DEFINICIONES DE TRIANGULOS Y CUADRILATEROS: ERRORES E INCONSISTENCIAS EN LIBROS DE TEXTO DE E.G.B.

Adela Jaime Pastor, Fernando Chapa Aguilera y Angel Gutiérrez Rodríguez

Departamento de Didáctica de la Matemática.
Universidad de Valencia

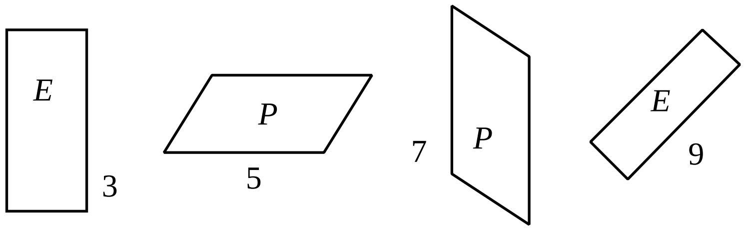
RESUMEN. *En este artículo presentamos un estudio de diversos tipos de errores o contradicciones que aparecen frecuentemente en los libros de texto de E.G.B. en relación con el enunciado de definiciones de las distintas familias de triángulos y cuadriláteros, su interpretación y aplicación. Se trata de errores que provocan inconsistencias de tipo lógico en los estudiantes, que entorpecen sus procesos de razonamiento correctos o que crean confusión en las imágenes mentales de los conceptos implicados que construyen los estudiantes. En primer lugar, hacemos una descripción de cada tipo de errar o inconsistencia y presentamos algunos ejemplos. Después analizamos las implicaciones de esos errores o inconsistencias en la enseñanza y aprendizaje de la Geometría, dentro del marco formado por el modelo de razonamiento de Van Hiele y la Teoría de formación de conceptos de Vinner.*

INTRODUCCION

A un estudiante se le pidió que escribiera una definición de rectángulo y que marcase, de entre varias figuras, las que son rectángulos (E) y las que son paralelogramos (P). Su respuesta fue: «Rectángulo es un polígono de cuatro lados con sus lados paralelos dos a dos. Dos de sus lados tienen que ser mayores que los otros dos». Además, realizó la clasificación mostrada en la figura 1.

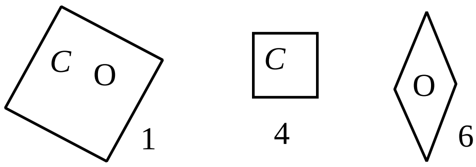
Según la definición escrita por el estudiante, debería haber marcado e! polígono 5 como rectángulo. Sin embargo, el estudiante explicó a continuación que no lo había clasificado como tal «porque sus ángulos no son de 90°».

FIGURA 1



Una situación análoga se produjo con otro estudiante, al que se le proporcionaron las siguientes definiciones: «Un cuadrado es un cuadrilátero que tiene los cuatro lados iguales y los cuatro ángulos rectos». «Un rombo es un cuadrilátero que tiene los cuatro lados iguales». Después de leer estas definiciones, el estudiante hizo la clasificación mostrada en la figura 2, donde C significa cuadrado y R rombo.

FIGURA 2



Estos son dos tipos de respuestas que hemos encontrado con frecuencia en estudiantes del Ciclo Superior de E.G.B., de Enseñanza Media y de Magisterio (Gutiérrez et al., 1991). Investigaciones llevadas a cabo en otros países muestran la existencia de contestaciones análogas (Burger y Shaughnessy, 1986; Hershkowitz, 1989; Vinner y Hershkowitz, 1983; Wilson, 1990).

Cualquier matemático puede darse cuenta enseguida de la inconsistencia de las respuestas anteriores y es lógico concluir que estos estudiantes no dominan la estructura matemática del tema en cuestión. Pero ¿qué pensaríamos si encontráramos inconsistencias semejantes en los libros de texto de Matemáticas de E.G.B.? ¿Dejamos que las mentes retorcidas se recreen maquiavélicamente pensando en la existencia de una confabulación contra un aprendizaje correcto de las Matemáticas? Evidentemente no se trata de eso. Más bien, dada la persistencia con la que se producen estos errores, cabe dar un toque de atención a los autores y editores y pedirles una elaboración y revisión cuidadosa de los contenidos matemáticos de los textos. Precisamente ahora, ante la entrada en vigor de la reforma educativa, se presenta una excelente ocasión para ello. La esperanza de que las personas implicadas puedan leer estas páginas y poner remedio a los errores es una de las razones que nos han motivado a escribir este artículo.

A continuación presentamos una recopilación de los principales tipos de errores o inconsistencias que hemos encontrado en libros de texto de E.G.B. y, para cada tipo, algunos comentarios sobre sus características y sus posibles consecuencias en el marco del modelo de razonamiento geométrico de Van Hiele y de la teoría de formación de conceptos matemáticos de Vinner. Por este motivo, en primer lugar hacemos unas breves descripciones de las teorías de Van Hiele y Vinner cuyo único fin es ayudar a comprender el resto del artículo.

