CAPITULO VI

UNA PROPUESTA DE FUNDAMENTACION PARA LA ENSEÑANZA DE LA GEOMETRIA: EL MODELO DE VAN HIELE

Adela Jaime Pastor
Angel Gutiérrez Rodríguez

1.- ¿Qué es un modelo?

Como indica el título de este libro, un objetivo central del mismo es ofrecer algunas ideas que ayuden a establecer conexiones entre las propuestas que realizan los investigadores en educación matemática y la realidad de un grupo concreto de estudiantes, de manera que el trabajo de los investigadores resulte útil al profesor de ese grupo y no se quede en algo desligado de la actividad educativa cotidiana. En este capítulo describiremos un modelo de razonamiento y aprendizaje de las matemáticas elaborado por dos profesores e investigadores holandeses llamados Pierre Marie Van Hiele y Dina Van Hiele-Geldof. Pero antes de referirnos a dicho modelo, es conveniente conocer cuál es el proceso que tiene lugar durante la elaboración de un modelo y su posterior utilización, ya que esto ayudará a entender y utilizar el modelo de Van Hiele.

En términos generales, un "modelo" (matemático, físico, químico, psicológico, etc.) es una representación, generalmente simplificada, de un determinado fenómeno real; muchos de nosotros hemos estudiado los modelos cristalográficos (prismas que representan las diferentes estructuras cristalinas de los minerales), o hemos usado esos conjuntos de bolas de colores que representan la estructura de los átomos; en matemáticas, los ábacos, los bloques multibase, las regletas de Cuisenaire y las calculadoras son diferentes modelos utilizados para representar los números, las operaciones aritméticas y sus propiedades. Aunque nuestro interés se centra en lo que podemos llamar "modelos educativos", es decir aquéllos que tienen que ver con el desarrollo intelectual, la enseñanza o el aprendizaje de las matemáticas, seguramente son más conocidos por los lectores algunos modelos físicos, químicos o, sobre todo, matemáticos, por lo que usaremos éstos como ejemplo paradigmático, ya que existe un paralelismo total entre las formas de construir o aplicar los modelos de unos tipos y de otros.

Un modelo matemático tiene como objetivo describir matemáticamente una situación del mundo real que se presenta con la suficiente frecuencia como para que merezca la pena estudiarla y tratar de comprenderla. Así, por ejemplo, los polígonos y poliedros son modelos que representan determinadas estructuras cristalinas presentes en la naturaleza, las Leyes de Newton son un modelo matemático de las interacciones de los cuerpos en el espacio. Del mismo modo, las diferentes teorías de razonamiento, enseñanza o aprendizaje son modelos que tratan de describir aspectos relacionados con el contexto formado por el desarrollo intelectual de los estudiantes y su aprendizaje escolar (Piaget es, sin duda, el autor más conocido).

La creación de un modelo matemático (o de cualquiera de las áreas citadas antes) sigue un patrón básico, esquematizado en la figura 1, que consta de las cuatro fases siguientes:

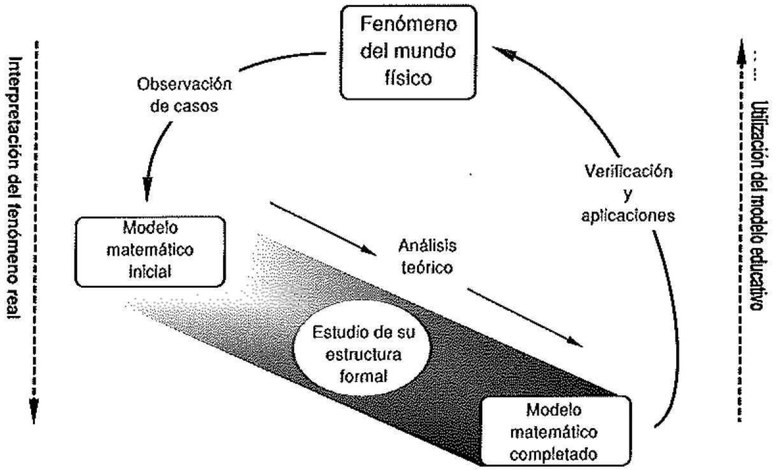


Figura 1. Creación y utilización de un modelo matemático.

a) La necesidad de construir un modelo matemático surge de la observación de determinados hechos, que se repiten una y otra vez y que producen resultados semejantes en individuos u objetos sometidos a condiciones similares; estas regularidades provocan en el observador el deseo de entender sus causas para poder predecirlas, provocarlas o evitarlas. En la historia antigua tenemos infinidad de ejemplos de este tipo relacionados con la astronomía o la naturaleza; actualmente la elaboración y uso de modelos matemáticos es una práctica habitual en industrias como la aeronáutica, del automóvil o electrónica.

b) Las observaciones realizadas dan lugar al primer planteamiento de un modelo que trate de imitarlas y repetirlas. Esta es la fase más laboriosa del trabajo, pues en muchos casos el investigador no tiene ninguna pista de lo que está buscando ni de su aspecto. Por otra parte, un mínimo de rigor científico exige la validación del modelo mediante la realización de nuevas experiencias y la comparación de los resultados reales con los teóricos.

c) Una vez creado y validado el modelo matemático, se inicia un proceso de estudio teórico del mismo, durante el cual se desarrolla y completa su estructura matemática, ya que habrá diversas propiedades que no han sido descubiertas por los investigadores durante sus experiencias. Este proceso da lugar, generalmente, a la modificación de la propuesta original, mediante el planteamiento de una versión más completa del modelo y la consiguiente verificación de la validez de las modificaciones que se hayan introducido. Además, se habrá logrado una comprensión más profunda del modelo que permitirá aplicarlo con más exactitud y obtener mejores resultados.

d) Por último, se entra en la fase de aplicación del modelo. Es ahora cuando se puede empezar a sacar provecho del modelo, no sólo por parte de sus creadores, sino de cualquier otra persona que lo necesite. Un ejemplo espectacular de esta fase lo tenemos en la utilización del modelo matemático que describe las interacciones entre los cuerpos para el estudio de la estructura del sistema solar, gracias a lo cual se pudo deducir la existencia del planeta Plutón y su tamaño 25 años antes de que fuera visto por primera vez, cosa que ocurrió en 1930 mediante un telescopio construido especialmente para ello [1].

Un problema que se encuentran los investigadores al crear un nuevo modelo matemático es el de diferenciar qué es lo básico y qué lo secundario en el fenómeno que están observando, ya que es imposible pretender que un modelo describa con exactitud el comportamiento de todos los individuos: Siempre habrá algunos factores extraños o aleatorios que darán lugar a resultados diferentes de los previstos por el modelo. Así, un modelo matemático para describir la caída de los cuerpos que no tenga en cuenta el rozamiento con el aire (una de las Leyes de Newton), indicará la velocidad con más error que otro modelo que sí lo considere [2]; no obstante, ningún modelo tomará en consideración factores como la fuerza del viento, la presencia de lluvia o la presión atmosférica, los cuales también influyen en la velocidad del móvil. Algo parecido ocurre con los diferentes modelos atómicos que se han sucedido a lo largo de este siglo, en los que siempre se representan los protones, neutrones y electrones, pero están ausentes otras de las partículas que integran los átomos. La bondad de un modelo matemático será mayor cuanto más elementos relevantes tenga en cuenta y, sobre todo, cuanto más próximos estén los resultados reales a los previstos por el modelo.

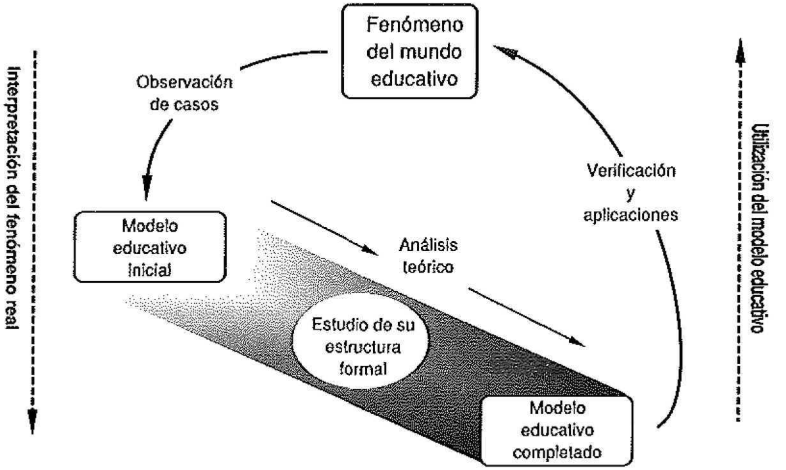


Figura 2. Creación y utilización de un modelo educativo.

En el caso de los modelos educativos, el proceso que se sigue para su construcción es análogo al de los modelos matemáticos (ver la figura 2), si bien los elementos de estudio son siempre seres humanos: La observación de regularidades en el comportamiento de diversos estudiantes en determinadas circunstancias hace que los investigadores las analicen para obtener alguna explicación y construir un modelo que les permita describir cómo se produce el desarrollo intelectual o el aprendizaje de los alumnos; una vez que el modelo ha sido validado y perfeccionado, será utilizado por profesores, diseñadores de currículum, etc. con el fin de obtener mejores métodos de enseñanza y lograr mejores resultados.

El hecho de que la base de los modelos educativos se encuentre en el estudio del comportamiento de los individuos introduce una gran cantidad de factores aleatorios que es muy difícil, o imposible, poder controlar: Cansancio físico o mental, estado anímico, interés, etc. Por lo tanto, **ningún profesor debería caer en el error de esperar que aplicando fielmente un determinado modelo educativo** (el de Van Hiele o cualquier otro) **se resolverán todos sus problemas y que todos sus alumnos comprenderán y aprenderán las matemáticas sin esfuerzo.** Más bien, lo que hay que esperar es que, aunque el modelo no produzca resultados perfectos, sí proporcione mejores resultados que otras formas de trabajo. En este sentido, creemos que el modelo de Van Hiele es una excelente guía para los profesores pues, como veremos, enseña a descubrir cómo debe comunicarse el profesor con los alumnos, para presentarles los nuevos conceptos de manera que se fomente la comprensión de las matemáticas, su aprendizaje y el desarrollo de la capacidad de razonamiento de los estudiantes. Por otra parte, pensamos que una parte muy importante del éxito de un modelo educativo se basa en la confianza del profesor en el modelo y en su conocimiento profundo del mismo, pues ello le permitirá hacer un uso flexible del modelo, lo cual siempre es necesario.

2.- ¿En qué consiste el modelo de Van Hiele?

Una conversación con profesores de matemáticas de Enseñanza Elemental o Media pondrá de relieve inmediatamente la existencia de un sentimiento de impotencia por parte de muchos profesores frente al progreso realizado por una parte más o menos importante de sus alumnos durante el curso. Los profesores se lamentan de una serie de problemas como los siguientes: Muchas veces no hay manera de conseguir que los estudiantes comprendan algún concepto nuevo; otras veces parece que éstos "se saben" los conceptos o propiedades que el profesor les acaba de introducir, pero sólo son capaces de usarlos en ejemplos idénticos a los resueltos con la ayuda del profesor; también ocurre, especialmente en Enseñanza Media, que los estudiantes pueden resolver problemas concretos con bastante habilidad, pero carecen de ideas cuando deben resolver esos mismos problemas planteados en un contexto algo diferente, abstracto o más formalizado; otra situación típica de las clases de matemáticas es la de los estudiantes que tienen que recurrir a memorizar las demostraciones de los teoremas o las formas de resolver los problemas, pues es la única forma legal que tienen de aprobar los exámenes.

Las reflexiones anteriores no están originadas por un problema reciente, ni tampoco son particulares de los profesores españoles, aunque sí son usuales en cierto estilo de profesores: Aquéllos que se preocupan de que sus alumnos razonen sobre lo que están haciendo, de que comprendan el significado y la utilidad de las matemáticas y de que lleguen a ser capaces de resolver problemas diferentes de los ya conocidos. Por el contrario, no es nada frecuente oir los lamentos anteriores a profesores cuyo único objetivo es hacer que sus alumnos memoricen las definiciones, las fórmulas y los enunciados y demostraciones de los teoremas.

Hace cerca de 40 años, la preocupación ante este problema experimentada por dos profesores holandeses, que daban clase de matemáticas en Enseñanza Media, les indujo a estudiar a fondo la situación para tratar de encontrarle alguna solución. Estos profesores son Pierre Marie Van Hiele y Dina Van Hiele-Geldof; leamos cómo explica el propio P.M. Van Hiele el surgimiento de su interés por este tema (Van Hiele [1986], p. 39):

"Cuando empecé mi carrera como profesor de matemáticas, pronto me di cuenta de que era una profesión difícil. Había partes de la materia en cuestión que yo podía explicar y explicar, y aún así los alumnos no entendían. Podía ver que ellos lo intentaban realmente, pero no tenían éxito. Especialmente al comienzo de la geometría, cuando había que demostrar cosas muy simples, podía ver que ellos daban el máximo de sí, pero la materia parecía ser demasiado difícil. Pero debido a que yo era un profesor inexperto, también tenía que considerar la posibilidad de que yo fuera un mal profesor. Y esta última y desagradable posibilidad se afirmaba por lo que ocurría posteriormente: De pronto parecía que comprendían la materia en cuestión. Podían hablar de ella con bastante sentido y a menudo decían: "No es tan difícil, pero ¿por qué nos lo explicó usted de forma tan complicada?" En los años que siguieron cambié mi explicación muchas veces, pero las dificultades se mantenían. Parecía como si siempre estuviera hablando en una lengua distinta. Y considerando esta idea descubrí la solución, los diferentes niveles del pensamiento."

Si recordamos la primera sección de este capítulo, podemos reconocer en el párrafo anterior un resumen del fenómeno educativo que dio lugar al modelo de razonamiento de Van Hiele (ver figura 2): Un profesor se siente preocupado por la similitud en la manera de trabajar y la comprensión de sus alumnos año tras año, independientemente de la forma como él les presente la materia y de su experiencia creciente como profesor. P.M. Van Hiele continúa explicando brevemente cuál fue su primer intento de solución, mediante la elaboración de un modelo educativo que trata de explicar el porqué del comportamiento de sus alumnos (Van Hiele [1986], pp. 39-40):

"Primero presenté mi descubrimiento de la siguiente forma (Van Hiele [1955], p. 289):

"Puede decirse que alguien ha alcanzado un nivel superior de pensamiento cuando un nuevo orden de pensamiento le permite, con respecto a ciertas operaciones, aplicar estas operaciones a nuevos objetos. El alcance del nuevo nivel no se puede conseguir por enseñanza pero, aún así, mediante una adecuada elección de ejercicios, el profesor puede crear una situación favorable para que el alumno alcance nivel superior de pensamiento."

Se puede ver mi intento por librarme a mí mismo de no ser capaz de dar suficiente instrucción; también se puede ver la solución: una adecuada serie de ejercicios. En realidad, se ha puesto de manifiesto que al cambiar los libros de texto todas las dificultades podrían desaparecer. Así que mi introducción a los niveles no era sólo una afirmación sino también un programa."

Así pues, en estos párrafos tenemos recogidas las ideas centrales de lo que fue el modelo educativo inicial (recordar la figura 2) creado por los Van Hiele. Dichas ideas, que siguen siendo el corazón del modelo de Van

Hiele tal como se utiliza actualmente, pueden enunciarse de la siguiente manera:

(1) Se pueden encontrar varios niveles diferentes de perfección en el razonamiento de los estudiantes de matemáticas.

(2) Un estudiante sólo podrá comprender realmente aquellas partes de las matemáticas que el profesor le presente de manera adecuada a su nivel de razonamiento.

(3) Si una relación matemática no puede ser expresada en el nivel actual de razonamiento de los estudiantes, será necesario esperar a que éstos alcancen un nivel de razonamiento superior para presentársela.

(4) No se puede enseñar[3] a una persona a razonar de una determinada forma. Pero sí se le puede ayudar, mediante una enseñanza adecuada de las matemáticas, a que llegue lo antes posible a razonar de esa forma.

El modelo de Van Hiele está formado, realmente, por dos partes: La primera de ellas es descriptiva, ya que identifica una secuencia de tipos de razonamiento, llamados los "niveles de razonamiento", a través de los cuales progresa la capacidad de razonamiento matemático de los individuos desde que inician su aprendizaje hasta que llegan a su máximo grado de desarrollo intelectual en este campo. La otra parte del modelo da a los profesores directrices sobre cómo pueden ayudar a sus alumnos para que puedan alcanzar con más facilidad un nivel superior de razonamiento; estas directrices se conocen con el nombre de "fases de aprendizaje".

Tras la publicación del primer planteamiento de su modelo de razonamiento y enseñanza, los Van Hiele han seguido trabajando en su perfeccionamiento y desarrollo[4]; al mismo tiempo, otros educadores y psicólogos interesados por el modelo de Van Hiele han realizado investigaciones y experimentaciones conducentes a lograr un mejor conocimiento y un uso más eficaz del mismo (en Gutiérrez, Jaime [1989] ofrecemos un resumen de algunas publicaciones interesantes; ver también Senk [1985]). Como consecuencia de este proceso (idéntico al representado en la figura 2), que sigue desarrollándose en la actualidad, se ha llegado a definir la forma que tiene hoy el modelo.

Vamos a dedicar las próximas páginas a describir y analizar las dos componentes del modelo de Van Hiele, así como a mostrar algunos ejemplos de aplicaciones hechas en las Enseñanzas Elemental o Media. Si bien la filosofía que inspira el modelo de Van Hiele se refiere al razonamiento y aprendizaje de las matemáticas en general, tanto las observaciones iniciales de los esposos Van Hiele como todos los estudios relevantes que se han hecho desde entonces están centrados en la geometría; por este motivo, los ejemplos y las propuestas que vamos a presentar a continuación se orientan a esta parte de las matemáticas. Creemos que es sumamente difícil aplicar el modelo de Van Hiele a áreas de las matemáticas diferentes de la geometría y que para ello sería necesario realizar cambios muy drásticos en las caracterizaciones de los niveles; de hecho, ha habido algunos intentos en este sentido, incluso por el propio P.M. Van Hiele (ver Van Hiele [1987]), pero sus resultados han sido muy pobres.

3.- Los niveles de razonamiento de Van Hiele.

Si observamos y comparamos las formas de aprender, de trabajar y de expresarse en geometría de los estudiantes de diferentes niveles educativos, no nos costará mucho identificar notables diferencias entre los niños de los primeros y de los últimos cursos de E.G.B., los estudiantes de Enseñanza Media y los de las Facultades de Ciencias: Mientras que los primeros sólo son capaces de trabajar de forma visual, refiriéndose a los objetos que tienen ante ellos, y no saben justificar con claridad sus ideas, los niños de los últimos cursos de E.G.B. han logrado un notable desarrollo en su capacidad de expresión y, si bien siguen necesitando objetos físicos para estudiar las matemáticas, esos objetos son representantes de ciertos conceptos o propiedades generales y abstractas; no obstante, estos niños todavía no suelen ser capaces de realizar razonamientos formales (por ejemplo, lo que los matemáticos entendemos por "demostraciones"), habilidad que con el apoyo de una enseñanza adecuada se puede terminar de adquirir en los últimos cursos de Enseñanza Media y se perfecciona, si hay ocasión para ello, en la Universidad.

Así pues, la presencia de los niveles de razonamiento en la enseñanza es bastante evidente. Las siguientes son las principales características que permiten reconocer cada uno de los cuatro niveles de razonamiento matemático de Van Hiele a partir de la actividad de los estudiantes (quien desee ampliar esta lista de descriptores, puede consultar Burger, Shaughnessy [1986], Crowley [1987] o Fuys, Geddes, Tischler [1985]):

Nivel 1 (de reconocimiento):

- Los estudiantes perciben las figuras geométricas en su totalidad, de manera global, como unidades, pudiendo incluir atributos irrelevantes en las descripciones que hacen.
- Además, perciben las figuras como objetos individuales, es decir que no son capaces de generalizar las características que reconocen en una figura a otras de su misma clase.
- Los estudiantes se limitan a describir el aspecto físico de las figuras; los reconocimientos, diferenciaciones o clasificaciones de figuras que realizan se basan en semejanzas o diferencias físicas globales entre ellas.

• En muchas ocasiones las descripciones de las figuras están basadas en su semejanza con otros objetos (no necesariamente geométricos) que conocen; suelen usar frases como "... se parece a ...", "... tiene forma de ...", etc.

• Los estudiantes no suelen reconocer explícitamente las partes de que se componen las figuras ni sus propiedades matemáticas.

Este es, obviamente, el nivel más elemental de razonamiento, típico de Preescolar y primeros cursos de E.G.B., cuando los niños se dedican, bajo la guía del profesor, a manejar determinados tipos de figuras (por ejemplo algunos cuadriláteros), aprenden sus nombres y practican actividades de reconocimiento en los dos sentidos: nombre <—> figura. Así, si les damos a los niños un grupo de cuadriláteros, pueden seleccionar los rombos, los cuadrados, los rectángulos, etc. y si cogemos, uno detrás de otro, varios de esos polígonos, los niños podrán decir sus nombres.

Si el profesor pregunta a los niños en qué se diferencian, por ejemplo, los rombos de los rectángulos, sus respuestas harán énfasis en las diferencias de forma, tamaño, tal vez color, de las figuras que tengan delante *en ese momento* ("el rectángulo es más largo", "el rombo es más picudo", ...); en este nivel no debemos esperar respuestas que hagan incidencia en paralelismo, ángulos rectos, etc.

En coherencia con este tipo de razonamiento, no es de extrañar que los niños clasifiquen como figuras de tipos diferentes los cuadrados y los rectángulos (es decir que consideran que un cuadrado no es rectángulo), los cuadrados y los rombos[5] o dos rectángulos como los de la figura 3.

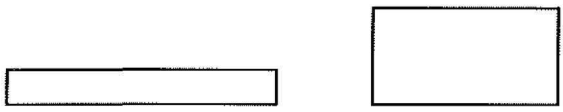


Figura 3.

Decíamos que se trata de un nivel de razonamiento típico de los primeros cursos de E.G.B., pero no es exclusivo suyo; en realidad, cada vez que se presente a los estudiantes algún concepto geométrico nuevo, éstos van a pasar por el nivel 1, si bien algunas veces ese paso será muy rápido. Por ejemplo, al iniciar el estudio de los ángulos, perpendicularidad y paralelismo, geometría espacial, etc., siempre habrá un período de tiempo en el que los estudiantes sólo tendrán un conocimiento físico, visual, de las nuevas figuras.

En la última de las características del nivel 1 que hemos enunciado decimos que los estudiantes no suelen reconocer *explícitamente* ...; trataremos de explicar mediante un ejemplo qué queremos decir: Si le damos a un niño pequeño que se encuentra en el nivel 1 de Van Hiele un círculo, un triángulo y un cuadrado y le preguntamos en qué se diferencian estas figuras, seguramente su respuesta se referirá a redondez, figuras más o menos puntiagudas, etc., pero no hablará de número de vértices ni de amplitud de ángulos. Es evidente que el niño reconoce los vértices (o su ausencia) como característica diferenciadora entre las figuras, pero no es consciente de ello y, por lo tanto, no los usa directamente. Con estudiantes mayores esta situación no se da tan claramente: Ante la misma situación anterior, un niño de los últimos cursos de E.G.B. sí hablará de los ángulos, porque ya los ha estudiado, pero para él esos elementos son particulares de la figura que está utilizando, pues carece por completo de la capacidad de generalización (más adelante veremos un ejemplo de esto).

Nivel 2 (de análisis):

- Los estudiantes se dan cuenta de que las figuras geométricas están formadas por partes o elementos y de que están dotadas de propiedades matemáticas; pueden describir las partes que integran una figura y enunciar sus propiedades, siempre de manera informal.
- Además de reconocer las propiedades matemáticas mediante la observación de las figuras y sus elementos, los estudiantes pueden deducir otras propiedades generalizándolas a partir de la experimentación.
- Sin embargo, no son capaces de relacionar unas propiedades con otras, por lo que no pueden hacer clasificaciones lógicas de figuras basándose en sus elementos o propiedades.

