

Carlos Ivorra Castillo

ANÁLISIS MATEMÁTICO

Si una cantidad no negativa fuera tan pequeña que resultara menor que cualquier otra dada, ciertamente no podría ser sino cero. A quienes preguntan qué es una cantidad infinitamente pequeña en matemáticas, nosotros respondemos que es, de hecho, cero. Así pues, no hay tantos misterios ocultos en este concepto como se suele creer. Esos supuestos misterios han convertido el cálculo de lo infinitamente pequeño en algo sospechoso para mucha gente. Las dudas que puedan quedar las resolveremos por completo en las páginas siguientes, donde explicaremos este cálculo.

LEONHARD EULER

Índice General

Preámbulo	ix
Introducción	xi
Capítulo I: Los números reales	1
1.1 Cuerpos ordenados completos	1
1.2 Cuerpos métricos	11
1.3 La completión de un espacio métrico	22
1.4 Desarrollos decimales	33
1.5 El cardinal del continuo	39
Capítulo II: Topología	43
2.1 Espacios topológicos	43
2.2 Bases y subbases	49
2.3 Productos y subespacios	52
2.4 Algunos conceptos topológicos	55
2.5 Continuidad	62
2.6 Límites de funciones	76
2.7 Convergencia de sucesiones	85
2.8 Series numéricas	88
Capítulo III: Compacidad, conexión y completitud	97
3.1 Espacios compactos	97
3.2 Espacios localmente compactos	103
3.3 Espacios conexos	107
3.4 Espacios completos	113
3.5 Espacios de Hilbert	118
3.6 Espacios de funciones	127
3.7 El teorema de Baire	137
Capítulo IV: Teoría de la medida I	141
4.1 La medida de Jordan	142
4.2 Medidas	158
4.3 La medida de Lebesgue	168
4.4 Funciones medibles	175

4.5	La integral de Lebesgue	178
4.6	Producto de medidas	188
Capítulo V: Cálculo diferencial		199
5.1	Derivación de funciones de una variable	199
5.2	Funciones diferenciables	214
5.3	Propiedades de las funciones diferenciables	222
5.4	Ecuaciones diferenciales	235
Capítulo VI: Teoría de la medida II		247
6.1	El teorema de Riesz	247
6.2	Espacios L^p	255
6.3	Medidas signadas	259
6.4	Derivación de medidas	269
6.5	El teorema de cambio de variables	273
Capítulo VII: Introducción a las variedades diferenciables		281
7.1	Variedades diferenciables	283
7.2	Espacios tangentes, diferenciales	293
7.3	La métrica de una variedad	302
7.4	Integración en variedades	313
7.5	Geodésicas	326
7.6	Superficies	330
Capítulo VIII: Introducción al cálculo vectorial		347
8.1	El teorema de la divergencia	348
8.2	Aplicaciones del teorema de la divergencia	362
8.3	Las fórmulas de Green	372
8.4	La ecuación de Poisson	376
8.5	Funciones armónicas	381
8.6	Funciones holomorfas	390
Capítulo IX: Análisis armónico		393
9.1	Serie de Fourier	398
9.2	Los polinomios de Legendre	411
9.3	Las funciones asociadas de Legendre	429
9.4	Harmónicos esféricos	433
9.5	El teorema de adición	443
9.6	Harmónicos esféricos bidimensionales	451
Capítulo X: Funciones holomorfas		457
10.1	Arcos cerrados	457
10.2	Convergencia casi uniforme	459
10.3	Serie de Laurent	465
10.4	Clasificación de las singularidades aisladas	471
10.5	El teorema de los residuos	476
10.6	Serie de Dirichlet	488

Apéndice A: Sólidos rígidos	509
A.1 Sistemas de referencia	509
A.2 Sistemas de partículas	512
A.3 Distribuciones continuas de materia	526
A.4 El momento de inercia	533
A.5 Dinámica del sólido rígido	540
A.6 Movimiento giroscópico	559
Apéndice B: Gravitación	575
B.1 El campo gravitatorio de una esfera	576
B.2 El campo gravitatorio de un esferoide	579
B.3 La precesión de los perihelios	589
Índice de Materias	595

Preámbulo

Este libro forma parte de la “tercera edición” de mis libros de *Álgebra* [Al], *Geometría* [G] y *Análisis Matemático* [An], de los que he separado la *Teoría de grupos* en un nuevo volumen [TG]. La diferencia esencial es que he suprimido muchos ejemplos y aplicaciones que ahora se encuentran en la serie de libros “introdutorios” *Introducción a la teoría algebraica de números* [ITAl], *Introducción a la geometría euclídea* [IGE], *Introducción a la teoría analítica de números* [ITAn] e *Introducción al cálculo diferencial* [IC] y los he sustituido por contenidos nuevos.

Como en la edición anterior, los contenidos están distribuidos entre los cuatro libros de modo que pueden leerse simultáneamente siguiendo el orden que muestra el esquema de la página siguiente.

El primer capítulo de [Al] es una introducción a la teoría de conjuntos, cuyos aspectos más técnicos (los relacionados con el axioma de elección y la teoría de cardinales infinitos) se han relegado a dos apéndices. La teoría descrita es la teoría de Zermelo, que resulta más que suficiente para formalizar los contenidos de los cuatro libros. El único inconveniente es que “se queda corta” para desarrollar plenamente la teoría de cardinales infinitos, pero hemos preferido reducirla a lo imprescindible, aun al precio de no poder enunciar con total precisión algunos resultados sobre rango y dimensión de módulos y espacios vectoriales de dimensión infinita que, aunque resulta natural presentarlos al tratar estos conceptos, no son realmente necesarios en ningún momento.

El libro de *Álgebra* consta ahora (tras el capítulo [Al I] de fundamentos) de un primer bloque de cinco temas con los contenidos básicos del “álgebra abstracta” (incluyendo el álgebra lineal) y un segundo bloque de aplicaciones y resultados más avanzados.

El libro de *Geometría* empieza con dos capítulos que exponen la geometría euclídea a partir de unos axiomas al estilo de Hilbert, seguidos de un segundo bloque de cuatro capítulos dedicados a la geometría analítica y sus aplicaciones y un tercer bloque en el que analizamos más a fondo las geometrías afín y euclídea estudiadas en el bloque precedente e introducimos la geometría proyectiva y las geometrías no euclídeas.

El libro de *Análisis* consta de un primer bloque con los preliminares topológicos, un segundo bloque con los hechos básicos del cálculo diferencial e integral y un tercer bloque con temas más avanzados.

ÁLGEBRA	GEOMETRÍA	ANÁLISIS	GRUPOS
Al I Conjuntos			
Al II Anillos	G I G. absoluta		
Al III Aritmética	G II G. euclídea	An I Números reales	TG I Elementos
Al IV Módulos	G III G. analítica	An II Topología I	TG II Permutaciones I
Al V Cuerpos I	G IV Cuaternios	An III Topología II	TG III Estructura
Al VI Álgebra lineal	G V Bijecciones afines	An IV Tª de la medida I	TG IV Resolubles
Al VII Ecuaciones	G VI Regla y compás	An V Calc. diferencial	TG V Nilpotentes
Al VIII Enteros algebraicos	G VII G. afin	An VI Tª de la medida II	TG VI Caracteres
Al IX Cuerpos II	G VIII G. proyectiva	An VII Variedades	TG VII Permutaciones II
Al Ap A Ax. de elección	G IX Cónicas	An VIII Cál. vectorial	TG VIII Clásicos I
Al Ap B Ctos. infinitos	G X G. parabólica	An IX An. armónico	TG IX Clásicos II
Al Ap C Cuadrados latinos	G XI G. hiperbólica	An X Holomorfos	TG Ap A Banach-Tarski
	G XII G. elíptica	An Ap A Sólidos rígidos	
	G Ap A G. Inversiva	An Ap B Gravitación	
	G Ap B Hamming		

Finalmente, el libro de Teoría de grupos aparece dividido en el esquema anterior en un primer bloque con la teoría básica y un segundo bloque con contenidos más avanzados.

Salvo los dos apéndices sobre teoría de conjuntos de [Al], los demás apéndices contienen aplicaciones que, por motivos diversos, era preferible exponer unificadamente en lugar de dejarlas dispersas por el texto.

Remitimos a las introducciones de cada uno de los libros para una panorámica general más detallada de sus contenidos.

Introducción

En [IC] introducimos los conceptos básicos del cálculo diferencial e integral, con numerosas aplicaciones, reduciendo al mínimo la base teórica necesaria sin menoscabo del rigor matemático, de modo que todas las conclusiones quedaran plenamente justificadas según los estándares modernos. La mayor parte de los conceptos y resultados expuestos allí —aunque presentados con una fundamentación moderna— eran ya conocidos por los analistas del siglo XVIII, pero hay una parte del cálculo que estos analistas usaban con familiaridad que no aparece reflejada en [IC], y es el cálculo integral de funciones de varias variables. En efecto, en [IC] presentamos los conceptos básicos del cálculo diferencial de funciones de varias variables, pero en el caso del cálculo integral nos limitamos a considerar esencialmente integrales de funciones continuas de una única variable. Sólo en la sección [IC 3.4] probamos algunos resultados particulares sobre integrales iteradas que sugerían el concepto de integral de una función de dos variables. La razón es que exponer el cálculo integral de funciones de varias variables que conocían los analistas del siglo XVIII de forma rigurosa y sin hacer uso de la matemática abstracta moderna resultaría, cuanto menos, artificioso, y contrario al espíritu de [IC], que consiste en evitar la teoría matemática abstracta únicamente cuando se puede prescindir de ella de forma natural, sin obscurecer con ello las ideas involucradas.

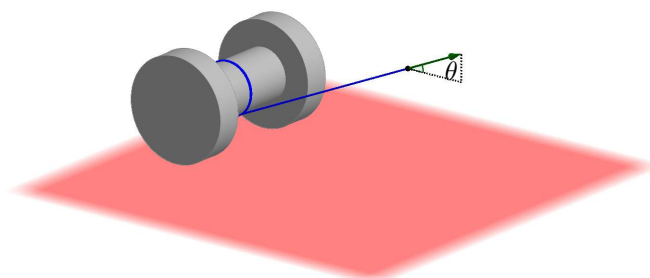
Sólidos rígidos Un contexto en el que se necesita el concepto de integral de una función de tres variables es en el estudio del movimiento de un sólido rígido. En [IC] planteamos y resolvimos diversos problemas concernientes al movimiento de partículas puntuales, desde los más elementales, como la caída libre o la caída por un plano inclinado, hasta otros mucho más sofisticados, como el de la curva braquistócrona o la tautócrona o la curva sinodal. Sin embargo, los cálculos realizados sólo son válidos si suponemos que las partículas puntuales consideradas corresponden con objetos que se mueven sin girar sobre sí mismos. Por ejemplo, no es lo mismo dejar que se deslice en un plano inclinado un cubo (que cae sin girar) o una esfera (que gira mientras cae). Por ejemplo, podemos plantearnos el problema siguiente:

Dejamos caer por un plano inclinado un cubo, una esfera maciza, una esfera hueca, un cilindro macizo y un cilindro hueco. ¿En qué orden llegarán a la base del plano?

Veremos que la respuesta no depende ni de la masa de los cinco objetos ni de su tamaño, pero sí de su forma geométrica. Concretamente, depende del concepto de “momento de inercia” de un sólido, que fue introducido por Euler en su libro *Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum*, publicado en 1765, y que se calcula mediante una integral sobre el conjunto formado por todos los puntos del sólido. Veremos que si un cuerpo cae sin girar, como es el caso del cubo, el tiempo que tarda es el que calculamos en [IC] para una partícula puntual, pero para los cuerpos que giran, el tiempo es mayor cuanto mayor es su momento de inercia, pues éste determina qué parte de la energía potencial inicial se convierte en energía de rotación y qué parte se convierte en energía de traslación (que es la que determina la velocidad de la caída). En el apéndice A expondremos la teoría de Euler sobre el movimiento de un sólido rígido y lo aplicaremos al movimiento de rotación de la Tierra y al movimiento giroscópico que describe, por ejemplo, el movimiento de una peonza.

Otro problema clásico sencillo sobre la dinámica del sólido rígido es el siguiente:

Tenemos un carrito con un hilo enrollado en él, del cual tiramos como muestra la figura. ¿Hacia dónde se moverá el carrito?



La respuesta depende de la relación entre el ángulo θ que forma el hilo con la horizontal y el coeficiente de rozamiento del carrito con el suelo. Fijado éste, según cuál sea el ángulo, el carrito se moverá hacia adelante o hacia atrás. ■

Para abordar todos estos problemas necesitamos, como ya hemos señalado, una teoría de integración más general que la expuesta en [IC], que nos permita integrar y manipular cómodamente integrales de funciones de varias variables. Aquí expondremos la integral de Lebesgue, que data de 1904, cuando el matemático francés Henri Lebesgue publicó sus *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives*. Existe otro cálculo integral más simple, la integral de Riemann, que fue presentado por Bernhard Riemann en la universidad de Gotinga en 1854, aunque no lo publicó hasta 1868, que para muchos propósitos es más que suficiente, pero la integral de Lebesgue es preferible a largo plazo y, en cualquier caso, los resultados más delicados se demuestran más cómodamente para la integral de Lebesgue.

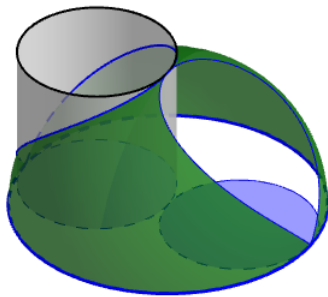
La bóveda de Viviani Otro ejemplo de problema que los matemáticos del siglo XVIII supieron resolver y que no podríamos abordar con la versión restringida del cálculo integral expuesta en [IC] fue formulado en un folleto impreso en Florencia con fecha de 4 de abril de 1692. Despojados de la retórica pomposa de la época, el folleto planteaba el desafío siguiente:

Abrir cuatro ventanas iguales en una bóveda hemisférica de modo que el área de la bóveda perforada sea cuadrable.

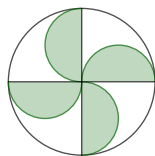
Aquí “cuadrable” hay que entenderlo como que se pueda construir con regla y compás un cuadrado de la misma área, supuesto que el radio de la esfera es constructible. En particular, el área de la semiesfera completa no es cuadrable, pues vale $2\pi r^2$ y para cuadrarla habría que construir un cuadrado de lado $\sqrt{2\pi r}$, con lo que si r es constructible, también lo sería el número trascendente $\sqrt{2\pi}$, pero todos los números constructibles con regla y compás son algebraicos.

El escrito estaba firmado por *D. Pio Lisci Pusillo Geometra* que era un anagrama de *Postremo Galilei Discipulo* (el último discípulo de Galileo). Se trataba de Vincenzo Viviani, quien estaba convencido de que el cálculo infinitesimal era un mero juego de palabras que sólo podía resolver sus propios problemas, pero que no sería capaz de resolver un problema genuinamente geométrico, como el que planteaba. El folleto fue enviado a los matemáticos más famosos de Europa a través del cuerpo diplomático del Gran Duque de Toscana. El 27 de mayo llegó a manos de Leibniz. Ese mismo día lo resolvió y al día siguiente envió la solución por carta al Gran Duque. También se la envió a su amigo Jakob Bernoulli, que le señaló un pequeño error de cálculo. L'Hôpital envió a Florencia tres soluciones, aunque es posible que fueran en gran parte obra del que entonces era su profesor particular, Johann Bernoulli. Viviani no encajó nada bien su derrota.

Si en lugar de cuatro ventanas pedimos dos, la solución es más elegante, pues consiste en quitarle a la semiesfera de radio r las intersecciones con dos cilindros de radio $r/2$ levantados sobre un mismo diámetro. La figura muestra uno de los cilindros y la ventana que deja el otro:



La solución de Viviani constaba de cuatro ventanas determinadas por la intersección de otros tantos semicilindros, de modo que cada una tiene la mitad de área que las determinadas por un cilindro entero, por lo que el área de la bóveda resultante es la misma:

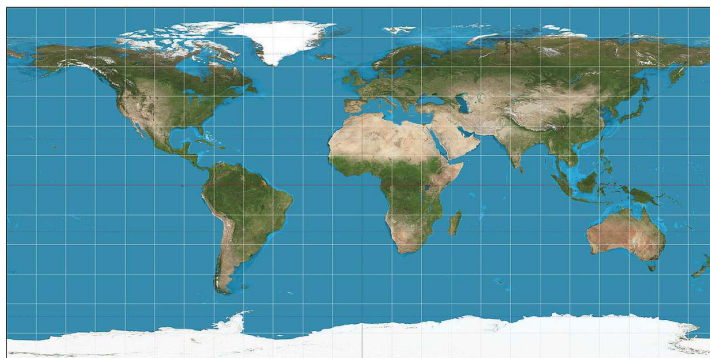


En la sección [IC 2.7] dedujimos el valor del área de una esfera, pero mediante un argumento aplicable únicamente a superficies de revolución, que sólo nos permite calcular el área de la esfera completa o, a lo sumo, de rodajas en forma de aro, pero no el área de lo que hoy se conoce como la *bóveda de Viviani*. En este libro la calcularemos combinando el cálculo integral para funciones de varias variables con la teoría sobre las superficies diferenciables, que se remonta a las *Disquisitiones generales circa superficies curvas* que Gauss publicó en 1827, y que aquí expondremos en una versión ligeramente más general, válida para variedades de dimensión arbitraria. ■

La idea básica es que en [IC] vimos cómo derivar funciones definidas sobre subconjuntos abiertos de \mathbb{R}^n , y el cálculo integral que introduciremos en el capítulo IV nos permitirá integrar también este tipo de funciones, mientras que la geometría diferencial que expondremos en el capítulo VII nos permitirá derivar e integrar y, en general, extender los conceptos del cálculo diferencial a funciones definidas sobre superficies curvas y sus análogos de dimensiones superiores.

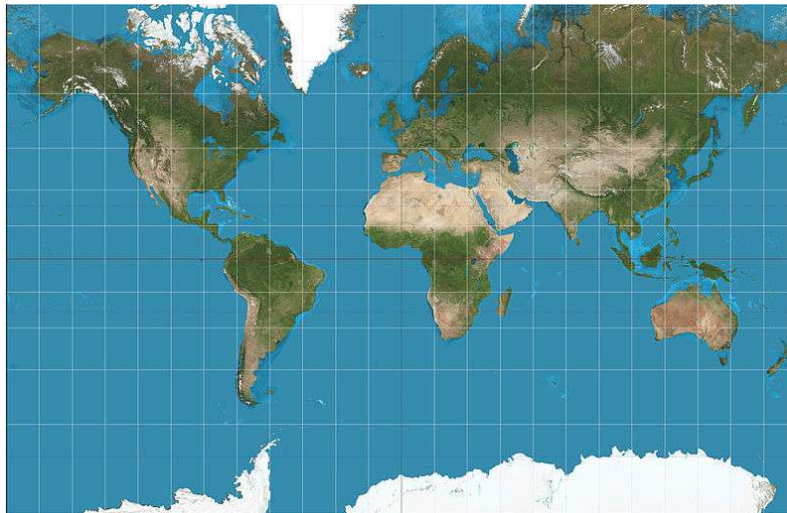
Cartografía Como ejemplos de los problemas que pueden abordarse con las técnicas de la geometría de las superficies diferenciables podemos considerar algunos relacionados con la cartografía. Si queremos representar en un mapa plano la totalidad de la superficie terrestre, no es evidente cuál es la mejor forma de hacerlo, ya que ésta no es plana, sino esférica y, de hecho, hay numerosas alternativas, cada una con sus ventajas e inconvenientes, de modo que no puede decirse que ninguna sea la mejor de todas.

La forma más elemental de representar la superficie terrestre es en un mapa rectangular con proporciones 2 : 1 en el que cada punto de la superficie terrestre está representado en el punto de coordenadas (θ, ϕ) correspondientes a su latitud $-180^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ y a su longitud $-90^\circ \leq \phi \leq 90^\circ$. Así:



Esto es lo que se conoce como *proyección equirrectangular* y que fue descrita por el geógrafo griego Marino de Tiro alrededor del año 100 d.C. El nombre hace referencia a que los meridianos y los paralelos están igualmente espaciados. Es un ejemplo de *proyección cilíndrica*, lo que significa que los meridianos, en lugar de confluir en los polos, se representan como rectas paralelas.

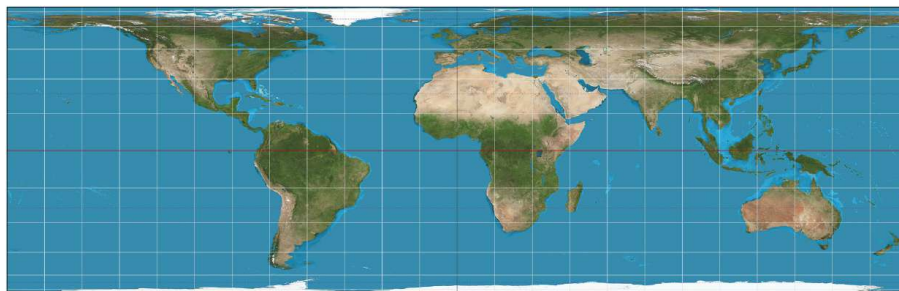
Un ejemplo no trivial de proyección rectangular fue la que usó en 1559 el matemático y geógrafo flamenco Gerhard Kremer, conocido por la versión latinizada de su nombre: Gerardus Mercator, que publicó un mapamundi dividido en 18 láminas con el título de *Nova et Aucta Orbis Terrae Descriptio ad Usum Navigantium Emendata* (Nueva y aumentada descripción de la Tierra corregida para uso de los navegantes). Esta proyección se conoce hoy en día como la *proyección de Mercator*, y durante mucho tiempo fue la más usada en cartografía. He aquí un mapamundi con la proyección de Mercator:



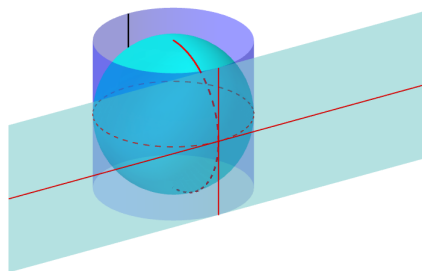
Vemos que los meridianos están equiespaciados, pero los paralelos no (en los mapas se indican los meridianos y paralelos correspondientes a longitudes y latitudes múltiplos de 15°). Mercator no explicó cómo calculó su proyección, pero, como indica el título de su publicación, su finalidad era muy concreta. La proyección de Mercator tiene la propiedad de que es conforme, es decir, que un ángulo medido en el mapa se corresponde con el mismo ángulo en la esfera terrestre. De este modo, si un navegante quiere ir de un punto del mapa a otro, una trayectoria posible es seguir la trayectoria correspondiente al segmento que une ambos puntos sobre el mapa. Dicha trayectoria no es la más corta posible, pero es la más sencilla de seguir, porque, sobre el mapa —y, por consiguiente, también sobre la esfera terrestre— forma un ángulo constante α con todos los meridianos, un ángulo que el navegante puede determinar sin más que unir los dos puntos sobre el mapa con una regla y medir el ángulo que ésta forma con la vertical. De este modo, el navegante sólo tiene que cuidar de que su rumbo en cada instante sea siempre el que forma un ángulo α con el norte geográfico que le indica la brújula.

Las trayectorias en una esfera que forman un ángulo constante con los meridianos (luego también con los paralelos) se llaman *loxodrómicas* (gr. = “curso oblicuo”) y eran las más sencillas de seguir cuando, para controlar el rumbo, no se disponía más que de una brújula. La proyección de Mercator está, pues, diseñada, para que el cálculo de las trayectorias loxodrómicas sea sencillísimo, pero ¿cómo se construye la proyección de Mercator? ¿Cómo hay que espaciar los paralelos para que la proyección cilíndrica resultante sea conforme? Veremos que la teoría de superficies diferenciables nos reducirá el problema a la resolución de una ecuación diferencial.

Un problema similar es el de encontrar una proyección cilíndrica que conserve, no los ángulos, sino las áreas. En el mapa anterior, Groenlandia aparece cortada, pero si prolongáramos el mapa la veríamos casi tan grande como África, cuando en realidad es 14 veces menor. Canadá y, sobre todo, Rusia, también parecen mucho mayores de lo que son en realidad (y, por descontado, la Antártida, de la que en el mapa sólo vemos un pequeño fragmento). La proyección equirrectangular tampoco conserva las áreas, pero sí lo hace, en cambio, la proyección descrita en 1772 por el matemático suizo Johann Heinrich Lambert:



Al contrario que la de Mercator, su construcción es muy simple: basta proyectar horizontalmente la esfera sobre un cilindro y luego desplegar el cilindro en un plano, por lo que la proporción del mapa es $\pi : 1$.



Vemos que Canadá, Rusia y el extremo sur de Sudamérica se ven “casi de perfil” por lo que parecen más estrechos de lo que son realmente, pero sus áreas en el mapa son las correctas.

En el capítulo VII no sólo comprobaremos que la proyección de Lambert tiene la propiedad de conservar las áreas, sino que veremos cómo llegar hasta ella sin conocer de antemano la solución. ■

La posibilidad que nos ofrece la geometría diferencial de calcular integrales sobre superficies curvas de cualquier dimensión, no necesariamente abiertos en \mathbb{R}^n , abre las puertas a formular nuevos resultados generales que constituyen la base de lo que se conoce como *cálculo vectorial*. En el capítulo VIII expondremos uno de ellos y extraeremos de él muchas consecuencias. Se trata del teorema de la divergencia, atribuido a Gauss, si bien Gauss sólo demostró algunos casos particulares entre 1813 y 1839. Un caso particular aparecía ya en un trabajo de Lagrange¹ de 1762 y la primera prueba general (del caso tridimensional) la publicó Mijaíl Ostrogradski en 1826.

No vamos a enunciar aquí el teorema de la divergencia, pero, para hacernos una idea de su contenido y su relevancia, podemos compararlo con la regla de Barrow, que relaciona la integral de una función f en un intervalo con los valores de otra función (una primitiva de f) en los extremos del intervalo, y no es necesario explicar la importancia que tiene en el cálculo integral de funciones de una variable. Igualmente, el teorema de la divergencia —como muchos otros teoremas del cálculo vectorial— relaciona la integral de una función en un abierto de \mathbb{R}^n con la integral de otra función en la frontera del abierto (supuesto que dicha frontera sea una superficie diferenciable), y sus consecuencias son igualmente amplísimas.

Por ejemplo, como aplicación probaremos el teorema de Green, que es una generalización de la fórmula [IC 2.10] que reduce el cálculo del área encerrada por una curva (que en esencia es una integral sobre el abierto limitado por la curva) a una integral sobre la curva. Entre sus numerosas aplicaciones a la física, destacamos ésta por la simplicidad de su enunciado, y que es un hecho que demostró Newton en sus *Principia*:

Supongamos que la Tierra es esférica y que su masa está distribuida homogéneamente. Si en el centro de la Tierra hubiera una cavidad esférica, ¿cómo sería la gravedad en ella? Si alguien situado en la superficie de esa cavidad diera un salto, ¿caería hacia el centro de la Tierra o volvería a caer al suelo?

La respuesta correcta no es ninguna de las dos, sino que en una tal cavidad no habría gravedad, de modo que si alguien diera un salto en su superficie, se movería a velocidad constante hasta chocar con el punto antípoda de la cavidad. Las aplicaciones a la gravitación de los diversos resultados expuestos en este libro las hemos reunido en el apéndice B. En particular, la respuesta a este problema se encuentra en la sección B.1.

El problema de la cuerda vibrante El contenido del capítulo IX se remonta a un problema que ha interesado a muchos matemáticos desde Pitágoras hasta la actualidad: el estudio de la vibración de una cuerda. Desde tiempos inmemoriales se sabe que al pulsar una cuerda tensa se produce un sonido agradable al oído, no un ruido como cuando, por ejemplo, frotamos un objeto contra

¹Fue Lagrange quien introdujo en 1760 el concepto de integral sobre una superficie, y en términos más generales en 1811, en la segunda edición de su *Mécanique Analytique*.

otro. Pitágoras se dio cuenta de que, detrás de ese fenómeno, había relaciones matemáticas, y así observó que si se pulsa una cuerda cuya longitud sea la mitad que la de otra de las mismas características, los sonidos producidos no son iguales, pero su combinación suena especialmente bien al oído. Si la relación de las longitudes es de 1 a 3 (o, mejor, de 1 a $2/3$, para que las notas suenen “más próximas”) los sonidos no suenan “tan iguales”, pero, aún así, la superposición de ambos resulta “agradable”. A partir de estos principios, Pitágoras determinó las longitudes que debían tener las cuerdas de un instrumento musical (como un arpa, o una lira) para que al combinar sus sonidos resultaran especialmente “musicales” y el resultado fue lo que se conoce como la “escala pitagórica” de siete notas, que en el siglo XVII se había extendido a doce notas basándose en los mismos principios pitagóricos.

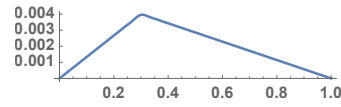
Por esa época, Galileo fue uno de los primeros en conjeturar que lo que determinaba el tono de un sonido era en realidad la frecuencia con la que vibraba la cuerda que lo generaba (el número de oscilaciones por segundo) e hizo algunos experimentos burdos para confirmar su hipótesis, aunque era imposible medir la frecuencia de vibración de una cuerda. Mersenne publicó en 1636 su *Harmonie universelle*, en la que enunció relaciones que había comprobado empíricamente con cuerdas, tubos de órgano, etc., según las cuales, por ejemplo, la frecuencia con que vibra una cuerda (admitiendo que es inversamente proporcional a su longitud) es proporcional a la raíz cuadrada de la fuerza que la tensa, e inversamente proporcional a la raíz cuadrada de su densidad lineal (masa por unidad de longitud).

Mersenne trató de encontrar una justificación teórica a estas leyes empíricas y, al no encontrarlas, instó a otros a abordar el problema. En 1645 se lo propuso a Torricelli, y en 1646 al joven Huygens (que tenía entonces 17 años). Prácticamente todas las mentes destacadas de la época tenían sus conjeturas más o menos elaboradas sobre el sonido y las cuerdas vibrantes, incluyendo, por supuesto, a Descartes y a Newton. En 1673 Huygens elaboró un modelo simplificado de cuerda vibrante, por analogía con un péndulo, que justificaba parcialmente las leyes de Mersenne (aunque daba lugar a unas constantes de proporcionalidad incorrectas). Un avance notable se produjo en 1681, cuando Robert Hooke mostró ante la *Royal Society* una máquina consistente en una rueda que hacía vibrar una lengüeta de modo que se podía calcular la frecuencia a la que oscilaba, y así pudo medir, comparando los sonidos, la frecuencia absoluta de una cuerda vibrante, demostrando empíricamente que, como se conjeturaba, es inversamente proporcional a la longitud de la cuerda.

Pero hubo que esperar hasta 1747, poco más de un siglo después de la muerte de Galileo y medio siglo después de la muerte de Huygens, cuando el cálculo diferencial ya estaba sólidamente desarrollado, para que Jean Le Rond D'Alembert presentara el primer modelo matemáticamente aceptable que describía el movimiento de una cuerda vibrante. Vamos a analizarlo con detalle:

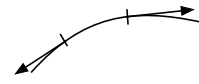
Por concretar, vamos a describir el movimiento de la cuerda de una guitarra, es decir, una cuerda muy tensa, sujeta por sus dos extremos, y que ha sido ligeramente desplazada de su posición de equilibrio (por un dedo que la ha desplazado en un punto y luego la ha soltado).

Por ejemplo, la figura muestra una cuerda de longitud unitaria que ha sido desplazada en un punto cuatro milésimas hacia arriba. Suponemos que la cuerda es elástica, de modo que, puede aumentar su longitud levemente al deformarse, pero recupera su longitud inicial “en cuanto puede”, de modo que nunca “está floja”.



Al soltar la cuerda, ésta vibrará, y su forma en cada instante t vendrá descrita por una función $y(x, t)$, para $0 \leq x \leq l$ (donde l es la longitud de la cuerda). Para determinar la evolución de la cuerda vamos a suponer que cada punto material oscila verticalmente, es decir, que la función $y(x, t)$ para un x fijo representa la altura que tiene en el instante t la partícula que oscila en la recta vertical de abscisa x .

Vamos a analizar las fuerzas que actúan sobre un fragmento de cuerda, digamos el comprendido entre las abscisas $x_0 < x_1$. Por una parte tenemos las fuerzas de corto alcance que actúan sobre sus extremos. Si la cuerda es perfectamente flexible, es decir, si se resiste a estirarse, pero no ofrece ninguna resistencia a doblarse, estas fuerzas se reducen a lo que se llama *tensión* de la cuerda, y son tangentes a ella, por lo que tienen la forma



$$-T(x_0, t)\vec{\tau}(x_0, t), \quad T(x_1, t)\vec{\tau}(x_1, t),$$

donde

$$\vec{\tau}(x, t) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\partial y / \partial x)^2}} \left(1, \frac{\partial y}{\partial x} \right)$$

es el vector tangente unitario y el módulo $T(x, t)$ depende, en principio, sólo de la posición y del tiempo, pero no del fragmento de cuerda que estemos considerando.

Vamos a suponer que la cuerda está muy tensa, lo cual significa que, por una parte, la tensión en cada punto es lo suficientemente grande como para que las pequeñas deformaciones que va a experimentar la cuerda no afecten significativamente a su intensidad, con lo que podemos suponer que la función $T(x, t)$ es constante, es decir, que el módulo de la tensión en cada punto no depende ni del tiempo ni del punto de la cuerda considerado. Por otra parte, suponemos que la intensidad de la tensión es lo suficientemente grande como para que, a su lado, las fuerzas de largo alcance —las que no actúan sólo sobre los extremos del fragmento de cuerda, sino sobre todos sus puntos— resulten despreciables. Estas fuerzas son esencialmente la gravedad (que ciertamente podemos despreciar frente a la tensión) y el rozamiento con el aire, que no es realmente despreciable a largo plazo, pues la diferencia entre despreciarlo o no despreciarlo es que obtengamos una vibración que perdura indefinidamente en el tiempo o una vibración que se atenúa paulatinamente. Vamos a incluirla de momento para ver cómo habría que tratarla, pero luego la despreciaremos, con lo que obtendremos una descripción de la vibración inicial de la cuerda, sin tener en cuenta su atenuación.

Para tratar una fuerza de rozamiento que no actúa sobre un punto, sino sobre un fragmento extenso de cuerda, tenemos que considerar en realidad una “densidad de fuerza” (fuerza por unidad de longitud), que es razonable suponer (basándose en el efecto del rozamiento sobre otros móviles) que es proporcional a la velocidad del punto al que se aplica y tiene sentido contrario a dicha velocidad, por lo que la componente vertical F de la fuerza total que actúa sobre el fragmento de cuerda considerado es

$$-T \frac{1}{\sqrt{1 + (\partial y / \partial x|_{x_0})^2}} \frac{\partial y}{\partial x} \Big|_{x_0} + T \frac{1}{\sqrt{1 + (\partial y / \partial x|_{x_1})^2}} \frac{\partial y}{\partial x} \Big|_{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} k \frac{\partial y}{\partial x} dx.$$

Los dos primeros términos son las tensiones en los extremos del fragmento de cuerda y la integral es la “suma” de las fuerzas de rozamiento que actúan en cada uno de los puntos del fragmento.

La segunda ley de Newton para una partícula puntual afirma que

$$\vec{F} = m\vec{a} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}),$$

donde \vec{F} es la fuerza total que actúa sobre la partícula, m es su masa y \vec{a} es su aceleración. La cantidad $\vec{P} = m\vec{v}$ se llama *momento lineal* o cantidad de movimiento de la partícula, que en el caso del fragmento de cuerda tendrá como componente en la dirección de la vibración el valor

$$P = \int_{x_0}^{x_1} \rho \frac{\partial y}{\partial t} dx,$$

donde ρ es la densidad (lineal) de la cuerda, que supondremos también constante.² En efecto, estamos multiplicando la velocidad de la cuerda en un punto, no por la masa del punto (que es nula), sino por su densidad lineal, de modo que obtenemos la “densidad de momento angular” que, al ser integrada, nos da el momento lineal del fragmento de cuerda.

Por lo tanto, la segunda ley de Newton se traduce en este caso en que³

$$\begin{aligned} -T \frac{1}{\sqrt{1 + (\partial y / \partial x|_{x_0})^2}} \frac{\partial y}{\partial x} \Big|_{x_0} + T \frac{1}{\sqrt{1 + (\partial y / \partial x|_{x_1})^2}} \frac{\partial y}{\partial x} \Big|_{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} k \frac{\partial y}{\partial x} dx \\ = \int_{x_0}^{x_1} \rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} dx. \end{aligned}$$

Consideramos esta igualdad como función de $x = x_1$ (para un x_0 fijo), con lo que al derivar respecto de x queda:

$$T \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + (\partial y / \partial x)^2}} \frac{\partial y}{\partial x} \right) - k \frac{\partial y}{\partial x} = \rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}.$$

Para simplificar esta ecuación vamos a suponer además que la cuerda nunca va a dejar de estar “casi horizontal”, es decir, que la derivada $\partial y / \partial x$ va a ser siempre muy pequeña y, por consiguiente, podemos despreciar su cuadrado.

²En realidad, cuando estiramos la cuerda, la densidad tiene que reducirse un poco, pero despreciaremos estas variaciones.

³Para derivar la integral usamos [IC 3.11] y la nota posterior.

Esto reduce la ecuación a

$$T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - k \frac{\partial y}{\partial x} = \rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

o, equivalentemente,

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\frac{k}{\rho} \frac{\partial y}{\partial x},$$

donde llamamos $v = \sqrt{T/\rho}$. Esta ecuación en derivadas parciales se conoce como *ecuación de ondas atenuada*. Si prescindimos del rozamiento (haciendo $k = 0$) obtenemos la *ecuación de ondas* (unidimensional):

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0.$$

Ésta es la ecuación a la que llegó D'Alembert, y ha de entenderse como una aproximación del movimiento de una cuerda vibrante en el mismo sentido en que la ecuación clásica del péndulo simple⁴ es una aproximación razonable del movimiento de un péndulo siempre que sus oscilaciones no sean muy amplias. En nuestro caso, la ecuación de ondas describe satisfactoriamente el movimiento de una cuerda vibrante bajo las condiciones que hemos indicado: que su peso sea despreciable, que esté muy tensa y que su posición en cualquier momento sea casi indistinguible de un segmento de recta, incluso localmente, es decir, que en ningún momento un fragmento de cuerda alcance una inclinación apreciable.

La ecuación de ondas tiene soluciones muy diversas, pero el problema de la cuerda vibrante impone unas *condiciones de frontera* (que expresan que los extremos de la cuerda están fijos) y unas *condiciones iniciales* (que especifican la posición y la velocidad inicial de la cuerda):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \\ y(x, 0) &= y_0(x) \\ \frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) &= y'_0(x) \\ y(0, t) &= 0 \\ y(l, t) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

donde l es la longitud de la cuerda y, en las condiciones iniciales, x varía en el intervalo $[0, l]$. Vamos a probar que este problema tiene a lo sumo una solución. Esto equivale a probar que el problema

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \\ y(x, 0) &= 0 \\ \frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) &= 0 \\ y(0, t) &= 0 \\ y(l, t) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

⁴Véase el final de la sección [IC 4.2].

sólo admite la solución nula, pues si $y(x, t), \bar{y}(x, t)$ son dos soluciones del problema entonces $y - \bar{y}$ es solución del problema anterior, luego tendremos que $y - \bar{y} = 0$.

Para ello consideramos la función

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^l \left(v^2 \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 \right) dx,$$

que cumple

$$\frac{dE}{dt} = \int_0^l \left(v^2 \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t} + \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right) dx.$$

Integrando por partes:

$$\int_0^l v^2 \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t} dx = \left[v^2 \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial t} \right]_0^l - \int_0^l v^2 \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx,$$

pero al derivar respecto de t las condiciones de frontera obtenemos que el término entre corchetes es nulo, luego

$$\frac{dE}{dt} = v^2 \int_0^l \frac{\partial y}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) dt = 0.$$

Además, las condiciones iniciales implican que $E(0) = 0$, luego E es idénticamente nula, lo cual implica que las derivadas $\partial y / \partial x$ y $\partial y / \partial t$ son idénticamente nulas, por lo que $y(x, t)$ tiene que ser una función constante, pero las condiciones de frontera implican que y es idénticamente nula. ■

La ecuación de ondas de D'Alembert atrajo la atención de varios matemáticos, en especial de Leonhard Euler y de Daniel Bernoulli, que encontraron, más o menos simultáneamente, distintas clases de soluciones. Por ejemplo, D'Alembert introdujo la técnica de *separación de variables*, consistente en encontrar soluciones de la forma $y(x, t) = \phi(x)\psi(t)$ (con lo que las condiciones de frontera se traducen en $\phi(0) = \phi(l) = 0$). Al sustituir en la ecuación de ondas queda

$$\phi(x)\psi''(t) = v^2\phi''(x)\psi(t),$$

luego

$$\frac{1}{v^2} \frac{\psi''(t)}{\psi(t)} = \frac{\phi''(x)}{\phi(x)}.$$

Como son funciones de variables distintas, para que se dé la igualdad tienen que ser ambas constantes, luego la ecuación anterior equivale a las ecuaciones

$$\phi''(x) = -\lambda\phi(x), \quad \psi''(t) = -\lambda v^2\psi(t),$$

para cierta constante λ . Si fuera $\lambda < 0$, las soluciones de la primera ecuación diferencial sería de la forma⁵

$$\phi(x) = \frac{\phi'(0)}{\sqrt{-\lambda}} \operatorname{senh}(\sqrt{-\lambda}x),$$

⁵Véase [IC 1.36].

donde hemos usado que $\phi(0) = 0$, pero esta función no puede cumplir $\phi(l) = 0$. El caso $\lambda = 0$ se descarta más fácilmente, con lo que tiene que ser $\lambda > 0$, y entonces la solución de la primera ecuación diferencial es⁶

$$\phi(x) = K \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda} x),$$

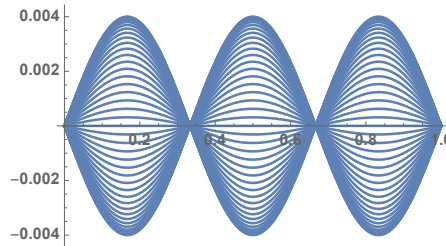
y ahora la condición $\phi(l) = 0$ se traduce en que $\sqrt{\lambda} = n\pi/l$, donde no perdemos generalidad si suponemos que el entero n es positivo. Para $\psi(t)$ no tenemos condiciones de frontera, pero ahora sabemos que $\lambda > 0$, por lo que tiene que ser

$$\psi(t) = A \cos \frac{n\pi vt}{l} + B \operatorname{sen} \frac{n\pi vt}{l}.$$

En total, concluimos que las soluciones de la ecuación de ondas con variables separables (y que cumplen la condición de frontera de que los extremos de la cuerda están fijos) son las de la forma

$$y_n(x, t) = A_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} \cos \frac{n\pi vt}{l} + B_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} \operatorname{sen} \frac{n\pi vt}{l}.$$

Ahora bien, estas soluciones no son las únicas posibles, y de hecho corresponden a unas condiciones iniciales muy peculiares. Por ejemplo, es fácil ver que la condición de que la cuerda parta del reposo se traduce en que $B_n = 0$, y entonces, la solución y_3 con $A_3 = 0.004$ es la que muestra la figura, es decir, nos da la vibración de una cuerda que parte de una posición sinusoidal con $y = 0$ en cuatro puntos. Pero es muy difícil que un guitarrista pueda poner con sus dedos una cuerda de su guitarra en esa posición inicial (teniendo en cuenta además que los desplazamientos son microscópicos).



Ahora bien, una propiedad fundamental de la ecuación de ondas es su linealidad, es decir, que la suma de dos soluciones de la ecuación es otra solución, por lo que podemos considerar “superposiciones” de “soluciones fundamentales”, es decir, soluciones de la forma

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^N \left(A_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} \cos \frac{n\pi vt}{l} + B_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} \operatorname{sen} \frac{n\pi vt}{l} \right),$$

que siguen satisfaciendo las condiciones de frontera y cumplen condiciones iniciales más variadas. Si, por simplicidad, consideramos el caso en que las velocidades iniciales son nulas (lo que sucede cuando pellizcamos la cuerda y la soltamos de repente desde un estado de reposo), es fácil ver que los coeficientes B_n tienen que ser nulos, y la condición inicial que satisfacen estas soluciones es

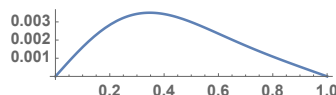
$$y(x, 0) = \sum_{n=1}^N A_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l}.$$

⁶De nuevo por [IC 1.36] o, más sencillamente, por [IC 1.35].

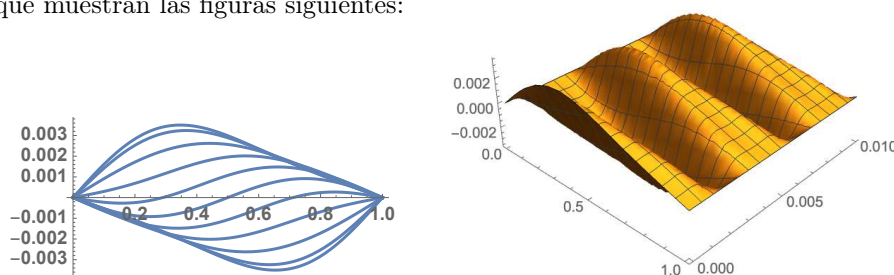
Euler estudió las soluciones de este tipo con $N = 3$. Por ejemplo, si consideramos una cuerda de longitud $l = 1$ con constante $v = 480$ y tomamos coeficientes

$$A_1 = 0.00312269, \quad A_2 = 0.000917735, \quad A_3 = 0.000132529,$$

obtenemos una solución correspondiente a la solución inicial



que, teniendo en cuenta la diferencia de escala entre los ejes, podría considerarse una forma más o menos razonable que podría adoptar una cuerda cuando se pone un dedo sobre ella. El movimiento previsto por la ecuación de D'Alembert es el que muestran las figuras siguientes:



La figura de la izquierda muestra distintas posiciones de la cuerda durante las dos primeras milésimas de segundo, mientras que la de la derecha muestra la función $y(x, t)$ durante la primera centésima de segundo.

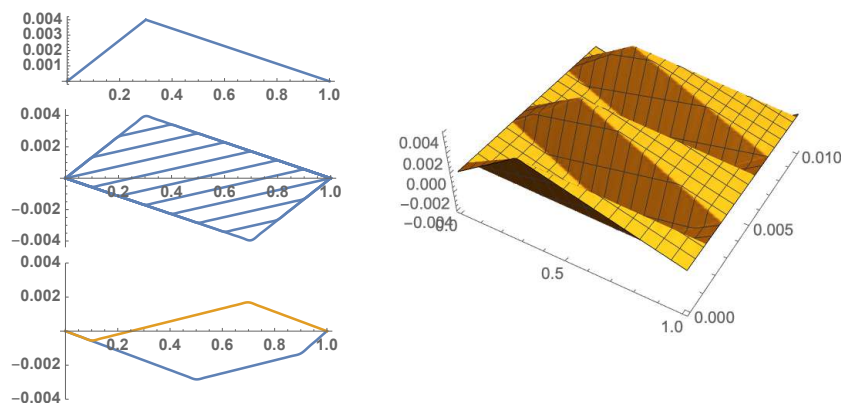
En general, observemos que las soluciones que estamos considerando (superposiciones de soluciones fundamentales) son periódicas de periodo $2l/v$, luego su frecuencia es $\nu = v/2l$. Si recordamos además que $v = \sqrt{T/\rho}$, concluimos que la frecuencia de oscilación es

$$\nu = \frac{1}{2l} \sqrt{\frac{T}{\rho}},$$

luego el modelo matemático de D'Alembert predice que la frecuencia es inversamente proporcional a la longitud de la cuerda, directamente proporcional a la raíz cuadrada de la tensión e inversamente proporcional a la densidad lineal de la cuerda, tal y como había comprobado empíricamente Mersenne.

Euler y D'Alembert entraron pronto en una (amistosa) disputa matemática, pues Euler obtuvo "soluciones" de la ecuación de ondas correspondientes a condiciones iniciales determinadas por funciones no derivables en algunos puntos, como la que se muestra arriba a la izquierda en el grupo de figuras siguiente (consideraba condiciones con estas características, pero este ejemplo no es de Euler). Sus técnicas de cálculo (que había que interpretar con cierta benevolencia) "justificaban" que la solución de la ecuación de ondas correspondiente a esta

condición inicial (y a las condiciones de frontera) es la que muestran las otras figuras. En el centro a la izquierda vemos varias posiciones de la cuerda en las dos primeras milésimas de segundo y abajo vemos dos de dichas posiciones.



Cualitativamente, vemos que el pico inicial se achata y da lugar a dos picos que viajan hacia los extremos de la cuerda, rebotan, y concurren en un nuevo pico por debajo del nivel de equilibrio, simétrico del inicial, y a continuación se inicia un movimiento inverso hasta que la cuerda vuelve a la posición inicial y ese ir y venir se repite periódicamente. La figura de la derecha muestra la solución completa durante la primera centésima de segundo, que comprende algo más de dos oscilaciones.

Ante esto, D'Alembert protestaba argumentando que no tenía sentido decir que una función $y(x, t)$ no derivable en varios puntos (las rectas que se ven en la gráfica de la derecha) era solución de una ecuación diferencial que requería obviamente que sus soluciones fueran al menos dos veces derivables.

El debate se oscurecía en parte porque los matemáticos de la época tenían un concepto muy restringido de lo que había que entender por "función". En general, se entendía que una función era una función definida por una expresión analítica, como un polinomio, o una serie de potencias, etc., de modo que "todas las funciones" eran infinitamente derivables y, para muchos, las condiciones iniciales que proponía Euler, no es que no fueran soluciones de la ecuación, sino que ni siquiera eran funciones. En cambio, Euler insistía que si se pretendía describir un fenómeno físico como el movimiento de una cuerda, no se podía exigir que la condición inicial se ajustara a una fórmula matemática, sino que había que admitir "funciones cualesquiera" "que pudieran trazarse a mano alzada".

A largo plazo, la conclusión de este debate fue que Euler tenía razón, pero el marco conceptual necesario para darle la razón a Euler sin caer en las contradicciones que acertadamente señalaba D'Alembert (y admitir que una ecuación en derivadas parciales puede tener soluciones no derivables) no se desarrollaría hasta mediados del siglo XX, con la formulación de la teoría de distribuciones.

En este libro no hablaremos de distribuciones, pero sí que mostraremos una teoría que supuso el primer paso en la comprensión de las soluciones no derivables de Euler a la ecuación de ondas. Su origen se encuentra en la *Mémoire*

sur la propagation de la chaleur dans les corps solides, que Jean-Baptiste Joseph Fourier presentó ante la Academia Francesa en 1807 (24 años después de la muerte de Euler).

Tal vez el lector aprecie mejor el impacto que supuso la teoría de Fourier si realmente ha creído que las funciones mostradas en las gráficas de la página anterior no son derivables en algunos puntos, cuando en realidad son todas de clase C^∞ excepto la de arriba a la izquierda.

La función de arriba a la izquierda es ciertamente una función determinada por dos segmentos de recta y, por lo tanto, no es derivable en su pico, que se encuentra concretamente en $x = 0.3$, y es cierto que, como hemos explicado, Euler encontró soluciones no derivables de la ecuación de ondas que satisfacían condiciones iniciales como la indicada, y cuyo aspecto es el de las figuras que de la página anterior, pero la verdad es que dichas figuras no corresponden a la solución de la ecuación de ondas con dicha condición inicial no derivable, sino que en realidad son las gráficas de una función de la forma

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{40} A_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} \cos \frac{n\pi vt}{l},$$

para ciertos coeficientes A_n oportunamente elegidos, de modo que la gráfica de la función

$$y(x, 0) = \sum_{n=1}^{40} A_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l}$$

no es la función no derivable que se muestra arriba a la izquierda, sino la función de clase C^∞ que hemos mostrado en la página xviii. Si examináramos las gráficas de la página anterior a una escala suficientemente grande, veríamos que los aparentes picos y aristas están en realidad redondeados, y que los tramos que parecen rectos en realidad ondulan levemente.

Fourier desarrolló su teoría para encontrar soluciones de otra ecuación en derivadas parciales distinta de la ecuación de ondas, que deduciremos en la sección 8.2 a partir del teorema de la divergencia, que determina la evolución de la temperatura $T(x, t)$ de cada punto de un cuerpo a lo largo del tiempo a partir de unas condiciones iniciales y de frontera prefijadas, y la situación es análoga a la que hemos encontrado en el caso de la ecuación de ondas: la separación de variables permite encontrar soluciones sencillas, pero que distan mucho de ajustarse a unas condiciones iniciales razonables, pero cabe la posibilidad de considerar superposiciones de soluciones que corresponden a condiciones de iniciales expresables como sumas de funciones trigonométricas con coeficientes arbitrarios, con lo que cabe esperar que ajustando dichos coeficientes se puedan conseguir soluciones que satisfagan condiciones de iniciales razonables.

La parte revolucionaria de la teoría de Fourier era que, según su autor, “cualquier función” $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ podía desarrollarse en serie trigonométrica de la forma

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2n\pi x}{T} + b_n \operatorname{sen} \frac{2n\pi x}{T} \right),$$

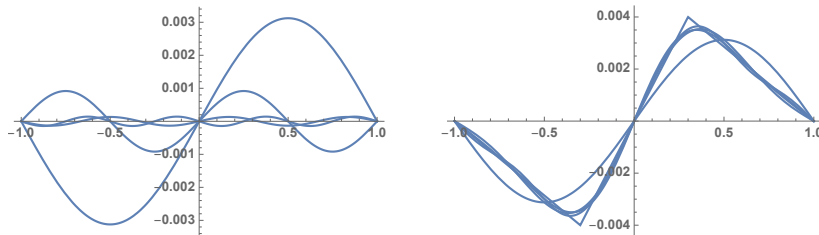
donde $T = b - a$, para ciertos coeficientes a_n y b_n oportunamente elegidos, y Fourier obtuvo fórmulas explícitas para ellos, a saber:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_a^b f(x) \cos \frac{2n\pi x}{T} dx, \quad b_n = \frac{2}{T} \int_a^b f(x) \sin \frac{2n\pi x}{T} dx.$$

Las series trigonométricas de esta forma se llaman ahora series de Fourier. Volviendo a las soluciones de la ecuación de ondas que hemos mostrado en las gráficas, resultan de extender la condición inicial (no derivable) a una función simétrica respecto del origen. Esto implica que los coeficientes a_n tienen que ser todos nulos, con lo que obtenemos una expresión de la forma

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{2n\pi x}{T},$$

donde, para ajustarnos a la notación precedente, llamamos A_n a los coeficientes b_n dados por las fórmulas de Fourier. La gráfica de la izquierda muestra los cuatro primeros sumandos y la de la derecha las cuatro primeras sumas parciales y la función f :



Si en vez de tomar 4 sumandos tomamos 40, la suma parcial resulta indistinguible de f . La “solución” correspondiente a la condición inicial no derivable determinada por los dos segmentos de recta es de la forma

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \sin \frac{n\pi x}{l} \cos \frac{n\pi vt}{l} + B_n \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{n\pi vt}{l} \right),$$

donde en este caso los coeficientes B_n son nulos (lo que corresponde a que estamos suponiendo que la cuerda parte del reposo) y los coeficientes A_n son los b_n dados por las fórmulas de Fourier. Sucede que, en efecto, la suma $y(x, t)$ no es derivable en algunos puntos, por lo que no es evidente en qué sentido preciso puede decirse que es una solución de la ecuación de ondas, pero lo que vemos es que las sumas parciales de la serie son de clase C^∞ , cumplen ciertamente la ecuación de ondas con las condiciones de frontera, y casi satisfacen la condición inicial, donde el “casi” significa que la diferencia se vuelve inapreciable si el número de sumandos es suficientemente grande. ■

Los argumentos de Fourier distaban mucho, no ya de ser rigurosos, sino incluso de resultar convincentes para los matemáticos de la época. Lagrange, Laplace y Legendre, entre otros, expresaron sus reservas, y siguió siendo así en una versión más elaborada que Fourier publicó más tarde, en 1822. La fundamentación rigurosa de la teoría de Fourier impulsó una generalización drástica de los conceptos en los que se sustenta el cálculo diferencial, y que la cual impregna cualquier exposición moderna, incluyendo los primeros capítulos de este libro.

Los conceptos del cálculo diferencial se apoyan en los conceptos de la topología, es decir, en torno a los conceptos que giran alrededor de las nociones de límite y continuidad. En [ITAn] y en [IC] consideramos principalmente límites de sucesiones en \mathbb{R}^n o de funciones definidas en subconjuntos de \mathbb{R}^n . Podemos pensar en los elementos de \mathbb{R}^n como puntos de un espacio de n -dimensiones, y en esos términos podemos decir que en [IC] manejábamos sucesiones en espacios de puntos y funciones definidas sobre espacios de puntos. La expresión “espacio de puntos” puede parecer redundante, pero la introducimos para resaltar una idea que aparece implícita en [IC], y es que, del mismo modo que decimos que la sucesión de números (o de puntos de la recta real)

$$\left\{ \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right\}_{n=1}^{\infty}$$

converge al número e , podemos decir igualmente que la sucesión de funciones

$$\left\{ \left(1 + \frac{x}{n} \right) \right\}_{n=1}^{\infty}$$

converge a la función e^x . Podría pensarse que esto es un mero juego de palabras y que, en realidad, cuando decimos que las funciones $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por

$$f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n} \right)$$

convergen a la función $f(x) = e^x$, sólo estamos expresando que, para cada número real x , tenemos una sucesión de puntos $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ que converge al punto $f(x)$. Sin embargo, sucede que es muy iluminador considerar que la segunda convergencia no es sólo una forma de agrupar muchas convergencias del primer tipo en una única referencia, sino que ambas convergencias son casos particulares de una misma noción topológica abstracta de convergencia de sucesiones que no requiere que las sucesiones a las que se aplica sean sucesiones de puntos, sino que es igualmente aplicable a “espacios de funciones” cuyos “puntos” son funciones definidas sobre “espacios de puntos”.

Por ejemplo, podemos considerar el “espacio funcional” $X = C(\mathbb{R})$ formado por las funciones continuas $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, de modo que la sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en el espacio X igual que una sucesión numérica es una sucesión en el espacio \mathbb{R} . El lector podría objetar que esto no deja de ser una mera “forma de hablar”, sugerente, pero prescindible. Sin embargo, la idea de considerar los “espacios de funciones” como “espacios de puntos” abstractos da lugar a

planteamientos en los que no es prescindible en absoluto. Por aproximarnos al contexto de las series de Fourier, vamos a considerar ahora el espacio $X = C([a, b])$ de las funciones continuas $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, donde $[a, b]$ es un intervalo cerrado de números reales. Se trata de otro ejemplo de “espacio funcional”, y vamos a compararlo con el espacio \mathbb{R}^3 , que conocemos bien.

En \mathbb{R}^3 podemos definir la norma de un vector como $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ y, análogamente, en X podemos definir la norma de una función como

$$\|f\| = \sqrt{\int_a^b f(x)^2 dx},$$

y esta norma resulta tener propiedades completamente análogas a las de la norma en \mathbb{R}^3 . Por ejemplo, se cumple que $\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|$, y podemos decir que dos funciones $f, g \in X$ están próximas cuando $\|f-g\|$ es pequeño, lo que permite definir la convergencia de una sucesión de funciones de X exactamente en los mismos términos en que podemos definir la convergencia de una sucesión en \mathbb{R}^3 , cambiando una norma por la otra.

Más aún, en \mathbb{R}^3 tenemos definido el producto escalar dado por

$$x \cdot y = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3,$$

y en X podemos definir análogamente el producto escalar

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x) dx,$$

que resulta tener propiedades análogas a las del producto en \mathbb{R}^3 . Incluso nos permite definir el “ángulo” que forman dos funciones no nulas como

$$\widehat{f, g} = \frac{\langle f, g \rangle}{\|f\|\|g\|}$$

y podemos decir que dos funciones son “ortogonales” si $\langle f, g \rangle = 0$. Una diferencia que puede parecer sustancial entre los espacios \mathbb{R}^3 y X es que el primero es un espacio de puntos “de tres dimensiones”, mientras que el segundo, como la mayoría de los espacios funcionales de interés, tiene “infinitas dimensiones”. Sin embargo, la razón por la que todo esto no es un mero juego de palabras es que esa diferencia no es sustancial en absoluto, sino que los conceptos topológicos que estudiamos en [ITAn] y en [IC] (no sólo los de límite y continuidad, sino también otros que allí tratamos muy superficialmente, como los de “conjunto abierto, cerrado, compacto”, etc.) se pueden definir en un contexto general aplicable igualmente a espacios de dimensión finita como \mathbb{R}^3 o a espacios de dimensión infinita como $C([a, b])$.

En cambio, hay una diferencia entre \mathbb{R}^3 y X que sí que es sustancial, y es que \mathbb{R}^3 es completo, es decir, que en él toda sucesión de Cauchy es convergente, mientras que esto no es cierto en X . Por ese motivo, sucede que X no es un “buen espacio funcional” para trabajar, pero puede sustituirse por un espacio mayor, lo que se conoce como el espacio $L^2([a, b])$, que contiene a X como

subespacio denso, lo cual significa que todo elemento de $L^2([a, b])$ es el límite de una sucesión en X , y que sí que es completo. La relación entre $L^2([a, b])$ y X es, pues, similar, a la relación que hay entre \mathbb{R} y \mathbb{Q} .

La parte “fácil” de la teoría de Fourier consiste en demostrar que las funciones

$$e_n(x) = \frac{2}{T} \cos \frac{2n\pi x}{T}, \quad \bar{e}_n(x) = \frac{2}{T} \operatorname{sen} \frac{2n\pi x}{T}, \quad n = 1, 2, \dots$$

junto con $e_0(x) = 1/T$ en $L^2([a, b])$, son el análogo a los vectores

$$e_1 = (1, 0, 0), \quad e_2 = (0, 1, 0), \quad e_3 = (0, 0, 1)$$

en \mathbb{R}^3 , es decir, tienen norma 1 y son ortogonales dos a dos, y además, igual que todo $v \in \mathbb{R}^3$ se puede expresar de forma única como

$$v = v_1 e_1 + v_2 e_2 + v_3 e_3,$$

donde, concretamente, $v_i = v \cdot e_i$, también se cumple que toda $f \in L^2([a, b])$ se puede expresar de forma única como

$$f = u_0 e_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (u_n e_n + v_n \bar{e}_n),$$

donde los coeficientes vienen dados, concretamente, por $u_i = \langle f, e_i \rangle$, $v_i = \langle f, \bar{e}_i \rangle$. Extrayendo las constantes $2/T$ de las integrales que definen los productos escalares llegamos a que f admite un único desarrollo en serie de Fourier, salvo por un detalle fundamental, y es que, en principio, “lo fácil” es demostrar que cada serie de Fourier converge a la función f que la define respecto de la norma de $L^2([a, b])$, lo cual no garantiza que la serie converja en ningún punto en particular. Decimos que ésta es la parte “fácil” porque estos resultados pueden demostrarse a partir de la teoría general sobre espacios de Hilbert (espacios dotados de un producto escalar en los que toda sucesión de Cauchy es convergente) que expondremos en la sección 3.5, mientras que estudiar la convergencia puntual de las series de Fourier (no la mera convergencia en la norma de $L^2([a, b])$) requiere argumentos específicos no triviales que van más allá de lo que Fourier justificó. La primera condición suficiente sobre una función para que su serie de Fourier converja puntualmente la dio Dirichlet en 1829. Nosotros probaremos la convergencia de las series de Fourier bajo hipótesis algo más fuertes. Por ejemplo, veremos que si una función f es continua en $[a, b]$, cumple $f(a) = f(b)$ y es derivable salvo a lo sumo en un número finito de puntos, donde f es derivable por la izquierda y por la derecha, entonces su serie de Fourier converge a f en todos los puntos. Esto basta para justificar la convergencia de la serie de Fourier que hemos considerado en el ejemplo precedente.

En los dos primeros capítulos de este libro generalizaremos los conceptos topológicos expuestos en [ITAn] y en [IC] entroncándolos por una parte con la teoría axiomática de conjuntos para completar su fundamentación rigurosa, y generalizándolos por otra para que sean aplicables a espacios de cualquier naturaleza, no necesariamente espacios de puntos, como son los espacios $C([a, b])$ o

$L^2([a, b])$. El estudio de este tipo de espacios en los que las funciones son tratadas “como puntos” está en la base de lo que se conoce como *análisis funcional*, el cual a su vez está en la base de teorías como la teoría de distribuciones, que permite formalizar con pleno rigor la idea de Euler de que una ecuación en derivadas parciales puede tener “soluciones débiles” que no sean necesariamente derivables, e incluso que no sean “funciones” en el sentido usual (moderno) de la palabra. Sin embargo, sólo en el capítulo IX veremos un contexto concreto que muestra el interés de trabajar con espacios de funciones.

A partir de la sección 9.4 generalizamos los desarrollos en serie de Fourier a dimensiones superiores. La idea fundamental es que las funciones desarrollables en serie de Fourier son necesariamente periódicas, pero una función periódica definida sobre la recta real puede verse también como una función definida sobre la circunferencia unitaria S^1 , y lo que haremos en la sección 9.4 es demostrar que las funciones de los espacios $L^2(S^n)$, donde S^n es la esfera de dimensión n , admiten desarrollos análogos a las series de Fourier.

El hecho de que los sonidos (no ruidos cualesquiera, sino los sonidos a los que el oído les asigna un tono determinado) se correspondan con vibraciones periódicas del aire representables como series de Fourier llevó a llamar *harmónicos* a las funciones de la forma

$$a_n \cos \frac{2n\pi t}{T}, \quad b_n \sin \frac{2n\pi t}{T},$$

porque representan sonidos “que combinan bien” con el sonido básico de frecuencia $1/T$, y ello llevó a su vez a llamar *harmónicos esféricos* a las funciones análogas a éstas en que pueden descomponerse las funciones de los espacios $L^2(S^n)$. Según veremos, dichas funciones son las restricciones a la esfera de los polinomios $f \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_{n+1}]$ que cumplen la relación

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_{n+1}} = 0,$$

donde Δf recibe el nombre de “laplaciano” de la función f . Y por este motivo — un tanto rebuscado— las funciones que cumplen la ecuación de Laplace $\Delta f = 0$ se conocen ahora como *funciones armónicas*, y así resulta que lo que se conoce comúnmente como *análisis armónico* no es el estudio de las funciones armónicas, sino el estudio de versiones más generales, más o menos abstractas, de la teoría de series de Fourier.

Las funciones armónicas las estudiaremos en el capítulo VIII, especialmente en la sección 8.5, donde veremos, entre otras cosas, que una función armónica se caracteriza por que en cada punto toma el valor medio de los valores que toma en cualquier esfera que rodee al punto contenida en su dominio, y esto a su vez tiene muchas consecuencias. Las funciones armónicas aparecen en muchos contextos. Por ejemplo, es fácil ver que las ecuaciones de Cauchy-Riemann implican que la parte real y la parte imaginaria de una función holomorfa definida en un abierto de \mathbb{C} son funciones armónicas (o, más sencillamente, que las funciones holomorfas son armónicas, si definimos una función armónica con valores

complejos como una función cuya parte real e imaginaria son ambas funciones armónicas). También veremos que el potencial gravitatorio definido por una distribución de masas es una función armónica en los puntos donde no hay masas.

El capítulo IX está dedicado al análisis armónico. En la sección 9.6 mostraremos armónicos esféricos concretos que proporcionan desarrollos en serie análogos a las series de Fourier de las funciones de $L^2(S^2)$, y en el apéndice B mostraremos algunas aplicaciones a la gravitación. Concretamente, estudiaremos cómo varía la intensidad de la gravedad terrestre en función de la latitud teniendo en cuenta el achatamiento de la Tierra y estimaremos la precesión de los perihelios de cada planeta del sistema solar provocada por la influencia gravitatoria de los demás planetas.

Finalmente, en el capítulo X profundizamos en el análisis de las funciones de una variable compleja yendo bastante más allá de lo expuesto en el capítulo VII de [IC]. Las funciones holomorfas (es decir, las funciones derivables en un abierto del plano complejo) presentan propiedades muy distintas a las de las funciones derivables de variable real. Las más importantes las descubrió Cauchy y las fue publicando en una serie de artículos entre 1820 y 1835. Durante un tiempo no fueron muy valorados por los matemáticos de su época, porque se veían como meras técnicas de integración, revolucionarias en algunos aspectos, pero meras técnicas de integración. Consideremos por ejemplo la integral:

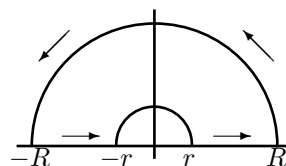
$$\int_0^{+\infty} \frac{\log x}{(x^2 + 1)^2} dx.$$

No es fácil de calcular mediante las técnicas del análisis real, pero en [IC] vimos cómo Euler calculó las integrales de Fresnel mediante un cambio de variable “imaginario” y que la forma de dar rigor a su argumento consiste en extender el integrando a una función holomorfa y calcular su integral a lo largo de un arco cerrado. Para la integral propuesta podemos emplear una técnica similar, pero la situación es más complicada. Podemos extender el integrando a una función holomorfa

$$f(z) = \frac{\log z}{(z^2 + 1)^2},$$

pero con ciertas salvedades. Por una parte, veremos que no es posible definir un logaritmo holomorfo (ni siquiera continuo) sobre todo $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, pero veremos que sí que podemos obtener una función holomorfa $\log z$ definida en el plano complejo menos cualquier semirrecta de origen 0 prefijada

Si consideramos que el logaritmo está definido en el abierto Ω que resulta de eliminar, por ejemplo, el semieje imaginario negativo, el procedimiento para calcular la integral dada consiste en considerar la integral de f a lo largo de un arco cerrado como el



que muestra la figura. Si la función $f(z)$ fuera holomorfa en Ω , el teorema de Cauchy [IC 7.5] nos permitiría concluir que la integral sobre el arco es nula, pero no es el caso, porque $f(z)$ no está definida en $z = i$. Se dice que i es una

“singularidad aislada” de f , en el sentido de que f no está definida en i , pero es derivable en todos los puntos de alrededor de i . Cauchy probó (una versión particular de) el teorema [IC 7.5] que hoy lleva su nombre en 1825, y en 1831 encontró una generalización que es aplicable al caso que nos ocupa, (una versión particular de) lo que hoy se conoce como el “teorema de los residuos”.

El teorema de los residuos afirma que si una función es holomorfa en un abierto estrellado Ω —esta hipótesis se puede relajar— salvo a lo sumo en algunas singularidades aisladas, la integral de f a lo largo de un arco cerrado contenido en Ω que no pase por ninguna de estas singularidades —en principio un arco que rodee una región del plano, sin cortarse a sí mismo o dar varias vueltas, aunque esta hipótesis también se puede relajar—, la integral depende únicamente de las singularidades de f rodeadas por el arco, y es igual a $2\pi i$ multiplicado por la suma de los “residuos” de dichas singularidades.

¿Y qué es el residuo de una singularidad? En [IC 7.21] probamos que si una función f es holomorfa en un punto z_0 , admite a su alrededor un desarrollo en serie de Taylor:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n,$$

para ciertos números complejos a_n unívocamente determinados por f . Veremos que si f tiene una singularidad aislada en z_0 , entonces admite igualmente lo que se conoce como un desarrollo en serie de Laurent:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n,$$

también con coeficientes unívocamente determinados. El residuo de f es simplemente el coeficiente a_{-1} . En nuestro ejemplo sucede que

$$\begin{aligned} \frac{\log z}{(z^2 + 1)^2} &= -\frac{i\pi/8}{(z - i)^2} + \frac{(\pi + 2i)/8}{z - i} + \left(-\frac{3}{8} + \frac{3i\pi}{32}\right) + \left(-\frac{\pi}{16} - \frac{19i}{48}\right)(z - i) + \\ &\left(\frac{35}{96} - \frac{5i\pi}{128}\right)(z - i)^2 + \left(\frac{3\pi}{128} + \frac{101i}{320}\right)(z - i)^3 + \left(-\frac{511}{1920} + \frac{7i\pi}{512}\right)(z - i)^4 + \dots, \end{aligned}$$

de modo que el residuo es $(\pi + 2i)/8$, luego el teorema de los residuos nos permite concluir que la integral de f vale

$$2\pi i \frac{\pi + 2i}{8},$$

independientemente de r y R (con tal de que $r < 1 < R$, para que la singularidad i quede rodeada por el arco). Un cálculo rutinario muestra que las integrales sobre las semicircunferencias tienden a 0 cuando r tiende a 0 y R tiende a $+\infty$, así como que las integrales sobre los segmentos tienden a

$$2 \int_0^{+\infty} \frac{\log x}{(x^2 + 1)^2} dx + \pi i \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^2} = 2\pi i \frac{\pi + 2i}{8},$$

de donde, separando la parte real y la imaginaria, podemos concluir que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\log x}{(x^2 + 1)^2} dx = -\frac{\pi}{4} \quad y \quad \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^2} = \frac{\pi}{4}.$$

En el capítulo X daremos los detalles de este ejemplo (página 482). La razón de fondo por la que sólo el residuo a_{-1} es relevante en el cálculo de integrales es que, en una serie de Laurent, todos los términos $a_n(z - z_0)^n$ tienen primitiva en un entorno de z_0 (a saber, $a_n(z - z_0)^{n+1}/(n+1)$) excepto cuando $n = -1$, lo que hace que, salvo en el caso exceptuado, las integrales de todos los términos de la serie alrededor de arcos que rodeen únicamente la singularidad z_0 sean nulas y sólo influya el término del residuo.

Los trabajos de Cauchy eran “puramente analíticos”, y fueron Gauss y, sobre todo, un alumno suyo, Bernhard Riemann, quienes pusieron de relieve la “geometría subyacente” al análisis complejo. La mayor parte del trabajo de Riemann sobre análisis complejo queda fuera del alcance de este libro, pues requiere un nivel de conocimiento de la geometría diferencial mucho mayor que el que desarrollaremos aquí, pero en el capítulo X presentaremos una pequeña parte de su trabajo en relación con la que hoy se conoce como función ζ de Riemann. En principio se define como

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z},$$

pero la serie sólo converge en el semiplano $\operatorname{Re} z > 1$, donde define una función holomorfa. Sin embargo, Riemann demostró que puede extenderse (de forma única, por el principio de prolongación analítica [IC 7.27]) a una función holomorfa en todo el plano complejo salvo en $z = 1$, donde tiende a ∞ . Además, esta extensión satisface una ecuación funcional, que se expresa de forma más simple en términos de la función

$$\xi(z) = \pi^{-z/2} \Pi\left(\frac{z}{2}\right) (z-1)\zeta(z),$$

donde $\Pi(z)$ es la función factorial [ITAn 8.16]. La función ξ es holomorfa en todo el plano complejo y satisface la ecuación funcional

$$\xi(z) = \xi(1-z),$$

lo que significa que es simétrica respecto de la recta $\operatorname{Re} z = 1/2$. Usando esta ecuación funcional veremos que la función ζ se anula en los enteros pares negativos, que se conocen como *ceros triviales* de la función ζ , y que cualquier otro cero de la función ζ tiene que estar necesariamente en la llamada “banda crítica” $0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1$. Puede probarse que hay infinitos ceros no triviales en la “recta crítica” $\operatorname{Re} z = 1/2$, y Riemann conjeturó que no hay más:

Hipótesis de Riemann *Todos los ceros no triviales de la función ζ de Riemann se encuentran en la recta crítica $\operatorname{Re} z = 1/2$.*

La hipótesis de Riemann es uno de los problemas abiertos más destacados de la matemática actual, y tiene repercusiones en las áreas más dispares. En 1859 Riemann esbozó la prueba de unos profundos resultados que relacionan los ceros no triviales de la función zeta con la distribución de los números primos, resultados que no fueron demostrados con rigor hasta 1896, cuando Jacques Hadamard y Charles Jean de la Vallée Poussin publicaron pruebas de forma independiente. Para profundizar en este tema remitimos al lector a mi libro de Teoría analítica de números. Aquí nos limitaremos a probar la ecuación funcional de la función zeta y otra ecuación análoga para las funciones L de Dirichlet definidas en [ITAn 8.33].

Capítulo I

Los números reales

En la sección 1.5 de [ITAl] (o en la sección 1.1 de [ITAn]) introdujimos el cuerpo \mathbb{R} de los números reales como un cuerpo ordenado completo. Allí explicamos que estas propiedades determinan “en esencia” un único cuerpo, donde “en esencia” significa “único salvo isomorfismo”, es decir, que dos cuerpos ordenados completos cualesquiera son necesariamente isomorfos, luego son “el mismo cuerpo” a todos los efectos prácticos. La unicidad se debe a que, según vimos, todo elemento de un cuerpo ordenado completo está completamente determinado por una expresión decimal, y basta identificar cada elemento de un cuerpo con el elemento del otro con el mismo desarrollo decimal. En este capítulo vamos a analizar con detalle estos hechos.

1.1 Cuerpos ordenados completos

Introducimos en primer lugar algunos conceptos básicos sobre conjuntos ordenados. El concepto de conjunto total o parcialmente ordenado lo hemos introducido en [Al 1.16], donde hemos definido también los conceptos de cota superior e inferior, máximo y mínimo de un subconjunto de un conjunto parcialmente ordenado. Introducimos ahora el concepto de intervalo:

Definición 1.1 Sea X un conjunto totalmente ordenado. Llamaremos *intervalos* en X a los conjuntos siguientes, para todo $a, b \in X$:

$$\begin{aligned}]a, b[&= \{x \in X \mid a < x < b\}, & [a, b] &= \{x \in X \mid a \leq x \leq b\}, \\]a, b] &= \{x \in X \mid a < x \leq b\}, & [a, b[&= \{x \in X \mid a \leq x < b\}, \\]-\infty, b[&= \{x \in X \mid x < b\}, &]a, +\infty[&= \{x \in X \mid a < x\}, \\]-\infty, b] &= \{x \in X \mid x \leq b\}, & [a, +\infty[&= \{x \in X \mid a \leq x\}, \\ & &]-\infty, +\infty[&= X. \end{aligned}$$

El elemento a (en los intervalos en los que interviene) se llama *extremo inferior* del intervalo, mientras que b (cuando procede) es el *extremo superior*.

Los intervalos de la forma $]a, b[$, incluso si a o b es infinito, se llaman *intervalos abiertos*, mientras que los de tipo $[a, b]$ se llaman *intervalos cerrados*.

Observemos que si X tiene máximo M , entonces

$$]a, +\infty[=]a, M], \quad [a, +\infty[= [a, M],$$

y si tiene mínimo m entonces

$$]-\infty, b[= [m, b[, \quad]-\infty, b] = [m, b],$$

y si tiene máximo y mínimo entonces $]-\infty, +\infty[= [m, M]$, por lo que los intervalos con extremos infinitos sólo son relevantes en ausencia de máximo o de mínimo. En tal caso son conjuntos no acotados, y por ello se llaman *intervalos no acotados*.

Por conveniencia repetimos aquí la definición [G 2.8] de supremo e ínfimo:

Definición 1.2 Sea A un conjunto parcialmente ordenado y $X \subset A$.

Un elemento $s \in A$ es un *supremo* de X si es una cota superior de X y, para cualquier otra cota superior c de X , se cumple que $s \leq c$. En otras palabras, el supremo de X es la menor cota superior de X .

Un elemento $i \in A$ es un *ínfimo* de X si es una cota inferior de X y, para cualquier otra cota inferior c de X , se cumple que $c \leq i$. Así, el ínfimo de X es la mayor cota inferior de X .

Tal y como señalábamos en [G], si un conjunto X tiene supremo éste es único, pues dos supremos s y s' son ambos cotas superiores de X , y la definición implica entonces que $s \leq s'$ y $s' \leq s$, luego $s = s'$. Lo mismo vale para los ínfimos, por lo que podemos usar las notaciones $\sup X$ e $\inf X$ para referirnos al supremo y al ínfimo de un conjunto, aunque teniendo en cuenta de que pueden no existir.

Teorema 1.3 Si X es un conjunto totalmente ordenado, las afirmaciones siguientes son equivalentes:

- a) Todo subconjunto de X no vacío y acotado superiormente tiene supremo.
- b) Todo subconjunto de X no vacío y acotado inferiormente tiene ínfimo.
- c) Un conjunto $I \subset X$ es un intervalo si y sólo si cuando $a < c < b$ con $a, b \in I$ y $c \in X$, entonces $c \in I$.
- d) Si $X = A \cup B$ de modo que $A \neq \emptyset \neq B$ y todo elemento de A es menor que todo elemento de B , entonces, o bien A tiene máximo, o bien B tiene mínimo.

DEMOSTRACIÓN: a) \Rightarrow b) Sea B un subconjunto de X no vacío y acotado inferiormente. Sea A el conjunto de las cotas inferiores de B . Como B está acotado, A no es vacío, y como B no es vacío, cualquiera de sus elementos es

una cota superior de A , luego A tiene supremo i , que es el ínfimo de B , pues todo elemento $b \in B$ es una cota superior de A , por lo que $i \leq b$, y si c es una cota inferior de B , entonces $c \in A$, luego $c \leq i$.

Análogamente se prueba que b) \Rightarrow a). Veamos que a) y b) implican c). Es inmediato que todo intervalo tiene la propiedad indicada. Se trata de probar el recíproco. Supongamos, pues que I cumple la condición. Si $I = \emptyset$, entonces $I =]-\infty, +\infty[$ si $X = \emptyset$, o bien $I =]a, a[$ si existe un $a \in X$, luego es un intervalo.

Supongamos, pues, que $I \neq \emptyset$. Si I no está acotado ni superior ni inferiormente, entonces $I =]-\infty, +\infty[$, pues, para todo $x \in X$, como no es ni una cota superior ni una cota inferior de I , existen $a, b \in I$ tales que $a < x < b$, luego $x \in I$.

Si I tiene cota superior pero no inferior, tomamos $b = \sup I$ y observamos que $] -\infty, b[\subset I \subset] -\infty, b]$, con lo que I será uno de los dos intervalos según si $b \notin I$ o bien $b \in I$.

En efecto, si $x \in] -\infty, b[$, como x no es cota inferior de I existe un $a \in I$ tal que $a < x$ y, como b es el supremo de I , no puede ser que x sea una cota superior, luego existe un $c \in I$ tal que $a < x < c$, luego $x \in I$. La otra inclusión es trivial, puesto que b es una cota superior.

Los casos restantes (combinaciones de que I tenga o no tenga cota superior e inferior) se tratan análogamente.

c) \Rightarrow d) Si tenemos $u < x < v$ con $u, v \in A$ y $x \in X$, no puede ser $x \in B$, puesto que tendría que ser mayor que v , luego tiene que ser $x \in A$, luego A es un intervalo, y análogamente se razona que B lo es. Es claro que la única opción para A es ser un intervalo de la forma $A =]-\infty, c[$ o bien $A =]-\infty, c]$, en cuyo caso, B tiene que ser respectivamente de la forma $B = [c, +\infty[$ o bien $B =]c, +\infty[$. En el primer caso B tiene mínimo, y en el segundo A tiene máximo.

d) \Rightarrow a) Sea $C \subset X$ un conjunto no vacío y acotado superiormente. Llamemos A al conjunto de elementos de X que no son cotas superiores de C y B al conjunto de los elementos que sí que lo son. Obviamente $X = A \cup B$ y si $a \in A$ y $b \in B$, tenemos que a no es una cota superior de C , luego existe un $c \in C$ tal que $a < c$ y, como b es cota superior, $a < c \leq b$. Por d) existe $s \in X$ que es el máximo de A o bien el mínimo de B . Si es el mínimo de B , entonces es la menor cota superior de C , luego s es el supremo de C . Si s es el máximo de A , entonces existe un $c \in C$ tal que $s < c$, pero $c \in B$, luego c es una cota superior de C , luego c es el máximo, y en particular el supremo, de C . ■

Definición 1.4 Un conjunto totalmente ordenado X es *completo* si cumple cualquiera de las afirmaciones del teorema anterior.

Notemos que si X tiene máximo y mínimo la completitud equivale a que todo subconjunto de X tenga supremo e ínfimo, pues todo conjunto está acotado superior e inferiormente y \emptyset tiene al mínimo por supremo y al máximo por ínfimo.

Ejemplo El cuerpo \mathbb{Q} de los números racionales no es completo, como se pone de manifiesto considerando, por ejemplo, el conjunto

$$X = \{q \in \mathbb{Q} \mid q^2 < 2\}.$$

En términos del conjunto \mathbb{R} de los números reales que nos proponemos definir (pero que contamos con que el lector conoce ya), se trata del conjunto de los números racionales contenidos en el intervalo $]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[\subset \mathbb{R}$. Es un conjunto acotado superior e inferiormente (por ejemplo por 2 y -2), pero no tiene ni supremo ni ínfimo en \mathbb{Q} . El supremo “debería ser” $\sqrt{2}$, pero éste no es un número racional.

También es un ejemplo de conjunto que cumple la condición c) del teorema anterior y que no es un intervalo, porque no tiene extremos. La propiedad d) falla también, como se pone de manifiesto al considerar los conjuntos

$$A = \{q \in \mathbb{Q} \mid q < 0 \text{ o } q^2 < 2\}, \quad B = \{q \in \mathbb{Q} \mid q^2 > 2\},$$

que en términos de intervalos en \mathbb{R} se pueden expresar como

$$A =]-\infty, \sqrt{2}[\cap \mathbb{Q}, \quad B =]\sqrt{2}, +\infty[\cap \mathbb{Q}.$$

Así $\mathbb{Q} = A \cup B$ y todos los elementos de A son menores que los de B , pero no hay ningún número racional que marque el final de A y el principio de B . De una forma u otra, todos estos ejemplos muestran que \mathbb{Q} “tiene agujeros”. Por el contrario, tal y como se discute en el capítulo II de [G], un cuerpo ordenado completo se identifica con los puntos de una recta “sin agujeros”. ■

Como hemos indicado, nuestro propósito es demostrar que dos cuerpos ordenados completos cualesquiera son isomorfos, para lo cual necesitamos el concepto de “isomorfismo de anillos ordenados”:

Definición 1.5 Si A y B son anillos ordenados, $f : A \rightarrow B$ es un *homomorfismo* (*monomorfismo*, *epimorfismo*, *isomorfismo*) de anillos ordenados si es un homomorfismo (monomorfismo, epimorfismo, isomorfismo) de anillos que además es creciente, es decir, tal que si $a_1 \leq a_2$ entonces $f(a_1) \leq f(a_2)$.

Notemos que un monomorfismo de anillos ordenados cumple de hecho que $a_1 \leq a_2$ si y sólo si $f(a_1) \leq f(a_2)$, pues si se cumple $f(a_1) \leq f(a_2)$, necesariamente $a_1 \leq a_2$, ya que en caso contrario sería $a_2 < a_1$ y entonces $f(a_2) < f(a_1)$ (la desigualdad no estricta se cumple por ser creciente y es estricta por la inyectividad).

Según hemos visto tras la definición [A1 3.47] todo anillo ordenado R tiene característica 0, lo que se traduce en que contiene una copia isomorfa del anillo de los números enteros. Más precisamente, esto significa que la aplicación dada por $m \mapsto m \cdot 1$ define un monomorfismo $f : \mathbb{Z} \rightarrow R$ de anillos ordenados y, si R es un cuerpo, se extiende a un monomorfismo de cuerpos ordenados $f : \mathbb{Q} \rightarrow R$, concretamente al dado por

$$f(m/n) = \frac{m \cdot 1}{n \cdot 1}.$$

Claramente es el único posible pues todo monomorfismo de cuerpos tiene que cumplir $f(1) = 1$, y esto implica que coincide sobre \mathbb{Z} con el que acabamos de definir y a su vez esto hace que coincida sobre todo \mathbb{Q} . Por lo tanto, en la práctica podemos considerar que todo cuerpo ordenado contiene a \mathbb{Q} como subcuerpo.

En la sección 2.2 de [G] hemos construido el cuerpo \mathbb{R} de los números reales y hemos probado que es un cuerpo ordenado completo (es decir, un cuerpo ordenado que es completo como conjunto totalmente ordenado). La construcción es un tanto técnica, pero a continuación vamos a ver que los detalles son irrelevantes porque, como ya hemos anticipado, todos los cuerpos ordenados completos son isomorfos. Esto se traduce en que lo único relevante de la construcción de \mathbb{R} que hemos dado en [G] es que prueba la existencia de un cuerpo con dichas características, pero en la práctica podemos “olvidar” los detalles porque todas las propiedades relevantes de \mathbb{R} pueden deducirse del hecho de que es un cuerpo ordenado completo, sin que importe la forma en concreto en la que hemos definido sus elementos, o su relación de orden, o su suma o su producto. Nada de lo que diremos a continuación depende de la construcción presentada en [G].

Recordemos ahora la propiedad arquimediana que estudiamos en la sección 1.4 de [ITAI]:

Definición 1.6 Un anillo ordenado R es *arquimediano* si para cualquier par de elementos $\epsilon, M > 0$ existe un número natural n tal que $M < n\epsilon$.

Esto significa que si vamos avanzando a pasos de longitud $\epsilon > 0$, es decir, si vamos calculando

$$0 < \epsilon < 2\epsilon < 3\epsilon < 4\epsilon < \dots$$

por pequeña que sea la longitud del paso, tras un número finito de pasos podremos superar cualquier meta M que nos marquemos.

Es evidente que todo subanillo de un anillo arquimediano es también arquimediano.

Teorema 1.7 *Todo anillo ordenado completo es arquimediano.*

DEMOSTRACIÓN: Sea R un anillo ordenado completo. Si no es arquimediano, existen $\epsilon, M > 0$ tales que $n\epsilon \leq M$ para todo número natural n . Esto implica que el conjunto $X = \{n\epsilon \mid n \in \mathbb{N}\}$ está acotado superiormente (y obviamente no es vacío), luego tiene un supremo s . Entonces $s - \epsilon$ no es cota superior de X , luego existe un número natural n tal que $s - \epsilon < n\epsilon \leq s$, pero entonces $s < (n + 1)\epsilon \in X$ y s no es una cota superior de X , lo cual es absurdo. ■

En los cuerpos ordenados la propiedad arquimediana tiene una caracterización muy simple:

Teorema 1.8 *Un cuerpo ordenado R es arquimediano si y sólo si \mathbb{N} no está acotado superiormente en R .*

DEMOSTRACIÓN: Si R cumple la definición de cuerpo arquimediano y tomamos $M \in R$, o bien $M \leq 0$, en cuyo caso obviamente no es una cota superior de \mathbb{N} , o bien, aplicando la propiedad arquimediana con $\epsilon = 1$, existe un número natural n tal que $M < n$, luego M tampoco es una cota superior de \mathbb{N} .

Recíprocamente, si R cumple esta propiedad y $\epsilon, M > 0$, entonces $M/\epsilon > 0$ no es una cota superior de \mathbb{N} , luego existe un número natural $M/\epsilon < n$, luego $M < n\epsilon$. ■

Obviamente \mathbb{Q} es un cuerpo ordenado arquimediano, pues si $m/n \geq 0$, entonces $m/n < m + 1$.

Entre otros conceptos asociados a la propiedad arquimediana está el de ‘parte entera’:

Teorema 1.9 *Si R es un anillo ordenado arquimediano, para cada $x \in R$ existe un único $m \in \mathbb{Z}$ tal que $m \leq x < m + 1$.*

DEMOSTRACIÓN: Si $x \geq 0$ tomamos el mínimo número natural k tal que $x < k$, que existe por la propiedad arquimediana. Entonces $k - 1 \leq x < k$. Si $x < 0$, entonces $-x > 0$ y tomamos el mínimo número natural k tal que $-x \leq k$, con lo que $k - 1 < -x \leq k$, y a su vez $-k \leq x < -k + 1$. En ambos casos hemos encontrado un entero m que cumple lo pedido ($m = k - 1$ en el primer caso y $m = -k$ en el segundo).

Si también $m' \leq x < m' + 1$, pero $m \neq m'$, podemos suponer que $m < m'$, pero entonces $m + 1 \leq m'$ y tenemos una contradicción:

$$x < m + 1 \leq m' \leq x.$$

Esto prueba la unicidad. ■

Definición 1.10 Si R es un anillo ordenado arquimediano, llamaremos *parte entera* en R a la función $E : R \rightarrow \mathbb{Z}$ que a cada $x \in R$ le asigna el único número entero que cumple $E[x] \leq x < E[x] + 1$.

El elemento $F[x] = x - E[x]$ se llama *parte fraccionaria* de x , de modo que todo $x \in R$ se descompone de forma única como

$$x = E[x] + F[x], \quad \text{con } E[x] \in \mathbb{Z}, \quad 0 \leq F[x] < 1.$$

En el caso de un cuerpo podemos decir más:

Teorema 1.11 *Si R es un cuerpo ordenado arquimediano, entonces, para todo par de elementos $a < b$ en R existe un $q \in \mathbb{Q}$ tal que $a < q < b$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea n un número natural tal que

$$\frac{1}{b - a} < n,$$

con lo que $1/n < b - a$. Sea $m = E[na] + 1$, de modo que $m - 1 \leq na < m$, luego

$$a < \frac{m}{n} = \frac{m-1}{n} + \frac{1}{n} < a + b - a = b.$$

Así, $q = m/n$ cumple $a < q < b$. ■

Ahora ya podemos probar que dos cuerpos ordenados completos cualesquiera son isomorfos. Más aún, contienen copias isomorfas de cualquier otro cuerpo ordenado arquimediano:

Teorema 1.12 *Si K, R son cuerpos ordenados, K es arquimediano y R es completo, existe un único monomorfismo de cuerpos ordenados $\phi : K \rightarrow R$, que será un isomorfismo si y sólo si K también es completo.*

DEMOSTRACIÓN: Sabemos que ambos cuerpos contienen un (único) subcuerpo ordenado isomorfo a \mathbb{Q} , digamos $Q_1 \subset K$ y $Q_2 \subset R$. Por lo tanto, existe un isomorfismo de cuerpos ordenados $\phi_0 : Q_1 \rightarrow Q_2$, que también es único, pues si hubiera otro, digamos ϕ_1 , necesariamente $\phi_0(1) = \phi_1(1) = 1$, de donde ϕ_0 y ϕ_1 coinciden sobre todos los números naturales, luego también sobre los números enteros y, por consiguiente, sobre todos los números racionales. Vamos a probar que ϕ_0 se extiende a un monomorfismo $\phi : K \rightarrow R$.

Dado $\alpha \in K$, consideramos el conjunto $I_\alpha = \{q \in Q_1 \mid q \leq \alpha\}$. El teorema 1.11 implica que I_α no es vacío, y la propiedad arquimediana implica que está acotado superiormente por cualquier número natural $n_\alpha > \alpha$. Por consiguiente, el conjunto $\phi_0[I_\alpha] \subset Q_2$ es no vacío, y está acotado superiormente por $\phi_0(n_\alpha) \in R$. Como R es completo tiene un supremo, al que llamaremos $\phi(\alpha) = \sup \phi_0[I_\alpha]$.

Así tenemos definida la aplicación ϕ . Veamos en primer lugar que extiende a ϕ_0 , es decir, que si $\alpha \in Q_1$, entonces $\phi(\alpha) = \phi_0(\alpha)$. En efecto, en tal caso α es el máximo de I_α , luego $\phi_0(\alpha)$ es el máximo de $\phi_0[I_\alpha]$, luego también el supremo, luego $\phi(\alpha) = \phi_0(\alpha)$.

Ahora vamos a demostrar que si $\alpha < \beta$, entonces $\phi(\alpha) < \phi(\beta)$. En particular tendremos así que ϕ es una aplicación inyectiva.

En efecto, por 1.11 existen $q, q' \in Q_1$ tales que $\alpha < q < q' < \beta$. Entonces q es una cota superior de I_α , pero no de I_β (porque $q' \in I_\beta$), luego $\phi_0(q)$ es una cota superior de $\phi_0[I_\alpha]$, luego, por definición de supremo, tenemos que $\phi(\alpha) \leq \phi_0(q) < \phi_0(q') \leq \phi(\beta)$.

Notemos que, de hecho, se cumple que $\alpha < \beta$ si y sólo si $\phi(\alpha) < \phi(\beta)$, pues si $\phi(\alpha) < \phi(\beta)$ tiene que ser $\alpha < \beta$, ya que en otro caso sería $\beta \leq \alpha$ y, por la parte ya probada, $\phi(\beta) \leq \phi(\alpha)$.

Ahora probamos que si K es completo, entonces ϕ es biyectiva. Sólo tenemos que ver que es suprayectiva, para lo cual tomamos $\beta \in R$. Los mismos razonamientos que hemos aplicado a K nos dan que el conjunto $J_\beta = \{q \in Q_2 \mid q \leq \beta\}$ es no vacío y está acotado superiormente por un número natural, por lo que el conjunto $\phi_0^{-1}[J_\beta]$ también es no vacío y está acotado superiormente por un número natural, luego podemos considerar su supremo $\alpha = \sup \phi_0^{-1}[J_\beta]$. Vamos a probar que $\phi(\alpha) = \beta$.

Si fuera $\phi(\alpha) < \beta$, existiría $q \in \mathcal{Q}_2$ tal que $\phi(\alpha) < q < \beta$, luego $q \in J_\beta$ y $\phi(\alpha) < \phi_0(\phi_0^{-1}(q)) = \phi(\phi_0^{-1}(q))$, luego $\alpha < \phi_0^{-1}(q) \in \phi_0^{-1}[J_\beta]$ (porque ya hemos probado que ϕ conserva el orden), en contradicción con que α es el supremo de este conjunto. Por lo tanto, $\beta \leq \phi(\alpha)$. Si fuera $\beta < \phi(\alpha)$, tomamos $\beta < q < \phi(\alpha)$, con $q \in \mathcal{Q}_2$, de modo que $\phi_0^{-1}(q) < \alpha$, luego existe un $q' \in \phi_0^{-1}[J_\beta]$ tal que $\phi_0^{-1}(q) < q'$, luego $q < \phi_0(q') \in J_\beta$, luego $q < \phi_0(q') \leq \beta$, contradicción. Así pues, $\phi(\alpha) = \beta$.

Sólo falta probar que ϕ es un homomorfismo de anillos (sin suponer que K es completo). Dados $\alpha, \beta \in K$, si $\phi(\alpha + \beta) < \phi(\alpha) + \phi(\beta)$, llamamos

$$\epsilon = \phi(\alpha) + \phi(\beta) - \phi(\alpha + \beta) > 0,$$

y tomamos

$$\phi(\alpha) - \frac{\epsilon}{2} < q_1 < \phi(\alpha), \quad \phi(\beta) - \frac{\epsilon}{2} < q_2 < \phi(\beta), \quad q_1, q_2 \in \mathcal{Q}_2.$$

Así, sumando las desigualdades,

$$\phi(\alpha + \beta) = \phi(\alpha) + \phi(\beta) - \epsilon < q_1 + q_2 < \phi(\alpha) + \phi(\beta),$$

pero $\phi^{-1}(q_1) < \alpha$, $\phi^{-1}(q_2) < \beta$ y, como ϕ_0 es un isomorfismo,

$$\phi^{-1}(q_1 + q_2) = \phi^{-1}(q_1) + \phi^{-1}(q_2) < \alpha + \beta,$$

luego $q_1 + q_2 < \phi(\alpha + \beta)$ y tenemos una contradicción.

Similarmente, si $\phi(\alpha) + \phi(\beta) < \phi(\alpha + \beta)$, tomamos $q \in \mathcal{Q}_2$ tal que

$$\phi(\alpha) + \phi(\beta) < q < \phi(\alpha + \beta),$$

con lo que $\phi^{-1}(q) < \alpha + \beta$ y $\epsilon = \alpha + \beta - \phi^{-1}(q) > 0$, luego podemos tomar

$$\alpha - \frac{\epsilon}{2} < q_1 < \alpha, \quad \beta - \frac{\epsilon}{2} < q_2 < \beta, \quad q_1, q_2 \in \mathcal{Q}_1,$$

de donde $\phi^{-1}(q) = \alpha + \beta - \epsilon < q_1 + q_2$, luego $q < \phi(q_1) + \phi(q_2) < \phi(\alpha) + \phi(\beta)$ y tenemos una contradicción. Esto prueba que $\phi(\alpha + \beta) = \phi(\alpha) + \phi(\beta)$.

En particular, $0 = \phi(0) = \phi(\alpha - \alpha) = \phi(\alpha) + \phi(-\alpha)$, luego $\phi(-\alpha) = -\phi(\alpha)$.

Supongamos ahora que $\alpha, \beta > 0$ (con lo que $\phi(\alpha), \phi(\beta) > 0$) así como que $\phi(\alpha\beta) < \phi(\alpha)\phi(\beta)$. Sea $\epsilon = \phi(\alpha)\phi(\beta) - \phi(\alpha\beta) > 0$ y tomemos $q_1, q_2 > 0$ en \mathcal{Q}_2 tales que

$$\phi(\alpha) - \frac{\epsilon}{2\phi(\beta)} < q_1 < \phi(\alpha), \quad \phi(\beta) - \frac{\epsilon}{2q_1} < q_2 < \phi(\beta).$$

Entonces

$$\begin{aligned} \phi(\alpha)\phi(\beta) - q_1q_2 &= \phi(\alpha)\phi(\beta) - q_1\phi(\beta) + q_1\phi(\beta) - q_1q_2 = \\ &(\phi(\alpha) - q_1)\phi(\beta) + q_1(\phi(\beta) - q_2) < \epsilon = \phi(\alpha)\phi(\beta) - \phi(\alpha\beta), \end{aligned}$$

con lo que $\phi(\alpha\beta) < q_1q_2 < \phi(\alpha)\phi(\beta)$, luego $\alpha\beta < \phi^{-1}(q_1)\phi^{-1}(q_2) < \alpha\beta$, contradicción.