Nos hemos centrado en las situaciones problemáticas claras que surgen a partir de los enunciados de las definiciones de los conceptos de triángulo, cuadrilátero y sus clases y las interpretaciones o aplicaciones hechas de tales enunciados, tal como se presentan en los libros de texto. En la mayoría de los casos se trata de errores matemáticos, si bien también hay errores de tipo didáctico que son tan serios como los anteriores. Para no extendernos demasiado, sólo hemos analizado las situaciones más frecuentes en los libros de texto y con más influencia en la calidad del aprendizaje, dejando de lado otros errores puntuales, menos frecuentes o de menor trascendencia. Presentamos errores que pueden dar lugar a retrasos en el aprendizaje, a un aprendizaje incorrecto, o a conflictos innecesarios en los estudiantes. Dado que una relación exhaustiva de las situaciones conflictivas resultaría demasiado amplia y repetitiva, hemos optado por agruparlas según los tipos de errores o posibles fuentes de errores que producen y ofrecer sólo algunos ejemplos de cada tipo.

El análisis que hemos llevado a cabo está basado en los libros del alumno y del profesor de 3 series de E.G.B., que llamaremos A, B y C. Hemos seleccionado estas colecciones porque las tres son de amplia difusión en todo el territorio nacional y, en particular, 2 de ellas son las más empleadas en la provincia de Valencia (no disponemos de datos para confirmar nuestra intuición de que también son las más usadas en la mayor parte de España).

EL MARCO TEORICO DEL ESTUDIO

En el campo de la enseñanza de la Geometría, el modelo de razonamiento de Van Hiele es actualmente el de uso más extendido en el ámbito internacional de investigación y diseño curricular (NCTM, 1989; Hershkowitz, 1990; Clements y Battista, en prensa). Asimismo, la teoría sobre la formación de conceptos matemáticos en los estudiantes desarrollada por el grupo de investigadores encabezado por S. Vinner es una de las más importantes. Ello nos ha motivado a elegir estas teorías como marco de referencia en el cual analizar las implicaciones de los diversos tipos de errores de los libros de texto identificados en la sección anterior. En primer lugar, vamos a hacer unas breves descripciones de ambas teorías.

El modelo de razonamiento de Van Hiele

El modelo de Van Hiele intenta explicar cómo progresan los estudiantes en su habilidad de razonamiento geométrico. Para ello establece cuatro *niveles de* *razonamiento* a través de los cuales van pasando los estudiantes a medida que perfeccionan su manera de razonar, aunque no todos los estudiantes alcanzan los niveles superiores. Cada nivel está caracterizado por un tipo de conocimiento, un vocabulario y una forma de razonamiento particulares:

- Nivel 1 (Reconocimiento): Se reconocen los objetos y conceptos matemáticos por su aspecto físico y de forma global, sin distinguir explícitamente sus componentes matemáticas.
- Nivel 2 (Análisis): Se reconocen las componentes matemáticas de un concepto o una figura. Se pueden establecer relaciones entre objetos y/o entre sus componentes, pero sólo de forma experimental. No se pueden establecer relaciones mediante deducciones lógicas ni hacer descripciones formales.
- Nivel 3 (Clasificación): Se establecen relaciones lógicas y se pueden seguir razonamientos deductivos simples, pero no se comprende la función de los elementos de un sistema axiomático y, por tanto, no se saben manejar.
- Nivel 4 (Deducción): Se comprenden y realizan razonamientos deductivos y demostraciones formales, pues ya se entiende el significado de axiomas, hipótesis, etc.

Los lectores interesados en conocer el modelo de Van Hiele con más detalle pueden acudir a Jaime y Gutiérrez (1990), donde se hace una descripción completa del mismo. Así mismo, en Gutiérrez y Jaime (1989) se puede encontrar una amplia bibliografía comentada.

La teoría de formación de conceptos matemáticos de Vinner

Vinner propone la distinción entre un *concepto,* que es el objeto matemático determinado por una definición formal, y una *imagen conceptual* (*concept image*), que es la representación operativa de ese concepto disponible en la mente de un individuo, formada por un conjunto de imágenes visuales y de propiedades. Según Vinner, «adquirir un concepto significa, entre otras cosas, adquirir un mecanismo de construcción e identificación mediante el cual será posible identificar o construir todos los ejemplos del concepto tal como éste está concebido por la comunidad matemática» (Vinner y Hershkowitz, 1983).