La primera característica de este nivel que hemos enunciado revela su diferencia básica con el nivel 1: Los estudiantes han cambiado su forma de mirar las figuras geométricas, ya son conscientes de que pueden estar formadas por elementos y de que son portadoras de ciertas propiedades. Mientras para un estudiante del nivel 1 de Van Hiele un rectángulo es una figura reconocible porque tiene una determinada forma (como las puertas o los libros), para otro que se encuentre en el nivel 2, un rectángulo es un cuadrilátero con lados paralelos dos a dos, ángulos rectos, lados opuestos iguales, etc.; es decir, su respuesta a qué es un rectángulo será una lista de las propiedades que conoce.

Otro avance importante en el tipo de razonamiento del nivel 2 respecto al nivel 1 está en el desarrollo por parte de los estudiantes de la capacidad para reconocer que las figuras concretas que están manipulando son (o pueden ser) representantes de unas familias. Por ejemplo, si, a partir de la manipulación de unos cuantos rombos, un estudiante del nivel 2 descubre que las diagonales son perpendiculares, sabrá, sin necesidad de comprobarlo, que las diagonales de cualquier otro rombo que le presenten serán también perpendiculares (incluso cuando el dibujo sea poco exacto).

El nivel 2 es el primero que ofrece un razonamiento que podemos llamar "matemático", pues es el primero en el que los estudiantes son capaces de descubrir y generalizar (necesariamente a partir de la observación y la manipulación) propiedades que todavía no conocían. Sin embargo, esta capacidad de razonamiento es limitada, pues usarán las propiedades de una figura como si fueran independientes entre sí; por ejemplo, no relacionarán la existencia de ángulos de 90°, la perpendicularidad o el paralelismo de lados. Esto hace que no puedan clasificar adecuadamente las diferentes familias de polígonos, ya que seguirán considerando, por ejemplo, los rectángulos y los cuadrados como dos familias disjuntas; tiene más peso para estos estudiantes la existencia de algunas propiedades diferenciadoras que la existencia de otras propiedades comunes (en términos piagetianos, podríamos decir que no tienen la habilidad de hacer inclusiones de clases).

Nivel 3 (de clasificación):

- En este nivel comienza la capacidad de razonamiento formal (matemático) de los estudiantes: Ya son capaces de reconocer que unas propiedades se deducen de otras y de descubrir esas implicaciones; en particular, pueden clasificar lógicamente las diferentes familias de figuras a partir de sus propiedades o relaciones ya conocidas. No obstante, sus razonamientos lógicos se siguen apoyando en la manipulación.
- Los estudiantes pueden describir una figura de manera formal, es decir, pueden dar definiciones matemáticamente correctas, comprenden el papel de las definiciones y los requisitos de una definición correcta.
- Si bien los estudiantes comprenden los sucesivos pasos individuales de un razonamiento lógico formal, los ven de forma aislada, ya que no comprenden la necesidad del encadenamiento de estos pasos ni entienden la estructura de una demostración: Pueden entender una demostración explicada por el profesor o desarrollada en el libro de texto, pero no son capaces de construirla por sí mismos.
- Al no ser capaces de realizar razonamientos lógicos formales ni sentir su necesidad, los estudiantes no comprenden la estructura axiomática de las matemáticas.

Si la capacidad de razonamiento propia del nivel 2 no permitía a los estudiantes entender que unas propiedades pueden deducirse de otras, al alcanzar el nivel 3 habrán adquirido esta habilidad de conectar lógicamente diversas propiedades de la misma o de diferentes figuras. En el caso del estudio de los cuadriláteros, los estudiantes de este nivel ya podrán entender que la igualdad de los ángulos opuestos implica el paralelismo de los lados, que la igualdad de lados implica la perpendicularidad de diagonales, etc.

Otras consecuencias de la nueva habilidad mental de los estudiantes son que ya serán capaces de clasificar inclusivamente los diferentes cuadriláteros (los cuadrados son rombos y rectángulos, ...) y que podrán dar definiciones matemáticamente correctas, sin redundancias, en vez de "definir" las figuras mediante listas exhaustivas de propiedades, como hacían en el nivel 2.

Aunque este avance en la habilidad de razonamiento es muy importante, no es más que un paso intermedio en el camino que lleva a la comprensión completa de los sistemas axiomáticos formales que sostienen las matemáticas, que se alcanzará en el nivel 4 de Van Hiele. En efecto, la capacidad de los estudiantes se limitará a realizar pequeñas deducciones, es decir, implicaciones simples, no pudiendo, por ejemplo, darse cuenta de la técnica seguida para hacer la demostración completa de un teorema.

Esta incapacidad de los estudiantes para comprender las demostraciones viene acompañada de un sentimiento de que las demostraciones formales no son necesarias, pues para ellos es suficiente si se comprueba el teorema en cuestión en una cantidad "razonablemente grande" de casos. Una reacción típica de los estudiantes del nivel 3 o inferiores es que, ante la petición del profesor de que demuestren alguna propiedad, le reprochen: "¿Por qué tenemos que demostrarla, si ya sabemos que es verdad?"

Nivel 4 (de deducción formal):

- Alcanzado este nivel, los estudiantes pueden entender y realizar razonamientos lógicos formales; las demostraciones (de varios pasos) ya tienen sentido para ellos y sienten su necesidad como único medio para verificar la verdad de una afirmación.
- Los estudiantes pueden comprender la estructura axiomática de las matemáticas, es decir el sentido y la utilidad de términos no definidos, axiomas, teoremas, ...
- Los estudiantes aceptan la posibilidad de llegar al mismo resultado desde distintas premisas (es decir, la existencia de demostraciones alternativas del mismo teorema), la existencia de definiciones equivalentes del mismo concepto, ...

Al alcanzar el nivel 4 de razonamiento se logra la plena capacidad de razonamiento lógico matemático y, al mismo tiempo, la capacidad para tener una visión globalizadora del área que se esté estudiando[6].

Hasta ahora hemos puesto ejemplos de los diferentes niveles de razonamiento basándonos en el estudio de los cuadriláteros; los estudiantes del nivel 4 podrán hacer demostraciones formales de las propiedades que ya habían demostrado informalmente con anterioridad, así como descubrir y demostrar nuevas propiedades más complejas, y también estarán en condiciones de relacionar los cuadriláteros con otras partes de la geometría (euclídea) que han estudiado, de darse cuenta de que hay algunos elementos comunes a todas ellas (puntos, rectas, paralelismo, ...) y llegarán a reconocer que las diferentes partes de la geometría que conocen, tanto plana como espacial, son en realidad partes de un único sistema formal basado en los Postulados de Euclides.

4.- Principales características de los niveles.

La lectura detenida de la descripción de los niveles que acabamos de hacer pone de relieve algunas características importantes del modelo de Van Hiele:

1) **La jerarquización y secuencialidad de los niveles.** Resulta evidente que los 4 niveles representan cuatro grados de sofisticación en el razonamiento matemático que puede usar una persona. Además, cada nivel de razonamiento se apoya en el anterior: Pensar según el segundo nivel no es posible sin la capacidad de razonamiento del primer nivel; pensar según el tercero no es posible sin la capacidad de razonamiento del segundo; pensar según el cuarto no es posible sin el tercero (Van Hiele [1986], p. 51).

Por otra parte, entre las características de los niveles 1, 2 y 3 siempre hay alguna que se refiere a habilidades que todavía no saben usar los estudiantes; más concretamente, se trata de habilidades que éstos están empezando a adquirir pero de las cuales todavía no son conscientes y que, por lo tanto, todavía no usan explícitamente: En el nivel 1 no se reconoce la importancia de las partes de las figuras, en el nivel 2 no se reconoce la existencia de relaciones de implicación entre propiedades de las figuras; en el nivel 3 no se reconoce la existencia de conexiones o encadenamientos entre distintas implicaciones para construir demostraciones formales.

Así pues, los niveles de Van Hiele tienen una estructura recursiva, ya que en el nivel N (1, 2, 3) hay determinadas habilidades que están siendo usadas implícitamente por los estudiantes y cuyo uso explícito se aprende en el nivel N+1. El diagrama de la figura 4 resume estas ideas.

	Elementos explícitos	Elementos implícitos
Nivel 1	Figuras	Partes y propiedades de las figuras
Nivel 2	Partes y propiedades de las figuras	Implicaciones entre propiedades
Nivel 3	Implicaciones entre propiedades	Deducción formal de teoremas
Nivel 4	Deducción formal de teoremas	

Figura 4. Estructura recursiva de los niveles de Van Hiele.

Desde este punto de vista, la actividad que realice el estudiante para desarrollar su capacidad de razonamiento debe orientarse a hacerle consciente de esa habilidad implícita; para ello será necesario plantearle actividades en las que se requiera la utilización de dicha habilidad, ya que la práctica repetida y la experiencia son las que darán lugar al desarrollo de su forma de razonar.

Estas consideraciones se pueden resumir en un principio básico del modelo de Van Hiele, que se deriva de esta estructura jerárquica y secuencial: **No es posible alcanzar un nivel de razonamiento sin antes haber superado el nivel inferior.**

A propósito de esta propiedad del modelo, es conveniente poner en evidencia un peligro que se deriva del aprendizaje memorístico: Un estudiante puede aparentar un nivel de razonamiento determinado, superior al que realmente posee, porque ha aprendido a realizar rutinariamente procedimientos propios del nivel superior, aunque realmente no los comprende.

Un ejemplo de ello lo tenemos en nuestros estudiantes de Enseñanza Media: Con frecuencia, desde que empiezan en 1° de B.U.P., se les pide que trabajen en un contexto de matemáticas formales, que demuestren propiedades y resuelvan determinados tipos de problemas de manera formal (de álgebra lineal o análisis). Cuando los estudiantes no han alcanzado el nivel 4, esta pretensión del profesor se traduce en una incomprensión de la materia que están estudiando y en la necesidad de recurrir a la memorización como única posibilidad de supervivencia ante los exámenes. Con el paso del tiempo, estos alumnos han aprendido (de memoria, por repetición) cierto número de formas mecánicas de actuar, propias del lenguaje matemático formalizado que el profesor usa y les pide que usen, con las que pueden dar la impresión de encontrarse en el nivel 4, cuando en realidad están lejos de poder realizar verdaderamente ese tipo de razonamiento. En efecto, si se les plantea a estos alumnos un problema diferente de los modelos que han memorizado, intentan resolverlo usando al pie de la letra los métodos que conocen y no llegan a la solución porque no son capaces de darse cuenta de que esos procedimientos no sirven.

2) **Hay una estrecha relación entre el lenguaje y los niveles.** Las diferentes capacidades de razonamiento asociadas a los cuatro niveles de Van Hiele no sólo se reflejan en la forma de resolver los problemas propuestos, sino en la forma de expresarse y en el significado que se le da a determinado vocabulario. Un ejemplo son las diferentes formas de entender en los niveles 2 y 3 la relación de inclusión entre cuadrados y rectángulos: si un profesor utiliza esta relación según el nivel 3 (es decir, considera {cuadrados} $\subset$ {rectángulos}) pero sus alumnos la están considerando desde el nivel 2 (es decir, para ellos {cuadrados} $\not\subset$ {rectángulos}), éstos no entenderán los argumentos del profesor.

Otro ejemplo muy claro lo tenemos en el significado de la palabra demostrar[7], que describe la actividad más típicamente matemática: Asegurar la veracidad de las afirmaciones que hacemos. Esta palabra tiene significados diferentes para personas que razonen en los distintos niveles:

– En el nivel 1 carece por completo de sentido matemático, lo cual se suele traducir en razonamientos de lo más dispar.

– Para un estudiante del nivel 2, "demostrar" consiste, simplemente, en comprobar que la afirmación es cierta en unos pocos casos, incluso en uno solo, haciendo las mediciones oportunas con alguna herramienta. Esto le bastará para aceptar la veracidad de la afirmación.

– En el nivel 3 la palabra "demostrar" ya tiene un significado próximo al que le damos los matemáticos: las demostraciones están formadas por razonamientos lógicos, si bien sus argumentos son de tipo informal, basados en la observación de ejemplos concretos; esto puede traducirse en ocasiones en que la demostración sea incorrecta porque, en realidad, se trate de un caso particular.

– En el nivel 4 la palabra "demostración" ya tiene el significado usual entre los matemáticos: los estudiantes ya construyen demostraciones que cumplen los requisitos usuales de rigor. Probablemente un estudiante del nivel 4 haga la misma demostración que en el nivel 3, es decir siguiendo los mismos pasos, pero ahora justificará las igualdades basándose en otras propiedades matemáticas conocidas.

Veamos un ejemplo de lo anterior. En un test para determinar el nivel de Van Hiele, hemos planteado el siguiente ejercicio a varios estudiantes de diferentes niveles: "¿Es verdad que los ángulos de cualquier triángulo suman 180°? Justifica tu respuesta". Estas son algunas contestaciones:

a) (Estudiante de 6° de E.G.B.) "No, porque los ángulos de cualquier triángulo pueden medir lo que quieran y al sumarlos puede salir una cifra cualquiera."

Es evidente que la imagen que tiene de los triángulos y de los ángulos es la puramente visual típica del nivel 1, pues ve el triángulo y sus tres ángulos como cosas independientes y es incapaz de relacionarlos.

b) (Estudiante de 6° de E.G.B.; ver la figura 5). "Supongamos un triángulo equilátero (todos los ángulos iguales). Cada ángulo 60°. Suma = 60° + 60° + 60° = 180°.

Ahora supongamos cualquier triángulo. Cada ángulo = 90°, 65°, 25°. Suma = 90° + 65° + 25° = 180°."

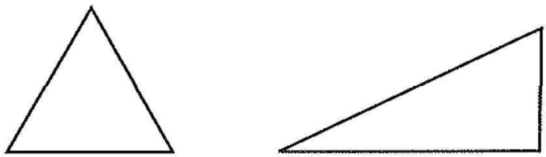


Figura 5.

Esta forma de demostrar la propiedad es característica del segundo nivel de razonamiento. Es probable que este alumno haya usado un transportador para medir los ángulos del segundo triángulo, que ha dibujado al azar, aunque también puede que haya calculado los ángulos a ojo, aplicando la fórmula que está tratando de demostrar.

c) (Ninguno de los estudiantes que contestaron el test dio una respuesta del nivel 3). La demostración habitual de esta propiedad se basa (figura 6) en reconocer visualmente que $<\alpha = <\alpha'$, $<\beta = <\beta'$ y $<\gamma = <\gamma'$, por lo que $<\alpha + <b + <\gamma = <\alpha' + <\beta' + <\gamma' = 180°$. Hacemos hincapié en que la línea de la argumentación es de tipo lógico-deductivo, pero que las justificaciones dadas se refieren a la figura concreta que se ha dibujado.

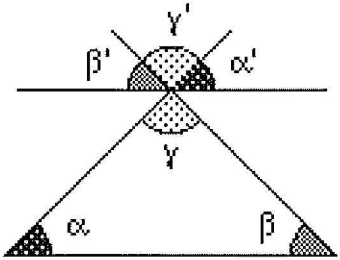


Figura 6. La suma de los ángulos de un triángulo es 180°.

d) (Estudiante de 3° de Ciencias de Magisterio; ver la figura 6). "$\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$ por ser ángulos alternos internos, resultado de cortar una recta con dos paralelas.

$\gamma = \gamma'$ por ser ángulos opuestos por el punto en que se cortan dos rectas.

Como $\alpha' + \beta' + \gamma' = 180°$, por lo tanto $\alpha + \beta + \gamma = 180°$."

Puede observarse que esta demostración, que corresponde al nivel 4 de razonamiento, sigue una línea de argumentación completamente formal e incluye la justificación de todos los pasos; esto último es lo que diferencia esta forma de entender las demostraciones de la propia del nivel 3.

Hemos visto, con este ejemplo, cómo una palabra tiene significados diferentes en los distintos niveles, es decir, que **a cada nivel de razonamiento le corresponde un tipo de lenguaje específico.** Las implicaciones que esto tiene para la actividad de los profesores en sus clases son evidentes y trascendentales: Si un profesor quiere hacerse comprender por sus alumnos, debe hablarles en su nivel de lenguaje, es decir, debe amoldarse al nivel de razonamiento de los estudiantes para, a partir de ahí, tratar de guiarles para que lleguen al nivel superior; lo contrario provocará en poco tiempo la incomprensión mutua (el profesor tampoco entiende a sus alumnos y no evalúa adecuadamente las respuestas de éstos). Por lo tanto, tal como escribe P.M. Van Hiele (Fuys, Geddes, Tischler [1984], p. 246), **dos personas que razonan (y que interpretan los argumentos del otro) en diferentes niveles no podrán comprenderse.**

3) El paso de un nivel al siguiente se produce de forma continua. Este es un tema sobre el que se pueden encontrar las dos opiniones opuestas: Hay personas, entre las que se encuentra P.M. Van Hiele, que sugieren que el paso de un estudiante desde un nivel de razonamiento al siguiente se produce de una forma brusca, como un salto, mientras que otras consideran que este paso se produce de forma más pausada y, por lo tanto, continua.

Un argumento en el que se apoyan los defensores de la primera opinión es el expresado por P.M. Van Hiele [1986] de la siguiente manera, haciendo referencia a su propia experiencia como profesor de matemáticas:

"... Había partes de la materia que yo podía explicar y explicar, y aún así los alumnos no entendían. ... De pronto parecía que comprendían la materia en cuestión. Podían hablar de ella con bastante sentido ..."

Todos sabemos que esto es verdad por propia experiencia, tanto de estudiantes como de profesores, pues muchas veces, tras largo tiempo dándole vueltas a un problema, de repente hemos "visto" la solución.

Nosotros, sin embargo, creemos que con esta interpretación se están simplificando demasiado las cosas, pues:

A) No se debe confundir haber comprendido la solución de un problema (o tipo de problemas) concreto con haber adquirido destreza en el manejo del nuevo tipo de razonamiento necesario para resolver ese problema.

B) Cada nivel de Van Hiele se caracteriza por varias habilidades de razonamiento importantes, de forma que sólo se puede considerar adquirido un nivel de razonamiento cuando se tenga un dominio adecuado de todas esas destrezas. No es en absoluto razonable pensar que una persona adquiere el dominio de las diferentes destrezas de forma automática y simultánea; y, además de no ser razonable, la experiencia indica que tampoco es real.

En diversas experiencias realizadas durante los últimos años, podemos observar cómo, con frecuencia, hay estudiantes que, durante la resolución de un problema, utilizan de forma simultánea tipos de razonamiento propios de dos niveles consecutivos; otras veces, un estudiante ha resuelto los diversos problemas que se le han planteado razonando de forma uniforme a lo largo de cada problema, pero empleando en unos problemas un nivel de razonamiento superior al usado en otros que debería haber resuelto también mediante el mismo nivel superior. Vamos a presentar dos ejemplos:

1) Fuys, Geddes y Tischler plantean a sus alumnos una actividad que consiste en presentarles un tipo de cuadriláteros nuevo para ellos (las cometas [8]), con el fin de observar su habilidad para analizar las propiedades de la nueva clase de figuras y las relaciones de ésta con las otras clases de cuadriláteros que ya conocen. Entre otras figuras, se les presenta un cuadrado (colocado en posición estándar, es decir con la base horizontal) y se les pregunta si es o no una cometa (Fuys, Geddes, Tischler [1985], p. 31). Esta es la respuesta de dos alumnas de 9° grado, con 14-15 años (Fuys, Geddes, Tischler [1985], p. 148):

"Inicialmente, Madeline y Beth definen una cometa como "con forma de diamante con cuatro puntas, dos lados iguales [señalándolos] y otros dos lados iguales [señalándolos]". Madeline colocó el cuadrado en el montón de las no-cometas explicando que "no tiene forma de diamante" (nivel 1). El entrevistador gira el cuadrado 45°. Madeline dice: "Oh!, tiene forma de diamante, tiene cuatro lados, tiene cuatro vértices y dos pares de lados adyacentes son iguales" y entonces cambia el cuadrado al montón de las cometas, basando su decisión en las propiedades (nivel 2)."

2) Dentro de un test administrado a varios niños de E.G.B. al principio del curso 1988-89, planteábamos una actividad del tipo "¿cuál es la figura?"[9]. El siguiente es un fragmento del diálogo con un estudiante de 8° de E.G.B. (13-14 años); en este momento, el estudiante ya sabe que se trata de un polígono que tiene: i) cuatro lados; ii) al menos un ángulo de 60°; iii) al menos un ángulo de 120°; iv) al menos dos lados de la misma longitud.

Basándose en estas propiedades ha dibujado, en primer lugar, un rombo, no muy perfecto, con ángulos de 60° y 120° (figura 7-1) y, después, un polígono (figura 7-2) con <1 = 60°, <2 = 120° y los lados *a* y *d* iguales [hemos añadido las letras, los números y la línea discontinua, así como las notas entre corchetes para hacer el diálogo comprensible]. Al presentarle la quinta propiedad ("tiene al menos dos lados paralelos"), el estudiante analiza las dos figuras:

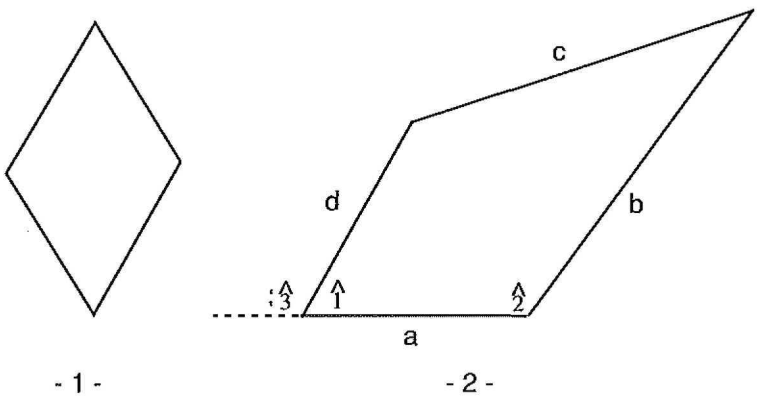


Figura 7

Est.: [comprueba el paralelismo de *b* y *d* con escuadra y cartabón] Este ya no; ya no da.

Prof.: Esos lados [señalando a *b* y *d*] ¿no son paralelos?

Est.: Estos sí [señalando al rombo].

Prof.: Pero, si esos ángulos [señalando a <1 y <2] son de 60° y 120°, ¿no tendrían que ser [*b* y *d*] paralelos?

Est.: No, porque éste [señala a *b*] tiene una longitud y éste [señala a *d* tiene otra.

Prof.: Pero, ¿qué lados has mirado? ¿No has mirado éste [señala a *b*] y éste [señala a *d*]?

Est.: [vuelve a comprobar con escuadra y cartabón el paralelismo de *b* y *d*] Es igual [10].

Prof.: El caso es que esos dos lados se diferencian muy poco, son casi paralelos. Me pregunto si esa pequeña diferencia es porque no tienen que ser paralelos o porque el dibujo está un poco desviado. ¿Qué piensas? ...... Si ese dibujo lo hubiese hecho un delineante, ¿deberían ser paralelos?

*Est.: [mide con el transportador <2 y <3] Sí, son iguales.

Prof.: Entonces, ¿quedamos en que esos dos lados [señala a *b* y *d*] no son paralelos?

Est.: [contesta inmediatamente] Estos sí.

Prof.: Ah! Vamos a ver, que me he perdido.

Est.: Es que a lo mejor no está bien hecho y por eso hay esa diferencia. Ahora he medido los ángulos [<2 y <3] como si éste [señala a <3] fuera también de 120°, como si empezara aquí [señala a la prolongación de *a*]. Como están en la misma línea, dan los dos 120°.

Prof.: Entonces, ¿esas dos líneas sí tienen que ser paralelas, aunque el dibujo no esté muy bien?

Est.: Sí.

El asterisco (*) marca un cambio en el razonamiento del estudiante. Durante la primera parte del diálogo, está siguiendo un razonamiento basado en el nivel 2, pues utiliza las relaciones dadas por el dibujo (de no paralelismo) entre los lados de una figura de la que no conoce propiedades (para él es, simplemente, un cuadrilátero), mientras que en el caso del rombo, sabe que los lados *deben ser* paralelos, aunque en su dibujo resulte evidente que no lo son. Por otra parte, hace algunas afirmaciones que resultan incongruentes, lo cual es señal de su incapacidad para relacionar unas propiedades con otras.