Supongamos ahora que $0 < \phi(\alpha)\phi(\beta) < \phi(\alpha\beta)$ y tomemos $q \in Q_2$ tal que

$$\phi(\alpha)\phi(\beta) < q < \phi(\alpha\beta),$$

con lo que $\phi^{-1}(q) < \alpha\beta$ y $\epsilon = \alpha\beta - \phi^{-1}(q) > 0$, luego podemos tomar $q_1, q_2 > 0$ en Q_1 tales que

$$\alpha - \frac{\epsilon}{2\beta} < q_1 < \alpha, \quad \beta - \frac{\epsilon}{2q_1} < q_2 < \beta.$$

Entonces

$$\alpha\beta - q_1q_2 = \alpha\beta - q_1\beta + q_1\beta - q_1q_2 = (\alpha - q_1)\beta + q_1(\beta - q_2) < \epsilon = \alpha\beta - \phi^{-1}(q),$$

luego $\phi^{-1}(q) < q_1q_2$, luego $q < \phi(q_1)\phi(q_2) < \phi(\alpha)\phi(\beta)$, contradicción. Así pues, $\phi(\alpha\beta) = \phi(\alpha)\phi(\beta)$. Hemos probado esto para $\alpha, \beta > 0$, pero, como $\phi(0) = 0$, se cumple trivialmente si $\alpha = 0$ o $\beta = 0$. Los demás casos se reducen al que hemos probado. Por ejemplo, si $\alpha > 0, \beta < 0$, tenemos que

$$\phi(\alpha\beta) = \phi(-\alpha(-\beta)) = -\phi(\alpha(-\beta)) = -\phi(\alpha)\phi(-\beta) = \phi(\alpha)\phi(\beta).$$

Así pues, ϕ es un homomorfismo de anillos ordenados. Observemos por último que para que ϕ sea un isomorfismo es necesario que K sea completo, pues, claramente, todo cuerpo ordenado isomorfo a un cuerpo ordenado completo es completo. ■

Así pues, ahora ya podemos presentar adecuadamente los números reales:

Definición 1.13 Llamaremos *cuerpo \mathbb{R} de los números reales* a cualquier cuerpo ordenado completo.

La construcción de la sección 2.2 de [G] muestra que existe al menos un cuerpo en estas condiciones, pero, una vez confirmado esto, resulta del todo irrelevante que el cuerpo que tomemos como \mathbb{R} sea precisamente el construido allí o cualquier otro. En estos términos, el teorema anterior puede enunciarse así:

Teorema 1.14 *Si K es un cuerpo ordenado arquimediano, existe un único monomorfismo de cuerpos ordenados $\phi : K \rightarrow \mathbb{R}$, que será un isomorfismo si y sólo si K es completo.*

En particular, todo cuerpo ordenado completo es isomorfo a \mathbb{R} .

Una vez fijado un cuerpo al que llamamos \mathbb{R} , sustituimos \mathbb{N}, \mathbb{Z} y \mathbb{Q} por sus imágenes en \mathbb{R} , de modo podamos afirmar que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Concretamente, \mathbb{N} está formado por los números reales de la forma

$$0, \quad 1, \quad 1+1, \quad 1+1+1, \quad 1+1+1+1, \dots$$

mientras que \mathbb{Z} está formado por los elementos de \mathbb{N} y sus opuestos y \mathbb{Q} por los cocientes de elementos de \mathbb{Z} .

Nota La situación de \mathbb{R} es la misma que discutimos en la sección 1.4 de [Al] al respecto de los números naturales. Podemos tomar como conjunto \mathbb{N} de números naturales cualquier conjunto que cumpla los axiomas de Peano de [Al 1.11]. Una posibilidad es considerar el conjunto definido en [Al 1.5], de modo que $0 = \emptyset$, $1 = \{\emptyset\}$, $2 = \{\{\emptyset\}\}$, etc., pero al construir el anillo \mathbb{Z} de los números enteros en [Al 2.6] conviene abandonar este \mathbb{N} y pasar a tomar como \mathbb{N} la imagen del \mathbb{N} anterior en \mathbb{Z} , pero al construir el cuerpo \mathbb{Q} de los números racionales en [Al 2.23], conviene abandonar este nuevo \mathbb{N} y sustituirlo por su imagen en \mathbb{Q} , que a su vez conviene sustituirlo por su imagen en \mathbb{R} . Todos estos cambios son irrelevantes, por que no importa para nada qué conjuntos tomamos como números naturales, sino únicamente que los números naturales cumplan los axiomas de Peano.

Una afirmación conjuntista sobre números naturales como $\emptyset \in 1$ será verdadera o falsa según qué conjunto concreto \mathbb{N} estemos considerando, pero esto significa que no es una afirmación genuina sobre números naturales, sino una afirmación técnica sobre el modo concreto en que los representamos en el seno de la teoría de conjuntos.

Similarmente, no tiene relevancia alguna qué cuerpo concreto tomamos como cuerpo de los números reales, siempre que sea un cuerpo ordenado completo. Las afirmaciones genuinas sobre números reales son precisamente las que no dependen de si estamos considerando un cuerpo u otro, es decir, las que pueden deducirse estrictamente del hecho de que \mathbb{R} es un cuerpo ordenado completo, sin entrar en quiénes son concretamente sus elementos. ■

Por ejemplo, el teorema siguiente demuestra que todo número real positivo tiene una raíz cuadrada, y la prueba no depende para nada de si los números reales son los construidos en [G] u otros cualesquiera:

Teorema 1.15 *Para cada $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 0$ existe un único $y \in \mathbb{R}$, $y \geq 0$ tal que $y^2 = x$.*

DEMOSTRACIÓN: Podemos suponer que $x > 0$. Consideremos el conjunto $A = \{u \in \mathbb{R} \mid u > 0, u^2 < x\}$. Como \mathbb{R} es arquimediano, existen números naturales $x < n < n^2$ y $1/x < m < m^2$, con lo que $1/m^2 < x$ y así $1/m \in A$ y n es una cota superior de A . Esto implica que A tiene supremo. Llamémoslo y . Claramente $y > 0$.

Supongamos que $x < y^2$. Tomemos un número natural n tal que $n > 1/y$ y $n > 2y/(y^2 - x)$. Así $2y/n < y^2 - x$ y en consecuencia

$$\left(y - \frac{1}{n}\right)^2 = y^2 - 2y\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} > y^2 - y^2 + x + \frac{1}{n^2} > x.$$

Así, si $u \in A$ tenemos que $u^2 < x < (y - 1/n)^2$, luego $u < y - 1/n$, pero esto significa que $y - 1/n$ es una cota superior de A , en contradicción con que y es el supremo.

Supongamos ahora que $y^2 < x$. Entonces tomamos un número natural n que cumpla $n > 4y/(x - y^2)$ y $n^2 > 2/(x - y^2)$. Así

$$\left(y + \frac{1}{n}\right)^2 = y^2 + 2y\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} < y^2 + \frac{x - y^2}{2} + \frac{x - y^2}{2} = y^2 + x - y^2 = x,$$

luego $y + 1/n \in A$, y esto supone de nuevo una contradicción. Por lo tanto ha de ser $y^2 = x$.

La unicidad es clara, pues si $z \in \mathbb{R}$ cumple $z > 0$, $z \neq y$, entonces $z^2 < y^2$ o $z^2 > y^2$ según si $z < y$ o $z > y$. ■

Definición 1.16 Si $x \in \mathbb{R}$ cumple $x \geq 0$, llamaremos *raíz cuadrada positiva* de x al único $y \in \mathbb{R}$ que cumple $y^2 = x$, y lo representaremos por $y = \sqrt{x}$.

Notemos que \sqrt{x} no es la única raíz cuadrada de x en \mathbb{R} , pues $-\sqrt{x}$ es otra (distinta siempre que $x \neq 0$), y no hay más, porque el polinomio $t^2 - x$ sólo puede tener dos raíces en \mathbb{R} .

La existencia de raíces cuadradas implica que en un cuerpo ordenado completo la relación de orden está determinada por la suma y el producto: se cumple $x \leq y$ si y sólo si existe un $z \in \mathbb{R}$ tal que $y - x = z^2$.

Un ejemplo de cuerpo ordenado arquimediano distinto de \mathbb{Q} o de \mathbb{R} es el cuerpo

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$$

que estudiamos, por ejemplo, en la sección 9.1 de [ITA]. Lo que hemos probado es que no es casual que cuerpos como éste se puedan identificar con subcuerpos de \mathbb{R} .

1.2 Cuerpos métricos

La construcción de \mathbb{R} vista en [G] (que se debe esencialmente a Dedekind) es, pese a sus tecnicismos, la más natural desde un punto de vista geométrico, y muestra claramente por qué los números reales se pueden identificar con los puntos de una recta. Sin embargo, existe otra construcción alternativa (debida a Cantor) que tiene interés porque relaciona la completitud de \mathbb{R} con la convergencia de las sucesiones de Cauchy y, sobre todo, porque es generalizable y permite construir otros cuerpos completos, no necesariamente ordenados. Nos ocuparemos de ella en la sección siguiente, para lo cual necesitamos algunos preliminares, muchos de ellos dirigidos, precisamente, a mostrar su grado de generalidad.

En primer lugar vamos a ver que podemos eliminar la dependencia de la relación de orden a la hora de definir la completitud de un cuerpo sustituyéndola por el valor absoluto.

Definición 1.17 Un *valor absoluto* en un cuerpo K es cualquier aplicación $|\cdot| : K \rightarrow R$, donde R es un cuerpo ordenado arquimediano,¹ que cumpla las propiedades siguientes:

- a) $|x| \geq 0$ y el único elemento de K que cumple $|x| = 0$ es $x = 0$.
- b) $|x + y| \leq |x| + |y|$.
- c) $|xy| = |x||y|$.

Un *cuerpo métrico* es un par $(K, |\cdot|)$, donde K es un cuerpo y $|\cdot|$ es un valor absoluto en K .

El valor absoluto en cualquier cuerpo ordenado arquimediano K cumple estas propiedades. (En este caso el valor absoluto toma imágenes en $R = K$, y la propiedad arquimediana de K sólo hace falta para cumplir el requisito impuesto de que R sea arquimediano.)

Sin embargo, la noción de cuerpo métrico es mucho más general. De hecho, cualquier cuerpo K puede convertirse en un cuerpo métrico con el *valor absoluto trivial*, dado por

$$|x| = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

En realidad, este caso es *demasiado trivial*, y tendremos que exceptuarlo al enunciar la mayor parte de resultados relevantes sobre cuerpos métricos, pero también hay muchos otros casos de cuerpos métricos no triviales que no son cuerpos ordenados arquimedianos. El más notable es el cuerpo \mathbb{C} de los números complejos.

De momento podemos probar que algunas propiedades conocidas del valor absoluto en \mathbb{Q} (o en cualquier cuerpo ordenado) son válidas en cualquier cuerpo métrico:

- $|1| = |-1| = 1$,
pues $|1| = |1 \cdot 1| = |1| \cdot |1|$ y, como por a) $|1| \neq 0$, tiene que ser $|1| = 1$. Por otra parte, $|-1|^2 = |(-1)^2| = |1| = 1$, luego $|-1| = \pm 1$, pero los valores absolutos son positivos.
- $|x| = |-x|$,
pues $|-x| = |-1||x| = |x|$.
- Si $x \neq 0$ tiene inverso para el producto, entonces $|x^{-1}| = |x|^{-1}$,
pues $|x||x^{-1}| = |xx^{-1}| = |1| = 1$.

¹Lo usual es tomar concretamente como R el cuerpo \mathbb{R} de los números reales, pero temporalmente trabajaremos con un cuerpo ordenado arquimediano arbitrario para admitir el caso $R = \mathbb{Q}$, lo que nos permitirá aprovechar estos conceptos para obtener la construcción alternativa de \mathbb{R} que hemos anunciado al final de la sección anterior.

- $||x| - |y|| \leq |x - y|$.

En efecto, $|x| = |x - y + y| \leq |x - y| + |y|$, luego $|x| - |y| \leq |x - y|$. Igualmente probamos que $|y| - |x| \leq |y - x| = |x - y|$, luego

$$-|x - y| \leq |x| - |y| \leq |x - y|,$$

y, por las propiedades del valor absoluto en el cuerpo ordenado R , esto implica que $||x| - |y|| \leq |x - y|$.

Espacios métricos El interés principal en este contexto del valor absoluto es que permite definir una distancia entre los elementos de un cuerpo métrico, mediante la fórmula

$$d(x, y) = |x - y|,$$

de modo que en el caso de \mathbb{R} tenemos la distancia natural desde el punto de vista geométrico (véase [G 2.18]). Ahora bien, la mayor parte de los resultados que vamos a obtener sirven igualmente para otras distancias definidas en contextos muy distintos con tal de que cumplan unos pocos axiomas básicos:

Definición 1.18 Una *distancia* en un conjunto M es una aplicación

$$d : M \times M \longrightarrow R,$$

donde R es un cuerpo ordenado arquimediano,² que cumpla las propiedades siguientes:

- $d(x, y) \geq 0$ y $d(x, y) = 0$ únicamente cuando $x = y$,
- $d(x, y) = d(y, x)$,
- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Es obvio que las tres propiedades son exigencias razonables para cualquier aplicación que realmente pueda ser considerada como medida de una distancia. La tercera recibe el nombre de *desigualdad triangular*. De ellas se deduce una cuarta:

$$|d(x, y) - d(x, z)| \leq d(y, z).$$

En efecto, $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$, luego $d(x, y) - d(x, z) \leq d(y, z)$. Invertiendo los papeles de y, z obtenemos igualmente que $d(x, z) - d(x, y) \leq d(y, z)$, luego

$$-d(y, z) \leq d(x, y) - d(x, z) \leq d(y, z),$$

y esto es equivalente a la desigualdad que queremos probar.

Un *espacio métrico* es un par (M, d) , donde M es un conjunto y d es una distancia en M .

²Como en el caso de los cuerpos métricos, la definición usual exige que las distancias tomen valores en el cuerpo \mathbb{R} de los números reales, pero temporalmente consideramos un cuerpo ordenado arquimediano arbitrario para dar una construcción alternativa de \mathbb{R} sin suponer \mathbb{R} ya definido.

La conexión con lo anterior es que si K es un cuerpo métrico, entonces la aplicación $d : K \times K \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $d(x, y) = |x - y|$ es una distancia en K . En efecto, los axiomas de distancia se demuestran trivialmente a partir de los axiomas de valor absoluto.

En lo sucesivo consideraremos siempre a cada cuerpo métrico como espacio métrico con esta distancia.

Así pues, a partir de aquí podemos razonar a cuatro niveles de generalidad: podemos definir y demostrar cosas sobre \mathbb{Q} o \mathbb{R} en particular, o bien sobre un cuerpo ordenado arquimediano arbitrario, sin necesidad de que sea el propio \mathbb{Q} o \mathbb{R} , o bien sobre un cuerpo métrico arbitrario, sin necesidad de que su valor absoluto provenga de una relación de orden, o bien sobre un espacio métrico arbitrario, sin necesidad de que su distancia provenga de un valor absoluto.

El propósito de esta sección es demostrar que la completitud de un cuerpo ordenado arquimediano equivale a que, en él, toda sucesión de Cauchy sea convergente (véase el teorema [ITAn 1.20]), pero esta caracterización de la completitud tiene sentido en un espacio métrico arbitrario, por lo que nos dará un concepto de completitud aplicable a cualquier espacio métrico.

Empezamos introduciendo los conceptos de sucesión convergente y sucesión de Cauchy en espacios métricos:

Sucesiones Una sucesión en un conjunto M es una aplicación $x : \mathbb{N} \rightarrow M$, que representaremos más habitualmente como $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ o, para adaptarnos a lo habitual en análisis, $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$. Con cualquiera de estas notaciones, lo que tenemos es una sucesión infinita

$$x_0, \quad x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad x_4, \quad \dots$$

de elementos de M . En realidad, que los términos de la sucesión estén numerados a partir de 0 o de cualquier otro número natural va a ser irrelevante, pues sólo nos van a interesar las propiedades de las sucesiones que dependen de sus términos “avanzados”.

Una sucesión $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ en un conjunto ordenado es *monótona creciente* si cumple

$$x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \dots$$

es decir, si cuando $m \leq n$ se cumple $x_m \leq x_n$. Si cambiamos las desigualdades por $<$ se dice que es *estrictamente creciente*.

La sucesión es *monótona decreciente* si cumple

$$x_0 \geq x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq \dots$$

o, lo que es lo mismo, si cuando $m \leq n$ entonces $x_n \leq x_m$. De nuevo, la sucesión es estrictamente decreciente si las desigualdades son estrictas. Diremos que una sucesión es *monótona* cuando es monótona creciente o monótona decreciente.

Una *subsucesión* de una sucesión dada $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión de la forma $\{x_{n_k}\}_{k=0}^{\infty}$, donde $\{n_k\}_{k=0}^{\infty}$ es una sucesión estrictamente creciente de números naturales.

Notemos que, en general, si $\{n_k\}_{k=0}^{\infty}$ es una sucesión estrictamente creciente de números naturales, siempre se cumple que $k \leq n_k$.

En efecto, si para algún k se cumpliera $n_k < k$, podemos tomar el mínimo posible, y entonces $n_{n_k} < n_k$, con $n_k < k$, lo que contradice la minimalidad de k .

Más adelante nos será útil el teorema siguiente [ITAn 1.23]:

Teorema 1.19 *Toda sucesión en un conjunto totalmente ordenado contiene una subsucesión monótona.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ una sucesión en un conjunto totalmente ordenado. Sea A el conjunto de las imágenes de la sucesión. Si A es finito es obvio que A tiene una subsucesión constante, luego monótona. Supongamos que A es infinito.

Si todo subconjunto no vacío de A tiene mínimo podemos tomar x_0 igual al mínimo de A , luego x_1 igual al mínimo de $A \setminus \{x_0\}$, luego x_2 igual al mínimo de $A \setminus \{x_0, x_1\}$, y así obtenemos puntos $x_0 < x_1 < x_2 < \dots$, es decir, obtenemos un subconjunto de A sin máximo.

Así pues, o bien existe un subconjunto de A sin mínimo o bien existe un subconjunto de A sin máximo. Los dos casos se tratan igual. Supongamos que hay un subconjunto de A sin mínimo. Llamémoslo B .

Sea a_{n_0} un elemento cualquiera de B . Como B no tiene mínimo contiene infinitos términos de la sucesión bajo a_{n_0} , pero sólo un número finito de ellos tienen índice anterior a n_0 , luego existe un cierto a_{n_1} en B de manera que $a_{n_1} < a_{n_0}$ y $n_0 < n_1$. Podemos repetir recurrentemente este proceso y obtener una subsucesión

$$a_{n_0} > a_{n_1} > a_{n_2} > a_{n_3} > a_{n_4} > a_{n_5} > \dots$$

monótona decreciente. ■

Convergencia de sucesiones La definición siguiente generaliza a [ITAn 1.1]:

Definición 1.20 Una sucesión $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ en un espacio métrico M converge a un límite $l \in M$ si³ para todo $\epsilon > 0$ existe un m tal que para todo $n \geq m$ se cumple $d(x_n, l) < \epsilon$.

Una sucesión no altera su convergencia o no convergencia porque se alteren sus primeros términos (cualquier número finito de ellos). Notemos también que la definición de convergencia se aplica igualmente a sucesiones definidas a partir de $n = 0$ o de $n = 17$.

Observemos que una sucesión no puede converger a más de un límite, pues si $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ converge a dos puntos l y l' de un espacio métrico, entonces, para

³En lo sucesivo sobrentenderemos que la letra ϵ representa siempre un elemento del cuerpo R donde toma imágenes la distancia, mientras que m, n representarán siempre números naturales.

$\epsilon = d(l, l')$, existe un $m \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq m$ se cumple⁴ $d(x_n, l) < \epsilon/2$ y $d(x_n, l') < \epsilon/2$, y entonces tenemos una contradicción:

$$d(l, l') \leq d(l, x_n) + d(x_n, l') < \epsilon/2 + \epsilon/2 = d(l, l').$$

Si una sucesión $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ en un espacio métrico M es convergente, representaremos su único límite como $\lim_n x_n \in M$.

Ejemplos Veamos algunos casos sencillos de convergencia:

- Una sucesión constante $\{c\}_{n=0}^{\infty}$ en un espacio métrico converge a c .
En efecto, cumple trivialmente la definición porque en este caso tenemos que $d(x_n, l) = d(c, c) = 0 < \epsilon$.
- Más en general, lo mismo vale para las sucesiones finalmente constantes.
- Toda subsucesión de una sucesión convergente converge al mismo límite.
En efecto, si se cumple $d(x_n, l) < \epsilon$ para todo $n \geq m$, también vale $d(x_{n_k}, l) < \epsilon$ para $k \geq m$, ya que entonces $n_k \geq k \geq m$.
- Si K es un cuerpo ordenado arquimediano,⁵ entonces $\lim_n \frac{1}{n} = 0$.
En efecto, dado $\epsilon > 0$, la propiedad arquimediana nos da un $m \in K$ tal que $1/\epsilon < m$, luego si $n \geq m$, se cumple también que $1/\epsilon < n$, luego $|1/n| = 1/n < \epsilon$, como requiere la definición de límite.
- Si K es un cuerpo métrico y $x \in K$ cumple $|x| < 1$, entonces $\lim_n x^n = 0$.
En efecto, si $x = 0$ la sucesión es constante igual a 0 y la conclusión es trivial. En otro caso sea $\alpha = 1/|x| > 1$. Entonces

$$\alpha^n = (1 + \alpha - 1)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (\alpha - 1)^i \geq 1 + n(\alpha - 1),$$

porque todos los términos de la suma son positivos. Dado $\epsilon > 0$, existe un natural m tal que

$$\frac{1/\epsilon - 1}{\alpha - 1} < m,$$

y así si $n \geq m$ se cumple $\alpha^n \geq 1 + n(\alpha - 1) > 1/\epsilon$, luego $|x^n - 0| = |x|^n < \epsilon$, como exige la definición de límite. ■

⁴En principio tendríamos un m_1 tal que para $n \geq m_1$ se cumpliría la definición de convergencia a l y otro m_2 a partir del cual se cumpliría la definición de convergencia a l' , pero si tomamos $m = \max\{m_1, m_2\}$, a partir de m se cumplen las dos. En lo sucesivo aplicaremos tácitamente este argumento con frecuencia.

⁵La propiedad arquimediana es esencial para este ejemplo. La sucesión $1/n$ no tiene por qué converger en todo cuerpo métrico. De hecho, podemos definir un cuerpo métrico *arquimediano* como un cuerpo métrico en el que la sucesión $1/n$ tiende a 0. Entonces este ejemplo prueba que los cuerpos métricos asociados a cuerpos ordenados arquimedianos son arquimedianos en este sentido.

Definición 1.21 Una sucesión $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ en un espacio métrico M está *acotada* si existe un $x \in M$ y un $C \in \mathbb{R}$ de modo que para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple $d(x_n, x) \leq C$.

La idea es muy simple: una sucesión está acotada si nunca se aleja más de una distancia C de un punto fijo x . Conviene observar que el punto x podemos elegirlo, en el sentido de que si una sucesión cumple la definición de sucesión acotada con un cierto $x \in M$, entonces la cumple también con cualquier otro $y \in M$, pues

$$d(x_n, y) \leq d(x_n, x) + d(x, y) \leq C + d(x, y),$$

y basta tomar $C' = C + d(x, y)$.

En particular, una sucesión $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ está acotada en un cuerpo métrico si y sólo si existe un $C \in \mathbb{R}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple $|x_n| \leq C$ (donde hemos tomado $x = 0$ como punto de referencia para fijar la cota).

Teorema 1.22 *Toda sucesión convergente en un espacio métrico está acotada.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ una sucesión en un espacio métrico M convergente a un límite l . Entonces, tomando $\epsilon = 1$, tenemos que existe un m tal que si $n \geq m$, entonces $d(x_n, l) < 1$. Sea

$$C = \max\{1, d(x_0, l), \dots, d(x_{m-1}, l)\}.$$

Así es claro que $d(x_n, l) \leq C$ para todo natural n , luego la sucesión está acotada. ■

Veamos una aplicación:

Teorema 1.23 *Sea K un cuerpo métrico y $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$, dos sucesiones convergentes en K . Entonces las sucesiones $\{a_n + b_n\}_{n=0}^{\infty}$ y $\{a_n b_n\}_{n=0}^{\infty}$ también son convergentes y*

$$\lim_n (a_n + b_n) = \lim_n a_n + \lim_n b_n, \quad \lim_n (a_n b_n) = \lim_n a_n \lim_n b_n.$$

DEMOSTRACIÓN: Llamamos $l = \lim_n a_n$, $l' = \lim_n b_n$. Para la suma observamos que

$$|a_n + b_n - l - l'| \leq |a_n - l| + |b_n - l'|,$$

luego, dado $\epsilon > 0$, tomando un $m \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - l| < \epsilon/2$ y $|b_n - l'| < \epsilon/2$ siempre que $n \geq m$, tenemos también que $|a_n + b_n - l - l'| < \epsilon$, luego la suma converge a $l + l'$.

Para el producto usamos que

$$|a_n b_n - ll'| = |a_n b_n - a_n l' + a_n l' - ll'| \leq |a_n| |b_n - l'| + |a_n - l| |l'|,$$

así como que ambas sucesiones están acotadas, de modo que existe un $C \in \mathbb{R}$ tal que $|a_n| \leq C$, $|b_n| \leq C$ para todo n . Podemos suponer además que $|l'| \leq C$.

Así, dado $\epsilon > 0$, tomamos m tal que si $n \geq m$ se cumpla $|a_n - l| < \epsilon/2C$, $|b_n - l'| < \epsilon/2C$, y entonces

$$|a_n b_n - ll'| < C \frac{\epsilon}{2C} + \frac{\epsilon}{2C} C = \epsilon,$$

luego el producto converge a ll' . ■

Un caso particular es que si $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ converge a l y $c \in K$, entonces

$$\lim_n ca_n = c \lim_n a_n.$$

Basta aplicar el teorema anterior a las sucesiones $\{c\}_{n=0}^{\infty}$ y $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$.

Si una sucesión converge a 0, para que converja un producto basta con que la otra sucesión esté acotada:

Teorema 1.24 *Si $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión acotada en un cuerpo métrico y $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ converge a 0, entonces $\{x_n y_n\}_{n=0}^{\infty}$ converge a 0.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $C \in R$ tal que $|x_n| \leq C$ para todo n . Dado $\epsilon > 0$, existe un $m \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq m$, entonces $|y_n| < \epsilon/C$, luego

$$|x_n y_n| = |x_n| |y_n| < C\epsilon/C = \epsilon.$$

Esto significa que la sucesión producto tiende a 0. ■

Teorema 1.25 *Sea R un cuerpo ordenado arquimediano y sea $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ una sucesión convergente en R tal que existe $a \in R$ y $m \in \mathbb{N}$ de modo que $a \leq x_n$ (resp. $x_n \leq a$) para todo $n \geq m$. Entonces $a \leq \lim_n x_n$ (resp. $\lim_n x_n \leq a$).*

DEMOSTRACIÓN: Probaremos el caso en que $a \leq x_n$. El otro es análogo. Supongamos que el límite cumple $l < a$. Entonces tomamos $\epsilon = a - l$ y, por la definición de convergencia, existe un $n \geq m$ tal que $|x_n - l| < \epsilon$ y, como $l < a \leq x_n$, esto equivale a $x_n - l < a - l$, con lo que $x_n < a$, contradicción. ■

Como consecuencia:

Teorema 1.26 *Sea R un cuerpo ordenado arquimediano y $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ dos sucesiones convergentes en R tales que $a_n \leq b_n$ para todo n . Entonces se cumple que $\lim_n a_n \leq \lim_n b_n$.*

DEMOSTRACIÓN: Si llamamos $c_n = b_n - a_n \geq 0$, el teorema anterior nos da que

$$\lim_n b_n - \lim_n a_n = \lim_n c_n \geq 0. \quad \blacksquare$$

Teorema 1.27 (Criterio del emparedado) *Sea R un cuerpo ordenado arquimediano y $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ tres sucesiones en R que cumplan $a_n \leq b_n \leq c_n$ para todo n . Si la primera y la tercera convergen al mismo límite l , entonces también $\lim_n b_n = l$.*

DEMOSTRACIÓN: Dado $\epsilon > 0$, existe un m tal que si $n \geq m$ entonces $|a_n - l| < \epsilon$ y $|c_n - l| < \epsilon$. Entonces

$$-\epsilon < a_n - l \leq b_n - l \leq c_n - l < \epsilon,$$

luego $|b_n - l| < \epsilon$, como requiere la definición de límite. ■

Teorema 1.28 Si $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión en un cuerpo ordenado completo monótona creciente (resp. decreciente), entonces es convergente si y sólo si está acotada superiormente (resp. inferiormente) y en tal caso su límite es su supremo (resp. su ínfimo).

DEMOSTRACIÓN: Hemos probado que toda sucesión convergente está acotada (superior e inferiormente). Supongamos ahora que la sucesión dada es monótona creciente y que está acotada superiormente (el caso opuesto es análogo). La acotación hay que entenderla como que el conjunto $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ está acotado superiormente, y obviamente es no vacío, luego por la completitud existe su supremo L . Vamos a probar que es el límite de la sucesión. Para ello tomamos $\epsilon > 0$ y usamos que $L - \epsilon$ no es una cota superior de la sucesión, luego existe un n_0 tal que $L - \epsilon < x_{n_0} \leq L$. Por la monotonía, si $n \geq n_0$ se cumple que $L - \epsilon < x_{n_0} \leq x_n \leq L$, pero esto equivale a que $|x_n - L| = L - x_n < \epsilon$. ■

Sucesiones de Cauchy La definición siguiente generaliza de forma obvia la definición [ITAn 1.19] al contexto de los espacios métricos:

Definición 1.29 Una sucesión $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ en un espacio métrico M es de Cauchy si para todo $\epsilon > 0$ existe un $m \in \mathbb{N}$ tal que si $n, n' \geq m$ entonces $d(x_n, x_{n'}) < \epsilon$.

Teorema 1.30 Toda sucesión convergente en un espacio métrico es de Cauchy, y toda sucesión de Cauchy está acotada.

DEMOSTRACIÓN: Si $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ converge a l , dado $\epsilon > 0$ existe un $m \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq m$ entonces $d(x_n, l) < \epsilon/2$, luego si $n, n' \geq m$ tenemos que

$$d(x_n, x_{n'}) \leq d(x_n, l) + d(l, x_{n'}) < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon,$$

luego la sucesión es de Cauchy.

Por otra parte, si la sucesión es de Cauchy, existe un $m \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq m$ se cumple $d(x_n, x_m) \leq 1$. Sea $C = \max(\{d(x_k, x_m) \mid k < m\} \cup \{1\})$. Es claro entonces que $d(x_n, x_m) \leq C$ para todo n , luego la sucesión está acotada. ■

Teorema 1.31 Si una sucesión de Cauchy tiene una subsucesión convergente entonces converge al mismo límite.

DEMOSTRACIÓN: Sea $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en un espacio métrico M y sea $\{x_{n_k}\}_{k=0}^{\infty}$ una subsucesión convergente a l . Entonces, dado $\epsilon > 0$,

existe un $m \in \mathbb{N}$ tal que si $n, n' \geq m$, entonces $d(x_n, x_{n'}) < \epsilon/2$ y si $k \geq m$ entonces $d(x_{n_k}, l) < \epsilon/2$. Así,

$$d(x_n, l) \leq d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, l) < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon. \quad \blacksquare$$

Al igual que la convergencia, la propiedad de Cauchy se conserva por sumas y productos:

Teorema 1.32 *Sea K un cuerpo métrico y $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$, dos sucesiones de Cauchy en K . Entonces las sucesiones $\{a_n + b_n\}_{n=0}^{\infty}$ y $\{a_n b_n\}_{n=0}^{\infty}$ también son de Cauchy.*

DEMOSTRACIÓN: Para la suma observamos que

$$|a_{n'} + b_{n'} - a_n - b_n| \leq |a_{n'} - a_n| + |b_{n'} - b_n|,$$

luego, dado $\epsilon > 0$, tomando un $m \in \mathbb{N}$ tal que $|a_{n'} - a_n| < \epsilon/2$ y $|b_{n'} - b_n| < \epsilon/2$ siempre que $n', n \geq m$, tenemos también que $|a_{n'} + b_{n'} - a_n - b_n| < \epsilon$, luego la suma es de Cauchy.

Para el producto usamos que

$$|a_{n'} b_{n'} - a_n b_n| = |a_{n'} b_{n'} - a_{n'} b_n + a_{n'} b_n - a_n b_n| \leq |a_{n'}| |b_{n'} - b_n| + |a_{n'} - a_n| |b_n|,$$

así como que ambas sucesiones están acotadas, de modo que existe un $C \in \mathbb{R}$ tal que $|a_n| \leq C$, $|b_n| \leq C$ para todo n . Por lo tanto, dado $\epsilon > 0$, basta tomar un $m \in \mathbb{N}$ tal que $|a_{n'} - a_n| \leq \epsilon/2C$, $|b_{n'} - b_n| \leq \epsilon/2C$ siempre que $n, n' \geq m$. Obtenemos entonces que

$$|a_{n'} b_{n'} - a_n b_n| < C\epsilon/2C + C\epsilon/2C = \epsilon. \quad \blacksquare$$

Espacios métricos completos Finalmente extendemos la noción de completitud al contexto de los espacios métricos:

Definición 1.33 Un espacio métrico es *completo* si en él toda sucesión de Cauchy es convergente.

En particular podemos hablar de cuerpos métricos y de cuerpos ordenados arquimedianos completos, pero, en este último caso, la completitud coincide con la que ya teníamos definida:

Teorema 1.34 *Un cuerpo ordenado arquimédiano R es completo como conjunto ordenado si y sólo si lo es como cuerpo métrico.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que R es completo como espacio métrico, es decir, que toda sucesión de Cauchy en R es convergente, y sea $A \subset R$ un subconjunto no vacío acotado superiormente. Sea $a \in A$ y sea b una cota superior. Si a es también una cota superior entonces es el máximo de A , luego también su supremo. Supongamos, pues, que a no es una cota superior de A . En particular $a < b$.

Vamos a construir recurrentemente una sucesión $\{(a_n, b_n)\}_{n=0}^{\infty}$ en $R \times R$ de modo que

$$a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq b_2 \leq b_1 \leq b_0$$

y cada b_n sea una cota superior de A , pero ningún a_n lo sea. Partimos del par $(a_0, b_0) = (a, b)$ y, supuesto definido (a_n, b_n) , consideramos $c = (a_n + b_n)/2$, de modo que $a_n < c < b_n$, y distinguimos dos casos:

Si c no es cota superior de A , definiremos $a_{n+1} = c$, $b_{n+1} = b_n$, mientras que si c es cota superior de A tomamos $a_{n+1} = a_n$, $b_{n+1} = c$.

Teniendo en cuenta que si $c = (a + b)/2$ entonces $b - c = c - a = (b - a)/2$, una simple inducción prueba que

$$b_n - a_n = \frac{b - a}{2^n}.$$

Esto implica que $\lim_n (b_n - a_n) = 0$ y, más aún, si $n \leq m$, entonces

$$a_n \leq a_m \leq b_m \leq b_n,$$

luego $|a_m - a_n| \leq b_n - a_n = (b - a)/2^n$, y de aquí se sigue que la sucesión $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ es de Cauchy. Por hipótesis converge a un cierto límite $l \in R$. Fijado m , como $a_n \leq b_m$ para todo n , el teorema 1.25 nos da que $l \leq b_m$, para todo m . Por otro lado, como $a_m \leq a_n$ para todo n , ese mismo teorema implica que $a_m \leq l$, es decir, que se cumple $a_m \leq l \leq b_m$, para todo m .

Ahora es fácil concluir que l es el supremo de A . Por una parte, tiene que ser una cota superior, porque si no lo fuera existiría un $x \in A$ tal que $l < x$. Pero entonces sería $a_n \leq l < x \leq b_n$ y $\epsilon = x - l$ contradiría la convergencia a 0 de $b_n - a_n$.

Por otro lado, toda cota superior c de A cumple $l \leq c$, pues si fuera $c < l$ tendríamos que $a_n \leq c < l \leq b_n$ y de nuevo tenemos una contradicción con $\epsilon = l - c$. Esto prueba la completitud de R como conjunto ordenado.

Supongamos ahora que R es completo como conjunto ordenado. Dada una sucesión de Cauchy en R , por el teorema 1.31, para probar que es convergente basta probar que lo es una cualquiera de sus subsucesiones. Por el teorema 1.19 podemos tomar una subsucesión monótona. Como toda sucesión de Cauchy es acotada y obviamente toda subsucesión de una sucesión acotada está acotada, basta probar que toda sucesión $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ monótona y acotada es convergente.

No perdemos generalidad si suponemos que es monótona creciente, ya que si es decreciente la sucesión $\{-x_n\}_{n=0}^{\infty}$ es creciente, y si ésta converge a l , la sucesión inicial converge a $-l$ (porque la condición $|-x_n - l| < \epsilon$ es equivalente a $|x_n - (-l)| < \epsilon$).

Es claro que el conjunto $A = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ es no vacío y está acotado superiormente, luego tiene supremo l . Vamos a probar que dicho supremo es el límite de la sucesión. Dado $\epsilon > 0$, por definición de supremo se cumple que $l - \epsilon$ no es cota superior de A , luego existe un $m \in \mathbb{N}$ tal que $l - \epsilon < x_m \leq l$, luego si $n \geq m$ tenemos que $l - \epsilon < x_m \leq x_n \leq l$, luego $|x_n - l| = l - x_n < l - (l - \epsilon) = \epsilon$. ■

La construcción de Dedekind de los números reales (la vista en [G]) es la forma natural de construir un cuerpo completo en el sentido del orden, mientras que en la sección siguiente vamos a exponer la construcción de Cantor, que es la forma natural de obtener un cuerpo métrico completo.

1.3 La completación de un espacio métrico

Vamos a demostrar que todo espacio métrico puede sumergirse en un espacio métrico completo, que todo cuerpo métrico puede sumergirse en un cuerpo métrico completo y que todo cuerpo ordenado arquimediano puede sumergirse en un cuerpo ordenado completo. En particular, al aplicar esto último al cuerpo \mathbb{Q} de los números racionales obtendremos una construcción alternativa del cuerpo \mathbb{R} de los números reales (la construcción de Cantor).

Empezamos precisando qué hay que entender por “sumergir”:

Definición 1.35 Una aplicación $f : M \rightarrow N$ entre dos espacios métricos es una *inmersión isométrica* si, para todo par de puntos $x, y \in M$, se cumple que $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$. Si además es biyectiva se dice que es una *isometría*.

Un monomorfismo de cuerpos métricos $f : K \rightarrow L$ (con valores absolutos en un mismo cuerpo R) es una *inmersión isométrica* si, para todo $x \in K$, se cumple que $|f(x)| = |x|$. Si además es biyectiva se dice que es una *isometría*.

Notemos que una aplicación entre dos cuerpos métricos es una inmersión isométrica entre cuerpos métricos si y sólo si lo es entre espacios métricos, pues el valor absoluto y la distancia se determinan mutuamente:

$$d(x, y) = |x - y|, \quad |x| = d(x, 0).$$

Notemos también que toda inmersión isométrica es necesariamente inyectiva, pues si $f(x) = f(y)$, entonces $d(x, y) = d(f(x), f(y)) = 0$, luego $x = y$.

En el caso de cuerpos ordenados arquimedianos, tenemos que cualquier monomorfismo de cuerpos ordenados es obviamente una inmersión isométrica, pues el valor absoluto se define a partir del orden, luego una aplicación que conserva el orden conserva el valor absoluto.

Una inmersión isométrica $f : M \rightarrow N$ nos permite identificar los puntos del espacio métrico M con sus imágenes en N , es decir, nos permite considerar que $M \subset N$, y si se trata de cuerpos métricos, nos permite considerar a M como un subcuerpo de N , de modo que el valor absoluto en M es la restricción del de N .

En estos términos, vamos a probar que, dado un espacio métrico M existe una inmersión isométrica $f : M \rightarrow \overline{M}$ en un espacio métrico completo \overline{M} , de modo que si M es un cuerpo métrico, entonces \overline{M} también lo es, y si M es un cuerpo ordenado arquimediano, entonces \overline{M} es un cuerpo ordenado completo (y f es un monomorfismo de cuerpos ordenados).

Conjuntos densos El espacio \overline{M} será único si exigimos una condición adicional, lo cual requiere introducir un concepto:

Definición 1.36 Si M es un espacio métrico, un conjunto $D \subset M$ es *denso* en M si para todo $x \in M$ y todo $\epsilon > 0$ existe un $d \in D$ tal que $d(x, d) < \epsilon$.

Así, que D sea denso en M quiere decir que todo punto de M , aunque pueda no estar en D , tiene puntos de D tan cercanos como se desee. Podemos caracterizar la densidad en términos de sucesiones:

Teorema 1.37 *Un subconjunto D de un espacio métrico M es denso si y sólo si todo punto de M es el límite de una sucesión en D .*

DEMOSTRACIÓN: Si D es denso y $l \in M$, para cada $n \in \mathbb{N}$ tomamos $d_n \in D$ tal que $d(d_n, l) < \frac{1}{n+1}$. Tenemos así una sucesión $\{d_n\}_{n=0}^\infty$ en D que ciertamente converge a l , pues, dado $\epsilon > 0$, como R es arquimediano existe un $m \in \mathbb{N}$ tal que $1/\epsilon < m$, luego $1/m < \epsilon$, y si $n \geq m$ entonces

$$d(d_n, l) < \frac{1}{n+1} < \frac{1}{m} < \epsilon.$$

Recíprocamente, si D tiene la propiedad indicada, dado $x \in M$, tomamos una sucesión $\{d_n\}_{n=0}^\infty$ en D que converja a x . Dado $\epsilon > 0$ existe un $m \in \mathbb{N}$ tal que $d(d_m, x) < \epsilon$, y esto prueba que D es denso. ■

En los cuerpos ordenados los conjuntos densos tienen una caracterización más simple:

Teorema 1.38 *Un subconjunto D de un cuerpo ordenado arquimediano R es denso si y sólo si para todo par $a < b$ de elementos de R existe un $d \in D$ tal que $a < d < b$.*

DEMOSTRACIÓN: Si D es denso y $a < b$, consideramos $c = (a + b)/2$ y $\epsilon = (b - a)/2 > 0$. Existe un $d \in D$ tal que $|d - c| < \epsilon$, pero esto quiere decir que $-\epsilon < d - c < \epsilon$, o también $a - c < d - c < b - c$, luego $a < d < b$.

Recíprocamente, si D cumple la condición del enunciado, dado $x \in R$ y $\epsilon > 0$, existe un $d \in D$ tal que $x < d < x + \epsilon$, y entonces $|d - x| = d - x < \epsilon$. ■

Así, el teorema 1.11 afirma que \mathbb{Q} es denso en cualquier cuerpo ordenado arquimediano. En particular, que \mathbb{Q} sea denso en \mathbb{R} significa que todo número real es el límite de una sucesión de números racionales, o que cada número real está determinado por los números racionales que lo aproximan. Esto es lo que está implícito en todas las construcciones de \mathbb{R} a partir de \mathbb{Q} .

El teorema siguiente afirma que la completión \overline{M} de un espacio métrico es única si exigimos que la imagen de M sea densa en \overline{M} :

Teorema 1.39 Sean M y N dos espacios métricos completos,⁶ sea $M_0 \subset M$ un subconjunto denso, considerado como espacio métrico con la restricción de la distancia de M y sea $f : M_0 \rightarrow N$ una inmersión isométrica. Entonces existe una única inmersión isométrica $F : M \rightarrow N$ que extiende a f (es decir, tal que $F|_{M_0} = f$). Si $f[M_0]$ es denso en N , entonces F es una isometría. Más aún, si M y N son cuerpos métricos, M_0 es un subcuerpo y f es una inmersión isométrica (resp. isometría) de cuerpos métricos, entonces F también lo es.

DEMOSTRACIÓN: Sea $x \in M$. El teorema 1.37 implica que existe una sucesión $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ en M_0 convergente a x . En particular es una sucesión de Cauchy en M , pero es claro que esto es lo mismo que decir que $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en M_0 como espacio métrico, pues la definición de sucesión de Cauchy depende sólo de los valores que toma la distancia sobre los términos de la sucesión. Como f es una inmersión isométrica, resulta que la sucesión $\{f(x_n)\}_{n=0}^{\infty}$ es de Cauchy en $f[M_0]$, luego en N , y por la completitud de N converge en N . Definimos $F(x) = \lim_n f(x_n)$.

Para que esta definición sea correcta tenemos que comprobar que no depende de la sucesión utilizada para calcular $F(x)$. En efecto, si tomamos otra sucesión $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ en M_0 convergente a x , es fácil ver que la sucesión $\{z_k\}_{k=0}^{\infty}$ dada por

$$z_k = \begin{cases} x_n & \text{si } k = 2n, \\ y_n & \text{si } k = 2n + 1, \end{cases}$$

también converge a x . Según hemos visto, entonces $\{f(z_k)\}_{k=0}^{\infty}$ converge a un cierto z en N , pero las sucesiones $\{f(x_n)\}_{n=0}^{\infty}$ y $\{f(y_n)\}_{n=0}^{\infty}$ son subsucesiones de esta sucesión, luego ambas convergen al mismo límite z .

Por lo tanto F está bien definida. Veamos ahora que es una inmersión isométrica, es decir, que cumple $d(F(x), F(y)) = d(x, y)$.

Para ello observamos que si $\lim_n x_n = x$ y $\lim_n y_n = y$, donde ambas sucesiones están en M_0 , entonces $\lim_n d(x_n, y_n) = d(x, y)$. En efecto,

$$\begin{aligned} |d(x, y) - d(x_n, y_n)| &\leq |d(x, y) - d(x_n, y)| + |d(x_n, y) - d(x_n, y_n)| \\ &\leq d(x_n, x) + d(y_n, y), \end{aligned}$$

luego, dado $\epsilon > 0$, podemos tomar un $m \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq m$ se cumple $d(x_n, x) < \epsilon/2$ y $d(y_n, y) < \epsilon/2$, con lo que $|d(x, y) - d(x_n, y_n)| < \epsilon$.

Igualmente, $\lim_n d(f(x_n), f(y_n)) = d(F(x), F(y))$, pero ambas sucesiones de distancias son la misma, luego los límites son el mismo.

Si $f[M_0]$ es denso en N entonces F es suprayectiva, pues dado $y \in N$, podemos tomar una sucesión en $f[M_0]$ convergente a y y pasarla a M_0 con f , con lo que obtenemos una sucesión de Cauchy convergente a un cierto $x \in M$ que claramente cumplirá $F(x) = y$.

⁶Tenemos que suponer que las distancias de ambos toman valores en el mismo cuerpo R , pero esto será trivialmente cierto en cuanto consideremos únicamente distancias en \mathbb{R} .

La unicidad de F es clara, pues si G fuera otra inmersión isométrica tal que $G|_{M_0} = f$, entonces, dado $x \in M$, lo expresamos como $x = \lim_n x_n$, donde la sucesión está en M_0 , y entonces $d(G(x), G(x_n)) = d(x, x_n)$, de donde se sigue inmediatamente que

$$G(x) = \lim_n G(x_n) = \lim_n f(x_n) = F(x).$$

Supongamos ahora que M y N son cuerpos métricos, que M_0 es un subcuerpo y que f es una inmersión isométrica de cuerpos métricos. Entonces, dados $x = \lim_n x_n$, $y = \lim_n y_n$ en M , el teorema 1.23 nos da que $x + y = \lim_n (x_n + y_n)$, luego podemos calcular F con esta sucesión y entonces

$$F(x + y) = \lim_n (f(x_n) + f(y_n)) = \lim_n f(x_n) + \lim_n f(y_n) = F(x) + F(y),$$

e igualmente se razona con el producto. Por lo tanto F es un monomorfismo de cuerpos. Como $|x| = d(x, 0)$, el hecho de que F sea una inmersión isométrica implica que $|F(x)| = |x|$. ■

Así pues, si podemos sumergir un espacio métrico M como subespacio denso de un espacio métrico completo \overline{M} , esta la completión será única salvo isometría. El teorema siguiente muestra que el hecho de que M sea denso en \overline{M} simplifica la comprobación de la completitud de \overline{M} :

Teorema 1.40 *Sea M un espacio métrico y sea $D \subset M$ un conjunto denso tal que toda sucesión de Cauchy en D converge en M . Entonces M es un espacio métrico completo.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ una sucesión de Cauchy en M . Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $d_n \in D$ tal que $d(x_n, d_n) < 1/(n+1)$. La sucesión $\{d_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy, pues

$$|d_{n'} - d_n| \leq |d_{n'} - x_{n'}| + |x_{n'} - x_n| + |x_n - d_n|,$$

luego, dado $\epsilon > 0$, existe un $m > 3/\epsilon$ tal que si $n, n' \geq m$ se cumple que $|x_{n'} - x_n| < \epsilon/3$, y entonces

$$|d_{n'} - d_n| < \frac{1}{n'+1} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{1}{n+1} < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon.$$

Por hipótesis existe $\lim_n d_n = l$ y basta probar que $\lim_n x_n = l$. En efecto:

$$|x_n - l| \leq |x_n - d_n| + |d_n - l|.$$

Dado $\epsilon > 0$, basta tomar $m \geq 2/\epsilon$ tal que si $n \geq m$ se cumpla $|d_n - l| < \epsilon/2$, y entonces $|x_n - l| < \epsilon$. ■

Así pues, si partimos de un espacio métrico M y lo sumergimos como subconjunto denso de otro espacio métrico \overline{M} , para probar que \overline{M} es completo sólo tenemos que asegurar que las sucesiones de Cauchy de M son convergentes en \overline{M} , sin necesidad de preocuparnos de las nuevas sucesiones de Cauchy que pueda contener \overline{M} , que no estaban en M .

Así como en la construcción de \mathbb{R} de Dedekind el número real π es el conjunto de todos los números racionales menores que π , en la construcción de Cantor que vamos a ver, el número real π es el conjunto de todas las sucesiones de números racionales que convergen a π . Por ello es crucial el concepto de sucesión de Cauchy, porque una sucesión de números reales que converge a π es convergente en \mathbb{R} , pero deja de serlo en \mathbb{Q} y no por ello deja de ser una sucesión de Cauchy, y podemos identificarlas sin necesidad de hacer referencia al cuerpo \mathbb{R} que queremos construir.

En general, para construir la completación \overline{M} de un espacio métrico M consideramos el conjunto de todas las sucesiones de Cauchy en M y en él definimos una relación de equivalencia que se da cuando dos sucesiones “deben” converger al mismo punto.

Definición 1.41 Si M es un espacio métrico, llamaremos C_M al conjunto de todas las sucesiones de Cauchy en M . Definimos en C_M la relación de equivalencia dada por

$$\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \sim \{y_n\}_{n=0}^{\infty} \leftrightarrow \lim_n d(x_n, y_n) = 0.$$

Es fácil ver que se trata, en efecto, de una relación de equivalencia. Por ejemplo, la transitividad se debe a que si

$$\lim_n d(x_n, y_n) = \lim_n d(y_n, z_n) = 0,$$

dado $\epsilon > 0$, existe un $m \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq m$ se cumple $d(x_n, y_n) < \epsilon/2$, $d(y_n, z_n) < \epsilon/2$, con lo que

$$d(x_n, z_n) \leq d(x_n, y_n) + d(y_n, z_n) < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon,$$

luego $\lim_n d(x_n, z_n) = 0$.

Definimos la *completación* de M como el conjunto cociente \overline{M} de C_M respecto de la relación de equivalencia que acabamos de definir.

Definimos $i : M \rightarrow \overline{M}$ como la aplicación que a cada $x \in M$ le asigna la clase de equivalencia de la sucesión constante $\{x\}_{n=0}^{\infty}$. Es una aplicación inyectiva, pues si $i(x) = i(y)$, entonces la sucesión constante $\{d(x, y)\}_{n=0}^{\infty}$ converge a 0, lo cual equivale a que $d(x, y) = 0$, luego $x = y$.

Así podemos identificar a M con un subconjunto de \overline{M} .

Consideremos ahora el caso particular en que M es un cuerpo métrico K . Observamos entonces que el conjunto C_K de las sucesiones de Cauchy en K tiene estructura de anillo conmutativo y unitario con la suma y el producto dadas por

$$\{x_n\}_{n=0}^{\infty} + \{y_n\}_{n=0}^{\infty} = \{x_n + y_n\}_{n=0}^{\infty}, \quad \{x_n\}_{n=0}^{\infty} \cdot \{y_n\}_{n=0}^{\infty} = \{x_n y_n\}_{n=0}^{\infty}.$$

Aquí usamos que la suma y el producto de sucesiones de Cauchy es una sucesión de Cauchy.

Por otra parte, el conjunto I_K de las sucesiones convergentes a 0 es un ideal de C_K , pues ciertamente contiene a la sucesión nula (que es el neutro de C_K), la suma de sucesiones convergentes a 0 converge a $0 + 0 = 0$ y, si $\{x_n\}_{n=0}^\infty \in C_K$ e $\{y_n\}_{n=0}^\infty \in I_K$, entonces $\{x_n y_n\}_{n=0}^\infty \in I_K$, porque $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ está acotada por ser de Cauchy, y basta aplicar el teorema 1.24.

Ahora observamos que la relación de equivalencia que hemos definido en C_K es la dada por

$$\{x_n\}_{n=0}^\infty \sim \{y_n\}_{n=0}^\infty \leftrightarrow \lim_n (x_n - y_n) = 0 \leftrightarrow \{x_n\}_{n=0}^\infty - \{y_n\}_{n=0}^\infty \in I_K,$$

es decir, se trata de la congruencia usual módulo el ideal I_K definida en [A1 3.37], luego el cociente $\bar{K} = C_K/I_K$ tiene estructura de anillo, de modo que si tenemos dos clases $\alpha = [\{x_n\}_{n=0}^\infty]$, $\beta = [\{y_n\}_{n=0}^\infty]$, entonces

$$\alpha + \beta = [\{x_n + y_n\}_{n=0}^\infty], \quad \alpha\beta = [\{x_n y_n\}_{n=0}^\infty].$$

Los neutros 0 y 1 de \bar{K} son las clases de las sucesiones constantes correspondientes, es decir, $i(0)$ e $i(1)$.

Vamos a probar que \bar{K} es, de hecho, un cuerpo. Para ello necesitamos el teorema siguiente:

Teorema 1.42 *Si $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ es una sucesión de Cauchy en un cuerpo métrico y no converge a 0, entonces existe un $T \in R$ y un $m \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq m$ entonces $0 < T \leq |x_n|$. Además, la sucesión $\{y_n\}_{n=0}^\infty$ dada por*

$$y_n = \begin{cases} 1/x_n & \text{si } x_n \neq 0, \\ 0 & \text{si } x_n = 0, \end{cases}$$

también es de Cauchy.

DEMOSTRACIÓN: Si no existe el T indicado, tomando $\epsilon = T$ obtenemos que para todo $\epsilon > 0$ y todo $m \in \mathbb{N}$ existe un $n \geq m$ tal que $|x_n| < \epsilon$.

Definimos $\{n_k\}_{k=0}^\infty$ por recurrencia estableciendo que n_k sea el menor número natural mayor que los ya definidos y tal que $|x_{n_k}| < 1/(k+1)$. Es claro entonces que $\{x_{n_k}\}_{k=0}^\infty$ es una subsucesión de $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ convergente a 0, pero entonces, por 1.31 tenemos que la sucesión dada converge a 0, contradicción.

Para la segunda parte observamos que si $n, n' \geq m$ (el m dado por la primera parte) entonces $x_n, x_{n'} \neq 0$, luego

$$|y_{n'} - y_n| = \left| \frac{1}{x_{n'}} - \frac{1}{x_n} \right| = \frac{|x_n - x_{n'}|}{|x_{n'} x_n|} \leq \frac{|x_n - x_{n'}|}{T^2}.$$

Así, dado $\epsilon > 0$, podemos tomar un m mayor (si es preciso) que el de la primera parte de modo que si $n, n' \geq m$ se cumpla que $|x_n - x_{n'}| < T^2 \epsilon$, y así concluimos que $|y_{n'} - y_n| < \epsilon$. ■

Ahora ya es fácil comprobar que \bar{K} es un cuerpo. Para ello tomamos un $\alpha \in \bar{K}$, $\alpha \neq 0$. Esto quiere decir que $\alpha = [\{x_n\}_{n=0}^\infty]$, donde la sucesión $\{x_n\}_{n=0}^\infty$

es de Cauchy en K , pero no converge a 0. Por el teorema 1.42 sabemos que la sucesión $\{1/x_n\}_{n=0}^{\infty}$ (definida como 0 cuando $x_n = 0$, cosa que sólo puede suceder en un número finito de casos) es de Cauchy, luego define un $\beta \in K$, de modo que $\alpha\beta$ es la clase de equivalencia de una sucesión que vale 1 salvo a lo sumo en un número finito de casos. Es claro entonces que $\alpha\beta = 1$, luego α tiene inverso y \overline{K} es un cuerpo.

Se comprueba trivialmente que la aplicación $i : K \longrightarrow \overline{K}$ es un monomorfismo de cuerpos.

Por último, consideremos el caso particular en que $K = R = \mathbb{Q}$ y vamos a llamar $\mathbb{R} = \overline{\mathbb{Q}}$. Ya tenemos demostrado que \mathbb{R} es un cuerpo, y ahora vamos a definir en él una relación de orden. Conviene observar este hecho general:

Teorema 1.43 *Sea K un cuerpo y $P \subset K \setminus \{0\}$ un conjunto que tenga las propiedades siguientes:*

- a) *si $x, y \in P$, entonces $x + y, xy \in P$.*
- b) *Si $x \in K, x \neq 0$ entonces o bien $x \in P$ o bien $-x \in P$, pero no se dan ambos casos.*

Entonces, la relación dada por $x \leq y$ si y sólo si $x = y$ o $y - x \in P$ es una relación de orden total que dota a K de estructura de cuerpo ordenado.

DEMOSTRACIÓN: Tenemos que comprobar que la relación que hemos definido cumple la definición [Al 2.10] de anillo ordenado.

La relación es reflexiva por definición. Si $x \leq y, y \leq x$, pero $x \neq y$, tendríamos que $y - x \in P, -(y - x) \in P$, en contradicción con b), luego la relación es antisimétrica. Si $x \leq y \leq z$ y una de las dos desigualdades se cumple con igualdad, trivialmente $x \leq z$, y si ambas son desigualdades estrictas, entonces $y - x \in P, z - y \in P$, luego por a) $z - x = (y - x) + (z - y) \in P$, luego $x \leq z$. Más aún, si $x, y \in K, x \neq y$, entonces $y - x \neq 0$, luego por b), o bien $y - x \in P$, o bien $x - y \in P$, luego $x \leq y$ o bien $y \leq x$ (y esto se cumple trivialmente si $x = y$), luego hemos probado que se trata de una relación de orden total. Notemos que $x \in P$ equivale a $x > 0$, es decir, P es el conjunto de los elementos positivos de K .

Ahora, si $x \leq y$, entonces $x + z \leq y + z$, pues esto se cumple trivialmente si $x = y$ y, en caso de que $x < y$, tenemos que $y + z - (x + z) = y - x \in P$, luego $x + z < y + z$.

Por último, si $x, y \geq 0$, entonces $xy \geq 0$, pues esto se cumple trivialmente si $x = 0$ o $y = 0$ y, en caso contrario, tenemos que $x, y \in P$, luego $xy \in P$, luego $xy > 0$. ■

En nuestro caso, definimos $P \subset \mathbb{R}$ como el conjunto formado por las clases de equivalencia $\alpha = [\{x_n\}_{n=0}^{\infty}]$ tales que existe un $c \in \mathbb{Q}, c > 0$ y un $m \in \mathbb{N}$ de modo que para todo $n \geq m$ se cumpla $x_n \geq c$.

Esta propiedad no depende de la sucesión elegida en α , pues si $\alpha = [\{y_n\}_{n=0}^{\infty}]$, entonces, para m es suficientemente grande, tenemos $x_n \geq c$ y $|x_n - y_n| < c/2$, y entonces tiene que ser $y_n \geq c/2$, pues si fuera $y_n < c/2 < c \leq x_n$, tendríamos que $|x_n - y_n| = x_n - y_n \geq c - c/2 = c/2$.

Es inmediato comprobar que P cumple las condiciones del teorema anterior, por lo que define una relación de orden en \mathbb{R} que lo dota de estructura de cuerpo ordenado en la que los elementos positivos son los de P .

Lo que expresa esta definición es que un número real es positivo si las sucesiones que convergen a él están finalmente por encima de una cota inferior $c > 0$. Notemos que no valdría exigir que las sucesiones que convergen a él sean finalmente positivas, porque una sucesión positiva puede converger a 0.

Es obvio que la inmersión $i : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ es un monomorfismo de cuerpos ordenados, es decir, que es creciente, pues, dados dos números racionales $r < s$, hay que probar que $i(r) < i(s)$, es decir, que $i(s - r) = [\{s - r\}_{n=0}^{\infty}] \in P$, lo cual es inmediato, dado que $s - r > 0$. (En realidad esta comprobación no era necesaria, pues i es la única inmersión de \mathbb{Q} en \mathbb{R} , y tiene que ser un monomorfismo de cuerpos ordenados.)

Observemos ahora que \mathbb{R} es un cuerpo ordenado arquimediano. En efecto, si $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces $\alpha = [\{x_n\}_{n=0}^{\infty}]$, para cierta sucesión de Cauchy $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ en \mathbb{Q} , que estará acotada por un número racional r . Esto implica que $x_n \leq r$ para todo n . Tomando un número natural $m > r$, tenemos que, para todo índice n ,

$$m - x_n \geq c = m - r > 0$$

luego, por definición de la relación de orden, $i(m) - \alpha > 0$, donde $i(m)$ es un número natural de $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$, luego $\alpha < i(m)$ y α no es una cota superior de \mathbb{N} en \mathbb{R} , luego el teorema 1.8 nos da que \mathbb{R} es arquimediano.

Así pues, a partir de aquí podemos considerar a \mathbb{R} como cuerpo métrico con la distancia definida por el valor absoluto. En particular podemos hablar de sucesiones convergentes y de Cauchy en \mathbb{R} .

Podríamos identificar a \mathbb{Q} con su imagen $\tilde{\mathbb{Q}} = i[\mathbb{Q}] \subset \mathbb{R}$, pero de momento resultará más claro mantener la distinción entre los números racionales de \mathbb{Q} y sus imágenes en \mathbb{R} . De todos modos, notemos que, como i es un monomorfismo de cuerpos ordenados y, en particular, una inmersión isométrica, es claro que una sucesión $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ en \mathbb{Q} es de Cauchy si y sólo si su imagen $\{i(x_n)\}_{n=0}^{\infty}$ es de Cauchy en \mathbb{R} .

Ahora probamos el hecho crucial que ha motivado toda la construcción:

Si $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en \mathbb{Q} , entonces su imagen $\{i(x_n)\}_{n=0}^{\infty}$, no sólo es una sucesión de Cauchy en \mathbb{R} , como acabamos de observar, sino que converge a $\alpha = [\{i(x_n)\}_{n=0}^{\infty}]$. En otras palabras: cada sucesión de Cauchy de números racionales converge al número real determinado por ella misma.

En efecto, dado $\epsilon > 0$, tomamos un $k \in \mathbb{N}$ tal que $1/\epsilon < i(k)$, y tomamos n_0 tal que si $n, n' \geq n_0$, entonces

$$|x_n - x_{n'}| < \frac{1}{k+1} < \frac{1}{k},$$

o equivalentemente

$$\frac{1}{k} - |x_n - x_{n'}| > c = \frac{1}{k+1} > 0,$$

y podemos ver a x_n y a $1/k$ como términos n' -ésimos de las sucesiones constantes x_n y $1/k$, respectivamente, de modo que el miembro izquierdo es el término n' -ésimo de la sucesión $\{1/k - |x_n - x_{n'}|\}_{n'=0}^{\infty}$, cuya clase de equivalencia es

$$\frac{1}{i(k)} - |i(x_n) - \alpha| > 0,$$

lo que equivale a que

$$|i(x_n) - \alpha| < \frac{1}{i(k)} < \epsilon$$

para todo $n \geq n_0$, luego $\lim_n i(x_n) = \alpha$.

Ahora basta aplicar el teorema 1.40. Por una parte hemos probado que todo número real $\alpha \in \mathbb{R}$ es el límite de una sucesión contenida en $\tilde{\mathbb{Q}} = i[\mathbb{Q}] \subset \mathbb{R}$, a saber de la imagen por i de cualquiera de las sucesiones que forman la clase de equivalencia α , lo que significa que $\tilde{\mathbb{Q}}$ es denso en \mathbb{R} . Y por otra parte hemos probado que toda sucesión de Cauchy en $\tilde{\mathbb{Q}}$ converge en \mathbb{R} (pues converge a la clase de equivalencia de la sucesión correspondiente en \mathbb{Q}). Por lo tanto, podemos concluir que \mathbb{R} es completo como cuerpo métrico, luego, según 1.34, también como cuerpo ordenado. Así pues:

Teorema 1.44 *La compleción \mathbb{R} de \mathbb{Q} como cuerpo métrico con el valor absoluto inducido por la relación de orden es un cuerpo ordenado completo.*

De este modo hemos obtenido una construcción de un cuerpo ordenado completo alternativa a la vista en la sección 2.2 de [G] y, de acuerdo con la definición 1.13, podemos tomar como \mathbb{R} indistintamente el construido en [G] o el que acabamos de construir.

A partir de este momento consideraremos únicamente cuerpos métricos cuyos valores absolutos tomen valores en \mathbb{R} y espacios métricos cuyas distancias tomen valores en \mathbb{R} .

Esto no supone ninguna pérdida de generalidad, pues si K es un cuerpo métrico con un valor absoluto $|\cdot| : K \rightarrow R$, donde R es cualquier cuerpo ordenado arquimediano, por el teorema 1.12 existe un monomorfismo de cuerpos ordenados $\phi : R \rightarrow \mathbb{R}$, luego podemos definir el valor absoluto $|x|^* = \phi(|x|)$, con el que K pasa a ser un cuerpo métrico sobre \mathbb{R} que a todos los efectos prácticos es equivalente al dado, pues es irrelevante que el valor absoluto tome sus valores en R o en un subcuerpo de R isomorfo.

Similarmente, si M es un espacio métrico con una distancia $d : M \times M \rightarrow R$, podemos definir otra distancia $d^*(x, y) = \phi(d(x, y))$ con valores en \mathbb{R} que a todos los efectos prácticos es equivalente a la dada.

Ahora, si M es un espacio métrico arbitrario (sobre \mathbb{R}), es fácil convertir a \overline{M} en un espacio métrico. Basta observar que, por una parte, si $\{x_n\}_{n=0}^\infty, \{y_n\}_{n=0}^\infty$ son sucesiones de Cauchy en M , entonces $\{d(x_n, y_n)\}_{n=0}^\infty$ es una sucesión de Cauchy en \mathbb{R} , pues

$$\begin{aligned} |d(x_n, y_n) - d(x_{n'}, y_{n'})| &\leq |d(x_n, y_n) - d(x_{n'}, y_n)| + |d(x_{n'}, y_n) - d(x_{n'}, y_{n'})| \\ &\leq d(x_n, x_{n'}) + d(y_n, y_{n'}), \end{aligned}$$

luego, dado $\epsilon > 0$, podemos tomar $m \in \mathbb{N}$ tal que, para $n, n' \geq m$ se cumpla $d(x_n, x_{n'}) < \epsilon/2$ y $d(y_n, y_{n'}) < \epsilon/2$, con lo que $|d(x_n, y_n) - d(x_{n'}, y_{n'})| < \epsilon$. Por lo tanto, como \mathbb{R} es completo, podemos definir

$$d([\{x_n\}_{n=0}^\infty], [\{y_n\}_{n=0}^\infty]) = \lim_n d(x_n, y_n).$$

En realidad, para que esta definición sea correcta hemos de comprobar que no depende de la elección de las sucesiones que tomamos en cada clase de equivalencia. Esto se debe a que si

$$[\{x_n\}_{n=0}^\infty] = [\{x'_n\}_{n=0}^\infty], \quad [\{y_n\}_{n=0}^\infty] = [\{y'_n\}_{n=0}^\infty],$$

entonces

$$\begin{aligned} |d(x_n, y_n) - d(x'_n, y'_n)| &\leq |d(x_n, y_n) - d(x_n, y'_n)| + |d(x_n, y'_n) - d(x'_n, y'_n)| \\ &\leq d(y_n, y'_n) + d(x_n, x'_n) \end{aligned}$$

y, teniendo en cuenta que los dos últimos sumandos tienden a 0, es claro que

$$\lim_n (d(x_n, y_n) - d(x'_n, y'_n)) = 0,$$

de donde $\lim_n d(x_n, y_n) = \lim_n d(x'_n, y'_n)$.

Así pues, tenemos una aplicación $d : \overline{M} \times \overline{M} \rightarrow \mathbb{R}$, y es fácil comprobar que es una distancia. Por ejemplo, para probar la desigualdad triangular, dados $\alpha = [\{x_n\}_{n=0}^\infty], \beta = [\{y_n\}_{n=0}^\infty], \gamma = [\{z_n\}_{n=0}^\infty]$ en \overline{M} , observamos que

$$0 \leq d(x_n, y_n) + d(y_n, z_n) - d(x_n, z_n),$$

luego por el teorema 1.25, obtenemos que $0 \leq d(\alpha, \beta) + d(\beta, \gamma) - d(\alpha, \gamma)$.

Además, la aplicación $i : M \rightarrow \overline{M}$ es una inmersión isométrica. En efecto, si $x, y \in M$, es claro que la sucesión constante $\{d(x, y)\}_{n=0}^\infty$ converge a $d(x, y)$, luego $d(i(x), i(y)) = d(x, y)$. En particular, una sucesión $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ en M es de Cauchy en M si y sólo si su imagen $\{i(x_n)\}_{n=0}^\infty$ es de Cauchy en $i[M]$,

Por último, como en el caso de \mathbb{R} , ahora podemos probar que cada sucesión $\{i(x_n)\}_{n=0}^\infty$ converge en \overline{M} a la clase determinada por $\{x_n\}_{n=0}^\infty$.

En efecto, la primera afirmación es consecuencia inmediata de que i es una inmersión isométrica, y para la segunda, llamando $\alpha = [\{x_n\}_{n=0}^\infty]$, por definición

tenemos que $d(i(x_n), \alpha) = \lim_{n'} d(x_n, x_{n'})$, luego, dado $\epsilon > 0$, existe un $m \in \mathbb{N}$ tal que si $n, n' \geq m$ entonces $0 \leq d(x_n, x_{n'}) < \epsilon/2$, luego por el teorema 1.25 tenemos que $0 \leq d(i(x_n), \alpha) \leq \epsilon/2 < \epsilon$, y esto implica que $\lim_n i(x_n) = \alpha$.

Esto implica, por una parte, que $i[M]$ es denso en \overline{M} y, por el teorema 1.40, que \overline{M} es un espacio métrico completo.

En el caso en que el espacio métrico M es un cuerpo métrico K , hemos probado que \overline{K} es también un cuerpo, y ahora es fácil ver que podemos definir en él un valor absoluto que extienda al de K .

Por el caso general en que M era un espacio métrico arbitrario, sabemos que si $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ es una sucesión de Cauchy en M entonces la sucesión $\{|x_n|\}_{n=0}^\infty$ es de Cauchy en \mathbb{R} (pues $|x_n| = d(x_n, 0)$), luego podemos definir

$$|[\{x_n\}_{n=0}^\infty]| = \lim_n |x_n|,$$

y ya hemos visto que la definición es correcta en el sentido de que no depende de la elección de la sucesión en la clase de equivalencia.

Es fácil ver que la aplicación $|\cdot| : \overline{K} \rightarrow \mathbb{R}$ es un valor absoluto en \overline{K} . Por ejemplo, si $\alpha = [\{x_n\}_{n=0}^\infty]$, $\beta = [\{y_n\}_{n=0}^\infty]$, entonces $|x_n + y_n| \leq |x_n| + |y_n|$, luego $|x_n| + |y_n| - |x_n + y_n| \geq 0$ y por 1.25 resulta que $|\alpha| + |\beta| - |\alpha + \beta| \geq 0$, luego tenemos la desigualdad triangular. Por otra parte,

$$|\alpha\beta| = \lim_n |x_n y_n| = \lim_n |x_n| |y_n| = (\lim_n |x_n|)(\lim_n |y_n|) = |\alpha||\beta|.$$

La distancia en \overline{K} definida a partir del valor absoluto es la misma que ya teníamos definida al considerar a K como un mero espacio métrico, luego ya sabemos que \overline{K} es un cuerpo métrico completo.

El teorema siguiente resume lo que hemos obtenido:

Teorema 1.45 *Si M es un espacio métrico, entonces su completión \overline{M} es un espacio métrico completo tal que existe una inmersión isométrica $i : M \rightarrow \overline{M}$ de M en un subconjunto denso de \overline{M} (la cual nos permite considerar $M \subset \overline{M}$) y toda inmersión isométrica $f : M \rightarrow N$ de M en un espacio métrico completo N se extiende a una inmersión isométrica $F : \overline{M} \rightarrow N$, que será una isometría si $f[M]$ es denso en N . Lo mismo es válido para cuerpos métricos e inmersiones isométricas de cuerpos métricos.*

Podemos parafrasear este teorema diciendo que la completión de un espacio métrico (resp. de un cuerpo métrico) es el menor espacio métrico (resp. cuerpo métrico) completo que lo contiene.

En estos términos, podemos decir también que \mathbb{R} es la completión de \mathbb{Q} respecto del valor absoluto determinado por la relación de orden.

1.4 Desarrollos decimales

Ahora vamos a demostrar que todo número real está determinado por una sucesión de cifras decimales. Para ello demostramos lo siguiente:

Teorema 1.46 *Sea $k > 1$ un número natural y $x > 0$ un número real positivo. Entonces existen unos únicos números naturales n y $0 \leq c_i < k$, para todo número entero $i \leq n$, tales que, para todo número natural $N \geq 1$,*

$$\sum_{i=0}^n c_i k^i + \sum_{i=1}^N c_{-i} k^{-i} \leq x < \sum_{i=0}^n c_i k^i + \sum_{i=1}^N c_{-i} k^{-i} + k^{-N}.$$

Más explícitamente:

$$c_n k^n + \cdots + c_0 + \frac{c_{-1}}{k} + \cdots + \frac{c_{-N}}{k^N} \leq x < c_n k^n + \cdots + c_0 + \frac{c_{-1}}{k} + \cdots + \frac{c_{-N}}{k^N} + \frac{1}{k^N}.$$

DEMOSTRACIÓN: Observemos que las desigualdades del enunciado son equivalentes a

$$\sum_{i=0}^n c_i k^{N+i} + \sum_{i=1}^N c_{-i} k^{N-i} \leq k^N x < \sum_{i=0}^n c_i k^{N+i} + \sum_{i=1}^N c_{-i} k^{N-i} + 1,$$

luego también a que

$$E[k^N x] = \sum_{i=0}^n c_i k^{N+i} + \sum_{i=1}^N c_{-i} k^{N-i} = \sum_{i=0}^{n+N} c_{i-N} k^i$$

o, más explícitamente:

$$E[k^N x] = c_n k^{N+n} + \cdots + c_0 k^N + c_{-1} k^{N-1} + \cdots + c_{-N+1} k + c_{-N}.$$

Por lo tanto, c_n, \dots, c_{-N} son necesariamente las cifras de la representación en base k del número natural $E[k^N x]$. Ahora bien, tenemos que demostrar que dichas cifras forman realmente una misma sucesión, es decir, que las cifras de $E[k^{N+1} x]$ son las mismas c_n, \dots, c_{-N} que determina $E[k^N x]$ más una cifra “nueva” c_{-N-1} . Para probarlo consideramos las cifras definidas por $E[k^{N+1} x]$, es decir, las que cumplen

$$E[k^{N+1} x] = \sum_{i=0}^n c_i k^{N+1+i} + \sum_{i=1}^{N+1} c_{-i} k^{N+1-i},$$

que es equivalente a

$$\sum_{i=0}^n c_i k^{N+1+i} + \sum_{i=1}^{N+1} c_{-i} k^{N+1-i} \leq k^{N+1} x < \sum_{i=0}^n c_i k^{N+1+i} + \sum_{i=1}^{N+1} c_{-i} k^{N+1-i} + 1.$$

Dividiendo entre k , esto equivale a

$$\sum_{i=0}^n c_i k^{N+i} + \sum_{i=1}^N c_{-i} k^{N-i} + \frac{c_{-N-1}}{k} \leq k^N x < \sum_{i=0}^n c_i k^{N+i} + \sum_{i=1}^N c_{-i} k^{N-i} + \frac{c_{-N+1} + 1}{k}.$$

Pero, teniendo en cuenta que $c_{-N-1} < k$, la última fracción es menor o igual que 1, luego las desigualdades anteriores implican que

$$\sum_{i=0}^n c_i k^{N+i} + \sum_{i=1}^N c_{-i} k^{N-i} \leq k^N x < \sum_{i=0}^n c_i k^{N+i} + \sum_{i=1}^N c_{-i} k^{N-i} + 1,$$

y esto equivale a que

$$E[k^N x] = \sum_{i=0}^n c_i k^{N+i} + \sum_{i=1}^N c_{-i} k^{N-i},$$

luego, en efecto, hemos probado que las cifras definidas por $E[k^N x]$ son las mismas definidas por $E[k^{N+1} x]$ excepto la última. ■

Si, en las condiciones del teorema anterior, llamamos

$$a_N = \sum_{i=0}^n c_i k^i + \sum_{i=1}^N c_{-i} k^{-i},$$

hemos demostrado que $a_N \leq x < a_N + k^{-N}$, y es claro que la sucesión $\{a_N\}_{N=1}^{\infty}$ es monótona creciente (y está acotada superiormente por x), luego el teorema 1.28 nos da que converge. Por otro lado, $\lim_N k^{-N} = 0$, luego $a_N + k^{-N}$ converge al mismo límite y, por el criterio del emparedado,

$$x = \lim_N a_N = \sum_{i=0}^n c_i k^{N+i} + \sum_{i=1}^{\infty} c_{-i} k^{N-i}.$$

En la última expresión hemos usado la notación siguiente:

Definición 1.47 Si $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión en un cuerpo métrico K , usamos la notación $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ para referirnos a la sucesión $\left\{ \sum_{n=0}^N a_n \right\}_{N=0}^{\infty}$, y también para referirnos a su límite en caso de que exista. Las sucesiones de esta forma se llaman *series infinitas*.

Por ejemplo, si $r \in K$ cumple que $|r| < 1$, tenemos la convergencia de la serie geométrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}.$$

En efecto, basta tener en cuenta que

$$r^{N+1} - 1 = (r-1)(1+r+\dots+r^N),$$

por lo que

$$\sum_{n=0}^N r^n = \frac{1-r^{N+1}}{1-r},$$

y tras la definición 1.20 hemos visto que $\lim_N r^N = 0$, luego la serie converge a la suma indicada.

Acabamos de probar que todo número real positivo admite una expresión como suma de una serie infinita de la forma siguiente:

Definición 1.48 Si $k > 1$ es un número natural, llamaremos *desarrollos decimales en base k* a las expresiones de la forma

$$\sum_{n=0}^m c_n k^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} k^{-n},$$

donde los coeficientes c_i son números naturales $0 \leq c_i < k$.

Observemos que las series de todos los desarrollos decimales son convergentes, pues

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N c_{-n} k^{-n} &\leq \sum_{n=1}^N (k-1) \cdot k^{-n} \leq (k-1) \sum_{n=1}^{\infty} k^{-n} = \\ &= \frac{k-1}{k} \sum_{n=0}^{\infty} k^{-n} = \frac{k-1}{k(1-1/k)} = 1, \end{aligned}$$

luego la sucesión de sumas parciales es creciente y acotada, luego converge. Los números c_i se llaman *cifras decimales* (en base k) del número real $x \geq 0$ que determinan. Cuando no se especifica la base, se entiende que es $k = 10$. Como es bien conocido, la forma usual de expresar el número real determinado por unas cifras decimales es yuxtaponerlas con un punto entre c_0 y c_{-1} . Por ejemplo, la expresión

$$\sqrt{1000} = 31.622776601\dots$$

significa que

$$\sqrt{1000} = 3 \cdot 10 + 1 + \frac{6}{10} + \frac{2}{10^2} + \frac{2}{10^3} + \frac{7}{10^4} + \frac{7}{10^5} + \frac{6}{10^6} + \frac{6}{10^7} + \frac{1}{10^9} + \dots$$

Cuando las cifras decimales son nulas a partir de una de ellas, no es necesario escribir los ceros. Por ejemplo,

$$733.345000\dots = 733.345,$$

y las expresiones de este tipo se llaman *decimales exactos*.

A pesar de la unicidad del teorema 1.46, no es cierto que todo número real $x > 0$ admita un único desarrollo decimal en una base dada k . Esto se debe esencialmente al hecho siguiente:

$$\sum_{n=N}^{\infty} (k-1)k^{-n} = \frac{k-1}{k^N} \sum_{n=0}^{\infty} k^{-n} = \frac{k-1}{k^N} \frac{1}{1-1/k} = \frac{1}{k^{N-1}}.$$

Por ejemplo,

$$0.0009999\dots = 0.001.$$

El caso “típico” es el siguiente:

$$733.345 = 733.3449999\dots,$$

es decir, un decimal exacto admite una expresión decimal alternativa con una unidad menos en su última cifra decimal no nula seguida de una sucesión de cifras iguales a $k-1$.

En efecto, si $x > 0$ es de la forma

$$x = \sum_{n=0}^m c_n k^n + \sum_{n=1}^N c_{-n} k^{-n},$$

podemos tomar N de modo que, o bien $N = 0$ (es decir, x es un número natural) o bien $N > 0$ y $c_{-N} > 0$. En el segundo caso

$$\begin{aligned} x &= \sum_{n=0}^m c_n k^n + \sum_{n=1}^N c_{-n} k^{-n} = \\ &= \sum_{n=0}^m c_n k^n + \sum_{n=1}^{N-1} c_{-n} k^{-n} + (c_{-N} - 1)k^{-N} + \sum_{n=N+1}^{\infty} (k-1)k^{-n}, \end{aligned}$$

luego tenemos dos expresiones decimales para x : una exacta y otra con una sucesión de decimales finalmente igual a $k-1$. Si $x > 0$ es un número natural la cuenta es

$$x = x - 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (k-1)k^{-n}.$$

Por ejemplo: $1\ 500 = 1499.9999\dots$

Ahora bien, los decimales exactos (en una base dada) son los únicos números reales que admiten dos desarrollos decimales distintos (en dicha base). En efecto, en general, si la expresión decimal de un número real es

$$x = \sum_{n=0}^m c_n k^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} k^{-n},$$

entonces

$$\sum_{i=0}^n c_i k^i + \sum_{i=1}^N c_{-i} k^{-i} \leq x \leq \sum_{i=0}^n c_i k^i + \sum_{i=1}^N c_{-i} k^{-i} + k^{-N},$$

pues la primera desigualdad es inmediata y

$$\begin{aligned} x &= \sum_{n=0}^m c_n k^n + \sum_{n=1}^N c_{-n} k^{-n} + \sum_{n=N+1}^{\infty} c_{-n} k^{-n} \leq \\ &= \sum_{n=0}^m c_n k^n + \sum_{n=1}^N c_{-n} k^{-n} + \sum_{n=N+1}^{\infty} (k-1)k^{-n}, \end{aligned}$$

y ya hemos visto que el último término vale k^{-N} .

Ahora bien, si el desarrollo decimal de x no es finalmente igual a $k-1$, la desigualdad precedente es siempre estricta, con lo que tenemos las desigualdades

$$\sum_{i=0}^n c_i k^i + \sum_{i=1}^N c_{-i} k^{-i} \leq x < \sum_{i=0}^n c_i k^i + \sum_{i=1}^N c_{-i} k^{-i} + k^{-N}$$

y las cifras decimales son necesariamente las dadas por el teorema 1.46. En otras palabras, la única posibilidad para que el desarrollo decimal de x sea el dado por dicho teorema es que las cifras decimales sean finalmente iguales a $k-1$, en cuyo caso, según hemos visto, x es un decimal exacto.

Sólo falta probar que un decimal exacto x sólo admite dos desarrollos decimales. Uno es el dado por el teorema 1.46, que es el exacto, y sólo falta probar que sólo tiene un desarrollo “atípico”, es decir, que x sólo admite un desarrollo con cifras finalmente iguales a $k - 1$. En efecto, si x admitiera dos desarrollos distintos de ese tipo, truncándolos a partir de un decimal a partir del cual ambos desarrollos son iguales a $k - 1$ (es decir, restando a ambos números un mismo número real) obtendríamos dos desarrollos decimales exactos distintos que determinan el mismo número, y multiplicándolos por una potencia k^N adecuada obtendríamos un mismo número natural con dos expresiones distintas en base k , lo cual es imposible. Así pues:

Teorema 1.49 *Si $k > 1$ es un número natural, cada número real $x > 0$ admite un único desarrollo decimal en base k salvo que admita un desarrollo exacto, en cuyo caso admite exactamente dos desarrollos decimales, uno con una sucesión de cifras finalmente igual a 0 y otro con una sucesión finalmente igual a $k - 1$.*

Naturalmente, esto lo hemos demostrado a partir del hecho de que \mathbb{R} es un cuerpo ordenado completo, sin usar para nada las características de ninguna construcción en particular, lo que explica la unicidad salvo isomorfismo de los cuerpos ordenados completos: los elementos de un cuerpo ordenado completo son necesariamente expresiones decimales (con la salvedad de que algunos pares bien determinados de desarrollos decimales corresponden al mismo número). Las suma y el producto (y por consiguiente la relación de orden) también pueden determinarse a partir de estos desarrollos (dados dos números, truncamos sus desarrollos, sumamos o multiplicamos los números racionales obtenidos y así tenemos una sucesión que converge a la suma o al producto de los números dados).

Ejemplo: El conjunto de Cantor Vamos a describir un subconjunto de \mathbb{R} que nos será útil en diversas ocasiones. Partimos del intervalo $C_0 = [0, 1]$, que tiene longitud 1. Lo dividimos en tres subintervalos iguales y eliminamos el del medio, para formar

$$C_1 = [0, 1/3] \cup [2/3, 1],$$

que es una unión de 2 intervalos cerrados disjuntos de longitud $1/3$. Repetimos el mismo proceso con dichos intervalos, es decir, los dividimos en tres subintervalos iguales y eliminamos el central, para formar

$$C_2 = [0, 1/9] \cup [2/9, 1/3] \cup [2/3, 7/9] \cup [8/9, 1],$$

que es una unión de 4 intervalos cerrados disjuntos de longitud $1/9$.



Así, en general C_n es una unión de 2^n intervalos cerrados disjuntos de longitud $1/3^n$. Definimos el *conjunto de Cantor* como la intersección

$$\mathcal{C} = \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n \subset [0, 1].$$

Los elementos de \mathcal{C} admiten una descripción muy sencilla en términos de los desarrollos decimales de los números reales en base 3. En efecto, si consideramos decimales en base 3, tenemos que $[0, 1/3] = [0, 0.1]$ y $[2/3, 1] = [0.2, 1]$, de modo que el primer intervalo de C_1 está formado por todos los números reales cuyo desarrollo decimal empieza por 0.0 (incluyendo a $0.1 = 0.0222\dots$), y el segundo intervalo está formado por todos los números reales cuyo desarrollo decimal empieza por 0.2 (incluyendo a $1 = 0.2222\dots$).

Similarmente, $[0, 1/9] = [0, 0.01]$ está formado por todos los números cuyo desarrollo decimal empieza por 0.00 (incluyendo a $0.01 = 0.00222\dots$), y a su vez $[2/9, 1/3] = [0.01, 0.02]$ está formado por todos los números cuyo desarrollo decimal empieza por 0.01. En definitiva, C_2 está formado por todos los números reales cuyo desarrollo decimal empieza por 0.00, 0.02, 0.20 o 0.22. Similarmente, concluimos que C_3 está formado por todos los números reales cuyo desarrollo decimal empieza por una de las ocho posibilidades:

$$0.000, \quad 0.002, \quad 0.020, \quad 0.022, \quad 0.200, \quad 0.202, \quad 0.220, \quad 0.222.$$

En general, C_n está formado por los números reales cuyo desarrollo decimal en base 3 no tiene ningún 1 en sus n primeras posiciones, y, por consiguiente, el conjunto de Cantor \mathcal{C} está formado por los números reales cuyos desarrollos decimales en base 3 no contienen la cifra 1.

Por consiguiente, si llamamos $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ al conjunto de todas las sucesiones de ceros y unos, tenemos que la aplicación

$$f : \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathcal{C}$$

dada por

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2s(n)}{3^n}$$

es biyectiva. En efecto, en general un mismo número real puede admitir dos desarrollos decimales distintos, pero uno de ellos contiene necesariamente un 1, pues uno de ellos tiene que ser finalmente igual a 2 y, si no contiene unos, la cifra precedente a los doses tiene que ser un 0, luego será

$$0.xxxx0222\dots = 0.xxxx1000\dots$$

y el desarrollo alternativo contendrá un 1. Por lo tanto, al menos uno de los dos desarrollos no se obtendrá a partir de ninguna sucesión de $2^{\mathbb{N}}$. ■

1.5 El cardinal del continuo

En esta última sección demostraremos que existe una diferencia puramente conjuntista entre el conjunto de los números racionales y el de los números reales, y es que el primero es numerable y el segundo no. El concepto de numerabilidad está expuesto en el apéndice B de [A].

Teorema 1.50 \mathbb{Z} y \mathbb{Q} son conjuntos numerables.

DEMOSTRACIÓN: La aplicación $f : \{\pm 1\} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ dada por $f(e, n) = en$ es claramente suprayectiva y $|\{\pm 1\} \times \mathbb{N}| = 2 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$, luego \mathbb{Z} es numerable por el teorema [A1 B.4].

A su vez, la aplicación $g : \mathbb{Z} \times (\mathbb{N} \setminus \{0\}) \rightarrow \mathbb{Q}$ dada por $g(m, n) = m/n$ es suprayectiva, y los dos factores del dominio de g son numerables, luego concluimos igualmente que \mathbb{Q} es numerable. ■

Definición 1.51 Llamaremos $\mathfrak{c} = \mathcal{P}\mathbb{N}$ y diremos que un conjunto X tiene cardinal \mathfrak{c} , y lo representaremos por $|X| = \mathfrak{c}$ si existe $f : X \rightarrow \mathcal{P}\mathbb{N}$ biyectiva.

El teorema de Cantor prueba que los conjuntos de cardinal \mathfrak{c} no son numerables.

Si A y B son dos conjuntos, llamaremos A^B al conjunto de todas las aplicaciones $f : B \rightarrow A$.

El teorema siguiente permite probar fácilmente que casi todos los conjuntos no numerables que nos vamos a encontrar en la práctica tendrán cardinal \mathfrak{c} :

Teorema 1.52 Los conjuntos siguientes tienen cardinal \mathfrak{c} :

$\mathcal{P}\mathbb{N}$, $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, $\{1, 2, \dots, n\}^{\mathbb{N}}$ ($n \geq 2$), \mathbb{R} , $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, todo intervalo no trivial en \mathbb{R} .

DEMOSTRACIÓN: Por intervalos triviales entendemos los de la forma $[a, a]$, que tienen un elemento, y los de la forma $]a, a[$, $]a, a]$, $[a, a[$, que son vacíos.

Llamemos $I_n = \{1, \dots, n\}$. Una aplicación biyectiva $I_2^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathcal{P}\mathbb{N}$ es la dada por $f \mapsto f^{-1}[1]$ (es decir, la que hace corresponder cada subconjunto $A \subset \mathbb{N}$ con la aplicación que vale 1 en A y vale 0 en $\mathbb{N} \setminus A$). Por otro lado, si $m \leq n$, se cumple que

$$I_m^{\mathbb{N}} \subset I_n^{\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N}),$$

luego en particular tenemos aplicaciones inyectivas

$$\mathcal{P}\mathbb{N} \rightarrow I_2^{\mathbb{N}} \rightarrow I_n^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \rightarrow \mathcal{P}\mathbb{N},$$

donde la última aplicación es de hecho una biyección, la que resulta de tomar una biyección $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ y definir $F : \mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \rightarrow \mathcal{P}\mathbb{N}$ mediante $F(A) = f[A]$.

El teorema de Cantor-Bernstein implica entonces que

$$|\mathcal{P}\mathbb{N}| = |I_n^{\mathbb{N}}| = |\mathbb{N}^{\mathbb{N}}| = \mathfrak{c}.$$

Por otra parte, la aplicación $\mathbb{R} \rightarrow \mathcal{P}\mathbb{Q}$ que a cada $\alpha \in \mathbb{R}$ le asigna el conjunto $\{r \in \mathbb{Q} \mid r < \alpha\}$ es claramente inyectiva, y una biyección $\mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{N}$ induce una biyección $\mathcal{P}\mathbb{Q} \rightarrow \mathcal{P}\mathbb{N}$, luego en total tenemos una aplicación inyectiva $\mathbb{R} \rightarrow \mathcal{P}\mathbb{N}$. En el último ejemplo de la sección anterior hemos visto que el conjunto de Cantor cumple $|\mathcal{C}| = |I_2^{\mathbb{N}}| = \mathfrak{c}$. Como $\mathcal{C} \subset [0, 1] \subset \mathbb{R}$, tenemos aplicaciones inyectivas

$$I_2^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathcal{C} \rightarrow [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{P}\mathbb{N},$$

y el teorema de Cantor-Bernstein implica de nuevo que $|[0, 1]| = |\mathbb{R}| = \mathfrak{c}$.

Si $[a, b]$ es cualquier intervalo cerrado con $a < b$, se comprueba fácilmente que la aplicación $g : [0, 1] \rightarrow [a, b]$ dada por $g(t) = ta + (1-t)b$ es biyectiva, luego todos los intervalos cerrados no triviales tienen el mismo cardinal. Como todo intervalo no trivial contiene un intervalo cerrado no trivial y está contenido en \mathbb{R} , el teorema de Cantor-Bernstein implica que todos los intervalos no triviales tienen cardinal \mathfrak{c} .

Por último, una biyección $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ induce una biyección $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \rightarrow (\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$, luego basta probar que el último conjunto tiene cardinal \mathfrak{c} , pero es fácil definir biyecciones $(\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{N}^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. ■

Por supuesto, es fácil encontrar conjuntos que tengan cardinal mayor que \mathfrak{c} , como pueden ser $\mathcal{P}\mathbb{R}$ o $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Por consiguiente, el conjunto de los números irracionales es no numerable (si fuera numerable, al unirlo a \mathbb{Q} , que es numerable, obtendríamos que \mathbb{R} es numerable). Más aún, todo intervalo contiene una cantidad no numerable de números irracionales. En particular, entre dos números reales cualesquiera existen infinitos irracionales.⁷

La frontera entre la numerabilidad de \mathbb{Q} y la no numerabilidad de \mathbb{R} puede localizarse mejor. Para ello probamos un resultado auxiliar:

Teorema 1.53 *Si A es un anillo conmutativo y unitario numerable y X es un conjunto numerable no vacío, el anillo de polinomios $A[X]$ es infinito numerable.*

DEMOSTRACIÓN: Consideremos primero el caso en que $X = \{x\}$. Sea $A_n[x]$ el conjunto de los polinomios de grado $\leq n$ y veamos por inducción que es numerable. Como $A_0[x] = A$, se cumple para $n = 0$. Si vale para n , consideramos la aplicación $f : A \times A_n[x] \rightarrow A_{n+1}[x]$ dada por $f(a, p(x)) = ax^{n+1} + p(x)$. Claramente es suprayectiva, luego $A_{n+1}[x]$ es numerable.

Entonces $A[x] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n[x]$ es numerable por ser unión numerable de conjuntos numerables.

Usando que $A[x_1, \dots, x_{n+1}] = A[x_1, \dots, x_n][x]$, una simple inducción implica que el teorema vale siempre que el conjunto de indeterminadas X es finito. Por

⁷Este hecho puede probarse también mediante un argumento mucho más elemental: dados dos números reales $\alpha < \beta$, se cumple que $\alpha/\sqrt{2} < \beta/\sqrt{2}$, luego existe un número racional $\alpha/\sqrt{2} < r < \beta/\sqrt{2}$, luego $\alpha < r\sqrt{2} < \beta$, y $r\sqrt{2}$ es irracional, ya que si fuera racional también lo sería $\sqrt{2}$, por ser cociente de números racionales.

último, si X es infinito numerable, como en cada polinomio aparece un número finito de indeterminadas, se cumple que

$$A[X] = \bigcup_{Y \in \mathcal{P}^f X} A[Y]$$

luego $A[X]$ es numerable por ser unión numerable de conjuntos numerables. ■

Definición 1.54 Un número real se dice *algebraico* si es la raíz de un polinomio no nulo de $\mathbb{Q}[x]$. En caso contrario se dice *trascendente*.

Así, $\sqrt{2}$ es irracional, pero algebraico, porque es la raíz del polinomio $x^2 - 2$.

Teorema 1.55 *El conjunto de los números reales algebraicos es numerable. En particular, todo intervalo no trivial contiene infinitos números trascendentes.*

DEMOSTRACIÓN: Para cada $p \in \mathbb{Q}[x] \setminus \{0\}$, sea R_p el conjunto de sus raíces en \mathbb{R} , que es finito, pues un polinomio no nulo tiene a lo sumo tantas raíces en un cuerpo como indica su grado. Entonces el conjunto de los números reales algebraicos es

$$\bigcup_{p \in \mathbb{Q}[x] \setminus \{0\}} R_p,$$

que es unión numerable de conjuntos finitos, luego es numerable. ■

Acabamos de probar que existen infinitos números reales trascendentes, pero la prueba es esencialmente no constructiva, hasta el punto de que no nos permite justificar que ninguno en concreto lo sea.

Veamos un último resultado:

Teorema 1.56 *Si $A \subset B$, $|A| \leq \aleph_0$ y $|B| = \mathfrak{c}$, entonces $|B \setminus A| = \mathfrak{c}$.*

DEMOSTRACIÓN: En primer lugar, $B \setminus A$ tiene que ser no numerable, porque en caso contrario $B = A \cup (B \setminus A)$ sería numerable. Por el teorema [A1 B.8] podemos tomar $N \subset B \setminus A$ numerable. Sea $C = (B \setminus A) \setminus N$. Entonces

$$B = A \cup N \cup C, \quad B \setminus A = N \cup C,$$

y todas las uniones son disjuntas. Una biyección entre $A \cup N$ y N se extiende a una biyección $B \rightarrow B \setminus A$ sin más que dejar invariantes a los elementos de C . ■

Esto implica que $|\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}| = \mathfrak{c}$, y también que hay \mathfrak{c} números reales trascendentes, por ejemplo.

Capítulo II

Topología

Del mismo modo en que la teoría de anillos permite aplicar en contextos muy diversos ideas y argumentos que, en un principio, se concibieron para ser aplicados a los números naturales (como las nociones de divisibilidad, factorización única, etc.) la topología da lugar a una generalización de la misma envergadura de conceptos tales como la continuidad de funciones, la convergencia de sucesiones o el cálculo de límites. Del mismo modo que la teoría de anillos proporciona una “aritmética abstracta”, la topología proporciona una “geometría abstracta” cuyo estudio iniciamos en este capítulo.

2.1 Espacios topológicos

Para llegar a la noción de “espacio topológico” partiremos de la formalización algebraica del concepto intuitivo de “espacio”. Ésta se lleva a cabo a través de la estructura de espacio afín euclídeo tridimensional sobre un cuerpo R que cumpla unos requisitos mínimos para que se cumplan las propiedades geométricas básicas, entre los que se encuentra que R sea un subcuerpo del cuerpo \mathbb{R} de los números reales. No obstante, así como la tridimensionalidad del espacio está en la base de nuestra intuición geométrica, desde un punto de vista algebraico es posible trabajar exactamente igual con espacios afines euclídeos de cualquier dimensión finita. Recordemos que un espacio afín euclídeo E tiene asociado un espacio vectorial \vec{E} de dimensión finita en el cual hay definido un producto vectorial $\vec{E} \times \vec{E} \rightarrow \mathbb{R}$. Éste a su vez permite definir la norma de un vector como $\|\vec{v}\| = \sqrt{\vec{v}\vec{v}}$ y el ángulo entre dos vectores, mediante la relación

$$\cos \widehat{\vec{v}\vec{w}} = \frac{\vec{v}\vec{w}}{\|\vec{v}\| \|\vec{w}\|}.$$

A su vez la norma permite definir la distancia entre dos puntos de E como $d(P, Q) = \|\overrightarrow{PQ}\|$, que puede verse a su vez como la longitud del segmento que une P con Q .

Estas estructuras son demasiado particulares y restrictivas desde el punto de vista topológico. La medida de ángulos es un sinsentido en topología, y

la de longitudes tiene un interés secundario, pues no importan las medidas concretas, sino tan sólo la noción de proximidad. Ello nos lleva a una primera abstracción de estas ideas que conserva los mínimos elementos que van a tener alguna relevancia en este contexto, aunque sea marginal:

Definición 2.1 Sea \mathbb{K} un cuerpo métrico y E un espacio vectorial sobre \mathbb{K} . Una *norma* en E es una aplicación $\| \cdot \| : E \rightarrow [0, +\infty[$ que cumpla las propiedades siguientes:

- a) $\|v\| = 0$ si y sólo si $v = 0$.
- b) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$.
- c) $\|\alpha v\| = |\alpha| \|v\|$,

para $v, w \in E$ y todo $\alpha \in \mathbb{K}$.