En todo ejemplo concreto de un concepto, podemos encontrar *atributos relevantes,* que son las propiedades que debe poseer para corresponder al concepto en cuestión (propiedades necesarias), y *atributos no criticos,* que son propiedades no necesarias de ese concepto. Usualmente, una definición verbal está formada por un subconjunto suficiente de atributos relevantes del concepto. Por tanto, la definición se puede considerar como un criterio para clasificar ejemplos como pertenecientes o no a un concepto.

Por otra parte, cada persona tiene uno o más *prototipos* de un concepto, que son ejemplos concretos de ese concepto con unas características especiales que hacen que sean los que se aprenden antes o los que primero vienen a la mente. Los estudiantes con imágenes conceptuales pobres tienen unos pocos prototipos (a veces sólo 1) y únicamente identifican los ejemplos del concepto que se asemejan a algunos de sus prototipos.

Aquí sólo hemos esbozado las ideas básicas que emplearemos más adelante. En Nesher y Kilpatrick (1990) se puede encontrar una descripción más completa de la teoría de Vinner, así como una detallada relación de artículos suyos sobre este tema.

TIPOS DE ERRORES Y SUS IMPLICACIONES EN EL APRENDIZAJE

Nuestro centro de atención han sido las definiciones de triángulo, cuadrilátero y sus clases presentadas en los libros de texto, junto a las maneras como esas definiciones se interpretan después, en los mismos libros, para clasificar figuras o se utilizan al resolver problemas. Hemos encontrado los siguientes tipos de errores en los libros de texto:

Tipo I. Errores ocasionados por la presentación visual: Con frecuencia no hay, o hay muy pocos, ejemplos de figuras no estándar o en posición no estándar. En este caso, no se trata de un error matemático, pero sí de un serio error didáctico.

Por ejemplo, en el libro de 4° de la serie B, tenemos que, de los 23 triángulos dibujados en la lección dedicada a ellos, todos menos 1 están en posición estándar (es decir, con un lado horizontal sobre el que se apoya; figura 3). Algo análogo sucede en el libro de 4° de la serie A, (1 triángulo en posición no estándar junto a 15 estándar) mientras que en 3° de esta serie, todos los triángulos dibujados están en posición estándar.

FIGURA 3

De acuerdo con las teorías de Van Hiele y Vinner, un estudiante comienza a construir su imagen mental de un concepto de una manera global, a partir de ejemplos concretos, sin realizar un análisis matemático de los elementos o propiedades del concepto, sino usando destrezas básicamente visuales. Por lo tanto, los ejemplos presentados en los libros de texto juegan un papel fundamental, más que las definiciones verbales que los acompañan. Un método adecuado de introducción de nuevos conceptos sería la inclusión de ejemplos y contraejemplos, seleccionados en función de los atributos críticos y no críticos, de tal manera que se evitara la inclusión en todos los casos de alguna característica visual no crítica muy fuerte.

Así, por ejemplo, si todos los triángulos que ven los niños tienen un lado horizontal sobre el que se apoyan, muchos estudiantes incluirán ese atributo en su imagen conceptual y pensarán que debe cumplirse para que una figura sea un triángulo. Desde este punto de vista, lo correcto es presentar triángulos con distintas inclinaciones respecto los bordes de la hoja de papel. Análogamente, los contraejemplos contribuyen a delimitar los atributos relevantes. En el caso de los triángulos (polígonos de tres lados), los contraejemplos deben incidir en la condición de polígono o en la condición del número de lados.

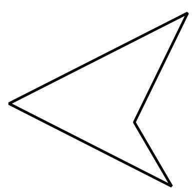
Esta situación deseable de ejemplos y contraejemplos no se suele presentar en los libros de texto. Por el contrario, como indicábamos antes, con frecuencia los ejemplos presentados en los libros fomentan la inclusión de atributos irrelevantes en las imágenes conceptuales.

Tipo II. Definiciones diferentes. Es frecuente que las definiciones cambien a lo largo de los cursos dentro de la misma serie. No nos referimos a cambios de tipo gramatical, sino a definiciones que conducen a conceptos matemáticos diferentes, es decir a familias distintas de polígonos.

Así, en el libro de 4° de la serie C, después de haber definido mediante sus propiedades usuales otros tipos de cuadriláteros, se muestra una figura indicando que «no tiene ningún lado igual ni ningún par de lados paralelos. Se llama trapezoide», lo cual será la definición que se adopte, ya que no hay ninguna otra. Sin embargo, en los textos de 5° y 6°, se define trapezoide como «un cuadrilátero cualquiera».

En consecuencia, un rectángulo *no* es trapezoide en 4°, pero *sí* lo es en 5° y 6°. Por el contrario, el polígono de la figura 4 *sí* es trapezoide según cualquiera de las definiciones anteriores, cosa que no se corresponde con la clasificación usual de los cuadriláteros, en la que un trapezoide es un cuadrilátero *convexo* cualquiera. Probablemente en la mente de los autores de esos textos no estaba la idea de incluir los cuadriláteros cóncavos entre los trapezoides, ya que no los mencionan en ninguno de los textos de la serie, pero esto no puede servir de disculpa; al menos, debería haber una nota en el libro del profesor.