Sin embargo, a partir de la respuesta (*) empieza a utilizar un modo de razonamiento del nivel 3, pues se basa en la igualdad lógica de <2 y <3 (y no en la física derivada del dibujo) para deducir que ambos miden 120° y que, por tener un lado común, los otros lados deben ser paralelos.

No pretendemos hacer aquí un análisis detallado de esta cuestión, que se sale del ámbito de este texto, pero sí queremos plantearla para que los profesores que quieran emplear el modelo de Van Hiele en sus clases no se sientan confundidos. En resumen, creemos que **el paso de un nivel de razonamiento al siguiente se produce de manera gradual y que durante algún tiempo el estudiante se encontrará en un período de transición en el que combinará razonamientos de un nivel y del otro.** La evidencia de este período será que el estudiante mostrará deseos de usar el nivel superior, pero cuando encuentre dificultades o dudas tenderá a refugiarse en la seguridad del nivel inferior, en el que se siente más cómodo.

5.- La evaluación del nivel de razonamiento de los estudiantes.

Ahora que acabamos de describir las principales características y propiedades de los niveles de razonamiento de Van Hiele y antes de empezar a mostrar las importantes y estrechas relaciones de los niveles de razonamiento con la formación matemática de los estudiantes (cosa que haremos a partir de la sección siguiente), es conveniente abordar la cuestión de la determinación del nivel de razonamiento de una persona.

Si un profesor quiere basarse en el modelo de Van Hiele para la organización y el desarrollo de sus clases, deberá, en primer lugar, tener una idea lo más exacta posible del nivel de razonamiento de sus alumnos; ya hemos visto algunos de los varios motivos que hacen necesario tener en cuenta su nivel: Uso del lenguaje adecuado y planteamiento de actividades que fomenten el paso de los alumnos al nivel siguiente de razonamiento.

En primer lugar, debemos centrar la atención en una característica del razonamiento que es importante en la práctica: **El nivel de razonamiento de los individuos es de carácter local**; esto quiere decir que se puede observar cómo un estudiante se desenvuelve en distintos niveles de razonamiento si le proponemos actividades basadas en diferentes áreas de las matemáticas. Aunque esto pueda parecer incongruente a primera vista, no lo es si observamos algunos hechos:

- Está plenamente demostrado que hay partes de las matemáticas cuyo estudio requiere un desarrollo mental superior a otras y que, por lo tanto, empiezan a estudiarse a una edad más avanzada que estas últimas. Por lo tanto, los estudiantes pueden ser bastante expertos en unos temas y muy poco en otros.
- Siempre que una persona empieza a estudiar un área de las matemáticas que le era desconocida hasta entonces, empieza a recorrer los niveles

de razonamiento de Van Hiele empezando por el nivel 1, en concordancia con la característica de secuencialidad de los niveles que hemos comentado en la sección anterior.

Por lo tanto, no es ilógico encontrar esa diversidad de niveles de razonamiento, ya que el desarrollo de la capacidad de razonamiento de una persona se logra fundamentalmente gracias a la experiencia (esta afirmación la analizaremos con más detalle en la sección 6) y es normal que los estudiantes tengan más experiencia en unas áreas de las matemáticas que en otras [11]. Esta diversidad de niveles es más fácil encontrarla en estudiantes que no han llegado a razonar en el nivel 4 en ningún área. Por el contrario, cuando un estudiante es capaz de desarrollar razonamientos formales en algunas partes de las matemáticas y empieza a estudiar otro campo, lo normal es que pase muy rápidamente por los tres primeros niveles de razonamiento en este campo y que llegue en poco tiempo al cuarto nivel; además, este estudiante tratará de usar las técnicas del razonamiento formal que ya conoce, lo cual hace más difícil observar la diferencia de niveles de su razonamiento.

Los profesores e investigadores que trabajan sobre el modelo de Van Hiele utilizan generalmente dos métodos para determinar el nivel de razonamiento. Uno de los métodos consiste en la realización de entrevistas individuales entre el profesor y cada estudiante, durante las cuales el profesor plantea diversas actividades y dialoga con el alumno a tenor de su forma de resolverlas y del nivel de razonamiento que vaya mostrando durante la entrevista. El otro método consiste en la realización por los estudiantes de un ejercicio escrito formado por una serie de actividades, que pueden ser similares a las usadas en el modelo anterior. Obviamente, la entrevista clínica es el método que proporciona unos resultados más fiables sobre el nivel de Van Hiele de una persona, pero también está claro que no es práctico para los profesores que tienen que trabajar con grupos de más de 30 alumnos.

En cualquier caso, al preparar un cuestionario para medir el nivel de razonamiento de los alumnos, conviene tener presentes algunas normas que ayuden a hacerlo más fiable:

- Se deben seleccionar actividades cuyas respuestas sean lo suficientemente largas como para que **los estudiantes puedan hacer visibles sus ideas y su forma de razonar**; una actividad que sólo requiera una respuesta escueta ("Sí", "No", un número, un dibujo, ...) no es útil. Al mismo tiempo, el planteamiento de las actividades debe incitar a los estudiantes a explicar los motivos de sus respuestas; frases como "¿Por qué piensas eso?", "Explica cómo has encontrado la solución", etc. suelen ser útiles para ello [12].
- No debe confundirse el planteamiento de un cuestionario para conocer el nivel de razonamiento con un examen tradicional, en el que se trata

de evaluar el nivel de conocimientos; son dos situaciones diferenciadas básicamente por el hecho de que llegar al resultado final correcto de los problemas no es tan importante en el primer caso como en el segundo. Por lo tanto, **para determinar el nivel de razonamiento, lo más importante no es evaluar si los estudiantes contestan bien o mal, sino cómo contestan y por qué lo hacen así.**

• Aunque se tenga alguna idea previa sobre el nivel de razonamiento de los estudiantes, las actividades deben seleccionarse de manera que cubran los cuatro niveles, o por lo menos los niveles 1 a 3 si se está trabajando con niños de los primeros cursos de E.G.B. Para hacer la selección de ejercicios, es conveniente que el profesor se plantee cómo podrían contestar a cada uno personas de los diferentes niveles, para que de esa forma se pueda hacer una selección equilibrada

• Hay que evitar el error de asignar niveles a las preguntas y basarse en ellos para determinar el nivel de razonamiento de los estudiantes pues, en la mayoría de los casos, **una actividad puede ser resuelta correctamente por estudiantes de diferentes niveles, pero sus formas de resolverla serán diferentes** (y a veces también lo serán sus soluciones; por ejemplo, ya hemos comentado que un estudiante de nivel 2 clasificará los cuadriláteros de distinta forma que otro de nivel 3). Hemos mostrado en las páginas anteriores ejemplos de las diferentes formas que tienen estudiantes de los cuatro niveles de demostrar que los ángulos de un triángulo suman 180°. Veamos algunos ejemplos de contestaciones de estudiantes de E.G.B. y de Magisterio a dos actividades que reflejan diferentes niveles de razonamiento.

Actividad: Mira la figura 8 y contesta a las siguientes preguntas: ¿Es un rombo? ¿En qué te has fijado para saberlo?

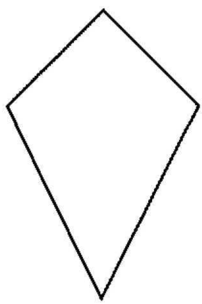


Figura 8.

Respuesta a): "Sí. Porque tiene la forma de un rombo."

Respuesta b): "No. Porque no tiene los lados iguales y los ángulos no son iguales dos a dos."

Es muy fácil reconocer en la respuesta a) el razonamiento típico del nivel 1: Para este estudiante la figura es un rombo porque es parecida a todas las figuras que ha visto antes con ese nombre; probablemente sus profesores no se han preocupado de mostrarle ejemplos de figuras que no son rombos aunque se les parezcan.

La respuesta b) refleja el nivel 2 de razonamiento: Este estudiante ha verificado las características que conoce de los rombos y se ha dado cuenta de que el polígono de la figura 8 no las cumple. Por otra parte, esta respuesta no muestra que el estudiante haya alcanzado el nivel 3, pues en ese caso se habría limitado a mencionar sólo una de las características.

Sin embargo, si el estudiante hubiera contestado "No. Porque no tiene los lados iguales", tampoco deberíamos concluir que razona en el nivel 3 porque sabe que la negación de una de las condiciones es suficiente, pues podría tratarse de una persona que sólo sabe que los rombos deben tener los lados iguales; lo que sí es seguro es que está razonando en el nivel 2. Una consecuencia importante de este ejemplo es que **en muchos casos lo máximo que podremos asegurar es que el estudiante tiene *por lo menos* un determinado nivel de razonamiento.**

Actividad: ¿Es verdad que los ángulos de cualquier polígono de n lados suman $(n-2) \times 180°$? Justifica tu respuesta.

Respuesta c): (ver figura 9) 6 lados $\Rightarrow$ 6 - 2 = 4;

4	x	180°	= 720°
triángulos		suma de los ángulos de cada triángulo	

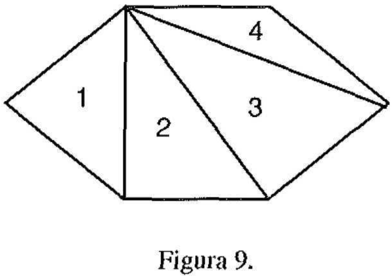
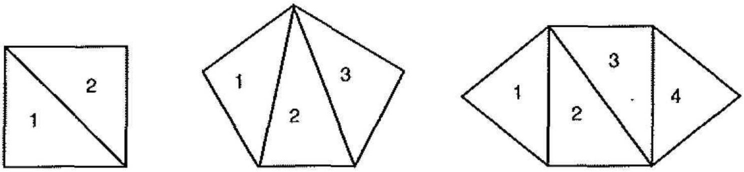


Figura 9.

Respuesta d): Vemos que en todos estos casos (figura 10) se puede dividir un polígono en triángulos trazando diagonales. Si continuásemos con más polígonos veríamos que siempre el número mínimo de triángulos que podemos conseguir es el número de lados del polígono menos 2. Por tanto, para saber la suma de los ángulos de un polígono multiplicaremos 180° (los grados que suman los ángulos de un triángulo) por el número de triángulos $\Rightarrow$ (n-2)x180°.



4 - 2 = 2 5 - 2 =3 6 - 2 = 4

Figura 10.

La respuesta c) corresponde al nivel 2, pues este alumno se conforma con verificar que el resultado es cierto en unos pocos ejemplos (en este caso una sola figura) que, en su esquema mental, representan a cualquier polígono.

También la respuesta d) se basa en la verificación de casos concretos (3 ejemplos). Si este alumno se hubiera detenido en los ejemplos, estaría razonando en el nivel 2, pero, a diferencia del anterior, éste ya comprende que con los ejemplos no es suficiente y que debe elaborar un argumento abstracto que sea válido para cualquier número de lados; por lo tanto su razonamiento es del nivel 3. Este razonamiento no es del nivel 4 porque la idea base de su argumento está en lo que ha observado en los ejemplos y porque no justifica de ninguna forma que la regla que ha descubierto (*n* lados $\Rightarrow$ n-2 triángulos) se cumpla siempre [13] (él asume que es así).

Una respuesta del nivel 4 se diferenciaría de la respuesta d) en dos puntos: i) Justificaría la generalización de la regla de triangularización y ii) tendría en cuenta los polígonos cóncavos, que representan la parte más difícil de la demostración.

6.- El proceso de aprendizaje según el modelo de Van Hiele.

El titulo de esta sección "el proceso de aprendizaje según ...", no hace referencia al aprendizaje de una parte de la geometría, gracias al cual el estudiante conoce más elementos de ese área que antes de estudiar sobre ella; este título se refiere al proceso por el cual una persona aprende a utilizar nuevos métodos y herramientas de razonamiento mientras estudia un área de la geometría, es decir por el cual pasa a usar un tipo de razonamiento, propio de un nivel superior al que utilizaba anteriormente, que le permite acceder a conocimientos más profundos.

Respecto a esto, las principales preguntas que hay que contestar son:

- ¿Cómo se produce esta adquisición (o aprendizaje) de nuevas habilidades de razonamiento?
- ¿Hay alguna forma de favorecer este proceso de aprendizaje?

Para contestar a la primera pregunta, vamos a describir las modificaciones que se producen en las estructuras mentales de una persona durante el proceso de aprendizaje que lleva de un nivel de razonamiento al siguiente.

Estas modificaciones consisten en la transformación de las estructuras mentales actuales en otras nuevas, más complejas, que absorberán las anteriores. Podemos representar las estructuras mentales como "redes de relaciones" en las que los vértices son los diferentes conceptos asimilados (o diferentes representaciones del mismo concepto) y las líneas de conexión entre vértices son las relaciones establecidas entre esos conceptos.

Según esta imagen, el paso de un nivel de Van Hiele a otro superior se produce mediante la creación de una nueva red de relaciones obtenida al incorporar a la anterior nuevos conceptos y nuevas relaciones (más complejas y abundantes que las de la red anterior) entre ellos. Si volvemos al ejemplo de los cuadriláteros, que hemos utilizado al describir los niveles, nos encontramos con las siguientes redes conceptuales:

a) En el nivel 1 la red es muy simple, pues está formada por una serie de nombres de figuras (cuadrado, rombo, trapecio, etc.), sin conexión entre ellos, y una serie de imágenes visuales relacionadas con los nombres (cada imagen sólo con un nombre). Más que de una red, se trata de varias sub-redes independientes.

La figura 11 muestra cuál es la situación para el rombo: El niño ha aprendido, trabajando con dibujos, piezas recortadas, etc., a reconocer un determinado tipo de figuras con la palabra "rombo", de forma que a la vista de unas nuevas figuras puede decir si son o no rombos (según el parecido que tengan con los rombos que ha visto antes). La riqueza del concepto "rombo" dependerá, obviamente, de la variedad de figuras que el niño haya observado y manipulado. Se formarán también otras subredes análogas para el cuadrado, rectángulo, etc.

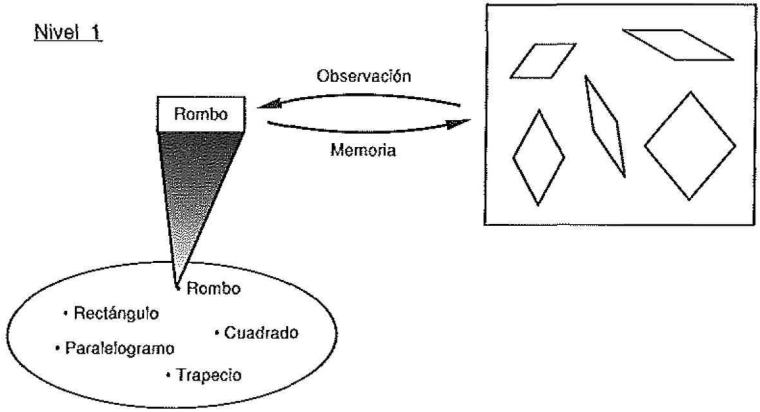


Figura 11. Primera red de relaciones de los cuadriláteros y del rombo.

b) Durante el proceso de adquisición del nivel 2 se amplían las subredes anteriores (que continúan siendo independientes) gracias al surgimiento de los conceptos correspondientes a los elementos y propiedades de cada cuadrilátero.

En la figura 12 se ve que la red de relaciones del nivel 2 para el rombo está formada por la red visual del nivel 1 y las nuevas conexiones establecidas con las propiedades del rombo [14]. Es importante observar que las relaciones se establecen únicamente entre cada propiedad y las representaciones verbal o gráfica del rombo; un niño del nivel 2 no sabe relacionar directamente unas propiedades con otras.

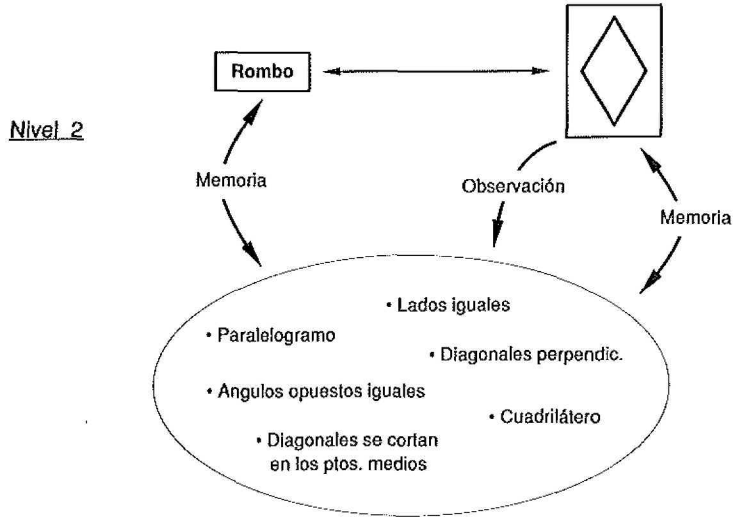


Figura 12. Segunda red de relaciones del rombo.

c) Las habilidades de razonamiento que se adquieren al subir al nivel 3 permiten integrar las diversas sub-redes en una sola red. En ésta las relaciones establecidas son de tipo lógico, a diferencia de las anteriores que estaban basadas en la observación y la memoria. Ahora los estudiantes ya saben deducir una propiedades de otras, saben clasificar los diferentes cuadriláteros y saben definirlos correctamente.

La figura 13 representa una parte (referente al rombo) de la red de relaciones lógicas que liga los diferentes tipos de cuadriláteros, sus elementos y sus propiedades en el nivel 3.

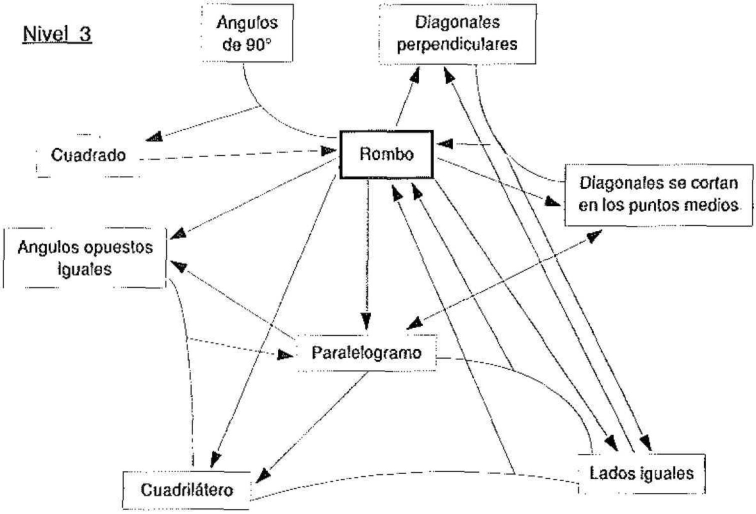


Figura 13. Tercera red de relaciones del rombo.

d) En lo que se refiere a la cantidad de vértices, algunas veces la red de relaciones del nivel 4 se diferenciará poco de la red del nivel 3, debido a que la mayor parte de los conceptos estudiados estarán ya presentes en el nivel 3. Otras veces, la red del nivel 4 permitirá, gracias al uso del razonamiento formal, unir en una sola red varias que hasta ese momento permanecían separadas. Por ejemplo, si un alumno ha estudiado geometría plana y geometría espacial sin darse cuenta de las múltiples conexiones que hay entre ellas, cuando se encuentre en el nivel 4 en ambos campos, podrá englobar estas redes en una sola que ligue todos sus conocimientos de geometría euclídea.

Donde sí hay una diferencia muy importante entre las redes de los niveles 3 y 4 es en el número y tipo de conexiones que las integran: Mientras que las conexiones del nivel 3 son de tipo lógico pero informal y basadas en la utilización de materiales, el razonamiento del nivel 4 es formal y abstracto. Además, como consecuencia de la mayor potencia de este razonamiento, en la red del nivel 4 se podrán establecer nuevas relaciones que en el nivel 3 no se habían encontrado a causa de su complejidad.

En los párrafos anteriores hemos descrito las redes de relaciones que se forman en la mente de una persona a medida que, como consecuencia del aumento de su capacidad de razonamiento, va realizando un aprendizaje cada vez más completo y profundo de una parte de la geometría (en nuestro ejemplo, los cuadriláteros). Pero el modelo de razonamiento matemático de Van Hiele no sólo sirve para describir el proceso de aprendizaje de la geometría (en el sentido que indicábamos al comenzar esta sección); podemos aplicarlo también para describir el propio proceso por el que una persona aprende a razonar mejor en matemáticas, es decir, podemos utilizarlo para hacer meta-razonamiento.

Si analizamos las estructuras de los tipos de razonamiento propios de los diferentes niveles y observamos qué elementos y operaciones de la lógica matemática se utilizan en cada nivel, nos daremos cuenta de que podemos construir unas redes de relaciones análogas a las que hemos descrito antes. En efecto, dejando de lado el nivel 1, en el cual no hay razonamiento matemático propiamente dicho, tenemos que:

a) En el razonamiento del nivel 2, el único elemento que se utiliza es la proposición lógica: Se enuncian diversas afirmaciones que son verdaderas o falsas dependiendo del concepto al que se apliquen. El estudiante del nivel 2 no es capaz de relacionar unas propiedades con otras, luego la primera red de relaciones del razonamiento está formada por un conjunto de vértices (las proposiciones) sin relaciones entre ellos (figura 14).

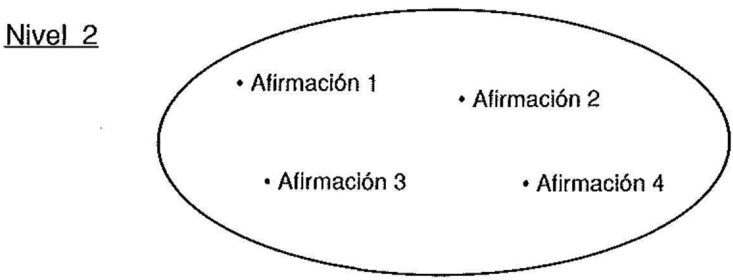


Figura 14. Primera red de relaciones del razonamiento matemático.

b) En el nivel 3 los estudiantes adquieren la capacidad de relacionar lógicamente unas afirmaciones con otras, si bien sólo son capaces de establecer relaciones simples y no cadenas deductivas. Para el análisis que estamos haciendo ahora, lo importante es qué tipo de relaciones se establecen y no cómo se establecen (informal o formalmente). La figura 15 representa esta red de relaciones del razonamiento, formada por los mismos vértices de la red anterior unidos por relaciones simples, que sólo permiten conectar pares de vértices.

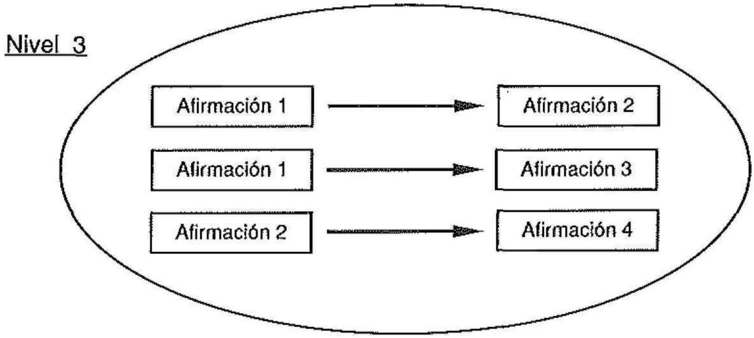


Figura 15. Segunda red de relaciones del razonamiento lógico.

c) Por último, al llegar al nivel 4, se adquiere completamente la capacidad de razonamiento matemático. La nueva red de relaciones se construye, por una parte, mediante una reducción de la red anterior, pues lo que antes era un conjunto de varios vértices (las proposiciones) conectados por parejas (implicaciones simples), se convierten en unidades (los teoremas) que pasan a ser vértices de la nueva red. Por otra parte, surgen nuevos tipos de vértices que antes no existían, integrados por los diferentes elementos del sistema axiomático (axiomas, definiciones o términos indefinidos). La figura 16 representa esta red de relaciones.

