- El perímetro de ABC es mayor que el de ABD.
- El perímetro de ABC es menor que el de ABD.
- Los dos triángulos tienen igual perímetro.
- No puedes decir si uno tiene mayor perímetro que el otro.

Razona la respuesta.

**Item 2.23.** El paralelogramo de la figura ABCD se ha transformado en un nuevo paralelogramo ABC'D'. Compara sus áreas y sus perímetros.



a) Marca con una “X” la respuesta que creas verdadera:

Gutiérrez, A. (2004): Investigación en didáctica de la geometría: La medida de áreas, en Luengo, R. (ed.), *Líneas de investigación en educación matemática vol. 1* (colección “Investigación en educación matemática” nº 1) (pp. 83-108). Badajoz: Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas.

---

- El paralelogramo ABCD tiene mayor área que el ABC'D'.
- El paralelogramo ABCD tiene menor área que el ABC'D'.
- Los dos paralelogramos tienen igual área.
- No puedes decir si uno tiene mayor área que el otro.

Da una razón para tu respuesta.

b) Marca con una “X” la respuesta que creas verdadera:

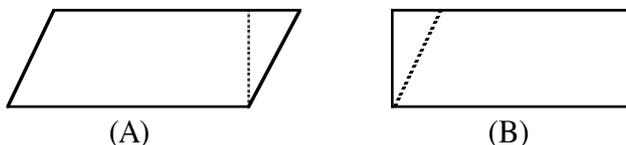
- El paralelogramo ABCD tiene mayor perímetro que el ABC'D'.
- El paralelogramo ABCD tiene menor perímetro que el ABC'D'.
- Los dos paralelogramos tienen igual perímetro.
- No puedes decir si uno tiene mayor perímetro que el otro.

Da una razón para tu respuesta.

### Anexo 2: Actividades de la unidad de enseñanza sobre independencia entre área y perímetro de una superficie (Corberán, 1996)

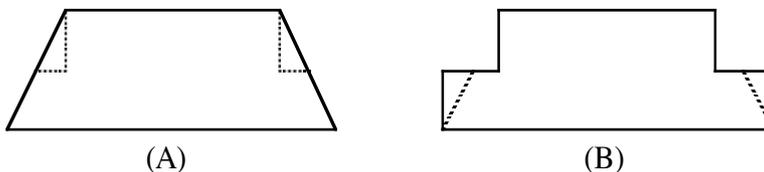
**Actividad 3.** La figura (A) ha sido cortada en 2 piezas que han sido reorganizadas -sin superponerse- para construir la figura (B).

- Compara sus áreas. ¿Tienen igual área?
- Compara sus perímetros. ¿Tienen igual perímetro?



**Actividad 4.** La figura (A) ha sido cortada en 3 piezas que han sido reorganizadas -sin superponerse- para construir la figura (B).

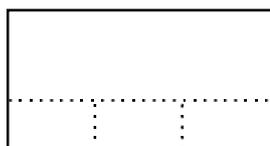
- Compara el área de la figura (A) con la de (B). ¿Son iguales?
- Compara sus perímetros. ¿Son iguales?



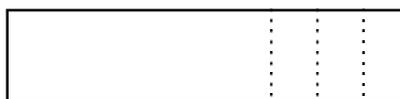
**Actividad 6.** La figura (A) ha sido cortada en 4 piezas que han sido reorganizadas -sin superponerse- para construir la figura (B).

- Determina el área de (B).
- Determina los perímetros de (A) y (B).

Gutiérrez, A. (2004): Investigación en didáctica de la geometría: La medida de áreas, en Luengo, R. (ed.), *Líneas de investigación en educación matemática vol. 1* (colección "Investigación en educación matemática" nº 1) (pp. 83-108). Badajoz: Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas.



(A)



(B)

**Actividad 14.** Transforma el rombo del dibujo en otra superficie de:

- a) Igual área y menor perímetro.
- b) Igual área y mayor perímetro.

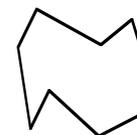


**Actividad 15.** Sitúa una cartulina sobre el corcho. Coge el hilo que se te ha dado y, procurando que esté siempre tenso, pínchalo sobre el corcho con la ayuda de chinchetas de modo que construyas un polígono. Después reproduce esta figura en el papel. Haz esto varias veces.

- a) ¿Tienen todos los polígonos construidos la misma área?
- b) ¿Tienen todos los polígonos construidos el mismo perímetro?
- c) Extrae todas aquellas conclusiones que creas de interés y que estén relacionadas con los resultados de los anteriores apartados.

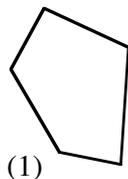
**Actividad 16.** Modifica la superficie del dibujo de manera que se obtenga una nueva superficie con:

- a) Mayor área y menor perímetro.
- b) Menor área y mayor perímetro.

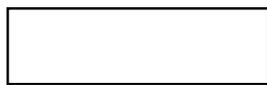


**Actividad 17.** Modifica cada una de las siguientes superficies de manera que en cada caso se obtenga una nueva superficie con:

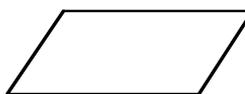
- a) Menor área y mayor perímetro.
- b) Mayor área y menor perímetro.



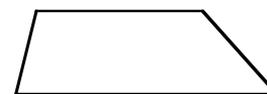
(1)



(2)



(3)

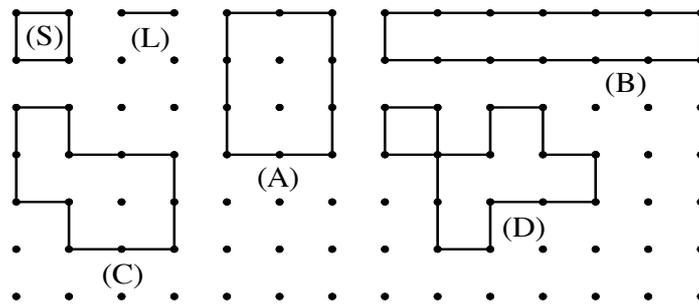


(4)

**Actividad 26.** Completa la tabla siguiente tomando como unidad de área el cuadrado (S) y como unidad de longitud el segmento (L).

	medida del área	medida del perímetro
figura (A)		
figura (B)		
figura (C)		
figura (D)		

Gutiérrez, A. (2004): Investigación en didáctica de la geometría: La medida de áreas, en Luengo, R. (ed.), *Líneas de investigación en educación matemática vol. 1* (colección “Investigación en educación matemática” nº 1) (pp. 83-108). Badajoz: Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas.



**Actividad 27.** Dibuja en la trama cuadrada de puntos superficies de igual perímetro y diferente área.

**Actividad 28.** a) ¿Cómo habrá que disponer 36 cuadrados de 1 cm de lado para formar dos tapices, de manera que el perímetro de uno sea el menor posible, y el del otro, el mayor posible?  
b) ¿Cuál será el área cubierta en cada tapiz?

**Actividad 31.** Sobre la trama cuadrada de puntos dibuja: a) 4 figuras diferentes de  $1/2 \text{ cm}^2$ .  
b) 8 figuras diferentes de  $1 \text{ cm}^2$ . c) 8 figuras diferentes de  $3/2 \text{ cm}^2$ .