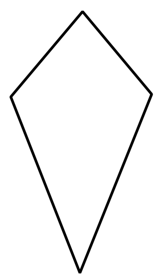
FIGURA 4



Otro ejemplo nos lo proporciona la serie A, en la que hasta 5° se incluye el romboide entre los paralelogramos y se especifica que «tiene los lados desiguales y los ángulos desiguales». Pero en 6° se define romboide como «el paralelogramo más general. Sus propiedades son: Lados opuestos iguales, ángulos opuestos iguales y ángulos consecutivos suplementarios». También se especifica que «esas propiedades son válidas para los otros tres paralelogramos, pero además cada uno de estos paralelogramos tiene otras propiedades características». Por lo tanto, un rectángulo o un rombo *no* son romboides en 5º, pero *sí* lo son en 6º.

Si comparamos unas series de libros de texto con otras, se pueden observar diferencias notables. En la serie C se utiliza «la definición de romboide de Rey Pastor», por considerarla interesante, aunque no coincide con ninguna de las usuales: Romboide es un «cuadrilátero *no paralelogramo* con dos pares de lados consecutivos guales» (la cursiva es nuestra). La figura 5 muestra un ejemplo de romboide, figura estudiada con mucha frecuencia en los libros de texto sajones bajo el nombre de cometa.

FIGURA 5



Por cierto, esa definición va seguida del siguiente comentario: «Estirando convenientemente un par de lados... aparece un romboide con cuatro lados iguales... Es el rombo», lo cual va en contra de la definición ya que los rombos *sí* son paralelogramos.

También encontramos cambios de definición análogos a los anteriores para los triángulos, concretamente en la familia de los isósceles. En el libro de 4º de la serie C se define el triángulo isósceles como «el triángulo que tiene dos lados de igual medida y uno desigual», pero en 5º y en 6º se define como «el triángulo que tiene dos lados iguales» (con el significado de «al menos dos iguales»). Así pues, un triángulo equilátero *no* es isósceles en 4º, pero *sí* lo es en 5º y 6º.

Lo mismo ocurre al comparar unas series de textos con otras. Por ejemplo, la definición de triángulos isósceles de la serie A («triángulo con dos lados iguales», con el significado de «al menos dos» lados iguales) difiere de la de la serie B («triángulo con dos lados iguales y el otro desigual»), manteniendo en cada caso la misma definición en todos los cursos de E.G.B. Luego un triángulo equilátero *sí* es isósceles en la serie A, pero *no* lo es en la B.

Las definiciones y las imágenes conceptuales que poseen los estudiantes que se encuentran en el segundo nivel de Van Hiele están muy arraigadas, por lo que existe una gran resistencia por parte de estos estudiantes a admitir nuevas versiones de conceptos conocidos que impliquen una modificación de su imagen conceptual. Pero a medida que progresan hacia el tercer nivel, los estudiantes se basan cada vez más en las propiedades matemáticas de los conceptos, de manera que cuando alcanzan el tercer nivel de razonamiento, los estudiantes ya pueden basarse por completo en las propiedades que componen las definiciones y clasificar o establecer relaciones de acuerdo con el nuevo concepto.

Esto afecta a la mayoría de los tipos de errores descritos en este artículo, pero esa característica destaca específicamente en los del tipo II. En estos casos, ni siquiera cuando el cambio de definición se realiza dentro de la misma serie de textos hay una explicación o llamada de atención sobre tal situación. Sería necesario especificar claramente (por lo menos en el libro del profesor) que los polígonos que se encierran bajo el mismo nombre ahora no son los mismos que en el curso anterior. Como mínimo, sería conveniente que los autores de los textos fueran conscientes de las situaciones conflictivas y las señalaran claramente en el libro del profesor, esto es, que presentaran con claridad las relaciones entre los tipos de polígonos, sobre todo en los casos en que hay diversas posturas a adoptar. Se ha visto en numerosas ocasiones que muchos profesores no realizan un juicio analítico de las definiciones (Hershkowitz y Vinner, 1984), lo cual hace necesario resaltar las posibles diferencias entre sus concepciones y las propuestas en los libros de texto.

El modelo de Van Hiele nos avisa de que no siempre es adecuado emplear cualquier clase de definición, pues los estudiantes no pueden pensar en términos inclusivos hasta el tercer nivel de razonamiento (por ejemplo, considerar los triángulos equiláteros como casos particulares de triángulos isósceles, los cuadrados como casos particulares de rombos o de rectángulos, etc.). Por lo tanto, sería lógico trabajar con definiciones exclusivas (por ejemplo, definiendo los triángulos isósceles como los que tienen «dos lados iguales y uno desigual») hasta que los estudiantes comienzan a desarrollar el tercer nivel de razonamiento, cosa que, actualmente, sólo alcanzan algunos estudiantes de los últimos cursos de E.G.B.