Un *espacio normado* es un par $(E, \| \cdot \|)$ en estas condiciones. En la práctica escribiremos E , sin indicar explícitamente la norma.

Es conocido [G 3.23] que la norma derivada de un producto escalar en el espacio vectorial asociado a un espacio afín euclídeo cumple estas propiedades, pero aquí no exigimos que la norma derive de ningún producto escalar, admitimos que el espacio E tenga dimensión infinita y admitimos una clase más amplia de cuerpos de escalares.

Veamos algunos ejemplos de normas en \mathbb{R}^n :

Teorema 2.2 \mathbb{R}^n es un espacio normado con cualquiera de estas normas:

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|, \quad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}, \quad \|x\|_\infty = \max\{|x_i| \mid i = 1, \dots, n\}.$$

La única propiedad que no es inmediata es la desigualdad triangular para la segunda norma, pero dicha norma es precisamente la norma euclídea, es decir, la norma derivada del producto escalar en \mathbb{R}^n , y el hecho de que cumple las propiedades de la definición de norma es un caso particular de [G 3.23].

El hecho de que estas tres aplicaciones sean normas permite obtener un resultado más general:

Teorema 2.3 Sean E_1, \dots, E_n espacios normados. Entonces las aplicaciones siguientes son normas en $E = E_1 \times \dots \times E_n$.

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n \|x_i\|, \quad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n \|x_i\|^2}, \quad \|x\|_\infty = \max\{\|x_i\| \mid i = 1, \dots, n\}.$$

Además se cumplen las relaciones: $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty$.

DEMOSTRACIÓN: Tenemos $\|x\|_i = \|(\|x_1\|, \dots, \|x_n\|)\|_i$ para $i = 1, 2, \infty$. Usando el teorema anterior se ve inmediatamente que son normas.

$$\begin{aligned} \|x\|_\infty &= \sqrt{\|x\|_\infty^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n \|x_i\|^2} = \|x\|_2 \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n \|x_i\|^2 + 2 \sum_{i < j} \|x_i\| \|x_j\|} \\ &= \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|\right)^2} = \|x\|_1 \leq \sum_{i=1}^n \|x\|_\infty = n\|x\|_\infty. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Observemos que un cuerpo métrico \mathbb{K} es un espacio normado tomando como norma el propio valor absoluto de \mathbb{K} , y aplicando el teorema anterior con todos los espacios iguales a \mathbb{K} obtenemos que el teorema 2.2 vale con \mathbb{K} en lugar de \mathbb{R} .

Ejercicio: Probar que en un espacio normado se cumple $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$.

El concepto de norma tiene interés en nuestro contexto porque nos permitirá relacionar los conceptos topológicos con los algebraicos, pero a la hora de aislar el concepto de espacio topológico, las normas contienen todavía información irrelevante. Obtenemos un grado más de abstracción pasando al concepto de espacio métrico que ya introdujimos en el capítulo anterior, pero recordamos aquí la definición:

Definición 2.4 Una *distancia* en un conjunto M es una aplicación

$$d : M \times M \longrightarrow \mathbb{R},$$

que cumpla las propiedades siguientes:

- a) $d(x, y) \geq 0$ y $d(x, y) = 0$ únicamente cuando $x = y$,
- b) $d(x, y) = d(y, x)$,
- c) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$,

de las cuales se deduce una cuarta: $|d(x, y) - d(x, z)| \leq d(y, z)$.

Un *espacio métrico* es un par (M, d) , donde M es un conjunto y d es una distancia en M .

Todo espacio normado E es un espacio métrico con la distancia definida por $d(x, y) = \|x - y\|$. Las propiedades de la definición de norma implican inmediatamente las de la definición de distancia. En particular en \mathbb{K}^n tenemos definidas tres distancias:

$$\begin{aligned} d_1(x, y) &= \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|, & d_2(x, y) &= \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2}, \\ d_\infty(x, y) &= \max\{|x_i - y_i| \mid 1 \leq i \leq n\}. \end{aligned}$$

La geometría nos enseña que la distancia d_2 en \mathbb{R}^n es la distancia euclídea usual, es decir, la distancia que (al menos cuando $n = 1, 2, 3$) se corresponde con la noción intuitiva de distancia. Veremos que las otras distancias son formas alternativas de medir la proximidad entre puntos que, aunque no sean “la natural”, serán equivalentes a efectos topológicos (precisamente porque el valor exacto de la distancia será irrelevante, y lo único que importará es la proximidad o lejanía entre puntos).

Más en general, las fórmulas anteriores permiten definir distancias en cualquier producto finito de espacios métricos. La prueba del teorema siguiente es muy sencilla a partir de los teoremas 2.2 y 2.3.

Teorema 2.5 Sean M_1, \dots, M_n espacios métricos. Sea $M = M_1 \times \dots \times M_n$. Entonces las aplicaciones $d_1, d_2, d_\infty : M \times M \rightarrow [0, +\infty[$ definidas como sigue son distancias en M :

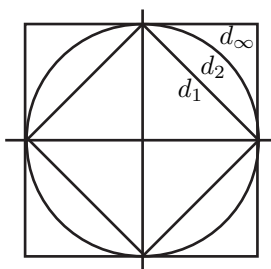
$$\begin{aligned} d_1(x, y) &= \sum_{i=1}^n d(x_i, y_i), \\ d_2(x, y) &= \sqrt{\sum_{i=1}^n d(x_i, y_i)^2}, \\ d_\infty(x, y) &= \max\{d(x_i, y_i) \mid 1 \leq i \leq n\}. \end{aligned}$$

Además se cumplen las relaciones $d_\infty(x, y) \leq d_2(x, y) \leq d_1(x, y) \leq n d_\infty(x, y)$.

Con esto estamos casi a punto de llegar al concepto general de espacio topológico. La transición la haremos mediante el concepto siguiente:

Definición 2.6 Sea M un espacio métrico, $x \in M$ y $\epsilon > 0$ (en estos casos sobrentenderemos $\epsilon \in \mathbb{R}$). Definimos

$$\begin{aligned} B_\epsilon(x) &= \{y \in M \mid d(x, y) < \epsilon\} \quad (\text{Bola abierta de centro } x \text{ y radio } \epsilon). \\ B'_\epsilon(x) &= \{y \in M \mid d(x, y) \leq \epsilon\} \quad (\text{Bola cerrada de centro } x \text{ y radio } \epsilon). \end{aligned}$$



La figura muestra las bolas de centro $(0, 0)$ y radio 1 para las tres métricas que hemos definido en \mathbb{R}^2 . Las bolas con otros centros son trasladadas de éstas, y las bolas de otros radios tienen el mismo aspecto, pero de mayor o menor tamaño.

Las bolas abiertas se diferencian de las cerradas en que las primeras no contienen los puntos del borde. El interés de las bolas reside en que una bola de centro un punto P contiene todos los puntos de alrededor de P , por pequeño que sea su radio.

Observemos que el concepto de “puntos de alrededor” es un tanto escurridizo: Según lo que acabamos de decir, ningún punto en particular (distinto de P) está alrededor de P , pues siempre podemos tomar una bola suficientemente pequeña como para que deje fuera a dicho punto. Esto significa que no podemos dar

sentido a la afirmación “ Q es un punto de alrededor de P ”, pero lo importante es que sí tiene sentido decir “El conjunto A contiene a todos los puntos de alrededor de P ”. Esto sucede cuando A contiene una bola cualquiera de centro P , y entonces diremos que A es un entorno de P . Aunque el concepto de entorno podría tomarse como concepto topológico básico, lo cierto es que es más cómodo partir de un concepto “más regular”: diremos que un conjunto es abierto si es un entorno de todos sus puntos. Los conjuntos abiertos tienen las propiedades que recoge la definición siguiente:

Definición 2.7 Una *topología* en un conjunto X es una familia \mathcal{T} de subconjuntos de X a cuyos elementos llamaremos *abiertos*, tal que cumpla las propiedades siguientes:

- a) \emptyset y X son abiertos.
- b) La unión de cualquier familia de abiertos es un abierto.
- c) La intersección de dos abiertos es un abierto.

Un *espacio topológico* es un par (X, \mathcal{T}) , donde X es un conjunto y \mathcal{T} es una topología en X . En la práctica escribiremos simplemente X en lugar de (X, \mathcal{T}) .

Sea M un espacio métrico. Diremos que un conjunto $G \subset M$ es *abierto* si para todo $x \in G$ existe un $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(x) \subset G$. Es inmediato comprobar que los conjuntos abiertos así definidos forman una topología en M , a la que llamaremos *topología inducida por la métrica*. En lo sucesivo consideraremos siempre a los espacios métricos como espacios topológicos con esta topología.

En el párrafo previo a la definición de topología hemos definido “abierto” como un conjunto que es entorno de todos sus puntos. Puesto que formalmente hemos definido los espacios topológicos a partir del concepto de abierto, ahora hemos de definir el concepto de entorno.

Si X es un espacio topológico, $U \subset X$ y $x \in U$, diremos que U es un *entorno* de x si existe un abierto G tal que $x \in G \subset U$.

Es inmediato comprobar que, en un espacio métrico, U es entorno de x si y sólo si existe un $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(x) \subset U$, es decir, si y sólo si U contiene a todos los puntos de alrededor de x , tal y como habíamos afirmado.

Ejemplo El intervalo $I = [0, 1]$, visto como subconjunto de \mathbb{R} , es entorno de todos sus puntos excepto de sus extremos 0 y 1, pues si $0 < x < 1$ siempre podemos tomar $\epsilon = \min\{x, 1 - x\}$ y entonces $B_\epsilon(x) =]x - \epsilon, x + \epsilon[\subset I$. En cambio, I no contiene todos los puntos de alrededor de 1, pues toda bola de centro 1 contiene puntos a la derecha de 1 y ninguno de ellos está en I . El caso del 0 es similar. En particular I no es abierto. ■

El teorema siguiente recoge las propiedades básicas de los entornos. La prueba es inmediata.

Teorema 2.8 Sea X un espacio topológico, $x \in X$ y E_x la familia de todos los entornos de x .

- a) Un conjunto $G \subset X$ es abierto si y sólo si es un entorno de todos sus puntos.
 b1) $X \in E_x$.
 b2) Si $U \in E_x$ y $U \subset V \subset X$ entonces $V \in E_x$.
 b3) Si $U, V \in E_x$ entonces $U \cap V \in E_x$.

Puesto que los abiertos pueden definirse a partir de los entornos, es obvio que si dos topologías sobre un mismo conjunto tienen los mismos entornos entonces son iguales. Las desigualdades del teorema 2.5 implican que una bola para una de las tres distancias definidas en el producto M contiene otra bola del mismo centro para cualquiera de las otras distancias. De aquí se sigue que un subconjunto de M es entorno de un punto para una distancia si y sólo si lo es para las demás, y de aquí a su vez que las tres distancias definen la misma topología en el producto. En particular, si \mathbb{K} es un cuerpo métrico, las tres distancias que tenemos definidas sobre \mathbb{K}^n definen la misma topología, a la que llamaremos *topología usual* o *topología euclídea* en \mathbb{K}^n .

Ésta es una primera muestra del carácter auxiliar de las distancias en topología. Cuando queramos probar un resultado puramente topológico sobre \mathbb{R}^n podremos apoyarnos en la distancia que resulte más conveniente, sin que ello suponga una pérdida de generalidad. La distancia d_2 es la distancia euclídea y por lo tanto la más natural desde un punto de vista geométrico, pero las distancias d_1 y d_∞ son formalmente más sencillas y a menudo resultan más adecuadas.

Ejemplo Es fácil definir una distancia en \mathbb{R}^n que induzca una topología distinta de la usual. De hecho, si X es un conjunto cualquiera podemos considerar la distancia $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$d(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq y, \\ 0 & \text{si } x = y \end{cases}$$

Es fácil ver que efectivamente es una distancia y para todo punto x se cumple que $B_1(x) = \{x\}$, luego $\{x\}$ es un entorno de x , luego es un abierto y, como toda unión de abiertos es abierta, de hecho todo subconjunto de X es abierto. La métrica d recibe el nombre de *métrica discreta* y la topología que induce es la *topología discreta*. Un espacio topológico cuya topología sea la discreta es un *espacio discreto*.

En un espacio discreto un punto no tiene más puntos a su alrededor que él mismo. Esta topología es la más adecuada para conjuntos como \mathbb{N} o \mathbb{Z} , pues, efectivamente, un número entero no tiene alrededor a ningún otro. ■

Las bolas abiertas de un espacio métrico son abiertas. Esto es fácil de ver intuitivamente, pero el mero hecho de que las hayamos llamado así no justifica que lo sean:

Teorema 2.9 *Las bolas abiertas de un espacio métrico son conjuntos abiertos.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $B_\epsilon(x)$ una bola abierta y sea $y \in B_\epsilon(x)$. Entonces $d(x, y) < \epsilon$. Sea $0 < \delta < \epsilon - d(x, y)$. Basta probar que $B_\delta(y) \subset B_\epsilon(x)$. Ahora bien, si $z \in B_\delta(y)$, entonces $d(z, x) \leq d(z, y) + d(y, x) < \delta + d(x, y) < \epsilon$, luego en efecto $z \in B_\epsilon(x)$. ■

2.2 Bases y subbases

Hemos visto que la topología en un espacio métrico se define a partir de las bolas abiertas. El concepto de “bola abierta” no tiene sentido en un espacio topológico arbitrario en el que no tengamos dada una distancia, sin embargo hay otras familias de conjuntos que pueden representar un papel similar.

Definición 2.10 Sea X un espacio topológico. Diremos que una familia \mathcal{B} de abiertos de X (a los que llamaremos *abiertos básicos*) es una *base* de X si para todo abierto G de X y todo punto $x \in G$ existe un abierto $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subset G$.

Si $x \in X$ diremos que una familia E de entornos (abiertos) de x (a los que llamaremos *entornos básicos* de x) es una *base de entornos* (abiertos) de x si todo entorno de x contiene un elemento de E .

En estos términos la propia definición de los abiertos métricos (junto con el hecho de que las bolas abiertas son realmente conjuntos abiertos) prueba que las bolas abiertas son una base de la topología métrica, y también es claro que las bolas abiertas de centro un punto x forman una base de entornos abiertos de x . Pero estos conceptos son mucho más generales. Pensemos por ejemplo que otras bases de un espacio métrico son las bolas abiertas de radio menor que 1, las bolas abiertas de radio racional, etc. Cualquier base determina completamente la topología y en cada ocasión puede convenir trabajar con una base distinta.

Teorema 2.11 *Sea X un espacio topológico.*

- a) *Una familia de abiertos \mathcal{B} es una base de X si y sólo si todo abierto de X es unión de abiertos de \mathcal{B} .*
- b) *Si \mathcal{B} es una base de X y $x \in X$ entonces $\mathcal{B}_x = \{B \in \mathcal{B} \mid x \in B\}$ es una base de entornos abiertos de x .*
- c) *Si para cada punto $x \in X$ el conjunto E_x es una base de entornos abiertos de x entonces $\mathcal{B} = \bigcup_{x \in X} E_x$ es una base de X .*

DEMOSTRACIÓN: a) Si \mathcal{B} es una base de X y G es un abierto es claro que G es la unión de todos los abiertos de \mathcal{B} contenidos en G , pues una inclusión es obvia y si $x \in G$ existe un $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subset G$, luego x está en la unión considerada. El recíproco es obvio.

b) Los elementos de \mathcal{B}_x son obviamente entornos de x y si U es un entorno de x entonces existe un abierto G tal que $x \in G \subset U$, y a su vez existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subset G$, luego $B \in \mathcal{B}_x$ y $B \subset U$. Esto prueba que \mathcal{B}_x es una base de entornos abiertos de x .

c) Si G es un abierto de X y $x \in G$, entonces G es un entorno de x , luego existe un entorno básico $B \in \mathcal{E}_x$ tal que $x \in B \subset G$ y ciertamente $B \in \mathcal{B}$. Como además los elementos de \mathcal{B} son abiertos, tenemos que \mathcal{B} es una base de X . ■

Una forma habitual de definir una topología en un conjunto es especificar una base o una base de entornos abiertos de cada punto. Por ejemplo, la topología métrica puede definirse como la topología que tiene por base a las bolas abiertas o como base de entornos de cada punto x a las bolas abiertas de centro x . No obstante, para que una familia de conjuntos pueda ser base de una topología ha de cumplir unas propiedades muy simples que es necesario comprobar. El teorema siguiente da cuenta de ellas.

Teorema 2.12 *Sea X un conjunto y \mathcal{B} una familia de subconjuntos de X que cumpla las propiedades siguientes:*

$$a) X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B,$$

b) Si $U, V \in \mathcal{B}$ y $x \in U \cap V$ entonces existe $W \in \mathcal{B}$ tal que $x \in W \subset U \cap V$.

Entonces existe una única topología en X para la cual \mathcal{B} es una base.

DEMOSTRACIÓN: Definimos los abiertos de X como las uniones de elementos de \mathcal{B} . Basta comprobar que estos abiertos forman realmente una topología, pues ciertamente en tal caso \mathcal{B} será una base y la topología será única.

El conjunto vacío es abierto trivialmente (o si se prefiere, por definición). El conjunto X es abierto por la propiedad a).

La unión de abiertos es obviamente abierta (una unión de uniones de elementos de \mathcal{B} es al fin y al cabo una unión de elementos de \mathcal{B}).

Sean G_1 y G_2 abiertos y supongamos que $x \in G_1 \cap G_2$. Como G_1 es unión de elementos de \mathcal{B} existe un $U \in \mathcal{B}$ tal que $x \in U \subset G_1$. Similarmente $x \in V \subset G_2$ con $V \in \mathcal{B}$. Por la propiedad b) existe $W \in \mathcal{B}$ tal que $x \in W \subset U \cap V \subset G_1 \cap G_2$. Así pues, x está en la unión de los conjuntos $W \in \mathcal{B}$ tales que $W \subset G_1 \cap G_2$, y la otra inclusión es obvia, luego $G_1 \cap G_2$ es unión de elementos de \mathcal{B} . ■

El teorema siguiente nos da las condiciones que hemos de comprobar para definir una topología a partir de una familia de bases de entornos abiertos.

Teorema 2.13 *Sea X un conjunto y para cada $x \in X$ sea \mathcal{B}_x una familia no vacía de subconjuntos de X tal que:*

a) Si $U \in \mathcal{B}_x$, entonces $x \in U$.

b) Si $U, V \in \mathcal{B}_x$, existe un $W \in \mathcal{B}_x$ tal que $W \subset U \cap V$.

c) Si $x \in U \in \mathcal{B}_y$, existe un $V \in \mathcal{B}_x$ tal que $V \subset U$.

Entonces existe una única topología para la cual cada \mathcal{B}_x es una base de entornos abiertos de x .

DEMOSTRACIÓN: Sea $\mathcal{B} = \bigcup_{x \in X} \mathcal{B}_x$. Veamos que \mathcal{B} cumple las condiciones del teorema anterior para ser base de una topología en X . Por la condición a) tenemos que $X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$.

Si $U, V \in \mathcal{B}$ y $x \in U \cap V$, entonces $U \in \mathcal{B}_y$ y $V \in \mathcal{B}_z$ para ciertos y, z . Existen $U', V' \in \mathcal{B}_x$ tales que $U' \subset U$ y $V' \subset V$ (por la condición c). Existe $W \in \mathcal{B}_x$ tal que $W \subset U' \cap V'$ (por la condición b). Así $x \in W \subset U \cap V$ con $W \in \mathcal{B}$.

Por lo tanto \mathcal{B} es la base de una topología en X para la que los elementos de cada \mathcal{B}_x son abiertos y, en particular, entornos de x . Si A es un entorno de x para dicha topología, existe un $U \in \mathcal{B}$ tal que $x \in U \subset A$. Por definición de \mathcal{B} , existe un $y \in X$ tal que $U \in \mathcal{B}_y$, y por c) existe un $V \in \mathcal{B}_x$ tal que $V \subset U \subset A$. Esto prueba que \mathcal{B}_x es una base de entornos de x .

Las bases de entornos determinan los entornos y por tanto la topología, es decir, se da la unicidad. ■

Ejemplo Consideremos dos conjuntos cualesquiera con la única condición de que no sean números reales, a los que llamaremos $+\infty$ y $-\infty$. Vamos a usar el teorema anterior para convertir en espacio topológico a $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. En primer lugar extendemos a $\overline{\mathbb{R}}$ el orden usual de \mathbb{R} estableciendo que $+\infty$ sea el máximo de $\overline{\mathbb{R}}$ y $-\infty$ sea el mínimo.¹

La idea es que queremos que “los puntos de alrededor” de $+\infty$ sean los números reales muy grandes, y “los puntos de alrededor” de $-\infty$ sean los números reales muy pequeños (muy grandes en valor absoluto, pero negativos).

Esto se concreta tomando como base de entornos abiertos de cada número real x al conjunto de los entornos abiertos de x en \mathbb{R} con la topología usual, la base de entornos abiertos de $+\infty$ está formada por los intervalos $]x, +\infty]$, donde x varía en \mathbb{R} , y la base de entornos abiertos de $-\infty$ la forman los intervalos $[-\infty, x[$, donde x varía en \mathbb{R} . Con esto estamos diciendo que un conjunto contiene a los alrededores de $+\infty$ si contiene a todos los números reales a partir de uno dado, y análogamente para $-\infty$.

Es fácil comprobar que las familias consideradas cumplen las propiedades del teorema anterior, luego definen una topología en $\overline{\mathbb{R}}$.

Teniendo en cuenta que hemos definido los entornos abiertos de los números reales como los entornos abiertos que ya tienen en la topología usual, es inmediato que un subconjunto de $\overline{\mathbb{R}}$ es abierto en la topología usual de \mathbb{R} si y sólo si lo es en la topología que hemos definido en $\overline{\mathbb{R}}$. ■

Hay un concepto análogo a los de base y base de entornos que es menos intuitivo, pero mucho más práctico a la hora de definir topologías. Se trata del concepto de subbase:

Definición 2.14 Sea X un espacio topológico. Una familia de abiertos S es una *subbase* de X si las intersecciones finitas de elementos de S forman una base de X .

¹Notemos que la construcción de Dedekind de los números reales presentada en [G 2.6] proporciona de forma natural dos conjuntos $\pm\infty$ que se ajustan a este contexto.

Por ejemplo, es fácil ver que los intervalos abiertos $]a, b[$ forman una base de \mathbb{R} (son las bolas abiertas). Por consiguiente, los intervalos de la forma $] -\infty, a[$ y $]a, +\infty[$ forman una subbase de \mathbb{R} , pues son abiertos y entre sus intersecciones finitas se encuentran todos los intervalos $]a, b[$ (notar además que cualquier familia de abiertos que contenga a una base es una base).

La ventaja de las subbases consiste en que una familia no ha de cumplir ninguna propiedad en especial para ser subbase de una topología:

Teorema 2.15 *Sea X un conjunto y S una familia de subconjuntos de X . Entonces existe una única topología en X de la cual S es subbase.*

DEMOSTRACIÓN: Sea \mathcal{B} la familia de las intersecciones finitas de elementos de S . Entonces $X = \bigcap_{G \in \mathcal{B}} G$ y obviamente la intersección de dos intersecciones finitas de elementos de S es una intersección finita de elementos de S ; luego si $U, V \in \mathcal{B}$ también $U \cap V \in \mathcal{B}$, de donde se sigue que \mathcal{B} es la base de una topología en X , de la cual S es subbase. Claramente es única, pues \mathcal{B} es base de cualquier topología de la que S sea subbase. ■

2.3 Productos y subespacios

Hemos visto que el producto de una familia finita de espacios métricos es de nuevo un espacio métrico de forma natural (o mejor dicho, de tres formas distintas pero equivalentes desde un punto de vista topológico). Ahora veremos que la topología del producto se puede definir directamente a partir de las topologías de los factores sin necesidad de considerar las distancias. Más aún, podemos definir el producto de cualquier familia de espacios topológicos, no necesariamente finita.

Definición 2.16 Sean $\{X_i\}_{i \in I}$ espacios topológicos. Consideremos su producto cartesiano $X = \prod_{i \in I} X_i$ y las proyecciones $p_i : X \rightarrow X_i$ que asignan a cada punto su coordenada i -ésima. Llamaremos *topología producto* en X a la que tiene por subbase a los conjuntos $p_i^{-1}[G]$, donde $i \in I$ y G es abierto en X_i .

Una base de la topología producto la forman los conjuntos de la forma $\bigcap_{i \in F} p_i^{-1}[G_i]$, donde F es un subconjunto finito de I y G_i es abierto en X_i .

Equivalentemente, la base está formada por los conjuntos $\prod_{i \in I} G_i$, donde cada G_i es abierto en X_i y $G_i = X_i$ salvo para un número finito de índices. Al conjunto de estos índices se le llama *soporte* del abierto básico $\prod_{i \in I} G_i$.

Si el número de factores es finito la restricción se vuelve vacía, de modo que un abierto básico en un producto $X_1 \times \cdots \times X_n$ es simplemente un conjunto de la forma $G_1 \times \cdots \times G_n$, donde cada G_i es abierto en X_i .

En lo sucesivo “casi todo i ” querrá decir “todo índice i salvo un número finito de ellos”.

Teorema 2.17 Sean $\{X_i\}_{i \in I}$ espacios topológicos, para cada i sea \mathcal{B}_i una base de X_i . Entonces los conjuntos de la forma $\prod_{i \in I} G_i$, donde cada G_i está en \mathcal{B}_i o es X_i (y casi todos son X_i) forman una base de $\prod_{i \in I} X_i$.

DEMOSTRACIÓN: Consideremos la topología \mathcal{T} en el producto que tiene por subbase a los conjuntos $p_i^{-1}[G_i]$ con G_i en \mathcal{B}_i (y, por consiguiente, tienen por base a los abiertos del enunciado). Como ciertamente estos conjuntos son abiertos para la topología producto, tenemos que todo abierto de \mathcal{T} lo es de la topología producto. Recíprocamente, un abierto subbásico de la topología producto es $p_i^{-1}[G_i]$, con G_i abierto en X_i . Entonces $G_i = \bigcup_{B \in \mathcal{A}_i} B$, donde cada A_i es un subconjunto de \mathcal{B}_i . Por lo tanto $p_i^{-1}[G_i] = \bigcup_{B \in \mathcal{A}_i} p_i^{-1}[B]$ es abierto de \mathcal{T} . Por consiguiente todo abierto de la topología producto lo es de \mathcal{T} y así ambas topologías coinciden. ■

En lo sucesivo, a pesar de que en el producto se puedan considerar otras bases, cuando digamos “abiertos básicos” nos referiremos a los abiertos indicados en el teorema anterior tomando como bases de los factores las propias topologías salvo que se esté considerando alguna base en concreto.

Tal y como anunciábamos, el producto de espacios topológicos generaliza al producto de espacios métricos (o de espacios normados). El teorema siguiente lo prueba.

Teorema 2.18 Si M_1, \dots, M_n son espacios métricos, entonces la topología inducida por las métricas de 2.5 en $M = M_1 \times \dots \times M_n$ es la topología producto.

DEMOSTRACIÓN: Como las tres métricas inducen la misma topología sólo es necesario considerar una de ellas, pero para la métrica d_∞ se cumple $B_\epsilon(x) = B_\epsilon(x_1) \times \dots \times B_\epsilon(x_n)$, luego la base inducida por la métrica es base de la topología producto. ■

La definición de topología producto es sin duda razonable para un número finito de factores. Sin embargo cuando tenemos infinitos factores hemos exigido una condición de finitud que no hemos justificado. En principio podríamos considerar en $\prod_{i \in I} X_i$ la topología que tiene por base a los productos $\prod_{i \in I} G_i$ con G_i abierto en X_i (sin ninguna restricción de finitud). Ciertamente estos conjuntos son base de una topología a la que se le llama *topología de cajas*, y el teorema siguiente muestra que no coincide con la topología producto que hemos definido. La topología producto resulta ser mucho más útil que la topología de cajas.

Teorema 2.19 Sea $\{X_i\}_{i \in I}$ una familia de espacios topológicos. Los únicos abiertos en $\prod_{i \in I} X_i$ de la forma $\prod_{i \in I} G_i \neq \emptyset$ son los abiertos básicos, es decir, los que además cumplen que cada G_i es abierto y $G_i = X_i$ para casi todo i .

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que $\prod_{i \in I} G_i$ es un abierto no vacío. Consideremos un punto $x \in \prod_{i \in I} G_i$. Existirá un abierto básico $\prod_{i \in I} H_i$ tal que

$x \in \prod_{i \in I} H_i \subset \prod_{i \in I} G_i$, luego para cada índice i se cumplirá $x_i \in H_i \subset G_i$, y como casi todo H_i es igual a X_i , tenemos que $G_i = X_i$ para casi todo i . Además tenemos que G_i es un entorno de x_i , pero dado cualquier elemento $a \in G_i$ siempre podemos formar un $x \in \prod_{i \in I} G_i$ tal que $x_i = a$, luego en realidad tenemos que G_i es un entorno de todos sus puntos, o sea, es abierto. ■

Nos ocupamos ahora de los subespacios de un espacio topológico. Es evidente que todo subconjunto N de un espacio métrico M es también un espacio métrico con la misma distancia restringida a $N \times N$. Por lo tanto tenemos una topología en M y otra en N . Vamos a ver que podemos obtener la topología de N directamente a partir de la de M , sin pasar por la métrica.

Teorema 2.20 *Sea X un espacio topológico (con topología \mathcal{T}) y $A \subset X$. Definimos $\mathcal{T}_A = \{G \cap A \mid G \in \mathcal{T}\}$. Entonces \mathcal{T}_A es una topología en A llamada topología relativa a X (o topología inducida por X) en A . En lo sucesivo sobrentenderemos siempre que la topología de un subconjunto de un espacio X es la topología relativa.*

DEMOSTRACIÓN: $A = X \cap A \in \mathcal{T}_A$, $\emptyset = \emptyset \cap A \in \mathcal{T}_A$.

Sea $C \subset \mathcal{T}_A$. Para cada $G \in C$ sea $U_G = \{U \in \mathcal{T} \mid U \cap A = G\} \neq \emptyset$ y sea V_G la unión de todos los abiertos de U_G .

De este modo V_G es un abierto en X y $V_G \cap A = G$.

$$\bigcup_{G \in C} G = \bigcup_{G \in C} V_G \cap A, \quad \text{y} \quad \bigcup_{G \in C} V_G \in \mathcal{T}, \quad \text{luego} \quad \bigcup_{G \in C} G \in \mathcal{T}_A.$$

Si $U, V \in \mathcal{T}_A$, $U = U' \cap A$ y $V = V' \cap A$ con $U', V' \in \mathcal{T}$. Entonces $U \cap V = U' \cap V' \cap A \in \mathcal{T}_A$, pues $U' \cap V' \in \mathcal{T}$. Así \mathcal{T}_A es una topología en A . ■

Ejemplo Consideremos $I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$. Resulta que $]1/2, 1]$ es abierto en I , pues $]1/2, 1] =]1/2, 2[\cap I$ y $]1/2, 2[$ es abierto en \mathbb{R} . Sin embargo $]1/2, 1]$ no es abierto en \mathbb{R} porque no es entorno de 1. Intuitivamente, $]1/2, 1]$ no contiene a todos los puntos de alrededor de 1 en \mathbb{R} (faltan los que están a la derecha de 1), pero sí contiene a todos los puntos de alrededor de 1 en I . ■

La relación entre espacios y subespacios viene perfilada por los teoremas siguientes. El primero garantiza que la topología relativa no depende del espacio desde el que relativicemos.

Teorema 2.21 *Si X es un espacio topológico (con topología \mathcal{T}) y $A \subset B \subset X$, entonces $\mathcal{T}_A = (\mathcal{T}_B)_A$.*

DEMOSTRACIÓN: Si U es abierto en \mathcal{T}_A , entonces $U = V \cap A$ con $V \in \mathcal{T}$, luego $V \cap B \in \mathcal{T}_B$ y $U = V \cap A = (V \cap B) \cap A \in (\mathcal{T}_B)_A$.

Si $U \in (\mathcal{T}_B)_A$, entonces $U = V \cap A$ con $V \in \mathcal{T}_B$, luego $V = W \cap B$ con $W \in \mathcal{T}$. Así pues, $U = W \cap B \cap A = W \cap A \in \mathcal{T}_A$. Por lo tanto $\mathcal{T}_A = (\mathcal{T}_B)_A$. ■

Teorema 2.22 Si \mathcal{B} es una base de un espacio X y $A \subset X$, entonces el conjunto $\{B \cap A \mid B \in \mathcal{B}\}$ es una base de A .

DEMOSTRACIÓN: Sea U un abierto en A y $x \in U$. Existe un V abierto en X tal que $U = V \cap A$. Existe un $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subset V$, luego $x \in B \cap A \subset V \cap A = U$. Por lo tanto la familia referida es base de A . ■

Similarmente se demuestra:

Teorema 2.23 Si \mathcal{B}_x es una base de entornos (abiertos) de un punto x de un espacio X y $x \in A \subset X$, entonces $\{B \cap A \mid B \in \mathcal{B}_x\}$ es una base de entornos (abiertos) de x en A .

Teorema 2.24 Sea M un espacio métrico y sea $A \subset M$. Entonces $d' = d|_{A \times A}$ es una distancia en A y la topología que induce es la topología relativa.

DEMOSTRACIÓN: Una base para la topología inducida por la métrica de A sería la formada por las bolas

$$B_\epsilon^{d'}(x) = \{a \in A \mid d'(x, a) < \epsilon\} = \{a \in M \mid d(x, a) < \epsilon\} \cap A = B_\epsilon^d(x) \cap A,$$

pero éstas son una base para la topología relativa por el teorema 2.22. ■

Teorema 2.25 Sea $\{X_i\}_{i \in I}$ una familia de espacios topológicos y para cada i sea $Y_i \subset X_i$. Entonces la topología inducida en $\prod_{i \in I} Y_i$ por $\prod_{i \in I} X_i$ es la misma que la topología producto de los $\{Y_i\}_{i \in I}$.

(La base obtenida por el teorema 2.22 a partir de la base usual de la topología producto es claramente la base usual de la topología producto.)

Ejercicio: Probar que la topología que hemos definido en $\overline{\mathbb{R}}$ induce en \mathbb{R} la topología euclídea.

2.4 Algunos conceptos topológicos

Dedicamos esta sección a desarrollar el lenguaje topológico, es decir, a introducir las características de un espacio y sus subconjuntos que pueden definirse a partir de su topología. Hasta ahora hemos visto únicamente los conceptos de abierto y entorno. Otro concepto importante es el dual conjuntista de “abierto”:

Definición 2.26 Diremos que un subconjunto de un espacio topológico es *cerrado* si su complementario es abierto.

Por ejemplo, un semiplano (sin su recta frontera) es un conjunto abierto, mientras que un semiplano con su frontera es cerrado, pues su complementario es el semiplano opuesto sin su borde, luego es abierto. Pronto veremos que la diferencia entre los conjuntos abiertos y los cerrados es precisamente que los primeros no contienen a los puntos de su borde y los segundos contienen todos los puntos de su borde. Es importante notar que un conjunto no tiene por qué ser ni abierto ni cerrado. Baste pensar en el intervalo $[0, 1[$.

Ejercicio: Sea $X = [0, 1] \cup]3, 4]$. Probar que $]3, 4]$ es a la vez abierto y cerrado en X .

Las propiedades de los cerrados se deducen inmediatamente de las de los abiertos:

Teorema 2.27 *Sea X un espacio topológico. Entonces:*

- a) \emptyset y X son cerrados.
- b) La intersección de cualquier familia de cerrados es un cerrado.
- c) La unión de dos cerrados es un cerrado.

Puesto que la unión de abiertos es abierta, al unir todos los abiertos contenidos en un conjunto dado obtenemos el mayor abierto contenido en él. Similarmente, al intersecar todos los cerrados que contienen a un conjunto dado obtenemos el menor cerrado que lo contiene:

Definición 2.28 Sea X un espacio topológico. Llamaremos *interior* de un conjunto $A \subset X$ al mayor abierto contenido en A . Lo representaremos por $\text{int } A$ o $\overset{\circ}{A}$. Llamaremos *clausura* de A al menor cerrado que contiene a A . Lo representaremos por $\text{cl } A$ o \overline{A} . Los puntos de $\overset{\circ}{A}$ se llaman *puntos interiores* de A , mientras que los de \overline{A} se llaman *puntos adherentes* de A .

Así pues, para todo conjunto A tenemos que $\overset{\circ}{A} \subset A \subset \overline{A}$. El concepto de punto interior es claro: un punto x es interior a un conjunto A si y sólo si A es un entorno de x . Por ejemplo, en un semiplano cerrado, los puntos interiores son los que no están en el borde. El teorema siguiente nos caracteriza los puntos adherentes.

Teorema 2.29 *Sea X un espacio topológico y A un subconjunto de X . Un punto x es adherente a A si y sólo si todo entorno de x corta a A .*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que x es adherente a A . Sea U un entorno de x . Existe un abierto G tal que $x \in G \subset U$. Basta probar que $G \cap A \neq \emptyset$. Ahora bien, en caso contrario $X \setminus G$ sería un cerrado que contiene a A , luego $\overline{A} \subset X \setminus G$, mientras que $x \in \overline{A} \cap G$.

Recíprocamente, si x tiene esta propiedad entonces $x \in \overline{A}$, ya que de lo contrario $X \setminus \overline{A}$ sería un entorno de x que no corta a A . ■

Vemos, pues, que, como su nombre indica, los puntos adherentes a un conjunto A son los que “están pegados” a A , en el sentido de que tienen alrededor puntos de A . Por ejemplo, es fácil ver que los puntos adherentes a un semiplano abierto son sus propios puntos más los de su borde. Veamos ahora que el concepto de “borde” corresponde a una noción topológica general:

Definición 2.30 Sea X un espacio topológico y $A \subset X$. Llamaremos *frontera* de A al conjunto $\partial A = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$.

Así, los puntos frontera de un conjunto son aquellos que tienen alrededor puntos que están en A y puntos que no están en A . Esto es claramente una definición general del “borde” de un conjunto. Por ejemplo, la frontera de un triángulo la forman los puntos de sus lados.

Teorema 2.31 *Sea X un espacio topológico. Se cumple:*

- a) Si $A \subset X$ entonces $\overset{\circ}{A} \subset A \subset \overline{A}$, además $\overset{\circ}{A}$ es abierto y \overline{A} es cerrado.
- b) Si $A \subset B \subset X$ y A es abierto entonces $A \subset \overset{\circ}{B}$.
- c) Si $A \subset B \subset X$ y B es cerrado entonces $\overline{A} \subset B$.
- d) Si $A \subset B \subset X$ entonces $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$ y $\overline{A} \subset \overline{B}$.
- e) Si $A, B \subset X$, entonces $\text{int}(A \cap B) = \text{int} A \cap \text{int} B$, $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
- f) $A \subset X$ es abierto si y sólo si $A = \overset{\circ}{A}$, y es cerrado si y sólo si $A = \overline{A}$.
- g) Si $A \subset B \subset X$, entonces $\overline{A}^B = \overline{A}^X \cap B$.
- h) Si $A \subset X$, entonces $\text{int}(X \setminus A) = X \setminus \text{cl} A$ y $\text{cl}(X \setminus A) = X \setminus \text{int} A$.

DEMOSTRACIÓN: Muchas de estas propiedades son inmediatas. Probaremos sólo algunas.

e) Claramente $A \cup B \subset \overline{A} \cup \overline{B}$, y el segundo conjunto es cerrado, luego $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$. Por otra parte es claro que $\overline{A} \subset \overline{A \cup B}$ y $\overline{B} \subset \overline{A \cup B}$, luego tenemos la otra inclusión. La prueba con interiores es idéntica.

g) Observemos en primer lugar que los cerrados de B son exactamente las intersecciones con B de los cerrados de X . En efecto, si C es cerrado en X entonces $X \setminus C$ es abierto en X , luego $B \cap (X \setminus C) = B \setminus C$ es abierto en B , luego $B \setminus (B \setminus C) = B \cap C$ es cerrado en B . El recíproco es similar.

Por definición, \overline{A}^X es la intersección de todos los cerrados en X que contienen a A , luego $\overline{A}^X \cap B$ es la intersección de todas las intersecciones con B de los cerrados en X que contienen a A , pero estos son precisamente los cerrados de B que contienen a A , o sea, $\overline{A}^X \cap B$ es exactamente \overline{A}^B .

h) Tenemos que $A \subset \text{cl} A$, luego $X \setminus \text{cl} A \subset X \setminus A$ y el primero es abierto, luego $X \setminus \text{cl} A \subset \text{int}(X \setminus A)$.

Por otra parte $\text{int}(X \setminus A) \subset X \setminus A$, luego $A \subset X \setminus \text{int}(X \setminus A)$, y éste es cerrado, luego $\overline{A} \subset X \setminus \text{int}(X \setminus A)$ y $\text{int}(X \setminus A) \subset X \setminus \overline{A}$. ■

En la prueba de la propiedad g) hemos visto lo siguiente:

Teorema 2.32 *Si X es un espacio topológico y $A \subset X$, los cerrados en la topología relativa de A son las intersecciones con A de los cerrados de X .*

Conviene observar que el análogo a g) para interiores es falso. Es decir, no se cumple en general que $\overset{\circ}{A}^B = \overset{\circ}{A} \cap B$. Por ejemplo, es fácil ver que en \mathbb{R} se cumple $\overset{\circ}{\mathbb{N}} = \emptyset$, luego $\overset{\circ}{\mathbb{N}} \cap \mathbb{Z} = \emptyset$, mientras que $\overset{\circ}{\mathbb{N}}^{\mathbb{Z}} = \mathbb{N}$.

Ejercicio: Probar que en un espacio normado sobre \mathbb{R} la clausura de una bola abierta es la bola cerrada del mismo radio y el interior de una bola cerrada es la bola abierta. ¿Cuál es la frontera de ambas? Dar ejemplos que muestren la falsedad de estos hechos en un espacio métrico arbitrario.

Vamos a refinar el concepto de punto adherente. Hemos visto que los puntos adherentes a un conjunto A son aquellos que tienen alrededor puntos de A . Sucede entonces que todo punto $x \in A$ es trivialmente adherente, porque x es un punto de alrededor de x y está en A . Cuando eliminamos esta posibilidad trivial tenemos el concepto de punto de acumulación:

Definición 2.33 Sea X un espacio topológico y $A \subset X$. Diremos que un punto $x \in X$ es un *punto de acumulación* de A si todo entorno U de x cumple $(U \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$. El conjunto de puntos de acumulación de A se llama *conjunto derivado* de A y se representa por A' .

Ejemplo Consideremos el conjunto $A = \{1/n \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\} \subset \mathbb{R}$. Es fácil ver que $\overline{A} = A \cup \{0\}$. Sin embargo, $A' = \{0\}$. En efecto, en general se cumple que $A' \subset \overline{A}$, pero ningún punto $1/n \in A$ es de acumulación, pues

$$\left] \frac{1}{n} - \frac{1}{n(n+1)}, \frac{1}{n} + \frac{1}{n(n+1)} \right[$$

es un entorno de $1/n$ que no corta a A salvo en este mismo punto. ■

Como ya hemos dicho, siempre es cierto que $A' \subset \overline{A}$. También es claro que un punto adherente que no esté en A ha de ser un punto de acumulación de A . En otras palabras, $\overline{A} = A \cup A'$. Los puntos de A pueden ser de acumulación o no serlo. Por ejemplo, todos los puntos de $[0, 1]$ son de acumulación, mientras que los puntos del ejemplo anterior no lo eran.

Definición 2.34 Sea X un espacio topológico y $A \subset X$. Los puntos de $A \setminus A'$ se llaman *puntos aislados* de A .

Un punto $x \in A$ es aislado si y sólo si tiene un entorno U tal que $U \cap A = \{x\}$. El entorno lo podemos tomar abierto, y entonces vemos que los puntos aislados de A son los puntos que son abiertos en la topología relativa. Vemos, pues, que un espacio es discreto si y sólo si todos sus puntos son aislados. Es el caso del ejemplo anterior.

Definición 2.35 Un subconjunto A de un espacio topológico X es *denso* si $\overline{A} = X$.

Aplicando la propiedad h) de 2.31 vemos que A es denso en X si y sólo si $X \setminus A$ tiene interior vacío, es decir, si y sólo si todo abierto de X corta a A . Esto significa que los puntos de A están “en todas partes”. Es claro que, en el caso de espacios métricos, los conjuntos densos son los mismos definidos en 1.36.

Por ejemplo, puesto que todo intervalo de números reales contiene números racionales e irracionales, es claro que \mathbb{Q} y $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ son densos en \mathbb{R} . De aquí se sigue fácilmente que \mathbb{Q}^n y $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^n$ son densos en \mathbb{R}^n .

Ejercicio: Probar que si A es abierto en un espacio X y D es denso en X entonces $A \cap D$ es denso en A .

Hay una propiedad que no cumplen todos los espacios topológicos, pero sí la práctica totalidad de espacios de interés.

Definición 2.36 Diremos que un espacio topológico X es un *espacio de Hausdorff* si para todo par de puntos distintos $x, y \in X$ existen abiertos disjuntos U y V tales que $x \in U, y \in V$ (se dice que los abiertos U y V *separan* a x e y).

Por ejemplo, si en un conjunto X con más de un punto consideramos la topología formada únicamente por los abiertos \emptyset y X (topología trivial) obtenemos un espacio que no es de Hausdorff. Se trata de un espacio patológico donde todo punto está alrededor de cualquier otro. Aunque la topología trivial es ciertamente la más patológica posible, lo cierto es que todas las topologías no de Hausdorff comparten con ella su patología, y rara vez resultan de interés. Veamos las propiedades de los espacios de Hausdorff:

Teorema 2.37 *Se cumplen las propiedades siguientes:*

- a) *En un espacio de Hausdorff, todo conjunto finito es cerrado.*
- b) *Todo espacio de Hausdorff finito es discreto.*
- c) *Todo subespacio de un espacio de Hausdorff es un espacio de Hausdorff.*
- d) *El producto de una familia de espacios de Hausdorff es un espacio de Hausdorff.*
- e) *Todo espacio métrico es un espacio de Hausdorff.*
- f) *Un espacio X es de Hausdorff si y sólo si la diagonal $\Delta = \{(x, x) \mid x \in X\}$ es cerrada en $X \times X$.*

DEMOSTRACIÓN: a) Basta probar que todo punto $\{x\}$ en un espacio de Hausdorff X es cerrado. Ahora bien, dado $y \in X \setminus \{x\}$, existen abiertos disjuntos U, V tales que $x \in U, y \in V$, luego $y \in V \subset X \setminus \{x\}$, lo que prueba que $X \setminus \{x\}$ es entorno de todos sus puntos, luego $\{x\}$ es cerrado.

b) En un espacio de Hausdorff finito todo subconjunto es cerrado, luego todo subconjunto es abierto, luego es discreto.

c) Si X es un espacio de Hausdorff y $A \subset X$, dados dos puntos $x, y \in A$, existen abiertos disjuntos U, V en X que separan a x e y , luego $U \cap A, V \cap A$ son abiertos disjuntos en A que separan a x e y .

d) Consideremos un producto de espacios de Hausdorff $\prod_{i \in I} X_i$ y dos de sus puntos x, y . Sea i_0 un índice tal que $x_{i_0} \neq y_{i_0}$. Existen abiertos U, V en X_{i_0} que separan a x_{i_0} e y_{i_0} . Entonces $p_{i_0}^{-1}[U]$ y $p_{i_0}^{-1}[V]$ son abiertos subbásicos disjuntos en el producto que separan a x e y .

e) Si X es un espacio métrico, dos de sus puntos x, y están separados por las bolas de centros x, y y radio $d(x, y)/2$.

f) La diagonal Δ es cerrada si y sólo si su complementario es abierto, si y sólo si para todo par $(x, y) \in X \times X$ con $x \neq y$ existe un abierto básico $U \times V$ en $X \times X$ tal que $(x, y) \in U \times V \subset X \times X \setminus \Delta$. Ahora bien, la condición $U \times V \subset X \times X \setminus \Delta$ equivale a $U \cap V = \emptyset$, luego la diagonal es cerrada si y sólo si X es Hausdorff. ■

Ejercicio: Probar que si un producto de espacios topológicos es un espacio de Hausdorff no vacío, entonces cada uno de los factores es un espacio de Hausdorff.

Terminamos la sección con algunas propiedades métricas, no topológicas, es decir, propiedades definidas a partir de la distancia en un espacio métrico y que no se pueden expresar en términos de su topología.

Definición 2.38 Un subconjunto A de un espacio métrico es *acotado* si existe un $M > 0$ tal que para todo par de puntos $x, y \in A$ se cumple $d(x, y) \leq M$. El *diámetro* de un conjunto acotado A es el supremo de las distancias $d(x, y)$ cuando (x, y) varía en $A \times A$.

Es fácil probar que todo subconjunto de un conjunto acotado es acotado, así como que la unión finita de conjuntos acotados está acotada. Sin embargo hemos de tener presente el hecho siguiente: dado un espacio métrico M , podemos definir $d'(x, y) = \min\{1, d(x, y)\}$. Es fácil ver que d' es una distancia en M y las bolas de radio menor que 1 para d' coinciden con las bolas respecto a d . Como estas bolas forman una base de las respectivas topologías métricas, concluimos que ambas distancias definen la misma topología. Sin embargo, respecto a d' todos los conjuntos están acotados. Esto prueba que el concepto de acotación no es topológico.

Ejercicio: Calcular el diámetro de una bola abierta en \mathbb{R}^n y en un espacio con la métrica discreta.

Definición 2.39 Si M es un espacio métrico, $A \neq \emptyset$ un subconjunto de M y $x \in M$, definimos la distancia de x a A como $d(x, A) = \inf\{d(x, y) \mid y \in A\}$.

Es evidente que si $x \in A$ entonces $d(x, A) = 0$, pues entre las distancias cuyo ínfimo determinan $d(x, A)$ se encuentra $d(x, x) = 0$. Sin embargo los puntos que cumplen $d(x, A) = 0$ no están necesariamente en A .

Teorema 2.40 Si M es un espacio métrico y $A \subset M$, entonces un punto x cumple $d(x, A) = 0$ si y sólo si x es adherente a A .

DEMOSTRACIÓN: Si $d(x, A) = 0$, para probar que es adherente basta ver que toda bola abierta de centro x corta a A . Dado $\epsilon > 0$ tenemos que $d(x, A) < \epsilon$, lo que significa que existe un $y \in A$ tal que $d(x, y) < \epsilon$, es decir, $y \in B_\epsilon(x) \cap A$. El recíproco se prueba igualmente. ■

En el caso de espacios normados podemos hacer algunas afirmaciones adicionales. La prueba del teorema siguiente es inmediata:

Teorema 2.41 *Sea E un espacio normado y $A \subset E$. Las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

- a) A es acotado.
- b) Existe un $M > 0$ tal que $\|x\| \leq M$ para todo $x \in A$.
- c) Existe un $M > 0$ tal que $A \subset B_M(0)$.

Adición de un punto infinito a un espacio métrico Hemos visto cómo dotar de estructura de espacio topológico a $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ de modo que los puntos de “alrededor” de $+\infty$ sean los números positivos grandes, y los puntos de “alrededor” de $-\infty$ sean los números negativos grandes. Esto depende de la estructura de orden de \mathbb{R} , pero si renunciamos a distinguir entre $+\infty$ y $-\infty$ podemos hacer algo similar en un espacio métrico cualquiera.

En efecto, si M es un espacio métrico, tomamos un conjunto cualquiera $\infty \notin M$ y definimos $M^\infty = M \cup \{\infty\}$. Dotamos a M^∞ de estructura de espacio topológico tomando como abiertos los abiertos de M más los conjuntos de la forma $A \cup \{\infty\}$, donde A es abierto en M y $M \setminus A$ es acotado.

Observemos que estos conjuntos forman realmente una topología. Por una parte, \emptyset y M^∞ son trivialmente abiertos. Si \mathcal{F} es una familia de abiertos de M^∞ , vamos a ver que la unión $V = \bigcup \mathcal{F}$ es abierta. Si ∞ no está en ningún elemento de \mathcal{F} , entonces V es abierto porque M es un espacio topológico: si $\infty \in U \in \mathcal{F}$, entonces, llamando $V' = V \setminus \{\infty\}$, tenemos que $V = V' \cup \{\infty\}$, $V' = \bigcup_{W \in \mathcal{F}} (W \setminus \{\infty\})$ es abierto en M y $M \setminus V' \subset M \setminus U$ es acotado, luego V también es abierto en este caso.

Finalmente, si U_1, \dots, U_n son abiertos en M^∞ y $V = U_1 \cap \dots \cap U_n$, entonces

$$V \setminus \{\infty\} = (U_1 \setminus \{\infty\}) \cap \dots \cap (U_n \setminus \{\infty\})$$

es abierto en M , por ser intersección de abiertos. Si $\infty \notin V$, directamente $V = V \setminus \{\infty\}$ es abierto en M^∞ , y si $\infty \in V$, entonces cada $U'_i = U_i \setminus \{\infty\}$ cumple que $M \setminus U'_i$ es acotado, luego

$$\bigcup_{i=1}^n (M \setminus U'_i) = M \setminus \bigcap_{i=1}^n U'_i = M \setminus (V \setminus \{\infty\})$$

es acotado, por ser unión finita de acotados.

Es inmediato que la topología inducida en M desde M^∞ es la que ya teníamos en M , y también es claro que M^∞ es un espacio de Hausdorff, porque dos puntos de M tienen entornos disjuntos en M , luego en M^∞ , y si $m \in M$, entonces $U = B_1(m)$ y $V = M^\infty \setminus B'_1(m)$ son entornos disjuntos de m e ∞ .

Si M está acotado, entonces $\{\infty\}$ es abierto en M^∞ , por lo que ∞ es un punto aislado y la construcción resulta trivial: el único punto “alrededor de ∞ ” es el propio ∞ , pero si M no está acotado, entonces los puntos alrededor de ∞ son ∞ y los puntos que están “lejos” de cualquier punto de M , en el sentido de estar fuera de cualquier bola de centro dicho punto.

Por ejemplo, si M es un espacio normado, es claro que una base de entornos de ∞ la forman los conjuntos

$$\{\infty\} \cup \{x \in M \mid \|x\| > K\}, \quad K \in \mathbb{R}. \quad \blacksquare$$

2.5 Continuidad

En [ITAn] introdujimos el concepto de función continua para el caso de funciones definidas entre subconjuntos de \mathbb{R} o de \mathbb{C} . Ahora estamos en condiciones de dar una definición general de función continua entre espacios topológicos que generaliza la definida en [ITAn].

La idea básica es que una función f es continua si envía los alrededores de un punto a los alrededores de su imagen. No exigimos que las imágenes de los puntos de alrededor de un punto x sean todos los puntos de alrededor de $f(x)$. Por ejemplo, sea S la circunferencia unidad en \mathbb{R}^2 y f la aplicación dada por

$$\begin{array}{ll} [0, 1] & \longrightarrow S \\ x & \longmapsto (\cos 2\pi x, \operatorname{sen} 2\pi x) \end{array}$$

Lo que hace f es “pegar” los extremos del intervalo en un mismo punto $(1, 0)$. Queremos que esta aplicación sea continua, y vemos que $[0, 1/4]$ es un entorno de 0 que se transforma en “medio” entorno de $(1, 0)$, en los puntos de alrededor de $(1, 0)$ contenidos en el semiplano $y > 0$. Esto no debe ser, pues, un obstáculo a la continuidad.

Pedir que los puntos de alrededor de x sean enviados a puntos de alrededor de $f(x)$ (no necesariamente a todos) es pedir que todo entorno U de $f(x)$ contenga a las imágenes de los puntos de alrededor de x , es decir, a las imágenes de un entorno de x o, equivalentemente, que $f^{-1}[U]$ contenga un entorno de x , pero esto equivale a que él mismo lo sea. Así pues:

Definición 2.42 Una aplicación $f : X \longrightarrow Y$ entre dos espacios topológicos es *continua* en un punto $x \in X$ si para todo entorno U de $f(x)$ se cumple que $f^{-1}[U]$ es un entorno de x . Diremos que f es *continua* si lo es en todos los puntos de X .

Observemos que en esta definición podemos sustituir “entorno” por “entorno básico”. En un espacio métrico podemos considerar concretamente bolas abiertas, y entonces la definición se particulariza como sigue:

Teorema 2.43 Una aplicación $f : M \longrightarrow N$ entre dos espacios métricos es continua en un punto $x \in M$ si y sólo si para todo $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $d(x, x') < \delta$ entonces $d(f(x), f(x')) < \epsilon$.

Veamos varias caracterizaciones de la continuidad:

Teorema 2.44 Sea $f : X \longrightarrow Y$ una aplicación entre espacios topológicos. Las afirmaciones siguientes son equivalentes:

- a) f es continua.
- b) Para todo abierto (básico) G de Y se cumple que $f^{-1}[G]$ es abierto en X .
- c) Para todo cerrado C de Y se cumple que $f^{-1}[C]$ es cerrado en X .
- d) Para todo $A \subset X$ se cumple $f[\overline{A}] \subset \overline{f[A]}$.
- e) Para todo $B \subset Y$ se cumple $\overline{f^{-1}[B]} \subset f^{-1}[\overline{B}]$.
- f) Para todo $B \subset Y$ se cumple $f^{-1}[\text{int } B] \subset \text{int } f^{-1}[B]$.

DEMOSTRACIÓN: a) \leftrightarrow b). Si f es continua y $x \in f^{-1}[G]$ entonces $f(x) \in G$, luego G es un entorno de $f(x)$, luego por definición de continuidad $f^{-1}[G]$ es un entorno de x , luego $f^{-1}[G]$ es abierto. Es claro que b) \rightarrow a).

Evidentemente b) \leftrightarrow c).

a) \rightarrow d). Si $x \in f[\overline{A}]$ entonces $x = f(y)$, con $y \in \overline{A}$. Si E es un entorno de x , por definición de continuidad $f^{-1}[E]$ es un entorno de y , luego $f^{-1}[E] \cap A \neq \emptyset$, de donde $E \cap f[A] \neq \emptyset$, lo que prueba que $x \in \overline{f[A]}$.

d) \rightarrow e). Tenemos que $f^{-1}[B] \subset X$, luego $f[\overline{f^{-1}[B]}] \subset \overline{f[f^{-1}[B]]} \subset \overline{B}$, luego $\overline{f^{-1}[B]} \subset f^{-1}[\overline{B}]$.

e) \rightarrow f). En efecto:

$$\begin{aligned} f^{-1}[\text{int } B] &= f^{-1}[Y \setminus (Y \setminus \text{int } B)] = X \setminus f^{-1}[Y \setminus \text{int } B] \\ &= X \setminus f^{-1}[\overline{Y \setminus B}] \subset X \setminus \overline{f^{-1}[Y \setminus B]} = X \setminus \overline{X \setminus f^{-1}[B]} \\ &= X \setminus (X \setminus \text{int } f^{-1}[B]) = \text{int } f^{-1}[B]. \end{aligned}$$

f) \rightarrow b). Si B es abierto en Y , entonces

$$f^{-1}[B] = f^{-1}[\text{int } B] \subset \text{int } f^{-1}[B] \subset f^{-1}[B],$$

luego $f^{-1}[B] = \text{int } f^{-1}[B]$ que es, por lo tanto, abierto. \blacksquare

Ahora vamos a probar una serie de resultados generales que nos permitirán reconocer en muchos casos la continuidad de una aplicación de forma inmediata. De la propia definición de continuidad se sigue obviamente:

Teorema 2.45 Si $f : X \rightarrow Y$ es continua en un punto x y $g : Y \rightarrow Z$ es continua en $f(x)$, entonces $f \circ g$ es continua en x . En particular, la composición de aplicaciones continuas es una aplicación continua.

Otro hecho básico es que la continuidad depende sólo de la topología en la imagen y no de la del espacio de llegada.

Teorema 2.46 Sea $f : X \rightarrow Y$ una aplicación entre espacios topológicos. Entonces f es continua en un punto $x \in X$ como aplicación $f : X \rightarrow Y$ si y sólo si lo es como aplicación $f : X \rightarrow f[X]$.

DEMOSTRACIÓN: Un entorno de $f(x)$ en $f[X]$ es $U \cap f[X]$, donde U es un entorno de $f(x)$ en Y , pero $f^{-1}[U \cap f[X]] = f^{-1}[U]$, luego es indistinto considerar entornos en $f[X]$ o en Y . ■

Teniendo en cuenta que la aplicación identidad en un conjunto es obviamente continua, de los teoremas anteriores se deduce inmediatamente el que sigue:

Teorema 2.47 *Si X es un espacio topológico y $A \subset X$, entonces la inclusión $i : A \rightarrow X$ dada por $i(x) = x$ es continua. Por tanto, si $f : X \rightarrow Y$ es continua en un punto $x \in A$, la restricción $f|_A = i \circ f$ es continua en x .*

En particular la restricción de una aplicación continua a un subconjunto es también continua. El recíproco no es cierto, pero se cumple lo siguiente:

Teorema 2.48 *Dada una aplicación $f : X \rightarrow Y$, si A es un entorno de un punto $x \in X$ y $f|_A$ es continua en x , entonces f es continua en x .*

DEMOSTRACIÓN: Si U es un entorno de $f(x)$ en Y , entonces $(f|_A)^{-1}[U] = f^{-1}[U] \cap A$ es un entorno de x en A , luego existe un entorno G de x en X de manera que $x \in G \cap A = f^{-1}[U] \cap A$, luego en particular $x \in G \cap A \subset f^{-1}[U]$, y $G \cap A$ es un entorno de x en X , luego $f^{-1}[U]$ también lo es. ■

Esto significa que la continuidad es una propiedad local, es decir, el que una función sea continua o no en un punto es un hecho que sólo depende del comportamiento de la función en un entorno del punto. En particular, si cubrimos un espacio topológico por una familia de abiertos, para probar que una aplicación es continua basta ver que lo es su restricción a cada uno de los abiertos. Esto es cierto también si cubrimos el espacio con cerrados a condición de que sean un número finito:

Teorema 2.49 *Sea $f : X \rightarrow Y$ una aplicación entre espacios topológicos. Sean C_1, \dots, C_n subconjuntos cerrados de X tales que $X = C_1 \cup \dots \cup C_n$. Entonces f es continua si y sólo si cada $f|_{C_i}$ es continua.*

DEMOSTRACIÓN: Una implicación es obvia. Si las restricciones son continuas, entonces dado un cerrado C de Y , se cumple que

$$f^{-1}[C] = (f^{-1}[C] \cap C_1) \cup \dots \cup (f^{-1}[C] \cap C_n) = (f|_{C_1})^{-1}[C] \cup \dots \cup (f|_{C_n})^{-1}[C].$$

Ahora, cada $(f|_{C_i})^{-1}[C]$ es cerrado en C_i , luego es la intersección con C_i de un cerrado de X , luego es la intersección de dos cerrados en X , luego es cerrado en X . Así pues, $f^{-1}[C]$ es la unión de un número finito de cerrados de X , luego es cerrado en X . Esto prueba que f es continua. ■

Teorema 2.50 *Si $\{X_i\}_{i \in I}$ es una familia de espacios topológicos, las proyecciones $p_i : \prod_{i \in I} X_i \rightarrow X_i$ son funciones continuas.*

DEMOSTRACIÓN: Las antiimágenes de abiertos en X_i son abiertos básicos del producto. ■

Ejercicio: Probar que la topología producto es la menor topología que hace continuas a las proyecciones.

Teorema 2.51 Si $\{X_i\}_{i \in I}$ es una familia de espacios topológicos y X es un espacio topológico, entonces una aplicación $f : X \rightarrow \prod_{i \in I} X_i$ es continua si y sólo si lo son todas las funciones $f_i = f \circ p_i$.

DEMOSTRACIÓN: Si f es continua las funciones $f \circ p_i$ también lo son por ser composición de funciones continuas.

Si cada $f \circ p_i$ es continua, sea $A = \prod_{i \in I} A_i$ un abierto básico del producto.

Sean i_1, \dots, i_n los índices tales que $A_{i_j} \neq X_{i_j}$. Entonces $f^{-1}[p_{i_j}^{-1}[A_{i_j}]] = (f \circ p_{i_j})^{-1}[A_{i_j}]$ es abierto en X , pero

$$A = \bigcap_{j=1}^n p_{i_j}^{-1}[A_{i_j}] \quad \text{y} \quad f^{-1}[A] = \bigcap_{j=1}^n f^{-1}[p_{i_j}^{-1}[A_{i_j}]]$$

es abierto en X . ■

Así, por ejemplo, para probar que la aplicación $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $f(x) = (x + 1, x^2)$ es continua, basta probar que lo son las aplicaciones $x + 1$ y x^2 .

Definición 2.52 Sean E y F espacios normados sobre un cuerpo métrico \mathbb{K} . Una aplicación $f : E \rightarrow F$ tiene la *propiedad de Lipschitz* si existe un $M > 0$ tal que para todos los vectores $v, w \in E$ se cumple que $\|f(v) - f(w)\| \leq M\|v - w\|$.

Teorema 2.53 Las aplicaciones con la propiedad de Lipschitz son continuas.

DEMOSTRACIÓN: Sea $f : E \rightarrow F$ una aplicación con la propiedad de Lipschitz con constante M . Vamos a aplicar el teorema 2.43. Dado $\epsilon > 0$ tomamos $\delta = \epsilon/M$. Así, si $\|v - w\| < \delta$, entonces $\|f(v) - f(w)\| \leq M\|v - w\| < \epsilon$. ■

Por ejemplo, es fácil ver que si E es un espacio normado entonces la norma $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}$ tiene la propiedad de Lipschitz con constante $M = 1$, luego es una aplicación continua. Un ejemplo menos trivial es el de la suma:

Teorema 2.54 Sea E un espacio normado. Entonces la suma $+: E \times E \rightarrow E$ tiene la propiedad de Lipschitz, luego es continua.

DEMOSTRACIÓN: Consideraremos a $E \times E$ como espacio normado con la norma $\|\cdot\|_1$. Entonces, si $(u, v), (a, b) \in E \times E$, tenemos que

$$\begin{aligned} \|(u + v) - (a + b)\| &= \|(u - a) + (v - b)\| \leq \|u - a\| + \|v - b\| \\ &= \|(u - a, v - b)\|_1 = \|(u, v) - (a, b)\|_1. \end{aligned}$$

■

El producto no cumple la propiedad de Lipschitz, pero aun así es continuo:

Teorema 2.55 Sea E un espacio normado sobre un cuerpo métrico \mathbb{K} . El producto $\cdot : \mathbb{K} \times E \rightarrow E$ es una aplicación continua.

DEMOSTRACIÓN: Veamos que el producto es continuo en un punto (λ, x) de $\mathbb{K} \times E$. Usaremos la norma $\| \cdot \|_\infty$ en $\mathbb{K} \times E$. Dado $\epsilon > 0$, sea $(\lambda', x') \in \mathbb{K} \times E$.

$$\|\lambda'x' - \lambda x\| = \|\lambda'(x' - x) + (\lambda' - \lambda)x\| \leq |\lambda'| \|x' - x\| + |\lambda' - \lambda| \|x\|.$$

Tomemos ahora $0 < \delta < 1$ que cumpla además

$$\delta < \frac{\epsilon}{|\lambda| + \|x\| + 1} < \epsilon.$$

Así si $\|(\lambda', x') - (\lambda, x)\|_\infty < \delta$, entonces $|\lambda' - \lambda| < \delta$ y $\|x' - x\| < \delta$. En particular $|\lambda'| \leq |\lambda| + \delta < |\lambda| + 1$. Así

$$\|\lambda'x' - \lambda x\| < \frac{|\lambda'|\epsilon}{|\lambda| + \|x\| + 1} + \frac{\|x\|\epsilon}{|\lambda| + \|x\| + 1} < \epsilon. \quad \blacksquare$$

Definición 2.56 Un espacio vectorial topológico es un par (V, \mathcal{T}) , donde V es un espacio vectorial sobre un cuerpo métrico \mathbb{K} y \mathcal{T} es una topología de Hausdorff sobre V de modo que las aplicaciones $+ : V \times V \rightarrow V$ y $\cdot : \mathbb{K} \times V \rightarrow V$ son continuas.

Hemos demostrado que todo espacio normado es un espacio vectorial topológico.

En general, si X es un conjunto y V es un espacio vectorial sobre un cuerpo K , el conjunto V^X de todas las aplicaciones de X en V es un espacio vectorial con las operaciones dadas por

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad (\alpha f)(x) = \alpha f(x).$$

Si X e Y son espacios topológicos, llamaremos $C(X, Y)$ al conjunto de todas las aplicaciones continuas de X en Y . Es frecuente abreviar $C(X) = C(X, \mathbb{R})$.

Si X es un espacio topológico y V un espacio vectorial topológico, entonces $C(X, V)$ resulta ser un subespacio vectorial de V^X , pues la suma de dos funciones continuas f y g puede obtenerse como composición de la aplicación $h : X \rightarrow V \times V$ dada por $h(x) = (f(x), g(x))$, que es continua, y la suma en V , que también lo es, luego $f + g$ es continua. Similarmente se prueba que si $\alpha \in \mathbb{K}$ y $f \in C(X, V)$, entonces $\alpha f \in C(X, V)$.

El espacio \mathbb{K}^X tiene también estructura de anillo conmutativo y unitario con el producto dado por $(fg)(x) = f(x)g(x)$. Como el producto $\cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ es continuo (tomando $E = \mathbb{K}$ en el teorema anterior), resulta que $C(X, \mathbb{K})$ es un subanillo de \mathbb{K}^X .

En general, se define una K -álgebra como una cuádrupla $(A, +, \cdot, \circ)$, donde la terna $(A, +, \cdot)$ es un espacio vectorial sobre un cuerpo K , la terna $(A, +, \circ)$ es un anillo unitario y además $\alpha(ab) = (\alpha a)b = a(\alpha b)$ para todo $\alpha \in K$, y todos los $a, b \in A$.

Tenemos, pues, que si X es un espacio topológico, entonces $C(X, \mathbb{K})$ es una \mathbb{K} -álgebra de funciones. El espacio $C(X, \mathbb{K})$ contiene un subcuerpo isomorfo a \mathbb{K} , a saber, el espacio de las funciones constantes. Cuando no haya confusión identificaremos las funciones constantes con los elementos de \mathbb{K} , de modo que, por ejemplo, 2 representará a la función que toma el valor 2 sobre todos los puntos de X .

Más aún, si $p(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, el polinomio p determina una única función evaluación $p : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}$, de modo que los polinomios constantes se corresponden con las funciones constantes y la indeterminada x_i con la proyección en la i -ésima coordenada. Como todo polinomio es combinación de sumas y productos de constantes e indeterminadas, podemos concluir que $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n] \subset C(\mathbb{K}^n, \mathbb{K})$.

Por ejemplo, la aplicación $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $f(x, y, z) = (3x - 2yz, xyz)$ es claramente continua.

Teorema 2.57 *Si \mathbb{K} es un cuerpo métrico, la aplicación $h : \mathbb{K} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{K}$ dada por $h(x) = 1/x$ es continua.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $x \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Sea $\delta = |x|/2$. Si $y \in B_\delta(x)$ entonces $|x| - |y| \leq ||x| - |y|| \leq |x - y| < \delta$, luego $|y| > |x| - \delta = \delta$.

Dado $\epsilon > 0$, sea $\delta' < \delta$, $\delta' < \delta|x|\epsilon$. Así, si $|y - x| < \delta'$ tenemos

$$\left| \frac{1}{y} - \frac{1}{x} \right| = \frac{|y - x|}{|y||x|} < \frac{\delta|x|\epsilon}{\delta|x|} = \epsilon. \quad \blacksquare$$

Consecuentemente, si $f \in C(X, \mathbb{K})$ y f no se anula en X , podemos definir la función $1/f \in C(X, \mathbb{K})$ mediante $(1/f)(x) = 1/f(x)$.

Por ejemplo, la función $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \frac{x^2}{x - 1}$$

es obviamente continua.

Teorema 2.58 *La función $\sqrt{\cdot} : [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$ es continua.*

DEMOSTRACIÓN: Basta notar que

$$\sqrt{x} \in]a, b[\Leftrightarrow a < \sqrt{x} < b \Leftrightarrow a^2 < x < b^2 \Leftrightarrow x \in]a^2, b^2[.$$

Esto significa que la antiimagen del intervalo $]a, b[$ es el intervalo $]a^2, b^2[$. Similarmente se ve que la antiimagen de un intervalo $[0, b[$ es el intervalo $[0, b^2[$ y, como estos intervalos constituyen una base de $[0, +\infty[$, tenemos que $\sqrt{\cdot}$ es una función continua. \blacksquare

Teorema 2.59 *Sea M un espacio métrico y $A \neq \emptyset$ un subconjunto de M . Entonces las aplicaciones $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ y $d(\cdot, A) : M \rightarrow \mathbb{R}$ son continuas.*

DEMOSTRACIÓN: Consideremos en $M \times M$ la distancia d_∞ . Dado un par $(x, y) \in M \times M$, y un $\epsilon > 0$, basta probar que si (x', y') dista de (x, y) menos de $\epsilon/2$, es decir, si se cumple $d(x, x') < \epsilon/2$ y $d(y, y') < \epsilon/2$, entonces tenemos $|d(x, y) - d(x', y')| < \epsilon$. En efecto, en tal caso

$$d(x, y) \leq d(x, x') + d(x', y') + d(y', y) < d(x', y') + \epsilon,$$

luego $d(x, y) - d(x', y') < \epsilon$, e igualmente se llega a $d(x', y') - d(x, y) < \epsilon$, luego efectivamente $|d(x, y) - d(x', y')| < \epsilon$.

Para probar la continuidad de $d(\cdot, A)$ en un punto x observamos que

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y).$$

En efecto, para todo $z \in A$ se cumple $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$. De aquí se sigue claramente $d(x, A) \leq d(x, y) + d(y, z)$, y tomando el ínfimo en z vemos que $d(x, A) \leq d(x, y) + d(y, A)$. Similarmente se prueba $d(y, A) \leq d(x, y) + d(x, A)$, de donde se sigue la relación con valores absolutos. A su vez esta relación implica que si $d(x, y) < \epsilon$, entonces $|d(x, A) - d(y, A)| < \epsilon$, lo que expresa la continuidad de la aplicación. ■

Para terminar con las propiedades generales de las aplicaciones continuas probaremos un hecho de interés teórico:

Teorema 2.60 Sean $f, g : X \rightarrow Y$ aplicaciones continuas, $D \subset X$ un conjunto denso tal que $f|_D = g|_D$ y supongamos que Y es un espacio de Hausdorff. Entonces $f = g$.

DEMOSTRACIÓN: Sea $h : X \rightarrow Y \times Y$ dada por $h(x) = (f(x), g(x))$. Claramente es continua y $h[D] \subset \Delta$, donde

$$\Delta = \{(y, y) \mid y \in Y\}$$

es un cerrado en $Y \times Y$ (por 2.37). Por lo tanto $h[X] = h[\overline{D}] \subset \overline{h[D]} \subset \Delta$, de donde $f = g$. ■

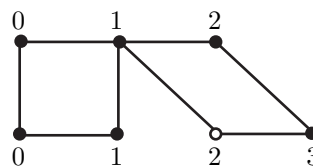
Definición 2.61 Una aplicación biyectiva $f : X \rightarrow Y$ entre dos espacios topológicos es un *homeomorfismo* si f y su inversa son ambas continuas. Dos espacios topológicos son *homeomorfos* si existe un homeomorfismo entre ellos.

Un homeomorfismo induce una biyección entre los abiertos de los dos espacios, por lo que ambos son topológicamente indistinguibles. Es claro que cualquier propiedad definida exclusivamente a partir de la topología se conserva por homeomorfismos, luego dos espacios homeomorfos tienen las mismas propiedades topológicas.

Es importante notar que no toda biyección continua es un homeomorfismo. Por ejemplo, la identidad $I : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, cuando en el primer espacio consideramos la topología discreta y en el segundo la euclídea es biyectiva y continua, pero no un homeomorfismo. Veamos un ejemplo más intuitivo:

Ejemplo Sea $f : [0, 1] \cup]2, 3] \longrightarrow [0, 2]$ la aplicación dada por

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ x - 1 & \text{si } 2 < x \leq 3 \end{cases}$$



Es fácil ver que f es biyectiva, y es continua porque sus restricciones a los abiertos $[0, 1]$ y $]2, 3]$ de su dominio son ambas continuas (son polinomios). Sin embargo no es un homeomorfismo. La aplicación f^{-1} es continua en todos los puntos de $[0, 2]$ excepto en $x = 1$. En efecto, $[0, 1]$ es un entorno de $f^{-1}(1) = 1$, pero la antiimagen de este intervalo es el mismo $[0, 1]$, que no es un entorno de 1 en $[0, 2]$. En los demás puntos es continua, pues f^{-1} restringida a los abiertos de su dominio $[0, 1[$ y $]1, 2]$ es polinómica.

Lo que sucede es que, a pesar de ser biyectiva, f está “pegando” los intervalos $[0, 1]$ y $]2, 3]$ en el intervalo $[0, 2]$, por lo que f^{-1} “corta” éste por el punto 1. En general, si una aplicación continua es una aplicación que no corta, aunque puede pegar, un homeomorfismo es una aplicación que no corta ni pega. Para que no pegue ha de ser biyectiva, pero acabamos de ver que esto no es suficiente. El ejemplo de la topología discreta se interpreta igual: los puntos de \mathbb{R} con la topología discreta están todos “separados” entre sí, luego al pasar a \mathbb{R} con la topología euclídea los estamos “pegando”, aunque no identifiquemos puntos. ■

Definición 2.62 Una aplicación $f : X \longrightarrow Y$ entre dos espacios topológicos es *abierto* si para todo abierto A de X , se cumple que $f[A]$ es abierto en Y .

De este modo, un homeomorfismo es una biyección continua y abierta. La propiedad de ser abierto no es muy intuitiva y tampoco es muy frecuente (salvo en el caso de los homeomorfismos). Sin embargo es de destacar el hecho siguiente:

Teorema 2.63 Las proyecciones de un espacio producto en cada uno de sus factores son aplicaciones abiertas.

DEMOSTRACIÓN: Basta ver que la proyección de un abierto básico es un abierto, pero los abiertos básicos son productos de abiertos, y las proyecciones son sus factores. ■

Definición 2.64 La *gráfica* de una aplicación $f : X \longrightarrow Y$ es el conjunto²

$$\{(x, f(x)) \in X \times Y \mid x \in X\}.$$

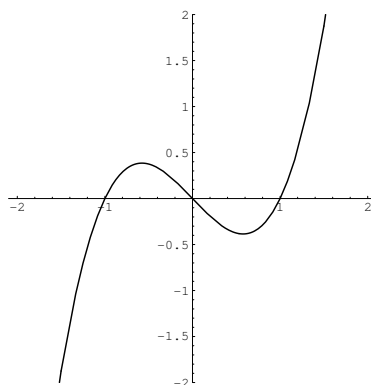
En los casos de funciones $f : A \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$, donde $m + n \leq 3$ la gráfica de f tiene una interpretación en el plano o espacio euclídeo intuitivos, y esta representación permite reconocer rápidamente las características de f . El resultado más importante por lo que a la continuidad se refiere es el siguiente:

²Observemos que desde el punto de vista de la teoría de conjuntos la gráfica de una función f es la propia función f como conjunto.

Teorema 2.65 Si $f : X \rightarrow Y$ es una aplicación continua, entonces la aplicación $x \mapsto (x, f(x))$ es un homeomorfismo entre X y la gráfica de f .

DEMOSTRACIÓN: La aplicación es obviamente biyectiva y continua. Su inversa es la restricción a la gráfica de la proyección sobre el primer factor de $X \times Y$, luego también es continua. ■

Ejemplo La gráfica del polinomio $x^3 - x$ es la que se muestra en la figura. Veamos que es una línea ondulada. Podemos considerarla como una imagen “típica” de espacio homeomorfo a \mathbb{R} . Se obtiene deformando la recta “elásticamente”, sin cortarla ni pegarla. Pero notemos que la aplicación f no es un homeomorfismo, la gráfica muestra cómo transforma a \mathbb{R} en su imagen: ésta resulta de “aplastar” la curva sobre el eje vertical, con lo que \mathbb{R} se “pliega” sobre sí mismo, de modo que parte de sus puntos se superponen tres a tres.

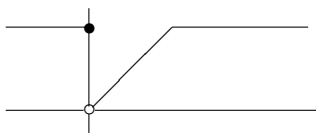


Veamos ahora un ejemplo de gráfica de una función discontinua. ■

Ejemplo Consideremos la función $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Su gráfica es la siguiente:



Es claro que f es continua en todo punto distinto de 0. En efecto, su restricción al abierto $]-\infty, 0[$ es constante, luego continua, su restricción al abierto $]0, +\infty[$ también es continua, pues este abierto es a su vez unión de dos cerrados, $]0, 1]$ y $[1, +\infty[$, en los cuales f es continua, pues en el primero es el polinomio x y en el segundo es constante. Es fácil ver que f no es continua en 0.

La gráfica de f no es homeomorfa a \mathbb{R} , aunque no estamos en condiciones de probarlo ahora. Es fácil ver que $x \mapsto (x, f(x))$ no es un homeomorfismo, pero esto no prueba que no exista otra biyección que sí lo sea. De todos modos, intuitivamente vemos que la gráfica está formada por dos piezas, por lo que para transformar \mathbb{R} en la gráfica es necesario “cortar” por algún punto. ■

Ejemplo Los homeomorfismos no pueden “cortar” ni “pegar”, pero sí “estirar” arbitrariamente un conjunto. Por ejemplo, la homotecia $f(x) = ax$, donde $a > 0$ transforma el intervalo $[-1, 1]$ en el intervalo $[-a, a]$. Las traslaciones $x \mapsto x + b$ son claramente homeomorfismos de \mathbb{R} , luego combinando homotecias y traslaciones podemos construir un homeomorfismo entre cualquier par de intervalos cerrados de la forma $[a, b]$. También es claro que cualquier par de intervalos abiertos $]a, b[$ son homeomorfos entre sí, al igual que cualquier par de intervalos semiabiertos $[a, b[$ y $]a, b]$. En la sección siguiente veremos que también es posible “estirar infinitamente” un intervalo, de modo que, por ejemplo, $]0, 1[$ es homeomorfo a \mathbb{R} . ■

La topología euclídea Sea \mathbb{K} un cuerpo métrico. Entonces toda aplicación lineal $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ es continua, pues cada una de sus funciones coordenadas es un polinomio. En particular todo automorfismo de \mathbb{K}^n es un homeomorfismo. Si V es cualquier \mathbb{K} -espacio vectorial de dimensión finita n , existe un isomorfismo $f : V \rightarrow \mathbb{K}^n$. Podemos considerar la topología en V formada por los conjuntos $f^{-1}[G]$, donde G es abierto en \mathbb{K}^n para la topología euclídea. Es claro que V es así un espacio topológico homeomorfo a \mathbb{K}^n . Además, la topología en V no depende de la elección de f , pues si $g : V \rightarrow \mathbb{K}^n$ es cualquier otro isomorfismo y G es un abierto en \mathbb{K}^n , entonces $g^{-1}[G] = f^{-1}[(g^{-1} \circ f)[G]]$ y $(g^{-1} \circ f)[G]$ es un abierto en \mathbb{K}^n , porque $g^{-1} \circ f$ es un isomorfismo y por consiguiente un homeomorfismo.

Más aún, la aplicación $\| \cdot \| : V \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\|v\| = \|f(v)\|$ es claramente una norma en V que induce la topología que acabamos de definir. Esto justifica las definiciones siguientes:

Definición 2.66 Un *isomorfismo topológico* entre dos espacios vectoriales topológicos es una aplicación entre ambos que sea a la vez isomorfismo y homeomorfismo. Si V es un \mathbb{K} -espacio vectorial de dimensión finita n sobre un cuerpo métrico \mathbb{K} , llamaremos *topología euclídea* en V a la única topología respecto a la cual todos los isomorfismos de V en \mathbb{K}^n son topológicos.

Si $h : V \rightarrow W$ es una aplicación lineal entre dos \mathbb{K} -espacios vectoriales de dimensión finita, entonces es continua, pues considerando isomorfismos (topológicos) $f : V \rightarrow \mathbb{K}^m$ y $g : W \rightarrow \mathbb{K}^n$ tenemos que la aplicación $h' = f^{-1} \circ h \circ g : \mathbb{K}^m \rightarrow \mathbb{K}^n$ es lineal, luego continua, luego $h = f \circ h' \circ g^{-1}$ también es continua.

Si W es un subespacio de V , entonces la restricción a W de la topología euclídea en V es la topología euclídea. En efecto, para probarlo descomponemos $V = W \oplus W'$ y observamos que la identidad de W con la topología euclídea

a W con la topología inducida es continua por ser lineal y su inversa es continua por ser la restricción de la proyección de V en W , que también es lineal. Por lo tanto se trata de un homeomorfismo y ambas topologías coinciden.

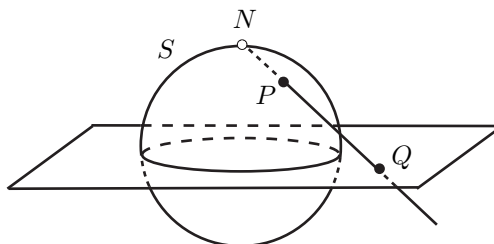
Similarmente se prueba que la topología euclídea en un producto de espacios vectoriales coincide con el producto de las topologías euclídeas.

Todo subespacio W de un espacio vectorial de dimensión finita V es cerrado. Para probarlo observamos que W puede expresarse como el núcleo de una aplicación lineal de W en \mathbb{K}^n , es decir, como la antiimagen de 0 por una aplicación continua y, como $\{0\}$ es cerrado, su antiimagen también.

Todos estos hechos se trasladan sin dificultad a los espacios afines sobre \mathbb{K} . La topología euclídea en un espacio afín se define de modo que todas las afinidades son continuas y las variedades afines son cerradas.

Ejemplo: La proyección estereográfica Consideremos la esfera en \mathbb{R}^{n+1} de centro 0 y radio 1 , es decir, el conjunto $S = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\|^2 = 1\}$. Sea $N = (0, \dots, 0, 1)$ el “polo Norte” de S .

La *proyección estereográfica* es la biyección entre $S \setminus \{N\}$ y \mathbb{R}^n que a cada punto $P \in S$ le asigna el punto Q donde la recta NP corta al plano $x_{n+1} = 0$ (que podemos identificar con \mathbb{R}^n eliminando la última coordenada de sus puntos).



Si P tiene coordenadas x , la recta NP está formada por los puntos

$$(0, \dots, 0, 1) + \lambda(x_1, \dots, x_n, x_{n+1} - 1),$$

con $\lambda \in \mathbb{R}$. El valor de λ que anula la última coordenada es el que cumple $1 + \lambda(x_{n+1} - 1) = 0$, o sea, $\lambda = 1/(1 - x_{n+1})$, luego la proyección de P es el punto

$$f(x) = \left(\frac{x_1}{1 - x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1 - x_{n+1}} \right).$$

Similarmente se calcula la proyección inversa, que es

$$g(y) = \left(\frac{2y_1}{\|y\|^2 + 1}, \dots, \frac{2y_n}{\|y\|^2 + 1}, \frac{\|y\|^2 - 1}{\|y\|^2 + 1} \right).$$

Es evidente que tanto f como g son continuas, luego la proyección estereográfica es un homeomorfismo. Así pues, el plano es homeomorfo a una esfera menos un punto.

Más aún, llamemos $X = \mathbb{R}^n$ y consideremos $X^\infty = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ con la topología que hemos definido al final de la sección anterior. Vamos a probar que si extendemos $f : S \rightarrow X^\infty$ mediante $f(N) = \infty$ obtenemos un homeomorfismo, con lo cual tenemos una interpretación geométrica de X^∞ : al añadirle a \mathbb{R}^n un punto infinito, el resultado es, desde el punto de vista topológico, lo mismo que una esfera de la misma dimensión.

Sólo falta probar que f es continua en N y que f^{-1} es continua en ∞ . Para ello basta probar que f biyecta una base de entornos de N con una base de entornos de ∞ .

Consideremos, concretamente, la base de entornos de N formada por las bolas abiertas de radio menor que 1. Un entorno básico de N está formado por los puntos $x \in S$ tales que $\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2 + (x_{n+1} - 1)^2} < \epsilon < 1$, y como $\|x\|^2 = 1$, esto equivale a $x_{n+1} > 1 - \epsilon^2/2$. Puesto que ϵ es arbitrario, los entornos básicos están formados por los puntos $x \in S$ tales que $1 - x_{n+1} < \epsilon$, para $\epsilon > 0$. Calculemos la imagen de uno de estos entornos.

Para ello notamos que si $x \neq N$,

$$\|f(x)\| = \sqrt{\frac{1 + x_{n+1}}{1 - x_{n+1}}},$$

y que si $x_{n+1} < x'_{n+1}$ entonces $x_{n+1} - x_{n+1}x'_{n+1} < x'_{n+1} - x_{n+1}x'_{n+1}$, luego

$$\frac{x_{n+1}}{1 - x_{n+1}} < \frac{x'_{n+1}}{1 - x'_{n+1}}, \quad \sqrt{1 + \frac{2x_{n+1}}{1 - x_{n+1}}} < \sqrt{1 + \frac{2x'_{n+1}}{1 - x'_{n+1}}},$$

$$\sqrt{\frac{1 + x_{n+1}}{1 - x_{n+1}}} < \sqrt{\frac{1 + x'_{n+1}}{1 - x'_{n+1}}}.$$

En otras palabras, cuanto mayor es x_{n+1} , mayor es la distancia a 0 de $f(x)$. Por consiguiente, los puntos tales que $x_{n+1} > 1 - \epsilon$ se corresponden con los puntos tales que

$$\|f(x)\| > \sqrt{\frac{1 + 1 - \epsilon}{1 - (1 - \epsilon)}} = \sqrt{\frac{2}{\epsilon}} - 1.$$

Ahora bien, cualquier $K > 0$ es de esta forma para algún ϵ , concretamente $\epsilon = 2/(K^2 + 1)$. Concluimos que las imágenes de los entornos básicos de N son los conjuntos de la forma

$$\{u \in X \mid \|u\| > K\} \cup \{\infty\},$$

pero sabemos que estos conjuntos forman una base de entornos de ∞ en X^∞ .

En particular tenemos que \mathbb{R}^∞ es homeomorfo a una circunferencia. ■

Ejemplo: La aplicación de Cantor Veamos ahora un ejemplo que ilustra el hecho de que el concepto topológico de continuidad (incluso en el caso más simple de una función $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$) va más allá de la noción intuitiva de “función que puede dibujarse sin levantar el lápiz del papel”. Recordemos que al final de la sección 1.4 hemos definido el conjunto de Cantor $\mathcal{C} \subset [0, 1]$ como una intersección de conjuntos C_n , cada uno de los cuales es una unión de 2^n intervalos cerrados disjuntos dos a dos. Por lo tanto, cada C_n es cerrado y \mathcal{C} también lo es.

Así, $\mathbb{R} \setminus \mathcal{C}$ es abierto, al igual que $U =]0, 1[\cap (\mathbb{R} \setminus \mathcal{C})$ y, como $0, 1 \in \mathcal{C}$, resulta podemos descomponer $[0, 1] = \mathcal{C} \cup U$ en una unión disjunta de un cerrado y un abierto en \mathbb{R} .

Observemos que el abierto U es denso en $[0, 1]$. En efecto, dado un abierto no vacío $G \subset [0, 1]$, tomamos $x \in G$, de modo que existe un $\epsilon > 0$, tal que $[0, 1] \cap]x, x + \epsilon[\subset G$. Si $x \notin U$. Sea $k > 0$ tal que $1/3^k < \epsilon$. Si $x \notin U$, entonces la cifra decimal k -ésima de x en base 3 es distinta de 1, es decir, es 0 o 2, luego podemos tomar el número x' que resulta de modificar dicha cifra para que valga 1. Así $x' \in U$ y $|x - x'| < 1/2^k < \epsilon$, luego $x' \in U \cap G$. Así, todo abierto en $[0, 1]$ no vacío corta a U , y esto significa que es denso.

Cada elemento de \mathcal{C} se expresa de forma única como

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2c_n}{3^n},$$

donde $c_n \in \{0, 1\}$. Esto nos permite definir una aplicación $f : \mathcal{C} \rightarrow [0, 1]$ mediante

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2c_n}{3^n} \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{2^n},$$

y claramente es suprayectiva, pues la imagen contiene todos los desarrollos decimales posibles en base 2. No es inyectiva, pues, por ejemplo,

$$f(1/3) = f(0.1_3) = f((0.02222\dots)_3) = (0.01111\dots)_2 = 0.1_2 = \frac{1}{2},$$

$$f(2/3) = f(0.2_3) = 0.1_2 = \frac{1}{2}.$$

Más en general, sucede que

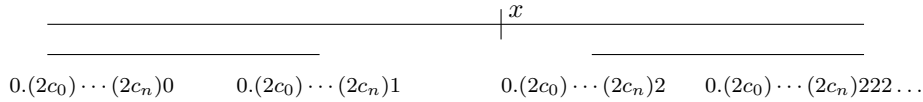
$$\begin{aligned} f((0.(2c_1)\cdots(2c_k)02222\dots)_3) &= (0.c_1\cdots c_k01111\dots)_2 \\ &= (0.c_1\cdots c_k1)_2 = f((0.(2c_1)\cdots(2c_k)2)_3). \end{aligned}$$

Observemos que f es creciente, pues si $x < y$ son elementos de \mathcal{C} , sus desarrollos en base 3 serán de la forma

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2c_n}{3^n} < \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2d_n}{3^n} = y,$$

de modo que $c_n = d_n$ para $n = 1, \dots, k$ y $c_{k+1} = 0 < 1 = d_{k+1}$, lo que implica que $f(x) \leq f(y)$.

Ahora observemos que si $x \in U$, existirá un único n tal que $x \in C_n \setminus C_{n+1}$. Concretamente, x estará en uno de los intervalos que forman C_n , formado por todos los números reales cuyo desarrollo en base 3 empieza por $0.(2c_1) \cdots (2c_n)$, pero la cifra de orden $n + 1$ de x será un 1, de modo que x está en el tercio central del intervalo:



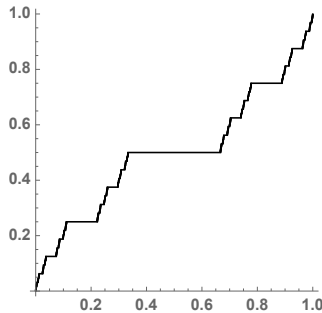
Equivalentemente,

$$x \in]0.(2c_0) \cdots (2c_n)1, 0.(2c_0) \cdots (2c_n)2[\subset U$$

y los dos extremos de este intervalo (el único intervalo abierto contenido en U con extremos en \mathbb{C} al cual pertenece x) tienen la misma imagen por f :

$$f(0.(2c_0) \cdots (2c_n)1) = f(0.(2c_0) \cdots (2c_n)2) = 0.c_1 \cdots c_n 1.$$

Esto nos permite extender f hasta una aplicación $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ que a cada $x \in U$ le hace corresponder la imagen común de los dos extremos del único intervalo abierto con extremos en \mathbb{C} contenido en U que contiene a x . Esta extensión se conoce como *aplicación de Cantor* y la figura siguiente muestra su gráfica:



Vemos que es creciente. Esto se debe a que se obtiene interpolando con tramos constantes una función creciente. Más detalladamente, si $x < y$ son dos puntos en $[0, 1]$, o bien ambos están en \mathbb{C} , en cuyo caso ya sabemos que $f(x) \leq f(y)$, o bien $x \in U$, $y \in \mathbb{C}$, en cuyo caso podemos tomar el único intervalo $x \in]a, b[\subset U$ con extremos en \mathbb{C} , de modo que $x < b \leq y$, luego $f(x) = f(b) \leq f(y)$, e igualmente se razona si $x \in \mathbb{C}$, $y \in U$. Finalmente, si $x, y \in U$, o bien $[x, y] \subset U$, en cuyo caso $f(x) = f(y)$, o bien existe un $z \in \mathbb{C}$ tal que $x < z < y$, en cuyo caso ya hemos visto que $f(x) \leq f(z) \leq f(y)$.

Más aún, la figura sugiere que la función de Cantor es continua, y así es. Para probarlo observamos que si $x \in U$, entonces f es constante (luego continua) en un intervalo abierto que contiene a x , luego f es continua en x . Por lo tanto, sólo falta probar que f es continua en los puntos $x \in \mathbb{C}$. Por simplicidad supongamos que $x \neq 0, 1$. El razonamiento se adapta fácilmente a estos dos puntos.

Consideremos los cerrados C_n a partir de los cuales hemos definido el conjunto de Cantor en la página 37. Si n es suficientemente grande, el abierto $U_n = [0, 1] \setminus C_n$ está formado por $2^n - 1$ intervalos abiertos y si n es suficientemente grande x se encontrará entre dos de ellos. Dado $\epsilon > 0$, podemos tomar n de modo que $1/2^n < \epsilon$. Sean $a < x < b$ de modo que a y b estén en los intervalos abiertos de U_n entre los que se encuentra x y sea $0 < \delta < \min\{b - x, x - a\}$.

Por construcción $f(b) - f(a) = 1/2^n$ (por ejemplo, U_2 consta de 3 intervalos en los que f toma los valores $1/4, 2/4, 3/4$, etc.) y por la monotonía de f , tenemos que si $|x - y| < \delta$, entonces $a < x, y < b$, luego

$$|f(y) - f(x)| \leq f(b) - f(a) = 1/2^n < \epsilon,$$

lo que prueba la continuidad.

Así pues, tenemos una función continua que crece desde 0 hasta 1 pero que no es estrictamente creciente en ningún intervalo, sino que cualquier intervalo en el que no sea constante, por pequeño que sea, contiene infinitos intervalos abiertos en los que es constante.³ ■

2.6 Límites de funciones

Veamos ahora cómo la noción de límite de una función en un punto, introducida en [ITAn 3.12] para funciones definidas entre subconjuntos de C , tiene sentido para funciones definidas entre espacios topológicos arbitrarios:

Definición 2.67 Sean X, Y espacios topológicos, $A \subset X$ y $f : A \rightarrow Y$. Sea $a \in A$ y $b \in Y$. Diremos que f converge a b cuando x tiende a a si para todo entorno V de b existe un entorno U de a tal que si $x \in U \cap A$ y $x \neq a$, entonces $f(x) \in V$.

La interpretación es clara: los puntos $f(x)$ están alrededor de b [= en un entorno arbitrario V de b] siempre que x está alrededor de a [= en un entorno adecuado U de a , que dependerá de V], o más simplemente: si f envía los puntos de alrededor de a a los alrededores de b .

Si Y es un espacio de Hausdorff, una función converge a lo sumo a un único punto b para cada punto a . En efecto, si f converge a dos puntos b y b' cuando x tiende a a , podríamos tomar entornos disjuntos V y V' de b y b' , para los cuales existirían entornos U y U' de a de modo que si $x \in U \cap U' \cap A$, entonces $f(x) \in V \cap V'$, contradicción.

Por ello, si se da la convergencia, diremos que b es el *límite* cuando x tiende a a de $f(x)$, y lo representaremos por

$$b = \lim_{x \rightarrow a} f(x).$$

No exigimos que la función f esté definida en a . Tan sólo que a sea un punto de acumulación del dominio de f o, de lo contrario, no existirían puntos x a los que aplicar la definición y f convergería trivialmente a todos los puntos de Y .

³Puede probarse que f sólo es derivable en los puntos del abierto U , de modo que tiene derivada 0 en todos los puntos en los que es derivable.

Por supuesto, es posible que la función f esté definida en a , pero esto es irrelevante, pues en la definición de límite aparecen sólo puntos $x \neq a$, lo que significa que el límite es independiente de $f(a)$. En otras palabras, si modificáramos el valor de $f(a)$, la existencia del límite y su valor concreto no se alterarían.

También es obvio que la existencia o no de límite sólo depende del comportamiento de la función en un entorno del punto. En otras palabras, que si dos funciones coinciden en un entorno de un punto a (salvo quizá en a) entonces ambas tienen límite en a o ninguna lo tiene y, si lo tienen, éstos coinciden.

La relación entre los límites y la continuidad es la siguiente:

Teorema 2.68 Sean X, Y espacios topológicos y $f : X \rightarrow Y$. Sea $a \in X'$. Entonces f es continua en a si y sólo si existe $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

DEMOSTRACIÓN: Si el límite vale $f(a)$, entonces la definición de límite se cumple trivialmente cuando $x = a$ y lo que queda es la definición de continuidad en a . Recíprocamente, la definición de continuidad de f en a implica trivialmente la definición de límite con $b = f(a)$. ■

Mediante este teorema podemos deducir las propiedades algebraicas de los límites a partir de las propiedades correspondientes de las funciones continuas.

Teorema 2.69 Sea \mathbb{K} un cuerpo métrico, sean $f, g : A \subset X \rightarrow \mathbb{K}$ dos funciones definidas sobre un espacio topológico X y sea $a \in A'$. Si existen

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

entonces también existen

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) &= \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x), \\ \lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) &= \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right) \left(\lim_{x \rightarrow a} g(x) \right), \\ \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}, \end{aligned}$$

(suponiendo, además, en el tercer caso que $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$.)