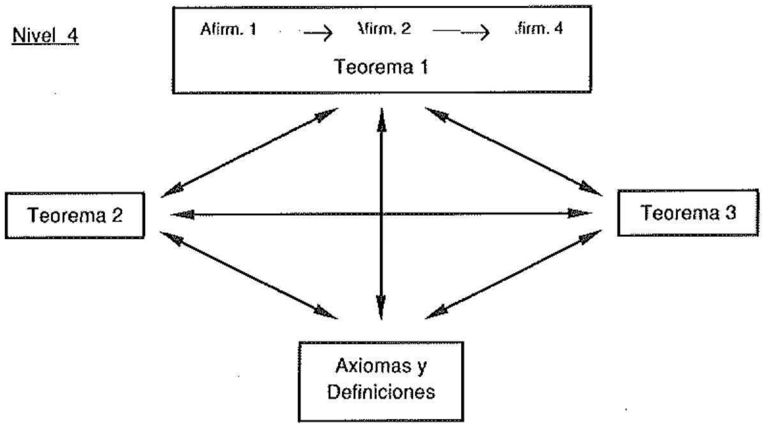


Figura 16. Tercera red de relaciones del razonamiento lógico.

Como puede verse al comparar las figuras 11, 12 y 13 con las figuras 14, 15 y 16, las redes de relaciones del aprendizaje de la geometría y del razonamiento matemático tienen las mismas estructuras, si bien no corresponden a los mismos niveles. Este es un paralelismo interesante, que resume las distintas posiciones de cada nivel respecto del aprendizaje de la geometría y de la adquisición del razonamiento en matemáticas: La red de relaciones geométricas que se construye usando el tipo de razonamiento de un determinado nivel es la que proporciona las experiencias necesarias para aprender a usar la red de relaciones del tipo de razonamiento del nivel siguiente.

* * * * *

Algunas de las ideas que expone P.M. Van Hiele en "La pensée de l'enfant et la géométrie" pueden ayudarnos a descubrir dónde está la clave para responder a la segunda pregunta planteada al principio de esta sección:

"Estos niveles son inherentes a la elaboración del pensamiento; son independientes del método de enseñanza usado. Sin embargo, es posible que ciertas formas de enseñanza no permitan alcanzar los niveles superiores, pues los métodos de pensamiento usados en esos niveles permanecen inaccesibles a los estudiantes." (Fuys, Geddes, Tischler [1984], p. 246).

La idea central del modelo de Van Hiele en lo que respecta a la relación entre la enseñanza de las matemáticas y el desarrollo de la capacidad de razonamiento es que **la adquisición por una persona de nuevas habilidades de razonamiento es fruto de su propia experiencia.** Esta experiencia se adquiere unas veces fuera de las aulas (todos los niños aprenden a partir de sus juegos, su relación con las personas adultas, la televisión, etc.) y otras veces dentro de ellas. La enseñanza adecuada es, por lo tanto, aquélla que proporciona esa experiencia. Desde esta perspectiva, hay diferentes métodos de enseñanza que son igualmente válidos, aunque desde el punto de vista pedagógico puedan ser opuestos; el único requisito es que proporcionen a los estudiantes la posibilidad de realizar los procesos de razonamiento adecuados. No obstante, resulta evidente que serán más válidos los métodos activos, inductivos, es decir, aquéllos en los que el estudiante es algo más que un simple receptor pasivo de información, frente a las clases magistrales, la lectura del libro (incluso cuando la hace un alumno) y los demás modos de enseñanza típicamente deductivos en los que se le presenta el producto final.

Es de sobra conocido que el actual currículum español de matemáticas en E.G.B. y Enseñanza Media presenta unas graves carencias, que se traducen en una mala formación de buena parte de los estudiantes. Si analizamos lo que ocurre, nos daremos cuenta de que es explicable desde las propuestas del modelo de Van Hiele. En efecto, el paso del nivel 1 al nivel 2 es muy fácil de conseguir en E.G.B., pues el tipo de razonamiento utilizado es muy simple y las experiencias en el manejo de figuras, necesarias para que los niños lleguen a poder descubrir sus componentes, las puede proporcionar cualquier tipo de enseñanza, incluso el deductivo [15]. Esto se traduce en que es muy fácil lograr que, en poco tiempo, los niños superen el nivel 1 y empiecen a utilizar razonamiento del nivel 2.

Por el contrario, el paso del nivel 2 al nivel 3 y el paso de éste al nivel 4 son más difíciles, pues es necesario desarrollar en los estudiantes unas habilidades de razonamiento más sofisticadas que, en bastantes casos, los propios profesores no poseen (esperemos que la naciente reforma de las enseñanzas no universitarias ayude a resolver esta situación). Así nos encontramos con el problema de que, como consecuencia de una enseñanza demasiado pobre de las matemáticas, la mayoría de los estudiantes que terminan E.G.B. no han podido alcanzar más que el nivel 2, mientras que al empezar a estudiar B.U.P. sus profesores les tratan como si hubieran adquirido, como mínimo, el nivel 3. El resultado final es que gran parte de estos estudiantes terminan su formación matemática con una capacidad de razonamiento de los niveles 2 ó 3, aunque en ocasiones aparenten un razonamiento de nivel 4 a causa de la memorización que han tenido que realizar.

El siguiente párrafo, extraído del mismo artículo de P.M. Van Hiele que el anterior, lo complementa:

"La maduración que lleva a un nivel superior tiene lugar de una forma especial. Se pueden revelar varias fases en ella (esta maduración debe considerarse, por encima de todo, como un proceso de aprendizaje y no como una maduración [16] de tipo biológico). Por lo tanto, es posible y deseable que el profesor ayude y la acelere. El objetivo del arte de enseñar es precisamente enfrentarse a la cuestión de saber cómo se pasa a través de estas fases y cómo se puede prestar ayuda al estudiante de forma eficaz." (Fuys, Geddes, Tischler [1984], p. 246).

Las fases de aprendizaje a las que alude Van Hiele serán el objetivo de la próxima sección.

Este planteamiento marca una de las diferencias fundamentales entre los modelos de aprendizaje de Piaget y de Van Hiele[17], ya que para el primero el aprendizaje matemático y el desarrollo intelectual están íntimamente ligados al desarrollo biológico; Van Hiele es más explícito todavía cuando postula:

"La imposibilidad de los niños para pensar lógicamente no procede de una falta de maduración, sino de una ignorancia de las reglas del juego de la lógica. El niño no tiene a su disposición las estructuras a partir de las cuales se originan las preguntas. No puede entender las cuestiones porque no ha terminado el proceso de aprendizaje que le guía al nivel de pensamiento requerido. Es importante la edad de los niños en cuanto a que deben haber tenido tiempo suficiente para llevar a cabo el necesario proceso de aprendizaje." (Van Hiele [1986], p. 65).

Una consecuencia de esta diferencia de concepciones es la contraposición de sus opiniones respecto de la posibilidad de acelerar el aprendizaje. Piaget opina lo siguiente:

"El aprendizaje está subordinado al desarrollo y no al revés" (Piaget [1967][18], p. 332).

"Esta cuestión nunca ha preocupado a los estudiantes y profesores de Ginebra, ... Los investigadores [partidarios de la aceleración] han tratado de enseñar una respuesta, una solución particular, en vez de desarrollar operaciones. Han tratado, por ejemplo, de enseñar a los niños que una bola de arcilla pesa lo mismo que una barra (obtenida deformando una bola igual a la anterior) porque se veía al ponerlas en una balanza. Pero el niño no estará en absoluto convencido hasta que no maneje lo datos en su mente utilizando una o varias de las operaciones que he descrito" (Standler [1967], p. 343).

En cierta forma, con la última frase Piaget está dando la razón a Van Hiele, ya que reconoce que el aprendizaje pasa por la acumulación de experiencias.

7.- Las fases de aprendizaje del modelo de Van Hiele.

Para completar la descripción del modelo de razonamiento de Van Hiele, vamos a dedicar esta sección a exponer la propuesta de Van Hiele sobre los pasos que debe seguir un profesor para ayudar a sus alumnos a subir al siguiente nivel de razonamiento.

Se recordará que Van Hiele caracteriza el aprendizaje como un resultado de la acumulación de la cantidad suficiente de experiencias adecuadas; por lo tanto, existe la posibilidad de alcanzar niveles más altos de razonamiento fuera de la enseñanza escolar si se consiguen las experiencias apropiadas. No obstante, esas experiencias, aunque existen y no deben despreciarse, generalmente no son suficientes para producir un desarrollo de la capacidad de razonamiento completo y rápido, por lo que la misión de la educación matemática escolar es proporcionar experiencias adicionales, bien organizadas para que sean lo más útiles posible.

Lo que Van Hiele llama las "fases de aprendizaje" son unas etapas en la graduación y organización de las actividades que debe realizar un estudiante para adquirir las experiencias que le lleven al nivel superior de razonamiento. A lo largo de estas fases, el profesor debe procurar que sus alumnos construyan la red mental de relaciones del nivel de razonamiento al que deben acceder, creando primero los vértices de la red y después las conexiones entre ellos. Dicho de otra manera, es necesario conseguir, en *primer lugar, que los estudiantes adquieran de manera comprensiva* los conocimientos básicos necesarios (nuevos conceptos, propiedades, vocabulario, etc.) con los que tendrán que trabajar, para después centrar su actividad en aprender a utilizarlos y combinarlos. Las fases de aprendizaje propuestas por Van Hiele son cinco:

1ª fase: Información. Se trata de una fase de toma de contacto: El profesor debe informar a los estudiantes sobre el campo de estudio en el que van a trabajar, qué tipo de problemas se van a plantear, qué materiales van a utilizar, etc. Así mismo, los alumnos aprenderán a manejar el material y adquirirán una serie de conocimientos básicos imprescindibles para poder empezar el trabajo matemático propiamente dicho.

Esta es también una fase de información para el profesor, pues sirve para que éste averigüe los conocimientos previos de los estudiantes sobre el tema que se va a abordar. Como decíamos antes, la experiencia extraescolar no debe despreciarse, sino que puede aprovecharse como fuente de motivación; además, es conveniente evitar hacer un trabajo repetido o tratar de "enseñar" cosas que los alumnos ya saben. Por otra parte, muchas veces tendremos que trabajar en un tema que no es absolutamente nuevo para los estudiantes, que ya lo han estudiado en algún curso anterior, por lo que, para una buena utilización del modelo de Van Hiele, es imprescindible que el profesor sepa qué grado de conocimiento de los contenidos del tema tienen sus alumnos y, sobre todo, qué nivel de razonamiento son capaces de mostrar.

En resumen, esta fase sirve para dirigir la atención de los estudiantes y permitirles que sepan qué tipo de trabajo van a hacer, y para que el profesor descubra qué nivel de razonamiento tienen sus alumnos en el nuevo tema y qué saben del mismo.

2ª fase: Orientación dirigida. En esta fase los estudiantes empiezan a explorar el campo de estudio por medio de investigaciones basadas en el material que les ha sido proporcionado [19]. El objetivo principal de esta fase es conseguir que los estudiantes descubran, comprendan y aprendan cuáles son los conceptos, propiedades, figuras, etc. principales en el área de la geometría que están estudiando. En esta fase se construirán los elementos básicos de la red de relaciones del nuevo nivel. Van Hiele afirma, refiriéndose a esta fase, que "las actividades, si son escogidas cuidadosamente, forman la base adecuada del pensamiento del nivel superior" (Van Hiele [1986], p. 97).

Obviamente los estudiantes, por sí solos, no podrían realizar un aprendizaje eficaz (en cuanto a los resultados obtenidos y al tiempo empleado), por lo que es necesario que las actividades que se les propongan estén convenientemente dirigidas hacia los conceptos, propiedades, etc. que deben estudiar. El trabajo que vayan a hacer estará seleccionado de tal forma que los conceptos y estructuras característicos se les presenten de forma progresiva.

3ª fase: Explicitación. Una de las finalidades principales de la tercera fase es hacer que los estudiantes intercambien sus experiencias, que comenten las regularidades que han observado, que expliquen cómo han resuelto las actividades, todo ello dentro de un contexto de diálogo en el grupo. Es interesante que surjan puntos de vista divergentes, ya que el intento de cada estudiante por justificar su opinión hará que tenga que analizar con cuidado sus ideas (o las de su compañero), que ordenarlas y que expresarlas con claridad. Este diálogo hace que sea en el transcurso de esta fase cuando se forma parcialmente la nueva red de relaciones.

Esta fase tiene también la misión de conseguir que los estudiantes terminen de aprender el nuevo vocabulario, correspondiente al nuevo nivel de razonamiento que están empezando a alcanzar. En algunos casos, especialmente con niños de E.G.B., no es conveniente, desde el punto de vista didáctico, introducir al mismo tiempo nuevos conceptos, nuevo vocabulario y nuevos símbolos. Una técnica utilizada por los maestros para reducir este problema consiste en permitir que, al principio, los niños denominen las nuevas figuras o propiedades a su gusto, hasta que hayan adquirido un dominio suficiente de las mismas. En esta fase se tendrá que hacer el paso del vocabulario de los niños al usual.

Por lo tanto, la fase 3 no es una fase de aprendizaje de cosas nuevas, sino de revisión del trabajo hecho antes, de puesta a punto de conclusiones y de práctica y perfeccionamiento en la forma de expresarse.

4ª fase: Orientación libre. Ahora los alumnos deberán aplicar los conocimientos y lenguaje que acaban de adquirir a otras investigaciones diferentes de las anteriores. El campo de estudio ya es en gran parte conocido por los alumnos, pero éstos todavía deben perfeccionar su conocimiento del mismo. Esto se consigue mediante el planteamiento por el profesor de problemas que, preferiblemente, puedan desarrollarse de diversas formas o que puedan llevar a diferentes soluciones. En estos problemas se colocarán indicios que muestren el camino a seguir, pero de forma que el estudiante tenga que combinarlos adecuadamente, aplicando los conocimientos y la forma de razonar que ha adquirido en las fases anteriores.

Queremos remarcar que el núcleo de esta fase está formado por actividades de utilización y combinación de los nuevos conceptos, propiedades y forma de razonamiento. Los problemas que hay que plantear en la fase 4 no tienen nada que ver con los ejercicios de "aplicación", tan frecuentes en nuestros libros de texto de E.G.B. y Enseñanza Media, para cuya solución solo hace falta recordar algún hecho concreto y utilizarlo directamente; por el contrario, algunos de los problemas de esta fase deben presentar situaciones nuevas, ser abiertos, con varios caminos de resolución. Este tipo de actividad es la que permitirá completar la red de relaciones que se empezó a formar en las fases anteriores, dando lugar a que se establezcan las relaciones más complejas y más importantes.

5ª fase: Integración. A lo largo de las fases anteriores, los estudiantes han adquirido nuevos conocimientos y habilidades, pero todavía deben adquirir una visión general de los contenidos y métodos que tienen a su disposición, relacionando los nuevos conocimientos con otros campos que hayan estudiado anteriormente; se trata de condensar en un todo el dominio que ha explorado su pensamiento. En esta fase el profesor puede fomentar este trabajo proporcionando comprensiones globales, pero es importante que estas comprensiones no le aporten ningún concepto o *propiedad nuevos al estudiante: Solamente deben ser una acumulación,* comparación y combinación de cosas que ya conoce.

Completada esta fase, los alumnos tendrán a su disposición una nueva red de relaciones mentales, más amplia que la anterior y que la sustituye, y habrán adquirido un nuevo nivel de razonamiento.

* * * * *

Hay algunas características de las fases de aprendizaje de Van Hiele que merece la pena que sean puestas de relieve, pues tienen importancia para la organización de la docencia basada en este modelo.

A) En primer lugar, es conveniente reflexionar un momento sobre las diferencias entre unas fases y otras. Un elemento diferenciador destacado son los tipos de problemas que se deben plantear en cada fase (Van Hiele [1986], p. 201):

1) En la fase de información, los problemas que se planteen tienen como finalidad revelar a los estudiantes cuál será el área de la geometría que van a estudiar; su misión principal no es la de ser resueltos, pues unas

veces serán muy simples y otras los estudiantes carecerán de los conocimientos necesarios para llegar a la solución.

Si tomamos como ejemplo el estudio general del producto de simetrías [20], se puede empezar proporcionando a los estudiantes pares de espejos para que observen lo que ocurre cuando se producen reflejos múltiples, en particular cuando los espejos se colocan como las hojas de un libro abierto.

2) En la fase 2, de orientación dirigida, los problemas sirven para delimitar los elementos principales (conceptos, propiedades, definiciones, ...) que los alumnos deben estudiar y sobre los que deben aprender a razonar. Por lo tanto, los problemas deben plantear situaciones en cuya resolución deba aparecer alguno de dichos elementos.

Siguiendo con el ejemplo anterior, hay una clase de problemas muy utilizada que consiste en la realización de simetrías mediante plegado y calcado, haciendo dos pliegues consecutivos, de manera que los ejes formen un determinado ángulo y comparando las posiciones inicial y final de la figura calcada (figura 17). Esta actividad tiene como objetivo directo el descubrimiento del giro resultante de la composición de dos simetrías cuyos ejes se cortan, por lo que corresponde a la segunda fase.

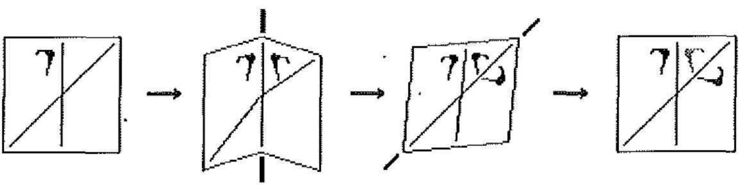


Figura 17.

3) En la fase de orientación libre (fase 4), los problemas no deben ser rutinarios, deben ser más complejos que en la fase anterior y deben obligar a los estudiantes a combinar sus conocimientos y a aplicarlos en situaciones diferentes de las que sirvieron para el aprendizaje inicial. Aquí pueden volver a plantearse los problemas que en la fase 1 eran irresolubles.

En nuestro ejemplo, otro tipo de problemas bastante frecuente en el estudio de las simetrías consiste en doblar una hoja de papel una o más veces, hacer un corte con las tijeras y adivinar qué se verá cuando se despliegue la hoja (figura 18). Esta actividad presenta una amplia gama de variantes (número de pliegues, posiciones de los mismos, formas y posiciones de los cortes, ...) que hacen que los estudiantes deban utilizar el concepto de simetría y las propiedades relacionadas con el producto de simetrías de forma diferente a como lo habían hecho antes; por ejemplo, estas actividades les plantean a los estudiantes el problema del producto de más de dos simetrías. Esta actividad es típica de la cuarta fase de aprendizaje.

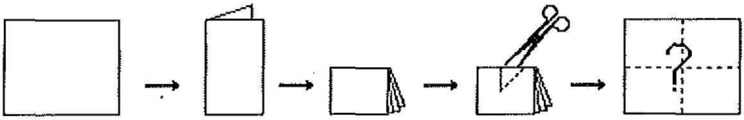


Figura 18.

4) Por último, los problemas que se planteen en la fase de integración (fase 5) tendrán como finalidad favorecer dicha integración o comprobar si los estudiantes ya la han conseguido. Para ello deben plantear situaciones amplias, en las que no haya un predominio de ninguna de las partes que se acaban de integrar, sino que intervengan varias de ellas.

Volvamos al ejemplo que hemos usado antes. Al realizar el estudio de las composiciones de isometrías, una misión de la fase de integración es proporcionar una visión global sobre el conjunto de las isometrías del plano y sus interrelaciones. Para este fin, una actividad interesante y amena es el análisis de los mosaicos dibujados por M.C. Escher [21], en los cuales aparecen las diferentes combinaciones de isometrías que generan los mosaicos planos.

B) También se debe reflexionar sobre el proceso completo de desarrollo de la capacidad de razonamiento, ahora que conocemos sus dos componentes, los niveles de razonamiento y las fases de aprendizaje. Ya hemos dicho que las fases de aprendizaje representan unas directrices que el modelo de Van Hiele propone a los profesores para ayudar a sus alumnos a mejorar su capacidad de razonamiento. Una cuestión importante para un profesor que va a empezar el curso puede ser: ¿Hasta dónde podrán progresar mis alumnos durante las semanas que voy a dedicar a la geometría? Hay algunas consideraciones que pueden ayudarle a responder a la pregunta:

- En general, el proceso de desarrollo del razonamiento no puede enmarcarse en los límites de un curso escolar. La adquisición de los niveles superiores, en particular del 3 y el 4, suele ser un proceso de varios años, por lo que no es de extrañar que al terminar el curso los estudiantes sigan estando en el mismo nivel que al principio, si bien estarán más cerca de poder lograr el nivel superior.

Un ejemplo de esto nos lo proporciona la propia Dina Van Hiele. En su tesis doctoral (traducida al inglés en Fuys, Geddes, Tischler [1984]), Dina Van Hiele describe un curso de un año de la asignatura de geometría de primero de Enseñanza Media (12-13 años)[22], diseñado de acuerdo con el modelo de razonamiento. Sus estudiantes consiguen en pocas semanas superar el nivel 1 y llegar al nivel 2, pero al final del curso no han logrado alcanzar el nivel 3.

• También puede ocurrir que a lo largo del curso los estudiantes alcancen un nivel, por lo que el profesor deberá empezar el trabajo que conduce al nivel siguiente. En este sentido, hay que tener en cuenta que los niveles no plantean rupturas en el proceso de aprendizaje, por lo que una vez completado el trabajo de la última fase de un nivel, se debe iniciar el trabajo de la primera fase del nivel siguiente. La figura 19 trata de representar el proceso continuo que lleva desde los inicios del nivel 1 hasta la plena adquisición del nivel 4; este proceso tiene varias interrupciones marcadas por los cursos académicos, pero éstas no tienen por qué coincidir con el final de un nivel o de una fase.

Por otra parte, como veremos claramente en los bloque de actividades que presentamos más adelante, dentro de una programación global que incluya varios niveles se presentará muy difusa la diferencia entre las actividades de las fases 4 ó 5 de un nivel y las fases 1 ó 2 del siguiente. Por este motivo, en la práctica no se producirá ningún salto brusco cuando se termine de trabajar en un nivel y se empiece en el siguiente.

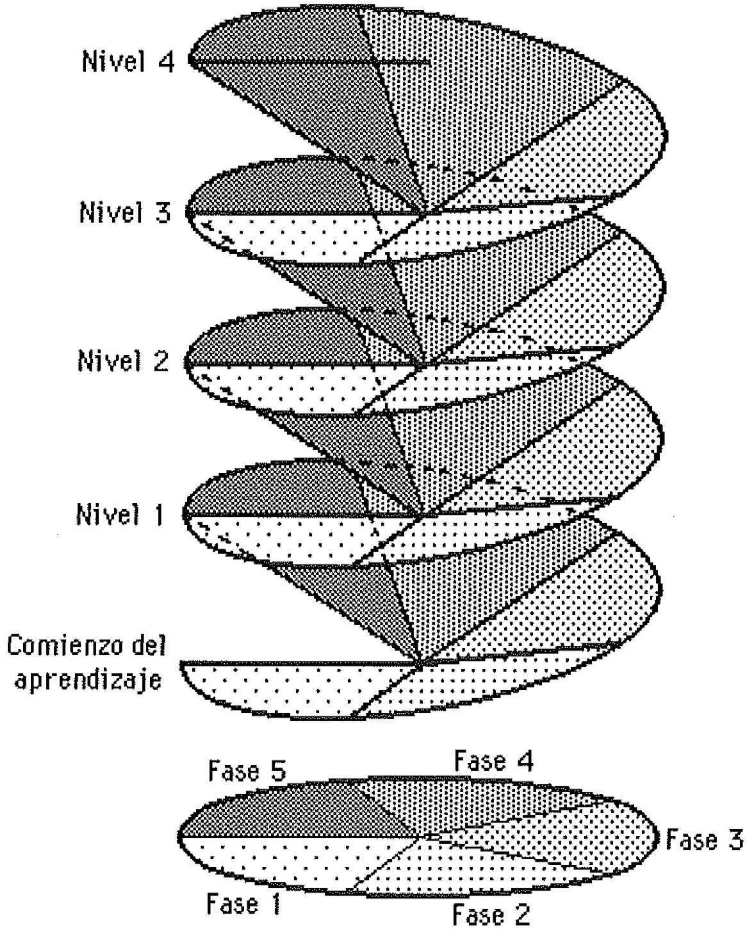


Figura 19. Las fases de aprendizaje del modelo de Van Hiele.