En cualquier caso, un cambio en la definición debe ir acompañado de la clarificación correspondiente sobre los significados anterior y actual y de las modificaciones que ello comporta, tanto en el concepto en sí como en las relaciones con las demás familias de polígonos.

Tipo III. Interpretación incorrecta de la definición. Este error aparece cuando, dada una definición, se indican o se utilizan como propiedades del concepto en cuestión algunas que no se pueden deducir lógicamente de la definición enunciada. Una fuente de errores de este tipo la proporcionan las definiciones de polígonos basadas en la intersección de «bandas»[1].

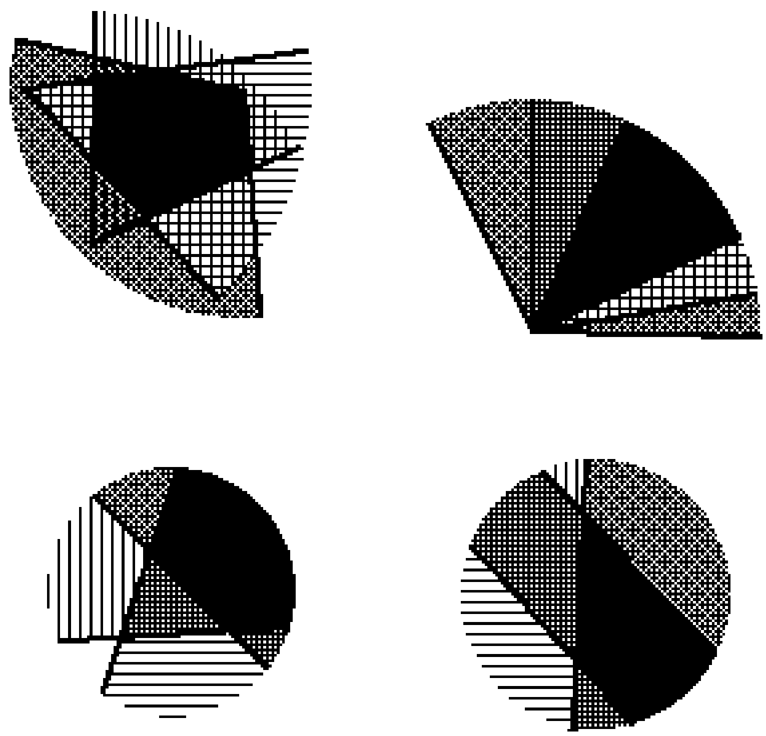
Al estudiar los cuadriláteros, en el libro del alumno de 4° de la serie A se define rectángulo como la «intersección de bandas perpendiculares», sin ninguna referencia a los lados (es decir a la anchura de las bandas). Sin embargo, en los comentarios del libro del profesor se afirma que «la anchura de las bandas es distinta y por eso sus lados no miden lo mismo». En consecuencia, un cuadrado *sí* es un rectángulo según la definición dada al alumno, pero *no* lo es según el libro del profesor. Algo parecido ocurre en el libro de 5° de la misma serie respecto de la definición de rombo: «Intersección de bandas de igual anchura». No se indica nada sobre los ángulos; sin embargo, en el libro del profesor, como solución a un ejercicio, se dice que «los ángulos del rombo son desiguales» y los del cuadrado son «iguales: y rectos».

1. No vamos a entrar a comentar la aberración didáctica que supone el uso de esta forma de definición, sino que nos limitaremos a analizar su corrección matemática.

Los autores del libro de 4° de la serie C han sido más cuidadosos que los anteriores, pues su definición de rombo mediante intersección de bandas exige que sean «de igual anchura y bordes no perpendiculares». A continuación se señala, como consecuencia, que «los cuatro lados son iguales y los ángulos no son rectos». Sin embargo, en ese mismo curso y también en el libro del alumno, se enseña otra definición de rombo, según la cual tiene «cuatro lados iguales», sin especificar nada acerca de los ángulos, por lo que éstos pueden ser rectos. O sea que un cuadrado *sí* es o *no* es también un rombo, según la página que se lea *del mismo libro.*

Siguiendo con este extendido y extraño gusto por dar esta clase de definiciones, la serie C define en 4° un triángulo como «la figura geométrica formada por la intersección de tres regiones angulares» y en 5° lo define como «la intersección de tres semiplanos». En la figura 6 mostramos algunos ejemplos de tales ¿¿triángulos?? (las regiones negras) que evidencian la incorrección de ambas definiciones (lo mismo ocurre con las definiciones de rombo comentadas antes). Una vez más, los autores han mantenido implícitas propiedades necesarias del concepto que deberían haber incluido en la definición.