DEMOSTRACIÓN: La prueba es la misma en todos los casos. Veamos la primera. Consideramos la función f' que coincide con f en todos los puntos salvo en a , donde toma el valor del límite. Definimos igualmente g' . Entonces el teorema anterior implica que f' y g' son continuas en a , luego $f' + g'$ también lo es, luego por el teorema anterior existe

$$\lim_{x \rightarrow a} (f'(x) + g'(x)) = f'(a) + g'(a),$$

pero como $f' + g'$ coincide con $f + g$ salvo en a , el límite de $f' + g'$ coincide con el de $f + g$, y tenemos la relación buscada. ■

Es claro que el resultado sobre suma de límites es válido cuando las funciones toman valores en cualquier espacio vectorial topológico. Además en tal caso al multiplicar una función por un escalar el límite se multiplica por el mismo (para el caso de \mathbb{K} esto es un caso particular de la segunda igualdad). La misma técnica nos da inmediatamente:

Teorema 2.70 Sea $f : A \subset X \rightarrow X_1 \times \cdots \times X_n$ una aplicación entre espacios topológicos, que será de la forma $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$, para ciertas funciones $f_i : X \rightarrow X_i$. Sea $a \in A'$. Entonces existe $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ si y sólo si existen todos los límites $\lim_{x \rightarrow a} f_i(x)$ y en tal caso

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \left(\lim_{x \rightarrow a} f_1(x), \dots, \lim_{x \rightarrow a} f_n(x) \right).$$

Para calcular el límite que tenemos pendiente necesitamos un hecho que a menudo resulta útil. Diremos que una función f con valores en un espacio métrico está *acotada* si su imagen es un conjunto acotado.

Teorema 2.71 Sean $f, g : A \subset X \rightarrow \mathbb{K}$ dos funciones definidas de un espacio topológico X en un cuerpo métrico \mathbb{K} y sea $a \in A'$. Si existe $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ y g está acotada, entonces existe $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = 0$.

DEMOSTRACIÓN: Si g está acotada, existe un $M > 0$ tal que $|g(x)| \leq M$ para todo $x \in A$. Entonces $|f(x)g(x)| \leq M|f(x)|$. El hecho de que f tienda a 0, sustituyendo los entornos en \mathbb{K} de la definición general por bolas abiertas, queda así:

Para todo $\epsilon > 0$ existe un entorno U de a tal que si $x \in U \cap A$ y $x \neq a$, entonces $|f(x)| < \epsilon$.

Tomamos ahora $\epsilon > 0$ y aplicamos este hecho a ϵ/M , con lo que si $x \in U \cap A$ y $x \neq a$, tenemos que $|f(x)g(x)| \leq M|f(x)| < \epsilon$, y esto significa que fg tiende a 0. ■

Ejemplo Se cumple

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x^2 \left(\frac{2}{\sqrt{x^2 + y^2}} - 1 \right) = 0.$$

En efecto, basta probar que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0,$$

pues el otro sumando, x^2 tiende obviamente a 0, por continuidad. Factorizamos

$$x \frac{2x}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

El primer factor tiende a 0 y el segundo está acotado, pues se comprueba fácilmente que

$$-1 \leq \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq 1.$$

Ahora basta aplicar el teorema anterior. ■

El hecho de que la composición de funciones continuas es continua se traduce ahora en el hecho siguiente:

Teorema 2.72 Sea $f : X \rightarrow Y$ y $g : Y \rightarrow Z$, sea $a \in X'$ y supongamos que existe

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$

y que g es continua en b . Entonces

$$g\left(\lim_{x \rightarrow a} f(x)\right) = \lim_{x \rightarrow a} g(f(x)).$$

DEMOSTRACIÓN: Sea U un entorno de $g(b)$. Entonces $g^{-1}[U]$ es un entorno de b . Existe un entorno V de a tal que si $x \in V$, $x \neq a$, entonces $f(x) \in g^{-1}[U]$, luego $g(f(x)) \in U$. Por lo tanto se cumple la definición de límite. ■

Por ejemplo, la continuidad de la raíz cuadrada implica que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} |x| \sqrt{\frac{2}{\sqrt{x^2 + y^2}} - 1} = 0.$$

Ejercicio: Dar un ejemplo que muestre la falsedad de la afirmación siguiente: Dadas dos funciones $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, si existen $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, $\lim_{x \rightarrow b} g(x) = c$ entonces existe también $\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = c$. Probar que es cierta si $f(x) \neq b$ para $x \neq a$.

Límites restringidos El límite de una función en un punto depende del dominio de ésta, por eso es importante lo que ocurre al restringir una función a dominios menores. Por ejemplo pensemos en la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Es claro que no tiene límite en 0, pero sí lo tienen las funciones $f|_{]-\infty, 0[}$ y $f|_{]0, +\infty[}$. Si consideramos sólo la parte de la izquierda de la función, resulta que es constante igual a -1 , de donde su límite es -1 . Igualmente el límite de la parte derecha es 1. Por ello definimos:

Definición 2.73 Sea $f : A \subset X \rightarrow Y$, $B \subset A$ y $a \in B'$. Definimos

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ B}} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} f|_B(x).$$

Para el caso de funciones definidas sobre subconjuntos de \mathbb{R} se define

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\]-\infty, a[}} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\]a, +\infty[}} f(x),$$

y se llaman, respectivamente, límite por la izquierda y límite por la derecha de f en a . También se les llama *límites laterales*. Su utilidad se debe al teorema siguiente:

Teorema 2.74 *Sea A un subconjunto de un espacio X y $f : A \rightarrow Y$. Supongamos que $A = B_1 \cup \dots \cup B_n$ y que a es un punto de acumulación de todos estos conjuntos. Entonces existe $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ si y sólo si existen los límites*

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ B_i}} f(x)$$

para $i = 1, \dots, n$ y todos coinciden. En tal caso $f(x)$ es igual al límite común.

DEMOSTRACIÓN: Si existen tales límites y todos valen L , sea V un entorno de L . Por definición existen entornos U_i de a tales que si $x \in U_i \cap (A \cap B_i)$ y $x \neq a$, entonces $f(x) \in V$. Si U es la intersección de los conjuntos U_i , entonces U es un entorno de a y si $x \in U \cap A$, $x \neq a$, existirá un i tal que $x \in B_i$, luego $f(x) \in V$, es decir, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$. El recíproco es más sencillo. ■

Ejemplo Se cumple

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x \sqrt{\frac{2}{\sqrt{x^2 + y^2}} - 1} = 0.$$

Para comprobarlo calculamos los límites

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ x \leq 0}} x \sqrt{\frac{2}{\sqrt{x^2 + y^2}} - 1} = - \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ x \leq 0}} |x| \sqrt{\frac{2}{\sqrt{x^2 + y^2}} - 1} = 0,$$

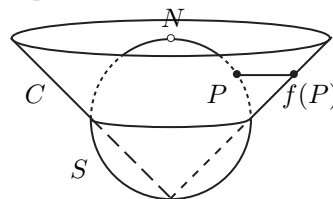
$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ x \geq 0}} x \sqrt{\frac{2}{\sqrt{x^2 + y^2}} - 1} = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ x \geq 0}} |x| \sqrt{\frac{2}{\sqrt{x^2 + y^2}} - 1} = 0,$$

y aplicamos el teorema anterior. ■

Ejemplo: la proyección cónica Consideremos de nuevo la esfera S y el cono C formado al unir el polo sur $(0, 0, -1)$ con los puntos del ecuador de S .

Vamos a probar que $S \setminus \{N\}$ es homeomorfo a una porción de C mediante la aplicación que traslada radialmente cada punto.

Un punto (x, y, z) de C está en el segmento que une el punto $(0, 0, -1)$ con un punto $(a, b, 0)$, donde $a^2 + b^2 = 1$.



Por tanto será de la forma

$$(x, y, z) = (0, 0, -1) + \lambda(a, b, -1), \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Entonces $\lambda = z + 1$, luego $x = a(z + 1)$, $y = b(z + 1)$. De aquí se sigue que

$$z + 1 = \pm \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Recíprocamente, si un punto cumple esta ecuación, si $z = -1$ ha de ser $(0, 0, -1)$, que está en C , y si $z \neq -1$, entonces los valores

$$\lambda = z + 1, \quad a = \frac{x}{z + 1}, \quad b = \frac{y}{z + 1},$$

permiten expresar a (x, y, z) en la forma paramétrica anterior, luego se trata de un punto de C . Nos interesa sólo la porción de C formada por los puntos con altura entre -1 y 1 , por lo que definimos

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z + 1 = \sqrt{x^2 + y^2}, -1 \leq z < 1\}.$$

Notar que los puntos con $z = 1$ no están en C . El homeomorfismo que buscamos ha de transformar cada punto (x, y, z) de $S \setminus \{N\}$ en un punto $(\lambda x, \lambda y, z)$, donde $\lambda \geq 0$ es el adecuado para llegar a C . La condición es

$$\sqrt{(\lambda x)^2 + (\lambda y)^2} = z + 1$$

y, teniendo en cuenta que los puntos de la esfera cumplen $\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1 - z^2}$,

$$\lambda = \frac{1 + z}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \sqrt{\frac{1 + z}{1 - z}}.$$

Por lo tanto $f : S \setminus \{N\} \rightarrow C$ será la aplicación dada por

$$f(x, y, z) = \left(\sqrt{\frac{1 + z}{1 - z}} x, \sqrt{\frac{1 + z}{1 - z}} y, z \right).$$

La inversa se calcula sin dificultad a partir de esta expresión:

$$g(x, y, z) = \left(\sqrt{\frac{1 - z}{1 + z}} x, \sqrt{\frac{1 - z}{1 + z}} y, z \right), \quad \text{si } (x, y, z) \neq (0, 0, -1),$$

y por supuesto $g(0, 0, -1) = (0, 0, -1)$.

Obviamente f es continua. Lo mismo vale para g en todos los puntos salvo en $(0, 0, -1)$. Para probar la continuidad en este punto hacemos uso de la igualdad $1 + z = \sqrt{x^2 + y^2}$, que cumplen todos los puntos de C , la cual nos permite expresar g como

$$g(x, y, z) = \left(x \sqrt{\frac{2}{\sqrt{x^2 + y^2}} - 1}, y \sqrt{\frac{2}{\sqrt{x^2 + y^2}} - 1}, z \right).$$

Basta probar que

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,-1)} \left(x \sqrt{\frac{2}{\sqrt{x^2+y^2}}} - 1, y \sqrt{\frac{2}{\sqrt{x^2+y^2}}} - 1, z \right) = (0, 0, -1),$$

pero los dos primeros límites son el que hemos calculado como ejemplo a lo largo de esta sección.

Así pues, f es un homeomorfismo entre $S \setminus \{N\}$ y C . Ahora bien, es inmediato comprobar que la proyección sobre el plano XY es un homeomorfismo entre C y la bola abierta de centro 0 y radio 2 (la aplicación inversa es $(x, y) \mapsto (x, y, -1 + \sqrt{x^2 + y^2})$, claramente continua), con lo que la composición

$$h(x, y, z) = \left(\sqrt{\frac{1+z}{1-z}} x, \sqrt{\frac{1+z}{1-z}} y \right)$$

es un homeomorfismo entre $S \setminus \{N\}$ y dicha bola.

Más aún, si componemos la inversa de la proyección estereográfica con esta aplicación obtenemos un homeomorfismo entre \mathbb{R}^2 y el disco abierto. Es fácil ver que la composición es

$$t(x, y) = \left(\frac{2x \sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{2y \sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2 + 1} \right).$$

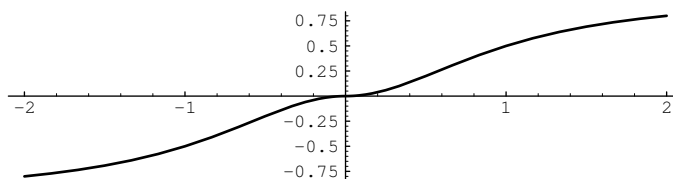
Si quitamos los dosos obtenemos un homeomorfismo $t : \mathbb{R}^2 \rightarrow D$, donde D es la bola abierta (euclídea) de centro 0 y radio 1. Concretamente:

$$t(x, y) = \left(\frac{x \sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{y \sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2 + 1} \right).$$

Si restringimos esta aplicación a \mathbb{R} , es decir, a los puntos $(x, 0)$ obtenemos un homeomorfismo entre \mathbb{R} y el intervalo $] -1, 1[$. Concretamente

$$t(x) = \frac{x|x|}{x^2 + 1}.$$

He aquí su gráfica:



Si lo restringimos a $]0, +\infty[$ obtenemos un homeomorfismo entre este intervalo y $]0, 1[$. A saber:

$$t(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}.$$

A partir de aquí es fácil ver que dos intervalos abiertos cualesquiera (acotados o no) son homeomorfos. ■

Límites infinitos Consideremos ahora límites de funciones $f : X \rightarrow \mathbb{K}^\infty$, donde \mathbb{K} es un cuerpo métrico al que le hemos añadido un punto infinito, de modo que una base de entornos de ∞ la forman los conjuntos

$$\{\infty\} \cup \{\alpha \in \mathbb{K} \mid |\alpha| > K\}, \quad K \in \mathbb{R}.$$

Consideraremos también funciones $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, donde los entornos básicos de $+\infty$ son los intervalos $]K, +\infty]$ y los de $-\infty$ los intervalos $]-\infty, K[$, con $K \in \mathbb{R}$.

Es claro que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$$

significa que para todo $K > 0$ existe un entorno U de a tal que si $x \in U$, $x \neq a$ está en el dominio de f , entonces $f(x) > K$. Similarmente ocurre con $-\infty$. Que el límite valga ∞ significa que para todo $K > 0$ existe un entorno U de a tal que si $x \in U$, $x \neq a$ está en el dominio de f , entonces $|f(x)| > K$.

Es fácil probar que los teoremas del estilo de “el límite de la suma es la suma de los límites” etc. valen también en los casos siguientes:

$$\begin{aligned} +\infty + (+\infty) &= +\infty, & -\infty + (-\infty) &= -\infty, \\ +\infty + a &= +\infty, & -\infty + a &= -\infty, & \infty + a &= \infty, \\ (+\infty)(+\infty) &= +\infty, & (-\infty)(-\infty) &= +\infty, & \infty \infty &= \infty. \\ \text{si } a > 0, & \quad (+\infty)a &= +\infty, & \quad (-\infty)a &= -\infty; \\ \text{si } a < 0, & \quad (+\infty)a &= -\infty, & \quad (-\infty)a &= +\infty. \\ \text{Si } a \neq 0, & \quad \infty a &= \infty, & \quad \frac{a}{\pm\infty} &= \frac{a}{\infty} = 0, & \quad \frac{a}{0} &= \infty. \end{aligned}$$

Por ejemplo, la igualdad $+\infty + (+\infty) = +\infty$ es una forma de expresar que la suma de dos funciones $f, g : A \subset X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ que tienden a $+\infty$ en un punto $a \in A'$, tiende también a $+\infty$. La prueba es sencilla: dado un $K > 0$ existen entornos U y V de a tales que si $x \in U \cap A'$ entonces $f(x) > K/2$ y si $x \in V \cap A'$ entonces $g(x) > K/2$, con lo que si $x \in U \cap V \cap A$ entonces $f(x) + g(x) > K$, luego se cumple la definición de límite. Similarmente se prueban todas las demás.

Cálculo de límites Estudiamos ahora los límites más simples y frecuentes. Comencemos con los límites en infinito de los polinomios en un cuerpo métrico \mathbb{K} (que será \mathbb{R} cuando distingamos entre $+\infty$ y $-\infty$). Obviamente,

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x = \pm\infty.$$

Aplicando n veces la regla $(+\infty)(+\infty) = +\infty$ vemos que si $n > 0$ entonces

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty.$$

El límite en $-\infty$ será obviamente $(-1)^n \infty$. Si $n < 0$ usamos la regla $1/\pm\infty = 0$ y si $n = 0$ tenemos que x^0 es la constante 1, luego en total:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } n > 0, \\ 1 & \text{si } n = 0, \\ 0 & \text{si } n < 0. \end{cases}$$

El límite en $-\infty$ difiere sólo en el primer caso, de forma obvia.

Para calcular el límite de un polinomio multiplicamos y dividimos por la potencia de x de mayor grado:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 8x^5 - 3x^4 + x^3 + 2x - 5 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^5 \left(8 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^4} - \frac{5}{x^5} \right) = +\infty.$$

En general, si $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ no es constante, se cumple $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} p(x) = \pm\infty$, donde el signo depende en forma obvia del signo del coeficiente director de p y de la paridad del grado si el límite es en $-\infty$. Similarmente se razona que en \mathbb{K}^∞ todos los polinomios no constantes tienen límite ∞ .

En particular vemos que, a diferencia de casos como $1/\infty$ o $+\infty + \infty$, no hay una regla general para calcular un límite de la forma $+\infty - \infty$. En efecto, los tres límites siguientes son de este tipo y cada uno da un resultado distinto. Por ello se dice que $+\infty - \infty$ es una *indeterminación*.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^5 - x^2 = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - x^5 = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+2) - (x+1) = 1.$$

Nos ocupamos ahora de los límites de fracciones algebraicas (cocientes de polinomios). El ejemplo siguiente ilustra el caso general:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x^4 - 3x^3 + x + 1}{2x^4 + x^2 - 2x + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4}}{2 + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3} + \frac{2}{x^4}} = \frac{6}{2} = 3.$$

Es claro que el límite en $\pm\infty$ del cociente de dos polinomios del mismo grado es el cociente de los términos directores. Si los grados son distintos, al dividir entre la potencia de mayor grado obtenemos 0 si el grado del denominador es mayor y $\pm\infty$ si es mayor el del numerador, donde el signo se calcula de forma obvia. Esto vale igualmente (salvo lo dicho de los signos) para límites en \mathbb{K}^∞ . Vemos, pues, que el caso ∞/∞ es también una indeterminación.

Por ejemplo, antes hemos probado que la función

$$t(x) = \frac{x|x|}{x^2 + 1}$$

es un homeomorfismo entre \mathbb{R} y el intervalo $] -1, 1[$. Ahora es claro que

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} t(x) = \pm 1,$$

luego si definimos $t(\pm\infty) = \pm 1$ tenemos una biyección continua $t: \overline{\mathbb{R}} \rightarrow [-1, 1]$. En el capítulo siguiente veremos que es un homeomorfismo.

Ejercicio: Calcular t^{-1} y probar que es continua.

2.7 Convergencia de sucesiones

En 1.20 hemos definido la convergencia de una sucesión en un espacio métrico. Ahora estamos en condiciones de probar que la convergencia de sucesiones es en realidad un concepto topológico y no métrico, es decir, que depende únicamente de la topología del espacio y no de la distancia. De hecho, el concepto de límite de una sucesión es un caso particular del concepto de límite de funciones que hemos estudiado en la sección anterior.

Definición 2.75 Sea X un espacio topológico, $l \in X$ y $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ una sucesión en X . Diremos que $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ converge a l si está finalmente en todo entorno de l , o sea, si para cada entorno V de l existe un $m \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq m$ se cumple $x_n \in V$.

Si X es un espacio de Hausdorff y $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ converge en X , entonces el punto al cual converge es único, pues puntos distintos tienen entornos disjuntos, y una sucesión no puede estar finalmente en dos conjuntos disjuntos. Representaremos por

$$\lim_n x_n$$

al único límite de la sucesión $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ en un espacio de Hausdorff, cuando éste exista.

Ahora observamos que si X es un espacio métrico, la definición 2.75 es equivalente a 1.20. En general, notemos que en la definición anterior no hace falta considerar todos los entornos V de l , sino que basta considerar los de una base de entornos de l . En el caso de un espacio métrico basta considerar las bolas $B_\epsilon(l)$, de modo que “para todo entorno V de l ” puede sustituirse por “para todo $\epsilon > 0$ ” y la condición $x_n \in V$ equivale a $d(x_n, l) < \epsilon$.

Por otra parte, 2.75 es un caso particular de 2.67. Para probarlo basta recordar que una sucesión $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ en un espacio topológico X no es más que una aplicación $x : \mathbb{N} \rightarrow X$, y que podemos considerar a \mathbb{N} como subespacio de \mathbb{N}^∞ . Una base de entornos de ∞ en este espacio la forman los conjuntos

$$\{\infty\} \cup \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq m\}, \quad m \in \mathbb{N},$$

y así, que $x : \mathbb{N} \rightarrow X$ converja a l cuando n tiende a ∞ en el sentido de 2.67 es precisamente lo que exige 2.75. Por lo tanto, en un espacio de Hausdorff tenemos que

$$\lim_n x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} x(n).$$

Sabiendo esto, todos los resultados generales para límites de funciones valen para sucesiones, por ejemplo, el límite de la suma de dos sucesiones de números reales es la suma de los límites, etc. Veamos ahora algunos hechos específicos sobre sucesiones:

Una sucesión converge si y sólo si converge finalmente, es decir, $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ converge a l si y sólo si la sucesión $\{x_n\}_{n=k}^{\infty}$ converge a l . En particular, las sucesiones finalmente constantes convergen.

(Esto es consecuencia de que el límite de una función en un punto — el punto ∞ en este caso— depende sólo del comportamiento de la función en un entorno del punto).

Si $A \subset X$, $\{x_n\}_{n=0}^\infty \subset A$ y $l \in A$, entonces $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ converge a l en A si y sólo si converge a l en X .

(Pues los entornos de l en A son las intersecciones con A de los entornos de l en X y, como la sucesión está en A , es equivalente que esté finalmente en un entorno de l en A o que esté finalmente en un entorno de l en X .)

Este hecho nos dice que la convergencia depende exclusivamente de la sucesión y de su límite, y no del espacio en el que los consideremos (siempre que no cambiemos de topología, claro está). Sin embargo, también de aquí se desprende que una sucesión convergente deja de serlo si eliminamos su límite. Por ejemplo, la sucesión $\{1/n\}_{n=0}^\infty$ no converge en el espacio $]0, 1]$, pues si convergiera a un punto l , tendríamos que en \mathbb{R} debería converger a la vez a l y a 0.

Si una sucesión converge a un punto l , entonces todas sus subsucesiones convergen a l .

Pues si $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ converge a l y $\{x_{n_k}\}_{k=0}^\infty$ es una subsucesión, para todo entorno U de l existe un n_0 tal que si $n \geq n_0$ se cumple $x_n \in U$, pero si $k \geq n_0$ entonces $n_k \geq k \geq n_0$, luego $x_{n_k} \in U$.

Ejercicio: Demostrar que una sucesión $\{x^n\}_{n=0}^\infty$ converge en un espacio producto $\prod_{i \in I} X_i$ a un punto x si y sólo si las sucesiones $\{x_i^n\}_{n=0}^\infty$ convergen a x_i para todo $i \in I$.

No podemos continuar nuestro estudio de las sucesiones sin introducir un nuevo concepto. Sucede que las sucesiones no se comportan adecuadamente en todos los espacios topológicos, sino sólo en aquellos que cumplen la siguiente propiedad adicional, por lo demás muy frecuente:

Definición 2.76 Un espacio X cumple el *primer axioma de numerabilidad* (1AN) si para todo punto $x \in X$ existe una base de entornos de x numerable, es decir, de la forma $\{V_n\}_{n=0}^\infty$.

Esta propiedad la tienen todos los espacios métricos, pues si x es un punto de un espacio métrico, una base de entornos de x la forman los conjuntos $\{B_{1/n}(x)\}_{n=1}^\infty$.

En $\overline{\mathbb{R}}$, una base de entornos de $+\infty$ es $\{]n, +\infty]\}_{n=0}^\infty$ y una base de entornos de $-\infty$ es $\{[-\infty, n[)\}_{n=0}^\infty$, luego este espacio también cumple 1AN.

Si M es un espacio métrico, el espacio M^∞ también es 1AN, pues, fijado $m_0 \in M$, una base de entornos de ∞ la forman los conjuntos

$$E_n = \{m \in M \mid d(m, m_0) > n\} \cup \{\infty\}, \quad \text{para } n = 1, 2, \dots$$

Así pues, todos los espacios topológicos que estamos considerando son 1AN.

Observemos que si X es un espacio que cumple 1AN y $x \in X$, podemos tomar una base de entornos de x de la forma $\{V_n\}_{n=0}^\infty$ que cumpla además

$$V_0 \supset V_1 \supset V_2 \supset V_3 \supset \dots$$

En efecto, si una base dada $\{W_n\}_{n=0}^\infty$ no cumple esta condición, la sustituimos por $V_n = W_0 \cap \dots \cap W_n$ y así tenemos las inclusiones indicadas.

Definición 2.77 Un punto x de un espacio topológico X es un *punto adherente* de una sucesión $\{a_n\}_{n=0}^\infty$ en X si para cada entorno V de x y cada número natural n existe un número natural $m \geq n$ tal que $a_m \in V$.

Es decir, si la sucesión contiene puntos arbitrariamente lejanos en cualquier entorno de x o, si se prefiere, si la sucesión contiene infinitos puntos en cada entorno de x .

En estos términos, la sucesión $\{(-1)^n\}_{n=0}^\infty$ tiene exactamente dos puntos adherentes, 1 y -1 .

Teorema 2.78 Sea X un espacio 1AN. Un punto $x \in X$ es un punto adherente de una sucesión $\{a_n\}_{n=0}^\infty$ si y sólo si ésta contiene una subsucesión que converge a x .

DEMOSTRACIÓN: Si x es un punto adherente de la sucesión, sea $\{V_n\}_{n=0}^\infty$ una base decreciente de entornos de x . Existe un punto $a_{n_0} \in V_0$. Existe un natural $n_1 \geq n_0 + 1$ tal que $a_{n_1} \in V_1$. Existe un natural $n_2 \geq n_1 + 1$ tal que $a_{n_2} \in V_2$. De este modo obtenemos una subsucesión $\{a_{n_k}\}_{k=0}^\infty$ tal que cada $a_{n_k} \in V_k$ y, como la sucesión de entornos es decreciente, en realidad V_k contiene todos los términos de la subsucesión posteriores a a_{n_k} , luego la subsucesión que hemos obtenido está finalmente en cada entorno V_k , es decir, converge a x .

Recíprocamente, si hay una subsucesión que converge a x , dicha subsucesión está finalmente en cualquier entorno de x , luego dicho entorno contiene infinitos términos de la sucesión dada. ■

En particular vemos que una sucesión convergente no tiene más punto adherente que su límite.

La continuidad de funciones puede caracterizarse en términos de sucesiones:

Teorema 2.79 Sea $f : X \rightarrow Y$ una aplicación entre espacios topológicos y supongamos que X cumple 1AN. Sea $x \in X$. Entonces f es continua en x si y sólo si para cada sucesión $\{a_n\}_{n=0}^\infty \subset X$ tal que $\lim_n a_n = x$, se cumple $\lim_n f(a_n) = f(x)$.

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que f es continua en x . Sea V un entorno de $f(x)$. Entonces $f^{-1}[V]$ es un entorno de x y la sucesión $\{a_n\}_{n=0}^\infty$ está finalmente en $f^{-1}[V]$, luego $\{f(a_n)\}_{n=0}^\infty$ está finalmente en V , o sea, $\lim_n f(a_n) = f(x)$.

Recíprocamente, supongamos que f no es continua en x . Entonces existe un entorno V de $f(x)$ tal que $f^{-1}[V]$ no es entorno de x . Sea $\{V_n\}_{n=0}^\infty$ una

base decreciente de entornos de x . Para cada natural n , no puede ocurrir que $V_n \subset f^{-1}[V]$, luego existe⁴ un punto $a_n \in V_n$ tal que $f(a_n) \notin V$.

Como la base es decreciente, todos los términos posteriores a a_n están en V_n , luego la sucesión $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ está finalmente en cada V_n , con lo que converge a x . Sin embargo la sucesión $\{f(a_n)\}_{n=0}^{\infty}$ no tiene ningún término en V , luego no converge a $f(x)$. ■

Los puntos adherentes se caracterizan por sucesiones:

Teorema 2.80 *Sea X un espacio topológico que cumpla 1AN. Sea $A \subset X$. Entonces \bar{A} está formado por los límites de las sucesiones convergentes contenidas en A .*

DEMOSTRACIÓN: Si l es el límite de una sucesión contenida en A , entonces todo entorno de l contiene puntos de la sucesión, es decir, puntos de A , luego $l \in \bar{A}$.

Recíprocamente, si $x \in \bar{A}$, tomamos una base decreciente $\{V_n\}_{n=0}^{\infty}$ de entornos abiertos de x . Como $V_n \cap A \neq \emptyset$, existe un $a_n \in V_n \cap A$ y la sucesión $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ así construida converge a x , y está contenida en A . ■

En particular, un conjunto A es cerrado si y sólo si el límite de toda sucesión convergente contenida en A , está en A , es decir, si no es posible “salir” de A mediante sucesiones.

2.8 Series numéricas

Recogemos aquí los resultados básicos sobre convergencia de series infinitas que estudiamos en el capítulo II de [ITAn], para enfatizar que son válidos en realidad para cualquier cuerpo métrico \mathbb{K} .

En los ejemplos tras la definición 1.20 hemos visto que si \mathbb{K} es un cuerpo métrico y $r \in \mathbb{K}$ cumple $|r| < 1$, entonces $\lim_n r^n = 0$. Ahora podemos extender este resultado. Consideremos primero el caso en que $r \in \mathbb{R}$ y $r > 1$. Entonces $s = r - 1 > 0$ y por el teorema del binomio de Newton, para $n \geq 1$, se cumple

$$r^n = (1 + s)^n = 1 + ns + \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} s^k > ns.$$

Sabemos que $\lim_n ns = +\infty$. Del hecho de que $\{ns\}_{n=0}^{\infty}$ esté finalmente en cada entorno básico de $+\infty$, de la forma $]M, +\infty]$, se sigue claramente que lo mismo le sucede a $\{r^n\}_{n=0}^{\infty}$, luego si $r > 1$ concluimos que $\lim_n r^n = +\infty$.

De aquí obtenemos un argumento alternativo para el caso $0 < r < 1$. Basta observar que

$$\lim_n r^n = \lim_n \frac{1}{(1/r)^n} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

⁴En este punto, al igual que en muchas situaciones similares, se usa el axioma de elección numerable.

Ahora consideramos el caso general en que \mathbb{K} es un cuerpo métrico y $r \in \mathbb{K}$. Entonces

$$\lim_n r^n = \begin{cases} 0 & \text{si } |r| < 1, \\ \infty & \text{si } |r| > 1. \end{cases}$$

En efecto, si $|r| > 1$, entonces $\lim_n |r^n| = \lim_n |r|^n = +\infty$, de donde es fácil deducir a partir de las meras definiciones que $\lim_n r^n = \infty$.

Si $|r| < 1$, entonces $\lim_n |r^n| = 0$, de donde también se sigue que $\lim_n r^n = 0$.

Puede probarse que si $|r| = 1$ el límite no existe salvo en el caso $r = 1$. Por ejemplo, ya hemos visto que $\lim_n (-1)^n$ no existe, pues se trata de la sucesión $1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots$

Pasamos ya a estudiar las series numéricas, es decir, las sucesiones de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \left\{ \sum_{n=0}^k a_n \right\}_{k=0}^{\infty},$$

donde a_n varía en un cuerpo métrico \mathbb{K} . Tras la definición 1.47 demostramos la convergencia de las series geométricas $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ con $|r| < 1$, cuya suma es $1/(1-r)$.

A la hora de determinar si una serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ es convergente o divergente, un hecho básico es que para que converja su término general (es decir, la sucesión $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$) debe tender a 0. En efecto:

Teorema 2.81 *Sea $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ una sucesión en un cuerpo métrico \mathbb{K} . Si la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ es convergente, entonces $\lim_n a_n = 0$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $S_k = \sum_{n=0}^k a_n$. Que la serie converja a un número L significa por definición que existe $\lim_k S_k = L$. En tal caso también existe $\lim_k S_{k+1} = L$, pues es el límite de una subsucesión, y entonces

$$\lim_k a_k = \lim_k (S_{k+1} - S_k) = L - L = 0.$$

■

Así, si no sumamos cada vez cantidades más pequeñas la serie no puede converger. El recíproco es falso [ITAn 2.8]:

Ejemplo *La serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

es divergente en \mathbb{R} .

En efecto, observemos que

$$\begin{aligned} S_1 &= 1, \\ S_2 &= 1 + \frac{1}{2}, \\ S_4 &= S_2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > S_2 + \frac{2}{4} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}, \\ S_8 &= S_4 + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > S_4 + \frac{4}{8} > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

En general $S_{2^n} > 1 + \frac{n}{2}$, y esta sucesión tiende a $+\infty$, luego las sumas parciales no están acotadas y la serie diverge. ■

Remitimos al lector a [ITAn] para los enunciados y las pruebas de los criterios de convergencia de Leibniz [ITAn 2.9], de comparación [ITAn 2.10], de D'Alembert [ITAn 2.12] y de Cauchy [ITAn 2.14], junto con algunos ejemplos ilustrativos. En dichos criterios interviene de forma fundamental la relación de orden de \mathbb{R} , por lo que no son generalizables a cuerpos métricos arbitrarios.

En un cuerpo métrico completo \mathbb{K} , la condición de Cauchy para una serie puede expresarse como sigue [ITAn 2.15]:

Teorema 2.82 Si \mathbb{K} es un cuerpo métrico completo, una serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ en \mathbb{K} es convergente si y sólo si para todo $\epsilon > 0$ existe un natural n_0 tal que si $n_0 \leq m \leq p$, entonces $\left| \sum_{n=m}^p a_n \right| < \epsilon$.

DEMOSTRACIÓN: Se trata de la condición de Cauchy, pues $\sum_{n=m}^p a_n$ es la diferencia entre la suma parcial p -ésima menos la suma parcial $m-1$ -ésima, y su valor absoluto es la distancia entre ambas. ■

De aquí se sigue un hecho importantísimo.

Teorema 2.83 Sea $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una serie en un cuerpo métrico completo \mathbb{K} . Si la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ es convergente, entonces la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ también lo es.

DEMOSTRACIÓN: Dado $\epsilon > 0$ existe un número natural n_0 de manera que si $n_0 \leq m \leq p$, entonces $\sum_{n=m}^p |a_n| < \epsilon$.

Ahora bien, $\left| \sum_{n=m}^p a_n \right| \leq \sum_{n=m}^p |a_n| < \epsilon$, luego la serie sin valores absolutos también es de Cauchy, luego converge. ■

Definición 2.84 Una serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ en un cuerpo métrico completo \mathbb{K} es *absolutamente convergente* si la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ es convergente en \mathbb{R} .

Hemos probado que toda serie absolutamente convergente es convergente. Las series convergentes que no son absolutamente convergentes se llaman series *condicionalmente convergentes*.

La convergencia absoluta de una serie es esencial para ciertas cuestiones. Por ejemplo, una consecuencia inmediata de las propiedades de las sumas finitas y de los límites de sucesiones es que

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n), \quad a \sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} aa_n,$$

entendiendo que si las series de la izquierda convergen, las de la derecha también lo hacen y se da la igualdad. Un resultado análogo para producto de series ya no es tan sencillo [ITAn 2.18]:

Definición 2.85 Sean $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ series en un cuerpo métrico completo \mathbb{K} .

Llamaremos *producto de Cauchy* de estas series a la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k \cdot b_{n-k} \right)$.

La intención es que la serie que acabamos de definir converja al producto de las dos series de partida, pero esto no ocurre necesariamente si al menos una de ellas no converge absolutamente.

Teorema 2.86 Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ son dos series convergentes en un cuerpo métrico completo \mathbb{K} , al menos una de las cuales converge absolutamente, entonces

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k \cdot b_{n-k} \right) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \right).$$

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que la serie que converge absolutamente es $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ y definamos

$$A = \sum_{n=0}^{\infty} a_n, \quad B = \sum_{n=0}^{\infty} b_n, \quad c_n = \sum_{k=0}^n a_k \cdot b_{n-k}, \quad C_n = \sum_{k=0}^n c_k,$$

$$A_n = \sum_{k=0}^n a_k, \quad B_n = \sum_{k=0}^n b_k, \quad \beta_n = B_n - B.$$

Ahora,

$$\begin{aligned} C_n &= c_0 + \cdots + c_n = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) + \cdots + (a_0 b_n + \cdots + a_n b_0) \\ &= a_0 B_n + \cdots + a_n B_0 = a_0 (B + \beta_n) + \cdots + a_n (B + \beta_0) \\ &= A_n B + (a_0 \beta_n + \cdots + a_n \beta_0) \end{aligned}$$

El teorema quedará probado si vemos que $a_0 \beta_n + \cdots + a_n \beta_0$ tiende a 0.

Sea $\epsilon > 0$. Sea $K = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$. Sea $M = \sup\{|\beta_n| \mid n \geq 0\}$ (la sucesión β_n tiende a 0, luego está acotada). Existe un número natural n_0 tal que si $n \geq n_0$, entonces $|\beta_n| < \epsilon/2K$ y si $k \geq n_0$, entonces $\sum_{k=n_0+1}^q |a_k| < \epsilon/2M$. En consecuencia, si $n \geq 2n_0$,

$$\begin{aligned} |a_0\beta_n + \cdots + a_n\beta_0| &\leq \sum_{k=0}^n |a_k\beta_{n-k}| = \sum_{k=0}^{n_0} |a_k\beta_{n-k}| + \sum_{k=n_0+1}^n |a_k\beta_{n-k}| \\ &< \frac{\epsilon}{2K} \sum_{k=0}^{n_0} |a_k| + M \sum_{k=n_0+1}^n |a_k| \leq \frac{\epsilon}{2K} K + \frac{\epsilon}{2M} M = \epsilon. \end{aligned}$$

■

El ejemplo [ITAn 2.21] muestra que el teorema anterior no es válido si las series no convergen absolutamente.

Otro punto en el que la convergencia absoluta resulta crucial es en el de la reordenación de los términos de una serie (véase el ejemplo [ITAn 2.24]). El teorema siguiente es [ITAn 2.25]:

Teorema 2.87 *Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ es una serie absolutamente convergente en un cuerpo métrico completo \mathbb{K} y $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ es una aplicación biyectiva, entonces la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ es absolutamente convergente y tiene la misma suma.*

DEMOSTRACIÓN: Una serie es absolutamente convergente si y sólo si las sumas parciales de sus módulos forman un conjunto acotado. Toda suma parcial de los módulos de la reordenación está mayorada por una suma parcial de los módulos de la serie original (tomando los sumandos necesarios para incluir todos los que aparecen en la suma dada). Por tanto las sumas parciales de los módulos de la reordenación están acotadas y la serie converge absolutamente.

Sea $\epsilon > 0$. Existe un número natural n_0 tal que si $n \geq n_0$

$$\left| \sum_{k=0}^n a_k - \sum_{k=0}^{\infty} a_k \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| = \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| - \sum_{k=0}^n |a_k| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Sea $m_0 \geq n_0$ tal que $\{0, 1, \dots, n_0\} \subset \{\sigma(0), \sigma(1), \dots, \sigma(m_0)\}$. Entonces si $n \geq m_0$,

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=0}^n a_{\sigma(k)} - \sum_{k=0}^{\infty} a_k \right| &\leq \left| \sum_{k=0}^n a_{\sigma(k)} - \sum_{k=0}^{n_0} a_k \right| + \left| \sum_{k=0}^{n_0} a_k - \sum_{k=0}^{\infty} a_k \right| \\ &< \sum_{k=n_0+1}^{\infty} |a_k| + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon. \end{aligned}$$

Por lo tanto $\sum_{k=0}^{\infty} a_{\sigma(k)} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$.

■

Nota Observemos que si I es cualquier conjunto infinito numerable y $\{a_i\}_{i \in I}$ es cualquier familia de elementos de \mathbb{K} , la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_{i_n}$ que resulta de fijar una enumeración i_0, i_1, \dots de I es absolutamente convergente si y sólo si las sumas $\sum_{i \in F} |a_i|$, con $F \subset I$ finito, están acotadas.

En efecto, si las sumas están acotadas, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |a_{i_n}|$ tiene las sumas parciales acotadas, luego es convergente. Recíprocamente, si la serie de los valores absolutos es convergente, su suma acota a todas las sumas finitas.

En estas condiciones, la suma infinita $\sum_{i \in I} a_i$ puede definirse como la suma de la serie determinada por cualquier enumeración del conjunto I o, alternativamente, como el único número $S \in \mathbb{K}$ que cumple la condición siguiente (que no involucra la elección de ninguna enumeración):

Para todo $\epsilon > 0$ existe $F_0 \subset I$ finito tal que, para todo $F_0 \subset F \subset I$, se cumple $\left| S - \sum_{i \in F} a_i \right| < \epsilon$.

En efecto, si la serie converge a S al enumerar I , basta fijar una enumeración y tomar como $F_0 = \{i_0, \dots, i_{n_0}\}$ los primeros términos de la sucesión, de modo que

$$\left| \sum_{n=n_0+1}^{\infty} a_{i_n} \right| < \frac{\epsilon}{2}, \quad \sum_{n=n_0+1}^{\infty} |a_{i_n}| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Entonces, si $F_0 \subset F \subset I$, con F finito:

$$\left| S - \sum_{i \in F} a_i \right| \leq \left| \sum_{n=0}^{\infty} a_{i_n} - \sum_{n=0}^{n_0} a_{i_n} \right| + \left| \sum_{i \in F_0} a_i - \sum_{i \in F} a_i \right| < \frac{\epsilon}{2} + \sum_{i \in F \setminus F_0} |a_i| < \epsilon.$$

Recíprocamente, si se cumple esta condición y fijamos una enumeración de I , para cada $\epsilon > 0$ tomamos F_0 según la hipótesis y elegimos un n_0 tal que $F_0 \subset \{i_0, \dots, i_{n_0}\}$. Así, para todo $n_1 \geq n_0$ se cumple que

$$\left| S - \sum_{n=0}^{n_1} a_{i_n} \right| < \epsilon,$$

luego la serie converge a S . ■

Notemos que la definición [ITAn 2.26] de la convergencia de una serie doble es un caso particular de la definición precedente, cuando $I = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Así, el teorema [ITAn 2.27] es un caso particular del teorema siguiente, al igual que lo es [ITAn 2.29]:

Teorema 2.88 *Sea $\{a_i\}_{i \in I}$ una familia numerable de elementos de un cuerpo métrico completo \mathbb{K} . Sea $I = \bigcup_{n=0}^{\infty} I_n$ una división de I en partes disjuntas.*

Entonces $\sum_{i \in I} a_i$ es (absolutamente) convergente si y sólo si lo son las series

$\sum_{i \in I_n} a_i$ y $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i \in I_n} |a_i|$. Además en tal caso

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i \in I_n} a_i.$$

DEMOSTRACIÓN: Si $\sum_{i \in I} a_i$ es absolutamente convergente, sus sumas parciales en módulo están acotadas, pero toda suma parcial en módulo de cada $\sum_{i \in I_n} |a_i|$ lo es también de la primera, luego éstas están acotadas, o sea, las series $\sum_{i \in I_n} a_i$ convergen absolutamente. Dado cualquier natural k , tomamos para cada $n \leq k$ un conjunto finito $F_n \subset I_n$ tal que $\sum_{i \in I_n} |a_i| - \sum_{i \in F_n} |a_i| < 1/(k+1)$. Entonces

$$\sum_{n=0}^k \sum_{i \in I_n} |a_i| < \sum_{n=0}^k \sum_{i \in F_n} |a_i| + 1 \leq \sum_{i \in I} |a_i| + 1,$$

luego las sumas parciales están acotadas y así todas las series convergen absolutamente.

Supongamos ahora que las series $\sum_{i \in I_n} |a_i|$ y $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i \in I_n} |a_i|$ convergen absolutamente. Si $F \subset I$ es finito, para un cierto k suficientemente grande se cumple

$$\sum_{i \in F} |a_i| = \sum_{n=0}^k \sum_{i \in I_n \cap F} |a_i| \leq \sum_{n=0}^k \sum_{i \in I_n} |a_i| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i \in I_n} |a_i|,$$

luego las sumas parciales de $\sum_{i \in I} |a_i|$ están acotadas y la serie converge absolutamente.

Ahora supongamos la convergencia de todas las series y probemos la igualdad de las sumas. Notemos que la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i \in I_n} a_i$$

es convergente porque es absolutamente convergente. Sea $\epsilon > 0$. Existe un $F_* \subset I$ finito tal que si $F_* \subset F \subset I$ es finito, entonces

$$\left| \sum_{i \in I} a_i - \sum_{i \in F} a_i \right| < \frac{\epsilon}{4}.$$

Existe un número natural n_0 tal que $F_* \subset \bigcup_{n=0}^{n_0} I_n$ y

$$\left| \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \sum_{i \in I_n} a_i \right| < \frac{\epsilon}{4}.$$

Para cada $n \leq n_0$ existe un conjunto finito $F_n \subset I_n$ tal que si $F_n \subset F \subset I_n$, entonces

$$\left| \sum_{i \in I_n} a_i - \sum_{i \in F} a_i \right| < \frac{\epsilon}{2(n_0 + 1)}.$$

Sea $F = F_* \cup \bigcup_{n=0}^{n_0} F_n$, de modo que

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i \in I_n} a_i - \sum_{i \in I} a_i \right| &\leq \left| \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \sum_{i \in I_n} a_i \right| + \left| \sum_{n=0}^{n_0} \sum_{i \in I_n} a_i - \sum_{i \in F} a_i \right| \\ &\quad + \left| \sum_{i \in F} a_i - \sum_{i \in I} a_i \right| \\ &< \frac{\epsilon}{4} + \left| \sum_{n=0}^{n_0} \left(\sum_{i \in I_n} a_i - \sum_{i \in I_n \cap F} a_i \right) \right| + \frac{\epsilon}{4} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

Por lo tanto ambas sumas coinciden. \blacksquare

Una aplicación destacada del teorema anterior es esta variante de 2.86:

Teorema 2.89 Si $\sum_{i \in I} a_i$ y $\sum_{j \in J} b_j$ son dos series (absolutamente) convergentes en un cuerpo métrico completo \mathbb{K} , entonces

$$\sum_{(i,j) \in I \times J} a_i b_j = \left(\sum_{i \in I} a_i \right) \left(\sum_{j \in J} b_j \right).$$

DEMOSTRACIÓN: Es claro que las series $\sum_{j \in J} |a_i b_j|$ son convergentes, al igual que lo es

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} |a_i b_j| = \sum_{i \in I} |a_i| \left(\sum_{j \in J} |b_j| \right),$$

pues en ambos casos estamos multiplicando por una constante los términos de una serie convergente. Por el teorema anterior, aplicado a $I \times J = \bigcup_{i \in I} \{i\} \times J$, concluimos que

$$\sum_{(i,j) \in I \times J} a_i b_j = \sum_{i \in I} \left(\sum_{j \in J} a_i b_j \right) = \sum_{i \in I} a_i \left(\sum_{j \in J} b_j \right) = \left(\sum_{i \in I} a_i \right) \left(\sum_{j \in J} b_j \right). \quad \blacksquare$$

Capítulo III

Compacidad, conexión y completitud

En el capítulo anterior hemos visto que podemos hablar de límites y continuidad de funciones allí donde tengamos definida una topología (preferentemente con la propiedad de Hausdorff), de modo que las propiedades de estos conceptos que conocíamos en algunos casos particulares son aplicables en general. En este capítulo vamos a introducir conceptos más sofisticados que convertirán a la topología en mucho más que un mero “lenguaje general” para describir ciertos objetos matemáticos.

3.1 Espacios compactos

En [ITAn 3.30] definimos un subconjunto compacto de \mathbb{C} (o de \mathbb{R}^2) como un conjunto cerrado y acotado, y probamos el teorema de Weierstrass [ITAn 3.31] sobre funciones continuas en compactos, el cual nos sirvió a su vez para demostrar, por ejemplo, el teorema fundamental del álgebra [ITAn 3.33], el teorema de Liouville [ITAn 10.1] o el teorema de Heine-Cantor [ITAn A.14], que a su vez resulta ser crucial en muchos resultados de [IC].

Sucede que “cerrado y acotado” no es la definición “correcta” de “compacto”. En primer lugar, el concepto de “acotado” no es topológico, sino métrico, es decir, sólo lo tenemos definido en espacios métricos, pero hay muchos espacios métricos en los que los conjuntos cerrados y acotados no cumplen el teorema de Weierstrass ni muchas otras propiedades aplicables a los subespacios compactos de \mathbb{R}^2 o de \mathbb{R}^n en general. En esta sección vamos a dar una definición puramente topológica de la compacidad que generaliza correctamente la noción de compacidad en \mathbb{R}^2 o \mathbb{R}^n . Los espacios topológicos compactos vienen a ser un análogo topológico de los espacios vectoriales de dimensión finita en álgebra: aunque sean infinitos, su comportamiento presenta analogías con el de los espacios finitos.

La definición general de compacidad es un tanto abstracta:

Definición 3.1 Sea X un espacio topológico. Un *cubrimiento abierto* de X es una familia $\{A_i\}_{i \in I}$ de abiertos de X tal que $X = \bigcup_{i \in I} A_i$.

Un *subcubrimiento* del cubrimiento dado es un cubrimiento formado por parte de los abiertos del primero.

Un espacio de Hausdorff K es *compacto* si de todo cubrimiento abierto de K se puede extraer un subcubrimiento finito.

Es obvio que si X es un espacio finito, de todo cubrimiento abierto se puede extraer un subcubrimiento finito. Basta tomar un abierto que contenga a cada uno de los puntos del espacio. Así pues, todo espacio de Hausdorff finito es compacto.

Observemos que si \mathcal{B} es una base de un espacio de Hausdorff K , se cumple que K es compacto si y sólo si todo cubrimiento de K por abiertos básicos admite un subcubrimiento finito. En efecto, si $\{A_i\}_{i \in I}$ es un cubrimiento arbitrario, el conjunto C de los elementos de \mathcal{B} contenidos en algún A_i es también un cubrimiento abierto, ya que para todo $x \in X$ existe un i tal que $x \in A_i$, y por definición de base existe un $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subset A_i$, luego $x \in B \subset C$.

Por hipótesis existe un subcubrimiento finito $\{B_1, \dots, B_n\}$, y para cada índice $j = 1, \dots, n$ existe un $i_j \in I$ tal que $B_j \subset A_{i_j}$, luego

$$K = B_1 \cup \dots \cup B_n \subset A_{i_1} \cup \dots \cup A_{i_n} \subset K.$$

Una familia de abiertos forma un cubrimiento si y sólo si la familia de sus complementarios es una familia de cerrados con intersección vacía. Por ello la compacidad puede caracterizarse así en términos de familias de cerrados:

Un espacio de Hausdorff K es compacto si y sólo si toda familia de cerrados $\{C_i\}_{i \in I}$ con la propiedad de que cualquier intersección finita de ellos no es vacía, tiene intersección total no vacía.

La propiedad de que las intersecciones finitas sean no vacías se llama *propiedad de la intersección finita*. Por lo tanto:

Teorema 3.2 *Un espacio de Hausdorff K es compacto si y sólo si toda familia de cerrados de K con la propiedad de la intersección finita tiene intersección no vacía.*

A menudo nos encontraremos con espacios que no son compactos, pero tienen subespacios compactos. Por ello resulta útil caracterizar la compacidad de un subespacio en términos de la topología de todo el espacio y no de la topología relativa. Concretamente:

Teorema 3.3 *Sea X un espacio de Hausdorff y K un subespacio de X . Entonces K es compacto si y sólo si para toda familia $\{A_i\}_{i \in I}$ de abiertos (básicos) de X tal que $K \subset \bigcup_{i \in I} A_i$ se puede extraer una subfamilia finita que cumpla lo mismo.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que K es compacto. Entonces $\{A_i \cap K\}_{i \in I}$ es claramente un cubrimiento abierto de K , del que podemos extraer un subcubrimiento finito de modo que

$$K = (A_{i_1} \cap K) \cup \cdots \cup (A_{i_n} \cap K),$$

luego $K \subset A_{i_1} \cup \cdots \cup A_{i_n}$.

Recíprocamente, si K cumple esta propiedad y $\{A_i\}_{i \in I}$ es un cubrimiento abierto de K , entonces para cada i existe un abierto B_i de X tal que $A_i = B_i \cap K$ (concretamente, podemos elegir B_i como la unión de todos los abiertos de X con esta propiedad). Consecuentemente $K = \bigcup_{i \in I} A_i \subset \bigcup_{i \in I} B_i$, luego por hipótesis podemos tomar un número finito de conjuntos de modo que $K \subset B_{i_1} \cup \cdots \cup B_{i_n}$, luego $K = (B_{i_1} \cap K) \cup \cdots \cup (B_{i_n} \cap K) = A_{i_1} \cup \cdots \cup A_{i_n}$. Así pues, K es compacto. ■

Si la unión de una familia de abiertos de un espacio X contiene a un subespacio K , diremos que forma un *cubrimiento abierto* de K en X . Así pues, un subespacio K de X es compacto si y sólo si de todo cubrimiento abierto de K en X puede extraerse un subcubrimiento finito (en X también).

Aquí estamos considerando la topología de X , pero deberemos tener siempre presente que la compacidad es una propiedad absoluta, y depende exclusivamente de la topología del propio espacio K .

Los teoremas siguientes muestran la anunciada similitud entre los espacios compactos y los espacios finitos. Por lo pronto, todo subespacio finito es cerrado. El análogo con compactos es el siguiente:

Teorema 3.4 *Se cumplen las propiedades siguientes:*

- a) *Si X es un espacio de Hausdorff y $K \subset X$ es compacto, entonces K es cerrado en X .*
- b) *Si K es un compacto y $C \subset K$ es un cerrado, entonces C es compacto.*
- c) *Si M es un espacio métrico y $K \subset M$ es compacto, entonces K está acotado.*

DEMOSTRACIÓN: a) El argumento es el mismo que emplearíamos si K fuera finito. Veamos que $X \setminus K$ es abierto. Sea $x \in X \setminus K$ y sea C la familia de todos los abiertos que son disjuntos de algún entorno de x . El hecho de que X sea un espacio de Hausdorff se traduce en que todo para todo $u \in K$ existen abiertos disjuntos A y B tales que $u \in A$ y $x \in B$, luego $A \in C$, y esto prueba que C es un cubrimiento abierto de K . Por lo tanto existe un subcubrimiento finito $K \subset A_1 \cup \cdots \cup A_n$, de modo que para cada A_i existe un abierto B_i disjunto de A_i con $x \in B_i$. Finalmente, $\bigcap_{i=1}^n B_i$ es un entorno de x que no corta a K , luego $X \setminus K$ es un entorno de x .

b) Si $\{A_i\}_{i \in I}$ es un cubrimiento abierto de C , entonces $\{A_i\}_{i \in I} \cup \{K \setminus C\}$ es un cubrimiento abierto de K , luego existe un subcubrimiento finito

$$K = A_{i_1} \cup \cdots \cup A_{i_n} \cup (K \setminus C).$$

Claramente entonces $C \subset A_{i_1} \cup \cdots \cup A_{i_n}$, luego C es compacto.

c) Sea $x \in M$ un punto cualquiera. Para cada $u \in K$, sea $r_u = d(x, u) + 1$. Obviamente $K \subset \bigcup_{u \in K} B_{r_u}(x)$. Por compacidad podemos extraer un subcubrimiento finito de modo que $K \subset B_{r_{u_1}}(x) \cup \cdots \cup B_{r_{u_n}}(x)$. Las bolas son conjuntos acotados, una unión finita de acotados es acotada y todo subconjunto de un acotado está acotado. Por tanto K está acotado. ■

El teorema siguiente generaliza al teorema [ITAn 1.24] (teorema de Bolzano-Weierstrass):

Teorema 3.5 *Si K es un espacio compacto, toda sucesión en K posee un punto adherente. Por tanto si además K cumple 1AN, toda sucesión en K tiene una subsucesión convergente.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ una sucesión en K . Sea $A_n = \{a_m \mid m \geq n\}$. Obviamente

$$A_0 \supset A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset A_4 \supset \cdots ,$$

luego también

$$\bar{A}_0 \supset \bar{A}_1 \supset \bar{A}_2 \supset \bar{A}_3 \supset \bar{A}_4 \supset \cdots ,$$

y así tenemos una familia de cerrados con la propiedad de la intersección finita. Por compacidad existe un punto $x \in \bigcap_{i=0}^{\infty} \bar{A}_i$. Obviamente x es un punto adherente de la sucesión, pues si n es un natural y U es un entorno de x , entonces $x \in \bar{A}_n$, luego $U \cap A_n \neq \emptyset$, es decir, existe un $m \geq n$ tal que $a_m \in U$. ■

Esta propiedad caracteriza a los espacios métricos compactos:

Teorema 3.6 *Un espacio métrico M es compacto si y sólo si toda sucesión en M tiene una subsucesión convergente.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que M no fuera compacto. Entonces existiría un cubrimiento abierto $M = \bigcup_{i \in I} A_i$ que no admite subcubrimientos finitos.

Sea $\epsilon > 0$ y $x_0 \in M$. Si $B_\epsilon(x_0) \neq M$, existe un punto $x_1 \in M$ tal que $d(x_1, x_0) \geq \epsilon$. Si $B_\epsilon(x_0) \cup B_\epsilon(x_1) \neq M$, existe un punto $x_2 \in M$ tal que $d(x_2, x_0) \geq \epsilon$, $d(x_2, x_1) \geq \epsilon$.

Si M no pudiera cubrirse por un número finito de bolas de radio ϵ , podríamos construir una sucesión $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ con la propiedad de que $d(x_i, x_j) \geq \epsilon$ para todos los naturales i, j . Es claro que tal sucesión no puede tener subsucesiones convergentes, pues una bola de centro el límite y radio $\epsilon/2$ debería contener infinitos términos de la sucesión, que distarían entre sí menos de ϵ .

Concluimos que para todo $\epsilon > 0$ existen puntos $x_0, \dots, x_n \in M$ de modo que $M = B_\epsilon(x_0) \cup \cdots \cup B_\epsilon(x_n)$.

Lo aplicamos a $\epsilon = 1$ y obtenemos tales bolas. Si todas ellas pudieran cubrirse con un número finito de abiertos A_i también M podría, luego al menos una de ellas, digamos $B_1(x_0)$ no es cubrible por un número finito de abiertos del cubrimiento.

Igualmente, con $\epsilon = 1/2$ obtenemos una bola $B_{1/2}(x_1)$ no cubrible por un número finito de abiertos del cubrimiento. En general obtenemos una sucesión de bolas $B_{1/(n+1)}(x_n)$ con esta propiedad.

Sea x un punto adherente de la sucesión $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$. Sea $i \in I$ tal que $x \in A_i$. Como A_i es un abierto existe un número natural k tal que $B_{2/(k+1)}(x) \subset A_i$. Sea $n > k$ tal que $d(x_n, x) < 1/(k+1)$. Entonces $B_{1/(n+1)}(x_n) \subset B_{2/(k+1)}(x) \subset A_i$, en contradicción con que $B_{1/(n+1)}(x_n)$ no era cubrible con un número finito de abiertos del cubrimiento. ■

Ahora tenemos probado que $\overline{\mathbb{R}}$ es compacto, por el argumento dado al principio de esta sección. De aquí obtenemos a su vez una caracterización de los subespacios compactos de \mathbb{R} :

Teorema 3.7 *Un subconjunto de \mathbb{R} es compacto si y sólo si es cerrado y acotado.*

DEMOSTRACIÓN: Por el teorema 3.4, todo compacto en \mathbb{R} ha de ser cerrado y acotado. Si C es un conjunto cerrado y acotado, toda sucesión en C tiene una subsucesión convergente en \mathbb{R} . Como C es acotado su límite estará en \mathbb{R} y como es cerrado, su límite estará en C , luego toda sucesión en C tiene una subsucesión convergente en C . Por el teorema anterior C es compacto. ■

También se puede probar el teorema anterior viendo que los cerrados y acotados de \mathbb{R} son precisamente los subconjuntos cerrados de $\overline{\mathbb{R}}$ (o, si se prefiere, esto es consecuencia inmediata del teorema anterior).

Teorema 3.8 (Teorema de Tychonoff) (AE)¹ *El producto de espacios topológicos compactos es compacto.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $K = \prod_{i \in I} K_i$ un producto de espacios compactos. Tomemos una familia \mathcal{B} de cerrados en K con la propiedad de la intersección finita. Hemos de probar que su intersección es no vacía. El conjunto de todas las familias de subconjuntos no vacíos de K (no necesariamente cerrados) que contienen a \mathcal{B} y tienen la propiedad de la intersección finita, parcialmente ordenado por la inclusión, satisface las hipótesis del lema de Zorn, lo que nos permite tomar una familia maximal \mathcal{U} . Entonces $\bigcap_{U \in \mathcal{U}} \overline{U} \subset \bigcap_{B \in \mathcal{B}} B$, luego basta probar que la primera intersección es no vacía.

En primer lugar observamos que si un conjunto $A \subset K$ corta a todos los elementos de \mathcal{U} entonces está en \mathcal{U} , pues en caso contrario $\mathcal{U} \cup \{A\}$ contradiría la maximalidad de \mathcal{U} .

¹No se requiere AE para probar que el producto de un número finito de espacios compactos es compacto, y si el producto es numerable basta con el Principio de Elecciones Dependientes. Remitimos a [TC] (teorema 8.67 y las observaciones posteriores) para la justificación de estos hechos.

Sea $p_i : K \rightarrow K_i$ la proyección en el factor i -ésimo. Es fácil ver que la familia $\{p_i[U] \mid U \in \mathcal{U}\}$ tiene la propiedad de la intersección finita luego, por la compacidad de K_i , existe un punto $x_i \in K_i$ tal que $x_i \in \overline{p_i[U]}$ para todo $U \in \mathcal{U}$. Estos puntos determinan un punto $x \in K$. Basta probar que $x \in \bigcap_{U \in \mathcal{U}} \overline{U}$.

Fijemos un entorno básico de x , de la forma $A = \bigcap_{i \in F} p_i^{-1}[G_i]$, donde $F \subset I$ es finito y G_i es abierto en K_i . Para cada $U \in \mathcal{U}$ tenemos que $x_i \in \overline{p_i[U]}$, luego $G_i \cap p_i[U] \neq \emptyset$, luego $p_i^{-1}[G_i] \cap U \neq \emptyset$. Como esto es cierto para todo $U \in \mathcal{U}$, según hemos observado antes podemos concluir que $p_i^{-1}[G_i] \in \mathcal{U}$, para todo $i \in F$. Como \mathcal{U} tiene la propiedad de la intersección finita, $A \in \mathcal{U}$. De aquí se sigue que A corta a todo $U \in \mathcal{U}$ y, como A es un entorno básico de x , esto implica que $x \in \overline{U}$ para todo $U \in \mathcal{U}$. ■

Ahora podemos reconocer fácilmente los subconjuntos compactos de \mathbb{R}^n :

Teorema 3.9 *Un subconjunto de \mathbb{R}^n , es compacto si y sólo si es cerrado y acotado.*

DEMOSTRACIÓN: La acotación depende en principio de la distancia que consideremos. Hemos de entender que se trata de la inducida por cualquiera de las tres normas definidas en el capítulo II. Por el teorema 2.3, todas tienen los mismos acotados. Trabajaremos concretamente con

$$\|x\|_\infty = \max\{|x_i| \mid i = 1, \dots, n\}.$$

Ya hemos visto que un compacto ha de ser cerrado y acotado. Supongamos que K es un subconjunto de \mathbb{R}^n cerrado y acotado. Esto significa que existe un $M > 0$ tal que para todo punto $x \in C$ se cumple $\|x\| \leq M$, lo que significa que si $x \in C$, cada $x_i \in [-M, M]$ o, de otro modo, que $C \subset [-M, M]^n$.

Pero por el teorema anterior $[-M, M]^n$ es compacto y C es cerrado en él, luego C también es compacto. ■

Una de las propiedades más importantes de la compacidad es que se conserva por aplicaciones continuas (compárese con el hecho de que la imagen (continua) de un conjunto finito es finita):

Teorema 3.10 *La imagen de un espacio compacto por una aplicación continua es de nuevo un espacio compacto (supuesto que sea un espacio de Hausdorff).*

DEMOSTRACIÓN: Sea $f : K \rightarrow X$ continua y suprayectiva. Supongamos que K es compacto y que X es un espacio de Hausdorff. Si $\{A_i\}_{i \in I}$ es un cubrimiento abierto de X , entonces $\{f^{-1}[A_i]\}_{i \in I}$ es un cubrimiento abierto de K , luego admite un subcubrimiento finito $K = f^{-1}[A_{i_1}] \cup \dots \cup f^{-1}[A_{i_n}]$. Entonces $X = A_{i_1} \cup \dots \cup A_{i_n}$. ■

Este hecho tiene muchas consecuencias:

Teorema 3.11 *Si $f : K \rightarrow X$ es biyectiva y continua, K es compacto y X es un espacio de Hausdorff, entonces f es un homeomorfismo.*

DEMOSTRACIÓN: Basta probar que la inversa es continua, o sea, que transforma cerrados de K en cerrados de X , o equivalentemente, que si C es cerrado en K , entonces $f[C]$ es cerrado en X , pero es que C es compacto, luego $f[C]$ también lo es, luego es cerrado. ■

Ejemplo Una circunferencia es homeomorfa a un cuadrado.

En efecto, si C es un cuadrado de centro $(0,0)$ en \mathbb{R}^2 , es claro que la aplicación de C en la circunferencia unidad dada por $x \mapsto x/\|x\|$ es biyectiva y continua y, como C es compacto, es un homeomorfismo. ■

Otro hecho obvio es que toda aplicación continua de un compacto a un espacio métrico está acotada. Para las funciones reales tenemos la versión general del teorema de Weierstrass [ITAn 3.31]:

Teorema 3.12 Si $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ es continua y K es un compacto no vacío, existen $u, v \in K$ tales que para todo $x \in K$, se cumple $f(u) \leq f(x) \leq f(v)$. Es decir, que f alcanza un valor mínimo y un valor máximo.

DEMOSTRACIÓN: Sea $C = f[K]$. Entonces C es cerrado y acotado. Sean m y M su ínfimo y su supremo, respectivamente. Así para todo $x \in K$ se cumple que $m \leq f(x) \leq M$. Sólo falta probar que m y M son imágenes de puntos de K , o sea, que $m, M \in C$. Veámoslo para M .

Si $\epsilon > 0$, entonces $M - \epsilon$ no es una cota superior de C , luego existe un punto $y \in C$ de modo que $M - \epsilon < y$, es decir, que $]M - \epsilon, M + \epsilon[\cap C \neq \emptyset$. Esto significa que todo entorno (básico) de M corta a C , o sea, $M \in \overline{C} = C$. ■

Observemos que este resultado es falso sin compacidad. Por ejemplo la función $f :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x$ no tiene máximo ni mínimo.

3.2 Espacios localmente compactos

Hemos visto que \mathbb{R}^n no es compacto, pero cumple una propiedad relacionada con la compacidad que conviene destacar:

Definición 3.13 Un espacio topológico de Hausdorff es *localmente compacto* si todo punto tiene un entorno compacto.

Así, todo espacio compacto es localmente compacto. El teorema siguiente implica en particular que, en un espacio localmente compacto, todo punto tiene, de hecho, una base de entornos compactos:

Teorema 3.14 Sea X un espacio localmente compacto y $K \subset V \subset X$, con K compacto y V abierto. Entonces existe un abierto W tal que $K \subset W \subset \overline{W} \subset V$ y \overline{W} es compacto.

DEMOSTRACIÓN: Lo probamos primero para el caso en que $K = \{x\}$ se reduce a un punto. Sea C un entorno compacto de p . Para cada $y \in C \setminus V$, tomamos abiertos disjuntos $x \in U_y, y \in V_y$. Como $C \setminus V$ es compacto, existen y_1, \dots, y_n tales que $C \setminus V \subset V_{y_1} \cup \dots \cup V_{y_n}$, luego $U = U_{y_1} \cap \dots \cap U_{y_n}$ cumple que $U \subset C \setminus (V_{y_1} \cup \dots \cup V_{y_n})$, luego $K \subset \overline{U} \subset C \setminus (V_{y_1} \cup \dots \cup V_{y_n}) \subset V$.

En el caso general, para cada $x \in K$ existe un abierto W_x de clausura compacta tal que $x \in W_x \subset \overline{W_x} \subset V$. Los abiertos W_x cubren a K . Tomamos un subcubrimiento finito y llamamos W a la unión de sus miembros. ■

Por ejemplo, si $x \in \mathbb{R}^n$, las bolas cerradas $B'_\epsilon(x)$ forman una base de entornos compactos de x , luego \mathbb{R}^n es localmente compacto.

Todo cuanto digamos sobre \mathbb{R}^n se aplica en particular al cuerpo \mathbb{C} de los números complejos, que no es sino $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, al que consideraremos siempre como espacio topológico con la topología inducida por el valor absoluto, que no es sino la norma euclídea de \mathbb{R}^2 . En particular, tenemos que \mathbb{C} es localmente compacto.

Una de las características de los espacios localmente compactos es que se pueden “compactificar” añadiendo un punto. En efecto:

La compactificación de Alexandroff Si X es un espacio topológico localmente compacto no compacto y ∞ es cualquier conjunto que no pertenezca a X , definimos la *compactificación de Alexandroff* de X como el espacio $X^\infty = X \cup \{\infty\}$ con la topología cuyos abiertos son los de X más los de la forma $(X \setminus K) \cup \{\infty\}$, donde $K \subset X$ es compacto.

Veamos que se trata ciertamente de una topología. Claramente \emptyset y X^∞ son abiertos. Si \mathcal{F} es una familia de abiertos en X^∞ , la unión $V = \bigcup \mathcal{F}$ es abierta, pues si $\infty \notin V$ entonces es una unión de abiertos de X , y $\infty \in U \in \mathcal{F}$, entonces $U = (X \setminus K) \cup \{\infty\}$, con K compacto, y si expresamos $V = (X \setminus K') \cup \{\infty\}$, entonces $X \setminus K'$ es abierto en X , porque es unión de los abiertos $W \setminus \{\infty\}$, donde W recorre \mathcal{F} , y además $X \setminus K \subset X \setminus K'$, luego $K' \subset K$, luego K' es compacto por ser cerrado en un compacto. Así pues, V es abierto en X^∞ .

Si U_1, \dots, U_n son abiertos en X^∞ y $V = U_1 \cap \dots \cap U_n$, entonces

$$V \setminus \{\infty\} = (U_1 \setminus \{\infty\}) \cap \dots \cap (U_n \setminus \{\infty\})$$

es abierto en X , por ser intersección de abiertos. Si $\infty \notin V$, entonces V es abierto en X^∞ . En caso contrario podemos expresarlo como $V = (X \setminus K) \cup \{\infty\}$, y hay que probar que K es compacto. Pero entonces $U_i = (X \setminus K_i) \cup \{\infty\}$, donde cada K_i es compacto, y $K = K_1 \cup \dots \cup K_n$. Pero es fácil ver (usando el teorema 3.3) que una unión finita de subespacios compactos es compacta.

Además X^∞ es un espacio compacto. En efecto, como X es un espacio de Hausdorff, es claro que dos puntos distintos de X tienen entornos disjuntos en X , luego en X^∞ . Además, si $x \in X$, entonces tiene un entorno compacto K , luego podemos tomar un abierto $x \in U \subset K$, y entonces $V = (X \setminus K) \cup \{\infty\}$ es un entorno de ∞ disjunto de U . Esto prueba que X^∞ es un espacio de Hausdorff.

Además, si $\{A_i\}_{i \in I}$ es un cubrimiento abierto de X^∞ , existe un $i_0 \in I$ tal que $\infty \in A_{i_0}$. Por lo tanto, $A_{i_0} = (X \setminus K) \cup \{\infty\}$, con $K \subset X$ compacto. Entonces $\{A_i \setminus \{\infty\}\}_{i \in I}$ es un cubrimiento abierto de K , luego podemos extraer un subcubrimiento finito $\{A_{i_k} \setminus \{\infty\}\}_{k=1}^n$, y entonces es claro que

$$X^\infty = A_{i_0} \cup \dots \cup A_{i_n}.$$

Notemos que si $X = \mathbb{R}^n$, entonces el espacio X^∞ construido en la página 61 es el mismo que acabamos de construir ahora, pues allí usábamos conjuntos cerrados y acotados donde ahora hemos usado conjuntos compactos, y ambos conceptos coinciden en \mathbb{R}^n . En particular hemos visto que $\mathbb{C}^\infty = (\mathbb{R}^2)^\infty$ es homeomorfo a una esfera y que \mathbb{R}^∞ es homeomorfo a una circunferencia. ■

Teorema 3.15 *Se cumple:*

- a) *Todo subespacio abierto o cerrado de un espacio localmente compacto es localmente compacto.*
- b) *Un espacio es localmente compacto si y sólo si es un subespacio abierto de un espacio compacto.*

DEMOSTRACIÓN: a) Sea X un espacio localmente compacto y consideremos un subespacio $Y \subset X$. Si Y es cerrado y $p \in Y$, entonces p tiene una base \mathcal{B} de entornos compactos en X , y es claro que los conjuntos $\{K \cap Y \mid K \in \mathcal{B}\}$ son una base de entornos compactos de p en Y .

Si Y es abierto, $p \in Y$ y U es un entorno abierto de p en Y , entonces U es abierto en X , luego existe un entorno compacto K de p en Y tal que $p \in K \subset U \subset Y$, pero es claro que K es también entorno de p en Y , luego hemos probado que los entornos compactos de p en Y son una base de entornos de p . Así pues, Y es localmente compacto en ambos casos.

b) Si un espacio X es abierto en un espacio compacto, entonces es localmente compacto por a), y si X es localmente compacto, entonces, o bien es compacto y es abierto en sí mismo, o bien no es compacto, y es abierto en el espacio compacto X^∞ . ■

Terminamos esta sección demostrando unos resultados que necesitaremos más adelante:

Si X es un espacio localmente compacto y $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, llamaremos *soporte* de f a la clausura del conjunto de puntos donde f toma valores $\neq 0$. Llamaremos $C_c(X)$ al conjunto de las aplicaciones continuas $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ con soporte compacto. Es claro que se trata de un subespacio vectorial de $C(X)$.

Usaremos las notaciones $K \prec f$ y $f \prec V$ para indicar que $f : X \rightarrow [0, 1]$, $f \in C_c(X)$, K es compacto, V es abierto, f toma el valor 1 en K y f toma el valor 0 en $X \setminus V$.

He aquí el primero de los resultados que necesitaremos en el capítulo VI: afirma que siempre podemos tomar una función continua que valga 1 en cualquier compacto prefijado, pero que descienda rápidamente hasta valer 0 fuera de cualquier entorno prefijado de dicho compacto.

Teorema 3.16 (Lema de Urysohn) *Sea X un espacio localmente compacto, sea V un abierto y $K \subset V$ compacto. Entonces existe $f \in C_c(X)$ tal que $K \prec f \prec V$.*

DEMOSTRACIÓN: Por el teorema 3.14 existe un abierto $K \subset V_0 \subset V$ de clausura compacta. A su vez, existe un abierto W_0 de clausura compacta tal que $K \subset W_0 \subset \overline{W_0} \subset V_0$. Sea $W_1 = X$. Aplicamos de nuevo el teorema a $\overline{W_0} \subset V_0$, con lo que obtenemos un abierto $W_{1/2}$ de clausura compacta tal que

$$K \subset W_0 \subset \overline{W_0} \subset W_{1/2} \subset \overline{W_{1/2}} \subset V_0 \subset W_1.$$

Dos nuevas aplicaciones del mismo teorema nos dan

$$K \subset W_0 \subset \overline{W_0} \subset W_{1/4} \subset \overline{W_{1/4}} \subset W_{1/2} \subset \overline{W_{1/2}} \subset W_{3/4} \subset \overline{W_{3/4}} \subset V_0 \subset W_1.$$

Inductivamente vamos obteniendo una familia de abiertos $\{W_r\}_{r \in R}$, donde $R = \{k/2^i \mid i \in \mathbb{N}, 0 \leq k \leq 2^i\}$, de manera que si $r < r' < 1$ son puntos de R , entonces $K \subset \overline{W_r} \subset W_{r'} \subset V_0 \subset V$.

Definimos $g : X \rightarrow [0, 1]$ mediante $g(x) = \inf\{r \in R \mid x \in W_r\}$. Así $g[K] = \{0\}$ porque $K \subset W_0$ y $g[X \setminus V_0] = \{1\}$ porque $W_r \cap (X \setminus V_0) = \emptyset$ si $r < 1$. Basta probar que g es continua, pues entonces $f = 1 - g$ cumple lo pedido (su soporte está en $\overline{V_0}$, luego es compacto).

Sea $x \in X$ y $\epsilon > 0$. Si $g(x) \neq 0$ y $g(x) \neq 1$, entonces existen $r, r' \in R$ tales que $g(x) - \epsilon < r < g(x) < r' < g(x) + \epsilon$, luego $U = W_{r'} - \overline{W_r}$ es un entorno de x que cumple

$$g[U] \subset [r, r'] \subset]g(x) - \epsilon, g(x) + \epsilon[.$$

Si $g(x) = 0$ tomamos $0 = g(x) < r < g(x) + \epsilon$ y $U = W_r$ cumple lo mismo. Si $g(x) = 1$ tomamos $g(x) - \epsilon < r < g(x)$ y el U buscado es $X \setminus \overline{W_r}$. En cualquier caso obtenemos la continuidad de g en x . ■

El resultado siguiente es una generalización del anterior que, como veremos, nos permitirá “pegar” varias funciones continuas en una sola:

Teorema 3.17 *Si X es un espacio localmente compacto, V_1, \dots, V_n son abiertos de X y $K \subset V_1 \cup \dots \cup V_n$ es compacto, entonces existen funciones $h_i \prec V_i$ tales que $h_1(x) + \dots + h_n(x) = 1$ para todo $x \in K$.*

Se dice que las funciones h_i forman una *partición de la unidad* subordinada a los abiertos dados.

DEMOSTRACIÓN: Dado $x \in K$ existe un i tal que $x \in V_i$. Existe un abierto W_x de clausura compacta tal que $x \in W_x \subset \overline{W_x} \subset V_i$. Los abiertos W_x cubren a K . Extraemos un subcubrimiento finito y llamamos H_i a la unión de todos los abiertos del subcubrimiento cuya clausura está en V_i . De este modo los H_i son abiertos de clausura compacta que cubren a K y $\overline{H_i} \subset V_i$. Por el teorema anterior existen funciones $\overline{H_i} \prec V_i$. Definimos

$$h_1 = g_1, \quad h_2 = (1 - g_1)g_2, \quad \dots \quad h_n = (1 - g_1)(1 - g_2) \cdots (1 - g_{n-1})g_n.$$

Es claro que $h_i \prec V_i$ y una simple inducción prueba que

$$h_1 + \dots + h_n = 1 - (1 - g_1) \cdots (1 - g_n).$$

Es claro entonces que la suma vale 1 sobre los puntos de K , pues una de las funciones g_i ha de tomar el valor 1. ■

3.3 Espacios conexos

Pensemos en los espacios siguientes: $[0, 1]$ y $[0, 1] \cup [2, 3]$. Hay una diferencia esencial entre ellos, y es que el primero está formado por “una sola pieza” mientras que el segundo consta de “dos piezas”. La diferencia no es conjuntista, pues también podemos dividir $[0, 1] = [0, 1/2] \cup]1/2, 1]$, pero esto no son dos piezas en el mismo sentido que en el caso de $[0, 1] \cup [2, 3]$. La diferencia es que los intervalos $[0, 1/2]$ y $]1/2, 1]$ están “pegados” mientras que los intervalos $[0, 1]$ y $[2, 3]$ están “separados”. Con más precisión, el punto $1/2$ está sólo en uno de los intervalos, el $[0, 1/2]$, pero aunque no está en el otro, está pegado a él, en el sentido de que está en su clausura.

En general, si un espacio X se expresa como $X = U \cup V$, donde U y V son disjuntos y no vacíos, podemos decir que U y V son dos “piezas” en el sentido que estamos considerando si U no contiene puntos de la clausura de V y viceversa. Ahora bien, cualquier punto de \overline{V} que no estuviera en V debería estar en U , luego la condición equivale a que $V = \overline{V}$ y $U = \overline{U}$, o sea, a que U y V sean cerrados. Por otra parte, dado que U y V son complementarios, es lo mismo decir que son cerrados o que son abiertos. Con ello llegamos a la definición de conexión:

Definición 3.18 Un espacio topológico X es *disconexo* si existen subconjuntos abiertos U y V en X tales que $X = U \cup V$, $U \cap V = \emptyset$ y $U \neq \emptyset \neq V$. En caso contrario X es *conexo*.

Según hemos dicho, es indistinto exigir que U y V sean abiertos como que sean cerrados, pues de hecho si cumplen esto son a la vez abiertos y cerrados. Por lo tanto, un espacio X es conexo si y sólo si sus únicos subconjuntos que son a la vez abiertos y cerrados son X y \emptyset .

Es obvio que $[0, 1] \cup [2, 3]$, o incluso $[0, 1/2[\cup]1/2, 1]$ son ejemplos de espacios desconexos. Notar que $[0, 1/2[$ no es cerrado en \mathbb{R} , pero sí lo es en el espacio $[0, 1/2[\cup]1/2, 1]$ (su clausura en este espacio es la intersección con él de su clausura en \mathbb{R} , que es $[0, 1/2]$, o sea, es $[0, 1/2[$).

Es importante tener claro que los intervalos $[0, 1/2[$ y $]1/2, 1]$ están separados pese a que sólo falta un punto entre ellos. La falta de ese punto es suficiente para que ambas partes no se puedan “comunicar”, en el sentido de que, por ejemplo, ninguna sucesión contenida en una de las piezas puede converger a un punto de la otra. Esto es suficiente para que ambas partes sean independientes topológicamente. Así, la función $f : [0, 1/2[\cup]1/2, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, 1/2[, \\ 2 & \text{si } x \in]1/2, 1] \end{cases}$$

es continua, mientras que sería imposible definir una función continua sobre $[0, 1]$ que sólo tomara los valores 1 y 2.

Si la desconexión de estos espacios es clara, no lo es tanto la conexión de espacios como $[0, 1]$.

Ejercicio: Probar que el intervalo $[0, 1] \subset \mathbb{Q}$ es desconexo.

La conexión está implícita en muchos argumentos del análisis de funciones de una variable real en virtud del teorema siguiente:

Teorema 3.19 *Un subconjunto de $\overline{\mathbb{R}}$ es conexo si y sólo si es un intervalo.*

DEMOSTRACIÓN: Sea C un subespacio conexo de $\overline{\mathbb{R}}$. Sean a y b su ínfimo y su supremo, respectivamente. Vamos a probar que C es uno de los cuatro intervalos de extremos a y b . Por el teorema 1.3 basta ver que si $a < x < b$ entonces $x \in C$. En caso contrario los conjuntos $C \cap [-\infty, x[$ y $C \cap]x, +\infty]$ son dos abiertos disjuntos no vacíos de C cuya unión es C .

Tomemos ahora un intervalo I y veamos que es conexo. Supongamos que existen abiertos disjuntos no vacíos U y V en I de modo que $I = U \cup V$. Tomemos $x \in U$ e $y \in V$. Podemos suponer que $x < y$.

Como I es un intervalo, $[x, y] \subset I$ y $U' = U \cap [x, y]$, $V' = V \cap [x, y]$ son abiertos disjuntos no vacíos en $[x, y]$ de modo que $[x, y] = U' \cup V'$.

Sea s el supremo de U' . Entonces $s \in \overline{U'} \cap [x, y] = U'$, luego en particular $s < y$. Claramente $]s, y] \subset V'$, luego $s \in \overline{V'} \cap [x, y] = V'$, contradicción. ■

Una consecuencia de esto es que un intervalo $[a, b[$ no es homeomorfo a uno de tipo $]c, d[$. En efecto, si eliminamos un punto de un intervalo $]c, d[$ nos queda un espacio desconexo, mientras que en $[a, b[$ podemos eliminar el punto a y obtenemos un conexo. (Si fueran homeomorfos, el espacio que resultara de eliminar la imagen de a en $]c, d[$ debería ser homeomorfo a $]a, b[$).

Ejercicio: Probar que dos intervalos (acotados o no acotados) son homeomorfos si y sólo si son del mismo tipo: abierto $]a, b[$, cerrado $[a, b]$ o semiabierto $[a, b[$.

Teorema 3.20 *Las imágenes continuas de los espacios conexos son conexas.*

DEMOSTRACIÓN: Si $f : X \rightarrow Y$ es una aplicación continua y suprayectiva pero Y no es conexo, entonces X tampoco puede serlo, pues si A es un abierto cerrado no vacío en Y y distinto de Y , entonces $f^{-1}[A]$ cumple lo mismo en X . ■

Teorema 3.21 *Sea $\{A_i\}_{i \in I}$ una familia de subespacios conexos de un espacio topológico X tal que $\bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$. Entonces $\bigcup_{i \in I} A_i$ es conexo.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que $\bigcup_{i \in I} A_i = U \cup V$, donde U y V son abiertos disjuntos. Entonces para un i cualquiera se tendrá que $A_i = (U \cap A_i) \cup (V \cap A_i)$, pero $U \cap A_i$, $V \cap A_i$ son abiertos disjuntos en A_i , luego uno de ellos es vacío, y así $A_i \subset U$ o bien $A_i \subset V$.

Pero si $A_i \subset U$, entonces U contiene a $\bigcap_{i \in I} A_i$, luego U corta a todos los A_i y por conexión los contiene a todos. Así $\bigcup_{i \in I} A_i = U$, y $V = \emptyset$. Igualmente, si $A_i \subset V$ se deduce que U es vacío. ■

Este teorema ayuda a comprobar la conexión de muchos espacios.

Ejemplo *Las circunferencias son conexas.*

Sea $f : [-1, 1] \rightarrow \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1, y \geq 0\}$ la aplicación dada por $f(x) = (x, \sqrt{1-x^2})$. Claramente f es continua y suprayectiva, lo que prueba que la semicircunferencia es conexas. Igualmente se prueba que la semicircunferencia opuesta es conexas, y como ambas se cortan en los puntos $(\pm 1, 0)$, su unión, es decir, la circunferencia, es conexas. ■

Teorema 3.22 *Si A es un subespacio conexo de un espacio X , entonces \bar{A} es conexo.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que $\bar{A} = U \cup V$, donde U y V son abiertos disjuntos en \bar{A} . Entonces $A = (U \cap A) \cup (V \cap A)$, y $U \cap A$, $V \cap A$ son abiertos disjuntos en A . Por conexión uno es vacío, luego $A \subset U$ o bien $A \subset V$. Digamos $A \subset U \subset \bar{A}$.

Pero U es cerrado en \bar{A} , luego $\bar{A} \subset \bar{U} = U$, es decir, $U = \bar{A}$ y $V = \emptyset$. Esto prueba que \bar{A} es conexo. ■

Hemos dicho que un espacio desconexo es un espacio formado por varias “piezas” ahora podemos dar una definición rigurosa de lo que entendemos por una “pieza”.

Definición 3.23 Sea X un espacio topológico y $x \in X$. Llamaremos *componente conexas* de x a la unión $C(x)$ de todos los subconjuntos conexos de X que contienen a x . Por el teorema 3.21, $C(x)$ es un conexo, el mayor subespacio conexo de X que contiene a x .

Es obvio que si $x, y \in X$, entonces $C(x)$ y $C(y)$ son iguales o disjuntas. En efecto, si tienen puntos en común, por el teorema 3.21 resulta que $C(x) \cup C(y)$ es un conexo, luego $C(x) \cup C(y) \subset C(x)$ y $C(x) \cup C(y) \subset C(y)$, con lo que $C(x) = C(x) \cup C(y) = C(y)$.

En resumen, todo espacio X está dividido en componentes conexas disjuntas. Las componentes conexas son cerradas por el teorema 3.22. En efecto, $\overline{C(x)}$ es un conexo que contiene a x , luego $\overline{C(x)} \subset C(x)$. Sin embargo las componentes conexas no siempre son abiertas. Si un espacio tiene un número finito de componentes conexas, éstas serán abiertas y cerradas a la vez, evidentemente, pero si hay infinitas componentes ya no es necesario. Por ejemplo, ningún subconjunto de \mathbb{Q} con más de un punto es conexo, porque no es un intervalo de \mathbb{R} , luego las componentes conexas de \mathbb{Q} son los puntos, que no son abiertos.

Espacios arcoconexos Para probar que un espacio es conexo resulta útil el concepto de arco.

Un *arco* en un espacio X es una aplicación continua $a : [0, 1] \rightarrow X$. El espacio X es *arco-conexo* si para todo par de puntos $x, y \in X$ existe un arco $a : [0, 1] \rightarrow X$ tal que $a(0) = x$, $a(1) = y$.



Todo espacio arcoconexo es conexo, pues si x e y son dos puntos cualesquiera y a es un arco que los une, entonces x e y están en la imagen del arco a , que es un conexo, luego x e y están en la misma componente conexas de X , luego sólo hay una. El recíproco no es cierto, pero no vamos a dar un ejemplo.

Espacios localmente convexos Dados dos puntos $x, y \in \mathbb{R}^n$, el segmento que los une está formado por los puntos $y + \lambda(x - y)$, con $\lambda \in [0, 1]$. Esto se puede definir en cualquier \mathbb{R} -espacio vectorial. Si V es un espacio vectorial topológico y $x, y \in V$, entonces la aplicación $a : [0, 1] \rightarrow V$ dada por $a(\lambda) = (1 - \lambda)x + \lambda y$ es un arco, el *segmento* que une x con y .

Un subconjunto A de un \mathbb{R} -espacio vectorial V es *convexo* si para todos los puntos $x, y \in A$ y todo $\lambda \in [0, 1]$ se cumple $(1 - \lambda)x + \lambda y \in A$, es decir, si cuando A contiene a dos puntos, también contiene al segmento que los une.

Uniendo todo esto, resulta que en un espacio vectorial topológico sobre \mathbb{R} todo convexo es arco-conexo, luego conexo. En particular todo espacio vectorial topológico sobre \mathbb{R} es conexo. En particular \mathbb{R}^n es conexo.

Ejercicio: Probar que toda esfera de centro 0 en \mathbb{R}^n es imagen continua de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Probar que $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ es conexo y deducir de aquí la conexión de la esfera.

Ejercicio: Probar que \mathbb{R}^2 no es homeomorfo a \mathbb{R} .

Los conjuntos convexos tienen una propiedad que en general no cumplen los conexos, y es que, claramente, la intersección de convexos es convexa.

Ejemplo Las bolas en los espacios normados (sobre \mathbb{R}) son convexas.

En efecto, si $x, y \in B_\epsilon(z)$, entonces $\|x - z\| < \epsilon$, $\|y - z\| < \epsilon$, luego para todo $\lambda \in [0, 1]$ se cumple

$$\begin{aligned} \|(1 - \lambda)x + \lambda y - z\| &= \|(1 - \lambda)x + \lambda y - (1 - \lambda)z - \lambda z\| \leq \\ &(1 - \lambda)\|x - z\| + \lambda\|y - z\| < (1 - \lambda)\epsilon + \lambda\epsilon = \epsilon. \end{aligned}$$

Por lo tanto $(1 - \lambda)x + \lambda y \in B_\epsilon(z)$.

(Cambiando las desigualdades estrictas por desigualdades no estrictas se prueba que las bolas cerradas son convexas.) ■

Espacios localmente convexos, conexos o arco-conexos Un espacio vectorial topológico (sobre \mathbb{R}) es *localmente convexo* si tiene una base formada por conjuntos convexos. El ejemplo anterior prueba que todos los espacios normados son localmente convexos.

Igualmente, un espacio topológico es *localmente conexo* o *localmente arco-conexo* si tiene una base formada por abiertos conexos o arco-conexos, respectivamente.

Así, los espacios localmente convexos son localmente arco-conexos y los espacios localmente arco-conexos son localmente conexos.

Un hecho importante es que si A es un abierto en un espacio localmente conexo X , entonces las componentes conexas de A son abiertas y cerradas.

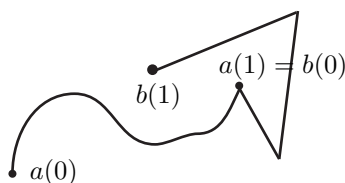
En efecto, si C es una componente conexa de A y $x \in C$, entonces existe un abierto (básico) U de X tal que U es conexo y $x \in U \subset A$. Como C es la componente conexa de x , ha de ser $U \subset C$, luego C es un entorno de x , o sea, C es entorno de todos sus puntos, luego es un abierto.

Ejercicio: Probar que todo abierto no vacío en \mathbb{R} es la unión disjunta de una cantidad numerable de intervalos abiertos.

Sean a y b dos arcos en un espacio X de modo que $a(1) = b(0)$. Entonces la aplicación $b_1 : [1, 2] \rightarrow X$ dada por $b_1(t) = b(t-1)$ es continua y cumple que $b_1(1) = b(0)$, $b_1(2) = b(1)$ (se trata de la composición con b del homeomorfismo $i : [1, 2] \rightarrow [0, 1]$ dado por $i(t) = t-1$).

Ahora, la unión $c = a \cup b_1 : [0, 2] \rightarrow X$, esto es, la aplicación que restringida a $[0, 1]$ es a y restringida a $[1, 2]$ es b_1 , es continua (porque restringida a los dos cerrados $[0, 1]$ y $[1, 2]$ lo es), y su imagen es la unión de las imágenes de a y b .

Finalmente, llamamos $a \cup b : [0, 1] \rightarrow X$ a la función $(a \cup b)(t) = c(2t)$, es decir, la composición de c con el homeomorfismo $j : [0, 1] \rightarrow [0, 2]$ definido mediante $j(t) = 2t$. Claramente $a \cup b$ es un arco cuya imagen es la unión de las imágenes de a y b . En particular $(a \cup b)(0) = a(0)$ y $(a \cup b)(1) = b(1)$.



Esto significa que si podemos unir un punto x con un punto y a través de un arco a , y podemos unir un punto y con un punto z a través de un arco b , entonces podemos unir x con z mediante el arco $a \cup b$.

Por otra parte, si a es un arco en un espacio X , la aplicación $-a : [0, 1] \rightarrow X$ dada por $(-a)(t) = a(1-t)$ es un arco con la misma imagen pero de modo que $(-a)(0) = a(1)$ y $(-a)(1) = a(0)$. También es obvio que un arco constante une un punto consigo mismo.

De todo esto se sigue que la relación “ x e y se pueden unir mediante un arco” es una relación de equivalencia en todo espacio X . Las clases de equivalencia reciben el nombre de *componentes arco-conexas* del espacio X y son una partición de X en subespacios arco-conexos.

Las componentes arco-conexas no tienen por qué ser abiertas ni cerradas, pero si X es localmente arco-conexo, es claro que las componentes arco-conexas son abiertas, luego también son cerradas, puesto que el complementario de una es la unión de las demás, y esto implica que las componentes arcoconexas de X coinciden con sus componentes conexas. A su vez, esto implica:

Teorema 3.24 *Sea X un espacio localmente arco-conexo. Entonces un abierto de X es conexo si y sólo si es arco-conexo.*

DEMOSTRACIÓN: Obviamente los abiertos arco-conexos son conexos. Si A es un abierto conexo no vacío, entonces A es también localmente arco-conexo, luego tiene una única componente arco-conexa abierta y cerrada, luego, al ser A conexo, tiene que ser todo A , luego A es arco-conexo. ■

Una *poligonal* es una unión de un número finito de segmentos. Una pequeña modificación del teorema anterior permite probar que en un espacio localmente conexo, un abierto es conexo si y sólo si es conexo por poligonales, es decir, si todo par de puntos se puede unir por una poligonal.²

Aplicaciones de la conexión Una de las consecuencias más relevantes de la conexión de un espacio topológico es la generalización siguiente —ahora obvia— de [ITAn 3.24]

Teorema 3.25 (Teorema de los valores intermedios) *Si X es un espacio conexo, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ es una aplicación continua, x, y son puntos de X y $f(x) < \alpha < f(y)$, entonces existe un punto $z \in X$ tal que $f(z) = \alpha$.*

DEMOSTRACIÓN: Por 3.20 tenemos que $f[X]$ es un conexo, luego por 3.19 es un intervalo. Como $f(x)$ y $f(y)$ están en $f[X]$, también $\alpha \in f[X]$. ■

A pesar de su simplicidad, las consecuencias de este teorema son importantes. Por ejemplo, no hay polinomios irreducibles de grado impar sobre \mathbb{R} , salvo los de grado 1:

Teorema 3.26 *Todo polinomio $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ de grado impar tiene al menos una raíz en \mathbb{R} .*

DEMOSTRACIÓN: Como $p(x)$ tiene una raíz si y sólo si la tiene $-p(x)$, podemos suponer que su coeficiente director es positivo.

Entonces $\lim_{x \rightarrow +\infty} p(x) = +\infty$, mientras que $\lim_{x \rightarrow -\infty} p(x) = -\infty$. En particular existe un $u \in \mathbb{R}$ tal que $p(u) < 0$ y existe un $v \in \mathbb{R}$ tal que $p(v) > 0$. Por el teorema de los valores intermedios también existe un $a \in \mathbb{R}$ tal que $p(a) = 0$. ■

Por supuesto el teorema es falso para polinomios de grado par. Basta pensar en $x^2 + 1$.

Si $a > 0$, el teorema de los valores intermedios aplicado al polinomio $x^n - a$ nos permite concluir la existencia de un $b > 0$ tal que $b^n = a$. Es claramente único, pues si $b^n = c^n$, entonces $(b/c)^n = 1$, de donde $b/c = \pm 1$, luego si ambos son positivos $b = c$.

²En [IC 7.26] definimos un abierto conexo en \mathbb{C} como lo que ahora hemos llamado abierto conexo por poligonales y, según acabamos de observar (para conjuntos abiertos) ambas definiciones son equivalentes.

Definición 3.27 Para cada natural $n > 0$ y cada número real $a > 0$ definimos la raíz n -ésima de a como el único número $b > 0$ tal que $b^n = a$. Lo representaremos $b = \sqrt[n]{a}$

Unas comprobaciones rutinarias muestran que si m, n son números enteros $n > 0$ y $a > 0$ entonces el número $a^{m/n} = (\sqrt[n]{a})^m$ depende sólo de la fracción m/n , con lo que tenemos definida la exponencial a^r para todo número real positivo a y todo número racional r y extiende a la exponencial entera. También se comprueba que $a^{r+s} = a^r a^s$, $(a^r)^s = a^{rs}$.

Nota Terminamos esta sección con un comentario a la demostración del principio de prolongación analítica [IC 7.27]. La prueba que dimos allí se simplifica drásticamente usando los resultados sobre conexión que acabamos de ver. En efecto, tenemos una función holomorfa $f : A \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, donde A es un abierto conexo en \mathbb{C} , que se anula sobre una sucesión convergente a un punto $z_0 \in A$, y hay que probar que f es idénticamente nula.

Por [IC 7.21] f admite un desarrollo en serie de potencias en un disco centrado en z_0 y por [IC 7.25] f es idénticamente nula en dicho disco. Ahora llamamos $\Omega \subset A$ a la unión de todos los subespacios abiertos de A donde f es idénticamente nula. Acabamos de probar que $\Omega \neq \emptyset$ y claramente es abierto (y f se anula en Ω). Basta probar que Ω es cerrado, pues entonces tiene que ser $\Omega = A$, ya que un espacio conexo no tiene más abiertos cerrados.

Ahora bien, si $z_0 \in \overline{\Omega} \setminus \Omega$, existe una sucesión contenida en Ω que converge a z_0 , luego por el mismo argumento precedente f se anula en un disco D centrado en z_0 , luego $z_0 \in D \subset \Omega$ y tenemos una contradicción. Así pues, $\Omega = \overline{\Omega}$ y el teorema queda probado. ■

3.4 Espacios completos

Retomamos ahora el concepto de espacio métrico completo, que introdujimos en 1.33. Veamos algunas propiedades elementales de la completitud:

Teorema 3.28 *Se cumple:*

- a) *Todo espacio métrico compacto es completo.*
- b) *Todo cerrado en un espacio métrico completo es completo.*
- c) *Todo subespacio completo de un espacio métrico es cerrado.*

DEMOSTRACIÓN: a) Por 3.6, toda sucesión tiene una subsucesión convergente, luego si es de Cauchy es convergente por 1.31.

b) Si M es un espacio métrico completo y C es un cerrado en M , entonces toda sucesión de Cauchy en C converge en M , y como C es cerrado su límite estará en C , luego la sucesión converge en C .

c) Si C es un subespacio completo de un espacio métrico M , dado un punto x en la clausura de C , existe una sucesión en C que converge a x , luego la sucesión es de Cauchy, luego converge en C , luego x está en C , luego C es cerrado. ■

Por supuesto, no todo espacio completo es compacto. A veces es útil conocer lo que separa a un espacio completo de la compacidad:

Definición 3.29 Un espacio métrico M es *precompacto* si para cada $\epsilon > 0$ existen puntos x_1, \dots, x_n en M tales que $M = B_\epsilon(x_1) \cup \dots \cup B_\epsilon(x_n)$.

Obviamente todo espacio compacto es precompacto (basta extraer un subcubrimiento finito del cubrimiento formado por todas las bolas de radio ϵ).

El teorema 3.6 contiene la demostración de que un espacio precompacto y completo es compacto. En efecto, partiendo de la hipótesis sobre subsucesiones convergentes, en primer lugar se prueba que el espacio es precompacto. Con ayuda de la precompacidad se construye una sucesión de bolas $B_{1/(n+1)}(x_n)$ en las que podemos exigir que cada una de ellas corte a la anterior. Esto garantiza que la sucesión de los centros es de Cauchy, con lo que podemos garantizar su convergencia por la completitud y probamos la compacidad del espacio. Así pues:

Teorema 3.30 *Un espacio métrico es compacto si y sólo si es precompacto y completo.*

Estudiamos ahora los espacios normados completos:

Definición 3.31 Un *espacio de Banach* es un espacio normado completo.

Ejercicio: Probar que si $E \neq 0$ es un espacio de Banach sobre un cuerpo métrico \mathbb{K} , entonces \mathbb{K} es completo.