C) Un último punto sobre el que queremos reflexionar es el referente a la meticulosidad con que se deben aplicar las directrices del modelo de Van Hiele. Ya comentamos en su momento que la secuencia de niveles es inalterable, por lo que no se debe pretender que una persona alcance un nivel de razonamiento mientras no haya adquirido suficiente destreza en los anteriores niveles. ¿Ocurre lo mismo con las fases de aprendizaje?

En primer lugar, queremos dejar clara nuestra opinión de que no se debe intentar seguir las pautas de ninguna teoría psico-pedagógico-didáctico-educativa al pie de la letra, pues nos movemos en un terreno (la educación matemática) en el que el elemento principal, nuestros alumnos, es enormemente diverso y, por lo tanto, es necesario que los profesores estemos libres para hacer modificaciones de acuerdo con la situación concreta del momento. ¡Cuántas veces nos hemos encontrado los profesores con que un tema que ha funcionado muy bien un año funciona mal al año siguiente!

En lo referente a las fases de aprendizaje, las fases 2 (orientación dirigida), 3 (explicitación) y 4 (orientación libre) son fundamentales para conseguir un buen aprendizaje de los contenidos y un buen desarrollo de la capacidad de razonamiento, por lo que no debe ser obviada ninguna de ellas ni deben desordenarse. No obstante, la fase 3 no debe entenderse como un período concreto de tiempo entre las fases 2 y 4 dedicado exclusivamente al diálogo, sino que hay que entenderla más como una actitud por parte del profesor, continua durante todo el tiempo, de incitar a los estudiantes a que dialoguen y que expliquen sus descubrimientos, formas de trabajo, dudas, fallos, opiniones, etc. Así, esta fase se extenderá también a los resultados de las actividades que se realicen durante las fases 1, 2, 4 y 5.

La fase 1 tiene como objetivo permitir que el profesor presente a sus alumnos el nuevo tema de trabajo y que averigüe los conocimientos y el nivel de razonamiento de sus alumnos. Por lo tanto, en determinadas ocasiones, cuando tanto profesor como alumnos tienen ya la información adecuada, esta fase no será necesaria. Esto suele ocurrir cuando tiene lugar durante un curso la adquisición de un nivel y el comienzo del trabajo sobre el nivel siguiente, por lo que el trabajo de las fases 4 ó 5 se continúa con el de la fase 2 del nivel siguiente.

El objetivo de la fase 5 es globalizar y unificar los conocimientos o habilidades adquiridos por los estudiantes en varios momentos. También esta fase puede eliminarse en determinados casos, por ejemplo en los niveles inferiores de razonamiento o cuando el tema de trabajo es nuevo y muy desligado de los otros temas que conocen los alumnos; en otras ocasiones, las propias actividades de la fase 4 servirán para ofrecer esa visión global, si esas actividades obligan a trabajar en contextos amplios.

En resumen: Las fases de aprendizaje deben reflejarse en un estilo de enseñanza de la geometría (y de las matemáticas en general) y de organización de la docencia. Las fases 2 y 4 marcan la secuenciación de las actividades para el aprendizaje de un tema y la adquisición de un nivel de razonamiento. La fase 3 debe cubrir toda la actividad en la que intervengan los estudiantes. Las fases 1 y 5 son también importantes y no hay que ignorarlas, aunque tampoco es perjudicial eliminarlas si en un momento dado se ve que son innecesarias.

8.- Una aplicación del modelo de Van Hiele: Estudio de las traslaciones del plano.

Las dos últimas secciones de este capítulo las vamos a dedicar a mostrar dos secuencias de actividades organizadas según el modelo de razonamiento de Van Hiele, con el fin de facilitarle al lector la puesta en práctica del mencionado modelo.

A lo largo de las secciones anteriores hemos procurado que la mayoría de los ejemplos utilizados para ilustrar la teoría correspondieran al razonamiento sobre cuadriláteros; en ésta desarrollaremos una unidad para el aprendizaje de las traslaciones del plano y en la sección 9 se describirá una propuesta para el estudio de algunas relaciones angulares de los polígonos. Con ello queremos ofrecer al lector tres temas distintos que ejemplifiquen la teoría del modelo de Van Hiele, lo cual le facilitará el diseño de sus propias actividades sobre estos u otros contenidos. Además, el planteamiento de las tres exposiciones también es distinto:

- En la primera (estudio de los cuadriláteros), se trata de situaciones puntuales.
- En la segunda (estudio de las traslaciones del plano) se desarrolla de manera bastante detallada una secuencia completa de enseñanza, que se puede utilizar en el aula de E.G.B. o de Enseñanza Media con pocas modificaciones.
- La tercera exposición (estudio de algunas relaciones angulares de los polígonos) no abarca lo que podríamos llamar un "tema completo", sino que la secuencia proporciona los elementos necesarios para poder desarrollar un estudio de algunos aspectos particulares, relacionados con triángulos y cuadriláteros y alguna generalización a los polígonos.

Como decíamos antes, en esta sección vamos a desarrollar una secuencia de actividades diseñada para el aprendizaje de las traslaciones del plano según el modelo de razonamiento de Van Hiele (en Jaime, Gutiérrez [1989] ofrecemos una visión de la propuesta completa de enseñanza de las isometrías del plano). Evidentemente, la que proponemos no es la única forma posible de abordar de manera sensata el estudio de las isometrías en E.G.B. y no resulta difícil encontrar en las publicaciones sobre didáctica de las matemáticas procedimientos alternativos igualmente válidos.

La propuesta que hemos elaborado forma parte de una investigación[23], más amplia, enseñanza de las isometrías del plano desde los primeros cursos de E.G.B. El lector debe tener en cuenta que, para no hacernos reiterativos y por cuestiones de espacio, más que enunciar actividades completas hemos enunciado tipos de actividades. En muchos casos los estudiantes no tendrán bastante con los ejercicios enunciados aquí, pero aquellos profesores que estén interesados en utilizarlas en clase no tienen más que completar el trabajo con la cantidad necesaria de variantes, pudiendo también jugar un poco con la dificultad.

Para facilitar la visión de la secuencia y su relación con le modelo de Van Hiele, hemos estructurado esta sección en tres partes:

- En la primera resumimos las características de cada uno de los niveles de razonamiento sobre las traslaciones del plano y los objetivos de las actividades desarrolladas en cada nivel.
- A continuación describimos las actividades.
- Finalmente indicamos y justificamos el paso por los distintos niveles y fases a lo largo de la secuencia de enseñanza.

* * * * *

Los niveles de razonamiento en las traslaciones del plano

• En el *nivel 1* el aprendizaje se centra en la visión global de las traslaciones, tanto desde el punto de vista estático (reconocimiento de figuras trasladadas) como dinámico (realización de traslaciones).

Las actividades de este nivel tienen, por tanto, los siguientes objetivos:

- La identificación de traslaciones en diferentes situaciones.
- La realización de traslaciones de figuras.

• En el *nivel 2* los estudiantes pueden descubrir experimentalmente los elementos y propiedades de las traslaciones, utilizándolos a continuación para reconocer y efectuar ese movimiento.

Como una traslación está caracterizada por su vector, el descubrimiento y utilización de los elementos de éste (módulo, dirección y sentido) debe ser un objetivo central de este bloque de actividades. Los ejercicios diseñados para este nivel tendrán como objetivos:

- El descubrimiento de la relevancia de esas propiedades, características del vector de traslación.
- La utilización del vector para realizar traslaciones y productos de traslaciones.

• En el *nivel 3* los estudiantes pueden empezar a hacer deducciones experimentales de relaciones o propiedades y a demostrar informalmente sus resultados. También se puede estudiar en este nivel la definición formal de traslación, en la cual está presente la idea de vector libre. Otra parte de las actividades diseñadas en este nivel están orientadas a deducir y trabajar con algunas de las relaciones existentes entre traslaciones y otros movimientos [24] (giros y simetrías). Entre los objetivos de las actividades señalamos:

- La justificación de la independencia del punto elegido en una figura para aplicarle el vector de la traslación.
- La justificación del resultado de la composición de varias traslaciones y de su conmutatividad.
- La descomposición de una traslación en producto de traslaciones, estudiando las posibles soluciones.
- La deducción experimental de la relación existente entre los productos de simetrías de ejes paralelos y las traslaciones y la posterior justificación de esta relación.
- La descomposición de una traslación en producto de dos simetrías.
- La obtención experimental del tipo de isometría resultante del producto de una traslación y un giro o del producto de varios giros cuya suma de ángulos es múltiplo de 360°. La demostración general intuitiva de estos resultados.

• Una vez que hayan alcanzado el *nivel 4* , los estudiantes realizarán las demostraciones formales de las propiedades de las traslaciones descubiertas o justificadas de manera informal con anterioridad y, al mismo tiempo, trabajarán en el descubrimiento de nuevas propiedades y relaciones que requieren cadenas de implicaciones lógicas de muchos pasos o que son complejas.

Como todas las isometrías del plano están relacionadas, las demostraciones formales llevadas a cabo en este nivel permiten tener una visión global de las isometrías del plano, de sus relaciones, de la estructura de grupo, etc. Así pues, las actividades de este nivel estarán dirigidas a:

- La utilización de la estructura de grupo de las isometrías del plano.
- La realización de demostraciones formales de las relaciones entre diversas isometrías, algunas de las cuales se justificaron intuitivamente en el nivel 3.
- El planteamiento y la resolución de movimientos equivalentes, descomposiciones y productos.
- El estudio de las isometrías desde la perspectiva de diversas áreas de las matemáticas (teoría de grupos, ecuaciones cartesianas, espacios vectoriales y matrices) y su utilización en diversos contextos.

* * * * *

Actividades para el aprendizaje de las traslaciones del plano

Dado que la manipulación es muy importante en E.G.B., sobre todo en los Ciclos Inicial y Medio, para realizar estas actividades empleamos, principalmente, unas pequeñas figuras poligonales, de papel o plástico, y unas láminas sobre las que se plantean y realizan las actividades [25]. Además de resultar atractivo el manejo del material, la utilización de esas piezas tiene otras finalidades: Por una parte se realiza el movimiento, al tener que desplazar las piezas; por otra parte se evitan los errores de dibujo ocasionados por una falta de coordinación y de práctica en los niños. De todas formas, cuando los niños tienen edad suficiente, deben utilizar también los elementos habituales de dibujo (regla, escuadra, compás, ...) y si en vez de usar las figuras prefieren dibujarlas, no se lo impedimos.

Los cubrimientos (en particular frisos y mosaicos) pueden resultar también una herramienta útil a lo largo de todo el estudio de las isometrías del plano; en concreto, pueden usarse como elemento integrador en ejercicios como la realización de cubrimientos a partir de sus elementos generadores, la compatibilidad o incompatibilidad de ciertas isometrías en un cubrimiento, la identificación de sistemas generadores, la demostración de la equivalencia de sistemas generadores, etc. Con esto no queremos indicar que la utilización de cubrimientos deba restringirse a las etapas avanzadas del estudio de las isometrías, sino que, como un posible elemento integrador de conocimientos, pueden ser objeto de estudio a lo largo del proceso de aprendizaje de las isometrías del plano para el reconocimiento de un movimiento determinado (por ejemplo, la traslación), la comparación de movimientos del mismo tipo, etc. Dada la imposibilidad de presentar en este capítulo muchas de las posibles actividades a realizar con mosaicos en la enseñanza de las traslaciones, sólo hemos incluido unas cuantas, que esperamos que sirvan como ejemplo para que el profesor las amplíe.

Bloque 1.

1-a) La introducción "estática" de las traslaciones se realiza a partir de ejemplos y no-ejemplos de figuras trasladadas: En varias láminas los estudiantes pueden observar grupos de dos o más figuras relacionadas por traslaciones; otras láminas presentan grupos de figuras que no están relacionadas por traslaciones (figuras giradas, simétricas o de distinto tamaño).

Se establece un diálogo con los alumnos para que observen diferencias entre unos casos y los otros, tras lo cual han de identificar, en láminas distintas de las anteriores, las figuras que son trasladadas y las que no lo son, explicando las razones (entre las figuras no trasladadas se incluyen giros, simetrías, variaciones de tamaño, deformaciones, ...).

1-b) Después llevamos a cabo la introducción "dinámica" de las traslaciones: Los niños realizarán desplazamientos de figuras en línea recta. Para ello disponen de láminas, en las que hay dibujados pares de figuras, y de las correspondientes figuras de papel para realizar el movimiento desde una figura del par hasta la otra. La secuenciación es análoga a la de la actividad anterior, esto es, mediante ejemplos, no-ejemplos e identificación de traslaciones, dando las correspondientes justificaciones.

1-c) Los alumnos buscan (y marcan con distintos colores) diversos "caminos" que se puedan utilizar como guía en el desplazamiento de algunas de las figuras trasladadas de las láminas anteriores (figura 20).

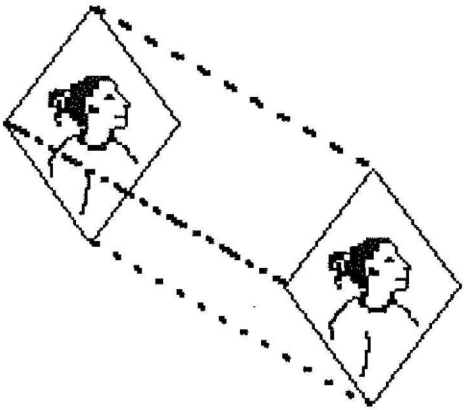


Figura 20.

1-d) El profesor da a los estudiantes láminas con dibujos de figuras y puntos. Los alumnos deben trasladar las figuras de manera que un punto determinado de la figura llegue a situarse sobre el punto indicado (figura 21) y expresar verbalmente la forma de hacerlo.

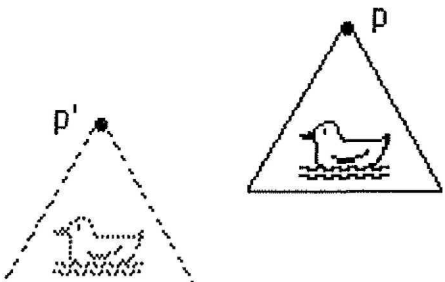


Figura 21.

1-e) En esta actividad el profesor da a los estudiantes láminas con dibujos de figuras y segmentos y plantea ejercicios con enunciados similares a los de 1-d; ahora se debe llevar alguno de los lados de la figura sobre el segmento dibujado (figura 22).

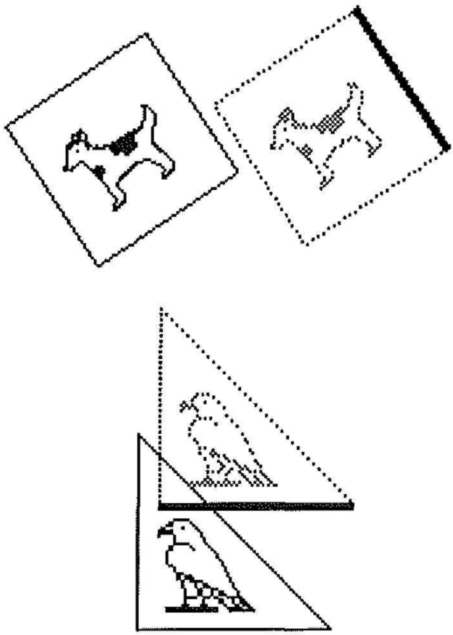


Figura 22.

Hay ejercicios de diversos grados de complejidad, tanto por la colocación del segmento (cuando está sobre la figura es más difícil), como por la forma de llevarlos a cabo: A los alumnos que tienen dificultades al comenzar, el profesor les puede señalar el lado que deben colocar sobre el segmento y pedirles que pinten ese lado y el segmento del mismo color. Al final de la actividad aparecen también casos sin solución o con varias soluciones.

Bloque 2.

2-a) Dado un par de figuras trasladadas (es decir, una es traslación de la otra), los alumnos trazarán segmentos (con lápices de distintos colores) uniendo varios pares de puntos de las dos figuras que se correspondan por la traslación.

El profesor pregunta: "¿Hasta dónde se traslada este punto? ¿Qué camino sigue para llegar hasta ahí? Dibuja los dos puntos y el recorrido con el mismo color ... ¿Y éste otro punto? Dibuja los puntos y el recorrido con un color distinto al anterior. ... Hazlo con otros puntos. ... ¿Qué observas?" El profesor debe dirigir el diálogo de los alumnos para que se den cuenta de que (figura 23) cualquier punto de la figura sigue el mismo recorrido (en longitud y dirección).

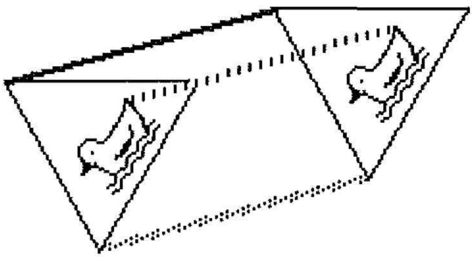


Figura 23. Figura trasladada.

2-b) Los estudiantes repetirán el mismo tipo de ejercicio anterior pero sobre figuras que no se corresponden mediante una traslación (figura 24). Después de trazar un segmento que une dos puntos que se corresponden, el profesor les pregunta: "¿Crees que si dibujas otros segmentos serán iguales a ése? ... ¿Por qué? Compruébalo trazando segmentos entre otros puntos que se correspondan".

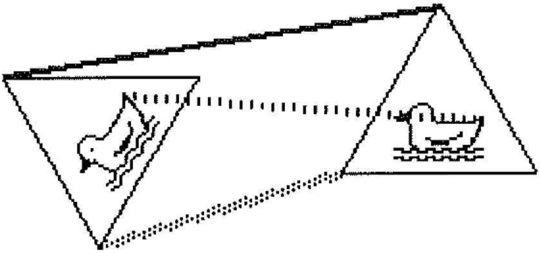


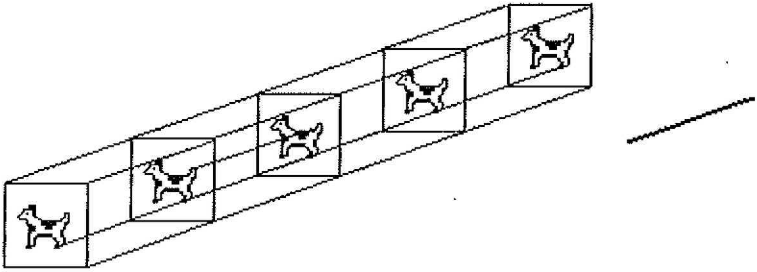
Figura 24. Figura no trasladada.

Con la siguiente actividad empieza una serie de ellas en las que se trabaja con frisos [26] para llegar a descubrir y aislar cada una de las características del vector de traslación. Estas actividades son también el punto de partida para estudiar el producto de traslaciones.

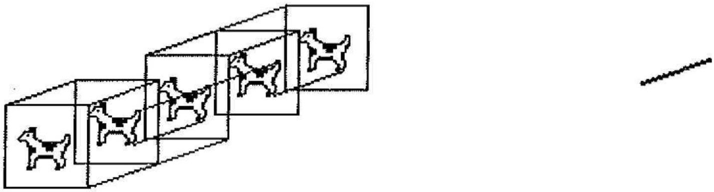
2-c) El profesor presenta a los estudiantes algunos ejemplos de frisos completos. Después les da una lámina con las dos primeras figuras de otros frisos para que los completen ellos [27]. Para hacer explícito el uso de las componentes del vector de la traslación, el profesor les hace preguntas del tipo: "¿Cómo sabes que esa figura está bien colocada?" ... "¿Cómo has hecho el friso?" ... "Ahora quiero que la coloques con toda exactitud, ¿qué tienes que hacer?"

En caso de que los estudiantes tengan dificultades, se les pide que dibujen segmentos que unan puntos que se correspondan en algunos de los frisos completos y, después, que hagan lo mismo entre las dos figuras del que deben completar.

2-d) Con los frisos que han completado en 2-c, los alumnos han de colorear segmentos entre puntos que se correspondan de figuras consecutivas (en varias figuras de cada friso). El profesor les pedirá que comenten lo que observan; puede plantear, si es necesario, preguntas como éstas: "¿Cómo son los segmentos que has dibujado en este friso?" ... "¿Qué tienen igual?" ... "¿Y en este otro friso?" ... "¿Qué diferencias hay entre los segmentos de este friso (figura 25-a) y los de este otro (figura 25-b)?



- a -



- b -

Figura 25.

La idea de usar un "segmento libre" [28] para definir una traslación se introduce sugiriendo que copien junto a cada friso, pero separado de las figuras, un segmento igual a los que han dibujado en este ejercicio (figura 25).

2-e) Se les dan a los alumnos algunos frisos completos en los que haya algún error y ellos deben identificar y describir los errores.

2-f) El profesor presenta una lámina en la que aparece la primera figura de un friso y el "segmento libre" que debe utilizarse para completar el friso.

2-g) Si no ha surgido todavía la necesidad de indicar el sentido de la traslación, se provocará pidiendo a los alumnos que muevan algunas figuras por traslaciones definidas mediante segmentos (figura 26) y que comparen los resultados entre ellos [29]. Normalmente, aparecerán las dos soluciones, pero en caso contrario el profesor debe dirigir la atención para que los alumnos estudien la posibilidad de usar el segmento de manera que aparezcan dos traslaciones diferentes.

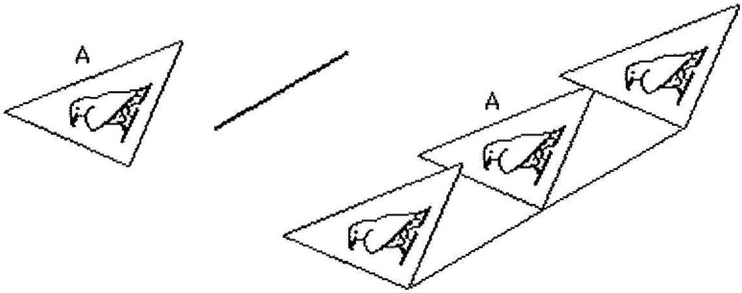


Figura 26.

La introducción del vector (o "flecha") de la traslación no plantea dificultades gracias a su uso cotidiano para orientar. De todas formas, el profesor puede plantear preguntas del tipo: "¿Qué le podemos añadir al segmento (refiriéndose a una de las figuras anteriores) si queremos que sólo se pueda dibujar ésta solución (señalando una de las dos posibles)?"

Bloque 3.

Cuando hacen una traslación a partir de su vector, el proceso que siguen generalmente los estudiantes consiste en obtener la imagen de un punto y, a continuación, colocar la figura paralela a la original. Una concepción generalizada entre los estudiantes al actuar así es que la imagen de la figura se situará en lugares distintos según el punto que se elija como origen del vector, es decir que al mover la figura según el vector que sale del punto P (figura 27), la figura quedará situada más arriba que al moverla según el vector que sale del punto Q.

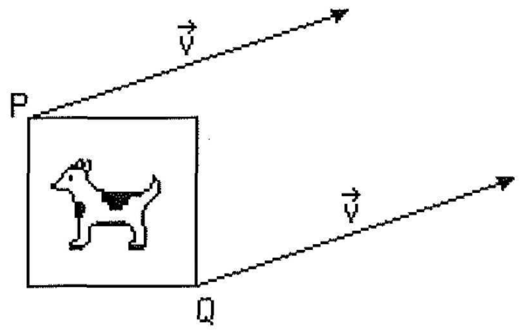


Figura 27.

Uno de los objetivos de la actividad 3-a es procurar que los alumnos sean conscientes de la independencia del punto de la figura original seleccionado para aplicarle el vector de traslación. Por eso, cuando los alumnos explican los pasos que han seguido para obtener la imagen se les deben formular preguntas como: "¿Qué sucedería si eligieras este otro punto como origen del vector?" ... "¿Por qué?" En caso de que piensen que la imagen sería distinta el profesor les pedirá que lo comprueben y, después, que dibujen vectores desde varios puntos más de la figura original a la imagen.

3-a) Los estudiantes realizan varias traslaciones de una misma figura a partir de sus vectores libres. Algunos de los vectores que damos son equivalentes (lo cual permite afianzar la idea de que lo único que importa del vector es el módulo, la dirección y el sentido, pero no el lugar en el que se coloque) y otros son inversos entre sí. Tras la realización de algunos ejercicios de este tipo, el profesor les pide a los alumnos que expliquen cómo han obtenido las imágenes y por qué, en algunos casos, hay varias imágenes en el mismo sitio.