FIGURA 6



El nivel 2 de Van Hiele es el primero en el que el trabajo con polígonos se basa en sus elementos y propiedades matemáticas. Durante el período de transición del nivel 1 al 2, los estudiantes van aprendiendo a razonar según esos criterios, si bien durante algún tiempo suelen basar sus juicios en una combinación de aspectos visuales y analíticos de las figuras, cosa que es necesario que superen. Para ello, la instrucción y la propia experiencia juegan un papel fundamental, por lo que hay que promover que la actividad de los estudiantes se base en las propiedades que forman las definiciones.

De manera análoga, al pasar del nivel 2 al 3, los estudiantes deben abandonar la concepción que tienen de las definiciones como listas descriptivas de propiedades y aprender a construir y utilizar definiciones matemáticas formales (es decir, conjuntos de propiedades necesarias y suficientes), por lo que durante esta transición es fundamental que las definiciones utilizadas tengan un papel claro y destacado en los problemas que resuelvan los estudiantes.

Los errores de los libros de texto del tipo III entorpecen y retrasan las dos transiciones mencionadas, hacia los niveles 2 y 3, pues consiguen que el papel de las definiciones y su estructura sean ambiguos y contradictorios. En los primeros ejemplos de este tipo citados, el error se debe a que la definición enunciada en el libro no se utiliza realmente, sino que se le añade alguna propiedad *no crítica* del concepto, con lo cual se favorecen los «juicios prototípicos» (Hershkowitz, 1989). Así, si se define el rombo como «La intersección de bandas de igual anchura» y después, en la resolución de un ejercicio, se dice que en los rombos «los ángulos han de ser desiguales», es evidente que la definición no es útil para analizar las figuras, por lo que los estudiantes que estén progresando hacia el nivel 2 seguramente retrocederán a la seguridad que les ofrece el razonamiento del nivel 1 y recurrirán a figuras particulares, normalmente la figura estándar, que cumplen esos nuevos requisitos. En cuanto a los estudiantes en transición al nivel 3, difícilmente podrán distinguir y entender las características de una definición formal y continuarán percibiendo las definiciones como una acumulación de propiedades del polígono.

Tipo IV. Diversas interpretaciones de la misma expresión gramatical. Los errores del segundo tipo provienen de cambios gramaticales que llevan a diferentes familias de polígonos. Pero también es posible, a veces, darle dos significados distintos a un mismo enunciado. Hemos encontrado 2 estructuras gramaticales en las que sucede esto:

a) Al indicar que cierto número de lados o ángulos cumplen una propiedad. Las dos interpretaciones, que llevan a conceptos distintos, son:

   - Considerar que *por lo menos* ese número de elementos cumplen la propiedad (interpretación matemática).
   - Considerar que *exactamente* ese número de elementos cumplen la propiedad (interpretación usual en un contexto extra-escolar).

   En los libros de 4° y 5° de la serie A se definen los trapecios como los cuadriláteros que «tienen dos lados paralelos». Observando los ejemplos, vemos que el significado que se quiere dar es de al menos dos lados paralelos. En el libro del profesor de 6° de esta serie se utiliza la misma frase («los que tienen dos lados paralelos»), pero, si los autores son coherentes, ahora se debe interpretar como que «tienen sólo dos lados paralelos», pues así es como definen los trapecios en el correspondiente libro del alumno (aunque, recordando el primer ejemplo del tipo III,...).

En las definiciones de triángulos, este tipo de problema se suele presentar con los isósceles: La expresión «dos lados iguales» aparece en el libro del profesor de 4° de la serie B con el sentido de «exactamente dos lados iguales», pues en el libro del alumno se define triángulo isósceles como el que tiene «dos lados iguales y el otro desigual».

b) En las definiciones de algunos cuadriláteros, tener los lados o ángulos «opuestos iguales» o «iguales dos a dos» se puede interpretar cómo:

- Que los cuatro lados o ángulos pueden ser iguales (interpretación matemática).
- Que hay lados o ángulos distintos necesariamente.

Tanto en el caso A) como en el B), la segunda interpretación se puede considerar también como un error del tipo III, ya que en la definición no se hace ninguna alusión a los lados o ángulos contiguos, por lo que es incorrecto dar por supuesto que éstos deben ser distintos.

Un ejemplo de la primera interpretación lo encontramos en el libro de 5° de la serie A, donde se indica, refiriéndose al cuadrado, rectángulo, rombo y romboide, que «los cuatro paralelogramos tienen sus lados opuestos iguales, sus ángulos opuestos iguales...». Evidentemente, se admite que los cuatro lados y/o los cuatro ángulos puedan ser iguales.