Vamos a probar que \mathbb{R}^n es un espacio de Banach con cualquiera de las normas consideradas en el teorema 2.2. De hecho, vamos a probar un resultado más general. Para ello conviene introducir la definición siguiente:

Sea E un espacio vectorial sobre un cuerpo métrico \mathbb{K} . Se dice que dos normas $\| \cdot \|_1$ y $\| \cdot \|_2$ en V son *equivalentes* si existen números reales $M_1, M_2 > 0$ tales que

$$\|x\|_1 \leq M_2 \|x\|_2 \quad \text{y} \quad \|x\|_2 \leq M_1 \|x\|_1$$

para todo $x \in E$.

Dos normas equivalentes inducen la misma topología en E , pues claramente $B_{\epsilon/M_1}^1(a) \subset B_\epsilon^2(a)$ y $B_{\epsilon/M_2}^2(a) \subset B_\epsilon^1(a)$, donde el superíndice en las bolas indica la norma respecto a la que se calculan. Estas inclusiones hacen que todo abierto para una norma lo sea también para la otra.

También es claro que si dos normas son equivalentes entonces E es completo con una si y sólo si lo es con la otra, así como que ambas determinan los mismos subconjuntos acotados.

Teorema 3.32 *Sea E un espacio vectorial de dimensión finita sobre un cuerpo métrico completo \mathbb{K} . Entonces todas las normas en E son equivalentes, luego todas determinan los mismos conjuntos acotados y además E es completo con cualquiera de ellas.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos primero que $E = \mathbb{K}^n$ y consideremos la norma $\| \cdot \|_\infty$ definida en 2.2. Si $\{x_m\}_{m=0}^\infty$ es una sucesión de Cauchy en E , es inmediato comprobar que las sucesiones $\{x_{mi}\}_{m=0}^\infty$ son de Cauchy en \mathbb{K} , para $i = 1, \dots, n$, luego convergen a ciertos valores $x_i \in \mathbb{K}$, que determinan un $x \in \mathbb{K}^n$, y es claro que la sucesión original converge a x (por ejemplo, porque sabemos que la topología de \mathbb{K}^n es la topología producto).

Basta probar que cualquier otra norma $\| \cdot \|$ en \mathbb{K}^n es equivalente a $\| \cdot \|_\infty$.

Sea e_1, \dots, e_n la base canónica de \mathbb{K}^n . Entonces para todo $x \in \mathbb{K}^n$ se cumple

$$\|x\| = \|x_1 e_1 + \dots + x_n e_n\| \leq |x_1| \|e_1\| + \dots + |x_n| \|e_n\| \leq M \|x\|_\infty,$$

donde $M = \|e_1\| + \dots + \|e_n\|$.

Ahora hemos de probar la relación opuesta. Basta ver que existen números reales $N_i > 0$ de modo que si $x \in \mathbb{K}^n$, entonces $|x_i| \leq N_i \|x\|$, pues en tal caso $N = \max N_i$ cumple $\|x\|_\infty \leq N \|x\|$. Lo probaremos por inducción sobre n .

Si $n = 1$ basta tomar $N_1 = 1/\|1\|$. Supuesto cierto para $n - 1$, identificamos \mathbb{K}^{n-1} con los elementos de \mathbb{K}^n cuya última coordenada es nula. Las restricciones a \mathbb{K}^{n-1} de las dos normas consideradas son normas en \mathbb{K}^{n-1} . Por hipótesis de inducción son equivalentes y \mathbb{K}^{n-1} es completo para la restricción de la norma $\| \cdot \|$, luego es cerrado en \mathbb{K}^n para la topología inducida por esta norma.

Supongamos, por reducción al absurdo, que para todo natural m existe un $w_m \in \mathbb{K}^n$ de manera que $|w_{mn}| > m \|w_m\|$. Podemos suponer que $w_{mn} = 1$ (basta dividir w_m entre w_{mn} si es preciso), y entonces la desigualdad se reduce a $\|w_m\| < 1/m$. Por otra parte esta condición adicional implica también que $w_m - e_n \in \mathbb{K}^{n-1}$.

De este modo tenemos que $\{w_m\}_{m=0}^\infty$ tiende a 0 y que $w_m - e_n$ tiende a $-e_n$ pero, como \mathbb{K}^{n-1} es cerrado, esto implica que $e_n \in \mathbb{K}^{n-1}$, lo cual es absurdo. Por lo tanto existe un m tal que $|w_n| \leq m \|w\|$ para todo $w \in \mathbb{K}^n$. El mismo razonamiento se aplica a cualquier otro índice.

Esto termina la prueba para $E = \mathbb{K}^n$. Si E es ahora un espacio vectorial cualquiera de dimensión n sobre \mathbb{K} , cada norma en E induce una en \mathbb{K}^n a través de un isomorfismo de espacios vectoriales. Del hecho de que las normas inducidas sean equivalentes se sigue obviamente que las normas de partida también lo sean. Igualmente se concluye que E es completo con cualquiera de ellas. ■

En particular $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ es un cuerpo métrico completo. Luego todos los resultados que probamos para cuerpos métricos completos \mathbb{K} se aplican tanto a $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ como a $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Al contrario que la compacidad o la conexión, la completitud no es una propiedad topológica, sino métrica, pues, por ejemplo, sabemos que \mathbb{R} es un espacio métrico completo, mientras que $] -1, 1[$ no lo es.

Si analizamos lo que falla, vemos que en $] -1, 1[$ hay sucesiones de Cauchy no convergentes, por ejemplo las que convergen a 1 en \mathbb{R} , pero cuando las transformamos por un homeomorfismo entre $] -1, 1[$ y \mathbb{R} se convierten en sucesiones

que tienden a $+\infty$, que ya no son de Cauchy, luego no violan la completitud de \mathbb{R} . El problema es que mientras una aplicación continua transforma sucesiones convergentes en sucesiones convergentes, no transforma necesariamente sucesiones de Cauchy en sucesiones de Cauchy. Y a su vez esto se debe a que si se estira infinitamente una sucesión de Cauchy, ésta deja de serlo. Esto nos lleva a conjeturar que la completitud se conservará por aplicaciones continuas que no produzcan estiramientos infinitos. Vamos a definir este tipo de aplicaciones.

Definición 3.33 Una aplicación $f : M \rightarrow N$ entre espacios métricos es *uniformemente continua* si para todo $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ de modo que si $x, y \in M$ cumplen $d(x, y) < \delta$, entonces $d(f(x), f(y)) < \epsilon$.

Desde un punto de vista lógico, la diferencia entre “aplicación continua” y “uniformemente continua” es sutil. Conviene confrontarlas. Recordemos que f es continua si para todo punto x y todo $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $y \in M$ cumple $d(x, y) < \delta$, entonces $d(f(x), f(y)) < \epsilon$.

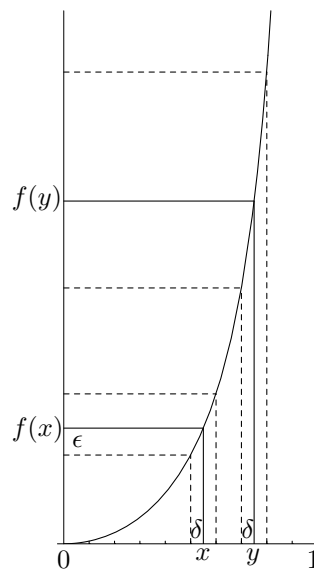
La diferencia es, pues, que cuando f es uniformemente continua el mismo δ verifica la definición de continuidad para un ϵ dado simultáneamente en todos los puntos x , mientras que la definición de continuidad permite tomar un δ distinto en función del punto x . Por ejemplo, el homeomorfismo f entre $] -1, 1[$ y \mathbb{R} estira más los puntos cuanto más próximos están de ± 1 . Si tomamos un punto x y queremos garantizar que $f(z)$ diste de $f(x)$ menos que ϵ , tendremos que exigir que z diste de x menos que un cierto δ , pero si consideramos los puntos que distan menos que δ de un punto y más cercano a 1, vemos que muchos de ellos se transforman en puntos que distan de $f(y)$ mucho más que ϵ , y que si queremos que no sobrepasen esta cota hemos de tomar un δ mucho menor.

La imagen de una sucesión de Cauchy por una aplicación uniformemente continua es una sucesión de Cauchy. En efecto, si $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ es de Cauchy y f es uniformemente continua, dado $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ de manera que si $d(x, y) < \delta$, entonces $d(f(x), f(y)) < \epsilon$. Existe un natural n_0 tal que si $n, m \geq n_0$ entonces $d(a_m, a_n) < \delta$, luego $d(f(a_m), f(a_n)) < \epsilon$. Esto prueba que la sucesión $\{f(a_n)\}_{n=0}^{\infty}$ es de Cauchy.

Como consecuencia, si dos espacios métricos X e Y son *uniformemente homeomorfos*, esto es, si existe una biyección uniformemente continua con inversa uniformemente continua entre ellos, uno es completo si y sólo si lo es el otro.

No obstante, una imagen uniformemente continua de un espacio completo no tiene por qué ser completa.

El teorema siguiente generaliza al teorema de Heine-Cantor [ITAn A.14]:



Teorema 3.34 Sea $f : K \rightarrow M$ una aplicación continua entre espacios métricos y supongamos que K es compacto. Entonces f es uniformemente continua.

DEMOSTRACIÓN: Sea $\epsilon > 0$. Para cada punto $x \in K$, como f es continua en x , existe un $\delta(x) > 0$ tal que si $d(y, x) < \delta(x)$, entonces $d(f(y), f(x)) < \epsilon/2$. Cubramos el espacio K por todas las bolas abiertas de centro cada punto x y de radio $\delta(x)/2$ y tomemos un subcubrimiento finito. Digamos que las bolas que forman este subcubrimiento tienen centros en los puntos x_1, \dots, x_n . Sea $\delta > 0$ el mínimo del conjunto $\{\delta(x_1)/2, \dots, \delta(x_n)/2\}$.

Si x, y son dos puntos cualesquiera de K tales que $d(x, y) < \delta$, entonces x estará en una de las bolas $B_{\delta(x_i)/2}(x_i)$. Entonces

$$d(y, x_i) \leq d(y, x) + d(x, x_i) < \frac{\delta(x_i)}{2} + \frac{\delta(x_i)}{2} = \delta(x_i).$$

Por lo tanto $x, y \in B_{\delta(x_i)}(x_i)$, luego $d(f(x), f(x_i)) < \epsilon/2$, $d(f(y), f(x_i)) < \epsilon/2$. Consecuentemente, $d(f(x), f(y)) < \epsilon$. ■

Otro caso en el que la continuidad equivale a la continuidad uniforme es el de las aplicaciones lineales entre espacios normados:

Teorema 3.35 Sea $f : E \rightarrow F$ una aplicación lineal entre espacios normados. Las siguientes condiciones son equivalentes:

- a) f es continua en E .
- b) f es continua en 0 .
- c) f está acotada en $\overline{B}_1(0)$.
- d) Existe un $M \geq 0$ tal que para todo $x \in E$ se cumple $\|f(x)\| \leq M\|x\|$.
- e) f es uniformemente continua en E .

DEMOSTRACIÓN: a) \Rightarrow b) es obvio.

b) \Rightarrow c), pues existe un $\delta > 0$ tal que $\|x - 0\| \leq \delta$, entonces $\|f(x) - f(0)\| \leq 1$.

Por lo tanto si $\|x\| \leq 1$, se cumple $\|\delta x\| \leq \delta$, $\|f(\delta x)\| \leq 1$, $\|f(x)\| \leq 1/\delta$, o sea, que $1/\delta$ es una cota de f en $\overline{B}_1(0)$.

c) \Rightarrow d), pues si M es una cota de f en $\overline{B}_1(0)$, dado cualquier $x \neq 0$ se cumple que $x/\|x\| \in \overline{B}_1(0)$, luego $\|f(x/\|x\|)\| \leq M$, de donde $\|f(x)\| \leq M\|x\|$, y esto también es cierto si $x = 0$.

d) \Rightarrow e), pues para todos los x, y en E :

$$\|f(x) - f(y)\| = \|f(x - y)\| \leq M\|x - y\|,$$

luego dado $\epsilon > 0$, si $\|x - y\| < \epsilon/M$, se cumple $\|f(x) - f(y)\| < \epsilon$.

e) \Rightarrow a) es evidente. ■

En particular, si \mathbb{K} es un cuerpo métrico completo, todo isomorfismo entre dos \mathbb{K} -espacios vectoriales de dimensión finita es un homeomorfismo uniforme para cualquier par de normas.

3.5 Espacios de Hilbert

En esta sección \mathbb{K} representará al cuerpo \mathbb{R} de los números reales o bien al cuerpo \mathbb{C} de los números complejos. Si $\alpha \in \mathbb{K}$, la notación $\bar{\alpha}$ representará al conjugado de α si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ o simplemente $\bar{\alpha} = \alpha$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Definición 3.36 Si H es un \mathbb{K} -espacio vectorial, un *producto escalar* en H es una aplicación $\cdot : H \times H \rightarrow \mathbb{K}$ que cumple las propiedades siguientes (donde $x, y, z \in H$ y $\alpha \in \mathbb{K}$):

- a) $x \cdot y = \overline{y \cdot x}$,
- b) $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$,
- c) $(\alpha x) \cdot y = \alpha(x \cdot y)$,
- d) $x \cdot x \geq 0$ y $x \cdot x = 0$ si y sólo si $x = 0$.

Notemos que a) y b) implican también la propiedad distributiva por la derecha: $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$. De las propiedades a) y c) se sigue que

$$x \cdot (\alpha y) = \overline{(\alpha y) \cdot x} = \overline{\alpha y \cdot x} = \bar{\alpha} x \cdot y.$$

Un *espacio prehilbertiano* es un par (H, \cdot) , donde H es un \mathbb{K} -espacio vectorial y \cdot es un producto escalar en H . En la práctica escribiremos simplemente H en lugar de (H, \cdot) .

Si H es un espacio prehilbertiano, definimos su *norma* asociada como la aplicación $\| \cdot \| : H \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\|x\| = \sqrt{x \cdot x}$.

Vamos a probar que ciertamente se trata de una norma en H , pero antes conviene probar este hecho:

Teorema 3.37 (Desigualdad de Schwarz) *Si x, y son elementos de un espacio prehilbertiano, entonces $|x \cdot y| \leq \|x\| \|y\|$.*

DEMOSTRACIÓN: Sean $A = \|x\|^2$, $B = |x \cdot y|$ y $C = \|y\|^2$. Existe un número complejo α tal que $|\alpha| = 1$ y $\alpha(y \cdot x) = B$. Para todo número real r se cumple

$$0 \leq (x - r\alpha y) \cdot (x - r\alpha y) = x \cdot x - r\alpha(y \cdot x) - r\bar{\alpha}(x \cdot y) + r^2 y \cdot y.$$

Notemos que $\bar{\alpha}(x \cdot y) = \bar{B} = B$, luego $A - 2Br + Cr^2 \geq 0$. Si $C = 0$ ha de ser $B = 0$, o de lo contrario la desigualdad sería falsa para r grande. Si $C > 0$ tomamos $r = B/C$ y obtenemos $B^2 \leq AC$, y basta tomar la raíz cuadrada de ambos miembros. ■

Ahora ya es inmediato que la norma determinada por un producto escalar es realmente una norma: De la propiedad d) se sigue que $\|x\| = 0$ si y sólo si $x = 0$, y por otra parte

$$\|\alpha x\| = \sqrt{(\alpha x) \cdot (\alpha x)} = \sqrt{\alpha \bar{\alpha} x \cdot x} = \sqrt{|\alpha|^2} \sqrt{x \cdot x} = |\alpha| \|x\|.$$

Por último, usando la desigualdad de Schwarz vemos que

$$\begin{aligned}\|x + y\|^2 &= (x + y) \cdot (x + y) = x \cdot x + x \cdot y + y \cdot x + y \cdot y \\ &\leq \|x\|^2 + 2\|x\| \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2,\end{aligned}$$

donde hemos usado que $x \cdot y + y \cdot x = x \cdot y + \overline{x \cdot y}$ es un número real, luego

$$x \cdot y + y \cdot x \leq |x \cdot y + y \cdot x| \leq |x \cdot y| + |y \cdot x| \leq 2\|x\|\|y\|.$$

Calculando la raíz cuadrada llegamos a que $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Así pues, todo espacio prehilbertiano es un espacio normado con la norma derivada de su producto escalar. Un *espacio de Hilbert* es un espacio prehilbertiano H que sea completo como espacio normado, es decir, que sea un espacio de Banach.

Ejemplo Un producto escalar en el espacio \mathbb{K}^n viene dado por

$$x \cdot y = x_1 \bar{y}_1 + \cdots + x_n \bar{y}_n.$$

De este modo, $\|x\| = \sqrt{|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2}$. El teorema 3.32 implica que \mathbb{K}^n es un espacio de Hilbert con este producto escalar. ■

Teorema 3.38 Si H es un espacio prehilbertiano, entonces el producto escalar en H es una función continua.

DEMOSTRACIÓN: Para todos los $x, x', y, y' \in H$ se cumple

$$\begin{aligned}|x \cdot y - x' \cdot y'| &\leq |(x - x') \cdot y| + |x' \cdot (y - y')| \leq \|x - x'\| \|y\| + \|x'\| \|y - y'\| \\ &\leq \|x - x'\| \|y\| + \|x' - x\| \|y - y'\| + \|x\| \|y - y'\|.\end{aligned}$$

Así, dado un par $(x, y) \in H \times H$ y un $\epsilon > 0$, todo par $(x', y') \in H \times H$ que cumpla $\|x' - x\|, \|y' - y\| < \epsilon/3M$, donde $M > \|x\|, \|y\|$, cumple también que

$$|x \cdot y - x' \cdot y'| < \frac{\epsilon}{3M} M + \frac{\epsilon^2}{9M^2} + \frac{\epsilon}{3M} M < \epsilon. \quad \blacksquare$$

En los espacios prehilbertianos podemos hablar de vectores ortogonales:

Definición 3.39 Si H es un espacio prehilbertiano, diremos que $x, y \in H$ son *ortogonales*, y lo representaremos por $x \perp y$, si $x \cdot y = 0$.

Sabemos que la ortogonalidad en \mathbb{R}^n coincide con el concepto geométrico de perpendicularidad. Es fácil generalizar el teorema de Pitágoras:

$$\text{Si } x \perp y, \text{ entonces } \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Así mismo, las propiedades del producto escalar dan inmediatamente la fórmula conocida como *identidad del paralelogramo*:

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

Para cada $A \subset H$, definimos

$$A^\perp = \{x \in H \mid x \perp a \text{ para todo } a \in A\}.$$

Es claro que A^\perp es un subespacio vectorial de H . Más aún, puesto que $\{a\}^\perp$ es la antiimagen de 0 por la aplicación continua $x \mapsto a \cdot x$, se cumple que $\{a\}^\perp$ es cerrado, y como

$$A^\perp = \bigcap_{a \in A} \{a\}^\perp,$$

vemos que A^\perp es un subespacio cerrado de H .

Si V es un subespacio vectorial de H es claro que $V \cap V^\perp = 0$. Vamos a probar que si V es cerrado entonces $H = V \oplus V^\perp$. Para ello necesitamos un resultado previo:

Teorema 3.40 *Sea M un subconjunto no vacío, cerrado y convexo de un espacio de Hilbert H . Entonces M contiene un único elemento de norma mínima.*

DEMOSTRACIÓN: Sea δ el ínfimo de las normas de los elementos de M . Aplicando la identidad del paralelogramo a $\frac{1}{2}x, \frac{1}{2}y$ tenemos

$$\frac{1}{4}\|x - y\|^2 = \frac{1}{2}\|x\|^2 + \frac{1}{2}\|y\|^2 - \left\| \frac{x + y}{2} \right\|^2.$$

Si $x, y \in M$, por convexidad $(x + y)/2 \in M$, luego

$$\|x - y\|^2 \leq 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 - 4\delta^2. \quad (3.1)$$

Si $\|x\| = \|y\| = \delta$ esto implica $x = y$, lo que nos da la unicidad. Es fácil construir una sucesión $\{x_n\}_{n=0}^\infty \subset M$ tal que $\lim_n \|x_n\| = \delta$. Aplicando 3.1 a x_m y x_n concluimos fácilmente que la sucesión es de Cauchy, luego converge a un punto x que, por continuidad de la norma, cumplirá $\|x\| = \delta$. Además, como M es cerrado, ha de ser $x \in M$ y claramente su norma es la mínima en M . ■

Ahora ya podemos probar:

Teorema 3.41 *Sea V un subespacio cerrado de un espacio de Hilbert H .*

- a) *Todo $x \in H$ se descompone de forma única como $x = Px + Qx$, donde $Px \in V, Qx \in V^\perp$.*
- b) *Px y Qx son los puntos de V y V^\perp más próximos a x .*
- c) *Las aplicaciones $P : H \rightarrow V$ y $Q : H \rightarrow V^\perp$ son lineales y continuas.*
- d) $\|x\|^2 = \|Px\|^2 + \|Qx\|^2$.

DEMOSTRACIÓN: El conjunto $x + V$ es cerrado y convexo, luego podemos definir Qx como el elemento de norma mínima en $x + V$. Definimos $Px = x - Qx$. Obviamente $Px \in V$. Veamos que $Qx \in V^\perp$. Para ello probaremos que $(Qx) \cdot y = 0$ para todo $y \in V$. No perdemos generalidad si suponemos $\|y\| = 1$. Por definición de Qx tenemos que

$$(Qx) \cdot (Qx) = \|Qx\|^2 \leq \|Qx - \alpha y\|^2 = (Qx - \alpha y) \cdot (Qx - \alpha y),$$

para todo $\alpha \in \mathbb{K}$. Simplificando queda

$$0 \leq -\alpha(y \cdot Qx) - \bar{\alpha}(Qx \cdot y) + \alpha\bar{\alpha},$$

y si hacemos $\alpha = (Qx) \cdot y$ queda $0 \leq -|(Qx) \cdot y|^2$, luego $(Qx) \cdot y = 0$.

Esto prueba la existencia de la descomposición de a). La unicidad se debe a que $V \cap V^\perp = 0$. En definitiva, $H = V \oplus V^\perp$.

Ahora observamos que si $y \in V$ entonces

$$\|x - y\|^2 = \|Qx + (Px - y)\|^2 = \|Qx\|^2 + \|Px - y\|^2,$$

luego la mínima distancia entre x y un punto $y \in V$ se alcanza cuando $y = Px$. Esto prueba b). El apartado d) es el teorema de Pitágoras. La linealidad de P y Q es obvia. La continuidad se debe a que por d) tenemos $\|Px\| \leq \|x\|$, $\|Qx\| \leq \|x\|$, y basta aplicar el teorema 3.35. ■

El teorema siguiente caracteriza las aplicaciones lineales continuas de un espacio de Hilbert en \mathbb{K} .

Teorema 3.42 *Sea H un espacio de Hilbert y $f : H \rightarrow \mathbb{K}$ una aplicación lineal continua. Entonces existe un único $y \in H$ tal que $f(x) = x \cdot y$ para todo $x \in H$.*

DEMOSTRACIÓN: Si f es la aplicación nula tomamos $y = 0$. En otro caso sea V el núcleo de f , que será un subespacio cerrado propio de H . Por el teorema anterior $V^\perp \neq 0$, luego podemos tomar $z \in V^\perp$ con $\|z\| = 1$. Sea $u = f(x)z - f(z)x$. Como $f(u) = f(x)f(z) - f(z)f(x) = 0$, tenemos que $u \in V$, luego $u \cdot z = 0$. La definición de u implica

$$f(x) = f(x)(z \cdot z) = f(z)(x \cdot z).$$

Tomando $y = \overline{f(z)}z$ resulta $f(x) = x \cdot y$.

La unicidad es obvia, pues si dos puntos y, y' cumplen el teorema, entonces $y - y'$ es ortogonal a todo $x \in H$. ■

Hasta ahora, los únicos espacios de Hilbert que conocemos son los espacios de dimensión finita \mathbb{K}^n . Es fácil probar que todo espacio prehilbertiano H de dimensión finita es isométrico a \mathbb{K}^n , es decir, existe un isomorfismo $H \rightarrow \mathbb{K}^n$ que conserva el producto escalar (porque el teorema de ortonormalización de Gram-Schmidt³ asegura la existencia de una base ortonormal, y un isomorfismo que transforme una base ortonormal de H en una de \mathbb{K}^n es una isometría). Veamos ahora un ejemplo de espacio de Hilbert de dimensión infinita:

³En [G 3.21] está probado para espacios sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, pero el mismo argumento vale si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Definición 3.43 Llamaremos ℓ^2 al conjunto de todas las sucesiones $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ en \mathbb{K} tales que $\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2$ es convergente.

Teorema 3.44 ℓ^2 es un espacio de Hilbert con el producto escalar dado por

$$x \cdot y = \sum_{n=0}^{\infty} x_n \bar{y}_n.$$

DEMOSTRACIÓN: En primer lugar demostramos que la serie que define el producto escalar es convergente. Para ello basta probar que es absolutamente convergente. Ahora bien, sean $A = \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2$ y $B = \sum_{n=0}^{\infty} |y_n|^2$ y supongamos que $A \neq 0 \neq B$. Entonces

$$\left(\frac{|x_n|}{A} - \frac{|y_n|}{B} \right)^2 = \frac{|x_n|^2}{A^2} + \frac{|y_n|^2}{B^2} - 2 \frac{|x_n||y_n|}{AB} \geq 0,$$

luego

$$\frac{|x_n||y_n|}{AB} \leq \frac{1}{2A}|x_n|^2 + \frac{1}{2B}|y_n|^2,$$

luego

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x_n||y_n|}{AB} \leq 1,$$

luego $\sum_{n=0}^{\infty} |x_n \bar{y}_n| \leq AB$. Observemos que si $A = 0$ o $B = 0$ una de las sucesiones es idénticamente nula y la conclusión es trivial.

Ahora ya es fácil probar que ℓ^2 es un espacio vectorial. Lo único que no es trivial es que la suma de dos elementos de ℓ^2 está en ℓ^2 , pero

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} |x_n + y_n|^2 &\leq \sum_{n=0}^{\infty} (|x_n| + |y_n|)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (|x_n|^2 + |y_n|^2 + 2|x_n||y_n|) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2 + \sum_{n=0}^{\infty} |y_n|^2 + 2 \sum_{n=0}^{\infty} |x_n \bar{y}_n| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2 + \sum_{n=0}^{\infty} |y_n|^2 + \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2 \sum_{n=0}^{\infty} |y_n|^2, \end{aligned}$$

luego la serie asociada a la suma es convergente.

Una vez probada la convergencia de la serie que define al producto se concluye sin dificultad que dicho producto es ciertamente un producto escalar en ℓ^2 , que es, por consiguiente, un espacio prehilbertiano. La norma asociada es

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2}.$$

Para probar que ℓ^2 es completo tomamos una sucesión de Cauchy $\{x^n\}_{n=0}^{\infty}$ en ℓ^2 . Así, dado $\epsilon > 0$, existe un n_0 tal que si $m, n \geq n_0$ entonces

$$|x_i^n - x_i^m| \leq \|x^n - x^m\|_2 < \epsilon.$$

Esto implica que las sucesiones $\{x_i^n\}_{i=0}^\infty$ son de Cauchy en \mathbb{K} , luego son convergentes, luego podemos tomar $x_i = \lim_i x_i^n \in \mathbb{K}$. Ahora usamos que

$$\sum_{i=0}^N |x_i^n - x_i^m|^2 \leq \sum_{i=0}^\infty |x_i^n - x_i^m|^2 = \|x^n - x^m\|_2^2 < \epsilon,$$

siempre que $m, n \geq n_0$. Haciendo tender m a infinito queda

$$\sum_{i=0}^N |x_i^n - x_i|^2 \leq \epsilon^2. \quad (3.2)$$

Por la desigualdad triangular en \mathbb{K}^N tenemos que

$$\sqrt{\sum_{i=0}^N |x_i|^2} \leq \sqrt{\sum_{i=0}^N |x_i^n - x_i|^2} + \sqrt{\sum_{i=0}^N |x_i^n|^2} \leq \epsilon + \|x^n\|_2.$$

Así pues, las sumas parciales de $\sum_{i=0}^\infty |x_i|^2$ están acotadas, luego la serie converge y $x \in \ell^2$. Más aún, haciendo tender N a infinito en (3.2) queda $\|x^n - x\|_2^2 \leq \epsilon^2$, para todo $n \geq n_0$, luego $\lim_n x_n = x$. ■

Es inmediato que las sucesiones $e_n \in \ell^2$ dadas por

$$e_{ni} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = i, \\ 0 & \text{si } n \neq i \end{cases}$$

son linealmente independientes, por lo que ℓ^2 tiene dimensión infinita. Observemos que no constituyen una base de ℓ^2 en el sentido algebraico pues, por ejemplo, la sucesión $\{\frac{1}{n+1}\}_{n=0}^\infty \in \ell^2$ no puede expresarse como combinación lineal de las sucesiones e_n . Sin embargo $\{e_n\}_{n=0}^\infty$ es una base de ℓ^2 en un sentido analítico que vamos a introducir en breve. Primero estudiamos las sucesiones ortonormales en un espacio de Hilbert:

Definición 3.45 Sea H un espacio de Hilbert. Una sucesión $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ en H es *ortogonal* si $\langle x_m, x_n \rangle = 0$ para todo $m \neq n$. Si además $\langle x_n, x_n \rangle = 1$ para todo n diremos que la sucesión es *ortonormal*.

Es claro que la sucesión $\{e_n\}_{n=0}^\infty$ que acabamos de introducir es una sucesión ortonormal en ℓ^2 . Además tiene la propiedad de que, para todo $x \in \ell^2$, se cumple que $e_n \cdot x = x_n$.

Obviamente, toda sucesión ortogonal en un espacio de Hilbert que no contenga al 0 da lugar a la sucesión ortonormal $\{x_n/\|x_n\|\}_{n=0}^\infty$. Además es linealmente independiente, pues si tenemos una combinación lineal nula

$$\sum_{n=0}^k \lambda_n x_n = 0,$$

multiplicando por x_m obtenemos que $\lambda_m(x_m \cdot x_m) = 0$, luego $\lambda_m = 0$. En particular esto vale para todo sistema ortonormal.

Más en general, si $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión ortonormal en X y

$$x = \sum_{n=0}^k \lambda_n x_n,$$

al multiplicar por x_n vemos que necesariamente $\lambda_n = x \cdot x_n$, pero todavía podemos enunciar algo más general en esta línea:

Teorema 3.46 Sean x_0, \dots, x_k elementos ortonormales en un espacio de Hilbert H y sea $x \in H$ un elemento arbitrario. Entonces, los escalares $\lambda_n \in \mathbb{K}$ que hacen mínima la expresión

$$\left\| x - \sum_{n=0}^k \lambda_n x_n \right\|$$

son $\lambda_n = x \cdot x_n$. Equivalentemente,

$$\sum_{n=0}^k (x \cdot x_n) x_n$$

es la combinación lineal de x_0, \dots, x_k que mejor aproxima a x .

DEMOSTRACIÓN: Basta desarrollar

$$\begin{aligned} \left\| x - \sum_{n=0}^k \lambda_n x_n \right\|^2 &= \|x\|^2 + \sum_{n=0}^k |\lambda_n|^2 - \sum_{n=0}^k (\bar{\lambda}_n (x \cdot x_n) + \lambda_n \overline{x \cdot x_n}) \\ &= \|x\|^2 - \sum_{n=0}^k |x \cdot x_n|^2 + \sum_{n=0}^k |\lambda_n - x \cdot x_n|^2. \end{aligned}$$

La conclusión es inmediata. ■

Observemos finalmente que si un elemento $x \in H$ admite un desarrollo en serie infinita

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n x_n,$$

multiplicando por x_n y usando que el producto escalar es continuo concluimos igualmente que $\lambda_n = \langle x, x_n \rangle$. Ahora bien, nada nos asegura en principio que la serie

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} (x \cdot x_n) x_n,$$

vaya a converger ni, en caso de que lo haga, que su suma sea precisamente x . El teorema siguiente garantiza la convergencia de la serie:

Teorema 3.47 (Desigualdad de Bessel) Sea $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ una sucesión ortonormal en un espacio de Hilbert H . Entonces, para cada $x \in H$, se cumple que

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x \cdot x_n|^2 \leq \|x\|^2.$$

Por consiguiente, la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} (x \cdot x_n) x_n$$

converge en H .

DEMOSTRACIÓN: En la demostración de 3.46 hemos visto que

$$\left\| x - \sum_{n=0}^k (x \cdot x_n) x_n \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{n=0}^k |x \cdot x_n|^2,$$

luego

$$\sum_{n=0}^k |(x \cdot x_n)|^2 \leq \|x\|^2.$$

Esto implica que la serie converge y además

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x \cdot x_n|^2 \leq \|x\|^2.$$

Llamemos ahora

$$S_k = \sum_{n=0}^k (x \cdot x_n) x_n,$$

de modo que

$$\|S_k - S_m\|^2 = \left\| \sum_{n=m+1}^k (x \cdot x_n) x_n \right\|^2 = \sum_{n=m+1}^k |x \cdot x_n|^2.$$

Esto implica que $\|S_k - S_m\|$ puede hacerse arbitrariamente pequeño, luego $\{S_k\}_k$ es una sucesión de Cauchy, luego converge en H . ■

No obstante, una mínima reflexión nos convence de que, aunque la serie converja, no tiene por qué converger a x . Por ejemplo, si la serie converge a x y eliminamos del sistema ortonormal un elemento tal que $x \cdot x_n \neq 0$, la serie asociada al nuevo sistema “incompleto” seguirá convergiendo, pero ya no a x , es decir, la serie definida a partir de un elemento x por un sistema ortonormal puede no converger a x porque al sistema “le faltan” elementos. Esto nos lleva a la definición siguiente:

Definición 3.48 Una sucesión ortonormal $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ en un espacio de Hilbert H es *completa* (también se dice que es una *base ortonormal* de H) si todo $x \in H$ se puede escribir de la forma

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n x_n,$$

para ciertos $\lambda_n \in \mathbb{K}$, necesariamente únicos, pues han de ser $\lambda_n = x_n \cdot x$ (por la continuidad del producto escalar). Más en general, diremos que una sucesión ortogonal $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ es *completa*, (o que es una *base ortogonal* de H) si sus elementos son no nulos y la sucesión $\{x_n/\|x_n\|\}_{n=0}^{\infty}$ es una base ortonormal de H .

Así, todo elemento de H se expresa de forma única como combinación lineal infinita de los elementos de una base ortonormal. Para que una base ortonormal en este sentido sea una base en el sentido algebraico es necesario (y suficiente) que sea finita.

Teniendo en cuenta que $e_n \cdot x = x_n$, es inmediato que la sucesión $\{e_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una base ortonormal de ℓ^2 . La igualdad

$$\left\| x - \sum_{n=0}^k (x \cdot x_n) x_n \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{n=0}^k |x \cdot x_n|^2.$$

implica de forma inmediata la caracterización siguiente:

Teorema 3.49 (Identidad de Parseval) *Una sucesión ortonormal $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ en un espacio de Hilbert es completa si y sólo si*

$$\|x\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |x_n \cdot x|^2$$

para todo $x \in H$.

A menudo resulta más útil la caracterización siguiente:

Teorema 3.50 *Una sucesión ortogonal (sin términos nulos) en un espacio de Hilbert H es completa si y sólo si todo elemento de H se puede aproximar arbitrariamente por una combinación lineal finita de términos de la sucesión.*

DEMOSTRACIÓN: Con más precisión, si $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ es la sucesión del enunciado (que podemos suponer ortonormal sin pérdida de generalidad), la hipótesis es que, dado $x \in H$ y dado $\epsilon > 0$, existen $\lambda_0, \dots, \lambda_N \in \mathbb{K}$ tales que

$$\left\| x - \sum_{n=0}^N \lambda_n x_n \right\| < \epsilon.$$

El teorema 3.46 implica que, para todo $m > N$,

$$\left\| x - \sum_{n=0}^m (x \cdot x_n) x_n \right\| < \epsilon,$$

y esto implica que

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} (x \cdot x_n) x_n. \quad \blacksquare$$

La identidad de Parseval implica también el resultado siguiente:

Teorema 3.51 *Si H es un espacio de Hilbert con una base ortonormal (infinita) entonces H es isométrico a ℓ^2 , es decir, existe un isomorfismo $f : H \rightarrow \ell^2$ que conserva el producto escalar.*

DEMOSTRACIÓN: Si $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ es una base ortonormal en H , basta definir $f(x) = \{x \cdot x_n\}_{n=0}^\infty$. La identidad de Parseval implica que $f(x) \in \ell^2$. El mismo argumento empleado en la prueba de la desigualdad de Bessel prueba que f es suprayectiva. La continuidad del producto escalar nos da que

$$\begin{aligned} x \cdot y &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} (x \cdot x_n) x_n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} (y \cdot x_n) x_n \right) = \\ \lim_N \left(\sum_{n=0}^N (x \cdot x_n) x_n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^N (y \cdot x_n) x_n \right) &= \lim_N \sum_{n=0}^N (x \cdot x_n) (\overline{y \cdot x_n}) = \\ \sum_{n=0}^{\infty} (x \cdot x_n) (\overline{y \cdot x_n}) &= f(x) \cdot f(y). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Así pues, todo espacio de Hilbert con una base ortonormal (infinita) es isométrico a ℓ^2 .

Ejercicio: Probar que un espacio de Hilbert tiene un subconjunto denso numerable si y sólo si es isométrico a un espacio \mathbb{K}^n o a ℓ^2 . AYUDA: Si $\{d_n\}_n$ es un conjunto denso, construir una sucesión ortonormal $\{x_n\}_n$ tal que $\langle d_0, \dots, d_n \rangle \subset \langle x_0, \dots, x_n \rangle$. Si la sucesión es infinita aplicar 3.50.

3.6 Espacios de funciones

Uno de los éxitos de la topología consiste en que sus técnicas, desarrolladas en principio para estudiar espacios “geométricos” como \mathbb{R}^n , se aplican igualmente a objetos más abstractos, como son los conjuntos de funciones entre espacios topológicos, es decir, la topología nos permite pensar en las funciones como si fueran puntos de un espacio. Las definiciones siguientes no corresponden en realidad a conceptos nuevos desde un punto de vista topológico:

Definición 3.52 Sea Y un espacio topológico y X un conjunto cualquiera. Una *sucesión funcional* de X en Y es una sucesión $\{f_n\}_{n=0}^\infty$ en el espacio Y^X de todas las aplicaciones de X en Y , es decir, para cada n se cumple $f_n : X \rightarrow Y$.

Si Y es un espacio vectorial topológico (en especial si Y es un cuerpo métrico \mathbb{K}) cada sucesión funcional define la correspondiente *serie funcional* $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$, es decir, la sucesión cuyos términos son las funciones $S_n = \sum_{k=0}^n f_k : X \rightarrow Y$.

Diremos que una sucesión funcional $\{f_n\}_{n=0}^\infty$ *converge puntualmente* a una función $f \in Y^X$ si para todo $x \in X$ se cumple $\lim_n f_n(x) = f(x)$. En tal caso escribiremos $\lim_n f_n = f$. Para series de funciones podemos definir de manera obvia la convergencia puntual absoluta y la convergencia puntual condicional.

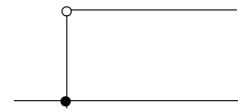
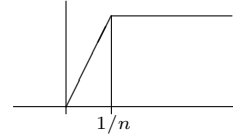
En realidad no estamos introduciendo un nuevo concepto de convergencia. Notemos que Y^X es el producto cartesiano del espacio Y por sí mismo tantas

veces como elementos tiene X , luego podemos considerarlo como espacio topológico con la topología producto. Las sucesiones convergen en esta topología si y sólo si convergen coordenada a coordenada, o sea, si y sólo si convergen puntualmente. Por ello a la topología producto en Y^X se la llama también *topología de la convergencia puntual*.

Sin embargo, la convergencia puntual no es la convergencia más natural que puede definirse sobre las sucesiones funcionales. De hecho, presenta grandes inconvenientes.

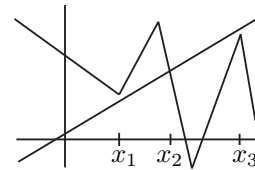
Ejemplo Para cada $n \geq 1$ sea $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función dada por

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ nx & \text{si } 0 \leq x \leq 1/n \\ 1 & \text{si } 1/n \leq x \end{cases}$$



Si $x \leq 0$ entonces $f_n(x)$ es constante igual a 0 y si $x > 1$ entonces $f_n(x)$ es finalmente constante igual a 1, luego esta sucesión funcional converge puntualmente a la función f que muestra la figura de la izquierda. Tenemos, pues, una sucesión de funciones continuas cuyo límite puntual no es continuo. ■

En general el hecho de que una función sea límite puntual de una sucesión de funciones aporta muy poca información. La razón es que los entornos de la topología puntual son muy grandes. En efecto, en el caso de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ no es difícil ver que un entorno básico de una función f es un conjunto de la forma



$$\{g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid |g(x_i) - f(x_i)| < \epsilon, i = 1, \dots, n\},$$

donde $\epsilon > 0$ y $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$, es decir, si una sucesión funcional tiende a f , lo máximo que podemos garantizar tomando un índice grande es que los términos de la sucesión se parecerán a f en un número finito de puntos, pero dos funciones pueden parecerse en un número finito de puntos y ser muy diferentes.

Es mucho más natural considerar que dos funciones están próximas cuando distan menos de un ϵ en todos los puntos a la vez. Por ello, si Y es un espacio métrico, definimos la *topología de la convergencia uniforme* en Y^X como la que tiene por base de entornos abiertos de una función f a los conjuntos de la forma

$$B(f, \epsilon) = \{g \in Y^X \mid d(f(x), g(x)) < \epsilon \text{ para todo } x \in X\}.$$

De este modo, cuando una función g está en un entorno de f suficientemente pequeño, ambas funciones se parecen realmente. Es fácil comprobar que los conjuntos $B(f, \epsilon)$ cumplen las condiciones del teorema 2.12 y por tanto definen, según hemos dicho, una topología en Y^X .

Es inmediato comprobar que una sucesión funcional $\{f_n\}_{n=0}^\infty$ converge uniformemente (es decir, en la topología de la convergencia uniforme) a una función f si y sólo si para todo $\epsilon > 0$ existe un n_0 tal que si $n \geq n_0$, entonces $d(f_n(x), f(x)) < \epsilon$ para todo $x \in X$.

La diferencia, pues, entre la convergencia uniforme y la convergencia puntual es que cuando la convergencia es uniforme hay un n_0 a partir del cual todos los $f_n(x)$ distan de su límite menos de un ϵ dado, mientras que si la convergencia es puntual cada punto x puede requerir un n_0 mayor para acercarse a su límite en menos de ϵ , de manera que ningún n_0 sirva simultáneamente para todos los puntos.

Es obvio que si una sucesión funcional converge uniformemente a una función, también converge puntualmente a dicha función. Tanto la topología de la convergencia uniforme como la topología de la convergencia puntual son de Hausdorff, luego los límites son únicos.

Ejemplo Tomemos $X = [0, 1]$ y consideremos la sucesión de polinomios de $\mathbb{R}[t]$ que cumplen la definición recurrente:

$$P_0(t) = 0, \quad P_{n+1}(t) = P_n(t) + \frac{1}{2}(t - P_n(t)^2).$$

Vamos a probar que converge uniformemente a la función \sqrt{t} en X .

Para ello observamos en primer lugar que $P_n(t) \leq \sqrt{t}$, para todo $t \in X$. Esto es trivialmente cierto para $n = 0$ y, si vale para n , entonces

$$\begin{aligned} \sqrt{t} - P_{n+1}(t) &= \sqrt{t} - P_n(t) - \frac{1}{2}(\sqrt{t} - P_n(t))(\sqrt{t} + P_n(t)) \\ &= (\sqrt{t} - P_n(t))\left(1 - \frac{1}{2}(\sqrt{t} + P_n(t))\right) \geq (\sqrt{t} - P_n(t))\left(1 - \frac{1}{2}2\sqrt{t}\right) \geq 0. \end{aligned}$$

Teniendo esto en cuenta, la definición recurrente implica de forma inmediata que la sucesión $\{P_n(t)\}_{n=0}^\infty$ es monótona creciente (para cada $t \in X$). Como además está acotada superiormente por \sqrt{t} , tenemos que es convergente. Llamemos $f(t) = \lim_n P_n(t)$.

Tomando límites en la definición recurrente de la sucesión obtenemos que $f(t) = f(t) + \frac{1}{2}(t - f(t)^2)$, de donde concluimos que $f(t) = \sqrt{t}$.

Con esto hemos probado que la sucesión de funciones $\{P_n\}_{n=0}^\infty$ converge puntualmente a \sqrt{t} . Ahora vamos a probar que la convergencia es uniforme. Para ello, dado $\epsilon > 0$, observamos que los conjuntos

$$F_n = \{t \in X \mid f(t) - P_n(t) \geq \epsilon\}$$

son cerrados y, como la sucesión de polinomios es creciente, los conjuntos forman una sucesión decreciente respecto de la inclusión. La convergencia puntual implica que $\bigcap_n F_n = \emptyset$. Como X es compacto, la familia de los cerrados F_n no puede tener la propiedad de la intersección finita, lo cual significa que existe un n_0 tal que, para todo $n \geq n_0$, $F_n = \emptyset$. A su vez, esto significa que todo $t \in X$ cumple $|f(t) - P_n(t)| < \epsilon$, es decir, $d(f(t), P_n(t)) < \epsilon$. ■

Si en el espacio Y tomamos la distancia $d'(x, y) = \min\{1, d(x, y)\}$, los conjuntos $B(f, \epsilon)$ son los mismos cuando $\epsilon < 1$, luego d' induce la misma topología de convergencia uniforme en Y^X .

La ventaja de esta métrica es que no toma valores mayores que 1, por lo que podemos definir

$$d(f, g) = \sup\{d'(f(x), g(x)) \mid x \in X\},$$

y es claro que esta d es una distancia en Y^X para la cual $B(f, \epsilon)$ es simplemente la bola abierta de centro f y radio ϵ . Esto convierte a Y^X en un espacio métrico cuya topología es precisamente la de la convergencia uniforme.

Teorema 3.53 *Sea X un espacio topológico e Y un espacio métrico. Entonces el conjunto $C(X, Y)$ de las aplicaciones continuas de X en Y es cerrado en Y^X cuando en éste consideramos la topología de la convergencia uniforme.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ una sucesión de aplicaciones continuas que converja uniformemente a una función f . Basta ver que f es continua. Sea $\epsilon > 0$. Sea n_0 tal que si $n \geq n_0$ y $x \in X$, entonces $d(f_n(x), f(x)) < \epsilon/3$.

Sea $x_0 \in X$ (vamos a probar que f es continua en x_0). Como f_{n_0} es continua existe un entorno U de x_0 tal que si $x \in U$, entonces $d(f_{n_0}(x), f_{n_0}(x_0)) < \epsilon/3$. Por lo tanto, si $x \in U$, se cumple que

$$d(f(x), f(x_0)) \leq d(f(x), f_{n_0}(x)) + d(f_{n_0}(x), f_{n_0}(x_0)) + d(f_{n_0}(x_0), f(x_0)) < \epsilon. \quad \blacksquare$$

Éste es un primer ejemplo del buen comportamiento de la convergencia uniforme. Veamos otros:

Teorema 3.54 *Sea Y un espacio métrico completo y X un conjunto. Entonces Y^X es completo con la métrica inducida a partir de la métrica de Y . Por lo tanto si X es un espacio topológico, $C(X, Y)$ también es completo.*

DEMOSTRACIÓN: Ante todo notemos que si Y es completo con su métrica d , también lo es con la métrica d' que resulta de tomar el mínimo con 1, luego podemos suponer que la métrica en Y está acotada.

Sea $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en Y^X . Esto significa que para todo $\epsilon > 0$ existe un n_0 tal que si $m, n \geq n_0$ y $x \in X$, entonces $d(f_m(x), f_n(x)) < \epsilon$.

En particular esto implica que cada sucesión $\{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ es de Cauchy en Y , luego converge a un cierto punto $f(x)$. Con esto tenemos una función $f \in Y^X$ a la cual $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ converge puntualmente. Basta ver que también converge uniformemente.

Sea $\epsilon > 0$ y tomemos un natural n_0 como antes. Así, si $n_0 \leq n \leq m$, se cumple $d(f_m(x), f_n(x)) < \epsilon$, luego $f_m(x)$ está en la bola cerrada de centro $f_n(x)$ y radio ϵ , luego el límite $f(x)$ estará en esta misma bola, o sea, se cumplirá $d(f(x), f_n(x)) \leq \epsilon$, y esto para todo $n \geq n_0$ y todo $x \in X$. Esto significa que la sucesión converge uniformemente a f . La completitud de $C(X, Y)$ se sigue de que es un cerrado. \blacksquare

En general no podemos convertir a Y^X en un espacio normado aunque Y lo sea. El problema es que no podemos transformar la norma en una norma acotada. Lo único que podemos hacer es definir $(Y^X)^*$ como el espacio de las funciones acotadas de X en Y , es decir, las funciones f tales que $f[X]$ está acotado. En este conjunto podemos definir la *norma supremo* dada por

$$\|f\|_\infty = \sup\{\|f(x)\| \mid x \in X\},$$

que obviamente genera las bolas que definen la topología de la convergencia uniforme (restringida a $(Y^X)^*$). Así pues, si Y es un espacio normado, $(Y^X)^*$ también lo es, y como es fácil ver que el límite uniforme de funciones acotadas está acotado, resulta que $(Y^X)^*$ es cerrado en Y^X , luego si Y es un espacio de Banach, $(Y^X)^*$ también lo es.

Si X es un espacio topológico e Y es un espacio normado, definimos $C^*(X, Y)$ como el espacio de las funciones continuas y acotadas de X en Y . Obviamente se trata de la intersección de dos cerrados, luego es cerrado, es un espacio normado y si Y es un espacio de Banach, $C^*(X, Y)$ también lo es.

Por el teorema 3.4, tenemos que si X es compacto entonces $C^*(X, Y) = C(X, Y)$, luego en este caso sí que tenemos una estructura de espacio normado en $C(X, Y)$, con la topología de la convergencia uniforme.

En particular, si \mathbb{K} es un cuerpo métrico completo, $C^*(X, \mathbb{K})$ es un espacio de Banach. En general no podemos dotar a $C(X, \mathbb{K})$ de estructura de espacio normado. De hecho, es fácil ver que $C^*(X, \mathbb{K})$ es abierto y cerrado en $C(X, \mathbb{K})$, luego, salvo que $C(X, \mathbb{K}) = C^*(X, \mathbb{K})$, tenemos que $C(X, \mathbb{K})$ no es conexo, luego ni siquiera es un espacio vectorial topológico.

Consideremos ahora el espacio $L(E, F)$ de las aplicaciones lineales continuas entre dos espacios normados. El teorema 3.35 nos permite definir, para cada $f \in L(E, F)$,

$$\|f\| = \sup\{\|f(v)\| \mid v \in \overline{B_1(0)}\}.$$

Claramente entonces, para cada $v \in E$ se cumple que $\|f(v)\| \leq \|f\|\|v\|$.

No es difícil comprobar que esta norma es realmente una norma en $L(E, F)$, pero en realidad es inmediato si tenemos en cuenta que la aplicación

$$\Phi : L(E, F) \longrightarrow C^*(\overline{B_1(0)}, F)$$

definida por la restricción es claramente lineal e inyectiva (pues $\overline{B_1(0)}$ contiene una base de E , luego si la imagen es nula, f se anula sobre una base, luego es nula). Pero claramente que $\|f\| = \|\Phi(f)\|_\infty$, de donde es inmediato que la norma en $L(E, F)$ es realmente una norma.

Ejercicio: Probar que $L(E, F)$ es un subespacio cerrado de $C^*(\overline{B_1(0)}, F)$. Por consiguiente, si F es un espacio de Banach, $L(E, F)$ también lo es.

Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ un subconjunto compacto infinito. Entonces podemos considerar al anillo de polinomios $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ como subespacio del espacio $C(K)$

de todas las funciones reales continuas en K . Vamos a probar que es denso en $C(K)$, es decir, que toda función continua en K puede aproximarse uniformemente por un polinomio. En realidad probamos un resultado más general:

Teorema 3.55 (Stone-Weierstrass) *Sea X un espacio topológico compacto y sea $A \subset C(X, \mathbb{K})$ una subálgebra que contenga a la función 1, que separe puntos de X (es decir, que para cada par de puntos distintos $x, y \in X$ exista $f \in A$ tal que $f(x) \neq f(y)$) y (en el caso en que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) tal que si $f \in A$, también $\bar{f} \in A$. Entonces A es densa en $C(X, \mathbb{K})$ respecto a la topología de la convergencia uniforme.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos en primer lugar que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Si \bar{A} es la clausura de A respecto de la topología de la convergencia uniforme, es fácil ver que \bar{A} sigue cumpliendo las hipótesis del teorema. Por ejemplo, dadas $f, g \in \bar{A}$, existen sucesiones $\{f_n\}_n, \{g_n\}_n$ en A que convergen a f y g , respectivamente, y es fácil ver que $\{f_n + g_n\}_n$ y $\{f_n g_n\}_n$ convergen a $f + g$ y fg , respectivamente, luego $f + g, fg \in \bar{A}$. Esto implica que \bar{A} es también una subálgebra de $C(X)$.

Así pues, cambiando A por \bar{A} podemos suponer que A es cerrada en $C(X)$, y ahora tenemos que probar que $A = C(X)$. Observemos que el hecho de que A sea una subálgebra y contenga a la función constante 1 implica que, de hecho, contiene a todas las constantes.

En primer lugar demostramos que si $f \in A$, entonces $|f| \in A$. Sea $c \in \mathbb{R}^+$ tal que $|f(x)| \leq c$ para todo $x \in X$. Entonces $f/c \in A$ y basta probar que $|f/c| \in A$. Equivalentemente, podemos suponer que $|f(x)| \leq 1$ para todo $x \in X$.

Sea $\{P_n\}_{n=0}^\infty$ la sucesión de polinomios considerada en el ejemplo de la página 129 y sea $f_n(x) = P_n(f(x)^2)$. El hecho de que A sea un álgebra que contiene a las constantes implica que $f_n(x) \in A$, y el hecho de que la sucesión de polinomios converja uniformemente a \sqrt{t} en $[0, 1]$ implica claramente que $\{f_n\}_{n=0}^\infty$ converge uniformemente a $\sqrt{f^2} = |f|$ en X . Como A es cerrado, $|f| \in A$.

A continuación vemos que si $f, g \in A$, entonces $\max(f, g)$ y $\min(f, g) \in A$.

Basta observar las expresiones:

$$\min(f, g) = \frac{1}{2}(f + g) - \frac{1}{2}|f - g|, \quad \max(f, g) = \frac{1}{2}(f + g) + \frac{1}{2}|f - g|.$$

Fijemos $f \in C(X)$ y tomemos dos puntos distintos $x, y \in X$. Por hipótesis existe $h \in A$ tal que $h(x) \neq h(y)$. Podemos encontrar números reales α, β tales que la función $f_{xy} = \alpha h + \beta 1$ cumpla $f_{xy}(x) = f(x)$, $f_{xy}(y) = f(y)$. Claramente $f_{xy} \in A$.

Sea B_y un entorno abierto de y tal que $f_{xy}(z) < f(z) + \epsilon$ para todo $z \in B_y$. Como X es compacto podemos cubrirlo por un número finito de estos abiertos, digamos B_{y_1}, \dots, B_{y_n} . Sea $f_x = \min(f_{y_1}, \dots, f_{y_n}) \in A$. Se cumple entonces que $f_x(x) = f(x)$ y $f_x(z) < f(z) + \epsilon$ para todo $z \in X$. Sea B_x un entorno abierto de x tal que $f_x(z) > f(z) - \epsilon$ para todo $z \in B_x$. Tomamos un subcubrimiento

finito, digamos B_{x_1}, \dots, B_{x_m} y llamamos $g = \max(f_{x_1}, \dots, f_{x_m}) \in A$, de modo que $g(z) > f(z) - \epsilon$ para todo $z \in X$. También cumple que $g(z) < f(z) + \epsilon$, luego $\|f - g\| \leq \epsilon$. Como ϵ es arbitrario, concluimos que $f \in A$.

Ahora consideremos el caso en que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Sea $A_0 = \{f \in A \mid f[X] \subset \mathbb{R}\}$, que obviamente es una subálgebra de $C(X, \mathbb{R})$ y $1 \in A_0$. Si $f \in A$, tenemos que

$$\operatorname{Re} f = \frac{f + \bar{f}}{2} \in A_0, \quad \operatorname{Im} f = \frac{f - \bar{f}}{2} \in A_0.$$

Esto implica que A_0 separa puntos, pues si $x, y \in X$ son puntos distintos, existe $f \in A$ tal que $f(x) \neq f(y)$, luego o bien la parte real o bien la parte imaginaria de f separa a x de y , y cualquiera de las dos está en A_0 . Por la parte ya probada A_0 es denso en $C(X, \mathbb{R})$. Pero entonces, para toda $f \in C(X, \mathbb{K})$, dado $\epsilon > 0$, tenemos que $\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f \in A_0$, luego existen funciones $u, v \in A_0$ tales que $\|\operatorname{Re} f - u\| < \epsilon/2$, $\|\operatorname{Im} f - v\| < \epsilon/2$ y entonces $g = u + iv \in A$ cumple $\|f - g\| < \epsilon$, luego A es densa en $C(X, \mathbb{K})$. ■

Por ejemplo, si $K \subset \mathbb{R}^n$ es un compacto infinito, es inmediato que el álgebra de los polinomios $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$, vista como subálgebra de $C(K)$ cumple las hipótesis del teorema anterior, luego si $f \in C(K)$, dado $\epsilon > 0$ existe un polinomio p tal que $|f(x) - p(x)| < \epsilon$, para todo $x \in K$.

Ahora generalizamos el criterio de mayoración de Weierstrass [ITAn 3.7].

Previamente notemos lo siguiente: si una serie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ con valores en un cuerpo métrico completo converge absoluta y uniformemente en un conjunto X , es decir, si la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |f_n|$ converge uniformemente, entonces $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ converge uniformemente. La prueba es la misma que la de 2.83.

Teorema 3.56 (Criterio de Mayoración de Weierstrass) *Sea \mathbb{K} un cuerpo métrico completo y sea $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ una serie funcional en un espacio X , de modo que cada $f_n : X \rightarrow \mathbb{K}$. Sea $\{M_n\}_{n=0}^{\infty}$ una sucesión en el intervalo $[0, +\infty[$ tal que para todo natural n y todo $x \in X$ se cumpla $|f_n(x)| \leq M_n$. Si la serie $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$ es convergente, entonces la serie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ es absoluta y uniformemente convergente en X .*

DEMOSTRACIÓN: La serie M_n es de Cauchy, luego dado $\epsilon > 0$ existe un n_0 tal que si $n_0 \leq m \leq p$, entonces $\sum_{n=m}^p M_n < \epsilon$. Así

$$\left| \sum_{n=m}^p |f_n(x)| \right| = \sum_{n=m}^p |f_n(x)| \leq \sum_{n=m}^p M_n < \epsilon$$

para todo $x \in X$. Esto significa que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |f_n|$ es de Cauchy en $C(X, \mathbb{K})$, luego (uniformemente) convergente, luego $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ es absoluta y uniformemente convergente. ■

Vamos a considerar concretamente el caso de las series de potencias. En [ITAn 2.30] demostramos que una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ con coeficientes en \mathbb{C} converge absolutamente en una cierta bola abierta $B_R(0)$ (que puede ser todo \mathbb{C}). En realidad el argumento vale para series con coeficientes en cualquier cuerpo métrico completo, pero vamos a dar una versión más precisa de este resultado, con una expresión para el radio de convergencia R . Para ello necesitamos el concepto de límite superior:

Definición 3.57 Sea $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ una sucesión de números reales. Su *límite superior* es el supremo (en $\overline{\mathbb{R}}$) del conjunto de sus puntos adherentes. Lo representaremos mediante $\overline{\lim}_n a_n$. Se cumple que

$$\overline{\lim}_n a_n = \inf_{k \geq 0} \sup_{n \geq k} a_n.$$

En efecto, sea p un punto adherente de $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$. Dados $\epsilon > 0$ y $k \geq 0$, existe un $n \geq k$ tal que $a_n \in]p - \epsilon, p + \epsilon[$, luego $p - \epsilon \leq \sup_{n \geq k} a_n$. Esto vale para todo $\epsilon > 0$, luego $p \leq \inf_{k \geq 0} \sup_{n \geq k} a_n$. Como el límite superior es el supremo de estos p , tenemos que $\overline{\lim}_n a_n \leq \inf_{k \geq 0} \sup_{n \geq k} a_n$.

Sea $L = \inf_{k \geq 0} \sup_{n \geq k} a_n$. Dado $\epsilon > 0$, existe un $k \geq 0$ tal que $L \leq \sup_{n \geq k} a_n \leq L + \epsilon$.

Si $L = \sup_{n \geq k} a_n$, entonces existe un $n \geq k$ tal que $L - \epsilon < a_n \leq L$. Si por el contrario $L < \sup_{n \geq k} a_n < L + \epsilon$, entonces existe un $n \geq k$ tal que $L \leq a_n < L + \epsilon$.

En cualquier caso existe un $n \geq k$ tal que $a_n \in]L - \epsilon, L + \epsilon[$. Esto significa que L es un punto adherente de la sucesión, luego $L \leq \overline{\lim}_n a_n$ y tenemos la igualdad. ■

Por la propia definición es claro que si una sucesión converge en $\overline{\mathbb{R}}$ entonces su límite, que es su único punto adherente, coincide con su límite superior.

Definición 3.58 Sea \mathbb{K} un cuerpo métrico completo, sea $a \in \mathbb{K}$ y $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ una sucesión en \mathbb{K} . La *serie de potencias* de coeficientes $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ y centro a es la serie funcional

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - a)^n.$$

Teorema 3.59 Sea $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - a)^n$ una serie de potencias con coeficientes en un cuerpo métrico completo \mathbb{K} , sea $R = 1 / \overline{\lim}_n \sqrt[n]{|a_n|}$ (entendiendo que $1/0 = +\infty$ y $1/(+\infty) = 0$). Entonces la serie converge absoluta y uniformemente en todo compacto contenido en $B_R(a)$ y diverge en todo punto de $\mathbb{K} \setminus B'_R(a)$ (con el convenio de que $B_{+\infty}(a) = \mathbb{K}$). En particular la serie converge absoluta y puntualmente en $B_R(a)$.

DEMOSTRACIÓN: Sea K un compacto en $B_R(a)$. Veamos que la serie converge absoluta y uniformemente en K . La función $|x - a|$ es continua en K , luego alcanza su máximo r en un punto $x \in K$, es decir, $|x - a| = r$ y para todo $y \in K$ se cumple $|y - a| \leq r$. Así $K \subset B'_r(a)$.

Como $x \in B_R(a)$ ha de ser $r < R$, luego $r \overline{\lim}_n \sqrt[n]{|a_n|} < 1$. Tomemos ρ tal que $r \overline{\lim}_n \sqrt[n]{|a_n|} < \rho < 1$. Como

$$\overline{\lim}_n \sqrt[n]{|a_n|} = \inf_{k \geq 0} \sup_{n \geq k} \sqrt[n]{|a_n|},$$

existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que $\sup_{n \geq k} \sqrt[n]{|a_n|} < \rho/r$, luego si $n \geq k$ se cumple $\sqrt[n]{|a_n|} < \rho/r$, luego $|a_n| r^n < \rho^n$. Si $y \in K$ entonces $|y - a| \leq r$, luego $|y - a|^n \leq r^n$, luego

$$|a_n(y - a)^n| \leq |a_n| r^n < \rho^n.$$

Así pues, la serie $\sum_{n=k}^{\infty} a_n(y - a)^n$ está mayorada en K por $\sum_{n=k}^{\infty} \rho^n$, que es convergente por ser geométrica de razón menor que 1. El criterio de Weierstrass nos da que la serie de potencias converge absoluta y uniformemente a una función continua en K .

Ahora veamos que la serie diverge en $\mathbb{K} \setminus B'_R(a)$. Tomamos $x \in \mathbb{K}$ tal que $|x - a| > R$. Entonces $1 < |x - a| \overline{\lim}_n \sqrt[n]{|a_n|}$. Por lo tanto, para todo natural k se cumple $1/|x - a| < \sup_{n \geq k} \sqrt[n]{|a_n|}$, luego existe un $n \geq k$ tal que $\sqrt[n]{|a_n|} |x - a| > 1$, o sea, $|a_n(y - a)^n| > 1$. Esto significa que $a_n(y - a)^n$ no tiende a 0, luego la serie diverge. ■

El número R se llama *radio de convergencia* de la serie de potencias. La bola $B_R(a)$ se llama *disco de convergencia* (que en el caso en que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ será un intervalo). Tenemos, pues que una serie de potencias converge absolutamente en su disco de convergencia y diverge en los puntos exteriores a él (los puntos interiores de su complementario). En cada punto de la frontera del disco la serie puede converger absolutamente, condicionalmente o divergir, según los casos.

Nota En la prueba del teorema anterior hemos visto que si $K \subset B_R(a)$ es compacto, entonces la suma de la serie de potencias es continua en K . Si suponemos que \mathbb{K} es localmente compacto, como es el caso de \mathbb{R} o \mathbb{C} , entonces todo punto de $B_R(a)$ tiene un entorno compacto contenido en $B_R(a)$, luego la suma es continua en $B_R(a)$. ■

A la hora de determinar el radio de convergencia de una serie suele ser útil el teorema siguiente:

Teorema 3.60 Sea $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - a)^n$ una serie de potencias tal que exista

$$\lim_n \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = L.$$

Entonces su radio de convergencia es $1/L$.

DEMOSTRACIÓN: Por el teorema anterior, el radio de convergencia de la serie dada es el mismo que el de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|z^n$. Si $x > 0$, tenemos que

$$\lim_n \frac{|a_{n+1}|x^{n+1}}{|a_n|x^n} = Lx,$$

luego el criterio de D'Alembert [ITAn 2.12] implica que la serie converge cuando $Lx < 1$ y diverge si $Lx > 1$. Consecuentemente el radio de convergencia ha de ser $1/L$. ■

Para terminar caracterizamos los subespacios compactos de un espacio de funciones continuas $C(X, Y)$, con X compacto:

Teorema 3.61 (Ascoli-Arzelà) *Sea X un espacio métrico compacto, sea Y un espacio métrico completo y $A \subset C(X, Y)$. Entonces A es relativamente compacto (es decir, tiene clausura compacta) respecto de la topología de la convergencia uniforme si y sólo si cumple las dos condiciones siguientes:*

- a) *A es equicontinuo, es decir, para todo $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $f \in A$ y $x, y \in X$ cumplen $d(x, y) < \delta$, entonces $d(f(x), f(y)) < \epsilon$.*
- b) *Para cada $x \in X$, el conjunto $\{f(x) \mid f \in A\}$ es relativamente compacto en Y .*

DEMOSTRACIÓN: Para cada número natural $n \geq 1$, podemos tomar un conjunto $D_n = \{x_1, \dots, x_k\} \subset X$ tal que $X = B_{1/n}(x_1) \cup \dots \cup B_{1/n}(x_k)$. Llamamos $D = \{d_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ a la unión de todos los conjuntos D_n .

Supuesto que A sea equicontinuo y uniformemente acotado, basta probar que toda sucesión $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ en A tiene una subsucesión (uniformemente) convergente, pues en tal caso lo mismo vale para \bar{A} . En efecto, si $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión en \bar{A} , para cada n podemos tomar $f_n \in A$ tal que $d(f_n, g_n) < 1/(n+1)$, entonces $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ tiene una subsucesión tal que existe $\lim_n f_n = f \in C(X, Y)$, y es claro entonces que también $\lim_n g_n = f$.

Dada $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ en A , veamos que tiene una subsucesión que converge puntualmente en cada punto de D . Para ello observamos que la sucesión $\{f_n(d_0)\}_{n=0}^{\infty}$ está contenida en un subconjunto compacto de Y , luego tiene una subsucesión convergente, digamos $\{f_{n_0, k}(d_0)\}_{k=0}^{\infty}$. Similarmente, de $\{f_{n_0, k}\}_{k=0}^{\infty}$ podemos extraer una subsucesión $\{f_{n_1, k}\}_{k=0}^{\infty}$ tal que $\{f_{n_1, k}(d_1)\}_{k=0}^{\infty}$ sea convergente.

Procediendo de este modo obtenemos sucesiones $\{f_{n_m, k}\}_{k=0}^{\infty}$, y podemos considerar entonces la subsucesión $\{f_{n_k, k}\}_{k=0}^{\infty}$, que es, de hecho, una subsucesión de todas las anteriores, luego converge en todos los puntos de D . A partir de aquí la representaremos por $\{f_{n_k}\}_{k=0}^{\infty}$.

Dado $\epsilon > 0$, por la equicontinuidad existe un $\delta > 0$ tal que si $d(x, y) < \delta$, entonces $d(f_{n_k}(x), f_{n_k}(y)) < \epsilon/3$, para todo k . Tomemos un número natural $r > 1/\delta$. Como la subsucesión converge en todos los puntos de D_r , existe un $k_0 > 0$ tal que si $k, l \geq k_0$ y $d \in D_r$ entonces $d(f_{n_k}(d), f_{n_l}(d)) < \epsilon/3$.

Ahora, dado $x \in X$, tenemos que existe un $d \in D_r$ tal que $x \in B_{1/r}(d)$, luego $d(x, d) < \delta$, luego, para $k, l \geq k_0$,

$$d(f_{n_k}(x), f_{n_l}(x)) \leq d(f_{n_k}(x), f_{n_k}(d)) + d(f_{n_k}(d), f_{n_l}(d)) + d(f_{n_l}(d), f_{n_l}(x)) < \epsilon.$$

Esto significa que la sucesión $\{f_{n_k}\}_{k=0}^{\infty}$ es de Cauchy en $C(X, Y)$, que es completo, luego es convergente.

Veamos el recíproco: Si A es relativamente compacto, dado $\epsilon > 0$ para cada $g \in \bar{A}$ existe un $f \in A$ tal que $g \in B_{\epsilon/3}(f)$, luego estas bolas cubren el compacto \bar{A} , luego existen $f_1, \dots, f_k \in A$ tales que $A \subset B_{\epsilon/3}(f_1) \cup \dots \cup B_{\epsilon/3}(f_k)$.

Por lo tanto, si $x \in X$, tenemos que

$$\{f(x) \mid f \in A\} \subset B_{\epsilon/3}(f_1(x)) \cup \dots \cup B_{\epsilon/3}(f_k(x)),$$

luego

$$\overline{\{f(x) \mid f \in A\}} \subset B_{\epsilon}(f_1(x)) \cup \dots \cup B_{\epsilon}(f_k(x)).$$

Esto prueba que la clausura es precompacta y, como es cerrada en Y , que es un espacio métrico completo, también es completa, luego es compacta, por 3.30.

Por otra parte, como X es compacto, cada f_i es uniformemente continua en X , luego existe un $\delta > 0$ tal que si $x, y \in X$ cumplen $d(x, y) < \delta$, entonces $d(f_i(x), f_i(y)) < \epsilon/3$. Así, si $f \in A$, existe un i tal que $d(f, f_i) < \epsilon/3$, luego si $d(x, y) < \delta$, tenemos que

$$d(f(x), f(y)) \leq d(f(x), f_i(x)) + d(f_i(x), f_i(y)) + d(f_i(y), f(y)) < \epsilon.$$

Esto prueba que A es equicontinuo. ■

Nota Si $Y = \mathbb{R}^n$, sus subconjuntos relativamente compactos son simplemente sus subconjuntos acotados, por lo que la condición b) del teorema anterior equivale a que A sea *puntualmente acotado*, es decir, a que todos los conjuntos $\{f(x) \mid f \in A\}$ estén acotados. Sin embargo, si A es compacto, se cumple algo más fuerte, y es que A está acotado respecto de la norma de $C(X, \mathbb{R}^n)$, lo que implica trivialmente la acotación puntual. Por lo tanto, si X es un espacio topológico compacto, un subconjunto $A \subset C(X, \mathbb{R}^n)$ es compacto con la topología de la convergencia uniforme si y sólo si es cerrado, acotado y equicontinuo. ■

3.7 El teorema de Baire

Terminamos el capítulo con un resultado que no nos va a hacer falta más adelante, pero que es útil en algunos contextos más avanzados. Necesitamos un resultado previo:

Teorema 3.62 *Sea M un espacio métrico completo. Toda familia decreciente $\{C_n\}_n$ de cerrados en M no vacíos cuyos diámetros cumplan $\lim_n d(C_n) = 0$ tiene intersección no vacía.*

DEMOSTRACIÓN: Para cada n tomamos $x_n \in C_n$. Como $\lim_n d(C_n) = 0$, es claro que la sucesión $(x_n)_n$ es de Cauchy. Su límite x está en cada C_n por ser éste cerrado y $\{C_n\}_n$ decreciente. ■

Teorema 3.63 (Teorema de Baire) *En un espacio métrico completo, la intersección de una familia numerable de abiertos densos es un conjunto denso.*

DEMOSTRACIÓN: Sea M un espacio métrico completo y $G = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ una intersección numerable de abiertos G_n densos en M . Basta probar que G corta a toda bola abierta $B_r(x)$. Como G_1 es denso en M existe $x_1 \in G_1 \cap B_r(x)$. Como $G_1 \cap B_r(x)$ es abierto, existe un $r_1 > 0$, que podemos tomar menor que $r/2$, tal que $\overline{B_{r_1}(x_1)} \subset G_1 \cap B_r(x)$.

Inductivamente podemos construir una sucesión $\{x_n\}_n$ de puntos de M y una sucesión $\{r_n\}_n$ de números reales positivos de modo que

$$\overline{B_{r_n}(x_n)} \subset G_n \cap B_{r_{n-1}}(x_{n-1}) \quad (3.3)$$

y $r_n < r/n$ para todo n .

Por el teorema anterior, $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{B_{r_n}(x_n)} \neq \emptyset$, luego (3.3) implica que

$$G \cap B_r(x) \supset \bigcap_{n=1}^{\infty} (G_n \cap B_{r_{n-1}}(x_{n-1})) \neq \emptyset. \quad \blacksquare$$

Sin más que tener en cuenta que el complementario de un conjunto denso es un conjunto con interior vacío tenemos una forma equivalente del teorema de Baire:

Teorema 3.64 (Teorema de Baire) *En un espacio métrico completo, toda unión numerable de cerrados de interior vacío tiene interior vacío.*

Conviene observar que la tesis del teorema de Baire (en cualquiera de sus dos formas equivalentes) se cumple también sobre espacios topológicos localmente compactos, no necesariamente metrizable. La prueba es, de hecho, más sencilla, y se obtiene sustituyendo el teorema 3.62 por el hecho de que la intersección de una familia decreciente de compactos no vacíos es no vacía.

Aunque, según hemos indicado, no necesitaremos el teorema de Baire, vamos a tratar de explicar su interés. Para ello necesitamos algunas definiciones:

Definición 3.65 Sea X un espacio topológico. Un subconjunto A de X es *diseminado* si $X \setminus A$ contiene un abierto denso o, equivalentemente, si A está contenido en un cerrado de interior vacío o, también, si $\text{int } \overline{A} = \emptyset$.

Informalmente, la idea es que un abierto denso (y cualquier conjunto que lo contenga) es un conjunto “muy grande” desde el punto de vista topológico, pues todo abierto contiene un abierto contenido en tal conjunto; los conjuntos

diseminados son topológicamente “muy pequeños”. Como todo conjunto que contenga a un conjunto que contenga a un abierto denso contiene un abierto denso, tomando complementarios obtenemos que los subconjuntos de los conjuntos diseminados son diseminados. Esta noción de conjunto diseminado resulta ser muy restrictiva, esencialmente a causa de que no se conserva por uniones numerables, por ello se definen los conjuntos de primera categoría:

Definición 3.66 Un subconjunto A de un espacio topológico X es de *primera categoría* si es unión numerable de conjuntos diseminados. A es de *segunda categoría* si no es de primera categoría.

Es evidente que toda unión numerable de conjuntos de primera categoría es de primera categoría. Así, los conjuntos de primera categoría son conjuntos topológicamente “pequeños”, aunque no necesariamente “muy pequeños”, mientras que los conjuntos de segunda categoría son los topológicamente “grandes”.

No obstante, estas nociones no sirven de nada sin el teorema de Baire, que puede enunciarse en una tercera forma equivalente:

Teorema 3.67 (Teorema de Baire) *En un espacio métrico completo, los conjuntos de primera categoría tienen interior vacío.*

DEMOSTRACIÓN: Consideremos un conjunto C de primera categoría. Entonces

$$C = \bigcup_n A_n \subset \bigcup_n \bar{A}_n = C',$$

donde los conjuntos A_n son diseminados, luego sus clausuras son cerrados de interior vacío, luego C' tiene interior vacío (por la versión que ya hemos probado del teorema de Baire) y C también. ■

Así pues, si probamos que un conjunto C es “pequeño”, en el sentido de que es de primera categoría, el teorema de Baire nos da que todo abierto va a contener puntos que no están en C . Éste es esencialmente el interés del teorema de Baire.

Terminaremos con una aplicación del teorema de Baire, que no es de las más típicas, pero tal vez la más sencilla:

Ejemplo \mathbb{Q} no es intersección numerable de abiertos de \mathbb{R} .

En efecto, si lo fuera, sería una intersección numerable de abiertos densos, luego $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sería una unión numerable de cerrados de interior vacío, al igual que $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$. El teorema de Baire nos daría entonces que \mathbb{R} tiene interior vacío (en sí mismo), lo cual es absurdo. ■

Los conjuntos que pueden expresarse como intersección numerable de abiertos se llaman conjuntos G_δ . El ejemplo anterior, junto con el teorema siguiente, muestra que no puede existir una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua en los puntos de \mathbb{Q} y discontinua en los de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. (Si el lector cree que esto es evidente, debería pensar en el ejercicio que sigue al teorema.)

Teorema 3.68 *Sea M un espacio métrico completo. El conjunto de puntos de continuidad de toda función $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ es un G_δ .*

DEMOSTRACIÓN: Para cada natural no nulo n definimos

$$G_n = \{x \in M \mid \text{existe } \delta > 0 \text{ tal que } \sup_{y \in B_\delta(x)} f(y) - \inf_{y \in B_\delta(x)} f(y) < 1/n\}.$$

Claramente los conjuntos G_n son abiertos. Basta probar que el conjunto de puntos de continuidad de f es $G = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$.

Si f es continua en x , dado un $n > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $y \in B_\delta(x)$ entonces $|f(x) - f(y)| < 1/(4n)$. Por lo tanto, si $y, y' \in B_\delta(x)$ se cumple que $|f(y) - f(y')| < 1/(2n)$ y, tomando el supremo en y y el ínfimo en y' , concluimos que $x \in G_n$.

Recíprocamente, supongamos que $x \in G$. Dado $\epsilon > 0$ tomamos n tal que $1/n < \epsilon$. Como $x \in G_n$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\sup_{y \in B_\delta(x)} f(y) - \inf_{y \in B_\delta(x)} f(y) < 1/n.$$

Entonces si $y \in B_\delta(x)$ se tiene que

$$|f(x) - f(y)| \leq \sup_{y \in B_\delta(x)} f(y) - \inf_{y \in B_\delta(x)} f(y) < 1/n < \epsilon,$$

luego f es continua en x . ■

Ejercicio: Consideremos la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 1/q & \text{si } x = p/q \text{ con } p, q \in \mathbb{Z}, (p, q) = 1, q > 0, \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Mostrar que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ para todo $x_0 \in \mathbb{R}$. Deducir que f es continua en $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ y discontinua en \mathbb{Q} .

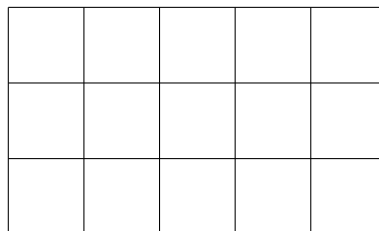
Capítulo IV

Teoría de la medida I

En el apéndice A de [ITAn] introdujimos la medida de Jordan bidimensional para precisar el concepto de área de una figura plana. Aquí vamos a generalizar la medida de Jordan a cualquier dimensión finita y, a su vez, extenderemos la medida de Jordan a la medida de Lebesgue, que, como instrumento matemático, es mucho más potente.

El problema de la medida consiste en definir un análogo en dimensiones superiores del concepto de longitud de un segmento. Cuando decimos que la longitud de un segmento es 5, esto significa que en él “cabem” cinco segmentos de longitud 1.

Similarmente, si el rectángulo de la figura tiene lados de longitudes 5 y 3, decimos que su área es 15, porque en él “cabem” 15 cuadrados de lado unitario. En otras palabras, tomamos como unidad de área la de un cuadrado de lado unitario, y entonces el área de una figura es el número de cuadrados unitarios que “cabem” en ella.



Ahora bien, esa idea de área que acabamos de describir no es lo suficientemente precisa como para que sea aceptable. Por una parte, cuando hablamos del número de cuadrados que “cabem” en una figura, se sobrentiende que éstos no deben solaparse, pero el concepto de “no solaparse” no coincide exactamente con el de “ser disjuntos”, pues los cuadrados de la figura no son disjuntos a menos que adoptemos unos convenios muy particulares sobre qué puntos de su frontera consideramos que pertenecen a cada cuadrado y cuáles no. Por otra parte, las figuras que pueden expresarse como uniones finitas de cuadrados que no se solapan son muy pocas, luego, con la definición de área que hemos dado, no tendría sentido plantearse, por ejemplo, cuál es el área de un triángulo. Sin embargo, el concepto de “área de un triángulo” tiene un sentido intuitivo muy claro. Por ejemplo, si trazamos una diagonal en el rectángulo de la figura, éste queda dividido en dos triángulos rectángulos congruentes, por lo que es razonable afirmar que cada uno de ellos tiene la mitad de área del rectángulo, es decir,

que su área es de 7.5 unidades. Observemos que este argumento se basa en la misma idea original de “número de cuadrados que caben”, pues, por ejemplo, si queremos fabricar una alfombra en forma de triángulo rectángulo de base 5 m y altura 3 m, podemos afirmar que necesitaremos 7.5 m^2 de tela, pues con el doble de esa cantidad podemos fabricar dos alfombras de esas medidas.

Si analizamos el argumento que nos ha llevado a concluir que el área del triángulo “debe ser” 7.5, veremos que utiliza implícitamente los postulados siguientes:

- a) El área de un cuadrado de lado unitario es 1.
- b) Dos figuras congruentes tienen la misma área.
- c) El área de la unión de dos figuras disjuntas es la suma de las áreas.

En realidad hemos usado algo más fuerte que c), pues los dos triángulos en que se descompone el rectángulo al trazar su diagonal no son disjuntos, sino que lo máximo que podemos decir es que “no se solapan” en el sentido de que su intersección es un segmento de recta (y lo mismo vale para el razonamiento que nos ha llevado a concluir que el área del rectángulo es 15, pues los cuadrados en que lo hemos descompuesto no son disjuntos).

Estas salvedades se traducen en una serie de problemas técnicos que tenemos que resolver si queremos llegar a una definición satisfactoria de área, pero antes de enfrentarnos al problema observemos que éste tiene su análogo en dimensiones superiores. Cuando consideramos figuras tridimensionales el concepto análogo al de área es el de “volumen”, de modo que la idea aproximada que pretende capturar este concepto es que el volumen de una figura es el número de cubos de arista unitaria que “caben” en ella, con los matices correspondientes de que los cubos no deben solaparse, etc. El concepto análogo para figuras de dimensión arbitraria n recibe el nombre de “medida”, de manera que uno de los objetivos principales de este capítulo será el de dar una definición de medida de una figura n -dimensional de modo que se satisfagan las generalizaciones obvias de las propiedades a), b), c) anteriores.

4.1 La medida de Jordan

Definición 4.1 Una *celda* en \mathbb{R}^n es un producto $C = \prod_{i=1}^n I_i$, donde cada I_i es un intervalo acotado en \mathbb{R} , es decir, un conjunto de la forma $[a_i, b_i]$, $]a_i, b_i[$, $[a_i, b_i[$ o $]a_i, b_i]$. Admitimos la posibilidad de que $a_i = b_i$, con lo que $I_i = \{a_i\}$ o bien $I_i = \emptyset$, y en este último caso $C = \emptyset$. Definimos el *contenido* de la celda C como $|C| = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i)$.

Por ejemplo, las celdas en \mathbb{R}^2 son los rectángulos de lados paralelos a los ejes, los segmentos paralelos a los ejes, los puntos y el conjunto vacío.

Es inmediato que si $C = \prod_{i=1}^n I_i \subset C' = \prod_{i=1}^n I'_i$ son celdas no vacías, entonces $I_i \subset I'_i$ para todo i , luego $|C| \leq |C'|$.

En diversas ocasiones usaremos el siguiente argumento elemental de continuidad:

Teorema 4.2 *Si C es una celda en \mathbb{R}^n y $\epsilon > 0$, entonces existe una celda abierta C' tal que $C \subset C'$ y $|C'| - |C| < \epsilon$. Si además $|C| > 0$, existe una celda cerrada C'' tal que $C'' \subset C$ y $|C| - |C''| < \epsilon$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $C = \prod_{i=1}^n]a_i, b_i[$, donde $]a_i, b_i[$ representa a cualquiera de los intervalos $]a_i, b_i[$, $[a_i, b_i]$, $]a_i, b_i]$ o $[a_i, b_i[$. Sea $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ la función dada por

$$f(\delta) = \prod_{i=1}^n (b_i + \delta - (a_i - \delta)).$$

Claramente es continua y $f(0) = |C|$, luego existe un $\delta > 0$ tal que $f(\delta) < |C| + \epsilon$, y entonces la celda $C' = \prod_{i=1}^n]a_i - \delta, b_i + \delta[$ cumple lo requerido.

Si $|C| \neq 0$ entonces $a_i < b_i$, luego $m = \min_i (b_i - a_i) > 0$ y podemos considerar la función $g : [0, m/2] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(\delta) = \prod_{i=1}^n (b_i - \delta - (a_i + \delta)).$$

Tomando de nuevo un δ suficientemente pequeño, la celda $C'' = \prod_{i=1}^n [a_i + \delta, b_i - \delta]$ cumple lo requerido. ■

Definición 4.3 Una *figura elemental* en \mathbb{R}^n es una unión finita de celdas de \mathbb{R}^n . Llamaremos \mathcal{E}^n al conjunto de todas las figuras elementales en \mathbb{R}^n .

En general, es claro que toda figura elemental en \mathbb{R}^n es un subconjunto acotado de \mathbb{R}^n . Veamos algunas propiedades básicas:

Teorema 4.4 *Si A y B son figuras elementales, también lo son*

$$A \cup B, \quad A \cap B, \quad A \setminus B \quad \text{y} \quad a + A,$$

para todo $a \in \mathbb{R}^n$, donde $a + A = \{a + x \mid x \in A\}$ es la imagen de A por la traslación $x \mapsto a + x$.

DEMOSTRACIÓN: Sea $A = \bigcup_{k=1}^m C_k$, $B = \bigcup_{l=1}^r D_l$, donde los conjuntos C_k y D_l son celdas. Es trivial que $A \cup B$ es también una figura elemental. Por otra parte,

$$A \cap B = \bigcup_{k=1}^m \bigcup_{l=1}^r (C_k \cap D_l),$$

luego basta probar que la intersección de dos celdas C y D es una celda. Ahora bien, si

$$C = \prod_{i=1}^n I_i, \quad D = \prod_{i=1}^n J_i,$$

entonces $C \cap D = \prod_{i=1}^n (I_i \cap J_i)$, y es claro que una intersección de intervalos acotados es un intervalo acotado.

Como las figuras elementales son acotadas, podemos tomar un intervalo cerrado $[a, b]$ tal que $A \cup B \subset [a, b]^n$, y entonces

$$A \setminus B = A \cap ([a, b]^n \setminus B),$$

luego no perdemos generalidad si suponemos que $A = [a, b]^n$ y que $B \subset A$. Entonces, si llamamos $B_i = \{x \in A \mid x_i \notin B_i\}$, resulta que

$$A \setminus B = \bigcup_{i=1}^n B_i,$$

luego basta demostrar que cada B_i es una figura elemental, pero es claro que $[a, b] \setminus J_i = K_1 \cup K_2$, donde K_1 y K_2 son dos intervalos (que contendrán o no a sus extremos según si J_i los contiene o no), y entonces

$$B_i = \{x \in A \mid x_i \in K_1\} \cup \{x \in A \mid x_i \in K_2\},$$

y los dos conjuntos de la derecha son celdas.

Por último, $a + A = \bigcup_{k=1}^m (a + C_k)$, y es claro que el trasladado de una celda $C = \prod_{i=1}^n I_i$ es $a + C = \prod_{i=1}^n (a_i + I_i)$, donde a su vez $a_i + I_i$ es un intervalo, luego $a + C$ es una celda y $a + A$ es una figura elemental. ■

Conviene dar nombre a la situación dada por el teorema anterior:

Definición 4.5 Si X es un conjunto, un *anillo* de subconjuntos de X es una familia $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}X$ que cumpla las propiedades siguientes:¹

- a) $\emptyset \in \mathcal{A}$.
- b) Si $A, B \in \mathcal{A}$, entonces $A \cup B, A \cap B, A \setminus B \in \mathcal{A}$.

Así, hemos probado que el conjunto de las figuras elementales es un anillo invariante por traslaciones, en el sentido de que cualquier trasladado de una figura elemental es una figura elemental.

Necesitamos un último resultado técnico:

¹El nombre se debe a que todo anillo de conjuntos es un anillo conmutativo en el sentido algebraico usual con las operaciones $A + B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ y $A \cdot B = A \cap B$, pero no vamos a necesitar este hecho.

Teorema 4.6 *Toda figura elemental puede expresarse de forma como unión de celdas disjuntas.*

DEMOSTRACIÓN: En primer lugar demostramos lo siguiente: Si I_1, \dots, I_k son intervalos acotados en \mathbb{R} , existen intervalos acotados J_1, \dots, J_l disjuntos dos a dos tales que $I_1 \cup \dots \cup I_k = J_1 \cup \dots \cup J_l$ y, para cada i, j , o bien $J_j \subset I_i$, o bien $J_j \cap I_i = \emptyset$.

En efecto, consideremos el conjunto de todos los extremos de los intervalos I_i y ordenemos sus elementos: $a_1 < a_2 < \dots < a_r$. Tomamos como intervalos J_j todos los de la forma $\{a_r\}$ o $]a_r, a_{r+1}[$ que estén contenidos en alguno de los I_i . Es claro entonces que $J_1 \cup \dots \cup J_l \subset I_1 \cup \dots \cup I_k$. Recíprocamente, dado $x \in I_1 \cup \dots \cup I_k$, existe un i tal que $x \in I_i$. Si $x = a_r$, para cierto r , entonces $\{x\} = \{a_r\} \subset I_i$, luego $\{x\}$ es un J_j y x está en la unión de todos ellos. La otra posibilidad es que $a_r < x < a_{r+1}$. En este caso los extremos de I_i deben cumplir $u \leq a_r < x < a_{r+1} \leq v$, por lo que $x \in]a_r, a_{r+1}[\subset I_i$, luego $]a_r, a_{r+1}[$ es un J_j y de nuevo x está en la unión.

Con esto tenemos probado que $J_1 \cup \dots \cup J_l = I_1 \cup \dots \cup I_k$, y es claro que los intervalos J_j son disjuntos dos a dos. Si $J_j \cap I_i \neq \emptyset$, tomamos $x \in J_j \cap I_i$ y distinguimos dos casos. O bien $J_j = \{a_r\}$, en cuyo caso $x = a_r$ y trivialmente $J_j \subset I_i$, o bien $J_j =]a_r, a_{r+1}[$, en cuyo caso I_i es un intervalo cuyos extremos cumplen $u \leq a_r < x < a_{r+1} \leq v$, por lo que $J_j \subset I_i$.

En segundo lugar demostramos que si C_1, \dots, C_k son celdas, existen otras celdas D_1, \dots, D_l disjuntas dos a dos de manera que $D_1 \cup \dots \cup D_l = C_1 \cup \dots \cup C_k$.

En efecto, si $C_v = \prod_{i=1}^n I_{iv}$, para cada $i = 1, \dots, n$ aplicamos el resultado anterior a la familia $\{I_{iv} \mid v = 1, \dots, k\}$, lo que nos da una familia de intervalos $\{J_{ju} \mid u = 1, \dots, l_i\}$ disjuntos dos a dos de modo que $\bigcup_{v=1}^k I_{iv} = \bigcup_{u=1}^{l_i} J_{iu}$ y cada I_{iv} está contenido en cada I_{iv} o bien es disjunto de él.

Llamamos D_r a las celdas de la forma $\prod_{i=1}^n J_{iu_i}$ contenidas en algún C_v . Claramente son disjuntas dos a dos, pues si dos de ellas $\prod_{i=1}^n J_{iu_i}$ y $\prod_{i=1}^n J_{iv_i}$ son distintas, entonces $J_{iu_i} \neq J_{iv_i}$ para algún i , luego $J_{iu_i} \cap J_{iv_i} = \emptyset$, luego también las celdas son disjuntas.

También es obvio que $D_1 \cup \dots \cup D_l \subset C_1 \cup \dots \cup C_k$ y si $x \in C_1 \cup \dots \cup C_k$, entonces $x \in C_v$, para cierto v , luego $x_i \in J_{iu_i} \subset I_{iv}$, para cierto u_i , luego $x \in \prod_{i=1}^n J_{iu_i} \subset C_v$, luego la celda es una de las D_u y $x \in D_1 \cup \dots \cup D_l$.

Lo que acabamos de probar equivale a que si $A = C_1 \cup \dots \cup C_k$ es una figura elemental, entonces A se expresa también como unión de celdas disjuntas dos a dos. ■

Pasamos ya al problema de asignar un “volumen” a cada figura elemental. La definición siguiente incorpora algunas de las condiciones que, según hemos discutido, debe cumplir tal asignación:

Definición 4.7 Una *medida finitamente aditiva* en un anillo \mathcal{A} en un conjunto X es una aplicación $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty[$ que cumpla las propiedades siguientes:

- a) $\mu(\emptyset) = 0$.
- b) Si $A, B \in \mathcal{A}$ son disjuntos, entonces $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$.

Toda medida finitamente aditiva cumple estas propiedades adicionales:

- a) Si $A \subset B$ son elementos de \mathcal{A} , entonces $\mu(A) \leq \mu(B)$.
En efecto, $\mu(B) = \mu(A \cup (B \setminus A)) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \geq \mu(A)$.
- b) Si $A, B \in \mathcal{A}$, entonces $\mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B)$.
En efecto, $\mu(A \cup B) = \mu(A \cup (B \setminus A)) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \leq \mu(A) + \mu(B)$.
- c) Si $A, B \in \mathcal{A}$ tienen medida nula, entonces $\mu(A \cup B) = 0$.
Es un caso particular del apartado anterior.

Las propiedades de las medidas finitamente aditivas son parte de las que debe cumplir cualquier definición de “área” o “volumen” que sea acorde con el concepto intuitivo que queremos precisar. Una tercera es que sea invariante por isometrías, en particular por traslaciones. El teorema siguiente muestra que estas propiedades (junto con que tomamos la celda unitaria como unidad de medida) determinan completamente la medida de cualquier figura elemental:

Teorema 4.8 *Existe una única medida finitamente aditiva $m : \mathcal{E}^n \rightarrow [0, +\infty[$ que cumple las propiedades siguientes:*

- a) $m([0, 1]^n) = 1$,
- b) Si $a \in \mathbb{R}^n$ y $A \in \mathcal{E}^n$, entonces $m(a + A) = m(A)$.

DEMOSTRACIÓN: Veamos primero la unicidad. Para ello probaremos algunos hechos que debe cumplir una medida en las condiciones del enunciado:

- a) Si $C = \prod_{i=1}^n I_i$ cumple que algún $I_i = \{x\}$, entonces $m(C) = 0$.

En efecto, podemos tomar un intervalo $[a, b]$ tal que $C \subset [a, b]^n$ y $a < b$. Sea $e = (0, \dots, 1, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$, con el 1 en la posición i -ésima. Para cada $u \in [a, b]$ sea $C_u = (u - x)e + C$, es decir, la celda que coincide con C salvo que la componente i -ésima de sus puntos es u en lugar de x . Es claro que los conjuntos C_u son disjuntos dos a dos y, como son trasladados de C , todos tienen la misma medida. Supongamos que $m(C) = \epsilon > 0$. Entonces podemos tomar un $N > 0$ tal que $m([a, b]^n) < N\epsilon$, pero podemos tomar N puntos distintos u_1, \dots, u_N en $[a, b]$, con lo que

$$C^* = C_{u_1} \cup \dots \cup C_{u_N} \subset [a, b]^n$$

y $m(C^*) = m(C_{u_1}) + \dots + m(C_{u_N}) = N\epsilon > m([a, b]^n)$, contradicción.

b) $m(]0, 1[^n) = 1$.

En efecto, sea $C_{ij} = \{x \in [0, 1]^n \mid x_i = j\}$, que claramente es una celda de medida 0 (por el apartado anterior), y

$$[0, 1]^n =]0, 1[^n \cup \bigcup_{i=1}^n (C_{i0} \cup C_{i1}).$$

Como la unión de la derecha es nula y la primera unión es disjunta, vemos que $1 = m([0, 1]^n) = m(]0, 1[^n)$.

c) Si $C = \prod_{i=1}^n I_i$ es una celda y cada I_i es un intervalo de extremos 0 y 1, entonces $m(C) = 1$.

Basta tener en cuenta que $]0, 1[^n \subset C \subset [0, 1]^n$, y que ambas celdas tienen medida 1.

d) Si $C = \prod_{i=1}^n I_i$ es una celda y cada I_i es un intervalo de extremos a_i y $a_i + 1$, entonces $m(C) = 1$.

Porque C es un trasladado de una celda como la del apartado anterior.

e) Si $C = \prod_{i=1}^n I_i$ es una celda y cada I_i es un intervalo de extremos enteros, entonces $m(C) = |C|$.

Sea $k_i \in \mathbb{N}$ la diferencia entre los extremos de I_i . Es claro que cada intervalo I_i se descompone en unión disjunta de k_i intervalos disjuntos de longitud 1, luego C se descompone en $\prod_{i=1}^n k_i$ celdas disjuntas en las condiciones del apartado anterior, luego $m(C) = \prod_{i=1}^n k_i = |C|$.

f) Si $C = \prod_{i=1}^n I_i$ es una celda y cada I_i es un intervalo de extremos racionales, entonces $m(C) = |C|$.

En efecto, si los extremos de I_i son $a_i = a'_i/d$, $b_i = b'_i/d$, llamamos I'_i al intervalo $[a'_i, b'_i]$ o bien $]a'_i, b'_i]$, $[a'_i, b'_i[$, $]a'_i, b'_i[$ de modo que sea del mismo tipo que I_i . Entonces por el apartado anterior

$$m(C') = \prod_{i=1}^n (b'_i - a'_i) = d^n \prod_{i=1}^n (b_i - a_i) = d^n |C|.$$

Por otra parte, I'_i se descompone en unión de d intervalos disjuntos de longitud $b_i - a_i$, todos los cuales son trasladados de I_i , luego C' se descompone en d^n celdas disjuntas trasladadas de C , luego $m(C') = d^n m(C)$ y llegamos a la igualdad del enunciado.

g) Si $C = \prod_{i=1}^n I_i$ es una celda, entonces $m(C) = |C|$.

En efecto, si algún I_i es vacío o se reduce a un punto, ya sabemos que la medida es 0, luego se cumple la igualdad. En caso contrario, dado $\epsilon > 0$, usando que la función $\prod_{i=1}^n (y_i - x_i)$ es continua en \mathbb{R}^{2n} , es fácil construir celdas $C' \subset C \subset C''$ cuyos intervalos tengan extremos racionales y de modo que $|C| - |C'| < \epsilon$ y $|C''| - |C| < \epsilon$. Así, por el apartado anterior,

$$|C| - \epsilon < |C'| = m(C') \leq m(C) \leq m(C'') = |C''| < |C| + \epsilon,$$

luego $|m(C) - |C|| < \epsilon$ para todo $\epsilon > 0$, luego $m(C) = |C|$.

Ahora definimos $m : \mathcal{E}^n \rightarrow [0, +\infty[$ de modo que si A es una figura elemental que se expresa como unión de celdas disjuntas $A = \bigcup_{k=1}^m C_k$, entonces

$$m(A) = \sum_{k=1}^m |C_k|.$$

Tenemos que probar que $m(A)$ es independiente de la descomposición considerada. Admitiendo esto, es claro que m es una medida finitamente aditiva invariante por traslaciones, y por el apartado g) precedente m es la única medida que puede cumplir estas propiedades.

Empezamos observando que si I es un intervalo acotado de extremos $a \leq b$, entonces

$$b - a = \lim_m \frac{1}{m} |I \cap \frac{1}{m} \mathbb{Z}|.$$

En efecto, si m es suficientemente grande,

$$\begin{aligned} |I \cap \frac{1}{m} \mathbb{Z}| &= |\{z \in \mathbb{Z} \mid \frac{z}{m} \in I\}| \leq |\{z \in \mathbb{Z} \mid ma \leq z \leq mb\}| \\ &\leq |\{z \in \mathbb{Z} \mid E[ma] \leq z \leq E[mb] + 1\}| \leq mb + 1 - (ma - 1) + 1 \\ &= m(b - a) + 3. \end{aligned}$$

Igualmente

$$\begin{aligned} |I \cap \frac{1}{m} \mathbb{Z}| &= |\{z \in \mathbb{Z} \mid \frac{z}{m} \in I\}| \geq |\{z \in \mathbb{Z} \mid ma < z < mb\}| \\ &\geq |\{z \in \mathbb{Z} \mid E[ma] + 1 < z < E[mb]\}| \geq mb - 1 - (ma + 1) + 1 \\ &= m(b - a) - 1. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$b - a - \frac{1}{m} \leq \frac{1}{m} |I \cap \frac{1}{m} \mathbb{Z}| \leq b - a + \frac{3}{m},$$

y es claro que el límite es $b - a$.