El profesor les da a los estudiantes otra lámina con ejercicios como los anteriores. Antes de que empiecen les dice: "Ahora tenéis que hacer todas estas traslaciones, igual que antes. ¿Podéis ahorraros algo de trabajo? ¿Por qué?" (la finalidad de estas preguntas es que identifiquen vectores equivalentes).

3-b) El profesor presenta a los alumnos la idea de producto de traslaciones y les pide que realicen varios productos de dos traslaciones, conociendo sus correspondientes vectores. Después les pide que dibujen el vector de la traslación que lleva la primera figura hasta la última.

El ejercicio continúa proponiendo a los estudiantes que hagan productos de más de dos traslaciones.

3-c) En la actividad anterior se incluyen productos de traslaciones dirigidos al descubrimiento de la conmutatividad de la composición de dos traslaciones. Si los estudiantes no han notado la igualdad de resultados en esos pares de ejercicios, el profesor la pondrá de relieve y les pedirá que piensen sobre las causas; si los alumnos no saben demostrar esa propiedad, el profesor puede orientarles sugiriéndoles que marquen los tres recorridos realizados por un mismo punto mediante cada uno de los dos productos y mediante la traslación resultante y, si es necesario, guiarles para que razonen a partir del paralelogramo que se forma (figura 28).

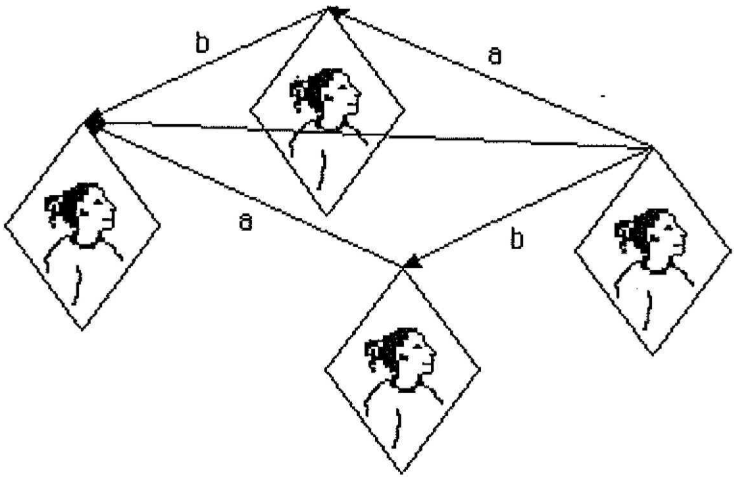


Figura 28.

3-d) Para reforzar el concepto de producto de traslaciones trabajamos en la descomposición de una traslación:

En primer lugar, se pide al estudiante que haga la descomposición de una traslación en producto de dos traslaciones: "¿Puedes pasar desde esta figura (la señalamos) hasta esta otra (la señalamos) en dos pasos?" Una vez que lo ha resuelto se le pide: "¿Lo puedes hacer de otra forma? ... ¿Y de otra? ... ¿De cuántas maneras puedes hacerlo?" Si no encuentra una segunda o una tercera solución, dibujamos la primera traslación para que el alumno obtenga la que falta. Después de que haya descompuesto diversas traslaciones, le preguntamos: "¿Lo que estás haciendo sucede con cualquier traslación?"

A continuación le pedimos que haga descomposiciones en dos, tres, ... traslaciones.

3-e) En esta actividad se inicia el estudio de las relaciones entre las traslaciones y las demás isometrías, planteando el descubrimiento de la relación entre las traslaciones y las simetrías (en caso de que no tengan un conocimiento suficiente de las simetría habrá que saltar esta actividad o detener aquí el estudio de las traslaciones).

El profesor da a los alumnos varias láminas en las que están dibujados dos ejes de simetría, para que realicen el producto de las dos simetrías en un orden indicado. En casi todos los casos los ejes de simetría son paralelos (por lo que el resultado es una traslación); en las restantes láminas los ejes se cortan (por lo que el resultado es un giro). Proponemos una cantidad de ejercicios suficiente para que aparezcan traslaciones que difieran sólo en el módulo, en la dirección o en el sentido.

Tras el descubrimiento de que el resultado del producto de dos simetrías cuyos ejes son paralelos es una traslación, el profesor fomentará una discusión entre los alumnos acerca de la forma de "adivinar" cuál es el vector de una traslación viendo sólo los ejes de las simetrías. Analizando los ejercicios que han hecho antes, la mayoría de los estudiantes podrán descubrir la relación entre ejes y vector; pero si no la obtienen, se les puede ayudar dirigiendo su atención a comparaciones relevantes, en las que se examinen vectores que difieran sólo en una de sus características y haciendo preguntas como: "¿En qué se diferencian estos dos vectores?" ... "¿Y los ejes de las simetrías correspondientes?" (figura 29).

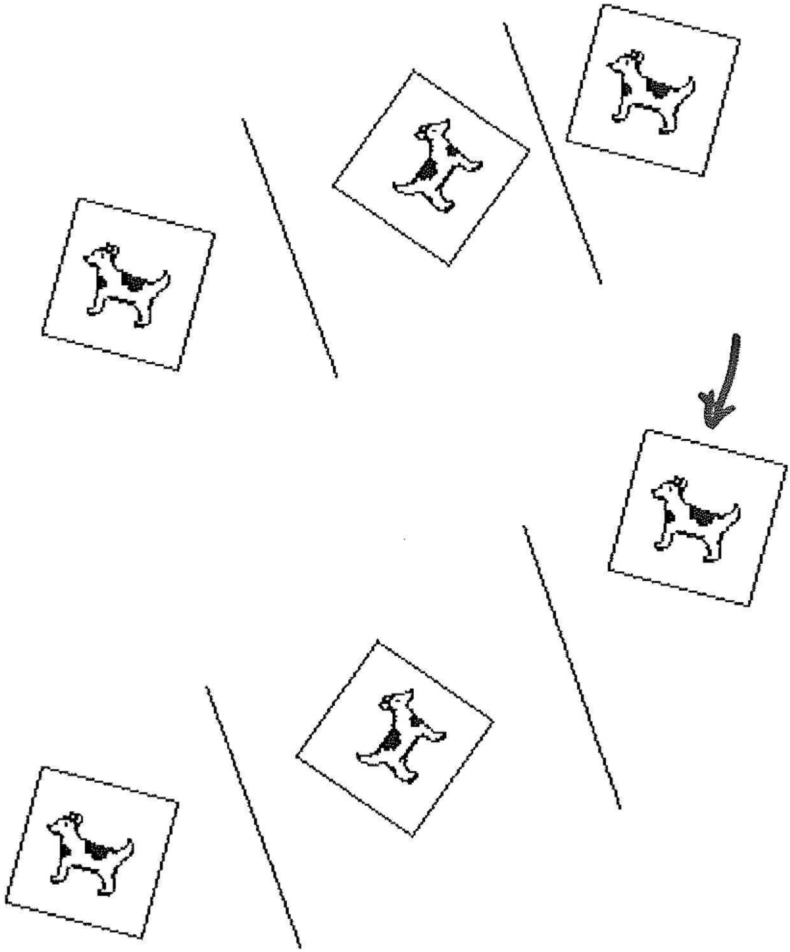
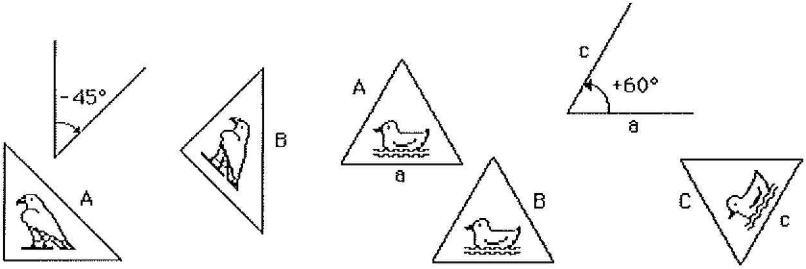


Figura 29.

La siguiente actividad se la proponemos a los alumnos que ya han estudiado giros. En ella se utilizan dos propiedades de los giros: 1) La variación de la inclinación de una figura mediante un giro depende solamente del ángulo de giro y no del centro de giro. 2) Si dos figuras tienen la misma orientación y están con distinta inclinación, hay un giro que permite pasar de una figura a la otra, cuyo ángulo es la diferencia de las inclinaciones entre las figuras (figura 30-a). El objetivo de la actividad es que los estudiantes descubran y justifiquen que la composición de una traslación y un giro es otro giro con el mismo ángulo que el inicial pero distinto centro (figura 30-b).



Hay un giro de -45° que lleva la figura A a la B	De la figura A a la B: traslación De la figura B a la C: giro de +60° De la figura A a la C: giro de +60°
- a -	- b -

Figura 30.

3-f) El profesor propone a los estudiantes hacer varios productos de una traslación y un giro y, después, les pregunta sobre el movimiento resultante. Cuando los estudiantes hayan descubierto el resultado, el profesor les pedirá que justifiquen si creen que eso ocurrirá siempre y por qué; algunas preguntas que pueden orientarlos son: "¿Modifica una traslación la inclinación de las figuras?" ... "¿Y un giro?" ... "¿Y una traslación seguida de un giro?" ... "¿Y un giro seguido de una traslación?"

Para reforzar la comprensión de esta propiedad, se puede proponer a los estudiantes que realicen productos en los que intervengan varias traslaciones y giros, así como descomposiciones de traslaciones en productos de este tipo.

Los mosaicos constituyen una buena ayuda para conseguir los objetivos de esta actividad. En lugar de realizar productos de traslaciones y giros sobre figuras aisladas, se pueden utilizar mosaicos en los que intervengan los movimientos requeridos y seguir el desplazamiento de una baldosa según una sucesión de esos movimientos (o sea, se observa la composición de los movimientos), y después se compara la baldosa inicial con la final (es decir, el resultado de la composición). En el mosaico que presentamos en la figura 31 hay giros de 60° y 180° y traslaciones, por lo que, este ejercicio en concreto se puede utilizar para observar el resultado de la composición de giros de 60° con traslaciones y de giros de 180° con traslaciones.

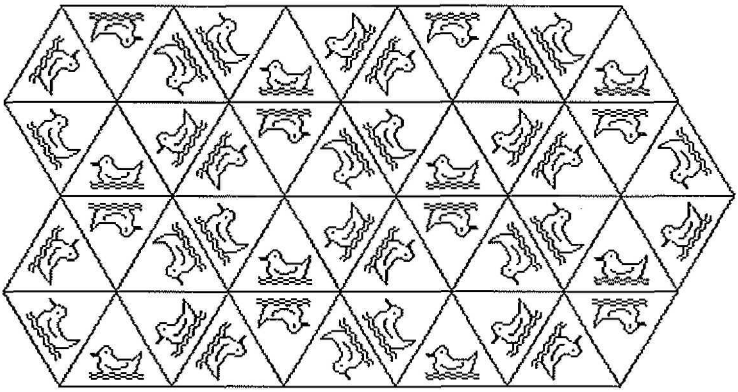


Figura 31.

3-g) El profesor propone la realización de varios productos de giros, con el objetivo de que descubran que la composición de giros es una traslación cuando sus ángulos suman un múltiplo de 360°. El proceso seguido en esta actividad es análogo al de la actividad 3-f.

Bloque 4.

Las demostraciones formales de algunas de las propiedades vistas hasta el momento y de propiedades nuevas entran a formar parte de este último bloque de actividades. A lo largo de él se irá progresando en la complejidad del razonamiento exigido para hacer las demostraciones, planteándose en términos de operaciones con vectores cuando así sea oportuno. Así mismo, al finalizar este bloque los estudiantes habrán adquirido una comprensión del conjunto de las isometrías del plano como un todo.

A partir de ahora, se sobreentiende que las demostraciones serán formales, aunque esto no quiere decir que deban ser abstractas: Siempre que sea posible, el estudio de la geometría debe ir acompañado de figuras adecuadas. Tampoco tienen por qué ser sofisticadas: En el estudio de las isometrías la mayoría de las demostraciones se pueden hacer recurriendo a propiedades simples de paralelismo, igualdad de (tri)ángulos y equidistancia.

4-a) Demostrar que el producto de traslaciones es conmutativo.

4-b) Demostrar que el resultado de componer dos simetrías de ejes paralelos es una traslación.

Las demostraciones de la conmutatividad del producto de traslaciones y del resultado de componer dos simetrías de ejes paralelos son ejemplos sencillos que pueden utilizarse para iniciar el uso de esquemas deductivos formales.

4-c) Demostrar que las traslaciones son isometrías, es decir, que conservan la distancia entre los puntos.

Esta es una propiedad nueva [30] para los alumnos. El primer paso que deben dar es comprender exactamente el problema y decidir qué deben hacer y cómo se puede reflejar eso en una figura que sirva de base para hacer la demostración (figura 32); para empezar, el profesor hará una descripción del concepto de "isometría" y a partir de ella los alumnos tratarán de plantear los términos concretos de la demostración: Hay que demostrar que si se toman dos puntos distintos, p y q, y sus imágenes por una traslación, p' y q', el segmento pq mide lo mismo que el segmento $p'q'$.

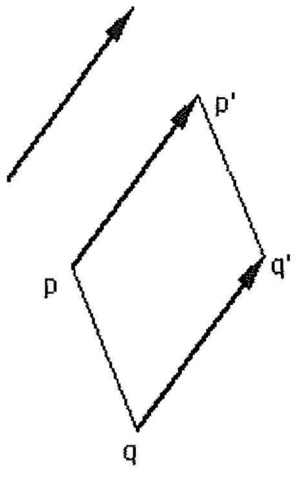


Figura 32.

Nos parece innecesario detallar el tipo de preguntas o de comentarios con los que el profesor puede contribuir en el proceso de realización de una demostración por sus alumnos. Lo que es importante es que, a lo largo de los ejercicios de progreso en el nivel, los alumnos vayan adquiriendo consciencia del esquema deductivo implicado en las demostraciones formales y, por supuesto, en su capacidad de utilización de propiedades y teoremas en nuevas demostraciones.

Tampoco creemos que haga falta proponer a continuación una relación detallada de las propiedades con los correspondientes procesos de demostración, pues el comentario anterior señala el camino a seguir y, por otra parte, es muy amplia la variedad de resultados que se pueden seleccionar como objeto de estudio. Por ello sólo indicaremos algunos ejemplos en 4-d:

4-d) Entre los resultados interesantes que deben ser estudiados, pues ayudan a dar una visión integradora de las distintas isometrías, los más destacados son los que ligan las traslaciones con el producto de giros con distinto centro (cuya suma de ángulos es múltiplo de 360°), el resultado de componer giros y traslaciones, la relación entre traslaciones y simetrías (en particular las simetrías en deslizamiento), etc.

En estas demostraciones hay algunas con algo más de complejidad en el razonamiento necesario para realizarlas, por lo que el profesor debe presentarlas de manera apropiada para los estudiantes y teniendo en cuenta la ordenación lógica de las propiedades.

* * * * *

Los niveles y las fases de Van Hiele en la secuencia de actividades

Con las actividades anteriores hemos planteado un esquema de aprendizaje que debe llevar desde el razonamiento inicial de nivel 1 hasta una capacidad de razonamiento de nivel 4. Su organización en cuatro bloques se ha hecho con el fin de facilitar la visión global de la propuesta de trabajo, ya que cada uno de los cuatro bloques contiene los ejercicios correspondientes a un nivel de razonamiento que permiten el acceso al nivel de razonamiento siguiente [31]. No obstante, ésta no es un división rígida, pues muchos ejercicios pueden ser resueltos de diversas formas, siguiendo razonamientos de niveles distintos, por lo que es posible reorganizar dichos ejercicios.

La posibilidad de asignación de nivel y fase a las distintas actividades **por sí mismas** no es única (más bien, no es posible), pues depende del objetivo de la actividad, y sólo es posible realizar dicha asignación si la actividad está dentro de un contexto determinado. Teniendo en cuenta esos factores es como hay que entender la clasificación que proponemos y justificamos en los párrafos siguientes.

Los ejercicios del *bloque 1* permiten el progreso hasta el nivel 2. El trabajo en este bloque empieza por la fase de información, que se lleva a cabo mediante una evaluación por el profesor de los conocimientos previos de los alumnos, y que les proporciona a éstos una primera toma de contacto con el tema.

En el caso de que los estudiantes no hayan estudiado nunca traslaciones, las actividades 1-a y 1-b son su iniciación en esta isometría; estos ejercicios deben proporcionarles el conocimiento inicial de las traslaciones necesario para adquirir el nivel 1 de razonamiento y poder progresar en la resolución de las siguientes actividades. Si los estudiantes ya conocen las traslaciones, las actividades 1-a y 1-b pueden utilizarse en dicha fase de toma de contacto.

En las actividades 1-c hasta 1-e los alumnos han de aplicar el concepto de traslación en diversas situaciones de reconocimiento (1-c) y de realización (1-d y 1-e) de traslaciones. Existen diversas posibilidades de complejidad (incluyendo ejercicios sin solución en 1-e) que permiten el progreso en las fases 2 y 4.

Tanto en este bloque como en los siguientes, las justificaciones verbales por parte de los alumnos sobre su forma de proceder (fase 3) son constantes, pues las preguntas del profesor deben requerir siempre tal justificación. Por tanto, de acuerdo con lo que indicábamos al final de la sección 7, no hemos diseñado actividades específicas para favorecer el paso por la fase 3, sino que ésta se encuentra inmersa en todos los ejercicios.

Al finalizar cada bloque de actividades, el profesor debe dirigir un resumen de recopilación de los resultados más interesantes que se han estudiado, tratando de que los alumnos los vean como partes de un conjunto más que como una lista de elementos disconexos. Este tipo de trabajo es el que corresponde a la fase 5 de cada nivel.

En la secuencia del *bloque 2* se desarrollan actividades que permiten a los estudiantes alcanzar el nivel 3 de razonamiento. A la fase 1 del nivel 2 le corresponde un repaso del concepto de paralelismo, o su introducción en el caso de que los alumnos no lo conozcan [32].

Los ejercicios 2-a y 2-b están dirigidos al reconocimiento de las propiedades de los segmentos que unen puntos de una figura con sus correspondientes trasladados: Paralelismo e igualdad de longitud. Estos dos ejercicios se encuentran a caballo entre la fase 1 y la fase 2 ya que, por una parte, suponen la toma de contacto con el tipo de trabajo que se va a realizar, pero van más allá de la simple presentación, pues también inician el proceso de discriminación de las características de la traslación.

Los ejercicios del 2-a al 2-e están enfocados directamente a destacar las características y elementos que intervienen en las traslaciones (corresponden, por tanto, a la fase 2), mientras que en 2-f y 2-g se utilizan esas características de forma conjunta cuando hay que realizar traslaciones, a partir de lo cual se determina la característica de las traslaciones que, posiblemente, todavía no había surgido (el sentido del vector), por lo que estos ejercicios corresponden a la fase 4.

La utilización del vector (o del segmento) libre ya está en la frontera entre los niveles 2 y 3 de razonamiento; los alumnos pueden aprender a utilizar el vector de traslación en el nivel 2, pero lo harán de forma mecánica (como una técnica de dibujo) y hasta que no hayan alcanzado el nivel 3 no serán conscientes de algunas propiedades, como la de que es indiferente qué puntos de la figura original se eligen para aplicar el vector y trasladar la figura. En nuestras experimentaciones de estas unidades, nos hemos encontrado con discusiones entre los niños a causa de que pensaban que al haber elegido puntos diferentes para hacer la traslación de una figura, obtendrían resultados (es decir posiciones de la figura) diferentes.

En el *bloque 3* continuamos la enseñanza de las traslaciones sobre la base de que los alumnos ya han adquirido el nivel 3 de razonamiento. Esto quiere decir que en las actividades el profesor debe hacer énfasis en la necesidad de justificar las afirmaciones, distinguiendo los razonamientos basados en un ejemplo concreto (propios del nivel 2) de los razonamientos generales, que quieren ser válidos para cualquier traslación o cualquier objeto.

Los ejercicios 3-a y 3-b se sitúan en la fase 2 del nivel 3 pues están orientados a una comprensión de la idea de vector libre como representante de una traslación y de las implicaciones que esto conlleva. En estas actividades se hace también la presentación y utilización de la composición de traslaciones, que se desarrolla en los ejercicios posteriores, en particular en la 3-c, que también pertenece a la fase 2.

El ejercicio 3-d forma parte de la fase 4 del nivel 3, pues en él hay que aplicar los conceptos aprendidos en los ejercicios anteriores acerca de composición de traslaciones para realizar la descomposición de aplicaciones.

Los ejercicios 3-e, 3-f y 3-g tienen objetivos y estructuras parecidas, pues completan el estudio de la gama de productos de isometrías en los que intervienen traslaciones y relacionan las traslaciones con los otros movimientos conocidos, utilizando técnicas (composición de aplicaciones) y propiedades (por ejemplo, la variación de la inclinación de las figuras en los giros) ya conocidas de antemano. Cada una de estas actividades está integrada por varios ejercicios que recorren las fases 2, 4 y 5 del nivel 3: En primer lugar se plantean los ejercicios dirigidos a descubrir el resultado de un determinado producto de isometrías (fase 2); después se proponen situaciones nuevas (descomposición de isometrías) en las que los alumnos deben aplicar lo que han aprendido (fase 4); además, estos ejercicios les permiten integrar los nuevos conocimientos (acerca de las traslaciones) en su red de conocimientos referentes a las isometrías (fase 5).

En varios de los ejercicios del bloque 3, que incluyen la obtención de propiedades, el profesor debe pedir a los alumnos que hagan demostraciones de tipo intuitivo (nivel 3) que más adelante (en el bloque 4) se volverán a realizar, pero formalmente. Aunque se trate de la misma propiedad y la línea argumental de sus dos demostraciones sea la misma, la forma de realizarlas es la que marca la pauta sobre el nivel en el que razona el estudiante.

En el *bloque 4* ya no existe el objetivo de progresar desde el nivel 4 hasta la consecución de un quinto nivel (recordar la nota 6 de pie de página). El progreso en este nivel discurre de manera que los alumnos empiezan tomando contacto con las demostraciones formales (ejercicios 4-a, 4-b y 4-c) y aprenden a plantear las propiedades o teoremas en términos de hipótesis, tesis y proceso a seguir para la demostración; ello se muestra en el ejercicio 4-c, que se puede considerar como un ejemplo tipo de la fase de orientación dirigida (fase 2). Más tarde, cuando hayan adquirido destreza, se enfrentarán con otras demostraciones más complejas (actividad 4-d).

El aprendizaje correcto del uso del razonamiento deductivo, objetivo del nivel 4, es largo y puede requerir bastantes demostraciones dirigidas por el profesor, cuyo método aplicarán los estudiantes después a otras situaciones. Por lo tanto, el profesor debe elegir y ordenar las demostraciones iniciales con cuidado.

Para terminar esta sección, queremos referirnos brevemente al enfoque que hemos utilizado en la secuencia. Nos consta que en Enseñanza Media y en los primeros cursos de la Facultad, el tratamiento que se hace de las traslaciones es por lo general algebraico o vectorial, utilizando ecuaciones o matrices para definir el movimiento. Nosotros nos hemos decantado por una presentación válida para E.G.B. y Enseñanza Media, en la cual las demostraciones formales tienen un apoyo visual y utilizan propiedades elementales de geometría (la que presentamos en 4-c, figura 32 es un ejemplo sencillo). No obstante, si los alumnos han aprendido anteriormente el tema de alguna otra manera, en las fases de integración se deben establecer relaciones entre las diversas aproximaciones, con el fin de no considerar las traslaciones como cosas distintas según la forma en que se estudien.

9.- Una aplicación del modelo de Van Hiele: Estudio de relaciones angulares de los polígonos.

Como indicamos con anterioridad, en esta sección vamos a presentar una secuencia de actividades organizada según los niveles de Van Hiele, que corresponde a un módulo de enseñanza perteneciente al proyecto de investigación llevado a cabo por D. Fuys, D. Geddes y R. Tischler; la hemos incluido en este texto por dos razones principalmente:

Por una parte, dicha investigación es una de las más importantes entre las relacionadas con el modelo de Van Hiele. Además, el módulo que vamos a ver se basa, en gran parte, en la experiencias realizadas por Dina Van Hiele; estas experiencias, descritas y analizadas en la tesis doctoral de su autora (contenida en Fuys, Geddes, Tischler [1984]), constituyen uno de los pilares en los que se basó inicialmente el modelo que nos ocupa.