Un ejemplo de la segunda nterpretación lo tenemos en 4° de la serie B: En la lección correspondiente, la definición de rombo incluye la condición de que tiene los «ángulos iguales dos a dos y no rectos». Pero después, en un apartado destacado que resume lo que los alumnos deben recordar, dicha condición ha sido sustituida por «ángulos opuestos iguales».

Los errores de este tipo también tienen incidencia directa en los estudiantes de los niveles 2 y 3, pues es en estos niveles de razonamiento donde se deben crear las bases para formar su capacidad de razonamiento lógico-matemático: De las dos interpretaciones que se pueden hacer de una frase, siempre hay una correcta desde el punto de vista matemático y otra que no lo es, siendo precisamente esta última la que coincide con el significado usual en la vida diaria.

Por lo general, los estudiantes que se encuentran en los niveles 1 ó 2 tienen que utilizar definiciones verbales y encuentran problemas para interpretarlas correctamente si la redacción con la que se presentan es ambigua. Por ejemplo, es muy frecuente que estos estudiantes interpreten «tener dos lados iguales» como «tener exactamente dos lados iguales», aunque hayan recibido indicaciones del profesor o el libro para interpretarla como «tener al menos dos lados iguales»[2].

¿Cómo afecta esta situación al nivel de razonamiento de los estudiantes? A nuestro juicio, durante el progreso hacia el nivel 3, los estudiantes deben aprender a interpretar matemáticamente los enunciados verbales de las propiedades (por ejemplo, que «tener dos lados iguales» es sinónimo de «tener *al menos* dos lados iguales»). Los problemas surgen cuando existen incoherencias, en cuyo caso el proceso de desarrollo del razonamiento de los estudiantes sufre un retraso, o también cuando, con estudiantes del nivel 2 de Van Hiele, la interpretación hecha por el profesor o el libro de texto lleva a definiciones de tipo

2. Estas afirmaciones provienen de nuestros trabajos sobre el modelo de Van Hiele con varios centenares de alumnos de cada uno de los 3 niveles educativos, Enseñanza Primaria, Secundaria y Universitaria.

inclusivo (con las que, por ejemplo, los cuadrados son casos particulares de rombos o de rectángulos), cuya comprensión, en términos de todas las propiedades y relaciones implicadas, no es posible hasta el nivel 3.

Al igual que sucede con los errores de tipo III, hay profesores (y autores de los libros de texto) que pasan por alto hacer un estudio analítico correcto de la definición proporcionada por el libro de texto. Por lo tanto, creemos que también aquí es necesario que el libro del profesor incluya comentarios claros sobre la interpretación que se va a dar a las frases conflictivas, siendo coherentes en todo momento, y justificando un cambio, si éste se produce, al cambiar de curso. Por otra parte, creemos que la mejor solución sería utilizar un lenguaje que no lleve a confusión, esto es, que evite la doble interpretación a la que hemos aludido: por ejemplo, se pueden incluir las partículas «al menos» o «exactamente» en los enunciados.

Tipo V. Omisión de conocimientos básicos. Nos encontramos ante un error didáctico que se presenta por no mencionar, a lo largo de toda la E.G.B., algunos conceptos que, al menos en los contextos educativo y cultural españoles, son de amplia difusión y que deberían ser conocidos por los estudiantes.

En el grupo de conceptos que estamos analizando en este artículo, hemos echado en falta en las series B y C los cuadriláteros cóncavos. Esta omisión hace, además, que los libros de texto enseñen relaciones que no son correctas dentro de la organización usual de los polígonos. Ya vimos en el primer ejemplo del tipo II un error generado por esta omisión. Otros ejemplos los tenemos en la serie B, que define en 5° el trapezoide como el cuadrilátero que «no tiene ningún lado paralelo», y en la serie C, que lo define como el «cuadrilátero general».

Si bien en ninguno de los 8 libros de cada serie se hace mención explícita a los polígonos cóncavos, en ambas series aparecen dibujados algunos -pocos- polígonos cóncavos, considerándolos explícitamente como polígonos y como cuadriláteros (por ejemplo, en el libro de 4° de la serie C aparecen polígonos cóncavos como ejemplos después de la definición de cuadrilátero, en cuestiones de áreas y en la identificación del número de lados).

Este tipo de errores dan lugar a la formación de imágenes conceptuales incompletas y a la utilización de prototipos visuales que no incluirán casos en los que haya una variable perceptiva muy fuerte respecto a los ejemplos presentados. La total ausencia de polígonos cóncavos en los 8 libros de una serie, o la falta de referencia a su característica de ser polígonos, o cuadriláteros, en los pocos ejemplos que aparezcan a lo largo de toda la serie, harán que gran parte de los estudiantes no reconozcan los polígonos cóncavos como polígonos o como cuadriláteros. Por otra parte, algunas definiciones propuestas en los libros de texto, como las que hemos analizado en los ejemplos anteriores, que no tienen en cuenta la existencia de los polígonos cóncavos, conducen a clasificaciones erróneas de éstos. Cuando se presenta una figura concreta, para identificar si pertenece o no a una familia de la que se da la definición, los estudiantes, a medida que avanzan en el nivel 2 de razonamiento, recurren cada vez más a las propiedades incluidas en la definición. Los estudiantes que utilicen las series B o C identificarán los cuadriláteros cóncavos como trapezoides, cosa que es incorrecta.