En segundo lugar probamos que si $C = \prod_{i=1}^n I_i$ es una celda en \mathbb{R}^n , entonces

$$m(C) = \lim_m \frac{1}{m^n} |C \cap \frac{1}{m} \mathbb{Z}^n|.$$

En efecto,

$$|C \cap \frac{1}{m} \mathbb{Z}^n| = |\{x \in \mathbb{R}^n \mid x_i \in I_i \cap \frac{1}{m} \mathbb{Z}, i = 1, \dots, n\}| = \prod_{i=1}^n |I_i \cap \frac{1}{m} \mathbb{Z}|,$$

y por el apartado anterior el límite toma el valor indicado.

Como consecuencia inmediata, si $A \in \mathcal{E}^n$ se expresa como unión de celdas disjuntas $A = \bigcup_{k=1}^l C_k$, entonces

$$\sum_{k=1}^l m(C_k) = \lim_m \frac{1}{m^n} |A \cap \frac{1}{m} \mathbb{Z}^n|.$$

Como la expresión de la derecha no depende de la descomposición de A , concluimos que la definición de m es correcta. Equivalentemente, podríamos haber definido

$$m(A) = \lim_m \frac{1}{m^n} |A \cap \frac{1}{m} \mathbb{Z}^n|.$$

■

Así pues, la medida que hemos definido sobre las figuras elementales es la única definición de “medida” que cumple las propiedades que intuitivamente tiene que tener un área o un volumen. Sin embargo, las figuras elementales son una familia de figuras demasiado pobre. A continuación extendemos la medida a una familia mayor:

Definición 4.9 Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto acotado. Definimos la *medida exterior de Jordan* $J^*(A)$ y la *medida interior de Jordan* $J_*(A)$ como

$$J^*(A) = \inf\{m(B) \mid B \in \mathcal{E}^n, A \subset B\}, \quad J_*(A) = \sup\{m(B) \mid B \in \mathcal{E}^n, B \subset A\}.$$

Diremos que el conjunto A es *medible Jordan* si $J^*(A) = J_*(A)$, y en tal caso a este valor común lo llamaremos *medida de Jordan* de A , y lo representaremos por $m(A) = J^*(A) = J_*(A)$. Llamaremos \mathcal{J}^n al conjunto de todos los subconjuntos de \mathbb{R}^n medibles Jordan.

Notemos que todo conjunto acotado $A \subset \mathbb{R}^n$ cumple que $J_*(A) \leq J^*(A)$.

Más aún, si $B \subset A$ es una figura elemental, cualquier criterio que asigne a A una medida respetando los principios básicos que hemos convenido que debe cumplir la medida en el sentido geométrico intuitivo hará que $m(B) \leq m(A)$, y por definición de supremo será, de hecho, $J_*(A) \leq m(A)$. Igualmente, si $A \subset B$, tiene que cumplirse $m(A) \leq J^*(B)$, luego en general, las propiedades que intuitivamente debe cumplir la medida geométrica exigen que cualquier conjunto cumpla

$$J_*(A) \leq m(A) \leq J^*(A).$$

Por eso, si se da la igualdad $J_*(A) = J^*(A)$, podemos afirmar que dicho valor es la única asignación posible de una medida al conjunto A . Si se da la desigualdad $J_*(A) < J^*(A)$ nos quedamos con la duda de si podremos encontrar algún otro criterio más refinado que justifique una asignación de una medida a A que no pueda tacharse de arbitraria. Más adelante volveremos sobre ello.

El teorema siguiente nos proporciona una caracterización práctica de la medibilidad de Jordan:

Teorema 4.10 *Un subconjunto acotado $A \subset \mathbb{R}^n$ es medible Jordan si y sólo si para todo $\epsilon > 0$ existen figuras elementales A_0 y A_1 tales que $A_0 \subset A \subset A_1$ y $m(A_1 \setminus A_0) < \epsilon$.*

DEMOSTRACIÓN: Si A es medible Jordan, basta aplicar las definiciones de supremo e ínfimo para encontrar figuras elementales $A_0 \subset A \subset A_1$ tales que $m(A) - m(A_0) < \epsilon/2$, $m(A_1) - m(A) < \epsilon/2$, y entonces

$$\begin{aligned} m(A_1 \setminus A_0) &= m(A_1) - m(A_0) < m(A) + \epsilon/2 - m(A_0) \\ &< m(A_0) + \epsilon/2 + \epsilon/2 - m(A_0) = \epsilon. \end{aligned}$$

Recíprocamente, la hipótesis del teorema nos da que

$$0 \leq J^*(A) - J_*(A) \leq m(A_1) - m(A_0) = m(A_1 \setminus A_0) < \epsilon$$

para todo $\epsilon > 0$, luego $J^*(A) = J_*(A)$. ■

En ocasiones resulta útil la precisión siguiente:

Teorema 4.11 *Si $A \subset \mathbb{R}^n$ es medible Jordan y $\epsilon > 0$, existe una figura elemental compacta K y otra abierta U tales que $K \subset A \subset U$ tales que $K \subset A \subset U$ y $m(U \setminus K) < \epsilon$.*

DEMOSTRACIÓN: Tomamos $A_0 \subset A \subset A_1$ según el teorema anterior, de modo que $m(A_1 \setminus A_0) < \epsilon/3$. Pongamos que $A_0 = \bigcup_{k=1}^l C_k$, para ciertas celdas disjuntas C_k . Si eliminamos todas las de medida nula no alteramos la medida de A_0 , luego no perdemos generalidad si suponemos que todos los C_k tienen medida no nula. Por el teorema 4.2 podemos tomar celdas compactas $C'_k \subset C_k$ de modo que $|C_k| - |C'_k| < \epsilon/3l$.

Tomamos $K = \bigcup_{k=1}^l C'_k$, de modo que $K \subset A_0 \subset A$ y $m(A_0 \setminus K) < \epsilon/3$. Razonando igualmente con las celdas de A_1 , podemos formar una figura elemental abierta U tal que $A_1 \subset U$ y $m(U \setminus A_1) < \epsilon/3$. Así

$$\begin{aligned} m(U \setminus K) &= m(U) - m(K) = m(U) - m(A_1) + m(A_1) - m(A_0) + m(A_0) - m(K) \\ &= m(U \setminus A_1) + m(A_1 \setminus A_0) + m(A_0 \setminus K) < \epsilon. \end{aligned}$$

Pasamos a probar los hechos relevantes sobre la medida de Jordan:

Teorema 4.12 \mathcal{J}^n es un anillo en \mathbb{R}^n que contiene a \mathcal{E}^n y la medida de Jordan $m : \mathcal{J}^n \rightarrow [0, +\infty[$ es la única medida finitamente aditiva que extiende a la medida de figuras elementales.

DEMOSTRACIÓN: Sean A y B dos conjuntos medibles Jordan. Dado $\epsilon > 0$, sean $A_0 \subset A \subset A_1$, $B_0 \subset B \subset B_1$ figuras elementales tales que $m(A_1 \setminus A_0) < \epsilon/2$, $m(B_1 \setminus B_0) < \epsilon/2$. Entonces $C_0 = A_0 \cup B_0 \subset A \cup B \subset A_1 \cup B_1 = C_1$ y

$$m(C_1 \setminus C_0) \leq m((A_1 \setminus A_0) \cup (B_1 \setminus B_0)) \leq m(A_1 \setminus A_0) + m(B_1 \setminus B_0) < \epsilon.$$

Por lo tanto, $A \cup B$ es medible Jordan.

Similarmente, $C'_0 = A_0 \cap B_0 \subset A \cap B \subset A_1 \cap B_1 = C'_1$ y

$$m(C'_1 \setminus C'_0) \leq m((A_1 \setminus A_0) \cup (B_1 \setminus B_0)) < \epsilon.$$

Por último tomamos $C''_0 = A_0 \setminus B_1 \subset A \setminus B \subset A_1 \setminus B_0 = C''_1$ y también

$$m(C''_1 \setminus C''_0) \leq m((A_1 \setminus A_0) \cup (B_1 \setminus B_0)) < \epsilon.$$

Así, $A \setminus B$ es medible Jordan y queda probado que \mathcal{J}^n es un anillo de conjuntos.

Es inmediato que si A es una figura elemental $J_*(A) = J^*(A) = m(A)$, luego $A \in \mathcal{J}^n$ y la medida de Jordan extiende a la que ya teníamos definida sobre las figuras elementales. En particular la medida de la celda unitaria es 1.

Si $\mu : \mathcal{J}^n \rightarrow [0, +\infty[$ es cualquier medida finitamente aditiva que cumpla estas propiedades, entonces a partir de las definiciones de medida interior y exterior es trivial que $m(A) = J_*(A) \leq \mu(A) \leq J^*(A) = m(A)$, luego $\mu = m$. ■

Teorema 4.13 La medida de Jordan es también la única medida finitamente aditiva en \mathcal{J}^n invariante por traslaciones que cumple $m([0, 1]^n) = 1$.

DEMOSTRACIÓN: Dado $a \in \mathbb{R}^n$ y un $A \in \mathcal{J}^n$, es inmediato comprobar que $J_*(a + A) = J_*(A) = J^*(A) = J^*(a + A)$, luego $a + A \in \mathcal{J}^n$ y $m(a + A) = m(A)$.

Si una medida $\mu : \mathcal{J}^n \rightarrow [0, +\infty[$ cumple esto mismo, entonces su restricción a \mathcal{E}^n es una medida finitamente aditiva invariante por traslaciones, luego tiene que ser la medida de las figuras elementales, y por el teorema anterior $\mu = m$. ■

La familia de los conjuntos medibles Jordan es mucho más amplia que la de las figuras elementales. Lo deduciremos del teorema siguiente:

Teorema 4.14 Un conjunto acotado $A \subset \mathbb{R}^n$ es medible Jordan si y sólo si lo es su frontera y $m(\partial A) = 0$.

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que $m(\partial A) = 0$. Vamos a distinguir dos casos:

1) Si $J_*(A) = 0$, entonces $\overset{\circ}{A} = \emptyset$, pues si A contuviera un abierto, contendría una celda de medida no nula, y su medida interior no sería nula. Pero entonces $A \subset \partial A$, luego $J^*(A) \leq J^*(\partial A) = 0$, luego A es medible Jordan y $m(A) = 0$.

2) Si $J_*(A) > 0$ tomamos $\epsilon > 0$. Existe una figura elemental B tal que $\partial A \subset B$ y $m(B) < \epsilon$. Concretamente, $B = \bigcup_{k=1}^m C_k$, donde las celdas C_k son disjuntas dos a dos y $\sum_{k=1}^m m(C_k) < \epsilon$. Por el teorema 4.2, podemos agrandar ligeramente cada celda y suponer que los C_k son abiertos, aunque dejen de ser disjuntos, pero de modo que sigan cumpliendo que sus medidas sumen menos que ϵ .

Para cada $x \in \overset{\circ}{A}$ existe una celda abierta tal que $x \in C_x \subset \overset{\circ}{A}$. Por lo tanto,

$$\overline{A} \subset \bigcup_{k=1}^m C_k \cup \bigcup_{x \in \overset{\circ}{A}} C_x.$$

Como A es acotado, \overline{A} es compacto, luego existe un conjunto finito de puntos $x_1, \dots, x_l \in \overset{\circ}{A}$ de modo que

$$\overline{A} \subset \bigcup_{k=1}^m C_k \cup \bigcup_{j=1}^l C_{x_j}.$$

Sea $B = \bigcup_{j=1}^l C_{x_j} \subset A$. Entonces $J^*(A) \leq \sum_{k=1}^m m(C_k) + m(B) < \epsilon + J_*(A)$, para todo $\epsilon > 0$, luego $J^*(A) = J_*(A)$.

Ahora supongamos que A es medible Jordan pero que ∂A no tiene medida de Jordan nula. Eso es equivalente a que $J^*(A) > 0$, luego existe un $\epsilon > 0$ tal que toda figura elemental B que contenga a ∂A cumple $m(B) \geq \epsilon$. Como A es medible, tienen que existir figuras elementales $A_0 \subset A \subset A_1$ tales que $m(A_1 \setminus A_0) < \epsilon$. Expresemos $A_0 = \bigcup_{k=1}^m C_k$, $A_1 = \bigcup_{r=1}^l C'_r$ como uniones de celdas disjuntas, de modo que

$$\sum_{r=1}^l m(C'_r) < \sum_{k=1}^m m(C_k) + \epsilon.$$

Estas sumas no se alteran si cambiamos cada C'_r por su clausura y cada C_k por su interior (aunque los C'_r dejen de ser disjuntos). Así $A_0 \subset \overset{\circ}{A} \subset \overline{A} \subset A_1$, luego $\partial A = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A} \subset B = A_1 \setminus A_0$, con

$$m(B) = m(A_1) - m(A_0) \leq \sum_{r=1}^l m(C'_r) - \sum_{k=1}^m m(C_k) < \epsilon,$$

contradicción. ■

De aquí se sigue, en particular, que un conjunto A es medible Jordan si y sólo si lo es su clausura o su interior, y en tal caso los tres tienen la misma medida.

El teorema siguiente nos permitirá extraer muchas más consecuencias. Observemos que hasta ahora los únicos segmentos que sabemos que son medibles son los que son paralelos a algún eje de coordenadas:

Teorema 4.15 Si $n \geq 2$, todos los segmentos son medibles Jordan y tienen medida nula.

DEMOSTRACIÓN: El segmento de extremos a y b es el conjunto

$$S = \{(1 - \lambda)a + \lambda b \mid 0 \leq \lambda \leq 1\}.$$

Como la medida de Jordan es invariante por traslaciones, no perdemos generalidad si suponemos que $a = 0$. Sea

$$C_{m,j} = \prod_{i=1}^n \left[\frac{j-1}{m} b_i, \frac{j}{m} b_i \right], \quad j = 1, \dots, m,$$

donde hay que entender que si $b_i < 0$ entonces los extremos del intervalo van en el orden contrario. Es claro entonces que $m(C_{m,j}) = |b_1 \cdots b_n|/m^n$, luego la figura elemental

$$A_m = \bigcup_{j=1}^m C_{m,j}$$

cumple $m(A_m) \leq |b_1 \cdots b_n|/m^{n-1}$. Por otra parte es claro que $S \subset A$, pues dado $0 \leq \lambda \leq 1$, existe un j tal que $(j-1)/m \leq \lambda \leq j/m$, y entonces $\lambda b \in C_{m,j}$. Por consiguiente $J^*(S) \leq m(A_m) \leq |b_1 \cdots b_n|/m^{n-1}$ para todo natural m , luego $J^*(S) = 0$, y esto implica que S es medible Jordan y $m(S) = 0$. ■

Por consiguiente, en \mathbb{R}^2 , todas las figuras limitadas por segmentos son medibles Jordan. Otro resultado útil de medibilidad es el siguiente:

Teorema 4.16 Si $A \in \mathcal{J}^m$ y $B \in \mathcal{J}^n$, entonces $A \times B \in \mathcal{J}^{m+n}$ y se cumple que $m(A \times B) = m(A)m(B)$.

DEMOSTRACIÓN: El resultado es trivialmente cierto si A y B son celdas. Si $A = \bigcup_{k=1}^r C_k$, $B = \bigcup_{l=1}^s C'_l$ son uniones de celdas disjuntas, entonces

$$A \times B = \bigcup_{k=1}^r \bigcup_{l=1}^s (C_k \times C'_l)$$

es también una unión de celdas disjuntas, luego

$$m(A \times B) = \sum_{k=1}^r \sum_{l=1}^s m(C_k)m(C'_l) = m(A)m(B).$$

En el caso general tomamos figuras elementales $A_0 \subset A \subset A_1$, $B_0 \subset B \subset B_1$, de modo que $A_0 \times B_0 \subset A \times B \subset A_1 \times B_1$ y

$$\begin{aligned} m((A_1 \times B_1) \setminus (A_0 \times B_0)) &= m(A_1)m(B_1) - m(A_0)m(B_0) \\ &= m(A_1)m(B_1) - m(A_1)m(B_0) + m(A_1)m(B_0) - m(A_0)m(B_0) \\ &= m(A_1)(m(B_1) - m(B_0)) + (m(A_1) - m(A_0))m(B_0). \end{aligned}$$

Por lo tanto, dado $\epsilon > 0$, si exigimos que

$$m(A_1 \setminus A_0) < \frac{\epsilon}{2m(B)}, \quad m(A_1) < m(A) + 1, \quad m(B_1 \setminus B_0) < \frac{\epsilon}{2(m(A) + 1)},$$

concluimos que $m((A_1 \times B_1) \setminus (A_0 \times B_0)) < \epsilon$, luego $A \times B$ es medible Jordan y

$$m(A_0)m(B_0) \leq m(A \times B) \leq m(A_1)m(B_1),$$

y también $m(A_0)m(B_0) \leq m(A)m(B) \leq m(A_1)m(B_1)$, luego

$$|m(A \times B) - m(A)m(B)| \leq m(A_1)m(B_1) - m(A_0)m(B_0) < \epsilon,$$

luego $m(A \times B) = m(A)m(B)$. ■

En la introducción a este capítulo hemos observado que una definición de medida que se ajuste al concepto intuitivo de área o de volumen debe ser invariante por isometrías, pero hasta ahora sólo hemos considerado la invarianza por traslaciones. Teniendo en cuenta que la isometrías tienen determinante ± 1 , el teorema siguiente muestra que en realidad la medida de Jordan es invariante por isometrías:

Teorema 4.17 *Si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una aplicación lineal y $A \in \mathcal{J}^n$, entonces $f[A] \in \mathcal{J}^n$ y $m(f[A]) = |\det f| m(A)$.*

DEMOSTRACIÓN: Consideramos primero el caso en que f es biyectiva, con lo que $\det f \neq 0$. Aplicamos el teorema [Al 6.23], según el cual basta probar el teorema cuando f es una de las aplicaciones siguientes:

- a) La aplicación dada por $f(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n)$, donde x_j aparece en el lugar i -ésimo y viceversa.
- b) La aplicación $f(x_1, \dots, x_n) = (x_1, x_1 + x_2, x_3, \dots, x_n)$.
- c) La aplicación $f(x_1, \dots, x_n) = (ax_1, x_2, \dots, x_n)$, con $a \neq 0$.

En el caso a), el determinante es -1 . Es claro que f transforma celdas en celdas de la misma medida, luego figuras elementales en figuras elementales de la misma medida, de donde se sigue fácilmente que si $A \in \mathcal{J}^n$ entonces $f[A] \in \mathcal{J}^n$ y $m(f[A]) = m(A)$.

El caso c) es similar. Sigue siendo cierto que f transforma celdas en celdas, pero ahora $m(f[C]) = |a|m(C)$, de donde se sigue que lo mismo vale para figuras elementales y para conjuntos medibles Jordan cualesquiera, y eso es lo que había que probar, pues $\det f = a$.

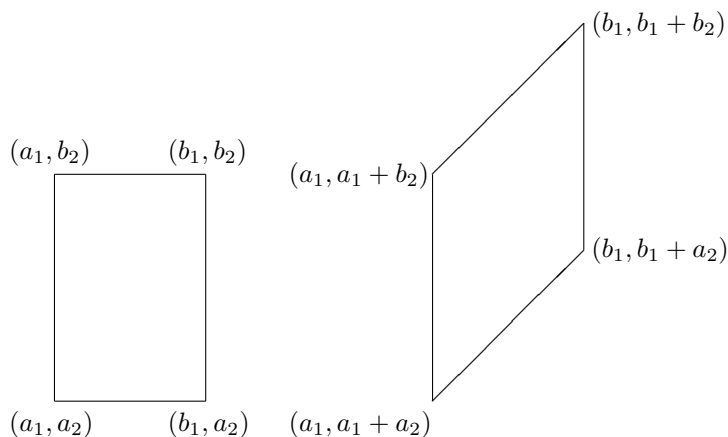
El caso b) es el más delicado, porque f ya no transforma celdas en celdas. En primer lugar veamos que podemos suponer $n = 2$. En efecto, sea $f' : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la aplicación dada por $f'(x_1, x_2) = (x_1, x_1 + x_2)$ y supongamos que el teorema es cierto para f' . Toda celda en \mathbb{R}^n (con $n > 2$) es de la forma $C_1 \times C_2$, donde

C_1 es una celda en \mathbb{R}^2 y C_2 es una celda en \mathbb{R}^{n-2} , y $f[C_1 \times C_2] = f'[C_1] \times C_2$, que es medible Jordan por el teorema anterior y

$$m(f[C_1 \times C_2]) = m(f'[C_1])m(C_2) = m(C_1)m(C_2) = m(C_1 \times C_2).$$

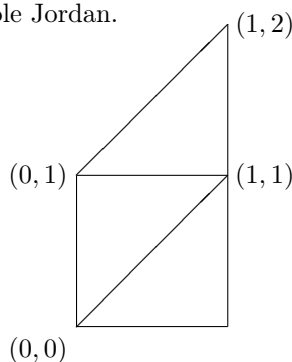
En definitiva, si C es cualquier celda, se cumple que $f[C] \in \mathcal{J}^n$ y además $m(f[C]) = m(C)$. De aquí se sigue inmediatamente que lo mismo vale para figuras elementales y a su vez para conjuntos medibles Jordan arbitrarios.

Así pues, suponemos que $n = 2$ y vamos a probar que las imágenes de las celdas son medibles Jordan con la misma medida. Partimos de una celda $C = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$. Una comprobación rutinaria muestra que $f[C]$ es el paralelogramo de vértices $(a_1, a_1 + a_2), (b_1, b_1 + a_2), (b_1, b_1 + b_2), (a_1, a_1 + b_2)$.



Podemos afirmar que $f[C]$ es medible Jordan porque su frontera está formada por segmentos, luego es nula. De aquí se sigue, como en los casos anteriores, que la imagen de cualquier figura elemental es medible Jordan, y a su vez que la imagen de todo conjunto medible Jordan es medible Jordan.

Ahora consideramos concretamente el caso del cuadrado unitario $C = [0, 1]^2$, cuya imagen es el paralelogramo que muestra la figura. Vemos que podemos descomponerlo en unión de dos triángulos, y que el triángulo superior puede trasladarse para formar de nuevo el cuadrado unitario. Por consiguiente, $m(f[C]) = 1$.



Ahora, la función $\mu : \mathcal{J}^2 \rightarrow [0, +\infty[$ dada por $\mu(A) = m(f[A])$ es una medida finitamente aditiva, y es invariante por traslaciones, ya que $\mu(a + A) = m(f(a) + f[A]) = m(f[A]) = \mu(A)$.

Como además $\mu([0, 1]^2) = 1$, concluimos que $\mu = m$, luego $m(f[A]) = m(A)$ para todo conjunto medible Jordan.

Falta considerar el caso en que $\det f = 0$, y entonces hay que probar que todo conjunto medible Jordan cumple $m(f[A]) = 0$. Para ello nos basamos en que $f[\mathbb{R}^n] \subset H$, para cierto hiperplano H , y existe una aplicación lineal biyectiva $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $g[H]$ es el hiperplano de ecuación $x_1 = 0$. Así, $g[f[A]]$ es un subconjunto acotado de este hiperplano, luego está contenido en una celda de la forma $C = \{x_0\} \times C'$, luego $J^*(g[f[A]]) \leq J^*(C) = m(C) = 0$, luego $g[f[A]]$ es medible y tiene medida nula. Por la parte ya probada, aplicada a g^{-1} , concluimos que $f[A]$ es medible con medida nula. ■

Combinando el teorema anterior con la invarianza por traslaciones de la medida de Jordan, concluimos que ésta es invariante por isometrías afines (no necesariamente lineales) y, más en general, que el teorema anterior vale para biyecciones afines cualesquiera.

Otro caso interesante es el efecto de las homotecias. Como la homotecia de razón r tiene determinante r^n , se cumple la relación

$$m(rA) = |r|^n m(A).$$

Por el mismo argumento empleado en la parte final de la prueba del teorema anterior, toda figura acotada en \mathbb{R}^3 limitada por un número finito de caras planas es medible Jordan.

A partir de aquí es posible calcular el área de muchas figuras planas (triángulos, paralelogramos, polígonos, etc.) mediante argumentos sintéticos.

La familia de los conjuntos medibles Jordan es suficientemente amplia para trabajar en el contexto de la geometría sintética, pero no lo suficiente para trabajar con técnicas analíticas y topológicas. Por ejemplo, puede probarse que existen subconjuntos abiertos acotados en \mathbb{R}^n y, por consiguiente, también subconjuntos cerrados acotados, que no son medibles Jordan. Esto hace que al trabajar con funciones continuas arbitrarias sea fácil encontrarse con conjuntos cuya medibilidad no podamos asegurar.

Consideremos por ejemplo el conjunto $A = [0, 1]^2 \cap \mathbb{Q}^2$, es decir, el conjunto de puntos del cuadrado unitario con coordenadas racionales. Es fácil ver que $\overset{\circ}{A} = \emptyset$ y $\overline{A} = [0, 1]^2$, lo cual implica que A no es medible Jordan, ya que hemos visto que el interior y la clausura de un conjunto medible tienen la misma medida. No es difícil ver que $J_*(A) = 0$ y $J^*(A) = 1$. Así pues, A no tiene un área asignada en el sentido de la medida de Jordan, pero podemos preguntarnos si existe algún criterio adicional por el que asignarle un área. Los criterios que hemos empleado hasta ahora sólo exigen que si asignamos un área a A , ésta sea un número entre 0 y 1.

Conviene destacar que la pregunta ahora no es cuál es el área de A , sino más bien, qué área conviene que tenga. El área de un triángulo no es una cuestión de conveniencia: si le asignamos a un triángulo un área distinta de su base por su altura dividida entre 2, podemos afirmar que estamos considerando una noción de área distinta de la intuitiva, pues la tela necesaria para construir alfombras triangulares es la que es, y no la que nosotros queramos que sea. En cambio, no hay ninguna razón concluyente por la que pudiéramos decir que sería

“antiintuitivo” asignarle a A , por ejemplo, un área 0 (como a su interior) o un área 1 (como a su clausura), sino que el problema es qué criterios dan lugar a una asignación coherente de áreas y, si es que hay varios posibles, cuál es más conveniente en la práctica. Desde un punto de vista intuitivo, no hay nada que decir, pues no se pueden hacer alfombras de tela con forma de conjunto A . En este punto es relevante el teorema siguiente:

Teorema 4.18 *Sea $\{A_k\}_{k=0}^{\infty}$ una sucesión de conjuntos medibles Jordan en \mathbb{R}^n disjuntos dos a dos y supongamos que $A = \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k$ es también medible Jordan. Entonces $m(A) = \sum_{k=0}^{\infty} m(A_k)$.*

DEMOSTRACIÓN: Por una parte,

$$\sum_{k=1}^m m(A_k) = m\left(\bigcup_{k=1}^l A_k\right) \leq m(A),$$

de modo que la serie es una sucesión monótona creciente acotada superiormente, luego converge y

$$\sum_{k=1}^{\infty} m(A_k) \leq m(A).$$

Sea $\epsilon > 0$. Por el teorema 4.11 podemos tomar una figura elemental $K \subset A$ compacta tal que $m(A \setminus K) < \epsilon/2$. Similarmente, para cada k existe una figura elemental abierta U_k tal que $A_k \subset U_k$ y $m(U_k \setminus A_k) < \epsilon/2^{k+2}$. Así $K \subset \bigcup_{k=0}^{\infty} U_k$,

luego por compacidad existe un l tal que $K \subset \bigcup_{k=0}^l U_k$. Por consiguiente

$$\begin{aligned} m(A) &= m(A \setminus K) + m(K) \leq \frac{\epsilon}{2} + \sum_{k=0}^l m(U_k) \leq \frac{\epsilon}{2} + \sum_{k=0}^l m(A_k) + \sum_{k=0}^l \frac{\epsilon}{2^{k+2}} \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} m(A_k) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^{k+2}} = \sum_{k=0}^{\infty} m(A_k) + \epsilon. \end{aligned}$$

Como esto vale para todo $\epsilon > 0$, se da la igualdad del enunciado. ■

Así pues, siempre que una unión disjunta de conjuntos medibles es medible, podemos afirmar que la medida es la suma infinita de las medidas de las partes, y esto nos plantea la posibilidad de tomar dicha suma de medidas como definición de medida cuando la unión no sea medible Jordan. Admitiendo que esto lleve a un concepto coherente de medida, vemos que, con este criterio, todo conjunto numerable tendrá medida 0, pues será unión numerable de conjuntos con un solo punto, que tienen medida 0. En particular esto resuelve que el conjunto $A = [0, 1]^2 \cap \mathbb{Q}^2$ tiene medida 0, pues es numerable.

En las secciones siguientes veremos que, en efecto, incorporando el criterio de que las uniones disjuntas numerables de conjuntos medibles son medibles y su medida es la suma infinita de las medidas, llegamos a una extensión de la medida de Jordan respecto a la cual todos los conjuntos abiertos y todos los cerrados son medibles.

4.2 Medidas

Empecemos dando nombre a la situación dada por el último teorema de la sección anterior:

Definición 4.19 Una *medida* en un anillo \mathcal{A} sobre un conjunto X es una aplicación $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty]$ que cumple $\mu(\emptyset) = 0$ y, para toda familia $\{A_k\}_{k=0}^{\infty}$ de elementos de \mathcal{A} disjuntos dos a dos tal que $\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}$, se cumple que

$$\mu\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu(A_k),$$

donde hay que entender que la suma toma el valor $+\infty$ si alguno de los términos $\mu(A_k)$ toma el valor $+\infty$ o, en caso contrario, si la sucesión de sumas parciales tiende a $+\infty$.

Observemos que toda medida es en particular una medida finitamente aditiva,² pues si tenemos dos conjuntos disjuntos A_0 y A_1 en \mathcal{A} , podemos aplicar la definición anterior a la sucesión que resulta de tomar $A_k = \emptyset$ para $k \geq 2$.

En estos términos tenemos que la medida de Jordan es una medida en \mathcal{J}^n , y también que la medida de figuras elementales es una medida en \mathcal{E}^n .

Observemos que hemos admitido la posibilidad de que la medida de un conjunto sea $+\infty$. La idea es que queremos extender la medida de Jordan de modo que todos los abiertos y todos los cerrados de \mathbb{R}^n sean medibles, lo cual exige en particular asignarle una medida, por ejemplo, a \mathbb{R}^n , y ésta no puede ser sino $m(\mathbb{R}^n) = +\infty$.

El teorema siguiente recoge las propiedades elementales de las medidas. Las demostraciones no ofrecen dificultad. Adoptamos el convenio de que si $a \in \mathbb{R}$ entonces $a + \infty = +\infty + \infty = +\infty$. Cuando hablamos de conjuntos *medibles* nos referimos a conjuntos del anillo en el que está definida una medida dada.

Teorema 4.20 μ una medida en un anillo \mathcal{A} sobre un conjunto X .

- Si $A \subset B$ son medibles entonces $\mu(A) \leq \mu(B)$.
- Si $A \subset B$ son medibles y $\mu(A) < +\infty$, entonces $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$.
- Si A y B son conjuntos medibles disjuntos $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$.
- Si A y B son medibles entonces $\mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B)$.
- Si $\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$ son medibles y $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$ también lo es, entonces

$$\mu\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n).$$

²Hubiera sido más natural llamar “medidas” a las medidas simplemente aditivas y “medidas numerablemente aditivas” a lo que hemos llamado “medidas”, pues así tanto unas como otras serían medidas. Sin embargo, como en lo sucesivo vamos a trabajar únicamente con medidas numerablemente aditivas, es preferible reservar para ellas el término “medida”.

f) Si $\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$ y $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$ son medibles y cada $A_n \subset A_{n+1}$, entonces

$$\mu\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right) = \sup_n \mu(A_n).$$

g) Si $\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$ y $\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n$ son medibles, cada $A_{n+1} \subset A_n$ y $\mu(A_0) < +\infty$, entonces

$$\mu\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n\right) = \inf_n \mu(A_n).$$

DEMOSTRACIÓN: Las primeras propiedades se demuestran igual que para medidas finitamente aditivas sobre anillos (el hecho de que las medidas puedan tomar el valor infinito no afecta a dichos argumentos).

e) Definimos $B_n = A_n \setminus \bigcup_{i=0}^{n-1} A_i$ (entendiendo que $B_0 = A_0$), de modo que $B_n \in \mathcal{A}$, $\bigcup_{n=0}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ y los conjuntos B_n son disjuntos dos a dos. Por consiguiente,

$$\mu\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(B_n) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n).$$

f) En este caso basta definir $B_n = A_n \setminus A_{n-1}$, con lo que

$$\begin{aligned} \mu\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right) &= \mu\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(B_n) = \mu(A_0) + \lim_k \sum_{n=1}^k (\mu(A_n) - \mu(A_{n-1})) \\ &= \lim_k \mu(A_k) = \sup_k \mu(A_k), \end{aligned}$$

donde la última igualdad se debe a que la sucesión $\mu(A_k)$ es monótona creciente.

g) Aplicamos la propiedad anterior a los conjuntos $B_n = A_0 \setminus A_n$. Así $\bigcup_{n=0}^{\infty} B_n = A_0 \setminus \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$, luego

$$\mu(A_0) \setminus \mu\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} B_n\right) = \sup_n \mu(B_n) = \mu(A_0) - \inf_n \mu(A_n),$$

de donde se sigue la conclusión. \blacksquare

Nuestro propósito es demostrar que toda medida en un anillo se puede extender a una medida en un conjunto mayor que vuelva redundantes las condiciones sobre la medibilidad de las uniones e intersecciones numerables. Esto nos lleva a introducir los conceptos siguientes:

Definición 4.21 Un σ -anillo sobre un conjunto X es un anillo \mathcal{A} sobre X con la propiedad adicional de que si $\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una familia de elementos de \mathcal{A} , entonces $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

Observemos que esto implica que $\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$, pues

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n = A_0 \setminus \bigcup_{n=0}^{\infty} (A_0 \setminus A_n).$$

Un *álgebra* de subconjuntos de X es una familia \mathcal{A} de subconjuntos de X tal que:

- a) $\emptyset, X \in \mathcal{A}$.
- b) Si $A \in \mathcal{A}$, entonces $X \setminus A \in \mathcal{A}$.
- c) Si $A, B \in \mathcal{A}$, entonces $A \cup B, A \cap B \in \mathcal{A}$.

La propiedad b) hace que la propiedad c) para uniones implique la parte para intersecciones y viceversa. Es claro que toda álgebra de conjuntos es en particular un anillo, y un anillo \mathcal{A} de subconjuntos de X es un álgebra si y sólo si $X \in \mathcal{A}$.

Una σ -*álgebra* de subconjuntos de X es un álgebra \mathcal{A} en la que la condición c) se sustituye por la condición (más fuerte) de que la unión de toda familia numerable de elementos de \mathcal{A} está en \mathcal{A} (y, por consiguiente, lo mismo vale para las intersecciones numerables de elementos de \mathcal{A}). Equivalentemente, una σ -álgebra es un álgebra que además es un σ -anillo.

De este modo, el concepto de σ -álgebra “captura” dos de nuestras aspiraciones: extender una medida dada en un anillo de subconjuntos de un conjunto X a otra para la cual 1) las uniones e intersecciones numerables de conjuntos medibles sean medibles y 2) el propio conjunto X sea medible (aunque tal vez deba tener medida infinita).

Un *espacio medida* es una terna (X, \mathcal{A}, μ) , donde X es un conjunto, \mathcal{A} es una σ -álgebra de subconjuntos de X y μ es una medida en \mathcal{A} . Como es habitual en estos casos, en la práctica escribiremos X en lugar de (X, \mathcal{A}, μ) . A los elementos de \mathcal{A} los llamaremos *subconjuntos medibles* de X .

A medio plazo trabajaremos únicamente con espacios medida, pero de momento tenemos que trabajar con medidas sobre anillos arbitrarios para obtener resultados sobre existencia de medidas en determinadas σ -álgebras, pues las obtendremos extendiendo medidas definidas en anillos, como es el caso de la medida de Jordan.

Una medida que sólo tome valores finitos (y no sea idénticamente nula) es una *medida finita*. Si está definida sobre un álgebra de subconjuntos de X , esto equivale a que $0 < \mu(X) < +\infty$.

Diremos que una medida μ es *unitaria* si $\mu(X) = 1$. Diremos que μ es σ -*finita* si $\mu(X) > 0$ y existen conjuntos medibles $\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$ de medida finita tales que

$$X = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n.$$

Éste es el caso del área en el plano o el volumen en el espacio. El área del plano es infinita, pero podemos descomponerlo en una unión numerable de bolas de área finita. También se habla de *espacios medida unitarios, finitos* o σ -*finitos* según sea la medida definida en ellos.

Los conjuntos de medida 0 se llaman también *conjuntos nulos*. Una medida es *completa* si todo subconjunto de un conjunto nulo es medible (y, por consiguiente, nulo). Es claro que la medida de Jordan es completa.

Antes de ocuparnos del problema de la extensión de una medida dada tenemos que estudiar la existencia de σ -álgebras de subconjuntos de un conjunto dado.

Trivialmente, el conjunto $\mathcal{P}X$ de todos los subconjuntos de X es una σ -álgebra de subconjuntos de X , pero en general es demasiado grande para que estemos en condiciones de definir medidas de interés en $\mathcal{P}X$.

Ahora bien, es inmediato comprobar que la intersección de cualquier familia de σ -anillos (o de σ -álgebras) de subconjuntos de un conjunto X cumple también la definición de σ -anillo (o de σ -álgebra). Por consiguiente, si $G \subset \mathcal{P}X$ es una familia de subconjuntos de X , podemos definir el σ -anillo (o la σ -álgebra) generada por G como la intersección de todos los σ -anillos (resp. σ -álgebras) de subconjuntos de X que contienen a G .

Observemos que si \mathcal{A} es un anillo sobre un conjunto X y se cumple que X es unión numerable de elementos de \mathcal{A} , entonces el σ -anillo generado por \mathcal{A} es de hecho una σ -álgebra, pues contiene a X , luego coincide con la σ -álgebra generada por \mathcal{A} .

El σ -anillo generado por un anillo tiene una descripción más simple que la que proporciona la definición y que es interesante conocer. Para ello tenemos que introducir una última estructura de familias de subconjuntos:

Una *clase monótona* \mathcal{M} en un conjunto X es una colección de subconjuntos de X tal que si $\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una familia creciente de conjuntos de \mathcal{M} (es decir, $A_n \subset A_{n+1}$) entonces $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}$ y si la familia es decreciente ($A_{n+1} \subset A_n$) entonces $\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}$.

Es claro que la intersección de clases monótonas es de nuevo una clase monótona, por lo que podemos hablar también de la clase monótona generada por un conjunto, es decir, la menor clase monótona que lo contiene. El resultado fundamental sobre clases monótonas es el siguiente:

Teorema 4.22 *Si \mathcal{A} es un anillo de subconjuntos de un conjunto X , entonces la clase monótona generada por \mathcal{A} coincide con el σ -anillo generado por \mathcal{A} .*

DEMOSTRACIÓN: Sea \mathcal{M} la clase monótona generada por \mathcal{A} y sea \mathcal{S} el σ -anillo generado por \mathcal{A} . Como \mathcal{S} es trivialmente una clase monótona que contiene a \mathcal{A} , tiene que ser $\mathcal{M} \subset \mathcal{S}$, y si probamos que \mathcal{M} es un σ -anillo, entonces tendremos también que $\mathcal{S} \subset \mathcal{M}$.

Para cada $A \subset X$, definimos \mathcal{M}_A como el conjunto de todos los $B \subset X$ tales que $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \cup B \in \mathcal{M}$. Trivialmente

$$B \in \mathcal{M}_A \quad \text{si y sólo si} \quad A \in \mathcal{M}_B.$$

Veamos que \mathcal{M}_A es una clase monótona. Si $\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión creciente en \mathcal{M}_A , entonces

$$A \setminus \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=0}^{\infty} (A \setminus A_n) \in \mathcal{M},$$

porque cada $A \setminus A_n \in \mathcal{M}$ y forma una sucesión decreciente. Igualmente

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \setminus A = \bigcup_{n=0}^{\infty} (A_n \setminus A) \in \mathcal{M},$$

porque cada $A_n \setminus A \in \mathcal{M}$ y forman una sucesión creciente. Por último

$$A \cup \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=0}^{\infty} (A \cup A_n) \in \mathcal{M},$$

porque $A \cup A_n \in \mathcal{M}$ y forman una sucesión creciente.

Esto prueba que $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}_A$. Igualmente se prueba que si la familia es decreciente su intersección está en \mathcal{M}_A .

Ahora, fijado $A \in \mathcal{A}$, observamos que, para todo $B \in \mathcal{A}$, se cumple que $B \in \mathcal{M}_A$, luego $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}_A$, y como \mathcal{M}_A es una clase monótona que contiene a \mathcal{A} , tiene que ser $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}_A$.

Por consiguiente, fijado $B \in \mathcal{M}$, para todo $A \in \mathcal{A}$ tenemos que $B \in \mathcal{M}_A$, luego $A \in \mathcal{M}_B$, luego $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}_B$ y así \mathcal{M}_B es una clase monótona que contiene a \mathcal{A} , luego $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}_B$.

Así pues, si $A, B \in \mathcal{M}$, como $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}_B$, se cumple $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \cup B \in \mathcal{M}$, lo cual implica que \mathcal{M} es un anillo, y al ser un anillo y una clase monótona, es de hecho un σ -anillo, pues si $\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una familia de elementos de \mathcal{M} , llamamos $B_n = \bigcup_{i=0}^n A_i \in \mathcal{M}$ (porque \mathcal{M} es un anillo) y entonces

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=0}^{\infty} B_n \in \mathcal{M},$$

porque es una clase monótona. ■

El primer paso para extender una medida en un anillo al σ -anillo que genera es definir a partir de ella una medida exterior en el sentido siguiente:

Definición 4.23 Una aplicación $\mu^* : \mathcal{P}X \rightarrow [0, +\infty]$ es una *medida exterior* en X si cumple las propiedades siguientes:

- a) $\mu^*(\emptyset) = 0$.
- b) Si $A \subset B \subset X$, entonces $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$.

c) Si $\{A_k\}_{k=0}^{\infty}$ es una sucesión de subconjuntos de X , entonces

$$\mu^* \left(\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k \right) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \mu^*(A_k).$$

Teorema 4.24 Si $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty[$ es una medida en un anillo \mathcal{A} de subconjuntos de X , entonces la aplicación $\mu^* : \mathcal{P}X \rightarrow [0, +\infty]$ dada por

$$\mu^*(A) = \inf \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \mu(A_k) \mid A_k \in \mathcal{A}, A \subset \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k \right\}$$

(con el convenio de que $\inf \emptyset = +\infty$) es una medida exterior en X .

DEMOSTRACIÓN: Claramente $\mu^*(\emptyset) = 0$ y si $A \subset B \subset X$ se cumple que $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$.

Sea $\{A_k\}_{k=0}^{\infty}$ una sucesión de subconjuntos de X tal que $\mu^*(A_k) < +\infty$ para todo k . Dado $\epsilon > 0$ podemos tomar una sucesión $\{A_m^k\}_{m=0}^{\infty}$ en \mathcal{A} tal que $A_k \subset \bigcup_{m=0}^{\infty} A_m^k$ y

$$\sum_{m=0}^{\infty} \mu(A_m^k) < \mu^*(A_k) + \frac{\epsilon}{2^k}.$$

Al unir estas sucesiones para todo k obtenemos un cubrimiento de $\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k$ del que deducimos que

$$\mu^* \left(\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k \right) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \mu^*(A_k) + \epsilon,$$

para todo $\epsilon > 0$, luego se cumple la desigualdad sin ϵ y μ^* es una medida exterior. (Para sucesiones con algún k tal que $\mu^*(A_k) = +\infty$ la desigualdad es trivial.)

Si $A \in \mathcal{A}$, como $A \subset A$, tenemos que $\mu^*(A) \leq \mu(A)$.

Si $A \subset \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k$, con $A_k \in \mathcal{A}$, definimos

$$B_k = (A_k \cap A) \setminus \bigcup_{i < k} (A_i \cap A) \in \mathcal{A}.$$

Claramente, los B_k son disjuntos dos a dos y $A = \bigcup_{k=0}^{\infty} B_k$. Como μ es una medida,

$$\mu(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu(B_k) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \mu(A_k)$$

y, como esto vale para todo cubrimiento de A , tenemos que $\mu(A) \leq \mu^*(A)$, luego μ^* extiende a μ . ■

La medida exterior está definida en todos los subconjuntos de X , pero para garantizar que cumpla las propiedades de una medida tenemos que restringirla a una familia menor:

Definición 4.25 Si μ^* es una medida exterior en un conjunto X , llamaremos *conjuntos μ^* -medibles* a los conjuntos $A \subset X$ tales que, para todo $B \subset X$, se cumple que $\mu^*(B) = \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \setminus A)$.

Notemos que siempre se cumple que

$$\mu^*(B) = \mu^*((B \cap A) \cup (B \setminus A)) \leq \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \setminus A).$$

La medibilidad equivale a la desigualdad opuesta.

Teorema 4.26 Si μ^* es una medida exterior en un conjunto X , el conjunto \mathcal{M} de todos los subconjuntos de X que son μ^* -medibles es una σ -álgebra, y la restricción μ de μ^* a \mathcal{M} es una medida completa.

DEMOSTRACIÓN: Trivialmente $\emptyset, X \in \mathcal{M}$. También es claro que si $A \in \mathcal{M}$ entonces $X \setminus A \in \mathcal{M}$. Sean $A, B \in \mathcal{M}$ y $C \subset X$ arbitrario. Entonces

$$\mu^*(C) = \mu^*(C \cap A) + \mu^*(C \setminus A), \quad \mu^*(C \setminus A) = \mu^*((C \setminus A) \cap B) + \mu^*(C \setminus (A \cup B)),$$

luego

$$\begin{aligned} \mu^*(C) &= \mu^*(C \cap A) + \mu^*((C \setminus A) \cap B) + \mu^*(C \setminus (A \cup B)) \\ &\geq \mu^*(C \cap (A \cup B)) + \mu^*(C \setminus (A \cup B)), \end{aligned}$$

donde hemos usado que $C \cap (A \cup B) = (C \cap A) \cup ((C \setminus A) \cap B)$. Esto prueba que $A \cup B \in \mathcal{M}$. Hasta aquí tenemos probado que \mathcal{M} es un álgebra de conjuntos.

Spongamos ahora que $\{A_k\}_{k=0}^{\infty}$ es una familia de conjuntos μ^* -medibles disjuntos dos a dos y $S_m = \bigcup_{k=0}^m A_k$. Entonces, para todo $A \subset X$, se cumple que

$$\mu^*(A \cap S_m) = \sum_{k=0}^m \mu^*(A \cap A_k).$$

En efecto, lo probamos por inducción sobre m . Para $m = 0$ es trivial. Sabemos que $S_{m+1} \in \mathcal{M}$, luego

$$\begin{aligned} \mu^*(A \cap S_{m+1}) &= \mu^*(A \cap S_{m+1} \cap S_m) + \mu^*((A \cap S_{m+1}) \setminus S_m) \\ &= \mu^*(A \cap S_m) + \mu^*(A \cap A_{m+1}) = \sum_{k=0}^m \mu^*(A \cap A_k) + \mu^*(A \cap A_{m+1}) \\ &= \sum_{k=0}^{m+1} \mu^*(A \cap A_k). \end{aligned}$$

De aquí deducimos a su vez que

$$\mu^*(A \cap \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^*(A \cap A_k).$$

En efecto, llamando $S = \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k$, como $S_m \subset S$,

$$\mu^*(A \cap S) \geq \mu^*(A \cap S_m) = \sum_{k=0}^m \mu^*(A \cap A_k),$$

luego la serie converge y $\mu^*(A \cap S) \geq \sum_{k=0}^{\infty} \mu^*(A \cap A_k)$. La desigualdad opuesta se da por definición de medida exterior.

A su vez de aquí obtenemos que $\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k \in \mathcal{M}$. En efecto, si $A \subset X$ es arbitrario,

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap S_m) + \mu^*(A \setminus S_m) \geq \sum_{k=0}^m \mu^*(A \cap A_k) + \mu^*(A \setminus S).$$

Como esto vale para todo m ,

$$\mu^*(A) \geq \sum_{k=0}^{\infty} \mu^*(A \cap A_k) + \mu^*(A \setminus S) = \mu^*(A \cap S) + \mu^*(A \setminus S).$$

No hemos probado todavía que \mathcal{M} es una σ -álgebra porque estamos suponiendo que los A_k son disjuntos dos a dos, pero, si no lo son, definimos $B_k = A_k \setminus \bigcup_{i=0}^{k-1} A_i \in \mathcal{M}$ y, por el caso ya probado para conjuntos disjuntos, tenemos que

$$\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k = \bigcup_{k=0}^{\infty} B_k \in \mathcal{M}.$$

Haciendo $A = X$ en la igualdad

$$\mu^*(A \cap \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^*(A \cap A_k)$$

ya demostrada, concluimos que μ^* se restringe a una medida μ en \mathcal{M} .

Que μ sea completa significa que si $A \in \mathcal{M}$, $B \subset A$ y $\mu(A) = 0$, entonces $B \in \mathcal{M}$. En efecto, tenemos que $\mu^*(B) = 0$, y entonces es μ^* -medible, pues, para todo $C \subset X$, tenemos que $\mu^*(C \cap B) + \mu^*(C \setminus B) \leq \mu^*(B) + \mu^*(C) = \mu^*(C)$. ■

Combinando los dos últimos teoremas obtenemos:

Teorema 4.27 (Caratheodory) *Toda medida $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty[$ en un anillo \mathcal{A} de subconjuntos de X se extiende a una medida completa $\bar{\mu} : \mathcal{M} \rightarrow [0, +\infty[$ definida sobre cierta σ -álgebra \mathcal{M} en X que contiene a \mathcal{A} .*

DEMOSTRACIÓN: Consideramos la medida exterior μ^* dada por 4.24, que extiende a μ y sea \mathcal{M} su σ -álgebra de conjuntos medibles. Sólo hemos de probar

que $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$. Para ello tomamos $A \in \mathcal{A}$ y $B \subset X$ arbitrario. Sea $\{A_k\}_{k=0}^{\infty}$ una familia de elementos de \mathcal{A} tales que $A \subset \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k$.

Entonces $B \cap A \subset \bigcup_{k=0}^{\infty} (A_k \cap A)$ y $B \setminus A \subset \bigcup_{k=0}^{\infty} (A_k \setminus A)$, luego

$$\mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \setminus A) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \mu(A_k \cap A) + \sum_{k=0}^{\infty} \mu(A_k \setminus A) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu(A_k),$$

porque μ es una medida. Como esto vale para todo cubrimiento de A , resulta que

$$\mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \setminus A) \leq \mu^*(A),$$

luego $A \in \mathcal{M}$. ■

Observemos que la “cierta σ -álgebra” a la que alude el enunciado del teorema anterior es la σ -álgebra de los conjuntos μ^* -medibles, donde μ^* es la medida exterior definida por μ . Vamos a tratar de describir mejor esta σ -álgebra. En primer lugar demostramos un resultado de unicidad:

Teorema 4.28 *Toda medida $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty[$ definida en un anillo \mathcal{A} de subconjuntos de X admite una única extensión al σ -anillo generado por \mathcal{A} .*

DEMOSTRACIÓN: Sea \mathcal{S} el σ -anillo generado por \mathcal{A} . La medida dada por el teorema anterior se restringe trivialmente a una medida $\mu_1 : \mathcal{S} \rightarrow [0, +\infty]$. Supongamos que existiera otra extensión $\mu_2 : \mathcal{S} \rightarrow [0, +\infty]$. Definimos

$$\mathcal{M} = \{A \in \mathcal{S} \mid \mu_1(A) = \mu_2(A)\}.$$

Claramente $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$. Basta probar que \mathcal{M} es una clase monótona, pues entonces $\mathcal{M} = \mathcal{S}$, luego $\mu_1 = \mu_2$. Ahora bien, si $\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión creciente en \mathcal{M} , entonces $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \in \mathcal{S}$, porque \mathcal{S} es un σ -anillo, y

$$\mu_1 \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \right) = \sup_n \mu_1(A_n) = \sup_n \mu_2(A_n) = \mu_2 \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \right),$$

e igualmente se razona con sucesiones decrecientes. ■

En general, la σ -álgebra dada por el teorema 4.27 es mayor que el σ -anillo generado por el anillo de partida. El teorema siguiente da cuenta de la diferencia:

Teorema 4.29 *Sea X un conjunto $\mu : \mathcal{S} \rightarrow [0, +\infty]$ una medida definida sobre una σ -álgebra de subconjuntos de X . Sea*

$$\mathcal{M} = \{A \subset X \mid \text{existen } B, C \in \mathcal{S} \text{ tales que } B \subset A \subset C \text{ y } \mu(C \setminus B) = 0\}.$$

Entonces \mathcal{M} es una σ -álgebra de subconjuntos de X que contiene a \mathcal{S} y μ se extiende a una única medida en \mathcal{M} , que es completa.

DEMOSTRACIÓN: Si $A \in \mathcal{S}$ es claro que $A \in \mathcal{M}$. Basta tomar $B = C = A$. Así pues $\mathcal{S} \subset \mathcal{M}$, luego en particular $\emptyset, X \in \mathcal{M}$.

Si $A \in \mathcal{M}$, sean $B, C \in \mathcal{S}$ tales que $B \subset A \subset C$ y $\mu(C \setminus B) = 0$. Entonces $X \setminus C \subset X \setminus A \subset X \setminus B$, y claramente $X \setminus C, X \setminus A \in \mathcal{S}$ y

$$\mu((X \setminus B) \setminus (X \setminus C)) = \mu(C \setminus B) = 0.$$

Por lo tanto $X \setminus A \in \mathcal{M}$. Para probar que \mathcal{M} es una σ -álgebra basta probar que la unión numerable de elementos de \mathcal{M} está en \mathcal{M} . Sea, pues, $\{A_k\}_{k=0}^{\infty}$ una familia de elementos de \mathcal{M} . Sean $\{B_k\}_{k=0}^{\infty}$ y $\{C_k\}_{k=0}^{\infty}$ según la definición de \mathcal{M} . Entonces

$$\bigcup_{k=0}^{\infty} B_k \subset \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k \subset \bigcup_{k=0}^{\infty} C_k,$$

los conjuntos de los extremos están en \mathcal{S} y

$$0 \leq \mu\left(\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} C_k\right) \setminus \left(\bigcup_{k=0}^{\infty} B_k\right)\right) \leq \mu\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} C_k \setminus B_k\right) = 0.$$

Por lo tanto $\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k \in \mathcal{M}$. Esto prueba que \mathcal{M} es una σ -álgebra.

Si $A \in \mathcal{M}$ y B, C son los conjuntos dados por la definición, es claro que $\mu(B) = \mu(C)$. Veamos que podemos extender μ mediante $\mu(A) = \mu(B) = \mu(C)$. Obviamente es la única extensión posible. En efecto, si B' y C' también cumplen la definición, entonces $B \setminus B' \subset C' \setminus B'$, luego $\mu(B \setminus B') \leq \mu(C' \setminus B') = 0$, de donde $\mu(B \setminus B') = 0$ y $\mu(B) = \mu(B')$, luego B y B' dan lugar al mismo valor de $\mu(A)$.

Veamos que la extensión de μ que acabamos de definir es realmente una medida. Para ello tomamos una familia $\{A_k\}_{k=0}^{\infty}$ de elementos de \mathcal{M} disjuntos dos a dos. Sean $\{B_k\}$ y $\{C_k\}$ elementos de \mathcal{S} que satisfagan la definición de \mathcal{M} . Según hemos visto, los conjuntos $\bigcup_{k=0}^{\infty} B_k$ y $\bigcup_{k=0}^{\infty} C_k$ justifican que $\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k \in \mathcal{M}$ y es claro que los B_k son disjuntos dos a dos, luego

$$\mu\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k\right) = \mu\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} B_k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu(B_k) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu(A_k).$$

La medida en \mathcal{M} es completa, pues si $A \in \mathcal{M}$ es nulo y $D \subset A$, tomamos $B, C \in \mathcal{S}$ tales que $B \subset A \subset C$ con $\mu(B) = \mu(C) = 0$. Claramente $\emptyset \subset D \subset C$ y $\mu(C \setminus \emptyset) = 0$, luego $D \in \mathcal{M}$. ■

La medida construida en el teorema anterior se conoce como *compleción* de μ .

Teorema 4.30 *Sea $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty[$ una medida en un anillo \mathcal{A} de subconjuntos de X y supongamos que X se expresa como unión numerable de elementos de \mathcal{A} . Entonces la medida dada por la prueba del teorema 4.27 es la compleción de la única extensión de μ a la σ -álgebra generada por \mathcal{A} .*

DEMOSTRACIÓN: Sea \mathcal{S} el σ -anillo generado por \mathcal{A} y sea \mathcal{M} la σ -álgebra de los conjuntos μ^* -medibles, sobre la que está definida la medida $\bar{\mu}$ construida en el teorema 4.27. Observemos en primer lugar que la hipótesis sobre X implica que $X \in \mathcal{S}$, por lo que \mathcal{S} es, de hecho, una σ -álgebra. Ciertamente $\mathcal{S} \subset \mathcal{M}$ y $\bar{\mu}|_{\mathcal{S}}$ es la única extensión de μ a \mathcal{S} . Por otra parte, $\bar{\mu}$ es una medida completa, luego basta probar que \mathcal{M} es la σ -álgebra \mathcal{M}^* dada por el teorema anterior.

Si $A \in \mathcal{M}^*$, existen $B, C \in \mathcal{S}$ tales que $B \subset A \subset C$ y $\bar{\mu}(C \setminus B) = 0$, entonces $A = B \cup (A \setminus B)$, donde $A \setminus B \subset C \setminus B$ y, como $\bar{\mu}$ es completa, $A \setminus B \in \mathcal{M}$, luego $A \in \mathcal{M}$. Esto nos da una inclusión.

Tomemos ahora $A \in \mathcal{M}$. Fijemos $\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$ en \mathcal{A} tales que $X = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$. Entonces $A = \bigcup_{n=0}^{\infty} (A \cap A_n)$, luego si probamos que $A \cap A_n \in \mathcal{M}^*$, lo mismo valdrá para A . Equivalentemente, como $A \cap A_n \subset A_n$, podemos suponer que existe un $U \in \mathcal{A}$ tal que $A \subset U$.

Dado $m \in \mathbb{N}$ no nulo, por definición de la medida exterior μ^* , existen $\{A_{km}\}_{k=0}^{\infty}$ en \mathcal{A} tales que $A \subset \bigcup_{k=0}^{\infty} A_{km}$ y

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mu(A_{km}) < \mu^*(A) + \frac{1}{m} = \bar{\mu}(A) + \frac{1}{m}.$$

Sea $C_m = \bigcup_{k=0}^{\infty} A_{km} \in \mathcal{S}$, de modo que $A \subset C_m$ y $\bar{\mu}(C_m) < \bar{\mu}(A) + 1/m$.

Cambiando C_m por $\bigcap_{i=0}^m C_i$, podemos suponer que $\{C_m\}_{m=1}^{\infty}$ es una sucesión decreciente, por lo que $C = \bigcap_{m=1}^{\infty} C_m \in \mathcal{S}$ cumple que $A \subset C$ y

$$\bar{\mu}(A) \leq \bar{\mu}(C) = \inf_m \bar{\mu}(C_m) \leq \bar{\mu}(A).$$

Por lo tanto, $\bar{\mu}(C) = \bar{\mu}(A)$. Razonamos igualmente con $U \setminus A$, con lo que obtenemos un $C' \in \mathcal{S}$ tal que $U \setminus A \subset C'$ y $\bar{\mu}(C') = \bar{\mu}(U \setminus A) = \bar{\mu}(U) - \bar{\mu}(A)$. Cambiando C' por $C' \cap U$, podemos suponer que $C' \subset U$. Sea $B = U \setminus C' \in \mathcal{S}$, con lo que $B \subset A$ y $\bar{\mu}(B) = \bar{\mu}(U) - \bar{\mu}(C') = \bar{\mu}(A)$. En definitiva, tenemos que $B \subset A \subset C$ y $\bar{\mu}(C \setminus B) = \bar{\mu}(C) - \bar{\mu}(B) = 0$, luego $A \in \mathcal{M}^*$. ■

4.3 La medida de Lebesgue

Vamos a aplicar a la medida de Jordan toda la teoría desarrollada en la sección anterior. En realidad, vamos a ver que la construcción de la medida de Lebesgue puede realizarse indistintamente a partir de la medida de Jordan o de la medida sobre las figuras elementales, por lo que, para llegar a la medida de Lebesgue, la construcción de la medida de Jordan es totalmente prescindible.

Definición 4.31 La *medida exterior de Lebesgue* en \mathbb{R}^n es la medida exterior m^* que se obtiene de aplicar el teorema 4.24 a la medida de figuras elementales $m : \mathcal{E}^n \rightarrow [0, +\infty[$.

No es difícil ver que si en 4.24 cambiamos las sumas infinitas por sumas finitas, lo que obtenemos a partir de la medida de figuras elementales es precisamente la medida exterior de Jordan, luego la diferencia esencial entre la medida de Jordan y la de Lebesgue es precisamente ésta: definir la medida exterior con sumas numerables en lugar de con sumas finitas.

La medida exterior de Lebesgue puede expresarse en términos ligeramente más simples que los que requiere la definición general:

Teorema 4.32 *La medida exterior de Lebesgue viene dada por*

$$m^*(A) = \inf \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} m(C_k) \mid C_k \text{ es una celda abierta, } A \subset \bigcup_{k=0}^{\infty} C_k \right\}.$$

DEMOSTRACIÓN: Llamemos $m'(A)$ al ínfimo que aparece en el enunciado. La definición de medida exterior considera cubrimientos por figuras elementales en lugar de por celdas abiertas. Como toda celda abierta es una figura elemental, la desigualdad $m^*(A) \leq m'(A)$ es inmediata. Para probar la contraria tomamos $\epsilon > 0$ y consideramos un cubrimiento $A \subset \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k$, donde cada A_k es una figura

elemental y $\sum_{k=0}^{\infty} m(A_k) < m^*(A) + \epsilon/2$. Como cada A_k es unión de un número finito de celdas disjuntas, de modo que $m(A_k)$ es la suma de las medidas de dichas celdas, podemos sustituir la sucesión $\{A_k\}_{k=0}^{\infty}$ por una enumeración de las celdas en que se descomponen los A_k y se sigue cumpliendo que la suma de las medidas es $< \epsilon/2$. En otras palabras, no perdemos generalidad si suponemos que cada A_k es una celda.

Ahora basta aplicar el teorema 4.2, que nos da celdas abiertas $A_k \subset C_k$ tales que $m(C_k) - m(A_k) < \epsilon/2^{k+2}$. De este modo, las celdas C_k cubren A y

$$m'(A) \leq \sum_{k=0}^{\infty} m(C_k) < \sum_{k=0}^{\infty} m(A_k) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^{k+2}} < m^*(A) + \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = m^*(A) + \epsilon.$$

Por lo tanto $m'(A) \leq m^*(A)$ y tenemos la igualdad. ■

Definición 4.33 La medida $m : \mathcal{M}^n \rightarrow [0, +\infty]$ que resulta de aplicar el teorema 4.27 a la medida de las figuras elementales de \mathbb{R}^n o, equivalentemente, de aplicar el teorema 4.26 a la medida exterior de Lebesgue, recibe el nombre de *medida de Lebesgue* en \mathbb{R}^n , y la σ -álgebra \mathcal{M}^n es la σ -álgebra de los conjuntos *medibles Lebesgue*.

Como $\mathbb{R}^n = \bigcup_{k=0}^{\infty} [-k, k]^n$ y las celdas tienen medida finita, vemos que la medida de Lebesgue es σ -finita. Más aún, esto muestra que es aplicable el

teorema 4.30, según el cual la medida de Lebesgue en \mathcal{M}^n es la completación de la única extensión de la medida de las figuras elementales a la σ -álgebra generada por \mathcal{E}^n . Vamos a describir esta σ -álgebra.

Si X es un espacio topológico la σ -álgebra generada por los conjuntos abiertos recibe el nombre de *σ -álgebra de Borel*. Una medida definida sobre la σ -álgebra de Borel de un espacio topológico X recibe el nombre de *medida de Borel* en X .

Llamaremos \mathcal{B}^n a la σ -álgebra de Borel en \mathbb{R}^n , y vamos a probar que es también la σ -álgebra \mathcal{S}^n generada por \mathcal{E}^n , con lo que en particular $\mathcal{B}^n \subset \mathcal{M}^n$.

Conviene observar en general que si $f : X \rightarrow Y$ es una aplicación continua entre espacios topológicos, entonces la antiimagen de un conjunto de Borel en Y es un conjunto de Borel en X . En efecto, basta considerar el conjunto

$$\mathcal{C} = \{A \subset Y \mid f^{-1}[A] \text{ es de Borel}\}.$$

Se comprueba trivialmente que es una σ -álgebra que contiene a los abiertos, por lo que contiene, de hecho, a todos los conjuntos de Borel de Y .

De aquí deducimos que toda celda en \mathbb{R}^n es un conjunto de Borel, pues si $C = \prod_{i=1}^n I_i$, podemos expresarlo también como $\bigcap_{i=1}^n p_i^{-1}[I_i]$, donde $p_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es la proyección i -ésima, y todo intervalo I_i es un conjunto de Borel en \mathbb{R} (por ejemplo, $[a, b[= \{a\} \cup]a, b[$ es unión de un abierto y un cerrado, es decir, de un abierto y del complementario de un abierto, luego está en la σ -álgebra de Borel).

A su vez esto implica que $\mathcal{E}^n \subset \mathcal{B}^n$, luego $\mathcal{S}^n \subset \mathcal{B}^n$. Para probar la inclusión opuesta basta ver que \mathcal{S}^n contiene a todos los abiertos de \mathbb{R}^n . Para ello basta tener en cuenta que los productos de intervalos abiertos de extremos racionales forman una base numerable de \mathbb{R}^n (por el teorema 2.17), luego todo abierto en \mathbb{R}^n es unión numerable de celdas abiertas, y las celdas abiertas están en \mathcal{E}^n , luego en \mathcal{S}^n , y como ésta es una σ -álgebra, concluimos que todos los abiertos están en \mathcal{S}^n .

Por consiguiente, la restricción de la medida de Lebesgue a \mathcal{B}^n es una medida de Borel en \mathbb{R}^n , que recibe el nombre de *medida de Lebesgue incompleta*, o simplemente medida de Lebesgue cuando por el contexto está claro que se trata de dicha restricción.

Hay muchas formas distintas de construir la medida de Lebesgue, además de la que hemos empleado. El teorema siguiente implica que todas son equivalentes:

Teorema 4.34 *La medida de Lebesgue es la única medida de Borel en \mathbb{R}^n que sobre las celdas abiertas viene dada por*

$$m\left(\prod_{i=1}^n]a_i, b_i[\right) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i).$$

DEMOSTRACIÓN: Sea $\mu : \mathcal{B}^n \rightarrow [0, +\infty]$ una medida de Borel que a cada celda abierta le asigne su contenido. Ya hemos visto que \mathcal{B}^n es la σ -álgebra generada por \mathcal{E}^n . Teniendo en cuenta que

$$\prod_{i=1}^n [a_i, b_i] = \bigcap_{k=1}^{\infty} \prod_{i=1}^n]a_i - 1/k, b_i + 1/k[,$$

es claro que μ y m coinciden también sobre las celdas cerradas, y como toda celda contiene una celda abierta y está contenida en una celda cerrada de la misma medida, de hecho μ y m coinciden en todas las celdas. Esto implica trivialmente que coinciden sobre \mathcal{E}^n .

Sea $A \in \mathcal{B}^n$ y supongamos que $A \subset \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k$, con $A_k \in \mathcal{E}^n$. Entonces la unión es un conjunto de Borel y

$$\mu(A) \leq \mu\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k\right) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \mu(A_k) = \sum_{k=0}^{\infty} m(A_k).$$

Por definición de la medida exterior de Lebesgue $\mu(A) \leq m^*(A) = m(A)$. Sea $C_k = [-k, k]^n$ y sea $A_k = A \cap C_k$. Notemos que $\mu(A_k) \leq \mu(C_k) = (2k)^n < +\infty$. Por lo que acabamos de probar, $\mu(C_k \setminus A_k) \leq m(C_k \setminus A_k)$, luego

$$m(C_k) - \mu(A_k) \leq m(C_k) - m(A_k),$$

luego $m(A_k) \leq \mu(A_k)$ y la desigualdad contraria la tenemos probada en general, luego $\mu(A_k) = m(A_k)$. Por consiguiente,

$$\mu(A) = \lim_k \mu(A_k) = \lim_k m(A_k) = m(A). \quad \blacksquare$$

Tenemos así una caracterización sencilla de la medida de Lebesgue incompleta. A su vez, la medida de Lebesgue (completa) está determinada por ser la completación de ésta (por el teorema 4.30).

Veamos ahora que la medida de Lebesgue extiende, de hecho, a la medida de Jordan:

Teorema 4.35 *Todo conjunto medible Jordan es medible Lebesgue, y la medida de Lebesgue es la única extensión a \mathcal{M}^n de la medida de Jordan.*

DEMOSTRACIÓN: Si A es medible Jordan, el teorema 4.11 nos da figuras elementales $K_m \subset A \subset U_m$ de modo que K_m es compacta, U_m es abierta y $m(U_m \setminus K_m) < 1/m$. (Notemos que la medida de figuras elementales coincide con la medida de Lebesgue.) Sean $B = \bigcup_{m=1}^{\infty} K_m$, $C = \bigcap_{m=1}^{\infty} U_m$, que son conjuntos de Borel tales que $B \subset A \subset C$ y $m(C \setminus B) = 0$, luego A es medible Lebesgue, por la completitud de la medida de Lebesgue.

La restricción a \mathcal{J}^n de la medida de Lebesgue es una medida que extiende a la de las figuras elementales, luego por 4.12 coincide con la medida de Jordan.

Por último, si $\mu : \mathcal{M}^n \rightarrow [0, +\infty]$ es una medida que extiende a la de Jordan, entonces la restricción de μ a la σ -álgebra de Borel coincide con la medida de Lebesgue por el teorema anterior, pero la medida de Lebesgue es la única extensión a \mathcal{M}^n de la medida de Lebesgue incompleta, luego tiene que coincidir con μ . ■

De la unicidad extraemos esta consecuencia:

Teorema 4.36 *Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una biyección afín y $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto de Borel (resp. medible Lebesgue). Entonces $f[A]$ es de Borel (resp. medible Lebesgue) y $m(f[A]) = |\det f| m(A)$. En particular, la medida de Lebesgue es invariante por isometrías.*

DEMOSTRACIÓN: Como f es un homeomorfismo, ya hemos observado que transforma conjuntos de Borel en conjunto de Borel. Sea $\mu : \mathcal{B}^n \rightarrow [0, +\infty]$ la aplicación dada por $\mu(A) = m(f[A])/|\det f|$. Es inmediato que se trata de una medida y por el teorema 4.17 su restricción a \mathcal{E}^n es m , luego el teorema anterior implica que $\mu = m$. Esto prueba el teorema para conjuntos de Borel.

Si A es medible Lebesgue, entonces $A = B \cup N$, con $N \subset C$, donde B y C son de Borel y C es nulo. Por lo tanto, $f[A] = f[B] \cup f[N]$, con $f[N] \subset f[C]$. Por la parte ya probada $f[B]$ y $f[C]$ son de Borel y $f[C]$ es nulo, luego $f[A]$ es medible Lebesgue y $m(f[A]) = m(f[B]) = |\det f| m(B) = |\det f| m(A)$. ■

Esto nos da otra caracterización de la medida de Lebesgue:

Teorema 4.37 *La única medida de Borel en \mathbb{R}^n invariante por traslaciones tal que $m([0, 1]^n) = 1$ es la medida de Lebesgue.*

DEMOSTRACIÓN: Por 4.8, la restricción de una tal medida a \mathcal{E}^n tiene que coincidir con la restricción de la medida de Lebesgue, luego el teorema 4.34 implica que es la medida de Lebesgue. ■

Los conjuntos nulos para la medida de Lebesgue y los conjuntos nulos para la medida de Jordan no son los mismos, pues un conjunto nulo para la medida de Jordan tiene clausura nula, mientras que $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ es nulo para la medida de Lebesgue y su clausura no es nula. Ahora, bien, es fácil ver que todo conjunto nulo para la medida de Jordan lo es para la de Lebesgue (si se puede cubrir con una cantidad finita de celdas de medida arbitrariamente pequeña, también se puede cubrir por una cantidad numerable de celdas de medida arbitrariamente pequeña), y que todo compacto nulo para la medida de Lebesgue lo es para la de Jordan (porque puede cubrirse por una cantidad numerable de celdas abiertas de medida arbitrariamente pequeña, y por compacidad podemos tomar un subcubrimiento finito). Como la frontera de un conjunto acotado es compacta, el teorema 4.14 puede reformularse así:

Teorema 4.38 *Un conjunto acotado $A \subset \mathbb{R}^n$ es medible Jordan si y sólo si ∂A es nula para la medida de Lebesgue.*

Esto nos permite identificar los conjuntos medibles Jordan en términos de la medida de Lebesgue, que es más práctica para hacer cálculos.

Ejemplo Conviene pensar en los conjuntos nulos como conjuntos “despreciables” en el sentido de que si una propiedad la cumplen todos los puntos “salvo los de un conjunto nulo” podemos considerar que la cumplen “casi todos los puntos”, en el mismo sentido en que a veces podemos decir que una propiedad que la cumplan todos los elementos de un conjunto “salvo a lo sumo un número finito de ellos” es aceptable en el sentido de que podemos despreciar las excepciones. Sin embargo, esta forma de pensar requiere a veces de cierta cautela. Por ejemplo, sabemos que todos los conjuntos numerables son nulos para la medida de Lebesgue en \mathbb{R}^n , ya que los puntos tienen medida 0, lo cual se interpreta como que los conjuntos numerables son despreciables en lo que respecta a la medida de Lebesgue. Sin embargo, el conjunto de Cantor \mathcal{C} definido en la página 37 es un ejemplo de conjunto nulo que tiene el mismo cardinal \mathfrak{c} de la recta real \mathbb{R} .

En efecto, por definición $\mathcal{C} = \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n$, donde cada C_n es una unión de 2^n intervalos cerrados disjuntos de longitud $1/3^n$. Esto hace que

$$m(\mathcal{C}) \leq m(C_n) = \left(\frac{2}{3}\right)^n,$$

de donde se sigue que $m(\mathcal{C}) = 0$.

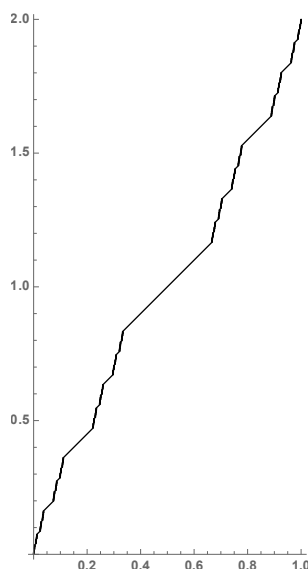
Así, la función de Cantor $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ definida en la página 74 es un ejemplo de función que tiene derivada 0 “salvo en un conjunto nulo” y que, sin embargo, crece desde 0 hasta 1.

Por otra parte, es claro que un homeomorfismo puede alterar la medida de un conjunto. Por ejemplo, la aplicación $f(x) = 2x$ es un homeomorfismo de \mathbb{R} en sí mismo que duplica la medida de cualquier intervalo. Sin embargo, podría conjeturarse que la imagen de un conjunto nulo por un homeomorfismo tiene que seguir siendo nula. Vamos a ver que no es así necesariamente. Para ello consideramos la función $g : [0, 1] \rightarrow [0, 2]$ dada por $g(x) = x + f(x)$.

La figura muestra su gráfica. Como es suma de una función estrictamente creciente y otra creciente, la función g es estrictamente creciente, luego es una biyección continua y, por consiguiente, un homeomorfismo entre los intervalos compactos $[0, 1]$ y $[0, 2]$. Es fácil extenderla a un homeomorfismo $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Al estudiar la función de Cantor hemos visto que $[0, 1] = \mathcal{C} \cup U$, donde U es un abierto denso disjunto de \mathcal{C} . Como $m(\mathcal{C}) = 0$, tiene que ser $m(U) = 1$. Por lo tanto $[0, 2] = g[\mathcal{C}] \cup g[U]$ y vamos a ver que $m(g[U]) = 1$, con lo que necesariamente $m(g[\mathcal{C}]) = 1$, y vemos así que el homeomorfismo g transforma el conjunto nulo \mathcal{C} en un conjunto de medida 1.

En efecto, U es la unión de una cantidad numerable de intervalos abiertos disjuntos en los



que f es constante. Si $I =]a, b[$ es uno de dichos intervalos, donde f toma el valor c , entonces, para cada $x \in I$ se cumple que $g(x) = x + c$, luego $g[I] = c + I$, luego $m(g[I]) = m[I]$, luego $m(g[U]) = m(U) = 1$.

Es fácil poner ejemplos análogos en dimensiones mayores. Por ejemplo, la aplicación $G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $G(x, y) = (g(x), y)$ es un homeomorfismo que cumple $G[\mathcal{C} \times [0, 1]] = g[\mathcal{C}] \times [0, 1]$ y no es difícil ver que $m(\mathcal{C} \times [0, 1]) = 0$, $m(g[\mathcal{C}] \times [0, 1]) = 1$ (aunque esto será inmediato en la sección 4.6, donde veremos que la medida de Lebesgue en \mathbb{R}^2 es el producto de la medida de Lebesgue en \mathbb{R} por sí misma). Así tenemos un ejemplo de homeomorfismo en \mathbb{R}^2 que transforma un cerrado nulo en otro de medida 1. ■

Sucede, por otra parte, que la imagen de un conjunto nulo para la medida de Lebesgue por una aplicación diferenciable es necesariamente un conjunto nulo. La demostración requiere poco más que la propia definición de diferenciable que veremos en el capítulo siguiente (véase el teorema 5.19 y la nota posterior) y que al lector le resultará familiar si conoce el capítulo V de [IC], así que la incluimos aquí por no separarla del resto de la teoría básica sobre la medida de Lebesgue.

Teorema 4.39 *La imagen de un conjunto nulo por una función diferenciable entre dos abiertos de \mathbb{R}^n es un conjunto nulo.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $g : U \rightarrow V$ diferenciable y sea $E \subset U$ un conjunto nulo. Si $x \in E$, la diferenciable de g en x implica que, para $y \neq x$,

$$g(y) - g(x) = \|y - x\| \left(dg(x) \left(\frac{y - x}{\|y - x\|} \right) + E(y - x) \right)$$

donde E es una cierta función continua en 0 con $E(0) = 0$. Como $dg(x)$ está acotada en la bola unidad, existen naturales k y p tales que

$$\text{si } y \in B_{1/p}(x) \quad \text{entonces} \quad \|g(y) - g(x)\| \leq k\|y - x\|.$$

Sea F_{kp} el conjunto de todos los $x \in E$ que cumplen esta relación. Hemos probado que E está contenido en la unión de estos conjuntos. Por consiguiente basta probar que $g[F_{kp}]$ es nulo.

Sea M el cociente entre la medida de una bola de radio 1 y la de un cubo $[a, b]^n$ de diámetro 1. Una homotecia de razón r los transforma en una bola de radio r y un cubo de diámetro r , cuyas medidas difieren de las anteriores en la constante r^n , luego la razón entre ambas sigue siendo M , es decir, que M es en realidad el cociente entre la medida de una bola de radio arbitrario r y la medida de un cubo de diámetro r .

Sea $\epsilon > 0$ y tomemos un abierto W tal que $F_{kp} \subset W$ y $m(W) < \epsilon/M$. Los cubos $[a, b]^n$ de extremos racionales y de diámetro menor que $1/p$ son una base numerable de \mathbb{R}^n , luego podemos expresar W como unión numerable de tales cubos. Desechamos los que no cortan a F_{kp} y así tenemos a éste cubierto por una familia numerable de cubos C_i cuyas medidas suman menos de ϵ/M . Cubrimos cada cubo por una bola $B_i = B_{r_i}(x_i)$ cuyo centro es un punto $x_i \in F_{kp} \cap C_i$ y su radio es el diámetro de C_i (menor que $1/p$). De este modo las bolas cubren a F_{kp} y la suma de sus medidas es menor que ϵ .

Si $x \in F_{kp} \cap B_i$, entonces $\|x - x_i\| < 1/p$ y $x_i \in F_{kp}$, luego

$$\|g(x) - g(x_i)\| \leq k\|x - x_i\| < nr_i,$$

luego $g[F_{kp} \cap B_i] \subset B_{kr_i}(g(x_i))$. Esto prueba que $g[F_{kp}]$ está cubierto por las bolas $B_{kr_i}(g(x_i))$, luego

$$m(g[F_{kp}]) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m(B_{kr_i}(g(x_i))) = k^n \sum_{i=1}^{\infty} m(B_i) < k^n \epsilon.$$

Como ϵ es arbitrario, tenemos que $m(g[F_{kp}]) = 0$. ■

Como todo conjunto medible Lebesgue se puede expresar como unión de un conjunto de Borel con un conjunto nulo, el teorema anterior prueba que si $g : U \rightarrow V$ es un homeomorfismo diferenciable entre dos abiertos de \mathbb{R}^n y $E \subset U$ es medible Lebesgue, entonces $g[E]$ es medible Lebesgue.

4.4 Funciones medibles

Si X es un espacio medida, a menudo tendremos que trabajar con subconjuntos de X definidos a partir de una aplicación $f : X \rightarrow Y$ y necesitaremos garantizar que dichos conjuntos son medibles. Esto lo lograremos mediante el concepto de aplicación medible.

Definición 4.40 Si X es un espacio medida e Y es un espacio topológico, una aplicación $f : X \rightarrow Y$ es *medible* si las antiimágenes por f de los abiertos de Y son conjuntos medibles.

Como las antiimágenes conservan las operaciones conjuntistas es muy fácil probar que los conjuntos de Y cuyas antiimágenes son medibles forman una σ -álgebra, que en el caso de una función medible contiene a los abiertos, luego contendrá a todos los conjuntos de Borel, es decir, una aplicación es medible si y sólo si las antiimágenes de los conjuntos de Borel son conjuntos medibles. El siguiente caso particular nos interesará especialmente:

Teorema 4.41 Una aplicación $f : X \rightarrow [-\infty, +\infty]$ es medible si y sólo si lo son todos los conjuntos $f^{-1}[x, +\infty]$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

DEMOSTRACIÓN: Ya hemos comentado que los conjuntos con antiimagen medible forman una σ -álgebra \mathcal{A} . Hemos de ver que \mathcal{A} contiene a los abiertos de $[-\infty, +\infty]$. Por hipótesis contiene a los intervalos $]x, +\infty[$, luego también a sus complementarios $[-\infty, x]$. Todo intervalo $[-\infty, x[$ es intersección numerable de los intervalos $[-\infty, x + 1/n]$, luego también está en \mathcal{A} . De aquí se sigue que \mathcal{A} contiene también a los intervalos $]x, y[=]x, +\infty[\cap [-\infty, y[$. Finalmente, todo abierto de $[-\infty, +\infty]$ se expresa como unión numerable de intervalos abiertos, luego está en \mathcal{A} . ■

Es claro que la composición de una función medible con una función continua es una función medible. Esto nos da, por ejemplo, que si $f : X \rightarrow [-\infty, +\infty]$ es medible, también lo es $|f|$ y αf para todo número real α , así como $1/f$ si f no se anula.

Para probar resultados análogos cuando intervienen dos funciones (suma de funciones medibles, etc.) usaremos la observación siguiente:

Si los espacios topológicos Y, Z tienen bases numerables (como $[-\infty, +\infty]$ y sus subespacios) y $u : X \rightarrow Y, v : X \rightarrow Z$ son aplicaciones medibles, entonces la aplicación $u \times v : X \rightarrow Y \times Z$ dada por $(u \times v)(x) = (u(x), v(x))$ es medible.

Basta observar que los productos de abiertos básicos $A \times B$ forman una base numerable de $Y \times Z$, luego todo abierto de $Y \times Z$ es unión numerable de estos conjuntos, por lo que es suficiente que sus antiimágenes sean medibles, pero $(u \times v)^{-1}[A \times B] = u^{-1}[A] \cap v^{-1}[B]$.

Ahora, por ejemplo, si $u, v : X \rightarrow \mathbb{R}$ son aplicaciones medibles, también lo son $u + v$ y uv , pues son la composición de $u \times v$ con la suma y el producto, que son continuas.

Nos interesa extender este resultado a funciones $u, v : X \rightarrow [-\infty, +\infty]$, pero entonces tenemos el problema de que no es posible extender la suma y el producto de modo que sean continuas en los puntos $(+\infty, -\infty), (-\infty, +\infty)$ en el caso de la suma y en los puntos $(\pm\infty, 0), (0, \pm\infty)$ en el caso del producto.

Hacemos esto: definimos $u + v$ de modo que $+\infty - \infty = 0$ (por ejemplo) y ahora observamos lo siguiente:

Sea $u : X \rightarrow Y$ una función medible, A un subconjunto medible de X e $y \in Y$. Entonces la función $v : X \rightarrow Y$ que coincide con u fuera de A y toma el valor y en A es medible.

La razón es que

$$v^{-1}[B] = \begin{cases} u^{-1}[B] & \text{si } y \notin B \\ u^{-1}[B] \cup A & \text{si } y \in B \end{cases}$$

Así, dadas $u, v : X \rightarrow [-\infty, +\infty]$ medibles tales que donde una vale $+\infty$ la otra no vale $-\infty$, las modificamos para que valgan 0 donde toman valores infinitos, las sumamos y obtenemos una función medible, luego modificamos la suma para que tome el valor ∞ adecuado donde deba tomar dichos valores (claramente en un conjunto medible), con lo que obtenemos una función medible. Igualmente con el producto.

Otra consecuencia del teorema sobre el producto cartesiano de funciones medibles es que si tenemos dos funciones medibles $u, v : X \rightarrow [-\infty, +\infty]$, los conjuntos del estilo de $\{x \in X \mid u(x) < v(x)\}$ son medibles (por ejemplo en este caso se trata de la antiimagen por $u \times v$ del abierto $\{(x, y) \mid x < y\}$).

Dos operaciones definibles sobre todas las funciones $f, g : X \rightarrow [-\infty, +\infty]$ son las dadas por $(f \vee g)(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ y $(f \wedge g)(x) = \min\{f(x), g(x)\}$.

Las funciones $\vee, \wedge : [-\infty, +\infty] \times [-\infty, +\infty] \rightarrow [-\infty, +\infty]$ son ambas continuas, pues lo son trivialmente cuando se restringen a los cerrados determinados por las condiciones $x \leq y$ e $y \leq x$, respectivamente. Esto implica que si $f, g : X \rightarrow [-\infty, +\infty]$ son medibles, también lo son $f \vee g$ y $f \wedge g$.

En particular si $f : X \rightarrow [-\infty, +\infty]$ es una función medible, definimos las funciones $f^+ = f \vee 0$ y $f^- = -(f \wedge 0)$, llamadas *parte positiva* y *parte negativa* de f , respectivamente.

Tenemos que si f es medible también lo son f^+ y f^- . El recíproco es cierto porque claramente $f = f^+ - f^-$. Además $|f| = f^+ + f^-$.

Seguidamente probaremos que la medibilidad se conserva al tomar límites. Si $\{a_n\}_{n=0}^\infty$ es una sucesión en $[-\infty, +\infty]$, definimos sus límites superior e inferior como

$$\overline{\lim}_n a_n = \inf_{k \geq 0} \sup_{n \geq k} a_n, \quad \underline{\lim}_n a_n = \sup_{k \geq 0} \inf_{n \geq k} a_n.$$

Tras la definición 3.57 hemos visto que el límite superior de una sucesión es el supremo de sus puntos adherentes. Igualmente se prueba que el límite inferior es el ínfimo de sus puntos adherentes.

Una sucesión converge si y sólo si tiene un único punto adherente (su límite), por lo que $\{a_n\}_{n=0}^\infty$ converge si y sólo si $\overline{\lim}_n a_n = \underline{\lim}_n a_n$ y entonces

$$\overline{\lim}_n a_n = \underline{\lim}_n a_n = \lim_n a_n.$$

Si $\{f_n\}_{n=0}^\infty$ es una sucesión de funciones $f_n : X \rightarrow [-\infty, +\infty]$, definimos puntualmente las funciones $\sup_n f_n$, $\inf_n f_n$, $\underline{\lim}_n f_n$ y $\overline{\lim}_n f_n$. Si la sucesión es puntualmente convergente las dos últimas funciones coinciden con la función límite puntual $\lim_n f_n$.

Teorema 4.42 *Si las funciones f_n son medibles, también lo son las funciones $\sup_n f_n$, $\inf_n f_n$, $\overline{\lim}_n f_n$ y $\underline{\lim}_n f_n$.*

DEMOSTRACIÓN: Claramente

$$\left(\sup_n f_n \right)^{-1} [x, +\infty] = \bigcup_{n=0}^{\infty} f_n^{-1} [x, +\infty],$$

es medible. Igualmente se prueba con ínfimos y de aquí se deducen los resultados sobre límites superiores e inferiores. En particular, el límite puntual de una sucesión de funciones medibles es una función medible. ■

Si X es un espacio medida y E es un subconjunto medible, entonces los subconjuntos medibles de E forman una σ -álgebra de subconjuntos de E y la medida de X restringida a esta σ -álgebra es una medida en E . En lo sucesivo consideraremos a todos los subconjuntos medibles de los espacios medida como espacios medida de esta manera.

Notar que si $X = \bigcup_{n=0}^{\infty} E_n$ es una descomposición de X en subconjuntos medibles (no necesariamente disjuntos), entonces $f : X \rightarrow Y$ es medible si y sólo si lo son todas las funciones $f|_{E_n}$, pues si f es medible y G es un abierto en Y , $(f|_{E_n})^{-1}[G] = f^{-1}[G] \cap E_n$, luego $(f|_{E_n})^{-1}[G]$ es medible, y si las $f|_{E_n}$ son medibles, entonces $f^{-1}[G] = (f|_{E_n})^{-1}[G]$, luego también es medible.

Si E es un subconjunto de X , su función característica χ_E es medible si y sólo si lo es E .

Si extendemos una función medible $f : E \rightarrow [-\infty, +\infty]$ asignándole el valor 0 fuera de E , obtenemos una función medible en X . Por ello identificaremos las funciones medibles $f : E \rightarrow [-\infty, +\infty]$ con las funciones medibles en X que se anulan fuera de E . En particular identificaremos la restricción a E de una función $f : X \rightarrow [-\infty, +\infty]$ con la función $f\chi_E$.

Los resultados que hemos dado son suficientes para garantizar que todas las funciones que manejaremos y los conjuntos definidos por ellas son medibles. No insistiremos en ello a menos que haya alguna dificultad inusual.

4.5 La integral de Lebesgue

Vamos a probar que en todo espacio medido X podemos definir una integral, de modo que todas las integrales calculadas en [IC] resultarán ser casos particulares de la integral asociada a la medida de Lebesgue en \mathbb{R} .

Definición 4.43 Una función *simple* en un espacio medido X es una función medible $s : X \rightarrow [0, +\infty[$ que sólo toma un número finito de valores $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. Si llamamos $A_i = s^{-1}[\alpha_i]$, entonces los conjuntos A_i son medibles disjuntos y $s = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{A_i}$.

La base de nuestra construcción de la integral será el teorema siguiente:

Teorema 4.44 Si X es un espacio medido y $f : X \rightarrow [0, +\infty]$ es una función medible, entonces existe una sucesión $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ de funciones simples en X tal que

$$0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \dots \leq f \quad \text{y} \quad f = \lim_n s_n.$$

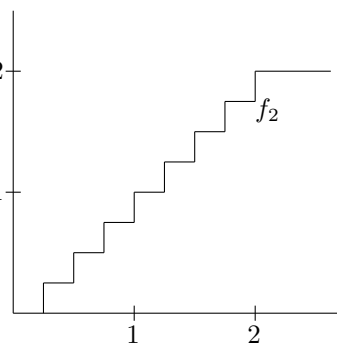
DEMOSTRACIÓN: Para cada número natural $n > 0$ y cada $t \in \mathbb{R}$ existe un único $k = k_n(t) \in \mathbb{N}$ tal que $k/2^n \leq t < (k+1)/2^n$. Sea $f_n : [0, +\infty] \rightarrow [0, +\infty]$ dada por

$$f_n(t) = \begin{cases} k_n(t)/2^n & \text{si } 0 \leq t < n \\ n & \text{si } n \leq t \leq +\infty \end{cases}$$

La figura muestra la función f_2 . Claramente f_n toma un número finito de valores y

$$f_1 \leq f_2 \leq f_3 \leq \dots \leq I,$$

donde I es la función identidad $I(t) = t$. Como $t - 1/2^n < f_n(t) \leq t$ para $0 \leq t \leq n$, es claro que $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge puntualmente a I .



Sea $s_n = f \circ f_n$. Claramente s_n toma un número finito de valores (a lo sumo los que toma f_n) y las antiimágenes de estos valores son las antiimágenes por f de los intervalos donde los toma f_n , luego son conjuntos medibles. Además

$$0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \cdots \leq f,$$

luego las funciones s_n son simples y, tomando límites, es obvio que la sucesión converge puntualmente a f . ■

Definición 4.45 Sea X un espacio medida y $s = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{A_i}$ una función simple en X . Definimos la *integral* de s en X como

$$\int_X s d\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(A_i) \in [0, +\infty],$$

con el convenio de que $+\infty \cdot 0 = 0$.

Si E es un subconjunto medible de X , entonces $s|_E = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{A_i \cap E}$, donde las funciones características se toman ahora sobre E . Por lo tanto

$$\int_E s|_E d\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(A_i \cap E).$$

Por otro lado $s\chi_E = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{A_i \cap E}$ (con las funciones características en X), luego concluimos que

$$\int_E s d\mu = \int_X s\chi_E d\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(A_i \cap E),$$

es decir, que a efectos de integración podemos adoptar consistentemente el convenio explicado antes por el que identificamos la función $s|_E$ con $s\chi_E$.

Ahora necesitamos el siguiente resultado técnico, que después generalizaremos notablemente.

Teorema 4.46 Sea X un espacio medida.

a) Sea s una función simple en X . Para cada subconjunto medible E de X definimos $\nu(E) = \int_E s d\mu$. Entonces ν es una medida en X .

b) Si s y t son funciones simples en X se cumple

$$\int_X (s + t) d\mu = \int_X s d\mu + \int_X t d\mu.$$

DEMOSTRACIÓN: a) Sea $s = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{A_i}$. Claramente $\nu(\emptyset) = 0$. Sea $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$ una unión disjunta de conjuntos medibles. Entonces

$$\begin{aligned} \nu(E) &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(A_i \cap E) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_i \cap E_j) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(A_i \cap E_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \nu(E_j). \end{aligned}$$

b) Sean $s = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{A_i}$ y $t = \sum_{j=1}^m \beta_j \chi_{B_j}$. Llamemos $E_{ij} = A_i \cap B_j$. Así, tanto s como t son constantes en los conjuntos E_{ij} (s toma el valor α_i y t el valor β_j). Por lo tanto

$$\int_{E_{ij}} (s + t) d\mu = (\alpha_i + \beta_j) \mu(E_{ij}) = \alpha_i \mu(E_{ij}) + \beta_j \mu(E_{ij}) = \int_{E_{ij}} s d\mu + \int_{E_{ij}} t d\mu.$$

Como los conjuntos E_{ij} son disjuntos dos a dos y su unión es X , la parte a) nos da que la igualdad se cumple para integrales en X . ■

En particular notamos que si $s \leq t$ son funciones simples en un espacio medida X , entonces $t - s$ también es una función simple y

$$\int_X s d\mu \leq \int_X s d\mu + \int_X (t - s) d\mu = \int_X t d\mu.$$

En particular se cumple que

$$\int_X t d\mu = \sup \left\{ \int_X s d\mu \mid s \text{ es una función simple, } s \leq t \right\}.$$

Esto hace consistente la siguiente definición:

Definición 4.47 Sea X un espacio medida y $f : X \rightarrow [0, +\infty]$ una función medible. Definimos la *integral* de f como

$$\int_X f d\mu = \sup \left\{ \int_X s d\mu \mid s \text{ es una función simple, } s \leq f \right\} \in [0, +\infty].$$

Observar que si E es un subconjunto medible de X , si s es una función simple en E por debajo de $f|_E$, su extensión a X (nula fuera de E) es una función simple bajo $f \chi_E$, y la restricción a E de una función simple en X bajo $f \chi_E$ es una función simple en E bajo $f|_E$. De aquí se sigue que

$$\int_E f d\mu = \int_X f \chi_E d\mu,$$

pues ambas integrales son el supremo del mismo conjunto de números reales.

Las propiedades siguientes son inmediatas a partir de la definición:

Teorema 4.48 Sea X un espacio medida y E un subconjunto medible de X .

- a) Si $0 \leq f \leq g$ son funciones medibles en X , entonces $\int_X f d\mu \leq \int_X g d\mu$.
- b) Si $f \geq 0$ es una función medible en X y $A \subset B$ son subconjuntos medibles de X , entonces $\int_A f d\mu \leq \int_B f d\mu$.
- c) Si $f \geq 0$ es una función medible en X y $f|_E = 0$, entonces $\int_E f d\mu = 0$ (aunque sea $\mu(E) = +\infty$).
- d) Si $f \geq 0$ es una función medible en X y $\mu(E) = 0$, entonces $\int_E f d\mu = 0$ (aunque sea $f|_E = +\infty$).

El resultado siguiente es uno de los más importantes del cálculo integral:

Teorema 4.49 (de la convergencia monótona de Lebesgue) Sea X un espacio medida y $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones medibles en X tal que

$$0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \dots \leq f \quad \text{y} \quad f = \lim_n f_n.$$

Entonces f es medible y

$$\int_X f d\mu = \lim_n \int_X f_n d\mu.$$

DEMOSTRACIÓN: Por el teorema anterior $\int_X f_n d\mu \leq \int_X f_{n+1} d\mu$. Toda sucesión monótona creciente en $[0, +\infty]$ converge a su supremo, luego existe $\alpha = \lim_n \int_X f_n d\mu \in [0, +\infty]$.

Sabemos que f es medible por ser límite puntual de funciones medibles. De nuevo por el teorema anterior $\int_X f_n d\mu \leq \int_X f d\mu$, luego $\alpha \leq \int_X f d\mu$.

Sea s una función simple $s \leq f$ y sea $0 < c < 1$. Definimos

$$E_n = \{x \in X \mid f_n(x) \geq cs(x)\}, \quad \text{para } n = 1, 2, 3, \dots$$

Claramente $E_1 \subset E_2 \subset E_3 \subset \dots$, son conjuntos medibles y, según veremos enseguida, $X = \bigcup_n E_n$.

En efecto, si $x \in X$ y $f(x) = 0$, entonces $x \in E_1$ y si, por el contrario, $f(x) > 0$ entonces $cs(x) < s(x) \leq f(x)$, luego $x \in E_n$ para algún n . Claramente

$$\int_X f_n d\mu \geq \int_{E_n} f_n d\mu \geq c \int_{E_n} s d\mu.$$

Ahora aplicamos el teorema 4.46 y el hecho de que la medida de la unión de una sucesión creciente de conjuntos es el supremo de las medidas, con lo que obtenemos

$$\alpha = \lim_n \int_X f_n d\mu \geq c \lim_n \int_{E_n} s d\mu = c \int_X s d\mu.$$

Como esto es cierto para todo $c < 1$ podemos concluir que $\alpha \geq \int_X s d\mu$ para toda función simple $s \leq f$, luego tomando el supremo de estas integrales resulta $\alpha \geq \int_X f d\mu$, con lo que tenemos la igualdad buscada. ■

El teorema de la convergencia monótona permite en particular reducir propiedades de la integral de funciones no negativas a propiedades de funciones simples, como ilustra el teorema siguiente, que muestra que la integral conserva las sumas, incluso las infinitas.

Teorema 4.50 *Sea X un espacio medida y sea $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ una sucesión de funciones no negativas medibles en X . Entonces*

$$\int_X \sum_{n=1}^{\infty} f_n d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n d\mu.$$

DEMOSTRACIÓN: Probaremos en primer lugar que si f y g son medibles y no negativas, entonces

$$\int_X (f + g) d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu.$$

Tomamos dos sucesiones monótonas $\{s_n\}_{n=1}^\infty$ y $\{t_n\}_{n=1}^\infty$ de funciones simples convergentes a f y g respectivamente (existen por el teorema 4.44).

Por el teorema 4.46 sabemos que $\int_X (s_n + t_n) d\mu = \int_X s_n d\mu + \int_X t_n d\mu$ y, tomando límites, el teorema de la convergencia monótona nos da la igualdad buscada. En el caso general sabemos, por lo que acabamos de probar, que

$$\int_X \sum_{n=1}^k f_n d\mu = \sum_{n=1}^k \int_X f_n d\mu \quad \text{para } k = 1, 2, 3, \dots$$

Las funciones $\sum_{n=1}^k f_n$ forman una sucesión monótona de funciones medibles, luego por el teorema de la convergencia monótona

$$\int_X \sum_{n=1}^{\infty} f_n d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n d\mu. \quad \blacksquare$$

Generalizamos ahora la primera parte del teorema 4.46.