Y por otra parte está la ventaja que supone, para un profesor interesado en elaborar secuencias de enseñanza basadas en el modelo de Van Hiele, disponer de diversos ejemplos de aplicación del modelo.

D. Fuys y sus colaboradores elaboraron tres módulos de enseñanza para poder investigar sobre los niveles de razonamiento, los procesos cognitivos (inductivos o deductivos) y las dificultades de aprendizaje de los alumnos; nosotros nos centraremos en el segundo módulo (por ser el basado en el trabajo de Dina Van Hiele). La descripción (resumida) de las actividades y la de las actuaciones de los alumnos las hemos extraído de la memoria del proyecto de investigación (Fuys, Geddes, Tischler [1985]); como nuestro objetivo es presentar la estructuración del módulo siguiendo los distintos niveles y fases, hemos incorporado algunas pequeñas modificaciones en las actividades y diversos comentarios.

El módulo de aprendizaje que vamos a describir está constituido por siete actividades. No se trata de actividades individuales, sino de bloques de ejercicios cortos ligados por algún elemento común. También queremos señalar que, para la correcta utilización de este módulo de enseñanza en una clase, es imprescindible aumentar el número de ejercicios de cada actividad, pues normalmente a los niños no les bastará con efectuar un solo ejercicio, sino que deberán hacer varios parecidos para comprender mejor los conceptos y propiedades que están estudiando.

Para la presentación de los diversos niveles y fases por los que transcurre el módulo es necesario realizar una descripción de éste, lo cual hacemos de manera resumida seguidamente. Después daremos la asignación de niveles que se desprende de la secuencia para pasar finalmente a comentar algunas actuaciones de los alumnos.

* * * * *

Actividad 1 (Medida de ángulos). *Está diseñada para averiguar el conocimiento previo (tanto comprensivo como memorístico) de los alumnos sobre los principales elementos que se usarán a lo largo del módulo: Angulos, su medida y la suma de los ángulos de un triángulo.*

a) Se muestran pares de ángulos con diversas amplitudes y con lados de varias longitudes y se pregunta a los estudiantes: "¿Cuál está más abierto? ... ¿Cuál es mayor?". Los alumnos pueden superponer los ángulos si quieren.

b) Se pide a los estudiantes que reconozcan y que construyan ángulos rectos.

c) Se les pide que comparen visualmente ángulos, que estimen amplitudes y que midan ángulos con transportador.

d) Se les pide que midan ángulos adyacentes y que "estimen" la amplitud del ángulo exterior (suma).

e) Se les pide que determinen un ángulo de un triángulo conocidos los otros dos (figura 33). Si resuelven esta cuestión, el profesor pregunta a los estudiantes sobre el valor de la suma de los ángulos de un triángulo.

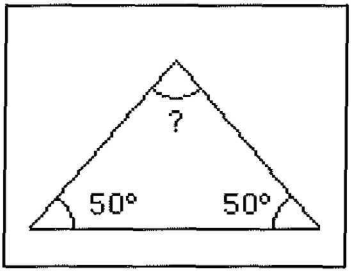


Figura 33.

Los alumnos que tienen dificultades en esta actividad realizan una "unidad de enseñanza" antes de pasar a las actividades siguientes. En ella trabajan sobre la idea de ángulos congruentes y después realizan varias mediciones de ángulos, primero con medidas no estándar (sectores de 15° hechos de cartulina) y después con la unidad estándar.

Actividad 2 (Cubrimientos y mallas). *Se introducen los cubrimientos y las mallas, que serán utilizadas posteriormente como estructuras visuales globales en las que aparecen el paralelismo y la congruencia de ángulos. Se trabaja con redes triangulares, rectangulares y de paralelogramos* [33].

a) A partir de referencias a los pavimentos del suelo, se pide a los estudiantes que imaginen y dibujen pavimentos formados por baldosas cuadradas y de otros tipos que ellos recuerden. Finalmente, se les lleva a considerar la malla de rectángulos y a su construcción mediante dos familias de rectas paralelas.

b) El profesor proporciona a los alumnos fichas recortadas de diversas formas (paralelogramos, triángulos rectángulos y acutángulos) y les pide que construyan mosaicos con ellas y que dibujen las mallas, relacionando las mallas triangulares con las cuadrangulares. Después les pide que identifiquen en las mallas líneas paralelas, ángulos congruentes y diversas figuras.

c) Se pide a los estudiantes que hagan un resumen de los principales resultados que han descubierto.

Actividad 3 (Sierras y escaleras). *La actividad se centra en la identificación y descripción de "sierras" y "escaleras"* [34]: Una sierra es una línea poligonal formada por dos familias de segmentos paralelos entre sí; una escalera es una estructura formada por un recta y una familia de segmentos con origen en la recta, situados todos al mismo lado de la recta, paralelos entre sí (figura 34).

a) Se pide a los estudiantes que identifiquen ciertas estructuras (entre las que hay sierras y escaleras) en una malla triangular, ayudándose, si es necesario, mediante la colocación sobre la malla de hojas de acetato con esas estructuras dibujadas en ellos.

b) El profesor les muestra objetos con formas similares a las sierras o las escaleras; también les presenta láminas con ejemplos y no-ejemplos de sierras y de escaleras (figura 34).

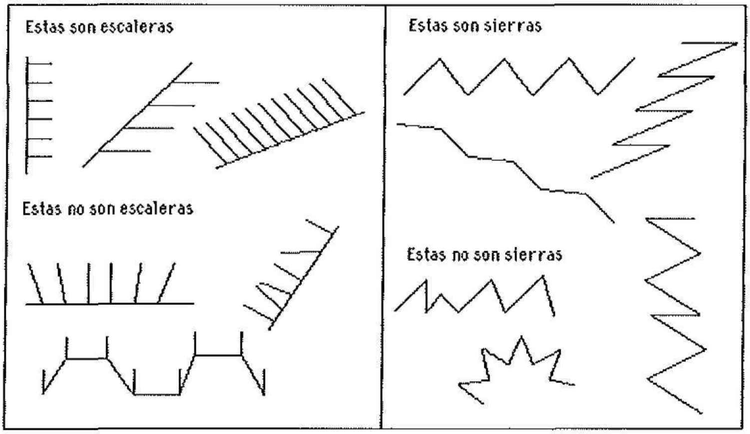


Figura 34. Sierras y escaleras.

El profesor muestra cómo al poner una varilla en el "lado" de una escalera y deslizar la otra apoyándose en la primera, la que se desliza se va colocando sobre todos los escalones (figura 35). Por último, se pide a los estudiantes que describan ambas estructuras.

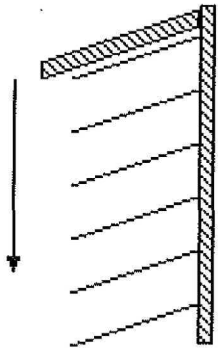


Figura 35. Comprobación del paralelismo en una escalera.

c) El profesor da a los estudiantes una hoja con una malla triangular en la que hay dibujadas partes de sierras y escaleras. Los estudiantes deben identificar la estructura a que corresponde cada fragmento y completarla [35].

Actividad 4 (Coloreado de ángulos). *Esta actividad empieza estudiando las propiedades de escaleras y sierras referentes a congruencia de ángulos y paralelismo, así como la relación entre estas propiedades; el objetivo final de 4-c es estudiar dos implicaciones inversas A—>B y B—>A y su diferenciación. En la última parte de la actividad se aplican los resultados anteriores para llegar a justificar la igualdad de los ángulos de los paralelogramos.*

a) Los estudiantes deben colorear los ángulos congruentes en las sierras y escaleras de una red triangular para que, al observar los resultados, enuncien la propiedad descubierta.

b) El profesor promueve un diálogo entre los estudiantes sobre qué otras propiedades tienen las sierras y las escaleras. Si éstos no descubren el paralelismo, el profesor les guía hacia esa propiedad.

c) El profesor enseña a los alumnos a dibujar sierras utilizando cada una de sus características: Primero dibuja varias líneas paralelas y traza una transversal (figura 36) y pregunta: "... ¿Qué crees que cumplen los ángulos? ... ¿Cómo llamarías lo que he dibujado?"

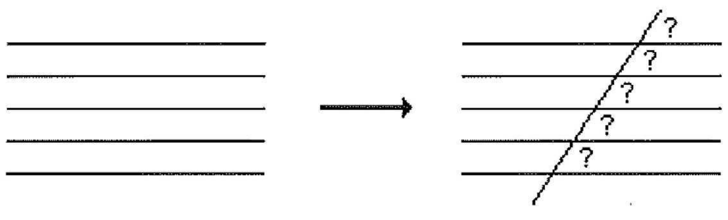


Figura 36.

Después, dibuja con una plantilla varios ángulos congruentes apoyados sobre una recta (figura 37) y pregunta: "... ¿Qué podrías decir acerca de estas líneas? ... ¿Cómo llamarías a lo que he dibujado?"

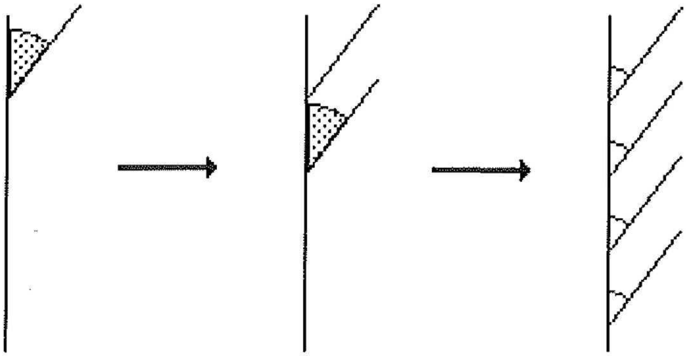


Figura 37.

Por último, el profesor hace algunas preguntas de resumen: "Has visto que hay dos formas de construir escaleras. Si dibujo una sólo trazando paralelas, ¿crees que sus ángulos serán siempre iguales? Y si construyo otra escalera sólo dibujando ángulos iguales, ¿crees que sus escalones serán siempre paralelos?" Se realiza un proceso similar con las sierras.

Si los alumnos son capaces de reconocer la presencia de implicaciones, se establecerá un diálogo sobre la distinción entre una implicación y su inversa [36].

d) El profesor presenta a los estudiantes una malla de paralelogramos, con varios pares de ángulos congruentes marcados (figura 38) y les pide que justifiquen (informalmente) dichas congruencias. Si es necesario, al principio el profesor les dirige para que vean que pueden justificarla mediante encadenamientos de sierras y escaleras y usando la transitividad de la congruencia. Por último, el profesor les pide que justifiquen que los ángulos opuestos de un paralelogramo son congruentes.

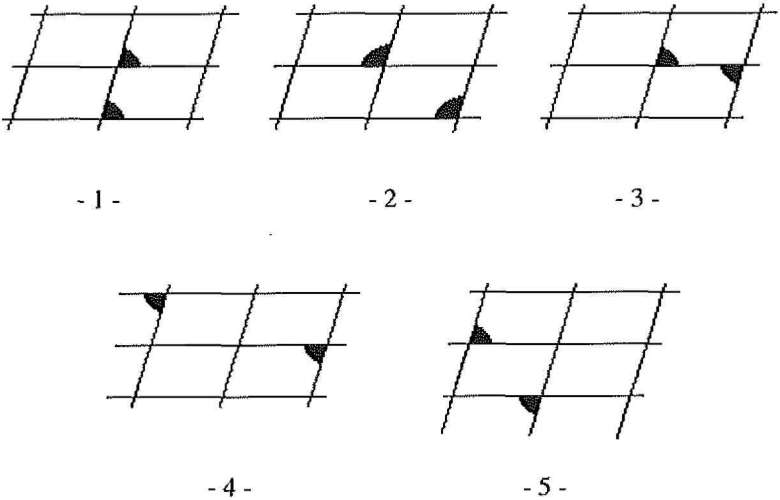


Figura 38.

Actividad 5 (Desarrollo de propiedades a partir de mallas). *Su objetivo es deducir y demostrar cuánto vale la suma de los ángulos de los triángulos y de los cuadriláteros.*

a) Se da a los alumnos una malla triangular escalena, uno de cuyos triángulos tiene los ángulos coloreados con tres colores diferentes; los estudiantes deben pintar del mismo color todos los ángulos congruentes de la malla, justificando su elección de colores. El profesor hace preguntas para dirigir la atención de sus alumnos hacia un grupo de 6 ángulos que tienen su vértice común: "¿Qué ángulos hay alrededor de ese punto?" ... "¿A qué ángulos del triángulo original corresponden?" ... "¿Qué puedes decir sobre los tres ángulos del triángulo que están aquí juntos?"

b) Se pide a los estudiantes que verifiquen ese resultado en otra malla y se les pregunta si creen que se cumplirá siempre. Si resuelven los ejercicios anteriores, el profesor les pedirá que justifiquen la propiedad a partir de sierras y escaleras. Finalmente deberán aplicarla para calcular el ángulo desconocido en un triángulo (el mismo de 1-e).

c) Para averiguar si los estudiantes pueden generalizar el razonamiento anterior, se les plantea el problema equivalente sobre las mallas de cuadriláteros que ya conocen (cuadrados, rectángulos y paralelogramos).

d) El profesor plantea el problema de si la suma de los ángulos en cualquier cuadrilátero será 360°. Para la verificación, se utilizan copias recortadas de un cuadrilátero irregular cuyos ángulos están marcados con 4 colores diferentes[37] (figura 39).

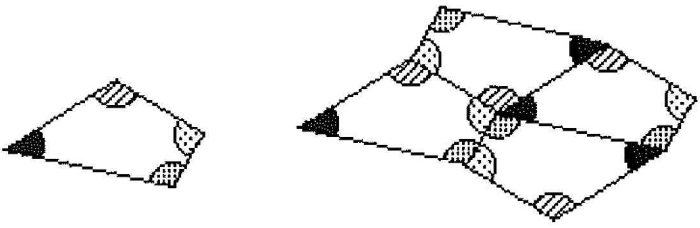


Figura 39. Los ángulos de un cuadrilátero suman 360°.

e) Si ningún estudiante ha planteado la posibilidad de triangularizar el cuadrilátero trazando una diagonal para calcular la suma de sus ángulos, el profesor guiará a los estudiantes para descubrir este procedimiento. Por último, planteará la división del cuadrilátero en cuatro triángulos mediante las dos diagonales. En ambos casos, los estudiantes deberán elaborar demostraciones apropiadas.

Actividad 6 (Arboles de implicaciones). *Se aborda la elaboración de demostraciones lógicas más complejas, mediante el establecimiento de jerarquías lógicas entre los conceptos y propiedades obtenidos en las actividades anteriores.*

a) El profesor introduce las ideas de antecedente lógico y de "árbol de implicaciones"[38] mediante ejemplos de aritmética (figura 40), así como la flecha como símbolo para esas conexiones.

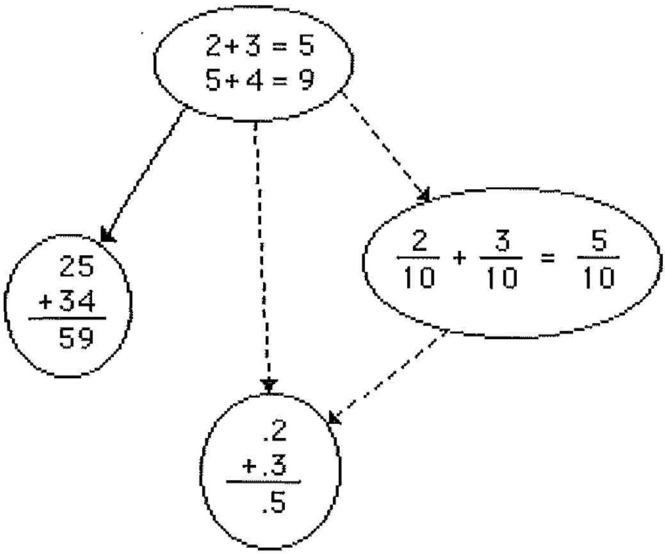


Figura 40. Un árbol de implicaciones en aritmética.

b) El profesor muestra a los alumnos fichas en las que aparecen los conceptos y propiedades estudiados hasta el momento: Escalera, sierra, "un ángulo llano mide 180°", "los ángulos opuestos de un paralelogramo son iguales", etc. Les pide que busquen antecedentes entre las fichas, justificando sus elecciones. Si no saben empezar, el profesor les ayuda colocando una flecha desde "la suma de los ángulos de un triángulo es 180°" hasta "la suma de los ángulos de un cuadrilátero es 360°".

c) El profesor pide a los alumnos que calculen la suma de los ángulos de un pentágono. Si necesitan alguna indicación, se les proporcionan varillas para que subdividan el pentágono (en tres triángulos o en un triángulo y un cuadrilátero). Una vez obtenida la suma, deberán relacionar mediante flechas ese resultado con las fichas de los triángulos o los cuadriláteros y construir el árbol de implicaciones correspondiente. Si es necesario, el profesor sugerirá la conveniencia de unir los dos métodos de descomposición del pentágono en un solo árbol (figura 41).

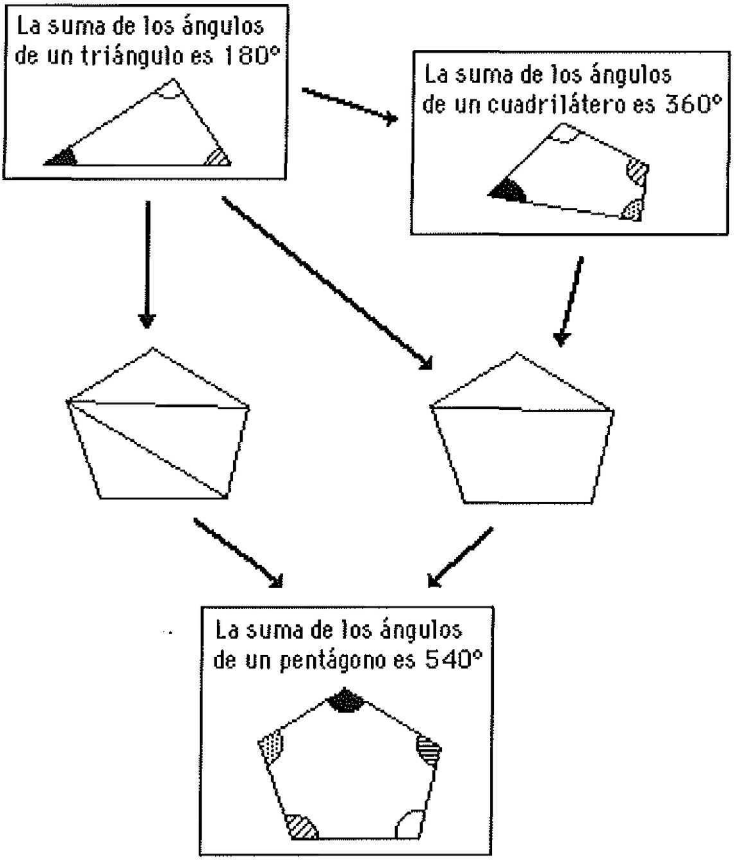


Figura 41.

d) A los alumnos que han resuelto bien el ejercicio c) se les pide que piensen otros resultados que se puedan añadir, como consecuencia de los anteriores, al final de los árboles.

e) El profesor pide a los estudiantes que busquen los antecedentes de la suma de los ángulos de un triángulo y de la igualdad de los ángulos opuestos en un paralelogramo.

Actividad 7 (Angulo exterior de un triángulo). *El objetivo es deducir y demostrar, sin indicaciones previas o con el mínimo posible de ellas, que el valor del ángulo exterior de un triángulo es la suma de los dos interiores no adyacentes a él.*

a) A partir de la medición de ángulos en dos casos concretos, los alumnos deben descubrir el resultado (dirigiéndoles si ello es necesario).

b) Si los estudiantes no saben demostrar la propiedad por sí mismos, el profesor les sugiere la utilización de escaleras y sierras o traza la línea punteada de la figura 42. Después les pregunta si es cierta la propiedad para un triángulo con el ángulo exterior en diferente posición y les pide que justifiquen su respuesta.

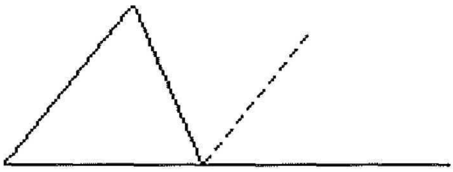


Figura 42.

c) El profesor pide a los estudiantes que coloquen una ficha con esta propiedad en el árbol de relaciones de la actividad 6.

* * * * *

Asignación de niveles y fases a lo largo del módulo

Una vez planteadas las 7 actividades del módulo de enseñanza de Fuys, Geddes, Tischler [1985], es interesante analizarlas desde el punto de vista del tipo de razonamiento que promueven. Como consecuencia, será posible hacer una clasificación de las actividades por niveles razonamiento y fases de aprendizaje. Dicha clasificación la hemos realizado los autores de este capítulo, pero ignoramos si nuestra interpretación coincide con la de los autores de las actividades, pues éstos han explicitado poco en tal sentido en la memoria del proyecto de investigación.

	Fase 1	Fase 2	Fase 3	Fase 4
Nivel 1	1-u. de e., 2-a	2-a, 2-b	2-c	3-a, 3-c
Nivel 2	3-b, 3-c	4-a, 4-b	4-a, 4-b	4-c
Nivel 3	4-c, 5-a, 6-a	4-d, 5-a, 5-b, 5-c, 6-b, 6-e	5-a, 5-b, 5-c	5-d, 5-e, 6-c, 6-d, 7
Nivel 4				

Figura 43. Distribución de las actividades del módulo de aprendizaje por niveles y fases.

Tal como indicábamos en la sección 8, la asignación de nivel y fase a las distintas actividades debe juzgarse teniendo en cuenta el objetivo de la actividad dentro del contexto de la unidad. Teniendo en cuenta esos factores, nosotros proponemos una clasificación (resumida en la figura 43) que justificamos en los párrafos siguientes.

El objetivo de la *actividad 1* es servir como toma de contacto de los alumnos con el tema de trabajo y evaluar sus conocimientos sobre el mismo, por lo que, realmente, no forma parte del módulo de enseñanza. Los primeros ejercicios programados para ayudar al progreso de los estudiantes se encuentran en la "unidad de enseñanza", que corresponden a la 1ª fase del nivel 1 porque se realiza la introducción y manejo de los elementos básicos (ángulos y su medida) a nivel visual.

Con la *actividad 2* empieza el proceso de proporcionar a los estudiantes experiencias que les permitan alcanzar el nivel 2 de razonamiento. En ella se trabaja con diversas estructuras, poniendo de manifiesto relaciones de paralelismo en las distintas mallas, pero desde el punto de vista de su estructura global, por lo que está en el nivel 1.

El comienzo de la actividad (2-a) es la toma de contacto con las mallas, que se realiza mediante referencia a los pavimentos de los suelos, por lo que corresponde a la fase 1. El dibujo, la construcción y el análisis de mallas (2-a y 2-b) están dirigidos a encontrar unas relaciones que más adelante serán los conceptos centrales sobre los que se trabajará, por lo que estos ejercicios corresponden a la fase 2. Por último, la parte 2-c entra claramente en la fase 3, al pedir a los alumnos que resuman los resultados.

En la *actividad 3* se encuentra la transición entre los niveles de razonamiento 1 y 2: Las partes de esta actividad en las que se trabaja con mallas (3-a y 3-c) se encuadran en la fase 4 del nivel 1; por otra parte, los ejercicios de 3-b y 3-c corresponden a la introducción de las sierras y escaleras, unos nuevos elementos que se van a utilizar en adelante, por lo que estos ejercicios se encuentran ya en la fase 1 del nivel 2.

Si las actividades 1 a 3 se realizan de forma adecuada, dando tiempo suficiente a los estudiantes para reflexionar y proporcionándoles la cantidad adecuada de ejercicios de cada tipo, cuando las hayan terminado los estudiantes habrán alcanzado el nivel 2 de razonamiento en este tema. Con la actividad 4 se completa un recorrido por las fases del nivel 2 que debe guiar a los estudiantes hasta el nivel 3.