CONCLUSIONES

Hemos presentado ejemplos concretos, tomados de libros de texto de E.G.B. de amplia difusión en España, de situaciones que pueden entorpecer el proceso de aprendizaje de la Geometría y el desarrollo del nivel de razonamiento de los estudiantes de E.G.B. En algunos casos, la solución es que los autores revisen y eliminen los errores presentes en los libros de texto, mediante un estudio analítico matemáticamente correcto de las definiciones y las consecuencias de éstas. En primer lugar, tienen que evitar los errores matemáticos y las discrepancias o contradicciones dentro de un mismo libro de texto o entre los libros del alumno y el profesor del mismo curso. Por otra parte, deben considerar los cambios conceptuales que se originan al variar, dentro de la misma serie, la definición de un concepto a lo largo de los diversos cursos, para prever y contrarrestar las incoherencias y las dificultades a los estudiantes que el cambio pueda ocasionar.

También hemos analizado diversas formas existentes en los libros de texto de clasificar triángulos y cuadriláteros y de interpretar algunas expresiones gramaticales. En todos los casos conflictivos es aconsejable hacer explícita en el libro del profesor la postura adoptada, explicando los posibles contrastes existentes entre las opciones adoptadas en ese curso y en otros cursos de la misma serie o, incluso, con otras posturas usuales. El apoyo visual, mediante la inclusión de abundantes ejemplos, resulta de gran ayuda en estas situaciones para que, tanto profesores como estudiantes, puedan superar los juicios prototípicos o las interpretaciones del lenguaje basadas más en el sentido dado a ciertas palabras en el lenguaje ordinario que en el lógico-matemático. La solución de estos problemas se puede conseguir también mediante la mejora de la presentación visual o verbal de los conceptos, ofreciendo una mayor variedad de ejemplos, seleccionados cuidadosamente, y unas definiciones textuales más concretas, que no den pie a ambigüedades.

REFERENCIAS

BURGER, W.F.; SHAUGHNESSY, J.M. (1986): «Characterizing the Van Hiele levels of development in geometry». *Journal for Research in Mathematics Education,* 17 (1), 31-48.

CLEMENTS, D.H.; BATTISTA, M.T. (en prensa): «Geometry and spatial reasoning». En Grouws, D.A. (ed.), *Handbook of research on mathematics teaching.* Reston (EE.UU.), N.C.T.M.

GUTIERREZ, A. et al. (1991): *Diseño y evaluación de una propuesta curricular de aprendizaje de la geometría en enseñanza media basada en el modelo de razonamiento de Van Hiele* (Memoria final del Proyecto de Investigación). Madrid, C.I.D.E.

GUTIERREZ, A.; JAIME, A. (1989): «Bibliografía sobre el modelo de razonamiento geométrico de Van Hiele». *Enseñanza de las Ciencias,* 7 (1), 89-95.

HERSHKOWITZ, R. (1989): «Visualización in geometry-two sides of the coin». *Focus on Learning Problems in Mathematics,* 11 (1), 61-76.

HERSHKOWITZ, R. (1990): «Psychological aspects of learning geometry». En Nesher y Kilpatrick (1990), 70-95.

HERSHKOWITZ, R.; VINNER, S. (1984): «Children's concepts in elementary geometry-A reflection of teacher's concepts?». En Southwell, B. et al. (ed.), *Proceedings of the 8th P.M.E.,* 63-69.

JAIME, A.; GUTIERREZ, A. (1990): «Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: El modelo de Van Hiele». En Llinares, S.; Sánchez, M.V. (ed.), *Teoría y práctica en educación matemática* (Sevilla, Alfar), 295-384.

N.C.T.M. (1989): *Curriculum and evaluation standards for school mathematics.* Reston (EE.UU.), N.C.T.M.

NESHER, P.; KILPATRICK, J. (1990): *Mathamatics and cognition: A research synthesis by the International Group for the Psychology of Mathamatics Education.* Cambridge (G.B.), Cambridge U.P.

VINNER, S.; HERSHKOWITZ, R. (1983): «On concept formation in geometry». *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik,* 83 (1), 20-25.

WILSON P.S. (1990): «Inconsistent ideas relatad to definitions and examples». *Focus on Learning Problems in Mathematics,* 12 (3/4), 31-47.