Teorema 4.51 *Sea X un espacio medida y $f : X \rightarrow [0, +\infty]$ una función medible. Para cada subconjunto medible E de X definimos $\nu(E) = \int_E f d\mu$. Entonces ν es una medida en X .*

DEMOSTRACIÓN: Claramente $\nu(\emptyset) = 0$. Sea $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ una unión disjunta de conjuntos medibles. Es claro que $f\chi_E = \sum_{n=1}^{\infty} f\chi_{E_n}$. Aplicando el teorema anterior queda $\nu(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(E_n)$. \blacksquare

Después necesitaremos el hecho siguiente:

Teorema 4.52 (Lema de Fatou) Sea X un espacio medida y sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones medibles no negativas en X . Entonces

$$\int_X \underline{\lim}_n f_n d\mu \leq \underline{\lim}_n \int_X f_n d\mu.$$

DEMOSTRACIÓN: Sea $g_k = \inf_{n \geq k} f_n$. Entonces $g_k \leq f_n$ para $n \geq k$, luego $\int_X g_k d\mu \leq \inf_{n \geq k} \int_X f_n d\mu$. Además las funciones g_k forman una sucesión monótona creciente que converge a $\underline{\lim}_n f_n$, luego por el teorema de la convergencia monótona

$$\int_X \underline{\lim}_n f_n d\mu = \lim_k \int_X g_k d\mu = \sup_{k \geq 1} \int_X g_k d\mu \leq \sup_{k \geq 1} \inf_{n \geq k} \int_X f_n d\mu = \underline{\lim}_n \int_X f_n d\mu. \quad \blacksquare$$

Ahora extendemos la integral a funciones medibles no necesariamente mayores o iguales que 0.

Definición 4.53 Sea X un espacio medida y $f : X \rightarrow [-\infty, +\infty]$ una función medible. Entonces f^+ y f^- son funciones medibles no negativas y $f = f^+ - f^-$. Diremos que f es *integrable Lebesgue* en X si tanto $\int_X f^+ d\mu$ como $\int_X f^- d\mu$ son finitas. En tal caso definimos la *integral de Lebesgue* de f como

$$\int_X f d\mu = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu \in \mathbb{R}.$$

Llamaremos $L^1(\mu)$ al conjunto de las funciones integrables Lebesgue en X respecto a la medida μ .

Si una función f es no negativa, entonces $f^- = 0$ y su integral es la que ya teníamos definida. Las propiedades siguientes son todas inmediatas a partir de los resultados que ya hemos demostrado.

Teorema 4.54 Sea X un espacio medida y sean $f, g : X \rightarrow [-\infty, +\infty]$ funciones medibles.

a) f es integrable si y sólo si $\int_X |f| d\mu < +\infty$, y en tal caso

$$\left| \int_X f d\mu \right| \leq \int_X |f| d\mu.$$

b) Si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, y f, g son integrables, entonces $\alpha f + \beta g$ es integrable y

$$\int_X (\alpha f + \beta g) d\mu = \alpha \int_X f d\mu + \beta \int_X g d\mu.$$

c) Si $f \leq g$ y ambas son integrables, entonces $\int_X f d\mu \leq \int_X g d\mu$.

d) Si E es un subconjunto medible de X y f es integrable en X , entonces f es integrable en E y $\int_E f d\mu = \int_X f \chi_E d\mu$. En particular, $\mu(E) = \int_E 1 d\mu$.

e) Si E y F son subconjuntos medibles disjuntos de X , entonces la función f es integrable en $E \cup F$ si y sólo si lo es en E y en F y, en tal caso,

$$\int_{E \cup F} f \, d\mu = \int_E f \, d\mu + \int_F f \, d\mu.$$

f) Si E es un subconjunto medible de X y $f|_E = 0$, entonces $\int_E f \, d\mu = 0$.

g) Si E es un subconjunto nulo de X , entonces $\int_E f \, d\mu = 0$.

h) Si f es integrable en X , entonces el conjunto de los puntos donde f toma los valores $\pm\infty$ es nulo.

i) Si $|f| \leq g$ y g es integrable entonces f también lo es.

j) Toda función medible y acotada sobre un conjunto de medida finita es integrable.

La propiedad e) sale de aplicar el teorema 4.51 a las partes positiva y negativa de f , la propiedad i) se deduce de a) y j) se deduce de i).

Otra observación de interés es la siguiente: si pasamos de una medida a su completación, es claro que las funciones simples para la primera lo son también para la segunda y las integrales coinciden. El teorema de la convergencia monótona implica entonces que toda función positiva integrable para una medida sigue siéndolo para su completación, y de aquí se sigue inmediatamente el resultado para funciones arbitrarias. De este modo la integral respecto a la completación extiende a la integral respecto a la medida de partida.

Veamos ahora un teorema de convergencia válido para funciones medibles arbitrarias.

Teorema 4.55 (de la convergencia dominada de Lebesgue) Sea X un espacio medida y sean $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ funciones medibles de X en $[-\infty, +\infty]$ que convergen puntualmente a una función f . Si existe una función integrable $g : X \rightarrow [-\infty, +\infty]$ tal que $|f_n| \leq g$ para todo n , entonces f es integrable y

$$\int_X f \, d\mu = \lim_n \int_X f_n \, d\mu.$$

Se dice que las funciones f_n están dominadas por g .

DEMOSTRACIÓN: Claramente $|f| \leq g$, luego f es integrable. Puesto que $|f_n - f| \leq 2g$, podemos aplicar el lema de Fatou a las funciones no negativas $2g - |f_n - f|$, con lo que obtenemos que

$$\int_X 2g \, d\mu \leq \liminf_n \int_X (2g - |f_n - f|) \, d\mu = \int_X 2g \, d\mu + \liminf_n \int_X (-|f_n - f|) \, d\mu.$$

Es fácil ver que el signo negativo sale del límite, pero cambiando éste por un límite superior, así $-\liminf_n \int_X |f_n - f| \, d\mu \geq 0$, o sea, $\liminf_n \int_X |f_n - f| \, d\mu \leq 0$.

Pero es obvio que $0 \leq \underline{\lim}_n \int_X |f_n - f| d\mu \leq \overline{\lim}_n \int_X |f_n - f| d\mu = 0$, luego los límites superior e inferior coinciden, luego $\lim_n \int_X |f_n - f| d\mu = 0$. Ahora aplicamos que

$$\left| \int_X f_n d\mu - \int_X f d\mu \right| = \left| \int_X (f_n - f) d\mu \right| \leq \int_X |f_n - f| d\mu,$$

de donde se sigue el teorema. \blacksquare

Cuando una propiedad se verifica para todos los puntos de un espacio medida salvo los de un conjunto nulo se dice que la propiedad se verifica *para casi todo punto*, y lo abreviaremos p.c.t.p. Veamos un ejemplo:

Teorema 4.56 *Si X es un espacio medida y $f : X \rightarrow [0, +\infty]$ es una función medible tal que $\int_X f d\mu = 0$, entonces $f = 0$ p.c.t.p. de X .*

DEMOSTRACIÓN: Para cada natural $n > 0$ sea $E_n = \{x \in E \mid f(x) > 1/n\}$. Entonces

$$\frac{1}{n} \mu(E_n) \leq \int_{E_n} f d\mu \leq \int_X f d\mu = 0,$$

luego $\mu(E_n) = 0$. La unión de los E_n es el conjunto $E = \{x \in X \mid f(x) > 0\}$, luego $f = 0$ salvo en los puntos del conjunto nulo E . \blacksquare

Cuando digamos que una función $f : X \rightarrow [-\infty, +\infty]$ está definida p.c.t.p. esto significará que en realidad es $f : X \setminus E \rightarrow [-\infty, +\infty]$, donde E es un conjunto nulo. Diremos que f es medible si lo es al extenderla a X tomando el valor 0 en E . En tal caso podemos hablar de $\int_X f d\mu$ definida como la integral de dicha extensión.

La integral de Lebesgue en \mathbb{R} En este punto tenemos definida la medida de Lebesgue, que generaliza muy satisfactoriamente los conceptos de área de una figura plana y de volumen de una figura tridimensional, así como la integral de Lebesgue, que generaliza a la integral de funciones continuas introducida en [IC], pero no estamos en condiciones de calcular la medida de ningún conjunto o la integral de ninguna función, salvo en casos muy elementales. De hecho, ni siquiera es evidente en absoluto que la integral de Lebesgue de una función continua en un intervalo $[a, b]$ coincida con la integral definida en [IC 2.1]. Terminamos esta sección probando esto último y en la sección siguiente demostraremos los resultados básicos que permiten calcular integrales respecto de la medida de Lebesgue en \mathbb{R}^n y, en particular, la medida de Lebesgue de cualquier conjunto razonable.

Observemos en primer lugar que toda función continua es medible Lebesgue (de hecho, una función continua en un espacio topológico X es medible para cualquier medida de Borel en X) y, como la medida de Lebesgue es finita sobre los intervalos cerrados, toda función continua f en un intervalo $[a, b]$ es integrable

Lebesgue en $[a, b]$. En particular, si f es continua en un intervalo I y $a \in I$, podemos definir en I la función

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt,$$

donde ahora el miembro derecho representa la integral de Lebesgue en \mathbb{R} .

Teorema 4.57 *Sea f una función continua en un intervalo I y sea $a \in I$. Entonces la función*

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

es derivable en el interior de I y $F' = f$.

DEMOSTRACIÓN: Sea x un punto interior de I y sea $J \subset I$ un intervalo cerrado y acotado que contenga a a y a x (a éste último en su interior). Por el teorema 3.34 la función f es uniformemente continua en J , luego para cada $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $u, u' \in J$, $|u - u'| < \delta$ entonces $|f(u) - f(u')| < \epsilon$.

Sea $h \in \mathbb{R}$ tal que $|h| < \delta$ y $x + h \in J$. Sean m y M el mínimo y el máximo de f en el intervalo cerrado de extremos x y $x + h$. Si $h > 0$

$$mh = \int_x^{x+h} m dt \leq \int_x^{x+h} f(t) dt \leq \int_x^{x+h} M dt = Mh.$$

Si $h < 0$ se invierten las desigualdades, pero en ambos casos resulta

$$m \leq \frac{\int_x^{x+h} f(t) dt}{h} \leq M.$$

Por el teorema de los valores intermedios existe un α entre x y $x + h$ de modo que

$$f(\alpha) = \frac{\int_x^{x+h} f(t) dt}{h} = \frac{F(x+h) - F(x)}{h}.$$

Claramente $|\alpha - x| < |h| < \delta$, luego

$$\left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x) \right| = |f(\alpha) - f(x)| < \epsilon,$$

por lo que existe $F'(x) = f(x)$. ■

Como consecuencia obtenemos:

Teorema 4.58 (Regla de Barrow) *Si f es una función continua en un intervalo $[a, b]$ entonces F tiene una primitiva F en $[a, b]$ y*

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

DEMOSTRACIÓN: Según [IC 2.2], cuando decimos que F es una primitiva de f en $[a, b]$ queremos decir que F es continua en $[a, b]$, derivable en $]a, b[$ y $F' = f$ en $]a, b[$. Basta tomar como F la función

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

Sólo falta probar que F es continua en $[a, b]$, lo cual es sencillo, pues si M es una cota de f en $[a, b]$, entonces

$$|F(y) - F(x)| = \left| \int_x^y f(t) dt \right| \leq \int_x^y |f(t)| dt \leq \int_x^y M dt = M(y - x),$$

luego basta tomar $|y - x| < \epsilon/M$ para garantizar $|F(y) - F(x)| < \epsilon$. ■

Esto prueba que la integral de una función continua en un intervalo en el sentido de [IC] no es más que su integral de Lebesgue.

Nota: Integrales impropias En IC 3.8 demostramos que si una integral impropia es absolutamente convergente, entonces es convergente, pero el recíproco no es cierto, como muestra, por ejemplo, la integral de Dirichlet (estudiada justo a continuación):

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Sin embargo, el teorema 4.54 afirma que una función es integrable Lebesgue si y sólo si lo es su valor absoluto. Así, resulta que la función

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$$

no es integrable Lebesgue en $[0, +\infty[$, a pesar de que exista

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

En efecto, se cumple que si una función f es integrable Lebesgue en un intervalo $[a, +\infty[$, entonces la integral impropia

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx$$

es convergente y coincide con la integral de Lebesgue. Para probarlo basta aplicar el teorema de la convergencia dominada a las funciones $f_n = f \chi_{[a, t_n]}$, para cualquier sucesión $\{t_n\}_{n=0}^{\infty}$ que tienda a $+\infty$.

Por lo tanto, la función $|\operatorname{sen} x|/x$ no es integrable Lebesgue en $[0, +\infty[$, luego tampoco lo es sin el valor absoluto. Vemos así que, en un intervalo acotado $[a, b]$, la integral de una función continua en el sentido de Lebesgue equivale a su integral en el sentido de [IC], donde usamos la regla de Barrow como definición de la integral. Sin embargo, en un intervalo no acotado, la integrabilidad en el sentido de Lebesgue no coincide necesariamente con la integrabilidad impropia. ■

4.6 Producto de medidas

Vamos a ver que dos medidas en dos σ -álgebras en dos conjuntos X e Y permiten definir de manera natural una medida en una cierta σ -álgebra en $X \times Y$, a la que llamaremos medida producto de las dos medidas dadas, de modo que, por ejemplo, la medida de Lebesgue en \mathbb{R}^n es el producto de la medida de Lebesgue en \mathbb{R} consigo misma n -veces. Esto es relevante porque las integrales respecto de una medida producto pueden reducirse al cálculo de integrales respecto de los factores, de modo que así podremos reducir el cálculo de una integral de una función de n variables al cálculo de n integrales de funciones de una variable, lo que nos dará un método práctico de calcular integrales y medidas de conjuntos.

Definición 4.59 Sean X e Y dos conjuntos y \mathcal{A} , \mathcal{B} dos σ -álgebras de subconjuntos de X e Y respectivamente (a cuyos elementos llamaremos conjuntos medibles). Un *rectángulo medible* en $X \times Y$ es un conjunto de la forma $A \times B$, donde $A \in \mathcal{A}$ y $B \in \mathcal{B}$. Llamaremos *figuras elementales* a las uniones disjuntas de rectángulos medibles. Llamaremos $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ a la σ -álgebra generada por los rectángulos medibles. Cuando hablemos de conjuntos medibles en $X \times Y$ entenderemos que nos referimos a los de $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$.

Las figuras elementales forman un anillo en $X \times Y$, pues las igualdades

$$\begin{aligned}(A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) &= (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2) \\ (A_1 \times B_1) \setminus (A_2 \times B_2) &= ((A_1 \setminus A_2) \times B_1) \cup ((A_1 \cap A_2) \times (B_1 \setminus B_2))\end{aligned}$$

muestran que la intersección de dos rectángulos medibles es un rectángulo medible y que su diferencia es la unión de dos rectángulos medibles disjuntos, luego una figura elemental. De aquí se sigue claramente que la intersección y la diferencia de figuras elementales es una figura elemental. Lo mismo vale para la unión, pues $P \cup Q = (P \setminus Q) \cup Q$, y la unión es disjunta.

Si $E \subset X \times Y$, $x \in X$, $y \in Y$, definimos las *secciones* de E determinadas por x e y como

$$E_x = \{y \in Y \mid (x, y) \in E\}, \quad E^y = \{x \in X \mid (x, y) \in E\}.$$

Teorema 4.60 En las condiciones anteriores, si E es medible en $X \times Y$, entonces E_x y E^y son medibles en Y y en X respectivamente.

DEMOSTRACIÓN: Sea \mathcal{C} el conjunto de todos los $E \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ tales que $E_x \in \mathcal{B}$ para todo $x \in X$. Si $E = A \times B$ entonces $E_x = B$ para todo $x \in A$, y $E_x = \emptyset$ si $x \notin A$ luego todos los rectángulos medibles están en \mathcal{C} . Ahora vemos que \mathcal{C} es una σ -álgebra, de donde se sigue que $\mathcal{A} \times \mathcal{B} \subset \mathcal{C}$, lo que prueba el teorema (para E_x , el caso E^y es análogo).

- a) Obviamente $X \times Y \in \mathcal{C}$.
- b) Si $E \in \mathcal{C}$, entonces $(X \times Y \setminus E)_x = Y \setminus E_x \in \mathcal{B}$, luego $X \times Y \setminus E \in \mathcal{C}$.
- c) Si $\{E_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{C}$ y $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$, entonces $E_x = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_{ix} \in \mathcal{B}$. Por lo tanto $E \in \mathcal{C}$. ■

Veamos ahora la relación entre la medibilidad de funciones en un producto y en los factores. Siempre en las mismas condiciones, si $f : X \times Y \rightarrow Z$, $x \in X$, $y \in Y$, definimos $f_x : Y \rightarrow Z$ y $f^y : X \rightarrow Z$ como las aplicaciones dadas por $f_x(y) = f(x, y)$, $f^y(x) = f(x, y)$.

Teorema 4.61 *Si $f : X \times Y \rightarrow Z$ es una función medible, entonces f_x es medible para todo $x \in X$ y f^y es medible para todo $y \in Y$.*

DEMOSTRACIÓN: Si V es un abierto en Z , claramente $f_x^{-1}[V] = f^{-1}[V]_x$, luego es medible. Por lo tanto f_x es medible. Igualmente se razona con f^y . ■

Con esto estamos casi a punto de definir el producto de medidas. La definición se apoyará en el teorema siguiente.

Teorema 4.62 *Sean X e Y espacios medida con medidas σ -finitas μ y ν . Sea E un subconjunto medible de $X \times Y$. Entonces las aplicaciones $\nu(E_x)$ y $\mu(E^y)$ son funciones medibles de x e y respectivamente. Además*

$$\int_X \nu(E_x) d\mu = \int_Y \mu(E^y) d\nu.$$

DEMOSTRACIÓN: Notar que por el teorema 4.60 los conjuntos E_x , E^y son medibles, luego tiene sentido considerar $\nu(E_x)$ y $\mu(E^y)$.

Llamemos \mathcal{C} a la familia de todos los subconjuntos medibles de $X \times Y$ para los que se cumple el teorema. Vamos a probar que \mathcal{C} tiene las propiedades siguientes:

- a) \mathcal{C} contiene a los rectángulos medibles.
- b) Si $\{Q_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{C}$ es creciente entonces $Q = \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n \in \mathcal{C}$.
- c) Si $\{Q_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{C}$ son disjuntos dos a dos entonces $Q = \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n \in \mathcal{C}$.
- d) Si $\{Q_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{C}$ es decreciente y $Q_1 \subset U \times V$, con $\mu(U), \nu(V) < +\infty$, entonces $Q = \bigcap_{n=1}^{\infty} Q_n \in \mathcal{C}$.

En efecto, si $U \times V$ es un rectángulo medible, entonces

$$(U \times V)_x = \begin{cases} V & \text{si } x \in U \\ \emptyset & \text{si } x \notin U. \end{cases}$$

Por lo tanto $\nu((U \times V)_x) = \nu(V)\chi_U$, que es una función medible. Igualmente $\mu((U \times V)_y) = \mu(U)\chi_V$. Las integrales valen ambas $\mu(U)\nu(V)$, luego $U \times V$ está en \mathcal{C} . Esto prueba a).

Para demostrar b) observamos que $Q_x = \bigcup_{n=1}^{\infty} (Q_n)_x$, y la sucesión es creciente, por lo que $\nu(Q_x) = \lim_n \nu((Q_n)_x)$. Como los conjuntos Q_n están en \mathcal{C} , las funciones $\nu((Q_n)_x)$ son medibles, luego su límite puntual $\nu(Q_x)$ también lo es. Igualmente ocurre con $\mu(Q_y)$. El teorema de la convergencia monótona da la igualdad de las integrales, luego $Q \in \mathcal{C}$.

La prueba de c) es similar, usando ahora que $\nu(Q_x)$ es la suma de las funciones $\nu((Q_n)_x)$ en lugar del límite.

En el caso d) tenemos también $\nu(Q_x) = \lim_n \nu((Q_n)_x)$, pero ahora la sucesión no es monótona creciente. La única diferencia es que en lugar del teorema de la convergencia monótona usamos el teorema de la convergencia dominada. La hipótesis $\nu(V) < +\infty$ garantiza que las funciones $\nu((Q_n)_x)$ están dominadas por la función integrable χ_V .

Estamos suponiendo que las medidas en X y en Y son σ -finitas, lo cual significa que podemos expresar $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ e $Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n$ para ciertos conjuntos medibles de medida finita que además podemos suponer disjuntos dos a dos.

Sea E un conjunto medible en $X \times Y$. Definamos $E_{mn} = E \cap (X_m \times Y_n)$ y sea \mathcal{M} la familia de todos los conjuntos E tales que los E_{mn} así definidos están en \mathcal{C} . Las propiedades b) y d) muestran que \mathcal{M} es una clase monótona, mientras que a) y c) muestran que contiene a las figuras elementales. El teorema 4.22 implica ahora que \mathcal{M} contiene a todos los conjuntos medibles de $X \times Y$ (pues éstos forman el σ -anillo generado por las figuras elementales, que coincide con la clase monótona que generan).

Así pues, para todo conjunto medible E , los conjuntos E_{mn} están en \mathcal{C} , pero claramente E es unión disjunta de los E_{mn} , luego por c) tenemos $E \in \mathcal{C}$, es decir, todo conjunto medible E cumple el teorema. ■

Definición 4.63 Sean X e Y espacios con medidas σ -finitas μ y ν . Definimos la *medida producto* $\mu \times \nu$ como la dada por

$$(\mu \times \nu)(Q) = \int_X \nu(Q_x) d\mu(x) = \int_Y \mu(Q^y) d\nu(y).$$

Con el teorema 4.50 se prueba fácilmente que $\mu \times \nu$ es realmente una medida en la σ -álgebra producto. Además es claro que sobre los rectángulos medibles tenemos $(\mu \times \nu)(A \times B) = \mu(A)\nu(B)$ (con el convenio $0 \cdot \infty = 0$).

Conviene dar una caracterización de la medida producto que no dependa del teorema anterior:

Teorema 4.64 *Dados dos espacios X e Y con medidas σ -finitas μ y ν , la medida producto es la única que cumple que $(\mu \times \nu)(A \times B) = \mu(A)\nu(B)$ para todo rectángulo medible $A \times B$.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que dos medidas λ_1 y λ_2 coinciden sobre los rectángulos medibles con la medida producto. Descompongamos $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ e $Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n$, para ciertos conjuntos medibles de medida finita disjuntos dos a dos. Sea \mathcal{M} la familia de los conjuntos medibles E de $X \times Y$ tales que $\lambda_1(E \cap (X_m \times Y_n)) = \lambda_2(E \cap (X_m \times Y_n))$ para todo m, n . Es claro que \mathcal{M}

es una clase monótona que contiene a las figuras elementales, luego por 4.22 tenemos que \mathcal{M} contiene a todos los conjuntos medibles. De aquí se sigue que las dos medidas coinciden sobre cualquier conjunto medible. ■

Veamos ahora que toda esta teoría es aplicable a la medida de Lebesgue en \mathbb{R}^n . Primero probemos un hecho general:

Teorema 4.65 *Si X e Y son dos espacios topológicos con bases numerables, entonces el producto de las σ -álgebras de Borel es la σ -álgebra de Borel del producto. En particular el producto de medidas de Borel es una medida de Borel.*

DEMOSTRACIÓN: Si U y V son conjuntos de Borel en X e Y respectivamente, entonces $U \times Y$ es un conjunto de Borel en el producto, pues es la antiimagen de U por la proyección en X , que es continua, luego medible. Igualmente $X \times V$ es un conjunto de Borel, y también lo es $U \times V$ por ser la intersección de ambos. De aquí se sigue que todas las figuras elementales son conjuntos de Borel, luego también lo son todos los conjuntos medibles en $X \times Y$. Recíprocamente, los productos de abiertos básicos $U \times V$ forman una base numerable de $X \times Y$, luego todo abierto de $X \times Y$ es unión numerable de estos abiertos básicos, luego todo abierto de $X \times Y$ es medible, luego todo conjunto de Borel es medible. ■

Teorema 4.66 *La medida de Lebesgue en \mathbb{R}^{m+n} (restringida a los conjuntos de Borel) es el producto de la medida de Lebesgue en \mathbb{R}^m por la medida de Lebesgue en \mathbb{R}^n (restringidas ambas a los conjuntos de Borel).*

En efecto, es claro que las celdas son rectángulos medibles, y la medida producto coincide sobre ellas con la medida de Lebesgue, luego es la medida de Lebesgue. ■

Ahora podemos dar una interpretación de la integral de Lebesgue:

Teorema 4.67 *Sea (X, \mathcal{A}, μ) un espacio medida, sea $f : X \rightarrow [0, +\infty[$ una función integrable y sea $A = \{(x, y) \in X \times \mathbb{R} \mid 0 \leq y \leq f(x)\}$. Entonces A es medible respecto del producto $\mu \times m$ de μ por la medida de Lebesgue en \mathbb{R} y*

$$\int_X f d\mu = (\mu \times m)(A).$$

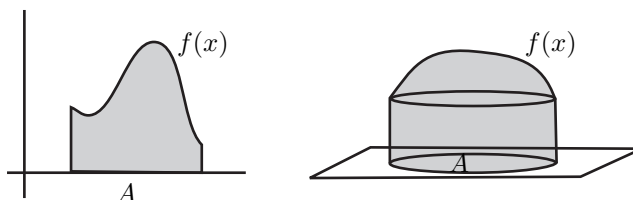
DEMOSTRACIÓN: Consideremos la función $g : X \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $g(x, y) = (f(x), y)$ es medible, pues si U y V son dos abiertos en \mathbb{R} entonces $g^{-1}[U \times V] = f^{-1}[U] \times V$. Pero

$$A = g^{-1}[\{(u, v) \in \mathbb{R} \mid 0 \leq v \leq u\}]$$

y el conjunto de la derecha es cerrado, luego A es medible. Para cada $x \in X$, tenemos que $A_x = [0, f(x)]$, luego

$$(\mu \times m)(A) = \int_X m(A_x) d\mu = \int_X f(x) d\mu. \quad \blacksquare$$

Por ejemplo, la integral de una función $f : A \rightarrow [0, +\infty[$ respecto de la medida de Lebesgue es el área o el volumen sombreados en la figura, según si $A \subset \mathbb{R}$ o $A \subset \mathbb{R}^2$.



Si una función f toma valores positivos y negativos, la descomponemos como $f = f^+ - f^-$ y vemos que la integral de f es (en el caso de una variable) la diferencia entre el área situada bajo su gráfica por encima del eje X menos la situada sobre su gráfica por debajo del eje X , y análogamente en dimensiones superiores.

Ejemplo Vamos a calcular el área de la elipse E de semiejes a , y b , formada por los puntos que cumplen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1.$$

Despejamos $y^2 \leq \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$, lo cual significa que

$$E_x = \left[-\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}, \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \right]$$

siempre que $-a \leq x \leq a$ (y $E_x = \emptyset$ en caso contrario). Por consiguiente

$$m(E) = \int_{-a}^a m(E_x) dx = \frac{2b}{a} \int_{-a}^a \sqrt{a^2 - x^2} dx =$$

El cambio $x = a \sin t$ transforma la integral en

$$2ab \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t dt = 2ab \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = 2ab \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \pi ab.$$

En particular, el área de un círculo de radio r es πr^2 . ■

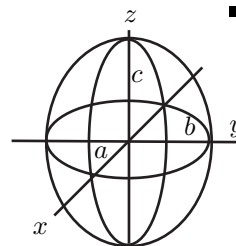
Ejemplo Calculamos ahora el volumen del elipsoide E de semiejes a , b , c , que es la figura formada por los puntos que cumplen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1.$$

Esto equivale a

$$\frac{x^2}{(a\sqrt{1 - z^2/c^2})^2} + \frac{y^2}{(b\sqrt{1 - z^2/c^2})^2} \leq 1,$$

lo cual significa que E_z es la elipse de semiejes $a\sqrt{1 - z^2/c^2}$ y $b\sqrt{1 - z^2/c^2}$ (siempre que $-c \leq z \leq c$).



Por lo tanto

$$m(E) = \int_{-c}^c m(E_z) dz = \pi ab \int_{-c}^c (1 - z^2/c^2) dz = \pi ab \left[z - \frac{z^3}{3c^2} \right]_{-c}^c = \frac{4}{3} \pi abc.$$

En particular, el volumen de una esfera de radio r es $\frac{4}{3}\pi r^3$. ■

Ejemplo Consideremos una bola cerrada n -dimensional de radio r :

$$B_r^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leq r^2\}.$$

Vamos a probar que $m(B_r^n) = v_n r^n$, donde³

$$v_{2k} = \frac{\pi^k}{k!}, \quad v_{2k+1} = \frac{k! 2^{2k+1} \pi^k}{(2k+1)!}.$$

Razonaremos por inducción sobre n . Los dos ejemplos precedentes nos dan que el resultado es cierto para $n = 2$, con $v_2 = \pi$ y para $n = 3$ con $v_3 = (4/3)\pi$. En general, la condición que define a B_r^n es

$$x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2 \leq \sqrt{r^2 - x_n^2},$$

lo cual significa que $(B_r^n)_{x_n} = B_{\sqrt{r^2 - x_n^2}}^{n-1}$. Por lo tanto, por hipótesis de inducción,

$$m(B_r^n) = \int_{-r}^r v_{n-1} (r^2 - x_n^2)^{(n-1)/2} dx_n.$$

Hacemos el cambio de variable $x_n = r \sin \theta$, con lo que

$$m(B_r^n) = v_{n-1} r^n \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^n \theta d\theta.$$

Si llamamos $\kappa_n = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^n \theta d\theta$, hemos probado que $m(B_r^n) = v_{n-1} \kappa_n r^n$, luego el resultado es cierto para n con $v_n = v_{n-1} \kappa_n$. De la fórmula [IC (C.9)] se deduce que

$$\kappa_n = \frac{n-1}{n} \kappa_{n-2}.$$

Una simple inducción nos da ahora que

$$\kappa_n \kappa_{n-1} = \frac{2\pi}{n}.$$

³En términos de la función factorial [ITAn 8.6] o [IC 3.30] es fácil ver que

$$v_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Pi(n/2)}.$$

Basta tener en cuenta la ecuación funcional $\Pi(x+1) = (x+1)\Pi(x)$ así como que $\Pi(0) = 1$, $\Pi(1/2) = \sqrt{\pi}/2$.

En efecto, basta usar la relación anterior y tener en cuenta que

$$\kappa_0 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta = \pi, \quad \kappa_1 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \theta d\theta = 2.$$

Por consiguiente $v_n = v_{n-1}\kappa_n = v_{n-2}\kappa_n\kappa_{n-1}$. Así llegamos a las relaciones

$$v_1 = 2, \quad v_2 = \pi, \quad v_n = \frac{2\pi}{n} v_{n-2},$$

de donde se siguen fácilmente por inducción las fórmulas anunciadas. ■

Ejemplo Dado un subconjunto A de un hiperplano $H \subset \mathbb{R}^n$ y un punto $V \in \mathbb{R}^n \setminus H$, definimos el *cono* de base A y vértice V como la unión de todos los segmentos que unen V con un punto de A . Podemos fijar un sistema de referencia en el que V sea el origen de coordenadas y el hiperplano H tenga ecuación $x_n = h$, donde h es la distancia de V a H .

Entonces, identificando a A con un subconjunto de \mathbb{R}^{n-1} ,

$$C = \{\lambda(a, h) \mid a \in A, 0 \leq \lambda \leq 1\}.$$

Si, por simplicidad, suponemos que A es cerrado, entonces C es también cerrado, luego es medible Lebesgue. Para calcular su medida observamos

que $x \in C_u$ si y sólo si $(x, u) \in C$, si y sólo si existe un λ en $[0, 1]$ tal que $(x, u) = \lambda(a, h)$, lo que obliga a que $\lambda = u/h$ (y esto a su vez a que $0 \leq u \leq h$ para que C_u no sea vacío) y entonces $x = (u/h)a$. Por lo tanto, $C_u = f_{u/h}[A]$, donde $f_{u/h}$ es la homotecia de centro V y razón u/h en \mathbb{R}^{n-1} . El teorema 4.36 nos da que $m(C_u) = (u/h)^{n-1}m(A)$. Por lo tanto

$$m(C) = \int_0^h m(C_u) du = \frac{m(A)}{h^n} \int_0^h u^{n-1} du = \frac{m(A)}{h^{n-1}} \left[\frac{u^n}{n} \right]_0^h = \frac{m(A)h}{n}.$$

En resumen, la medida de un cono es la medida de su base, por su altura, dividida entre la dimensión del espacio. Esto generaliza al hecho de que el área de un triángulo es su base por su altura dividida entre 2, y para un cono tridimensional tenemos que su volumen es un tercio de la superficie de su base por su altura. ■

El ejemplo anterior también generaliza al cálculo del volumen de una pirámide generalizada que presentamos en la sección 2.6 de [IC], y un razonamiento análogo justifica el cálculo del volumen de un paralelepípedo que vimos a continuación.

El teorema siguiente generaliza a [IC 3.12]:

Teorema 4.68 (Teorema de Fubini) Sean X e Y dos espacios medidos con medidas σ -finitas μ y ν y sea $f : X \times Y \rightarrow [-\infty, +\infty]$ una función medible.

a) Si $f \geq 0$, entonces las funciones

$$\int_Y f_x d\nu \quad (\text{como función de } x) \quad \text{e} \quad \int_X f_y d\mu \quad (\text{como función de } y)$$

son medibles, y se cumple

$$\int_{X \times Y} f d(\mu \times \nu) = \int_X \left(\int_Y f_x d\nu \right) d\mu = \int_Y \left(\int_X f_y d\mu \right) d\nu.$$

b) Si $\int_X \left(\int_Y |f|_x d\nu \right) d\mu < +\infty$, entonces $f \in L^1(\mu \times \nu)$.

c) Si $f \in L^1(\mu \times \nu)$, entonces $f_x \in L^1(\nu)$ p.c.t. x , $f_y \in L^1(\mu)$ p.c.t. y , y las funciones definidas en a) p.c.t.p. están en $L^1(\mu)$ y $L^1(\nu)$ respectivamente y sus integrales coinciden (según se afirma en a).

DEMOSTRACIÓN: a) Por el teorema 4.61, las funciones f_x y f_y son medibles, luego tienen sentido sus integrales. Si $f = \chi_Q$, para un cierto conjunto medible $Q \subset X \times Y$, entonces a) se reduce al teorema 4.62 y a la definición de la medida producto. De aquí se sigue que las igualdades de a) son válidas cuando f es una función simple. En general existe una sucesión creciente de funciones simples $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ que converge puntualmente a f . Entonces es claro que $\{(s_n)_x\}_{n=1}^{\infty}$ converge puntualmente a f_x y, por el teorema de la convergencia monótona concluimos que

$$\lim_n \int_Y (s_n)_x d\nu = \int_Y f_x d\nu.$$

Como las funciones simples cumplen a) tenemos que las funciones $\int_Y (s_n)_x d\nu$ son medibles y

$$\int_{X \times Y} s_n d(\mu \times \nu) = \int_X \left(\int_Y (s_n)_x d\nu \right) d\mu.$$

Consecuentemente el límite $\int_Y f_x d\nu$ es medible y aplicando el teorema de la convergencia monótona a los dos miembros de la igualdad anterior queda

$$\int_{X \times Y} f d(\mu \times \nu) = \int_X \lim_n \left(\int_Y (s_n)_x d\nu \right) d\mu = \int_X \left(\int_Y f_x d\nu \right) d\mu.$$

La otra igualdad se prueba análogamente.

Las hipótesis de b) implican por a) que $|f|$ es integrable, luego f también lo es.

Para probar c) descompongamos $f = f^+ - f^-$. Tenemos que f^+ y f^- son integrables. Por a) la integrabilidad de f^+ significa que

$$\int_{X \times Y} f^+ d(\mu \times \nu) = \int_X \left(\int_Y f_x^+ d\nu \right) d\mu < +\infty,$$

luego $\int_Y f_x^+ d\nu$ ha de ser finita salvo a lo sumo en un conjunto nulo, y lo mismo el válido para $\int_Y f_x^- d\nu$. Salvo para los puntos x en la unión de los dos conjuntos nulos, tenemos que la integral

$$\int_Y f_x d\nu = \int_Y f_x^+ d\nu - \int_Y f_x^- d\nu$$

está definida y es finita, es decir, que la función $\int_Y f_x d\nu$ es integrable. Además

$$\begin{aligned} \int_{X \times Y} f d(\mu \times \nu) &= \int_{X \times Y} f^+ d(\mu \times \nu) - \int_{X \times Y} f^- d(\mu \times \nu) \\ &= \int_X \left(\int_Y f_x^+ d\nu \right) d\mu - \int_X \left(\int_Y f_x^- d\nu \right) d\mu = \int_X \left(\int_Y f_x d\nu \right) d\mu. \end{aligned}$$

La otra parte de c) es análoga. ■

En el caso de la medida de Lebesgue en \mathbb{R}^n sustituiremos dm por $dx_1 \cdots dx_n$. En estos términos el teorema de Fubini (por ejemplo para dos variables) se expresa como sigue:

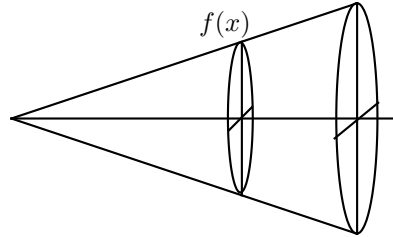
$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dx dy = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x, y) dx \right) dy = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x, y) dy \right) dx.$$

Si trabajamos con funciones continuas sobre un compacto no hemos de preocuparnos de la integrabilidad.

Ejemplo La fórmula

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx$$

deducida en la sección [IC 2.6] para el volumen del sólido de revolución E que se obtiene cuando la curva $y = f(x)$ gira alrededor del eje X es una consecuencia inmediata del teorema 4.66 y de la definición 4.63 de medida producto, pues cada sección E_x es un círculo de radio $f(x)$, luego $m(E_x) = \pi f(x)^2$, luego



$$V = m(E) = \int_a^b m(E_x) dx = \int_a^b \pi f(x)^2 dx.$$

En particular, para un cono recto, en el que $f(x) = mx$, el volumen es

$$V = \pi \int_0^h m^2 x^2 dx = \pi m^2 \frac{h^3}{3} = \frac{1}{3} \pi r^2 h,$$

donde h es su altura y $r = mh$ es el radio de la base. Ahora usamos el teorema anterior para calcular la integral

$$I = \int_C x dx dy dz,$$

donde C es el cono recto determinado por la función $f(x) = mx$. Tenemos que

$$I = \int_{\mathbb{R}^3} \chi_C(x, y, z) x \, dx \, dy \, dz = \int_0^h \left(\int_{y^2+z^2 \leq m^2 x^2} x \, dy \, dz \right) dx,$$

porque la función $(\chi_C)_x(y, z)$ vale 1 en el círculo $y^2 + z^2 \leq m^2 x^2$ y vale 0 fuera de él. Y como el área de este círculo es $\pi m^2 x^2$, queda

$$\begin{aligned} I &= \int_0^h x \int_{y^2+z^2 \leq m^2 x^2} dy \, dz \, dx = \int_0^h \pi m^2 x^3 \, dx = \pi m^2 \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^h = \frac{1}{4} \pi m^2 h^4 \\ &= \frac{1}{4} \pi r^2 h^2 = \frac{3}{4} V h, \end{aligned}$$

donde V es el volumen del cono. En la sección A.3 veremos la interpretación física de esta integral. ■

Capítulo V

Cálculo diferencial

En este capítulo repasaremos brevemente los resultados sobre derivación de funciones de una variable expuestos en el capítulo I de [IC] junto con unos pocos hechos adicionales y generalizaremos los resultados sobre diferenciación de funciones de varias variables expuestos en el capítulo V de [IC], donde consideramos casi exclusivamente funciones de dos o tres variables.

5.1 Derivación de funciones de una variable

Recordemos la definición de derivada [IC 1.1]:

Definición 5.1 Sea $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ y a un punto interior de A . Diremos que f es *derivable* en a si existe (en \mathbb{R})

$$f'(a) = \left. \frac{df}{dx} \right|_a = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Cuando esto sucede, a la recta $r(x) = f'(a)(x - a) + f(a)$ se le llama *recta tangente* a f en el punto $(a, f(a))$ (o para abreviar, en el punto a). El número $f'(a)$ es la *derivada* de f en el punto a .

Diremos que una función es *derivable* en un abierto A si es derivable en todos los puntos de A . Una función es *derivable* si su dominio es un abierto y es derivable en todos sus puntos.

Si $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ es derivable, tenemos definida otra función $f' : A \rightarrow \mathbb{R}$ que a cada punto $a \in A$ le asigna su derivada $f'(a)$. A esta función la llamamos (función) *derivada* de f en A , y la representaremos por f' o por df/dx .

Si la función f' es a su vez derivable, su derivada se llama *derivada segunda* de f , y se representa por f'' o por d^2f/dx^2 . A su vez la derivada segunda puede ser derivable, y entonces está definida la derivada tercera, y así sucesivamente. Si una función admite n derivadas en A , a la derivada n -sima se la representa por $f^{(n)} : A \rightarrow \mathbb{R}$, o también por $d^n f/dx^n$. Conviene usar la notación $f^{(0)}$ para referirse a la propia función f .

Suponemos familiarizado al lector con la interpretación de la derivada (tanto geométrica como “dinámica”) discutida en la sección [IC 1.1], con las reglas de cálculo de derivadas, presentadas en la sección [IC 1.2] y con las propiedades básicas de las derivadas, discutidas en las secciones siguientes (como el teorema del valor medio, etc.). No obstante, muchas propiedades de las funciones derivables de una variable son casos particulares de las propiedades análogas para funciones de varias variables que demostraremos más adelante.

La derivada n -sima de un producto se puede calcular con una fórmula análoga a la del binomio de Newton:

Teorema 5.2 (Leibniz) *Si f y g son funciones n veces derivables en un punto x , entonces*

$$(fg)^n(x) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} f^i(x) g^{n-i}(x).$$

DEMOSTRACIÓN: Por inducción sobre n . Para $n = 0$ es inmediato. Si vale para n , entonces

$$\begin{aligned} (fg)^{n+1}(x) &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (f^{i+1} g^{n-i}(x) + f^i g^{n+1-i}(x)) = \\ &f^{n+1}(x)g(x) + f(x)g^{n+1}(x) + \sum_{i=1}^n \binom{n}{i-1} f^i(x)g^{n+1-i}(x) + \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} f^i(x)g^{n+1-i}(x) \\ &= \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} f^i(x)g^{n+1-i}(x). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Definición 5.3 Llamaremos $C^n(A)$ al conjunto de las funciones definidas en A que admiten n derivadas y todas ellas son continuas en A . Si llamamos $C^0(A) = C(A)$, es decir, al conjunto de las funciones continuas en A , entonces tenemos

$$C^0(A) \supset C^1(A) \supset C^2(A) \supset C^3(A) \supset C^4(A) \supset \dots$$

Llamaremos $C^\infty(A)$ al conjunto de las funciones infinitamente derivables en A . Por ejemplo, los polinomios y las fracciones algebraicas son de clase C^∞ en su dominio. Es inmediato que todos estos conjuntos son subálgebras del álgebra $C(A)$ de las funciones continuas en A (con valores en \mathbb{R}).

Las inclusiones son todas estrictas. Por ejemplo, si $a \in A$ es fácil ver que la función dada por

$$f(x) = \begin{cases} (x-a)^{n+1} & \text{si } x \geq a \\ -(x-a)^{n+1} & \text{si } x \leq a \end{cases}$$

es una función de clase $C^n(A)$ pero no de clase $C^{n+1}(A)$.

En [IC] demostramos que las series de potencias definen funciones de clase C^∞ en su disco de convergencia a partir de un resultado más general [IC 1.21] sobre derivabilidad de series de funciones. En sus hipótesis está implícita la convergencia uniforme de la serie. El teorema siguiente explicita esta hipótesis:

Teorema 5.4 Sea $\{f_n\}_{n=0}^\infty$ una sucesión de funciones $f_n :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ que converge uniformemente a una función f . Supongamos que todas ellas son derivables en $]a, b[$ y que la sucesión de derivadas converge uniformemente a una función g . Entonces f es derivable y $g = f'$.

DEMOSTRACIÓN: Fijemos un punto $x \in]a, b[$ y consideremos las funciones

$$F_n(y) = \begin{cases} \frac{f_n(x) - f_n(y)}{x - y} & \text{si } y \neq x \\ f'_n(x) & \text{si } y = x \end{cases}$$

Similarmente definimos $F :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ mediante

$$F(y) = \begin{cases} \frac{f(x) - f(y)}{x - y} & \text{si } y \neq x \\ g(x) & \text{si } y = x \end{cases}$$

El hecho de que f_n sea derivable en x implica que F_n es continua en $]a, b[$. Basta probar que para todo $\epsilon > 0$ existe un número natural n_0 tal que para todo $m, n \geq n_0$ e $y \in]a, b[$ se cumple que $|F_m(y) - F_n(y)| < \epsilon$. En efecto, esto significa que $\{F_n\}_{n=0}^\infty$ es (uniformemente) de Cauchy, luego según 3.54 la sucesión converge uniformemente a una función continua, pero dado que converge puntualmente a F , de hecho convergerá uniformemente a F . Tenemos, pues, que F es continua, y a su vez esto implica que f es derivable en x y $f'(x) = g(x)$.

Existe un número natural n_0 tal que si $m, n > n_0$ entonces

$$|f'_n(u) - f'_m(u)| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{para todo } u \in]a, b[.$$

Entonces, dados $y \in]a, b[$ y $m, n \geq n_0$, si $y \neq x$ se cumple

$$\begin{aligned} |F_n(y) - F_m(y)| &= \left| \frac{f_n(x) - f_n(y)}{x - y} - \frac{f_m(x) - f_m(y)}{x - y} \right| \\ &\leq \left| \frac{1}{x - y} \right| |f_n(x) - f_m(x) - f_n(y) + f_m(y)| \end{aligned}$$

Aplicamos el teorema del valor medio a la función $f_n - f_m$ en el intervalo $[y, x]$ (suponemos, por ejemplo, $y < x$). Entonces existe un $u \in]a, b[$ tal que

$$f_n(x) - f_m(x) - f_n(y) + f_m(y) = (f'_n(u) - f'_m(u))(x - y).$$

Así pues,

$$|F_n(y) - F_m(y)| \leq \left| \frac{1}{x - y} \right| |f'_n(u) - f'_m(u)| |x - y| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Además, si $y = x$ tenemos

$$|F_n(x) - F_m(x)| = |f'_n(x) - f'_m(x)| < \frac{\epsilon}{2} < \epsilon. \quad \blacksquare$$

Ejercicio: Probar que la sucesión $f_n(x) = \sin(nx)/\sqrt{n}$ converge uniformemente a 0 en \mathbb{R} , pero la sucesión f'_n no converge puntualmente en ningún punto.

Como consecuencia tenemos:

Teorema 5.5 Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ es una serie de potencias en \mathbb{R} , la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-a)^{n-1}$$

tiene el mismo radio de convergencia y converge a la derivada de la primera.

DEMOSTRACIÓN: Que ambas series tienen el mismo radio de convergencia está demostrado antes de [IC 1.22]. Llamemos $f(x)$ a la función definida sobre $]a-R, a+R[$ por la serie dada y $g(x)$ a la función definida por la segunda serie. Hemos de demostrar que $f'(x) = g(x)$ para todo x en el intervalo.

Sea $f_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k(x-a)^k$. Se trata de una sucesión de polinomios cuyas derivadas $f'_n(x)$ son las sumas parciales de la segunda serie. Dado un punto $x \in]a-R, a+R[$, tomamos un intervalo cerrado $[x-\delta, x+\delta] \subset]a-R, a+R[$. Por el teorema 3.59, en este intervalo las sucesiones $f_n(x)$ y $f'_n(x)$ convergen absoluta y uniformemente a f y g respectivamente. Ahora basta aplicar el teorema anterior. ■

El polinomio de Taylor En [ITAn] vimos que las funciones exponencial, seno, coseno, etc. admiten desarrollos en serie de potencias que pueden usarse como definición. Vamos a ver que esto no es casual. Para ello consideramos una función arbitraria f derivable en un punto a . Entonces f puede ser aproximada por su recta tangente, esto es, por el polinomio $f(a) + f'(a)(x-a)$. La recta tangente es el único polinomio $P(x)$ de grado 1 que cumple $P(a) = f(a)$ y $P'(a) = f'(a)$. Cabe suponer que si una función f admite dos derivadas y tomamos un polinomio P de grado 2 tal que $P(a) = f(a)$, $P'(a) = f'(a)$ y $P''(a) = f''(a)$, el polinomio P nos dará una aproximación mejor de la función f que la recta tangente. Esto no siempre es así, pero hay bastante de verdad en ello. Vamos a investigarlo.

Ante todo, si K es un cuerpo y $a \in K$, la aplicación $u : K[x] \rightarrow K[x]$ dada por $u(p) = p(x-a)$ es un isomorfismo de K -espacios vectoriales. Como los polinomios $1, x, x^2, x^3, \dots$ son una K -base de $K[x]$, resulta que los polinomios

$$1, (x-a), (x-a)^2, (x-a)^3, (x-a)^4, \dots$$

son también una K -base, luego todo polinomio de $K[x]$ se expresa de forma única como

$$P(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \dots + c_n(x-a)^n, \quad (5.1)$$

para cierto natural n y ciertos coeficientes $c_0, \dots, c_n \in K$.

Si una función f admite n derivadas en un punto a , las ecuaciones

$$f(a) = P(a), \quad f'(a) = P'(a), \quad \dots \quad f^{(n)}(a) = P^{(n)}(a)$$

son satisfechas por un único polinomio de grado $\leq n$. En efecto, si $P(x)$ viene dado por (5.1), entonces $P(a) = c_0$, luego ha de ser $c_0 = f(a)$. Derivando obtenemos

$$P'(x) = c_1 + 2c_2(x - a) + \dots + nc_n(x - a)^{n-1},$$

de donde $P'(a) = c_1$, y ha de ser $c_1 = f'(a)$. Similarmente, $P''(a) = 2c_2$, luego $c_2 = f''(a)/2$. Igualmente se obtiene $c_3 = f'''(a)/6$ y, en general, $c_k = f^{(k)}(a)/k!$. En resumen:

$$P(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k.$$

Recíprocamente, es fácil ver que el polinomio $P(x)$ así definido cumple que $P^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$ para $k = 0, \dots, n$.

Definición 5.6 Sea f una función derivable n veces en un punto a . Llamaremos *polinomio de Taylor* de grado n de f en a al polinomio

$$P_n(f)(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k \in \mathbb{R}[x].$$

El polinomio de Taylor es el único polinomio P de grado menor o igual que n que cumple $P^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$ para $k = 0, \dots, n$. En particular si f es un polinomio de grado menor o igual que n se ha de cumplir $P_n(f) = f$.

Notemos también que $P_0(f) = f(a)$, y que $P_1(f) = f(a) + f'(a)(x - a)$ es la recta tangente a f en a . Nuestra conjetura es que $P_n(f)$ es el polinomio de grado menor o igual que n que más se parece a f alrededor de a .

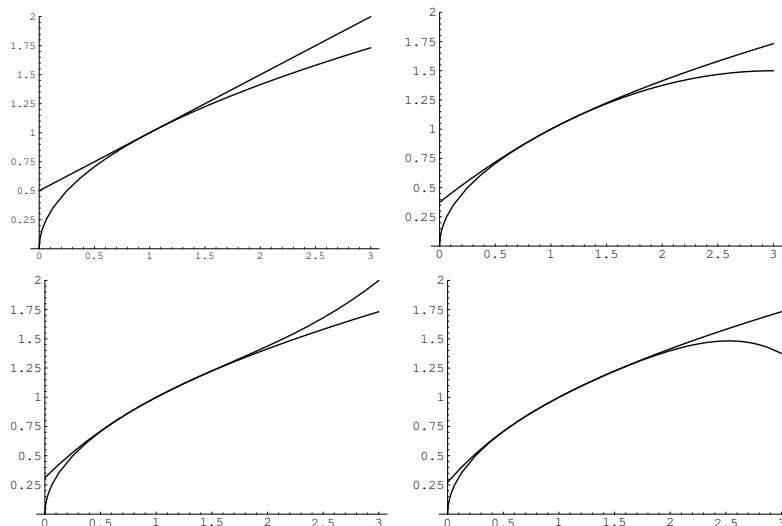
Ejemplo Consideremos la función $f(x) = x^{1/2}$ y $a = 1$. Calculemos sus derivadas:

Orden	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(1)$
0	$x^{1/2}$	1
1	$\frac{1}{2}x^{-1/2}$	$\frac{1}{2}$
2	$-\frac{1}{2} \frac{1}{2} x^{-3/2}$	$-\frac{1}{2} \frac{1}{2}$
3	$\frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{3}{2} x^{-5/2}$	$\frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{3}{2}$
4	$-\frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{3}{2} \frac{5}{2} x^{-7/2}$	$-\frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{3}{2} \frac{5}{2}$

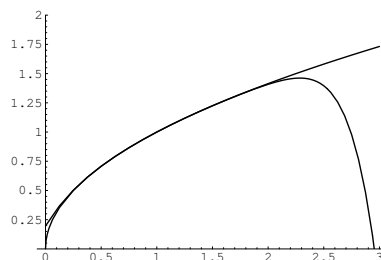
En general se prueba que las derivadas en 1 van alternando el signo, en el numerador tienen el producto de los primeros impares y en el denominador las sucesivas potencias de 2. Con esto podemos calcular cualquier polinomio de Taylor en $a = 1$:

$$\begin{aligned} P_0(f)(x) &= 1, \\ P_1(f)(x) &= 1 + \frac{1}{2}(x - 1), \\ P_2(f)(x) &= 1 + \frac{1}{2}(x - 1) - \frac{1}{8}(x - 1)^2, \\ P_3(f)(x) &= 1 + \frac{1}{2}(x - 1) - \frac{1}{8}(x - 1)^2 + \frac{1}{16}(x - 1)^3. \end{aligned}$$

Aquí están sus gráficas junto a la de la función. Vemos que el intervalo en que se confunden con la gráfica de f es cada vez mayor.



El polinomio de grado 8 es bastante representativo de lo que sucede cuando n es grande:



Vemos que la aproximación es cada vez mejor en el intervalo $[0, 2]$, pero a partir del 2 el polinomio se aleja bruscamente. Un ejemplo numérico:

$$P_8(f)(1.5) = 1.224729895, \quad \text{mientras que } \sqrt{1.5} = 1.224744871 \dots$$

La aproximación tiene 5 cifras exactas. ■

Los polinomios de Taylor plantean varios problemas importantes. La cuestión principal es si el error producido al aproximar una función de clase C^∞ por sus polinomios de Taylor puede reducirse arbitrariamente aumentando suficientemente el grado.

Definición 5.7 Si f es una función de clase C^∞ en un entorno de un punto a , llamaremos *serie de Taylor* de f en a a la serie funcional

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k.$$

En estos términos, la cuestión es si la serie de Taylor de f converge a f . El ejemplo anterior sugiere que la serie de \sqrt{x} en 1 converge a la función en el intervalo $]0, 2[$, pero no parece converger más allá de 2. También hemos de tener presente la posibilidad de que la serie de Taylor de una función f converja a una función distinta de f .

Un caso elemental es el siguiente:

Teorema 5.8 Sea $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)$ la función definida en su intervalo de convergencia por una serie de potencias en \mathbb{R} . Entonces f es una función de clase C^∞ en dicho intervalo y $a_n = f^{(n)}(a)/n!$, de modo que la serie que define a f coincide con la serie de Taylor de f .

DEMOSTRACIÓN: El teorema 5.5 implica que f es una función de clase C^∞ en el intervalo de convergencia de la serie dada, y una simple inducción prueba que

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n(x-a)^{n-k},$$

luego $f^{(k)}(a) = k! a_k$, ya que todos los términos de la serie valen 0 en a excepto el correspondiente a $n = k$. ■

Así pues, si una función es definible por una serie de potencias, dicha serie tiene que ser precisamente su serie de Taylor. Por ejemplo, si queremos una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que sea derivable y cumpla $f' = f$ (y es claro que si una función cumple esto, cualquier otra de la forma kf cumple lo mismo, luego podemos concretar exigiendo además que $f(0) = 1$), entonces $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ y $f^{(n)}(0) = f(0) = 1$, luego su serie de Taylor será

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

El teorema 3.60 nos da que esta serie tiene radio de convergencia infinito, por lo que converge de hecho en todo el plano complejo \mathbb{C} y el teorema 5.5 nos da que, en efecto, esta función es derivable en \mathbb{R} y su derivada coincide con ella misma. El teorema anterior nos asegura que la función exponencial e^x es la única función definible por una serie de potencias que coincide con su derivada y además cumple $e^0 = 1$, pero ¿puede haber otras funciones con estas propiedades que no sean definibles mediante series de potencias? Vamos a ver que no, que estas propiedades obligan a que la función sea definible por una serie de potencias.

Para entender por qué, introducimos el concepto de resto de Taylor:

Definición 5.9 Sea f una función derivable n veces en un punto a . Llamaremos *resto de Taylor* de grado n de f en a , a la función $R_n(f)(x) = f(x) - P_n(f)(x)$, donde $P_n(f)$ es el polinomio de Taylor de grado n de f en a .

Así, el problema de si una serie de Taylor converge a la función que la determina equivale a estudiar si el resto de Taylor converge a 0. El teorema siguiente, que puede verse como una generalización del teorema del valor medio, nos da una estimación del resto de Taylor:

Teorema 5.10 (Teorema de Taylor) *Sea $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una función derivable $n + 1$ veces en un intervalo abierto A y $a \in A$. Entonces para cada $x \in A$ existe un $\lambda \in]0, 1[$ tal que si $c = \lambda a + (1 - \lambda)x$, se cumple*

$$R_n(f)(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}.$$

DEMOSTRACIÓN: Para $x = a$ es evidente, pues se cumple $P_n(f)(a) = f(a)$ y $R_n(f)(x) = 0$. Supongamos que $x \neq a$. Sea

$$Q(x) = \frac{1}{(x-a)^{n+1}} R_n(f)(x).$$

Sea $F : A \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$F(t) = f(x) - \left(f(t) + \frac{x-t}{1!} f'(t) + \frac{(x-t)^2}{2!} f''(t) + \dots + \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n)}(t) + (x-t)^{n+1} Q(x) \right).$$

La función f y sus n primeras derivadas son continuas y derivables, luego F también es continua y derivable en A . Además $F(x) = f(x) - f(x) = 0$ y

$$F(a) = f(a) - (P_n(f)(a) + (x-a)^{n+1} Q(x)) = R_n(f)(x) - R_n(f)(x) = 0.$$

Por el teorema de Rolle existe un punto entre a y x , o sea, de la forma $c = \lambda a + (1 - \lambda)x$, tal que $F'(c) = 0$. Calculemos en general $F'(t)$:

$$F'(t) = 0 - \left(f'(t) - f'(t) + \frac{x-t}{1!} f''(t) - \frac{2(x-t)}{2!} f''(t) + \frac{(x-t)^2}{2!} f'''(t) \dots - \frac{n(x-t)^{n-1}}{n!} f^{(n)}(t) + \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) - (n+1)(x-t)^n Q(x) \right).$$

Los términos consecutivos se cancelan entre sí, y queda

$$F'(t) = -\frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) + (n+1)(x-t)^n Q(x).$$

Como $F'(c) = 0$, evaluando en c queda

$$Q(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!},$$

y por definición de Q :

$$R_n(f)(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}. \quad \blacksquare$$

Así pues, la diferencia entre $P_n(f)(x)$ y $f(x)$ tiene la forma de un monomio más del polinomio de Taylor salvo por el hecho de que la derivada $(n+1)$ -ésima no se evalúa en el punto a , sino en un punto intermedio entre a y x .

Por ejemplo, si las derivadas de f están uniformemente acotadas en un intervalo A , es decir, si existe una misma constante K tal que $|f^n(x)| \leq K$ para todo natural n y para todo $x \in A$, entonces

$$|f(x) - P_n(f)(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1} \right| \leq \frac{K|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Ahora bien, la sucesión $M^n/n!$ converge a 0 (por la convergencia de la serie de la función exponencial), luego la sucesión $\{P_n(f)(x)\}_{n=0}^{\infty}$ tiende a $f(x)$. Por consiguiente:

Teorema 5.11 *Si A es un intervalo abierto, $a \in A$, $f \in C^\infty(A)$ y las derivadas de f están uniformemente acotadas en A , entonces para cada punto $x \in A$ se cumple*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n.$$

Este teorema se aplica obviamente al caso de una función f que cumpla $f' = f$, pues sus derivadas son todas la misma, luego están uniformemente acotadas en cualquier intervalo acotado (por el teorema de Weierstrass), con lo cual concluimos que la función exponencial e^x es la única función definida en \mathbb{R} que cumple $e^0 = 1$ y que coincide con su propia derivada.

El teorema 2.86 implica fácilmente la otra propiedad fundamental de la función exponencial, válida en realidad para exponentes complejos cualesquiera (véase [ITAn 4.1]):

$$e^{x+y} = e^x e^y.$$

Contando con el hecho de que la función exponencial es derivable, sus propiedades básicas pueden deducirse ahora más fácilmente que en la sección [ITAn 4.1]. Por ejemplo, como $e^x e^{-x} = 1$, tenemos que e^x no se anula en ningún punto y, como $e^0 = 1 > 0$, por el teorema de Bolzano concluimos que $e^x > 0$ para todo número real x . Como su derivada es siempre positiva, concluimos que e^x es estrictamente creciente. De la serie de potencias se sigue que $1+x < e^x$ siempre que $x > 0$, lo que nos da que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

(el segundo límite se deduce del primero, ya que $e^{-x} = 1/e^x$).

Ejemplo El teorema de Taylor nos permite determinar cuántos términos de la serie de Taylor son necesarios para aproximar una función con una precisión dada. Por ejemplo, pongamos que queremos calcular el número e con 10 decimales exactos mediante la serie

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

El teorema de Taylor nos dice que

$$e = e^1 = \sum_{n=0}^k \frac{1}{n!} + \frac{e^{k+1}}{(k+1)!},$$

para cierto $0 < c < 1$, luego podemos acotar el resto por

$$e - \sum_{n=0}^k \frac{1}{n!} = \frac{e^{k+1}}{(k+1)!} < \frac{1}{(k+1)!},$$

luego tendremos 10 cifras decimales exactas si tomamos k de modo que

$$\frac{1}{(k+1)!} < 10^{-10}$$

o, equivalentemente, $(k+1)! > 10^{10}$. El mínimo k que cumple esto es $k = 13$. La tabla siguiente contiene las aproximaciones obtenidas con $k = 12$ y $k = 13$, así como el valor exacto:

$k = 12$	2.7182818282861685639
$k = 13$	2.7182818284467590023
$k = \infty$	2.7182818284590452354

Vemos que hemos encontrado el mínimo k posible, pues con $k = 12$ sólo obtenemos 9 cifras decimales exactas. ■

El teorema de Taylor proporciona una expresión para el resto de Taylor $R_n(f)(x)$ que depende de un cierto número c cuya relación con x no es sencilla. Ahora podemos dar una expresión alternativa que no requiere seleccionar ningún número de ese modo (véase también 5.28):

Teorema 5.12 Sea $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una función derivable $n + 1$ veces en un intervalo abierto A y $a \in A$. Si $f^{(n+1)}(x)$ es continua en el intervalo de extremos a y x , entonces

$$R_n(f)(x) = \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x-t)^n dt.$$

DEMOSTRACIÓN: Razonamos por inducción sobre n . Para $n = 0$ el teorema se reduce a que, por 4.57,

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t) dt.$$

Supuesto cierto para n , es decir, si

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x-t)^n dt,$$

integrando por partes obtenemos que

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \left[-\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} \frac{(x-t)^{n+1}}{k+1} \right]_a^x + \int_a^x \frac{(x-t)^{n+1}}{n+1} \frac{f^{(n+2)}(t)}{n!} dt,$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \int_a^x \frac{f^{(n+2)}(t)}{(n+1)!} (x-t)^n dt. \quad \blacksquare$$

Veamos ahora ejemplos de series de Taylor que no convergen a las funciones que las definen.

Ejemplo Aplicando n veces la regla de L'Hôpital [IC .26] resulta que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0,$$

y cambiando x por $1/x$ llegamos a que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-1/x}}{x^n} = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \tag{5.2}$$

Esto implica que la función $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$h(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

es de clase C^∞ en \mathbb{R} .

En efecto, una simple inducción prueba que las derivadas de h para $x > 0$ son de la forma

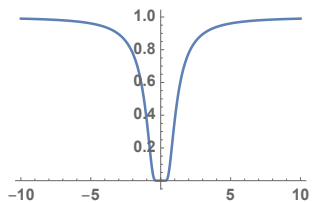
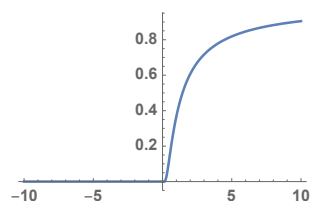
$$\frac{e^{-1/x}}{x^n} P(x),$$

donde $P(x)$ es un polinomio. De aquí que las derivadas sucesivas de h en 0 existen y valen todas 0. En efecto, admitiendo que existe $h^{(k)}(0) = 0$ (para $k \geq 0$) la derivada $h^{(k+1)}(0)$ se obtiene por un límite cuando $\Delta x \rightarrow 0$ que por la izquierda es claramente 0 y por la derecha es de la forma

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-1/\Delta x}}{\Delta x^n} P(\Delta x),$$

de modo que el primer factor tiende a 0 por (5.2) y el segundo está acotado en un entorno de 0. Por lo tanto existe $h^{(k+1)}(0) = 0$.

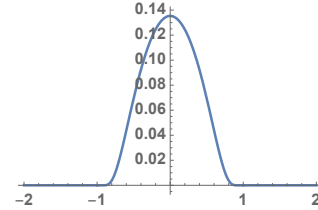
En particular, la función $h(x^2)$ es de clase C^∞ , sus derivadas son todas nulas en 0 pero es no nula en todo punto distinto de 0. Tenemos así un ejemplo de función de clase C^∞ cuya serie de Taylor en 0 sólo converge (a ella) en 0. \blacksquare



La función h del ejemplo anterior permite construir una familia de funciones de interés:

Teorema 5.13 *Dados números reales $a < b$, existe una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^∞ tal que $f(x) > 0$ si $x \in]a, b[$ y $f(x) = 0$ en caso contrario.*

DEMOSTRACIÓN: La función $h_1(x) = h(x - a)$ se anula sólo en los puntos $x \leq a$ y la función $h_2(b - x)$ se anula sólo en los puntos $x \geq b$, luego su producto se anula sólo en los puntos exteriores al intervalo $]a, b[$. ■



La figura muestra la función correspondiente al intervalo $[-1, 1]$.

A su vez:

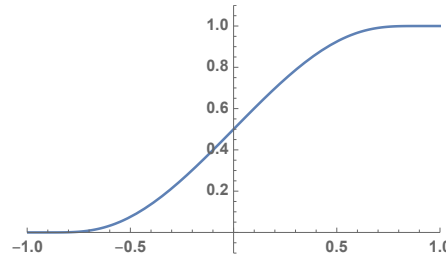
Teorema 5.14 *Dados números reales $a < b$ existe una función $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^∞ tal que $g(x) = 0$ si $x \leq a$, $g(x) = 1$ si $x \geq b$ y g es estrictamente creciente en el intervalo $[a, b]$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función en las condiciones del teorema anterior y sea $M = \int_a^b f(x) dx > 0$. Entonces, la función

$$g(x) = \frac{1}{M} \int_a^x f(x) dx$$

cumple lo pedido. Por 4.57 sabemos que $g'(x) = f(x)/M$, lo que implica a su vez que $g \in C^\infty(\mathbb{R})$, así como que g es estrictamente creciente en $[a, b]$ (pues tiene derivada positiva) y que g es constante en $]-\infty, a]$ y en $[b, +\infty[$ (pues tiene derivada nula). Por último, es obvio que $g(a) = 0$ y $g(b) = 1$. ■

La figura muestra la gráfica de la función construida en el teorema anterior para el intervalo $[-1, 1]$. Con modificaciones obvias podemos construir funciones infinitamente derivables que pasan de tomar cualquier valor constante a cualquier otro valor constante mediante un intervalo de transición de cualquier longitud prefijada.



Esto prueba que las funciones de clase C^∞ son “flexibles” al contrario que las funciones holomorfas, que son “rígidas”, en virtud del principio de prolongación analítica [IC 7.27], según el cual, una función holomorfa que sea constante en un intervalo, tiene que ser constante en todo su dominio (si éste es conexo).

Las funciones trigonométricas Para terminar esta sección vamos a revisar la construcción analítica de las funciones seno y coseno que llevamos a cabo en la sección [ITAn 5.1].

La geometría euclídea permite definir las funciones trigonométricas $\operatorname{sen} x$ y $\operatorname{cos} x$, que cumplen las propiedades enunciadas en el teorema [G 3.43]. En realidad, estas funciones dependen de la elección de una unidad de amplitud de ángulos. Si llamamos π a la amplitud de un ángulo llano, entonces la función $\operatorname{sen} x$ está definida sobre \mathbb{R} y tiene periodo 2π , es decir, $\operatorname{sen}(x + 2\pi) = \operatorname{sen} x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Así definido, el valor de π es arbitrario, pues podemos tomar cualquier número real como medida de un ángulo llano. Si queremos que existan ángulos unitarios deberemos exigir que $\pi > 1/2$. Por ejemplo, si tomamos como unidad de ángulo el grado sexagesimal, entonces $\pi = 180$.

Supongamos que unas funciones que cumplen el teorema [G 3.43] son derivables, y vamos a calcular sus derivadas. En primer lugar, como el coseno tiene un máximo en 0, ha de ser $\operatorname{cos}' 0 = 0$. En cualquier otro punto tenemos

$$\begin{aligned} \operatorname{cos}' x &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{cos}(x+h) - \operatorname{cos} x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{cos} x \operatorname{cos} h - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} h - \operatorname{cos} x}{h} \\ &= \operatorname{cos} x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{cos} h - 1}{h} - \operatorname{sen} x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} h}{h} \\ &= \operatorname{cos} x \operatorname{cos}' 0 - \operatorname{sen} x \operatorname{sen}' 0 = -\operatorname{sen} x \operatorname{sen}' 0. \end{aligned}$$

Si llamamos $k = \operatorname{sen}' 0$ concluimos que $\operatorname{cos}' x = -k \operatorname{sen} x$, y similarmente llegamos a que $\operatorname{sen}' x = k \operatorname{cos} x$.

Ahora bien, podemos cambiar las funciones seno y coseno por $\operatorname{sen}(x/k)$ y $\operatorname{cos}(x/k)$. Geométricamente esto significa fijar una unidad de ángulos. Entonces tenemos $\operatorname{sen}' x = \operatorname{cos} x$ y $\operatorname{cos}' x = -\operatorname{sen} x$.

Vemos entonces que las funciones seno y coseno son infinitamente derivables, y sus derivadas están uniformemente acotadas por 1, luego el teorema 5.11 nos asegura que las series de Taylor deben converger en \mathbb{R} a las funciones respectivas. Puesto que $\operatorname{sen} 0 = 0$ y $\operatorname{cos} 0 = 1$, las series han de ser las que consideramos en la definición siguiente:

Definición 5.15 Llamaremos *seno* y *coseno* a las funciones definidas por las series de potencias

$$\operatorname{sen} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}, \quad \operatorname{cos} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}.$$

El teorema 3.60 implica que ambas series tienen radio de convergencia infinito, por lo que convergen en todo el plano complejo. Una prueba alternativa está implícita en la demostración del teorema siguiente:

Teorema 5.16 Para todo $z \in \mathbb{C}$ se cumple

$$\operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \operatorname{cos} z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$

DEMOSTRACIÓN:

$$\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n z^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n z^n}{n!}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n + (-i)^n}{2} \frac{z^n}{n!}.$$

Ahora bien, la sucesión $(i^n + (-i)^n)/2$ es simplemente

$$1, \quad 0, \quad -1, \quad 0, \quad 1, \quad 0, \quad -1, \quad 0 \quad \dots$$

luego queda la serie del coseno. Similarmente se razona con el seno. ■

Derivando término a término las series de Taylor se concluye fácilmente que

$$\operatorname{sen}' x = \cos x, \quad \operatorname{cos}' x = -\operatorname{sen} x.$$

Las fórmulas siguientes son todas consecuencias sencillas del teorema anterior:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}^2 z + \operatorname{cos}^2 z &= 1 \\ \operatorname{sen}(x + y) &= \operatorname{sen} x \operatorname{cos} y + \operatorname{cos} x \operatorname{sen} y, \\ \operatorname{cos}(x + y) &= \operatorname{cos} x \operatorname{cos} y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y, \\ e^{iz} &= \operatorname{cos} z + i \operatorname{sen} z. \end{aligned}$$

La primera fórmula implica que si $x \in \mathbb{R}$ entonces $-1 \leq \operatorname{sen} x, \operatorname{cos} x \leq 1$. De la última se sigue que para todo $x, y \in \mathbb{R}$ se cumple

$$e^{x+iy} = e^x (\operatorname{cos} y + i \operatorname{sen} y),$$

con lo que tenemos descrita la exponencial compleja en términos de la exponencial real y de las funciones seno y coseno reales.

El hecho de que $\operatorname{sen}' 0 = \operatorname{cos} 0 = 1$ equivale a

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1,$$

que es otra propiedad fundamental del seno.

Usando derivadas podemos probar que las funciones trigonométricas reales son periódicas más fácilmente que como lo hicimos en la sección [ITAn 5.1]. El punto más delicado es demostrar que $\operatorname{cos} x$ se anula en algún $x \neq 0$. Para ello probaremos que el coseno es menor o igual que los cuatro primeros términos de su serie de Taylor:

$$\operatorname{cos} x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}.$$

Esto equivale a probar que $1 - x^2/2 + x^4/24 - \operatorname{cos} x \geq 0$ para $x \geq 0$. Puesto que esta función vale 0 en 0, basta probar que su derivada es positiva. Dicha derivada es $\operatorname{sen} x - x + x^3/6$. Esta función vale también 0 en 0, luego para probar que es positiva (para $x \geq 0$) basta ver que su derivada lo es. Dicha derivada es $\operatorname{cos} x - 1 + x^2/2$. Por el mismo argumento derivamos una vez más y obtenemos $x - \operatorname{sen} x$. Al derivar una vez más llegamos a $1 - \operatorname{cos} x$, que sabemos que es positiva.

Vemos que la gráfica del polinomio de Taylor de grado 4 en 0 de $\operatorname{cos} x$ toma valores negativos. De hecho un simple cálculo nos da que en $\sqrt{3}$ toma el valor $-1/8$, luego $\operatorname{cos} \sqrt{3} \leq -1/8$. Como $\operatorname{cos} 0 = 1$, por continuidad existe un punto $0 < x < \sqrt{3}$ tal que $\operatorname{cos} x = 0$.

Sea $A = \{x > 0 \mid \cos x = 0\}$. El conjunto A es la antiimagen de $\{0\}$ por la aplicación coseno restringida a $[0, +\infty[$. Como $\{0\}$ es cerrado y \cos es continua, A es un cerrado. El ínfimo de un conjunto está en su clausura, luego $F = \inf A \in A$ y así $\cos F = 0$. Es obvio que $F \geq 0$, y como $\cos 0 \neq 0$, ha de ser $0 < F < \sqrt{3}$.

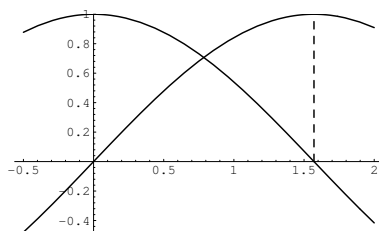
Es costumbre llamar $\pi = 2F$. Así, se cumple $0 < \pi < 2\sqrt{3}$, $\cos(\pi/2) = 0$, pero $\cos x > 0$ en el intervalo $[0, \pi/2[$.

Ahora, como el coseno es la derivada del seno, resulta que $\sin x$ es estrictamente creciente en el intervalo $[0, \pi/2]$. Como $\sin 0 = 0$, resulta que $\sin x \geq 0$ en $[0, \pi/2]$. Concretamente, $\sin(\pi/2)$ es un número positivo que cumple

$$\sin^2(\pi/2) + \cos^2(\pi/2) = \sin^2(\pi/2) + 0 = 1,$$

luego $\sin(\pi/2) = 1$.

Además, $\cos' x = -\sin x \leq 0$ en $[0, \pi/2]$, luego el coseno es estrictamente decreciente en $[0, \pi/2]$. En resumen, tenemos demostrado lo que refleja la gráfica siguiente:



Incidentalmente hemos probado una desigualdad que a veces es de interés: si $x \geq 0$ entonces $\sin x \leq x$. Más en general, $|\sin x| \leq |x|$.

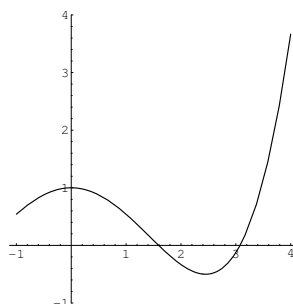
El comportamiento de las funciones seno y coseno fuera del intervalo $[0, \pi/2]$ se deduce de las relaciones trigonométricas que ya hemos probado. Por ejemplo, expresando $\pi = \pi/2 + \pi/2$ obtenemos $\sin \pi = 0$, $\cos \pi = -1$, y a su vez de aquí $\sin 2\pi = 0$, $\cos 2\pi = 1$. Ahora

$$\sin(x + 2\pi) = \sin x, \quad \cos(x + 2\pi) = \cos x,$$

lo que prueba que ambas funciones son periódicas y basta estudiarlas en el intervalo $[0, 2\pi]$.

Teorema 5.17 Sea $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$ y sea $a \in \mathbb{R}$. Entonces existe un único número real $\theta \in [a, a + 2\pi[$ tal que $z = |z|e^{i\theta} = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$.

DEMOSTRACIÓN: Sea $z/|z| = x + iy$. Entonces $x^2 + y^2 = 1$. Distinguimos cuatro casos: según el signo de x e y . Todos son análogos, así que supondremos por ejemplo $x \leq 0$, $y \geq 0$. Más concretamente tenemos $-1 \leq x \leq 0$. En el



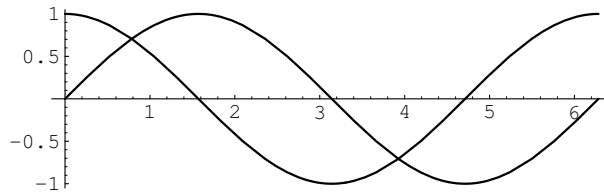
intervalo $[\pi, 3\pi/2]$ se cumple $\cos \pi = -1$, $\cos 3\pi/2 = 0$, luego por continuidad existe un número $\phi \in [\pi, 3\pi/2]$ tal que $\cos \phi = x$. Entonces $1 = x^2 + y^2 = \cos^2 \phi + \sin^2 \phi$, por lo que $y^2 = \sin^2 \phi$ y, como ambos son negativos, ha de ser $y = \sin \phi$. Así pues, $z = |z|(\cos \phi + i \sin \phi) = |z|e^{i\phi}$.

Existe un número entero p tal que $\theta = 2p\pi + \phi \in [a, a + 2\pi[$. Entonces, teniendo en cuenta que $e^{2p\pi i} = 1$, resulta que $z = |z|e^{i\phi}e^{2p\pi i} = |z|e^{i\theta}$.

La unicidad se debe a que si $|z|e^{i\theta_1} = |z|e^{i\theta_2}$, entonces $e^{i(\theta_1 - \theta_2)} = 1$, luego $\cos(\theta_1 - \theta_2) = 1$ y $\sin(\theta_1 - \theta_2) = 0$, ahora bien, $\cos x = 1$ y $\sin x = 0$ sólo ocurre en $x = 0$ en el intervalo $[0, 2\pi[$, luego sólo ocurre en los números reales de la forma $2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$. Así pues $\theta_1 - \theta_2 = 2k\pi$, y si ambos están en el intervalo $[a, a + 2\pi[$, ha de ser $\theta_1 = \theta_2$. ■

Un *argumento* de un número complejo $z \neq 0$ es un número real θ tal que $z = |z|e^{i\theta}$. Hemos probado que cada número complejo no nulo tiene un único argumento en cada intervalo $[a, a + 2\pi[$. En particular en el intervalo $[0, 2\pi[$.

A partir de lo que ya hemos probado es fácil demostrar que las funciones $\sin x$ y $\cos x$ que hemos construido aquí satisfacen todas las propiedades del teorema [G 3.43], por lo que el teorema [G 3.44] nos asegura que son las mismas consideradas en [G 3.43]. En particular, la hipótesis que habíamos hecho de que $\sin x$ y $\cos x$ son derivables ya no es una hipótesis, sino que las funciones derivables $\sin x$ y $\cos x$ que hemos construido son las que ya habíamos considerado en [G 3.43]. He aquí sus gráficas en $[0, 2\pi[$:



Hay que tener presente que para conseguir que la derivada del seno fuera el coseno hemos tenido que fijar una medida de ángulos concreta. El ángulo de medida 1 respecto a esta unidad, es decir, el ángulo que forman los vectores $(1, 0)$ y $(\cos 1, \sin 1)$, recibe el nombre de *radián*.

A partir de aquí supondremos al lector familiarizado con las funciones trigonométricas ($\sin x$, $\cos x$, $\tan x$) y las hiperbólicas ($\sinh x$, $\cosh x$, $\tanh x$) estudiadas en el capítulo V de [ITAn] y en el capítulo I de [IC].

5.2 Funciones diferenciables

Pasamos ya a estudiar el concepto de función diferenciable que en el capítulo V de [IC] estudiamos únicamente para el caso de funciones de dos o tres variables reales. La definición [IC 5.1] se generaliza trivialmente a funciones con valores en \mathbb{R}^m :

Definición 5.18 Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ una función definida en un abierto A y sea $a \in A$. Diremos que f es *diferenciable* en A si existe una aplicación lineal $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ tal que¹

$$\lim_{v \rightarrow 0} \frac{f(a+v) - f(a) - \phi(v)}{\|v\|} = 0.$$

La interpretación geométrica de esta definición es que, cuando se cumple, la función $g(x) = f(a) + \phi(x-a)$ es la función afín que más se parece a $f(x)$ en un entorno de a suficientemente pequeño, donde “la que más se parece” se interpreta como que, mediante un cambio de escala suficientemente grande, podemos conseguir que la diferencia entre $f(x)$ y $g(x)$ en una bola unitaria de centro a sea siempre menor que cualquier $\epsilon > 0$ prefijado. Remitimos a la discusión tras la definición [IC 5.1] para más detalles sobre esto.

A veces es útil esta caracterización inmediata de la diferenciableidad:

Teorema 5.19 Una función $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ definida en un abierto A es diferenciable en un punto $a \in A$ si y sólo si existe una aplicación lineal $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ y una función $E : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ definida en un entorno de 0 y continua en 0 tal que $E(0) = 0$ y, para todo $v \in U$,

$$f(a+v) - f(a) = \phi(v) + \|v\|E(v).$$

DEMOSTRACIÓN: Si f es diferenciable en a y ϕ cumple la definición de diferenciableidad, basta definir

$$E(v) = \begin{cases} \frac{f(a+v) - f(a) - \phi(v)}{\|v\|} & \text{si } v \neq 0, \\ 0 & \text{si } v = 0, \end{cases}$$

y es claro que la diferenciableidad de f equivale a la continuidad de E en 0. Recíprocamente, si ϕ cumple el enunciado, es inmediato que la continuidad de E en 0 implica la diferenciableidad de f en a . ■

Nota Enseguida veremos que la aplicación ϕ que cumple la definición de diferenciableidad es única, y la representaremos por $\phi(v) = df(a)(v)$, por lo que, en estos términos, la diferenciableidad de una función $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ en un punto a implica que, para todo $x \in A$

$$f(x) - f(a) = df(x-a) + \|x-a\|E_a(x-a),$$

donde E_a es una función definida en un entorno de 0 continua en 0 y que cumple $E(0) = 0$. ■

Para probar la unicidad de la aplicación lineal ϕ observamos que si $h \in \mathbb{R}$ tiende a 0 y $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, entonces hv también tiende a 0. Por lo tanto, restringiendo el límite de la definición de diferenciableidad tenemos que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+hv) - f(a) - \phi(hv)}{\|hv\|} = 0.$$

¹En los espacios \mathbb{R}^n consideramos siempre la norma euclídea.

Usando que ϕ es lineal vemos que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\|v\|} \left(\frac{f(a + hv) - f(a)}{|h|} - \frac{h}{|h|} \phi(v) \right) = 0.$$

Claramente podemos eliminar el factor $1/\|v\|$ sin que el límite varíe. Ahora multiplicamos por la función $\mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \{\pm 1\}$ dada por $h \mapsto |h|/h$ y usamos que el producto de una función que tiende a 0 por otra acotada tiende a 0:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + hv) - f(a)}{h} - \phi(v) = 0,$$

Por lo tanto existe

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + hv) - f(a)}{h} = \phi(v).$$

Definición 5.20 Dada una función $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ definida en un abierto, un punto $a \in A$ y un vector $v \in \mathbb{R}^n$ no nulo, llamaremos *derivada direccional* de f en a y en la dirección de v al vector

$$f'(a; v) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + hv) - f(a)}{h} \in \mathbb{R}^m.$$

Es fácil ver que si existe $f'(a; v)$ entonces existe $f'(a; \lambda v) = \lambda f'(a; v)$ para todo $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Por lo tanto no perdemos generalidad si suponemos $\|v\| = 1$. Si existe $f'(a; v)$, para valores pequeños de h tenemos la aproximación

$$f(a + hv) \approx f(a) + h f'(a; v),$$

con lo que la expresión $h f'(a; v)$ aproxima el incremento que experimenta $f(a)$ cuando la variable se incrementa en hv .

En estos términos hemos demostrado lo siguiente:

Teorema 5.21 Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ una función diferenciable en un punto $a \in A$. Sea $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ una aplicación lineal que cumpla la definición de diferenciabilidad. Entonces, para cada vector $v \in \mathbb{R}^n$ no nulo existe $f'(a; v)$ y además $\phi(v) = f'(a; v)$.

En particular vemos que, si f es diferenciable en a , existe una única aplicación lineal ϕ que cumple la definición de diferenciabilidad, a saber, la dada por $\phi(v) = f'(a; v)$.

Definición 5.22 Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ una función diferenciable en un punto $a \in A$. Llamaremos *diferencial* de f en a a la única aplicación lineal, representada por $df(a) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, que cumple

$$\lim_{v \rightarrow 0} \frac{f(a + v) - f(a) - df(a)(v)}{\|v\|} = 0.$$

El teorema anterior afirma que para todo $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ se cumple

$$df(a)(v) = f'(a; v).$$

Veamos unos casos triviales de funciones diferenciables:

Teorema 5.23 Si $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ es una aplicación lineal, entonces ϕ es diferenciable en todo punto $a \in \mathbb{R}^n$ y $d\phi(a) = \phi$.

DEMOSTRACIÓN: Basta observar que se cumple la definición de diferenciabilidad tomando la propia ϕ como la aplicación lineal requerida. ■

Por otra parte, para funciones de una variable, la diferenciabilidad equivale a la derivabilidad:

Teorema 5.24 Sea $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ una función definida en un abierto A y sea $a \in A$. Entonces f es diferenciable en a si y sólo si existe la derivada de f en a . Además en tal caso $df(a)(h) = f'(a)h$.

DEMOSTRACIÓN: Si f es derivable en a entonces existe

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = k,$$

luego

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a) - kh}{h} = 0,$$

y si multiplicamos por la función acotada $h/|h|$ el límite sigue siendo 0, es decir, tenemos

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a) - kh}{|h|} = 0,$$

lo que indica que f es diferenciable y que $df(a)(h) = f'(a)h$. El recíproco se prueba igualmente: partiendo de que $df(a)(h) = kh$ se llega a que existe $f'(a) = k$. ■

Teorema 5.25 Si $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ es una función definida en un abierto, digamos $f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$, y $a \in A$, entonces f es diferenciable en a si y sólo si lo es cada función coordenada f_i , y en tal caso

$$df(a)(v) = (df_1(a)(v), \dots, df_m(a)(v)).$$

Esto se deduce inmediatamente de la definición de diferenciabilidad, teniendo en cuenta que el límite de una función vectorial es el vector formado por los límites de sus funciones coordenadas. ■

Según hemos visto, el cálculo de la diferencial de una función se reduce al cálculo de sus derivadas direccionales, y ahora vamos a ver que éste puede reducirse a su vez al cálculo de sus derivadas parciales:

Definición 5.26 Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ una función definida en un abierto y $a \in A$. Se define la *derivada parcial* de f respecto a la i -ésima variable en el punto a como

$$D_i f(a) = \left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_a = f'(a; e_i),$$

donde $e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ es el vector con un 1 en la posición i -ésima.

Explícitamente:

$$D_i f(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_1, \dots, a_i + h, \dots, a_n) - f(a)}{h},$$

luego si h es pequeño

$$f(a_1, \dots, a_i + h, \dots, a_n) \approx f(a) + h D_i f(a).$$

En otras palabras, la expresión $h D_i f(a)$ aproxima el incremento que experimenta $f(a)$ cuando incrementamos h unidades la variable x_i .

Si f admite derivada parcial i -ésima en todos los puntos de A entonces tenemos definida la función $D_i f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$.

Observemos que la derivada parcial $D_i f(a)$ de una función $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ en un punto a es exactamente lo mismo que la derivada en a_i de la función $\phi(x_i) = f(a_1, \dots, x_i, \dots, a_n)$, por lo que el cálculo de derivadas parciales de funciones escalares (es decir, con valores en \mathbb{R}) se reduce en la práctica a la aplicación de las reglas de derivación para funciones de una variable. Para una función vectorial $f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$ se cumple trivialmente que

$$f'(a; v) = (f'_1(a; v), \dots, f'_m(a; v))$$

y, en particular, que

$$D_i f(a) = (D_i f_1(a), \dots, D_i f_m(a)).$$

Con esto podemos dar ya una expresión explícita para la diferencial de una función. Como se trata de una aplicación lineal, está determinada por su matriz en las bases canónicas de \mathbb{R}^n y \mathbb{R}^m , que es la matriz que tiene por filas las imágenes de los vectores e_i de la base canónica de \mathbb{R}^n . Esto nos lleva a la definición siguiente:

Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ una función diferenciable en un punto $a \in A$. Llamaremos *matriz jacobiana* de f en a a la matriz $Jf(a)$ que tiene por filas a las derivadas parciales $D_i f(a)$.

Más concretamente, si $f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$, la entrada de la fila i , columna j de la matriz $Jf(a)$ es $D_i f_j(a)$.

Si $m = 1$, la matriz jacobiana recibe el nombre de *vector gradiente* y se representa así:

$$\nabla f(a) = (D_1 f(a), \dots, D_n f(a)).$$

En estos términos, si f es diferenciable en a , tenemos que

$$df(a)(v) = vJf(a).$$

Cuando $m = 1$, usando el producto escalar en lugar del producto de matrices tenemos también

$$df(a)(v) = \nabla f(a)v = \left. \frac{\partial f}{\partial x_1} \right|_a v_1 + \cdots + \left. \frac{\partial f}{\partial x_n} \right|_a v_n.$$

Consideremos en particular la función polinómica x_i , es decir, la función $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $(x_1, \dots, x_n) \mapsto x_i$. Es claro que $\nabla x_i(a) = e_i$, luego $dx_i(a)(v) = v_i$. Por consiguiente, la ecuación anterior puede escribirse como

$$df(a)(v) = \left. \frac{\partial f}{\partial x_1} \right|_a dx_1(a)(v) + \cdots + \left. \frac{\partial f}{\partial x_n} \right|_a dx_n(a)(v).$$

Como esto es válido para todo v , tenemos la ecuación funcional

$$df(a) = \left. \frac{\partial f}{\partial x_1} \right|_a dx_1(a) + \cdots + \left. \frac{\partial f}{\partial x_n} \right|_a dx_n(a).$$

Si $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable en todos los puntos de A podemos considerar df , dx_i como funciones de A en el espacio de aplicaciones lineales de \mathbb{R}^n en \mathbb{R} y la ecuación anterior nos da a su vez la ecuación funcional

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n.$$

Esta fórmula expresa que si cada variable experimenta un incremento infinitesimal dx_i entonces la función f experimenta un incremento df de la forma que se indica. Como en el caso de una variable, la expresión ha de entenderse en realidad como una igualdad funcional que a cada vector de incrementos $(\Delta x_1, \dots, \Delta x_n)$ le asigna una aproximación del incremento Δf que experimenta la función. Similarmente, en el caso $m > 1$ tenemos

$$df = (df_1, \dots, df_m) = (dx_1, \dots, dx_n) Jf.$$

Aunque suponemos al lector familiarizado con estos conceptos, expuestos ya en la sección [IC 5.1], damos a continuación un ejemplo explícito del cálculo de una diferencial:

Ejemplo Consideremos la función $]0, +\infty[\times]-\pi, \pi[\rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \theta, \\ y &= \rho \operatorname{sen} \theta. \end{aligned}$$

Se trata de la función que proporciona las coordenadas cartesianas de un punto del plano a partir de sus coordenadas polares. Podríamos demostrar que es diferenciable aplicando la definición, pero más adelante será inmediato

(teorema 5.36 que es el mismo que [IC 5.7]), así que vamos a aceptar que lo es y calcularemos su diferencial. Para ello calculamos la matriz jacobiana:

$$J(x, y)(\rho, \theta) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \rho} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \operatorname{sen} \theta \\ -\rho \operatorname{sen} \theta & \rho \cos \theta \end{pmatrix}$$

Por consiguiente

$$\begin{aligned} (dx, dy) &= (d\rho, d\theta) \begin{pmatrix} \cos \theta & \operatorname{sen} \theta \\ -\rho \operatorname{sen} \theta & \rho \cos \theta \end{pmatrix} \\ &= (\cos \theta d\rho - \rho \operatorname{sen} \theta d\theta, \operatorname{sen} \theta d\rho + \rho \cos \theta d\theta), \end{aligned}$$

o más claramente:

$$\begin{aligned} dx &= \cos \theta d\rho - \rho \operatorname{sen} \theta d\theta, \\ dy &= \operatorname{sen} \theta d\rho + \rho \cos \theta d\theta. \end{aligned}$$

También podríamos haber calculado dx y dy de forma independiente. ■

Interpretación del gradiente El gradiente de una función diferenciable tiene una interpretación muy simple:

Si $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es una función diferenciable en un punto $p \in U$ tal que $\nabla f(p) \neq 0$, entonces $\nabla f(p)$ es la dirección de máximo crecimiento de f en el punto p , es decir, la dirección en la cual la derivada direccional unitaria toma su valor máximo. Similarmente, $-\nabla f$ es la dirección de máximo decrecimiento (la dirección en la que la derivada direccional unitaria toma su valor mínimo).

En efecto, sabemos que, si $v \in \mathbb{R}^n$ es un vector de norma 1, la derivada direccional de f en la dirección de v es

$$f'(p, v) = df(p)(v) = \nabla f(p) \cdot v = \|\nabla f(p)\| \cos \alpha,$$

donde α es el ángulo de v forma con el gradiente. Obviamente, el valor máximo se alcanza cuando $\alpha = 0$, es decir, cuando $v = \nabla f(p) / \|\nabla f(p)\|$, en cuyo caso el valor de la derivada direccional es precisamente $\|\nabla f(p)\|$. Similarmente, el valor mínimo se alcanza cuando $\alpha = \pi$, con lo que la dirección de máximo decrecimiento es $v = -\nabla f(p) / \|\nabla f(p)\|$.

Si $\nabla f(p) = 0$ entonces todas las derivadas direccionales son nulas. Esto puede deberse a que f toma en p un valor máximo o mínimo, aunque no es necesariamente así. ■

Terminamos esta sección demostrando un teorema importante sobre el cálculo de las derivadas parciales de una integral paramétrica:

Teorema 5.27 Sea U abierto en \mathbb{R}^n , K un espacio métrico compacto, μ una medida de Borel finita en K , sean $f : U \times K \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua y $g : K \rightarrow \mathbb{R}$ una función medible acotada. Definamos $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ como la función dada por

$$F(x) = \int_K f(x, y)g(y) d\mu(y),$$

donde $d\mu(y)$ indica que la integral se realiza respecto a la variable $y \in K$, considerando constante a x . Entonces F es continua en U y, si existe

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} : U \times K \rightarrow \mathbb{R}$$

y es continua en $U \times K$, entonces existe

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = \int_K \frac{\partial f}{\partial x_i}(x, y)g(y) d\mu(y)$$

y es continua en U .

DEMOSTRACIÓN: Tomemos $x_0 \in U$ y sea B una bola cerrada de centro x_0 contenida en U . Sea M una cota de g en K . Como f es uniformemente continua en $B \times K$, dado $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $\|x - x_0\| < \delta$, entonces $|f(x, y) - f(x_0, y)| < \epsilon/M\mu(K)$, para todo $y \in K$. Por consiguiente, si $\|x - x_0\| < \delta$ se cumple

$$|F(x) - F(x_0)| \leq \int_K |f(x, y) - f(x_0, y)| |g(y)| d\mu(y) \leq \epsilon.$$

Esto prueba que F es continua en x_0 .

Supongamos ahora la hipótesis de derivabilidad respecto a x_i y sea e_i el i -ésimo vector de la base canónica de \mathbb{R}^n . Como $\partial f/\partial x_i$ es uniformemente continua en $B \times K$, existe un $\delta > 0$ tal que si $|h| < \delta$ entonces

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0 + he_i, y) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0, y) \right| < \frac{\epsilon}{M\mu(K)}, \quad \text{para todo } y \in K.$$

Si $|h| < \delta$ e $y \in K$, el teorema del valor medio nos da que existe un $r \in \mathbb{R}$ tal que $|r| < |h|$ y

$$f(x_0 + he_i, y) - f(x_0, y) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0 + re_i, y)h.$$

(Notemos que r depende de y .) Por consiguiente,

$$\begin{aligned} & \left| \frac{f(x_0 + he_i, y)g(y) - f(x_0, y)g(y)}{h} - \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0, y)g(y) \right| \\ &= \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0 + re_i, y) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0, y) \right| |g(y)| < \frac{\epsilon}{\mu(K)}. \end{aligned}$$

De aquí se sigue claramente que

$$\left| \frac{F(x_0 + he_i) - F(x_0)}{h} - \int_K \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0, y) g(y) d\mu(y) \right| < \epsilon.$$

siempre que $|h| < \delta$, luego existe

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x_0 + he_i) - F(x_0)}{h} = \int_K \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0, y) g(y) d\mu(y).$$

Además la derivada es continua por la primera parte de este mismo teorema. ■

Como primera aplicación consideremos la expresión integral para el resto de Taylor dada por el teorema 5.12. El cambio de variable $t = a + s(x - a)$, cuyo inverso es $x - t = (1 - s)(x - a)$, nos da la expresión alternativa

$$R_n(f)(x) = \frac{(x - a)^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1 - s)^n f^{(n+1)}(a + s(x - a)) ds,$$

de modo que

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k + r_n(f)(x)(x - a)^{n+1},$$

donde

$$r_n(f)(x) = \frac{1}{n!} \int_0^1 (1 - s)^n f^{(n+1)}(a + s(x - a)) ds$$

es una función continua en a y, más aún, por el teorema anterior es de clase C^m si f es de clase C^{n+1+m} . En particular es de clase C^∞ si f lo es. En resumen:

Teorema 5.28 Sea $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase $C^{n+m+1}(A)$ y $a \in A$. Entonces

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k + r(x)(x - a)^{n+1},$$

donde r es una función de clase C^m en un entorno de a , que viene dada por

$$r(x) = \frac{1}{n!} \int_0^1 (1 - s)^n f^{(n+1)}(a + s(x - a)) ds.$$

5.3 Propiedades de las funciones diferenciables

Probamos ahora para dimensiones arbitrarias los resultados enunciados en la sección [IC 5.2] y demostrados para dimensiones bajas en la sección [IC 5.3]. Ya hemos probado [IC 5.5], mientras que el teorema siguiente es [IC 5.6]:

Teorema 5.29 Si $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ es diferenciable en un punto a , entonces f es continua en a .

DEMOSTRACIÓN: Tenemos que

$$\lim_{v \rightarrow 0} \frac{f(a+v) - f(a) - df(a)(v)}{\|v\|} = 0.$$

Multiplicamos por $\|v\|$, que también tiende a 0, con lo que

$$\lim_{v \rightarrow 0} f(a+v) - f(a) - df(a)(v) = 0.$$

La aplicación $df(a)$ es lineal, luego es continua, luego tiende a 0, luego

$$\lim_{v \rightarrow 0} f(a+v) - f(a) = 0,$$

y esto equivale a

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a),$$

luego f es continua en a . ■

Las propiedades algebraicas de la derivabilidad de funciones son válidas también para la diferenciabilidad:

Teorema 5.30 Sean f y g funciones diferenciables en un punto a . Entonces

- a) $f + g$ es diferenciable en a y $d(f + g)(a) = df(a) + dg(a)$.
- b) Si $\alpha \in \mathbb{R}$ entonces αf es diferenciable en a y $d(\alpha f)(a) = \alpha df(a)$.
- c) fg es diferenciable en a y $d(fg)(a) = g(a)df(a) + f(a)dg(a)$.
- d) si $g(a) \neq 0$ entonces f/g es diferenciable en a y

$$d(f/g)(a) = \frac{g(a)df(a) - f(a)dg(a)}{g^2(a)}.$$

DEMOSTRACIÓN: Veamos por ejemplo la propiedad c). Por 5.19 tenemos que

$$f(a+v) - f(a) = df(a)(v) + \|v\|E(v), \quad g(a+v) - g(a) = dg(a)(v) + \|v\|F(v),$$

para ciertas funciones E y F continuas en 0 que cumplen $E(0) = 0$ y $F(0) = 0$. Entonces

$$\begin{aligned} (fg)(a+v) - (fg)(a) &= f(a+v)g(a+v) - f(a)g(a+v) + f(a)g(a+v) - f(a)g(a) \\ &= (f(a+v) - f(a))g(a+v) + f(a)(g(a+v) - g(a)). \end{aligned}$$

Sustituimos $f(a+v) - f(a)$, $g(a+v)$ y $g(a+v) - g(a)$ usando las igualdades anteriores. Al operar queda

$$\begin{aligned} (fg)(a+v) - (fg)(a) - (g(a)df(a) + f(a)dg(a)) &= df(a)(v)dg(a)(v) \\ + \|v\|(df(a)(v)F(v) + E(v)g(a) + E(v)dg(a)(v) + f(a)F(v)) &+ \|v\|^2 E(v)F(v). \end{aligned}$$

Hay que probar que el miembro derecho dividido entre $\|v\|$ tiende a 0. El único término para el que esto no es inmediato es

$$\frac{df(a)(v)dg(a)(v)}{\|v\|},$$

pero $\|df(a)(v)dg(a)(v)\| \leq \|df(a)\| \|dg(a)\| \|v\|^2$, luego la norma del cociente está mayorada por

$$\|df(a)\| \|dg(a)\| \|v\|,$$

que tiende a 0. ■

Veamos ahora la versión en varias variables de la regla de la cadena.