Aunque los alumnos de nivel 1 pueden resolver 4-a y 4-b basándose en ejemplos concretos, el objetivo central de la *actividad 4* es el descubrimiento de propiedades (paralelismo de líneas e igualdad de ángulos) en escaleras y sierras, por lo que corresponde al nivel 2 de razonamiento. En este contexto, 4-a y 4-b corresponden a las fases 2 y 3.

En la primera parte de 4-c se trabaja sobre la relación entre las propiedades anteriores, iniciando el contacto de los estudiantes con las deducciones lógicas (segmentos paralelos —> ángulos iguales; ángulos iguales —> segmentos paralelos); por lo tanto se trata de una serie de ejercicios que corresponde a la fase 4 del nivel 2, culminada la cual los estudiantes estarán en condiciones de hacer deducciones lógicas simples, es decir que razonarán en el nivel 3.

La última parte de 4-c corresponde claramente al nivel 3, pues ya se plantea la consciencia de la distinción entre dos implicaciones inversas; puesto que se trata de un único ejemplo que sirve como toma de contacto con este tema de trabajo, este diálogo representa la fase 1 del nivel 3. Sin embargo, si los alumnos saben dirigir su atención hacia la simetría de las dos implicaciones inversas, estarán ya razonando en el nivel 3, pues ésta es realmente una relación lógica[39].

Las deducciones informales comienzan en los ejercicios 4-d, que representan una progresión desde deducciones simples a otras más largas, en las que se necesita el encadenamiento de sierras y/o escaleras; nos encontramos en la fase 2 del nivel 3.

A partir de aquí las demostraciones deductivas se encuentran presentes en las restantes actividades del módulo, que están dedicadas todas ellas a facilitar la adquisición del nivel 4.

En la *actividad 5* el objetivo central es la demostración informal de propiedades (nivel 3), si bien se intentan aproximaciones a los métodos abstractos. La presentación de demostraciones de tipo visual (coloreado de ángulos) seguidas de otras más abstractas en el caso de los cuadriláteros, muestra las diferentes fases de aprendizaje del razonamiento formal. Dentro de los métodos de triangularización de 5-e, la deducción de que cuando se usan dos diagonales hay que restar 360° a la suma de los ángulos de los cuatro triángulos presenta una dificultad adicional; también se toma contacto en esta actividad con la posibilidad de demostrar una propiedad de varias formas diferentes. Todo ello corresponde a un fase avanzada del nivel 3, próxima ya al razonamiento abstracto del nivel 4.

Por lo tanto, los primeros ejercicios de 5-a representan la fase 1 del nivel 3; desde el final de 5-a hasta 5-c representan las fases 2 y 3; 5-d y 5-e corresponden a la fase 4, ya que requieren la utilización conjunta de los métodos usados en los ejercicios anteriores.

La *actividad 6* se basa en el establecimiento de implicaciones lógicas entre propiedades y conceptos, por lo cual corresponde al nivel 3. Igual que en la actividad 5, se pueden reconocer las diversas partes de la actividad correspondientes a la fase 1 (6-a), la fase 2 (6-b y 6-e) y la fase 4 (6-c y 6-d); como en las otras actividades, la fase de explicitación está siempre presente, aunque no se plantee expresamente en los enunciados de los ejercicios.

Sus autores usan la *actividad 7* como evaluación de los niveles de razonamiento 2 y 3, pues la demostración que hay que realizar exige la aplicación a una situación nueva de propiedades obtenidas anteriormente. Lo más probable es que los alumnos de nivel 3 busquen y utilicen en la demostración propiedades de escaleras y sierras y que sean capaces de trabajar con ángulos en general, mientras que los alumnos que se encuentran en el nivel 2 se quedarán satisfechos con la comprobación de algunos casos concretos, tendiendo además a hablar y razonar sobre ángulos con posiciones o valores concretos. También puede ponerse de manifiesto en esta actividad el nivel 4 si se hace una demostración algebraica, sin usar figuras[40].

Desde la óptica de su pertenencia a este módulo de aprendizaje, la actividad 7 corresponde a la 4ª fase del nivel 3.

* * * * *

A continuación ofrecemos algunos comentarios (extraídos de Fuys, Geddes, Tischler [1985]) referentes al comportamiento de los 32 alumnos que realizaron la experiencia (16 de 6° grado y 16 de 9° grado de EE.UU., de edades equivalentes a 6° de E.G.B. y 1° de B.U.P. respectivamente). Hemos procurado centrarnos en algunos puntos que permitan diferenciar las formas de trabajar y las dificultades de estudiantes que al empezar la experiencia tenían diferentes niveles de razonamiento[41].

Entre los estudiantes, había algunos (8 alumnos de 6° y 2 de 9°) que no habían recibido en los cursos anteriores suficiente instrucción sobre los conceptos básicos de este módulo de enseñanza (congruencia de ángulos y paralelismo de rectas), por lo que su conocimiento del tema era muy pobre y su nivel de razonamiento en este tema correspondía al comienzo de la adquisición del nivel 1. Dado que este módulo de enseñanza está diseñado para promover, como mínimo, el paso del nivel 1 al nivel 2, no es adecuado para dichos estudiantes. En efecto, estos alumnos de nivel más bajo sólo fueron capaces de realizar unas pocas (o ninguna) de las cuestiones de la actividad 1 del módulo, incluso después de trabajar con la "unidad de enseñanza" complementaria sobre las ideas de ángulo, de su medida y su estimación. Un ejemplo de las carencias de estos niños es la respuesta de uno de ellos que considera iguales <a y <b , pero distintos <c y <d (figura 44).

Figura 44.

El resto de los estudiantes (8 alumnos de 6° grado y 14 de 9° grado) empezaron la experiencia con diversos grados de habilidad en el uso del razonamiento de nivel 2. Todos ellos mostraron progresos en su nivel de razonamiento a lo largo de la realización del módulo de instrucción, pues profundizaron en su habilidad para descubrir propiedades de figuras (nivel 2) y para comprender y/o dar argumentos deductivos (nivel 3).

A diferencia de los estudiantes del grupo anterior, éstos no tuvieron dificultades en la actividad 1, excepto algunos alumnos que, al principio, sólo identificaban los ángulos rectos en determinadas posiciones, o que giraban la hoja para decidir si un ángulo era recto o no.

Una prueba de que estos estudiantes habían alcanzado el nivel 2 es que todos realizaron sin problemas las actividades 2, 3, 4-a y 4-b, descubriendo rápidamente las propiedades de sierras y escaleras (líneas paralelas y ángulos iguales) y su relación con las mallas. Algunos de ellos mostraron indicios del nivel 3, como una niña que, al describir las sierras, decía que sus ángulos deben ser agudos porque "no pueden ser obtusos, deben tener líneas dentadas y parecerse a la cima de una montaña".

Los ejercicios de 4-c están dirigidos a introducir las implicaciones y su lenguaje de la forma "si ... entonces". Al realizar actividades de este tipo es bastante fácil darse cuenta de si los estudiantes comprenden el significado de la implicación y entienden la diferencia entre una implicación y su inversa o no. En este caso, sólo 4 de los alumnos de 9° utilizaron de forma espontánea las implicaciones y reconocen la diferencia entre una implicación y su inversa. Otros estudiantes, menos avanzados, sólo fueron capaces de distinguir esas implicaciones después de asociar "líneas paralelas —> ángulos iguales" con sierra/ escalera. La mayoría de alumnos contestaba a las preguntas de 4-c relatando el proceso de construcción, y decía que las afirmaciones hechas por el profesor "si dibujo líneas paralelas, entonces obtengo ángulos congruentes" y "si dibujo ángulos congruentes, entonces obtengo líneas paralelas" eran "la misma".

Respecto a las demostraciones deductivas informales introducidas en 4-d, la primera vez que tuvieron que aplicar una secuencia de varios pasos (escaleras y sierras, en la igualdad de ángulos de una malla de paralelogramos) ningún alumno la resolvió por sí mismo, aunque una indicación del entrevistador, como "inténtalo en dos pasos", bastó para que varios alumnos lo resolvieran mediante esquemas del tipo (figura 45) "<1 = <x por una escalera y <2 = <x por una sierra, por lo que <1 = <2" (aunque no emplearon esos términos); excepto un niño, todos los demás lo resolvieron tras diversos grados de ayuda. También surgieron algunas respuestas del nivel 2, como una niña de 9° que decía que, para demostrar que dos ángulos eran iguales, "podemos medirlos".

Después de estos ejercicios, la mayor parte de los alumnos supo justificar deductivamente la igualdad de los ángulos opuestos de los paralelogramos, usando todos ellos argumentos similares, del tipo (figura 46) "<a = <c por una escalera, <b = <c por una sierra, por lo tanto, como <a y <b son iguales a <c, <b = <a".

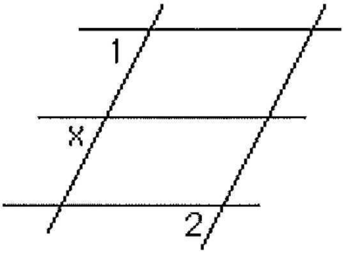


Figura 45.

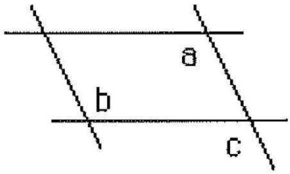


Figura 46.

En relación con la suma de los ángulos interiores de un triángulo, varios alumnos conocían el resultado, pero no lo sabían justificar; esto puede suponer un obstáculo ya que, al saber que el resultado es cierto, no sienten la necesidad de su demostración. Los que no lo conocían, lo descubrieron coloreando ángulos en una malla triangular y justificando las igualdades de ángulos (igual color) mediante sierras y escaleras. Los alumnos solían saltarse partes del argumento deductivo cuando lo explicaban, por ejemplo no especificando que cierta igualdad de ángulos se debía a la existencia de una sierra.

Todos estos alumnos, superadas las dificultades de algunos de 6° grado con los triángulos, supieron dar justificaciones informales de tipo deductivo acerca de la suma de los ángulos interiores de cuadriláteros y construyeron árboles de implicaciones para las interrelaciones de las sumas de ángulos, lo cual indica un claro progreso en su habilidad de razonamiento de nivel 3. El proceso seguido para encontrar la suma en los ángulos difirió bastante de unos alumnos a otros:

Por subdivisión: Dividiendo el cuadrilátero en dos triángulos.

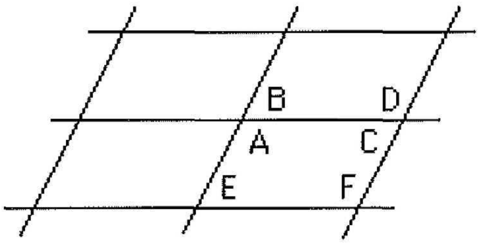
Por transformación: Una niña explicó que "la suma de los ángulos de un rectángulo es 360° porque 4 x 90° = 360°" y después afirmó que los ángulos de un paralelogramo "suman 360° porque es como un rectángulo inclinado".

Usando cubrimientos, de manera similar a lo hecho con los triángulos.

Utilizando sierras y escaleras: Un niño observó (figura 47) que <A +

<B = 180° y que <C + <D = 180° y, como <B = <E y <D = <F por unas escaleras, entonces la suma es 360°.

Figura 47.



La capacidad de algunos niños para comprender la secuencia que se estaba siguiendo se pone de manifiesto cuando intuyen que después habrá que obtener la suma de los ángulos de un pentágono. La preferencia de algunos alumnos en la actividad 6 por el método de subdivisión para la demostración de la suma de los ángulos de un pentágono indica razonamiento de nivel 3, frente a los que prefieren la medición, lo cual indica que todavía prefieren el razonamiento de nivel 2. La mayoría de los alumnos mostró progreso hacia el nivel 3 al poder comprender y/o exponer argumentos deductivos informales sobre la suma de los ángulos de polígonos.

La actividad 7 se propuso sólo a los estudiantes que habían mostrado mayor habilidad en las actividades anteriores; todos los alumnos que la hicieron descubrieron rápidamente el valor del ángulo exterior de un triángulo tras medir algunos triángulos. A continuación, algunos alumnos de 6° desarrollaron una demostración por sí mismos, mientras que a los otros hubo que darles la orientación de la línea auxiliar (figura 42) para que pudieran demostrar la relación. En sus demostraciones utilizaron escaleras y sierras, coloreando a veces. Aquí se ve un claro progreso de nivel, pues aunque comienzan haciendo mediciones (ejemplos concretos), posteriormente utilizan sierras y escaleras o incluso dan razones más abstractas (deducción general).

La mayoría de estos alumnos no tuvo problemas en mostrar cómo se relaciona esta propiedad con las ideas previas, mediante la construcción de un árbol de implicaciones, comenzando de esa manera a construir una red de teoremas (progreso hacia el nivel 4).

NOTAS

1. Si M. Servet tuvo problemas en el siglo XVI por predecir un eclipse, ¿qué habría pasado si hubiera podido predecir la existencia de alguno de los planetas que todavía no se conocían en aquella época?

2. Esto lo saben bien los paracaidistas de caída libre cuando hacen figuras y acrobacias mientras caen.

3. Se puede enseñar a alguien a poner en marcha un coche pero no se le puede enseñar a ir en bicicleta. Este ejemplo refleja la diferencia entre enseñar contenidos memorizables y enseñar a razonar.

4. Dina Van Hiele falleció en 1959 y P.M. Van Hiele sigue actualmente dedicando parte de su actividad investigadora a este tema.

5. No debe pensarse que el nivel 1 se da sólo en niños pequeños: Una de nuestras alumnas de 1° de Magisterio tenía que clasificar varios cuadriláteros dibujados en una hoja; mirando un cuadrado que se apoya en un vértice dice: "Este es un rombo ..." (medita un momento y gira la hoja) "... pero si lo pongo así, es un cuadrado. ¡Qué lío!". No fue capaz de clasificar esa figura y, además, hizo que algunas de sus compañeras se quedaran también perplejas.

6. Algunos investigadores tienen en cuenta un 5° nivel de razonamiento, al que corresponde la capacidad de utilizar y comparar diferentes sistemas axiomáticos. Nosotros no creemos en la existencia de ese nivel, por lo que no aludimos a él en este texto.

7. En España se está usando cada vez con más frecuencia la palabra "probar" como equivalente a "demostrar", sin duda como consecuencia de malas traducciones del inglés. Creemos que esta alternativa es desafortunada, pues en el lenguaje ordinario la palabra "probar" tiene un significado más próximo a "comprobar" que a "demostrar".

8. Una cometa es un cuadrilátero convexo con dos pares de lados consecutivos iguales.

9. El entrevistador dispone de una lista de propiedades de un polígono, que le va presentando al estudiante de una en una hasta que éste esté seguro de cuál es la figura. El objetivo es descubrir la figura a partir del menor número posible de propiedades (Burger, Shaughnessy [1986]).

10. Quiere decir que ha llegado al mismo resultado que antes, que no son paralelos.

11. También Freudenthal hace suya esta propuesta cuando aboga por la organización local de la enseñanza de las matemáticas frente a la organización global (Freudenthal [1973] y Piaget y otros [1983]): El aprendizaje de las matemáticas tiene lugar mediante la formación de diversas "localidades" disconexas que, al profundizar en su estudio, se irán uniendo y formarán otras "localidades" mayores.

12. Y si se va a dar a los alumnos el cuestionario fotocopiado, no hay que olvidar dejar entre pregunta y pregunta suficiente espacio en blanco.

13. De hecho, no sigue el mismo criterio para triangularizar en los tres ejemplos, por lo que si intentara plantear una demostración general de la regla del número de triángulos, seguramente tendría problemas.

14. Ni en la figura 11 ni en las siguientes temas pretendido hacer representaciones exhaustivas de los conceptos, por lo que hemos omitido varias de las posibles propiedades o relaciones.

15. Otra cuestión es la eficacia del método. En cualquier caso, hasta la peor enseñanza inductiva prolongada durante varios cursos en EGB, permitirá que los niños alcance el nivel 2 de razonamiento.

16. Aquí Van Hiele da a la palabra "maduración" el sentido de "sazonamiento", como le ocurre a la fruta.

17. La otra diferencia básica es la importancia que cada uno le da al lenguaje. Es sabido que para Piaget el lenguaje no es una parte importante de los procesos de aprendizaje, mientras que para Van Hiele, como hemos visto, es imprescindible el uso de un lenguaje adecuado.

18. Citado en Copeland, R. W. [1974]: *How children learn mathematics. Teaching implications of Piaget's research* (Macmillan: N. York).

19. Recordemos que el uso de materiales es necesario incluso en el nivel 3; en las primeras fases para alcanzar el cuarto nivel es cuando los estudiantes empezarán a trabajar de forma completamente abstracta.

20. Este estudio debería iniciarse al comenzar la adquisición del nivel 3, completándose el estudio de los aspectos algebraicos al llegar al nivel 4.

21. Entre las diversas publicaciones sobre la obra gráfica de M.C. Escher, Mac Gillavry [1976] hace un estudio matemático de la misma. Actividades del tipo que proponemos aquí se puede ver en Gutiérrez, Jaime [1982].

22. El currículum holandés de Enseñanza Primaria de esa época no incluirá geometría y en el primer curso de Enseñanza Media había una asignatura específica de geometría. Por este motivo, los estudiantes llegaban a este curso con unos conocimientos muy reducidos de geometría. Algo parecido ocurre en el actual currículum de EE.UU.

23. Este trabajo forma parte de un proyecto de investigación desarrollado durante los cursos 1986-89 y subvencionado por la Consellería de Cultura, Educación y Ciencia de la Generalitat de Valencia a partir de 1987.

24. En diferentes ocasiones aparecerán conexiones entre traslaciones, giros y simetrías. Aunque aquí nos limitamos a hacer una propuesta de enseñanza de las traslaciones, es aconsejable ir avanzando en paralelo en los tres movimientos.

25. Nuestro objetivo al seleccionar ese material es hacerlo muy barato, fácil de elaborar y manejable por los niños.

26. No es necesario usar esta palabra si se está trabajando con niños pequeños.

27. Estos frisos deben elegirse de manera que haya algunos cuyos vectores se diferencien sólo en el módulo o sólo en la dirección; así los alumnos descubrirán estas características que diferencian unas traslaciones de otras.

28. Mientras no se plantee la necesidad de fijar el sentido de la traslación, es conveniente usar segmentos. De todas formas, el sentido se puede introducir en cuanto algún estudiante lo plantee.

29. Es fácil que surja una tendencia a hacer siempre traslaciones "hacía la derecha", lo cual puede dificultar la compresión de la necesidad del sentido de la traslación. Esto debe tenerse en cuenta desde el principio del bloque 1.

30. Desde el comienzo del bloque 1 se ha usado el hecho de que las traslaciones son isometrías, pero nunca se ha empleado explícitamente.

31. Excepto el bloque 4, que está formado por actividades del último nivel, el nivel 4.

32. Esto no está recogido en las actividades que hemos propuesto en las páginas anteriores.

33. Siempre que nos refiramos a "paralelogramos", que hemos decir paralelogramos no rectángulos.

34. Estos son los nombres descriptivos utilizados con bastante frecuencia en varios países para estas estructuras y son los que emplean Fuys, Geddes, Tischler (1985).

35. Fuys, Geddes, Tischler (1985) incluyen los ejercicios de 3-c en la actividad 4; nosotros los hemos cambiado de actividad para que se vea de forma más clara la continuidad de la instrucción.

36. En nuestra opinión, a 4-c le faltan algunos ejercicios en los que se manejen implicaciones falsas, para completar la compresión por los alumnos de las implicaciones y de la distinción entre una implicación y su inversa. Tanto la forma como el contenido de las cuestiones planteadas sólo presentan parte de la problemática de las implicaciones; por otra parte, no permiten distinguir entre las respuestas que se deben a una compresión del significado de la implicación y la simple asociación de propiedades debida al contexto. Habría que presentar también casos como los recogidos en los no–ejemplos de la figura 34, aunque, posiblemente, este contexto no sea adecuado para este estudio, pues en él sólo hay implicaciones "si y sólo si".

37. Al colorear los ángulos se proporciona a los estudiantes una pista muy reveladora. Sería mejor plantear inicialmente el problema con los ángulos sin colorear y dar esa pista sólo si es necesario. Además, la forma de plantear este ejercicio influye en 5-c.

38. Esta es otra denominación ideada por Dina Van Hiele que ha perdurado hasta la actualidad. La traducción literal es "árbol de familia".

39. Aquí los autores de este módulo han dado un salto con la intención de detectar estudiantes que estén en el nivel 3 pues, como indican en Fuys, Geddes, Tischler (1985), p. 40, si los estudiantes no responden positivamente de forma expontánea, abandonan el ejercicio.

40. Aunque, en este caso, lo más probable es que el alumno se imagine la figura.

41. En Fuys, Geddes, Tischler (1985) se hace una descripción mucho más detallada.

REFERENCIAS.

BURGER, W.F.; Shaughnessy, J.M. [1986]: Characterizing the van Hiele levels of development in geometry, *Journal for Research in Mathematics Education* vol. 17, pp. 31—48.

CROWLEY, M.L. [1987]: The van Hiele model of the development of geometric thought, en N.C.T.M.: *Learning and teaching geometry, K—12 (1987 Yearbook)*. (N.C.T.M.: USA), pp. 1—16.

FREUDENTHAL, H. [1973]: *Mathematics as an educational task.* (D. Reidel: Dordrecht).

FUYS, D.; GEDDES, D.; TISCHLER, R. [1984]: *English translations of selected writings of Dina van Hiele-Geldof and Pierre M. van Hiele.* (Brooklyn College, City Univ. of N. York: N. York).

FUYS, D.; GEDDES, D.; TISCHLER, R. [1985]: *An investigation of the van Hiele model of thinking in geometry among adolescents* (final report). (Brooklyn College, City Univ. of N. York: N. York).

GRIFFITHS, H.B.; HOWSON, A.G. [1974]: *Mathematics, society and curricula.* (Cambridge U.P.: Londres).

GUTIERREZ, A.; JAIME, A. [1982]: *Actividades de isometrías con mosaicos,* Colecc. "Eines de treball, estudis i recerques" n° 13. (I.C.E. de la U. de Valencia: Valencia).

GUTIERREZ, A.; JAIME, A. [1989]: Bibliografía sobre el modelo de razonamiento geométrico de Van Hiele, *Enseñanza de las Ciencias* vol. 7 n° 1, pp. 89-95.

JAIME, A.; GUTIERREZ, A. [1989]: The learning of plane isometries from the viewpoint of the Van Hiele model, en *Proceedings of the 13rd International Conference for the P.M.E.*

MAC GILLAVRY, C.H. [1976]: *Fantasy & symmetry (The periodic drawings of M.C. Escher).* (H.N. Abrams: N. York).

PIAGET, J. [1967]: Development and learning, en Victor, E.; Lerner, M. (eds.): *Readings in Science Education for the Elementary School.* (Macmillan: N. York).

PIAGET, J. y otros [1978]: *La enseñanza de las matemáticas modernas.* (Alianza: Madrid).

SENK, S.L. [1985]: Research and curriculum development based on the van Hiele model of geometric thought, en Bell, A.W.; Low, B.; Kilpatrick, J. (eds.): *Theory, research and practice in mathematical education (Working_Groups and collected papers of the 5th ICME).* (Shell Centre: Nottingham), pp. 351-357.

STANDLER, C.B. [1967]: Piaget's developmental theory of learning and its implications for instruction in science, en Victor, E.; Lerner, M. (eds.): *Readings in Science Education for the Elementary School.* (Macmillan: N. York).

VAN HIELE, P.M. [1955]: De niveau's in het denken, welke van belang zijn bij het onderwijs in de meetkunde in de eerste klasse van het V.H.M.O., *Paedagogische Stüdien* vol. XXXII (J.B. Wolters: Groningen), pp. 289-297.

VAN HIELE, P.M. [1986]: *Structure and Insight. A theory of mathematics education.* (Academic Press: Londres).

VAN HIELE, P.M. [1987]: *A method to facilitate the finding of levels of thinking in geometry by using the levels in arithmetic* (presentación en la "Conference on learning and teaching geometry: Issues for research and practice". Syracuse University, 1987).