Teorema 5.31 (Regla de la cadena) *Consideremos $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ y $g : B \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ de modo que $f[A] \subset B$. Si f es diferenciable en un punto $a \in A$ y g es diferenciable en $f(a)$, entonces $f \circ g$ es diferenciable en a y*

$$d(f \circ g)(a) = df(a) \circ dg(f(a)).$$

DEMOSTRACIÓN: Llamemos $h = f \circ g$ y $b = f(a)$. Dado un $v \in \mathbb{R}^n$ tal que $a + v \in A$, tenemos

$$h(a + v) - h(a) = g(f(a + v)) - g(f(a)) = g(b + u) - g(b),$$

donde $u = f(a + v) - f(a)$. Consideremos las funciones

$$E(v) = \frac{f(a + v) - f(a) - df(a)(v)}{\|v\|}, \quad F(u) = \frac{g(b + u) - g(b) - dg(b)(u)}{\|u\|},$$

definidas en un entorno de 0 y con límite 0. Se cumple

$$\begin{aligned} h(a + v) - h(a) &= dg(b)(u) + \|u\|F(u) = dg(b)(df(a)(v) + \|v\|E(v)) + \|u\|F(u) \\ &= \left(df(a) \circ dg(f(a)) \right)(v) + \|v\| dg(b)(E(v)) + \|u\|F(u). \end{aligned}$$

Basta probar que

$$\lim_{v \rightarrow 0} dg(b)(E(v)) + \frac{\|u\|}{\|v\|} F(u) = 0,$$

para lo cual basta a su vez probar que la función $\|u\|/\|v\|$ está acotada en un entorno de 0. Ahora bien,

$$\frac{\|u\|}{\|v\|} = \frac{\|df(a)(v) + \|v\|E(v)\|}{\|v\|} \leq \|df(a)\| + \|E(v)\|,$$

y, como E tiende a 0 en 0, está acotada en un entorno de 0. ■

Como consecuencia, $J(f \circ g)(a) = Jf(a)Jg(f(a))$.

Equivalentemente, supongamos que tenemos una función $z = z(y_1, \dots, y_m)$, donde a su vez $y_i = y_i(x_1, \dots, x_n)$. Entonces la regla de la cadena nos dice que, si las funciones son diferenciables,

$$\nabla z^t(x_1, \dots, x_n) = Jy(x_1, \dots, x_n) \nabla z^t(y_1, \dots, y_m),$$

luego

$$\frac{\partial z}{\partial x_i} = \frac{\partial z}{\partial y_1} \frac{\partial y_1}{\partial x_i} + \dots + \frac{\partial z}{\partial y_m} \frac{\partial y_m}{\partial x_i}.$$

Ésta es la forma explícita de la regla de la cadena.

En otros términos, si tenemos dz expresado como combinación lineal de dy_1, \dots, dy_m y cada dy_i como combinación lineal de dx_1, \dots, dx_n , es decir,

$$dz = (dy_1, \dots, dy_m) \nabla z(y_1, \dots, y_m)^t,$$

$$(dy_1, \dots, dy_m) = (dx_1, \dots, dx_n) Jy(x_1, \dots, x_n),$$

entonces, para expresar a dz como combinación lineal de dx_1, \dots, dx_n basta sustituir el segundo grupo de ecuaciones en la primera, pues así obtenemos

$$(dx_1, \dots, dx_n) Jy(x_1, \dots, x_n) \nabla z(y_1, \dots, y_m)^t = (dx_1, \dots, dx_n) \nabla z^t(x_1, \dots, x_n),$$

es decir, $dz(x_1, \dots, x_n)$.

Ejemplo Consideremos las funciones $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$. Suponemos $\rho > 0$, con lo que $(x, y) \neq (0, 0)$ y todas las funciones son diferenciables (véase el teorema 5.36, más abajo). Claramente

$$\begin{aligned} dz &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} dy, \\ dx &= \cos \theta d\rho - \rho \sin \theta d\theta, \\ dy &= \sin \theta d\rho + \rho \cos \theta d\theta. \end{aligned}$$

Entonces

$$dz = \frac{\rho \cos \theta}{\rho} (\cos \theta d\rho - \rho \sin \theta d\theta) + \frac{\rho \sin \theta}{\rho} (\sin \theta d\rho + \rho \cos \theta d\theta) = d\rho,$$

que es el mismo resultado que se obtiene si diferenciamos directamente la función compuesta $z(\rho, \theta) = \rho$.

Es importante comprender que el paso del primer grupo de ecuaciones a la expresión de dz en función de ρ y θ no es una mera manipulación algebraica, sino que se fundamenta en la regla de la cadena. En este caso particular, lo que dice la regla de la cadena es:

Si llamamos $z(\rho, \theta)$ a la función que resulta de sustituir x e y en $z(x, y)$ por sus valores en función de ρ y θ , entonces la diferencial de esta función es la que resulta de sustituir x, y, dx, dy en $dz(x, y)$ por sus valores en función de $\rho, \theta, d\rho, d\theta$, respectivamente.

Y esto no es evidente en absoluto. ■

Otra aplicación de la regla de la cadena nos da una regla para derivar determinantes:

Teorema 5.32 (Jacobi) Si $A(t)$ es una matriz cuadrada cuyas coordenadas son funciones derivables de t , entonces

$$\frac{d|A|}{dt} = \text{Tr} \left(\text{adj}A \frac{dA}{dt} \right).$$

En particular, si $|A|$ no se anula,

$$\frac{d|A|}{dt} = \text{Tr}(A^{-1} \frac{dA}{dt}) |A|.$$

DEMOSTRACIÓN: Consideremos $|A|$ como función (polinómica) de los coeficientes a_{ij} de la matriz, de modo que

$$\frac{d|A|}{dt} = \sum_{ij} \frac{d|A|}{da_{ij}} \frac{da_{ij}}{dt}.$$

Para calcular la derivada respecto de a_{ij} desarrollamos el determinante por la fila i -ésima:

$$|A| = \sum_k a_{ik} \text{adj}^t(A)_{ik},$$

así

$$\frac{d|A|}{da_{ij}} = \sum_k \frac{da_{ik}}{da_{ij}} \text{adj}^t(A)_{ik} + \sum_k a_{ik} \frac{d \text{adj}^t(A)_{ik}}{da_{ij}} = \text{adj}^t(A)_{ij},$$

donde hemos usado que a_{ij} no aparece en $\text{adj}^t(A)_{ik}$, pues es el determinante de la submatriz de A que resulta de eliminar la fila i y la columna k . Así pues:

$$\frac{d|A|}{dt} = \sum_{i,j} \text{adj}^t(A)_{ij} \frac{da_{ij}}{dt} = \sum_{i,j} \text{adj}(A)_{ji} \frac{da_{ij}}{dt} = \sum_j (\text{adj}A \frac{dA}{dt})_j = \text{Tr}(\text{adj}A \frac{dA}{dt}).$$

■

Hay un caso particular de la regla de la cadena que conviene destacar. Es el que se da cuando tenemos una función escalar $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y una curva $x : I \rightarrow U$. Es habitual llamar también derivada de x a la n -tupla de las derivadas de las componentes de x , es decir, $x'(t) = (x'_1(t), \dots, x'_n(t))$, y la composición $g(t) = f(x(t))$ es una función $g : I \rightarrow \mathbb{R}$, luego podemos considerar su derivada $g'(t)$. La regla de la cadena permite expresar $g'(t)$ en términos de dg y x' . Para ello sólo tenemos que tener en cuenta que $g'(t) = dg(t)(1)$, y que $dx(t)(v) = x'(t)v$, por lo que la regla de la cadena nos da que

$$g'(t) = dg(t)(1) = df(x(t))(dx(t)(1)) = df(x(t))(x'(t)) = \nabla f(x(t)) \cdot x'(t).$$

He aquí un caso sencillo en el que se usa esta relación:

Teorema 5.33 Si $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ es una función diferenciable en un abierto conexo A y $df = 0$, entonces f es constante.

DEMOSTRACIÓN: Podemos suponer $m = 1$. Dados dos puntos $a, b \in A$, existe una poligonal contenida en A con extremos a y b . Basta probar que f toma el mismo valor en los vértices de la poligonal, luego en definitiva basta probar que si a y b son los extremos de un segmento contenido en A entonces $f(a) = f(b)$. Consideramos la función $\phi(t) = f(a + t(b - a))$ en $[0, 1]$ y le aplicamos el teorema del valor medio:

$$f(b) - f(a) = \phi'(t) = df(a + t(b - a))(b - a) = 0. \quad \blacksquare$$

Otra aplicación de la regla de la cadena es el análogo al teorema de Fermat sobre máximos y mínimos de funciones de una variable:

Definición 5.34 Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y $a \in A$. Diremos que f tiene un *mínimo relativo* en a si existe un entorno G de a tal que para todo $p \in G$ se cumple $f(p) \geq f(a)$. Similarmente se define un *máximo relativo*. Diremos que a es un *extremo relativo* si es un máximo o un mínimo relativo.

Teorema 5.35 Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable en un punto $a \in A$. Si f tiene un extremo relativo en a , entonces $df(a) = 0$.

DEMOSTRACIÓN: Sea $v \in \mathbb{R}^n$ y consideremos la función $\phi(h) = f(a + hv)$, para un cierto vector $v \in \mathbb{R}^n$, definida en un entorno de 0. Es claro que ϕ tiene un extremo relativo en 0. Sea $g(h) = a + hv$. Por la regla de la cadena

$$0 = \phi'(0) = d\phi(0)(1) = df(g(0))(dg(0)(1)) = df(a)(v). \quad \blacksquare$$

El teorema siguiente [IC 5.7] es el único criterio de diferenciability que necesitaremos en la práctica:

Teorema 5.36 Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, donde A es un abierto en \mathbb{R}^n . Si f tiene derivadas parciales continuas en A entonces f es diferenciable en A .

DEMOSTRACIÓN: Podemos suponer $m = 1$, pues si f tiene derivadas parciales continuas en A lo mismo vale para sus funciones coordenadas, y si éstas son diferenciables f también lo es.

Sea $a \in A$. Vamos a probar que f es diferenciable en a . Para ello basta probar que

$$\lim_{v \rightarrow 0} \frac{f(a + v) - f(a) - \sum_{i=1}^n D_i f(a) v_i}{\|v\|} = 0,$$

lo que a su vez equivale a que, dado $\epsilon > 0$, exista un $\delta > 0$ de modo que si $\|v\| < \delta$ entonces

$$\left| f(a + v) - f(a) - \sum_{i=1}^n D_i f(a) v_i \right| < \epsilon \|v\|.$$

Por la continuidad de las derivadas parciales tenemos que existe un $\delta > 0$ tal que si $\|y - a\| < \delta$ entonces $y \in A$ y $|D_i f(y) - D_i f(a)| < \epsilon/n$ para $i = 1, \dots, n$. Fijemos un v tal que $\|v\| < \delta$.

Definimos $F_i = f(a_1 + v_1, \dots, a_i + v_i, a_{i+1}, \dots, a_n)$. En particular, vemos que $f(a + v) = F_n$ y $f(a) = F_0$, luego

$$\begin{aligned} \left| f(a + v) - f(a) - \sum_{i=1}^n D_i f(a) v_i \right| &= \left| \sum_{i=1}^n (F_i - F_{i-1} - D_i f(a) v_i) \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^n |F_i - F_{i-1} - D_i f(a) v_i|. \end{aligned}$$

Así pues, (teniendo en cuenta que $|v_i| \leq \|v\|$) basta probar que

$$|F_i - F_{i-1} - D_i f(a) v_i| < \frac{\epsilon}{n} |v_i|,$$

para $i = 1, \dots, n$. Esto resulta de aplicar el teorema del valor medio a la función de una variable dada por

$$g_i(t) = f(a_1 + v_1, \dots, a_{i-1} + v_{i-1}, a_i + t v_i, a_{i+1}, \dots, a_n).$$

Esta función está definida en un intervalo abierto que contiene al intervalo $[0, 1]$, y el hecho de que f tenga derivadas parciales implica que g_i es derivable en su dominio. En particular es derivable en $]0, 1[$ y continua en $[0, 1]$. Además, es claro que

$$g_i'(t) = D_i f(a_1 + v_1, \dots, a_{i-1} + v_{i-1}, a_i + t v_i, a_{i+1}, \dots, a_n) v_i.$$

El teorema del valor medio nos da que existe $0 < t_0 < 1$ tal que

$$F_i - F_{i-1} = g_i(1) - g_i(0) = g_i'(t_0)(1 - 0).$$

Notemos que $y = (a_1 + v_1, \dots, a_{i-1} + v_{i-1}, a_i + t_0 v_i, a_{i+1}, \dots, a_n)$ cumple

$$\|y - a\| = \|(v_1, \dots, v_{i-1}, t_0 v_i, 0, \dots, 0)\| \leq \|v\| < \delta,$$

luego

$$|F_i - F_{i-1} - D_i f(a) v_i| = |D_i f(y) - D_i f(a)| |v_i| < \frac{\epsilon}{n} |v_i|,$$

como había que probar. ■

Definición 5.37 Supongamos que una función $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ admite derivada parcial respecto a una variable x_i en todo el abierto A . Si a su vez la función $D_i f$ admite derivada parcial respecto a la variable x_j en A , a esta derivada se la representa por $D_{ij} f$. También se usa la notación

$$D_{ij} f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Cuando el índice es el mismo se escribe

$$D_{ii}f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}.$$

Las funciones $D_{ij}f$ se llaman *derivadas segundas* de f . Más generalmente, la función $D_{i_1 \dots i_k}f$ será la función que resulta de derivar f respecto de i_1 , derivar dicha parcial respecto a i_2 , etc. Alternativamente,

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}^{k_1} \dots \partial x_{i_r}^{k_r}},$$

donde $k_1 + \dots + k_r = k$, representará la función que resulta de derivar k_1 veces f respecto a i_1 , luego k_2 veces la función resultante respecto a i_2 , etc. Estas funciones se llaman *derivadas parciales de orden k* de la función f .

Diremos que f es de clase C^k en A si existen todas sus derivadas parciales de orden k en A y todas ellas son continuas en A . En particular, las funciones de clase C^0 son las funciones continuas.

Obviamente una función es de clase C^{k+1} si y sólo si todas sus derivadas parciales son de clase C^k . El teorema anterior afirma que todas las funciones de clase C^1 son diferenciables. Si una función f es de clase C^2 , entonces sus derivadas parciales son de clase C^1 , luego son diferenciables, luego son continuas y por lo tanto f es también de clase C^1 . Por el mismo argumento se prueba en general que si $k \leq r$ entonces toda función de clase C^r es de clase C^k .

Las reglas de derivación justifican inmediatamente que la suma y el producto por un escalar de funciones de clase C^k es una función de clase C^k . El producto de funciones de clase C^k (con valores en \mathbb{R}) es de clase C^k . Lo mismo vale para el cociente si exigimos que el denominador no se anule.

Ejercicio: Probar que la composición de dos funciones de clase C^k es de clase C^k .

Ahora vamos a probar un teorema muy importante sobre derivadas sucesivas, pues nos dice que el orden de derivación no importa:

Teorema 5.38 (Teorema de Schwarz) Si $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ es una función de clase C^2 en el abierto A , entonces $D_{ij}f(a) = D_{ji}f(a)$.

DEMOSTRACIÓN: No perdemos generalidad si suponemos $m = 1$. También podemos suponer que $n = 2$, pues en general podemos trabajar con la función $F(x_i, x_j) = f(a_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, a_n)$.

Así pues, probaremos que $D_{12}f(a) = D_{21}f(a)$. Sea $a = (a_1, a_2)$. Consideremos la función

$$\Delta f(h) = f(a_1 + h, a_2 + h) - f(a_1 + h, a_2) - f(a_1, a_2 + h) + f(a_1, a_2),$$

definida en un entorno de 0. Vamos a probar que

$$D_{12}f(a) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\Delta f(h)}{h^2}.$$

Por simetría este límite será también $D_{21}f(a)$ y el teorema estará probado.

Dado $\epsilon > 0$, la continuidad de $D_{12}f$ en a implica que existe un $h_0 > 0$ tal que si $0 < k, k' < h_0$, entonces $|D_{12}f(a_1 + k, a_2 + k') - D_{12}f(a_1, a_2)| < \epsilon$.

Podemos tomar h_0 suficientemente pequeño para que si $0 < h < h_0$ la función

$$G(t) = f(t, a_2 + h) - f(t, a_2)$$

esté definida en el intervalo $[a_1, a_1 + h]$. Por el teorema del valor medio existe un número $0 < k < h$ tal que

$$\begin{aligned} \Delta f(h) &= G(a_1 + h) - G(a_1) = hG'(a_1 + k) \\ &= h(D_1f(a_1 + k, a_2 + h) - D_1f(a_1 + k, a_2)). \end{aligned}$$

Ahora aplicamos el teorema del valor medio a la función

$$H(t) = D_1f(a_1 + k, t)$$

en el intervalo $[a_2, a_2 + h]$, que nos da un número $0 < k' < h$ tal que

$$D_1f(a_1 + k, a_2 + h) - D_1f(a_1 + k, a_2) = D_{12}f(a_1 + k, a_2 + k')h.$$

En total tenemos que

$$\Delta f(h) = D_{12}f(a_1 + k, a_2 + k')h^2,$$

luego

$$\left| \frac{\Delta f(h)}{h^2} - D_{12}f(a) \right| = |D_{12}f(a_1 + k, a_2 + k') - D_{12}f(a)| < \epsilon,$$

siempre que $0 < h < h_0$. ■

El teorema de Schwarz implica claramente que al calcular cualquier derivada parcial de orden k de una función de clase C^k es irrelevante el orden en que efectuemos las derivadas.

Ahora probaremos el teorema de la función inversa [IC 5.16]. En realidad vamos a probar una versión más general y con una prueba mucho más conceptual que la dada en [IC]. Nos basaremos en el teorema siguiente:

Teorema 5.39 (Teorema de punto fijo de Banach) *Sea M un espacio métrico completo y $T : M \rightarrow M$ una aplicación tal que existe un número real $0 < \alpha < 1$ de modo que*

$$d(T(x), T(y)) \leq \alpha d(x, y), \quad \text{para todo } x, y \in M.$$

Entonces existe un único $x \in M$ tal que $T(x) = x$.

Las aplicaciones T que cumplen la propiedad indicada se llaman *contractivas*. Los puntos x que cumplen $T(x) = x$ se llaman *puntos fijos* de T . El teorema afirma, pues, que toda aplicación contractiva en un espacio métrico completo tiene un único punto fijo.

DEMOSTRACIÓN: Tomamos un punto arbitrario $x_0 \in M$ y consideramos la sucesión dada por $x_{n+1} = T(x_n)$. Por la propiedad de T , tenemos que

$$\begin{aligned} d(x_1, x_2) &= d(T(x_0), T(x_1)) \leq \alpha d(x_0, x_1), \\ d(x_2, x_3) &= d(T(x_1), T(x_2)) \leq \alpha d(x_1, x_2) = \alpha^2 d(x_0, x_1), \end{aligned}$$

y en general concluimos $d(x_n, x_{n+1}) \leq \alpha^n d(x_0, x_1)$. Aplicando la desigualdad triangular resulta, para $n < m$,

$$d(x_n, x_m) \leq \left(\sum_{i=n}^{m-1} \alpha^i \right) d(x_0, x_1) < \left(\sum_{i=n}^{\infty} \alpha^i \right) d(x_0, x_1) = \frac{\alpha^n}{1-\alpha} d(x_0, x_1).$$

El término de la derecha tiende a 0, lo que significa que la sucesión x_n es de Cauchy. Como el espacio M es completo existe $x = \lim_n x_n \in M$. Veamos que x es un punto fijo de T . Para ello observamos que

$$\begin{aligned} d(x, T(x)) &\leq d(x, x_n) + d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, T(x)) \\ &\leq (1+\alpha)d(x, x_n) + \alpha^n d(x_0, x_1). \end{aligned}$$

El último término tiende a 0, luego ha de ser $d(x, T(x)) = 0$, es decir, $T(x) = x$. Si y es otro punto fijo de T , entonces $d(T(x), T(y)) = d(x, y)$, en contradicción con la propiedad contractiva, luego el punto fijo es único. ■

Teorema 5.40 Sea $B \subset \mathbb{R}^n$ una bola abierta, sea $f : B \rightarrow \mathbb{R}^m$ una función de clase C^1 en B y sea $M > 0$ tal que

$$\left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right| \leq M$$

en todo punto de B . Entonces, para todo $x, y \in B$, se cumple que

$$\|f(y) - f(x)\| \leq mnM\|y - x\|.$$

DEMOSTRACIÓN: Sea $g_i(t) = f_i(x + t(y-x))$. Por el teorema del valor medio existe $0 < t_i < 1$ tal que

$$\begin{aligned} f_i(y) - f_i(x) &= g_i(1) - g_i(0) = g_i'(t_i)(1-0) = dg_i(t_i)(1) = \\ &df_i(x + t_i(y-x))(y-x) = \nabla f_i(x + t_i(y-x)) \cdot (y-x), \end{aligned}$$

donde hemos usado la regla de la cadena, así como que la diferencial de la función $t \mapsto x + t(y-x)$ es la función $h \mapsto (y-x)h$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} |f_i(y) - f_i(x)| &= \left| \sum_{j=1}^n D_j f_i(x + t_i(y-x))(y_j - x_j) \right| \leq \\ &M \sum_{j=1}^n |y_j - x_j| \leq Mn\|y - x\|, \end{aligned}$$

luego

$$\|f(y) - f(x)\| \leq \|f(y) - f(x)\|_1 \leq \sum_{i=1}^m Mn\|y - x\| = mnM\|y - x\|.$$

■

Teorema 5.41 (de la función inversa) *Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función de clase C^k (con $1 \leq k \leq \infty$) definida en un abierto U y sea $a \in U$ tal que $|Jf(a)| \neq 0$. Entonces existen abiertos $U_0 \subset U$ y $V_0 \subset \mathbb{R}^n$ tales que $f|_{U_0} : U_0 \rightarrow V_0$ es biyectiva, de clase C^k y su inversa es también de clase C^k .*

DEMOSTRACIÓN: La función $g(x) = f(x+a) - f(a)$ está definida en el abierto $U - a$ (la imagen de U por el homeomorfismo $x \mapsto x - a$), es de clase C^1 y cumple $g(0) = 0$. Si cumple el teorema, es decir, si existen abiertos $U_0^* \subset (U - a)$ y $V_0^* \subset \mathbb{R}^n$ tales que $g|_{U_0^*} : U_0^* \rightarrow V_0^*$ es biyectiva, de clase C^1 y con inversa de clase C^1 , entonces f también cumple el teorema, tomando $U_0 = U_0^* + a$ y $V_0 = V_0^* + f(a)$. Por consiguiente, no perdemos generalidad si suponemos que $a = 0$ y que $f(0) = 0$.

La hipótesis $|Jf(0)| \neq 0$ equivale a que $\phi = df(0) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un isomorfismo, y las aplicaciones lineales son de clase C^∞ (sus funciones coordenadas son polinomios), luego podemos considerar la aplicación $g = f \circ \phi^{-1} : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, que también es de clase C^1 , cumple $g(0) = 0$ y, por la regla de la cadena, $dg(0) = \phi \circ \phi^{-1}$ es la identidad, luego $|Jg(0)| = 1 \neq 0$.

Si probamos que g cumple el teorema, es decir, si $g|_{U_0} : U_0 \rightarrow V_0^*$ es biyectiva con inversa de clase C^1 , entonces $f|_{U_0} : U_0 \rightarrow V_0 = \phi[V_0^*]$ es biyectiva con inversa de clase C^1 . Así pues, no perdemos generalidad si suponemos que $df(0)$ es la identidad.

Podemos considerar a $|Jf(a)|$ como función de a (que es un polinomio en las derivadas parciales de las funciones f_i) y, como éstas son continuas, tenemos que $|Jf(a)|$ es una función continua de a , luego podemos tomar $\eta > 0$ tal que $B_\eta(0) \subset U$ y si $\|a\| < \eta$ entonces $|Jf(a)| \neq 0$.

Más aún, la continuidad en 0 de las derivadas parciales nos permite exigir que si $\|a\| < \eta$ entonces

$$\left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \Big|_a - \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \Big|_0 \right| < \frac{1}{2n^2}.$$

Sea $g : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por $g(a) = f(a) - a$, de modo que

$$dg(a) = df(a) - a = df(a) - df(0).$$

Por lo tanto, si $a \in B_\eta(0)$,

$$\left| \frac{\partial g_i}{\partial x_j} \Big|_a \right| = \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \Big|_a - \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \Big|_0 \right| < \frac{1}{2n^2},$$

y el teorema anterior nos da que si $x, y \in B_\eta(0)$, entonces

$$\|g(y) - g(x)\| < \frac{1}{2}\|y - x\|.$$

En términos de f y llamando $y = x + h$, es:

$$\|f(x+h) - f(x) - h\| \leq \frac{1}{2}\|h\|. \quad (5.3)$$

Sea $\delta = \eta/2$. Definimos $D = B'_\delta(0)$ y $V_0 = B_{\delta/2}(0)$. Vamos a ver que para cada $y \in V_0$ existe un único $x \in D$ tal que $f(x) = y$.

Para ello definimos $T : D \rightarrow D$ mediante $T(x) = x + (y - f(x))$, de modo que $y = f(x)$ equivale a $T(x) = x$.

Tenemos que probar que $T(x) \in D$. Para ello hacemos $x = 0$ en (5.3), de modo que, si $\|h\| < \delta$, se cumple $\|f(h) - h\| \leq (1/2)\|h\| \leq \delta/2$. Esto vale para $h = x$, con lo que

$$\|T(x)\| \leq \|y\| + \|f(x) - x\| < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta.$$

Usando (5.3) de nuevo vemos que T es contractiva:

$$\|T(x+h) - T(x)\| = \|f(x+h) - f(x) - h\| \leq \frac{1}{2}\|h\|.$$

Puesto que D es un espacio métrico completo, el teorema de punto fijo nos da que existe un único $x \in D$ tal que $T(x) = x$, lo cual equivale a que existe un único $x \in D$ tal que $f(x) = y$.

Más aún, si nos fijamos en la demostración del teorema de punto fijo, éste se obtiene partiendo de un elemento arbitrario de D , por ejemplo $x_0 = 0$, y calculando la sucesión $x_{n+1} = T(x_n)$, de modo que $x_1 = T(0) = y$. Y en la prueba se ve que

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \frac{1}{2^n}d(x_0, x_1) = \frac{1}{2^n}\|y\|.$$

Por lo tanto,

$$\|x_n\| \leq \|x_n - x_{n-1}\| + \|x_{n-1} - x_{n-2}\| + \cdots + \|x_1 - x_0\| \leq \|y\| \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2^i} < 2\|y\|.$$

El punto fijo x es el límite de la sucesión $\{x_n\}_{n=0}^\infty$, luego $\|x\| \leq 2\|y\| < \delta$. Así pues, la antiimagen de y cumple, de hecho, que $x \in B_\delta(0)$.

Definimos $U_0 = f^{-1}[V_0] \cap B_\delta(0)$, que es abierto en \mathbb{R}^n y $0 \in U_0$. Hemos probado que cada $y \in V_0$ tiene una única antiimagen $g(y) \in U_0$, con lo que tenemos definida una aplicación $g : V_0 \rightarrow U_0$ que es inversa de $f|_{U_0} : U_0 \rightarrow V_0$.

Sólo falta probar que g es de clase C^k . Veamos en primer lugar que es continua en un punto $y \in V_0$. Para ello tomamos otro punto $y + k \in V_0$, llamamos $x = g(y)$, $x + h = g(y + k)$. Entonces (5.3) nos da que

$$\|k - h\| \leq \frac{1}{2}\|h\|.$$

Por lo tanto,

$$\|h\| \leq \|h - k\| + \|k\| \leq \frac{1}{2}\|h\| + \|k\|,$$

luego $\|h\| \leq 2\|k\|$, que equivale a $\|g(y+k) - g(y)\| \leq 2\|k\|$, que implica trivialmente la continuidad de g en y .

Veamos ahora que g es diferenciable en y . Manteniendo la notación anterior, sabemos que f es diferenciable en x , lo que significa que

$$f(x+h) - f(x) = h \cdot Jf(x) + \|h\|E(h),$$

donde E es una función continua en 0 que cumple $E(0) = 0$. Equivalentemente, llamando $J = Jf(x)$ (que es una matriz inversible, por la elección de η),

$$k = (g(y+k) - g(y))J + \|h\|E(h),$$

de donde

$$g(y+k) - g(y) = kJ^{-1} - \|h\|E(h)J^{-1},$$

o también

$$g(y+k) - g(y) = kJ^{-1} + \|k\|F(k),$$

donde $F(0) = 0$ y, para $k \neq 0$,

$$F(k) = -\frac{\|g(y+k) - g(y)\|}{\|k\|}E(g(y+k) - g(y))J^{-1}.$$

Si probamos que $\lim_{k \rightarrow 0} F(k) = 0$ estará probada la diferenciabilidad de g en y .

Ahora bien, usando que $\|h\| \leq 2\|k\|$, vemos que

$$\|F(k)\| \leq 2\|E(g(y+k) - g(y))J^{-1}\|$$

y, teniendo en cuenta que g es continua, es evidente que la última expresión tiende a 0 cuando k tiende a 0. Así tenemos que g es diferenciable, y que su matriz jacobiana en cada punto x es $Jf(g(y))^{-1}$ (como requiere, de hecho, la regla de la cadena).

La expresión [Al 6.13] para la matriz inversa

$$Jg(y) = Jf(x)^{-1} = \frac{1}{|Jf(g(y))|} \widetilde{Jf(g(y))}$$

prueba que las derivadas parciales de g (las entradas de $Jg(y)$) son continuas y, más aún, son de clase C^{k-1} si f es de clase C^k , luego g es también una función de clase C^k . ■

Nota Hemos probado que si una función $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de clase C^1 cumple $|Jf(a)| \neq 0$ (es decir, si $df(a) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un isomorfismo), entonces f es inyectiva en un entorno de a . Podría conjeturarse que si $|Jf(a)| \neq 0$ para todo $a \in U$, entonces f es inyectiva, pero esto no es cierto. El teorema sólo prueba que f es localmente inyectiva, es decir, que es inyectiva en un entorno

de cada punto, pero eso no implica que sea inyectiva. Un contraejemplo lo proporciona la función $f(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$ (vista como aplicación de \mathbb{C} en \mathbb{C} , se trata simplemente de la exponencial compleja). Su matriz jacobiana es

$$\begin{pmatrix} e^x \cos y & e^x \sin y \\ -e^x \sin y & e^x \cos y \end{pmatrix}$$

y su determinante en cada punto (x, y) es $e^{2x} \neq 0$, pero es claro que f no es inyectiva. Por ello en la variante siguiente del teorema de la función inversa (que es la enunciada en [IC 5.16]) tenemos que tomar como hipótesis la inyectividad. ■

Teorema 5.42 (Teorema de la función inversa) *Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función inyectiva de clase C^k (con $1 \leq k \leq \infty$) definida en un abierto U y tal que se cumpla $|Jf(x)| \neq 0$ para todo $x \in U$. Entonces $V = f[U]$ es abierto y $f^{-1} : V \rightarrow U$ es de clase C^k en V .*

DEMOSTRACIÓN: Dado $y \in V$, tomamos $x = f^{-1}(y) \in U$. Por el teorema anterior existen abiertos $x \in U_0 \subset U$, $y \in V_0 \subset \mathbb{R}^n$ tales que $f|_{U_0} : U_0 \rightarrow V_0$ es biyectiva, luego $y \in V_0 \subset V$, lo que prueba que V es abierto, así como que f^{-1} es de clase C^k en V_0 , luego en un entorno de cada punto de V , luego en todo V . ■

5.4 Ecuaciones diferenciales

En [IC] vimos numerosos ejemplos particulares que sugieren que las soluciones de una ecuación diferencial de orden n quedan completamente determinadas por unas condiciones iniciales, es decir, especificando los valores que debe tomar la solución y sus $n - 1$ primeras derivadas en un punto dado. Sin embargo, sólo demostramos un resultado general de unicidad para los sistemas de ecuaciones lineales de primer orden [IC 1.33], fácilmente generalizable a sistemas de orden arbitrario (como [IC 1.34]), pero siempre lineales. En esta sección demostraremos teoremas generales de existencia y unicidad.

Recordemos que una *ecuación diferencial ordinaria* es una relación de la forma

$$f(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n)}(t)) = 0,$$

donde $f : D \subset \mathbb{R}^{n+2} \rightarrow \mathbb{R}$ e $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ es una función definida en un intervalo I derivable n veces. Normalmente la función y es desconocida, y entonces se plantea el problema de *integrar* la ecuación, es decir, encontrar todas las funciones y que la satisfacen. El adjetivo “ordinaria” se usa para indicar que la función incógnita tiene una sola variable. Las ecuaciones que relacionan las derivadas parciales de una función de varias variables se llaman *ecuaciones diferenciales en derivadas parciales*, pero no vamos a ocuparnos de ellas.

Dentro de las ecuaciones ordinarias, nos vamos a ocupar únicamente de un caso más simple pero suficientemente general: aquel en que tenemos despejada la derivada de orden mayor, es decir, una ecuación de la forma

$$y^{(n)}(t) = f(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t)).$$

El número n se llama *orden* de la ecuación. El caso más simple es la ecuación de primer orden $y' = f(t)$. Sabemos que si la ecuación tiene solución de hecho hay infinitas de ellas pero, en un intervalo dado, cada una se diferencia de las demás en una constante, de modo que una solución queda completamente determinada cuando se especifica un valor $y(t_0) = y_0$. Veremos que esto sigue siendo válido para todas las ecuaciones de primer orden. Por ello se define un *problema de Cauchy* como

$$\left. \begin{aligned} y' &= f(t, y) \\ y(t_0) &= y_0 \end{aligned} \right\}$$

Resolver el problema significa encontrar una función y definida alrededor de t_0 de modo que satisfaga la ecuación diferencial y cumpla la condición inicial $y(t_0) = y_0$. Probaremos que bajo condiciones muy generales los problemas de Cauchy tienen solución única.

Toda la teoría se aplica igualmente al caso de sistemas de ecuaciones diferenciales. De hecho un sistema de ecuaciones puede verse como una única ecuación vectorial. Basta considerar que $y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $f : D \subset \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Conviene trabajar en un contexto algo más general permitiendo que las ecuaciones diferenciales dependan de parámetros. Por ejemplo, si una partícula de masa m se mueve por un campo de fuerzas de la forma $F(x, t)$, entonces su trayectoria $x(t)$ está determinada por su posición y su velocidad inicial y por la ecuación diferencial de segundo orden

$$mx''(t) = F(x(t), t),$$

donde la masa m es un parámetro, de modo que la solución será realmente de la forma $x(t, m)$, pues objetos de masas distintas seguirán trayectorias distintas.

5.4.1 Ecuaciones diferenciales de primer orden

El resultado básico sobre existencia y unicidad de las soluciones de un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden es el siguiente:

Teorema 5.43 Sean $t_0, a, b_1, \dots, b_n, y_1^0, \dots, y_n^0$ números reales. Consideremos una función continua

$$f : [t_0 - a, t_0 + a] \times \prod_{i=1}^n [y_i^0 - b_i, y_i^0 + b_i] \times K \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

donde K es un espacio métrico compacto. Sea M una cota de f respecto a la norma $\|\cdot\|_\infty$ en \mathbb{R}^n . Supongamos que existe una constante N tal que

$$\|f(t, y, \mu) - f(t, z, \mu)\|_\infty \leq N\|y - z\|_\infty.$$

Entonces el problema de Cauchy

$$\left. \begin{aligned} y'(t, \mu) &= f(t, y, \mu) \\ y(t_0, \mu) &= y_0 \end{aligned} \right\}$$

tiene solución única $y : [t_0 - h_0, t_0 + h_0] \times K \rightarrow \mathbb{R}^n$, continua en su dominio, donde h_0 es cualquier número real tal que

$$0 < h_0 \leq \min \left\{ a, \frac{b_1}{M}, \dots, \frac{b_n}{M} \right\}, \quad h_0 < \frac{1}{N}.$$

Se entiende que derivada de y que aparece en el problema de Cauchy es respecto de la variable t . Teóricamente deberíamos usar la notación de derivadas parciales, pero es costumbre usar la notación del análisis de una variable para evitar que el problema parezca una ecuación en derivadas parciales, cuando en realidad no lo es.

DEMOSTRACIÓN: Sea h_0 en las condiciones indicadas, sea $I = [t - h_0, t + h_0]$, sea $D = \prod_{i=1}^n [y_i^0 - b_i, y_i^0 + b_i]$ y sea $M = C(I \times K, D)$, que es un espacio de Banach con la norma supremo. Definimos el operador $T : M \rightarrow M$ mediante²

$$T(y)(t, \mu) = y^0 + \int_{t_0}^t f(t, y(t, \mu), \mu) dt.$$

Hemos de probar que $T(y)(t, \mu) \in D$ y que $T(y)$ es una aplicación continua. En primer lugar,

$$\begin{aligned} |T(y)_i(t, \mu) - y_i^0| &= \left| \int_{t_0}^t f_i(t, y, \mu) dt \right| \leq \int_{t_0}^t |f_i(t, y, \mu)| dt \leq M \left| \int_{t_0}^t dt \right| \\ &= M|t - t_0| \leq Mh_0 \leq b_i. \end{aligned}$$

Esto prueba que $T(y)(t, \mu) \in D$. La continuidad es consecuencia de un cálculo rutinario:

$$\begin{aligned} \|T(y)(t_1, \mu_1) - T(y)(t_2, \mu_2)\|_\infty &= \max_i \left| \int_{t_0}^{t_1} f_i(t, y, \mu_1) dt - \int_{t_0}^{t_2} f_i(t, y, \mu_2) dt \right| \\ &\leq \max_i \left(\left| \int_{t_0}^{t_1} f_i(t, y, \mu_1) dt - \int_{t_0}^{t_1} f_i(t, y, \mu_2) dt \right| + \right. \\ &\quad \left. \left| \int_{t_0}^{t_1} f_i(t, y, \mu_2) dt - \int_{t_0}^{t_2} f_i(t, y, \mu_2) dt \right| \right) \\ &\leq \max_i \left(\left| \int_{t_0}^{t_1} (f_i(t, y, \mu_1) - f_i(t, y, \mu_2)) dt \right| + \left| \int_{t_2}^{t_1} f_i(t, y, \mu_2) dt \right| \right) \\ &\leq \max_i \left| \int_{t_0}^{t_1} |f_i(t, y, \mu_1) - f_i(t, y, \mu_2)| dt \right| + M|t_1 - t_2|. \end{aligned}$$

²Aquí y en lo sucesivo entenderemos que la integral de una función con valores en \mathbb{R}^n es la n -tupla de las integrales de sus funciones coordenadas.

Sea $\epsilon > 0$. La función $f_i(t, y(t, \mu), \mu)$ es uniformemente continua en el compacto $I \times K$, luego existe un $\delta > 0$ tal que si $d(\mu_1, \mu_2) < \delta$, entonces $|f_i(t, y, \mu_1) - f_i(t, y, \mu_2)| < \epsilon/2h_0$. Podemos suponer que esto vale para todo $i = 1, \dots, n$, y si suponemos también que $|t_1 - t_2| < \epsilon/2M$ concluimos que

$$\|T(y)(t_1, \mu_1) - T(y)(t_2, \mu_2)\|_\infty < \epsilon.$$

Esto prueba la continuidad de $T(y)$ en el punto (t_1, μ_1) .

Ahora probamos que T es contractivo, con constante $\alpha = Nh_0 < 1$. En efecto,

$$\begin{aligned} \|T(y)(t, \mu) - T(z)(t, \mu)\|_\infty &= \max_i \left| \int_{t_0}^t (f_i(t, y(t, \mu), \mu) - f_i(t, z(t, \mu), \mu)) dt \right| \\ &\leq \max_i \left| \int_{t_0}^t N \|y(t, \mu) - z(t, \mu)\|_\infty dt \right| \leq N \max_i \left| \int_{t_0}^t \|y - z\| dt \right| \leq Nh_0 \|y - z\|. \end{aligned}$$

Por definición de norma supremo resulta $\|T(y) - T(z)\| \leq \alpha \|y - z\|$. El teorema 5.39 implica ahora la existencia de una única función $y \in M$ tal que

$$y(t, \mu) = y^0 + \int_{t_0}^t f(t, y, \mu) dt,$$

pero es claro que esto equivale a ser solución del problema de Cauchy, luego éste tiene solución única. ■

En la práctica, hay una hipótesis más fuerte que la condición de Lipschitz que hemos exigido en el teorema anterior pero que es más fácil de comprobar. Se trata de exigir simplemente que la función f sea de clase C^1 :

Teorema 5.44 Sea $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ una función de clase C^1 en un abierto D . Para todo subconjunto compacto convexo $C \subset D$ existe una constante N tal que si $y, z \in C$ entonces $\|f(y) - f(z)\|_\infty \leq N \|y - z\|_\infty$.

DEMOSTRACIÓN: Si llamamos f_1, \dots, f_m a las funciones coordenadas de f , basta probar que $|f_i(y) - f_i(z)| \leq N_i \|y - z\|_\infty$ para todo $y, z \in C$, pues tomando como N la mayor de las constantes N_i se cumple la desigualdad buscada. Equivalentemente, podemos suponer que $m = 1$.

Dados $y, z \in C$, consideramos la función $g(h) = f(y + h(z - y))$, definida en $[0, 1]$, pues C es convexo. Se cumple $g(0) = f(y)$, $g(1) = f(z)$. Por el teorema del valor medio existe $0 < h_0 < 1$ tal que

$$f(z) - f(y) = g'(h_0) = df(\xi)(z - y) = \nabla f(\xi)(z - y),$$

donde $\xi = y + h_0(z - y) \in C$. Sea N_0 una cota del módulo de las derivadas parciales de f (que por hipótesis son continuas) en el compacto C . Entonces

$$|f(z) - f(y)| = \left| \sum_{i=1}^n D_i f(\xi)(z_i - y_i) \right| \leq \sum_{i=1}^n N_0 \|z - y\|_\infty = nN_0 \|z - y\|_\infty. \quad \blacksquare$$

En realidad, si tomamos como hipótesis que la ecuación diferencial sea de clase C^1 obtenemos no sólo la continuidad de la solución respecto de los parámetros, sino también la derivabilidad:

Teorema 5.45 Sea $f : D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función de clase C^1 en el abierto D . Sea $(t_0, y_0, \mu) \in D$. Entonces el problema de Cauchy

$$\left. \begin{aligned} y'(t, \mu) &= f(t, y, \mu) \\ y(t_0, \mu) &= y_0 \end{aligned} \right\}$$

tiene solución única definida y de clase C^1 en un entorno de (t_0, μ) .

DEMOSTRACIÓN: Tomamos un entorno C de (t_0, y_0, μ) que esté contenido en D y sea producto de intervalos cerrados de centro cada una de las componentes del punto. En particular es convexo y compacto. El teorema anterior garantiza que se cumplen las hipótesis del teorema de existencia y unicidad. Falta probar que la función $y(t, \mu)$ es de clase C^1 en su dominio.

Obviamente y es derivable respecto de t y la derivada es continua. Veamos que lo mismo sucede con las demás variables. Sea e_i un vector de la base canónica de \mathbb{R}^m . Consideramos un punto (t_1, μ_1) del dominio de y . La función

$$Q(t, \mu, h) = \frac{y(t, \mu + he_i) - y(t, \mu)}{h}$$

está definida en los puntos de un entorno de $(t_1, \mu_1, 0)$ para los que $h \neq 0$. Hemos de probar que tiene límite cuando h tiende a 0. Claramente

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{f(t, y(t, \mu + he_i), \mu + he_i) - f(t, y(t, \mu), \mu)}{h}.$$

Llamemos

$$E(p, x) = \begin{cases} \frac{f(p+x) - f(p) - df(p)(x)}{\|x\|} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Se comprueba que es continua en un entorno de $(t_1, y(t_1, \mu_1), \mu_1, 0)$. Sólo hay que ver la continuidad en los puntos de la forma $(q, 0)$. Se demuestra para cada función coordinada independientemente, y a su vez para ello se aplica el teorema del valor medio a la función $f_j(p+tx)$. El resultado es que

$$E_j(p, x) = (\nabla f_j(p') - \nabla f_j(p)) \frac{x}{\|x\|},$$

donde p' es un punto entre p y $p+x$, y ahora basta aplicar la continuidad de las derivadas parciales de f . En términos de E tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial t} &= df(t, y(t, \mu), \mu)(0, Q(t, \mu, h), e_i) \\ &+ \|(0, Q(t, \mu, h), 1)\| \frac{|h|}{h} E(0, y(t, \mu + he_i) - y(t, \mu), h). \end{aligned}$$

Más brevemente

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = df(t, y(t, \mu), \mu)(0, Q(t, \mu, h), e_i) + \|(0, Q(t, \mu, h), 1)\| E^*(t, \mu, h),$$

entendiendo que $E^*(t, \mu, h)$ es continua en un entorno de $(t_1, \mu_1, 0)$ y se anula en los puntos donde $h = 0$.

Esto significa que Q es la solución de una ecuación diferencial determinada por la función continua

$$g(t, Q, \mu, h) = df(t, y(t, \mu), \mu)(0, Q, e_i) + \|(0, Q, 1)\| E^*(t, \mu, h),$$

donde μ y h son parámetros. Esta función no es diferenciable, pero cumple claramente la hipótesis del teorema 5.43. Concretamente la consideramos definida en un producto de intervalos de centros $t_1, Q(t_1, \mu_1, h)$ (para un h fijo) por un entorno compacto K de (μ_1, h) que contenga a $(\mu_1, 0)$. Si tomamos como condición inicial en el punto (t_1, μ_1, h) la determinada por la función Q que ya tenemos definida, el teorema 5.43 nos garantiza la existencia de solución continua en un conjunto de la forma $[t_1 - r, t_1 + r] \times K$. Por la unicidad la solución debe coincidir con la función Q que ya teníamos. En particular coincidirá con ella en los puntos de un entorno de $(t_1, \mu_1, 0)$ tales que $h \neq 0$. De aquí se sigue que existe

$$\lim_{h \rightarrow 0} Q(t_1, \mu_1, h) = \frac{\partial y}{\partial \mu_i}(t_1, \mu_1).$$

Más aún, esta derivada satisface la ecuación diferencial

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial y}{\partial \mu_i} = df(t, y(t, \mu), \mu) \left(0, \frac{\partial y}{\partial \mu_i}, e_i \right).$$

Esto implica que es continua, luego y es de clase C^1 . ■

Hemos probado que las derivadas respecto a los parámetros de una ecuación diferencial determinada por una función de clase C^k satisfacen una ecuación diferencial de clase C^{k-1} . Una simple inducción prueba entonces que la solución y de una ecuación de clase C^k es una función de clase C^k .

Notemos que la solución y de un problema de Cauchy puede considerarse también como función de las condiciones iniciales, es decir, $y(t, \mu, t_0, y_0)$. Del teorema anterior se deduce que y es continua respecto a todas las variables, es decir, como función definida en un entorno de (t_0, μ, t_0, y_0) en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Para ello basta ver que si hacemos $z = y(t, \mu, t_0, y_0) - y_0$ y $r = t - t_0$, el problema

$$\left. \begin{array}{l} y'(t) = f(t, y, \mu) \\ y(t_0) = y_0 \end{array} \right\}$$

es equivalente a

$$\left. \begin{array}{l} z'(r) = f(r + t_0, z + y_0, \mu) \\ z(0) = 0 \end{array} \right\}$$

en el sentido de que una solución de uno da una del otro mediante los cambios de variable indicados.

El segundo miembro del segundo problema es una función $g(r, z, \nu)$, donde $\nu = (t_0, y_0, \mu) \in D$. Concretamente, el dominio de g es el abierto

$$\{(r, z, t_0, y_0, \mu) \mid (r + t_0, z + y_0, \mu) \in D, (t_0, y_0, \mu) \in D\}.$$

Una solución z del segundo problema definida en un entorno de $(0, t_0, y_0, \mu)$ se traduce en una solución $y(t, t_0, y_0, \mu)$ del primer problema definida en un entorno de (t_0, t_0, y_0, μ) . En definitiva tenemos el siguiente enunciado, más completo, del teorema de existencia y unicidad:

Teorema 5.46 Sea $f : D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función de clase C^k ($k \geq 1$) en el abierto D . Sea $(t_0, y_0, \mu) \in D$. Entonces el problema de Cauchy

$$\left. \begin{aligned} y'(t, t_0, y_0, \mu) &= f(t, y, \mu) \\ y(t_0, t_0, y_0, \mu) &= y_0 \end{aligned} \right\}$$

tiene solución única de clase C^k en un entorno de (t_0, t_0, y_0, μ) .

Con más precisión, fijados (t_0, y_0, μ) , observamos que si tenemos dos intervalos abiertos I_1, I_2 que contengan a t_0 de modo que existan soluciones $y_i : I_i \rightarrow \mathbb{R}^n$ que sean soluciones del problema de Cauchy con $y_i(t_0) = y_0$, entonces la unicidad de la solución garantiza que $y_1|_{I_1 \cap I_2} = y_2|_{I_1 \cap I_2}$. Por lo tanto, podemos considerar la unión de todos los intervalos en estas condiciones, y así obtenemos un intervalo abierto $I_{t_0, y_0, \mu}$ en el que está definida la *solución máxima* $y_{t_0, y_0, \mu} : I_{t_0, y_0, \mu} \rightarrow \mathbb{R}^n$, que tiene la propiedad adicional de no ser prolongable a ningún intervalo mayor. El teorema anterior garantiza que

$$G = \bigcup_{(t_0, y_0, \mu) \in D} I_{t_0, y_0, \mu} \times \{t_0\} \times \{y_0\} \times \{\mu\}$$

es un abierto en $\mathbb{R} \times D$ donde está definida la *solución máxima* $y(t, t_0, y_0, \mu)$, la cual no es prolongable a ningún abierto mayor.

Resulta ilustrativo adoptar una notación que sugiera una interpretación física “típica” de los problemas de Cauchy en la que, en particular, la variable t se concibe como el tiempo:

Definición 5.47 Un *campo de velocidades* es una aplicación $\vec{v} : \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ de clase C^k (con $k \geq 1$), donde Ω es un abierto en \mathbb{R}^n . La solución máxima $\vec{r} : G \rightarrow \Omega$ (donde G es un abierto en $\mathbb{R}^2 \times \Omega$) del problema de Cauchy

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \vec{r}}{\partial t}(t, t_0, \vec{r}_0) &= \vec{v}(t, \vec{r}(t, t_0, \vec{r}_0)) \\ \vec{r}(t_0, t_0, \vec{r}_0) &= \vec{r}_0 \end{aligned} \right\}$$

recibe el nombre de *flujo* asociado al campo de velocidades.

Observemos que, aparte del cambio de notación, sólo hemos introducido dos pequeñas simplificaciones respecto de la situación general planteada en el

teorema anterior, y es que, por una parte hemos omitido el parámetro μ (pero esto es meramente por aligerar la notación, y no hay ningún inconveniente en mantenerlo en todo lo que sigue) y que por otra parte hemos supuesto que el campo \vec{v} está definido en todo punto de Ω para todo instante t . Esto sucede en particular si \vec{v} no depende de t , en cuyo caso se dice que es un *campo de velocidades estacionario*).

Las observaciones precedentes a la definición justifican que el abierto G contiene a todas las ternas $(t_0, t_0, \vec{r}_0) \in \mathbb{R}^2 \times \Omega$, y que, para cada $(t_0, \vec{r}_0) \in \mathbb{R} \times \Omega$, el conjunto $I_{t_0, \vec{r}_0} = \{t \in \mathbb{R} \mid (t, t_0, \vec{r}_0) \in G\}$ es un intervalo abierto que contiene a t_0 , sobre el que está definida la función $\vec{r}_{t_0, \vec{r}_0} : I_{t_0, \vec{r}_0} \rightarrow \mathbb{R}^n$, que podemos ver como la trayectoria de un móvil que pasa por el punto \vec{r}_0 en el instante t_0 y cuya velocidad en cada instante es la que el campo de velocidades prescribe para su posición en ese instante, es decir: $\vec{v}_{t_0, \vec{r}_0}(t) = \vec{v}(t, \vec{r}_{t_0, \vec{r}_0}(t))$.

Las curvas \vec{r}_{t_0, \vec{r}_0} se llaman *curvas integrales* del campo de velocidades. La unicidad de la solución hace que dos curvas integrales que pasen por el mismo punto \vec{r}_1 en el mismo instante t_1 son iguales, pues ambas tienen que ser \vec{r}_{t_1, \vec{r}_1} .

5.4.2 Ecuaciones diferenciales de orden superior

Las ecuaciones diferenciales que aparecen con mayor frecuencia en física y en geometría son de orden 2. Afortunadamente, toda la teoría sobre existencia y unicidad que vamos a necesitar para ecuaciones diferenciales de orden superior se deduce inmediatamente del caso de orden 1. En efecto:

Teorema 5.48 Sea $f : D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{nm} \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función de clase C^k con $k \geq 1$ en un abierto D . Entonces la ecuación diferencial

$$\left. \begin{aligned} y^{(m)}(t) &= f(t, y, y', \dots, y^{(m-1)}, \mu) \\ y(t_0) &= y_0 \\ y'(t_0) &= y'_0 \\ \dots\dots\dots &\dots \\ y^{(m-1)}(t_0) &= y_0^{(m-1)} \end{aligned} \right\}$$

tiene solución única $y(t, \mu, t_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(m-1)})$ de clase C^k en un entorno de cada punto $(t_0, \mu, t_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(m-1)})$.

DEMOSTRACIÓN: Basta observar que el problema equivale al sistema de ecuaciones de primer orden

$$\left. \begin{aligned} y'(t) &= y_1 \\ y'_1(t) &= y_2 \\ \dots\dots\dots &\dots \\ y'_{m-2}(t) &= y_{m-1} \\ y'_{m-1}(t) &= f(t, y, y_1, \dots, y_{m-1}, \mu) \\ (y, y_1, \dots, y_{m-1})(t_0) &= (y_0, y'_0, \dots, y_0^{(m-1)}) \end{aligned} \right\}$$

donde hemos introducido las variables auxiliares y_i , que representan funciones con valores en \mathbb{R}^n . Todo este sistema se puede expresar como una única ecuación vectorial en las condiciones de la subsección anterior. ■

La ecuación de Euler-Cauchy Una *ecuación de Euler-Cauchy* es una ecuación diferencial de la forma

$$at^2y''(t) + bty'(t) + cy(t) = 0,$$

donde a, b, c son constantes. Para resolverla basta hacer el cambio de variable $t = e^u$, de modo que

$$\frac{dy}{du} = \frac{dy}{dt}t, \quad \frac{d^2y}{du^2} = \frac{d^2y}{dt^2}t^2 + \frac{dy}{dt}t = \frac{d^2y}{dt^2}t^2 + \frac{dy}{du}.$$

Por lo tanto la ecuación se transforma en

$$a \left(\frac{d^2y}{du^2} - \frac{du}{du} \right) + b \frac{dy}{du} + cy = 0,$$

o también

$$ay''(u) + (b - a)y'(u) + cy(u) = 0,$$

que es del tipo resuelto en [IC 1.36].

Por ejemplo, las soluciones de la ecuación

$$t^2y''(t) + 2ty'(t) = n(n + 1)y(t)$$

se corresponden a través del cambio $t = e^u$ con las de la ecuación

$$y''(u) + y'(u) - n(n + 1)y(u) = 0$$

que, con la notación de [IC 1.36], corresponden al caso $a_1 = 1/2$, $a_0 = -n^2 - n$, $d = n + 1/2$. Por lo tanto, sus soluciones son³ las combinaciones lineales de $e^{-u/2}e^{\pm(n+1/2)u}$, es decir, de e^{nu} y $e^{-(n+1)u}$ y al deshacer el cambio de variable resulta que la solución general es

$$At^n + Bt^{-(n+1)}. \quad \blacksquare$$

Ejemplo Vamos a calcular todas las soluciones de la ecuación

$$y''(t) = \frac{k}{t}y'(t), \quad k \in \mathbb{R}, \quad t > 0.$$

Obviamente las funciones constantes son soluciones de la ecuación. Si y no es constante existe un punto $t_0 > 0$ tal que $y'(t_0) \neq 0$. Llamemos $y_1 = y'(t)$. En un entorno de t_0 tenemos

$$\frac{y_1'(t)}{y_1(t)} = \frac{k}{t},$$

³Véase el razonamiento previo a [IC 1.36], en el que, cuando $d \neq 0$, se llega a que las soluciones son las de la forma $z = e^{-a_1t}(Ae^{dt} + Be^{-dt})$.

luego integrando entre t_0 y t queda

$$\log y_1(t) - \log y(t_0) = \log x^k,$$

de donde $y_1(t) = y_1(t_0)x^k$, es decir, $y'(t) = y'(t_0)x^k$. Integrando de nuevo concluimos que

$$y(t) = \begin{cases} \frac{y'(t_0)}{k+1} x^{k+1} + y(t_0) & \text{si } k \neq -1, \\ y'(t_0) \log t + y(t_0) & \text{si } k = -1. \end{cases}$$

Ahora es claro que las soluciones de la ecuación dada están todas definidas en $]0, +\infty[$ y vienen dadas por

$$y(t) = \begin{cases} Ax^{k+1} + B & \text{si } k \neq -1, \\ A \log t + B & \text{si } k = -1. \end{cases}$$

Estas expresiones incluyen las funciones constantes, que habíamos dejado aparte. ■

Veamos una última aplicación:

Definición 5.49 El *laplaciano* de una función $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^2 en un abierto $A \subset \mathbb{R}^n$ es la función

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}.$$

La función f es *armónica* si cumple la ecuación en derivadas parciales $\Delta f = 0$.

Por ejemplo, es obvio que toda función afín $f(x) = a_0 + a_1x_1 + \cdots + a_nx_n$ es armónica en \mathbb{R}^n . Aquí vamos a determinar todas las funciones armónicas con simetría esférica:

Teorema 5.50 Las únicas funciones armónicas en $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ de la forma $g(\|x\|)$ son las de la forma

$$f(x) = \begin{cases} \frac{A}{\|x\|^{n-2}} + B & \text{si } n \neq 2, \\ A \log \|x\| + B & \text{si } n = 2. \end{cases}$$

DEMOSTRACIÓN: Sea f una función de la forma indicada. La función g es de clase C^2 en su dominio, pues f lo es y $g(r) = f(r, 0, \dots, 0)$. Por consiguiente

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{dg}{dr} \frac{x_i}{\|x\|}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = \frac{d^2g}{dr^2} \frac{x_i^2}{\|x\|^2} + \frac{dg}{dr} \left(\frac{1}{\|x\|} - \frac{x_i^2}{\|x\|^3} \right),$$

luego

$$\Delta f = \frac{d^2g}{dr^2} + \frac{dg}{dr} \frac{n-1}{\|x\|} = 0.$$

Esta ecuación se cumple para todo $x \neq 0$ en el dominio de f , de donde se sigue claramente que

$$\frac{d^2g}{dr^2} + \frac{dg}{dr} \frac{n-1}{r} = 0$$

para todo $r \neq 0$ en el dominio de g . En el ejemplo anterior hemos visto que las únicas soluciones de esta ecuación son las de la forma

$$g(r) = \begin{cases} \frac{A}{r^{n-2}} + B & \text{si } n \neq 2 \\ A \log r + B & \text{si } n = 2 \end{cases}$$

de donde se sigue que f tiene la forma indicada. ■

Capítulo VI

Teoría de la medida II

En el capítulo IV hemos presentado la medida y la integral de Lebesgue, pero los resultados que hemos probado no son suficientes para operar naturalmente con integrales de funciones de varias variables. Aunque el teorema de Fubini nos permite descomponer la integral de una función de varias variables en varias integrales iteradas, no es suficiente para justificar muchas de las manipulaciones habituales. El ingrediente principal que nos falta es el análogo para varias variables del teorema de cambio de variable [IC 2.9], que requiere combinar el cálculo integral con el cálculo diferencial que hemos presentado en el capítulo anterior. Nos ocuparemos de este teorema en la sección 6.5, pero antes demostraremos algunos resultados que conviene tratar previamente.

6.1 El teorema de Riesz

En el capítulo IV hemos visto que toda medida tiene asociada una integral, y ahora vamos a ver que, en cierto sentido, toda integral tiene asociada una medida, es decir, que todo operador que cumpla ciertos requisitos necesarios para que pueda ser una integral es realmente la integral respecto de cierta medida. Necesitamos un concepto adicional sobre medidas en espacios topológicos:

Definición 6.1 Diremos que una medida μ en un espacio topológico X es *regular* si todos los abiertos son medibles, los subespacios compactos tienen medida finita y para todo conjunto medible E se cumple

$$\mu(E) = \inf\{\mu(V) \mid E \subset V, \ V \text{ abierto}\}$$

y

$$\mu(E) = \sup\{\mu(K) \mid K \subset E, \ K \text{ compacto}\}.$$

Diremos que la medida es *casi regular* si la segunda propiedad se cumple al menos cuando $\mu(E) < +\infty$ y cuando E es abierto.

En definitiva una medida es regular si la medida de todo conjunto medible puede aproximarse por la medida de un abierto mayor y de un compacto menor.

El concepto de medida casi regular lo introducimos por cuestiones técnicas, pero seguidamente vamos a probar que en todos los espacios que nos van a interesar es equivalente a la regularidad.

Diremos que un espacio topológico es σ -compacto si es unión numerable de conjuntos compactos. Por ejemplo, todo abierto Ω en \mathbb{R}^n es σ -compacto, pues puede expresarse como unión de los compactos

$$\Omega_k = \{x \in \Omega \mid \|x\| \leq k, d(x, \mathbb{R}^n \setminus \Omega) \geq 1/k\}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Teorema 6.2 *Toda medida casi regular en un un espacio σ -compacto es regular.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que X es la unión de los compactos $\{K_n\}_{n=1}^\infty$. Sustituyendo cada K_n por su unión con los precedentes podemos suponer que la sucesión es creciente. Dado un conjunto de Borel B tal que $\mu(B) = +\infty$, tenemos que

$$B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B \cap K_n,$$

y, como la unión es creciente, $\sup \mu(B \cap K_n) = \mu(B) = +\infty$. Dado $R > 0$ existe un n tal que $\mu(B \cap K_n) > R + 1$ y, como μ es casi regular, $B \cap K_n$ tiene medida finita y existe un compacto $K \subset B \cap K_n$ tal que $\mu(K) > R$, lo que prueba que μ es regular. ■

Ejercicio: Demostrar que la medida de Lebesgue es regular.

Teorema 6.3 (Teorema de representación de Riesz) *Sea X un espacio localmente compacto y sea $T : C_c(X) \rightarrow \mathbb{R}$ una aplicación lineal tal que si $f \geq 0$ entonces $T(f) \geq 0$. Entonces existe una única medida de Borel casi regular μ en X tal que para toda función $f \in C_c(X)$ se cumple*

$$T(f) = \int_X f d\mu.$$

DEMOSTRACIÓN: Veamos primero la unicidad. Es claro que una medida casi regular está completamente determinada por los valores que toma sobre los conjuntos compactos, luego basta probar que si μ_1 y μ_2 representan a T en el sentido del teorema entonces $\mu_1(K) = \mu_2(K)$ para todo compacto K .

Por la regularidad existe un abierto V tal que $K \subset V$ y $\mu_2(V) < \mu_2(K) + \epsilon$. Por el lema de Urysohn 3.16 existe una función $K \prec f \prec V$. Entonces

$$\begin{aligned} \mu_1(K) &= \int_X \chi_K d\mu_1 \leq \int_X f d\mu_1 = T(f) = \int_X f d\mu_2 \\ &\leq \int_X \chi_V d\mu_2 = \mu_2(V) < \mu_2(K) + \epsilon. \end{aligned}$$

Por consiguiente $\mu_1(K) \leq \mu_2(K)$ e igualmente se prueba la desigualdad contraria.

Para cada abierto V de X definimos $\mu(V) = \sup\{T(f) \mid f \prec V\}$. Es obvio que si $V_1 \subset V_2$ entonces $\mu(V_1) \leq \mu(V_2)$, luego si definimos

$$\mu(E) = \inf\{\mu(V) \mid E \subset V, V \text{ abierto}\}, \quad \text{para todo } E \subset X,$$

es claro que la medida de un abierto es la misma en los dos sentidos en que la tenemos definida.

Aunque hemos definido la medida de cualquier conjunto, ésta sólo cumplirá las propiedades de las medidas al restringirla a una cierta σ -álgebra que contiene a la σ -álgebra de Borel. Concretamente, definimos \mathcal{M}_F como la familia de subconjuntos E de X tales que $\mu(E) < +\infty$ y

$$\mu(E) = \sup\{\mu(K) \mid K \subset E, K \text{ compacto}\}.$$

Definimos \mathcal{M} como la familia de todos los $E \subset X$ tales que $E \cap K \in \mathcal{M}_F$ para todo compacto K . Probaremos que \mathcal{M} es una σ -álgebra que contiene a la σ -álgebra de Borel y que la restricción de μ a \mathcal{M} es una medida casi regular. Veremos también que \mathcal{M}_F está formada por los conjuntos de \mathcal{M} de medida finita. Dividimos la prueba en varios pasos.

1) Si $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ son subconjuntos de X , entonces

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i).$$

Probamos primero que si V_1 y V_2 son abiertos $\mu(V_1 \cup V_2) \leq \mu(V_1) + \mu(V_2)$. Tomemos $g \prec V_1 \cup V_2$ arbitraria. Por el teorema 3.17 existen funciones h_1 y h_2 tales que $h_i \prec V_i$ y $h_1 + h_2$ vale 1 sobre los puntos del soporte de g . Por lo tanto $h_i g \prec V_i$, $g = h_1 g + h_2 g$.

$$T(g) = T(h_1 g) + T(h_2 g) \leq \mu(V_1) + \mu(V_2).$$

Como esto se cumple para toda $g \prec V_1 + V_2$, concluimos la desigualdad buscada.

Podemos suponer que $\mu(E_i) < +\infty$ para todo i , o la desigualdad que queremos probar se cumpliría trivialmente. Dado $\epsilon > 0$ la definición de μ implica que existen abiertos V_i que contienen a E_i de modo que $\mu(V_i) < \mu(E_i) + \epsilon/2^i$. Sea V la unión de todos los V_i y tomemos $f \prec V$. Como f tiene soporte compacto en realidad $f \prec V_1 \cup \dots \cup V_n$ para algún n , luego

$$T(f) \leq \mu(V_1 \cup \dots \cup V_n) \leq \mu(V_1) + \dots + \mu(V_n) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) + \epsilon.$$

Como esto vale para toda $f \prec V$, resulta que

$$\mu(V) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) + \epsilon.$$

Ahora bien, la unión de los E_i está contenida en V , y la función μ es claramente monótona por su definición, luego

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) + \epsilon.$$

Como esto vale para todo ϵ tenemos la desigualdad buscada.

- 2) Si K es compacto, entonces $K \in \mathcal{M}_F$ y $\mu(K) = \inf\{T(f) \mid K \prec f\}$. En particular los compactos tienen medida finita.

Si $K \prec f$ y $0 < \alpha < 1$, sea $V_\alpha = \{x \in X \mid f(x) > \alpha\}$. Entonces $K \subset V_\alpha$ y si $g \prec V_\alpha$ se cumple $\alpha g \leq f$. Por lo tanto

$$\mu(K) \leq \mu(V_\alpha) = \sup\{T(g) \mid g \prec V_\alpha\} \leq \alpha^{-1}T(f).$$

Si hacemos que α tienda a 1 concluimos que $\mu(K) \leq T(f)$ y es obvio que K está en \mathcal{M}_F .

Dado $\epsilon > 0$ existe un abierto V tal que $K \subset V$ y $\mu(V) < \mu(K) + \epsilon$. Existe una función $K \prec f \prec V$, luego

$$\mu(K) \leq T(f) \leq \mu(V) < \mu(K) + \epsilon,$$

lo que prueba que $\mu(K) = \inf\{T(f) \mid K \prec f\}$.

- 3) \mathcal{M}_F contiene a todos los abiertos de medida finita.

Sea V un abierto de medida finita y α un número real tal que $\alpha < \mu(V)$. Existe $f \prec V$ tal que $\alpha < T(f)$. Entonces $T(f) \leq \mu(K)$, pues en caso contrario existiría un abierto W tal que $K \subset W$ y $\mu(K) \leq \mu(W) < T(f)$, pero $f \prec W$, luego $T(f) \leq \mu(W)$, contradicción. Así hemos encontrado un compacto $K \subset V$ tal que $\alpha < \mu(K)$, lo que prueba que $V \in \mathcal{M}_F$.

- 4) Si $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ son elementos disjuntos de \mathcal{M}_F , y $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ entonces

$$\mu(E) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i).$$

Si además $\mu(E) < +\infty$ entonces $E \in \mathcal{M}_F$.

Veamos primero que si K_1 y K_2 son compactos disjuntos $\mu(K_1 \cup K_2) = \mu(K_1) + \mu(K_2)$. Dado $\epsilon > 0$ existe $K_1 \prec f \prec X \setminus K_2$. Por el paso 2) existe g tal que $K_1 \cup K_2 \prec g$ y $T(g) < \mu(K_1 \cup K_2) + \epsilon$. Claramente $K_1 \prec fg$ y $K_2 \prec (1-f)g$, luego

$$\mu(K_1) + \mu(K_2) \leq T(fg) + T(g-fg) = T(g) < \mu(K_1 \cup K_2) + \epsilon,$$

luego tenemos $\mu(K_1) + \mu(K_2) \leq \mu(K_1 \cup K_2)$ y el paso 1) nos da la otra desigualdad.

Pasando al caso general, de nuevo por 1) basta probar una desigualdad. Ésta es trivial si $\mu(E) = +\infty$, luego podemos suponer que E tiene medida

finita. Fijado $\epsilon > 0$, puesto que $E_i \in \mathcal{M}_F$ existen compactos $H_i \subset E_i$ tales que $\mu(H_i) > \mu(E_i) - \epsilon/2^i$. Sea $K_n = H_1 \cup \dots \cup H_n$. Entonces

$$\mu(E) \geq \mu(K_n) = \sum_{i=1}^n \mu(H_i) > \sum_{i=1}^n \mu(E_i) - \epsilon,$$

lo cual nos da claramente la desigualdad buscada. La desigualdad anterior muestra también que $\mu(K_n)$ tiende a $\mu(E)$ cuando n tiende a ∞ (una vez sabemos que la serie suma $\mu(E)$), lo que implica que $E \in \mathcal{M}_F$.

- 5) Si $E \in \mathcal{M}_F$ y $\epsilon > 0$, existen un compacto K y un abierto V tales que $K \subset E \subset V$ y $\mu(V \setminus K) < \epsilon$.

Por definición de \mathcal{M}_F y de μ existen K y V tales que

$$\mu(V) - \frac{\epsilon}{2} < \mu(E) < \mu(K) + \frac{\epsilon}{2}.$$

Puesto que $V \setminus K$ es abierto, por 3) tenemos que $V \setminus K \in \mathcal{M}_F$, luego 4) implica que

$$\mu(K) + \mu(V \setminus K) = \mu(V) < \mu(K) + \epsilon.$$

- 6) Si $A, B \in \mathcal{M}_F$ entonces $A \setminus B, A \cup B, A \cap B \in \mathcal{M}_F$.

Aplicamos el paso anterior a los conjuntos A y B , lo que nos da conjuntos K_i y V_i , para $i = 1, 2$, de modo que $K_1 \subset A \subset V_1$, $K_2 \subset B \subset V_2$ y $\mu(V_i \setminus K_i) < \epsilon$. Entonces

$$A \setminus B \subset V_1 \setminus K_2 \subset (V_1 \setminus K_1) \cup (K_1 \setminus V_2) \cup (V_2 \setminus K_2),$$

luego el paso 1) implica $\mu(A \setminus B) \leq \epsilon + \mu(K_1 \setminus V_2) + \epsilon$ y $K_1 \setminus V_2$ es un subconjunto compacto de $A \setminus B$, luego esto prueba que $A \setminus B \in \mathcal{M}_F$.

Ahora, $A \cup B = (A \setminus B) \cup B$, luego el paso 4) implica que $A \cup B \in \mathcal{M}_F$ y como $A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$, también $A \cap B \in \mathcal{M}_F$.

- 7) \mathcal{M} es una σ -álgebra que contiene a la σ -álgebra de Borel.

Si $A \in \mathcal{M}$ y K es un compacto en X , entonces $(X \setminus A) \cap K = K \setminus (A \cap K)$, luego $(X \setminus A) \cap K$ es diferencia de dos elementos de \mathcal{M}_F , luego está en \mathcal{M}_F , luego $X \setminus A \in \mathcal{M}$.

Sea $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ una unión de elementos de \mathcal{M} . Si K es un compacto en X , tomamos $B_1 = A_1 \cap K$ y $B_n = (A_n \cap K) \setminus (B_1 \cup \dots \cup B_{n-1})$, con lo que cada $B_n \in \mathcal{M}_F$ y son disjuntos dos a dos. Por 4) tenemos que $A \cap K$ (la unión de los B_n) está en \mathcal{M}_F , luego $A \in \mathcal{M}$. Esto prueba que \mathcal{M} es una σ -álgebra.

Si C es un cerrado de X y K es compacto, entonces $C \cap K$ es compacto, luego está en \mathcal{M}_F , luego $C \in \mathcal{M}$. Por lo tanto \mathcal{M} contiene a todos los cerrados, luego a todos los abiertos, luego a todos los conjuntos de Borel.

8) \mathcal{M}_F está formado por los conjuntos de \mathcal{M} de medida finita.

Si $E \in \mathcal{M}_F$, los pasos 2) y 6) implican que $E \cap K \in \mathcal{M}_F$, luego $E \in \mathcal{M}$. Recíprocamente, si $E \in \mathcal{M}$ tiene medida finita, dado $\epsilon > 0$ existe un abierto V que contiene a E y tiene medida finita. Por 3) y 5) existe un compacto $K \subset V$ con $\mu(V \setminus K) < \epsilon$. Como $E \cap K \in \mathcal{M}_F$, existe un compacto $H \subset E \cap K$ con $\mu(E \cap K) < \mu(H) + \epsilon$.

Puesto que $E \subset (E \cap K) \cup (V \setminus K)$, resulta

$$\mu(E) \leq \mu(E \cap K) + \mu(V \setminus K) < \mu(H) + 2\epsilon,$$

luego $E \in \mathcal{M}_F$.

Tras estas comprobaciones ya estamos en condiciones de probar el teorema. Consideremos la restricción de μ a la σ -álgebra de Borel. Los pasos 4) y 8) justifican que esta restricción es una medida. Hemos probado que μ es finita sobre los compactos, por definición se aproxima por abiertos y por 8) se aproxima por compactos en los conjuntos de medida finita. El argumento de 3) prueba de hecho que los abiertos de medida infinita contienen compactos de medida arbitrariamente grande, luego μ se aproxima por compactos en todos los abiertos. Así pues μ es casi regular.

Falta probar que μ representa a T . Dada $f \in C_c(X)$, basta probar que

$$T(f) \leq \int_X f d\mu,$$

pues aplicando esto mismo a $-f$ obtenemos la desigualdad opuesta. Sea K el soporte de f . Entonces $f[X] \subset f[K] \cup \{0\}$ es compacto, $f[X] \subset [a, b]$, para ciertos números reales a y b . Sea $\epsilon > 0$ y tomemos números

$$y_0 < a < y_1 < \dots < y_n = b$$

tales que $y_{i+1} - y_i < \epsilon$.

Sea $E_i = \{x \in X \mid y_{i-1} < f(x) \leq y_i\} \cap K$. Como f es continua, f es medible respecto al álgebra de Borel, luego los conjuntos E_i son conjuntos de Borel disjuntos cuya unión es K . Existen abiertos V_i tales que $E_i \subset V_i$,

$$\mu(V_i) < \mu(E_i) + \frac{\epsilon}{n}$$

y $f(x) < y_i + \epsilon$ para todo $x \in V_i$. Por el teorema 3.17 existen funciones $h_i \prec V_i$ que suman 1 sobre K . Por lo tanto $f = h_1 f + \dots + h_n f$ y de 2) se sigue que

$$\mu(K) \leq T(h_1 + \dots + h_n) = T(h_1) + \dots + T(h_n).$$

Como $h_i f \leq (y_i + \epsilon)h_i$ e $y_i - \epsilon < f(x)$ en E_i , tenemos que

$$\begin{aligned} T(f) &= \sum_{i=1}^n T(h_i f) \leq \sum_{i=1}^n (y_i + \epsilon)T(h_i) \\ &= \sum_{i=1}^n (|a| + y_i + \epsilon)T(h_i) - |a| \sum_{i=1}^n T(h_i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{i=1}^n (|a| + y_i + \epsilon) (\mu(E_i) + \frac{\epsilon}{n}) - |a| \mu(K) \\
&= \sum_{i=1}^n (y_i - \epsilon) \mu(E_i) + 2\epsilon \mu(K) + \frac{\epsilon}{n} \sum_{i=1}^n (|a| + y_i + \epsilon) \\
&\leq \int_X f d\mu + \epsilon(2\mu(K) + |a| + b + \epsilon).
\end{aligned}$$

Como ϵ es arbitrario, tenemos la desigualdad buscada. ■

Recordemos que el teorema 6.2 implica que si el espacio X es σ -compacto entonces las medidas que proporciona el teorema de Riesz son regulares. Una primera aplicación interesante del teorema de Riesz nos da que en espacios razonables (como \mathbb{R}^n) toda medida razonable es regular:

Teorema 6.4 *Sea X un espacio localmente compacto en el que todo abierto sea σ -compacto. Si μ es una medida de Borel en X tal que todo compacto tiene medida finita, entonces es regular.*

DEMOSTRACIÓN: Definamos el operador $T : C_c(X) \rightarrow \mathbb{R}$ definido por $T(f) = \int_X f d\mu$. Notemos que si f tiene soporte K y M es una cota de f en K entonces

$$|T(f)| \leq \int_X |f| d\mu \leq M\mu(K) < +\infty,$$

luego T está bien definido y claramente cumple las hipótesis del teorema de Riesz. Por lo tanto existe una medida de Borel regular ν tal que para toda función $f \in C_c(X)$ se cumple

$$\int_X f d\nu = \int_X f d\mu.$$

Basta probar que $\mu = \nu$. Si V es un abierto, por hipótesis lo podemos expresar como unión de compactos $\{K_n\}_{n=1}^\infty$. Tomemos funciones $K_n \prec f_n \prec V$ y sea $g_n = \max\{f_1, \dots, f_n\}$. Entonces $g_n \in C_c(X)$ y es claro que la sucesión $\{g_n\}_{n=1}^\infty$ es monótona creciente y converge puntualmente a χ_V . Por el teorema de la convergencia monótona resulta que

$$\nu(V) = \lim_n \int_X g_n d\nu = \lim_n \int_X g_n d\mu = \mu(V).$$

Así pues, μ y ν coinciden en los abiertos.

Dado un conjunto de Borel B , cortándolo con una familia creciente de compactos cuya unión sea X podemos expresarlo como unión creciente de conjuntos de Borel de medida finita para μ y ν , luego basta probar que ambas medidas coinciden sobre los conjuntos de Borel de medida finita. Por la regularidad de ν es fácil ver que existen un abierto V y un compacto K tales que $K \subset B \subset V$ y $\nu(V \setminus K) < \epsilon$, para un ϵ prefijado. Como $V \setminus K$ es abierto, esta última igualdad vale también para μ .

Por consiguiente:

$$\begin{aligned}\mu(B) &\leq \mu(V) = \nu(V) \leq \nu(B) + \epsilon, \\ \nu(B) &\leq \nu(V) = \mu(V) \leq \nu(B) + \epsilon,\end{aligned}$$

luego $|\mu(B) - \nu(B)| \leq \epsilon$ para todo $\epsilon > 0$. ■

En particular, esto implica que la medida de Lebesgue es regular, pues todo compacto en \mathbb{R}^n está contenido en una celda, luego tiene medida de Lebesgue finita.

Terminamos esta sección con un teorema importante sobre aproximación de funciones medibles por funciones continuas:

Teorema 6.5 (Teorema de Lusin) *Sea μ una medida de Borel regular en un espacio localmente compacto X y $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ una función medible tal que $f = 0$ salvo en un conjunto de medida finita. Dado $\epsilon > 0$ existe una función $g \in C_c(X)$ tal que $f = g$ salvo en un conjunto de medida menor que ϵ . Además podemos exigir que*

$$\sup_{x \in X} |g(x)| \leq \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

DEMOSTRACIÓN: Sea $A = \{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$. Supongamos primero que A es compacto y que $0 \leq f \leq 1$. Sea $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ la sucesión monótona creciente de funciones simples construida en el teorema 4.44. Definimos $t_1 = s_1$ y $t_n = s_n - s_{n-1}$ para $n > 1$. Entonces $s_n(x) = k_n(f(x))/2^n$ y es fácil ver que $k_n(f(x)) = 2k_{n-1}(f(x))$ o bien $k_n(f(x)) = 2k_{n-1}(f(x)) + 1$, con lo que $2^n t_n$ toma sólo los valores 0 y 1. En otros términos $s_n = \chi_{T_n}$, para ciertos conjuntos medibles $T_n \subset A$. Además

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} t_n(x), \quad \text{para todo } x \in X.$$

Sea V un abierto de clausura compacta que contenga a A . Por regularidad existen compactos K_n y abiertos V_n de manera que $K_n \subset T_n \subset V_n \subset V$ y $\mu(V_n \setminus K_n) < 2^{-n}\epsilon$. Sea $K_n \prec h_n \prec V_n$. Definimos

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} h_n(x).$$

Por el criterio de Weierstrass tenemos que g es continua. Además su soporte está contenido en la clausura de V , luego es compacto. Como $2^{-n} h_n(x) = t_n(x)$ excepto en $V_n \setminus K_n$, tenemos que $f = g$ excepto en $\bigcup_n (V_n \setminus K_n)$, que es un conjunto de medida menor que ϵ .

Del caso anterior se deduce el teorema para el caso en que A es compacto y f está acotada. Para probar el caso general tomamos $B_n = \{x \in X \mid |f(x)| > n\}$. Estos conjuntos forman una familia decreciente con intersección vacía y todos tienen medida finita, luego $\mu(B_n)$ tiende a 0 con n . La función f coincide con la función acotada $h = (1 - \chi_{B_n})f$ salvo en B_n y, por otra parte, podemos tomar

un compacto $K \subset A$ tal que $\mu(A \setminus K)$ sea arbitrariamente pequeño, luego basta aproximar $h\chi_K$ por una función continua, lo cual es posible por la parte ya probada.

Por último, sea K el supremo de $|f|$. Si K es finito consideramos la función $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$h(x) = \begin{cases} x & \text{si } |x| \leq K \\ \frac{Kx}{|x|} & \text{si } |x| > K \end{cases}$$

Claramente h es continua, $g_1 = g \circ h$ sigue cumpliendo el teorema y además su supremo no excede al de f . ■

6.2 Espacios L^p

En las secciones posteriores vamos a necesitar algunos resultados abstractos referentes a ciertos espacios de funciones integrables que estudiaremos aquí.

Diremos que dos números reales positivos p y q son *conjugados* si

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Es obvio que cada $p > 1$ tiene un único conjugado $q > 1$. El caso $p = q = 2$ es especialmente importante. Como los pares de conjugados aparecen normalmente como exponentes, es frecuente llamarlos “exponentes conjugados”.

Teorema 6.6 (Desigualdad de Hölder) *Sean p y q exponentes conjugados. Sea X un espacio medida y sean $f, g: X \rightarrow [0, +\infty]$ funciones medibles. Entonces*

$$\int_X fg \, d\mu \leq \left(\int_X f^p \, d\mu \right)^{1/p} \left(\int_X g^q \, d\mu \right)^{1/q}.$$

DEMOSTRACIÓN: Llamemos A y B a los dos factores del segundo miembro. Si $A = 0$ entonces el teorema 4.56 implica que $f = 0$ p.c.t.p., luego $fg = 0$ p.c.t.p. y la desigualdad es clara. Si $A > 0$ y $B = +\infty$ de nuevo es obvio. Podemos suponer, pues, $0 < A < +\infty$ y $0 < B < +\infty$. Llamemos $F = f/A$, $G = g/B$. Entonces

$$\int_X F^p \, d\mu = \int_X G^q \, d\mu = 1. \quad (6.1)$$

Supongamos que $0 < F(x) < +\infty$, $0 < G(x) < +\infty$. Entonces existen números s y t tales que $F(x) = e^{s/p}$, $G(x) = e^{t/q}$. Como $1/p + 1/q = 1$ y la función exponencial es convexa, concluimos que

$$e^{s/p+t/q} \leq p^{-1}e^s + q^{-1}e^t.$$

Por consiguiente,

$$F(x)G(x) \leq p^{-1}F(x)^p + q^{-1}G(x)^q.$$

Esta desigualdad es trivialmente cierta si $G(x) = 0$ o $G(x) = 0$, luego vale para todo x . Integrando y usando (6.1) resulta

$$\int_X FG \, d\mu \leq p^{-1} + q^{-1} = 1.$$

De aquí se sigue inmediatamente la desigualdad de Hölder. \blacksquare

Teorema 6.7 (Desigualdad de Minkowski) *Sea X un espacio medido y $f, g : X \rightarrow [0, +\infty]$ funciones medibles. Para todo $p \geq 1$ se cumple*

$$\left(\int_X (f + g)^p \, d\mu \right)^{1/p} \leq \left(\int_X f^p \, d\mu \right)^{1/p} + \left(\int_X g^p \, d\mu \right)^{1/p}$$

DEMOSTRACIÓN: Podemos suponer que $p > 1$, que el primer miembro es mayor que 0 y que el segundo es menor que $+\infty$. Como la función x^p es convexa en $]0, +\infty[$ tenemos que

$$\left(\frac{f + g}{2} \right)^p \leq \frac{1}{2}(f^p + g^p),$$

con lo que el primer miembro también es finito, es decir, las tres integrales son finitas. Sea q el conjugado de p . Escribimos

$$(f + g)^p = f(f + g)^{p-1} + g(f + g)^{p-1}.$$

Aplicamos la desigualdad de Hölder junto con que $(p-1)q = p$ (porque p y q son conjugados). El resultado es

$$\int_X f(f + g)^{p-1} \, d\mu \leq \left(\int_X f^p \, d\mu \right)^{1/p} \left(\int_X (f + g)^p \, d\mu \right)^{1/q}.$$

Intercambiando los papeles de f y g y sumando las desigualdades resulta

$$\int_X (f + g)^p \, d\mu \leq \left(\int_X (f + g)^p \, d\mu \right)^{1/q} \left(\left(\int_X f^p \, d\mu \right)^{1/p} + \left(\int_X g^p \, d\mu \right)^{1/p} \right).$$

Dividiendo entre el primer factor del segundo miembro y teniendo en cuenta que $1 - 1/q = 1/p$ tenemos la desigualdad buscada. \blacksquare

Definición 6.8 Sea X un espacio medido, $1 \leq p < +\infty$ y $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ una función medible. Sea

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p \, d\mu \right)^{1/p}.$$

Llamaremos $L^p(\mu)$ al conjunto de todas las funciones medibles f tales que $\|f\|_p < +\infty$. Notemos que $L^1(\mu)$ es el conjunto de todas las funciones integrables, tal y como ya lo teníamos definido.

Por la desigualdad de Minkowski tenemos que si $f, g \in L^p(\mu)$ entonces $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$. En particular $f + g \in L^p(\mu)$. Por otra parte es claro que $\|\alpha f\|_p = |\alpha| \|f\|_p$, con lo que $\alpha f \in L^p(\mu)$. En particular vemos que $L^p(\mu)$ es un espacio vectorial sobre \mathbb{R} .

No es cierto que $\|\cdot\|_p$ sea una norma en $L^p(\mu)$, porque existen funciones no nulas f tales que $\|f\|_p = 0$ (las que son nulas p.c.t.p.). Ahora bien, es claro que las funciones de "norma" nula forman un subespacio vectorial de $L^p(\mu)$. Usaremos también la notación $L^p(\mu)$ para referirnos al espacio vectorial cociente. Si dos funciones f y g están en la misma clase entonces $f = g + h$, donde $\|h\|_p = 0$, luego $\|f\|_p \leq \|g\|_p + 0$ e igualmente tenemos la desigualdad contraria, luego $\|f\|_p = \|g\|_p$.

Podemos definir la norma de una clase de funciones como la norma de cualquiera de sus miembros. Al considerar clases de equivalencia sí tenemos un espacio normado, pues las funciones de norma 0 forman una única clase.

Teorema 6.9 *Sea X un espacio medida y $1 \leq p < +\infty$. Entonces $L^p(\mu)$ es un espacio de Banach.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ una sucesión de Cauchy en $L^p(\mu)$. Basta probar que tiene una subsucesión convergente. Extrayendo una subsucesión podemos suponer que $\|f_{n+1} - f_n\| < 2^{-n}$. Sea

$$g_k = \sum_{n=1}^k |f_{n+1} - f_n|, \quad g = \sum_{n=1}^{\infty} |f_{n+1} - f_n|.$$

Claramente $\|g_k\|_p < 1$ y aplicando el lema de Fatou a $\{g_k^p\}_{k=1}^\infty$ concluimos que $\|g\|_p \leq 1$. En particular $g(x) < +\infty$ p.c.t.x. Así pues, la serie

$$f(x) = f_1(x) + \sum_{n=1}^{\infty} (f_{n+1}(x) - f_n(x))$$

converge absolutamente p.c.t.x. Definamos $f(x) = 0$ en los puntos donde no converja. Teniendo en cuenta quiénes son las sumas parciales de la serie, es claro que

$$f(x) = \lim_n f_n(x) \quad \text{p.c.t.x.}$$

Veamos que $f \in L^p(\mu)$ y que es el límite para la norma de la sucesión dada. Dado $\epsilon > 0$ existe un k tal que si $m, n > k$ entonces $\|f_n - f_m\|_p < \epsilon$. Por el lema de Fatou tenemos

$$\int_X |f - f_m|^p d\mu \leq \liminf_n \int_X |f_n - f_m|^p d\mu \leq \epsilon^p.$$

Esto significa que $\|f - f_m\|_p \leq \epsilon$, de donde $\|f\|_p \leq \|f_k\|_p + \epsilon$ y por lo tanto $f \in L^p(\mu)$. También es claro ahora que f es el límite en $L^p(\mu)$ de la sucesión dada. ■

En la prueba del teorema anterior hemos visto lo siguiente:

Teorema 6.10 *Toda sucesión que converge en un espacio $L^p(\mu)$ a una función f , tiene una subsucesión que converge puntualmente a f salvo en un conjunto nulo.*

En el caso de los espacios $L^2(\mu)$ todavía podemos decir más:

Teorema 6.11 *Sea X un espacio medido. Entonces $L^2(\mu)$ es un espacio de Hilbert con el producto escalar dado por*

$$\langle f, g \rangle = \int_X fg \, d\mu.$$

DEMOSTRACIÓN: La integral que define el producto escalar es finita, pues por la desigualdad de Hölder cumple en realidad que $|fg| \leq \|f\|_2 \|g\|_2$. Claramente es bilineal y la norma que induce es precisamente la de $L^2(\mu)$. ■

Ejercicio: Sea μ la medida en $\{1, \dots, n\}$ en la que cada punto tiene medida 1. Probar que $L^p(\mu) = \mathbb{R}^n$ y que las normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ son las definidas en el capítulo II.

Veamos ahora una generalización de la desigualdad de Hölder:

Teorema 6.12 (Desigualdad de Hölder generalizada) *Sea X un espacio medido, consideremos números positivos tales que $\sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i} = 1$ así como funciones*

$f_i \in L^{p_i}(\mu)$. Entonces $\prod_{i=1}^n f_i \in L^1(\mu)$ y

$$\left\| \prod_{i=1}^n f_i \right\|_1 \leq \prod_{i=1}^n \|f_i\|_{p_i}.$$

DEMOSTRACIÓN: El caso $n = 2$ es consecuencia inmediata de la desigualdad de Hölder que ya hemos probado, pues si $f_1, f_2 \in L^2(\mu)$, podemos aplicarla a $|f_1|$ y $|f_2|$. Ahora razonamos por inducción sobre n . Sean

$$q_n = \frac{p_n}{p_n - 1}, \quad r_i = p_i \left(1 - \frac{1}{p_n} \right),$$

de modo que

$$\frac{1}{p_n} + \frac{1}{q_n} = 1, \quad \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{r_i} = 1, \quad q_n r_i = p_i.$$

Como $f_i \in L^{p_i}(\mu)$, es decir, que $f_i^{p_i} = (f_i^{q_n})^{r_i}$ es integrable, tenemos que $f_i^{q_n} \in L^{r_i}(\mu)$, y además

$$\|f_i^{q_n}\|_{r_i}^{1/q_n} = \left(\int_X |f_i|^{q_n r_i} \right)^{1/q_n r_i} = \left(\int_X |f_i|^{p_i} \right)^{1/p_i} = \|f_i\|_{p_i}.$$

Por hipótesis de inducción tenemos que $\prod_{i=1}^{n-1} f_i^{q_n} \in L^1(\mu)$ o, equivalentemente, que $\prod_{i=1}^{n-1} f_i \in L^{q_n}(\mu)$, y además

$$\left\| \prod_{i=1}^{n-1} f_i \right\|_{q_n} = \left(\int_X \prod_{i=1}^{n-1} |f_i^{q_n}| \right)^{1/q_n} = \left\| \prod_{i=1}^{n-1} f_i^{q_n} \right\|_1^{1/q_n} \leq \prod_{i=1}^{n-1} \|f_i^{q_n}\|_1^{1/q_n} = \prod_{i=1}^{n-1} \|f_i\|_{p_i}.$$

Ahora aplicamos el caso $n = 2$ a este producto y a f_n , con lo que

$$\left\| \prod_{i=1}^n f_i \right\|_1 \leq \left\| \prod_{i=1}^{n-1} f_i \right\|_{q_n} \|f_n\|_{p_n} \leq \prod_{i=1}^n \|f_i\|_{p_i}. \quad \blacksquare$$

Terminamos el estudio de los espacios $L^p(\mu)$ con dos teoremas de densidad:

Teorema 6.13 *Sea X un espacio medido. Sea S la clase de las funciones simples que son nulas salvo en un conjunto de medida finita. Entonces S es un subconjunto denso de $L^p(\mu)$ para $1 \leq p < +\infty$.*

DEMOSTRACIÓN: Es claro que $S \subset L^p(\mu)$. Tomemos primero una función $f \geq 0$ en $L^p(\mu)$. Sea $\{s_n\}_{n=1}^\infty$ una sucesión monótona creciente de funciones simples que converja a f . Como $0 \leq s_n \leq f$ es claro que $s_n \in L^p(\mu)$, luego $s_n \in S$. Como $|f - s_n|^p \leq f^p$, el teorema de la convergencia dominada implica que $\|f - s_n\|_p$ converge a 0, luego f está en la clausura de S . Para el caso general aplicamos la parte ya probada a f^+ y f^- . \blacksquare

Teorema 6.14 *Sea μ una medida de Borel regular en un espacio localmente compacto X . Entonces $C_c(X)$ es denso en $L^p(\mu)$ para $1 \leq p < +\infty$.*

DEMOSTRACIÓN: Consideremos la clase S del teorema anterior. Basta ver que toda función $s \in S$ puede aproximarse por una función de $C_c(X)$. Sea $\epsilon > 0$ y K el supremo de s , que claramente es finito. Por el teorema de Lusin existe una función $g \in C_c(X)$ tal que $g = s$ salvo en un conjunto de medida menor que ϵ . Por consiguiente $\|g - s\|_p \leq 2K\epsilon^{1/p}$. \blacksquare

6.3 Medidas signadas

Para enunciar más adecuadamente los próximos resultados conviene que modifiquemos nuestra definición de medida o, con más exactitud, que introduzcamos otro tipo de medidas distintas de las medidas positivas. Aunque pronto veremos la utilidad del nuevo concepto desde un punto de vista puramente matemático, quizá ahora sea más conveniente motivarlo mediante un ejemplo físico: la función que a cada región del espacio le asigna la cantidad de materia que contiene es un ejemplo de medida positiva (que podemos suponer finita). Sin embargo, la aplicación que a cada región del espacio le asigna la carga eléctrica que contiene ya no se ajusta a nuestra definición de medida, porque puede tomar valores negativos, y pese a ello puede tratarse de forma muy similar.

Definición 6.15 Sea \mathcal{A} una σ -álgebra en un conjunto X . Una *medida signada (finita)* en \mathcal{A} es una aplicación $\mu : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\mu(\emptyset) = 0$ y si $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una familia de conjuntos de \mathcal{A} disjuntos dos a dos entonces

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n).$$

Observemos que en la definición está implícita la hipótesis de que las series de medidas de conjuntos disjuntos son convergentes (en el caso de las medidas positivas donde admitíamos el valor $+\infty$ esto era evidente). Más aún, la serie ha de converger absolutamente. En efecto, la serie (finita o infinita) formada por los términos correspondientes a los conjuntos E_n con medida negativa ha de converger a la medida de su unión, y obviamente la serie de los valores absolutos converge al valor absoluto de la suma, es decir, los términos negativos convergen absolutamente. Lo mismo vale para los términos positivos, luego la serie completa también converge absolutamente.

Conviene saber que toda la teoría que vamos a exponer sobre medidas signadas se generaliza con cambios mínimos a medidas con valores complejos, pero no vamos a necesitar nada al respecto. Con esta definición, las medidas signadas sobre una σ -álgebra fija en un conjunto X forman un espacio vectorial real con las operaciones dadas por

$$(\mu + \nu)(E) = \mu(E) + \nu(E), \quad (\alpha\mu)(E) = \alpha\mu(E).$$

En particular, las medidas signadas de Borel en un espacio topológico X forman un espacio vectorial real.

Ejemplo Sea X un espacio topológico y $x \in X$. Definimos la *delta de Dirac* de soporte x como la medida de Borel dada por

$$\delta_x(E) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in E \\ 0 & \text{si } x \notin E \end{cases}.$$

Claramente se trata de una medida signada positiva. Si una región del espacio está ocupada por partículas puntuales en las posiciones x_1, \dots, x_n con cargas eléctricas q_1, \dots, q_n , entonces la distribución de carga viene dada por la medida signada

$$\mu = \sum_{i=1}^n q_i \delta_{x_i}.$$

También podemos considerar la medida positiva

$$|\mu| = \sum_{i=1}^n |q_i| \delta_{x_i},$$

que a cada región del espacio le asigna la cantidad total de carga que contiene, haciendo abstracción de su signo. Vamos a probar que a toda medida signada μ le podemos asignar una medida positiva $|\mu|$ con una interpretación análoga a la de este ejemplo. ■

Definición 6.16 Sea μ una medida signada en un conjunto X . Llamaremos *variación total* de μ a la aplicación definida sobre la misma σ -álgebra que μ dada por

$$|\mu|(E) = \sup \sum_{n=1}^{\infty} |\mu(E_n)|,$$

donde el supremo se toma sobre todas las particiones $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ de E en conjuntos medibles disjuntos dos a dos.

Tomando la partición formada únicamente por E obtenemos la relación $|\mu(E)| \leq |\mu|(E)$. Es inmediato comprobar que la medida $|\mu|$ construida en el ejemplo anterior es la variación total de μ en el sentido de la definición anterior.

Teorema 6.17 *La variación total de una medida signada es una medida positiva finita.*

DEMOSTRACIÓN: Obviamente $|\mu|(\emptyset) = 0$. Sea $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ una partición de un conjunto medible E en conjuntos medibles disjuntos dos a dos. Sea $r_n < |\mu|(E_n)$. Entonces cada E_n tiene una partición $\{E_{nm}\}_{m=1}^{\infty}$ de modo que

$$r_n < \sum_{m=1}^{\infty} |\mu(E_{nm})|.$$

La unión de todas las particiones forma una partición de E , con lo que

$$\sum_{n=1}^{\infty} r_n \leq \sum_{m,n=1}^{\infty} |\mu(E_{nm})| \leq |\mu|(E).$$

Tomando el supremo en todas las posibles elecciones de $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ resulta que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\mu|(E_n) \leq |\mu|(E).$$

Sea ahora $\{A_m\}_{m=1}^{\infty}$ una partición de E en conjuntos medibles disjuntos dos a dos. Entonces $\{E_n \cap A_m\}_{n=1}^{\infty}$ es una partición de A_m y $\{E_n \cap A_m\}_{m=1}^{\infty}$ es una partición de E_n , luego

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} |\mu(A_m)| &= \sum_{m=1}^{\infty} \left| \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_m \cap E_n) \right| \leq \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} |\mu(A_m \cap E_n)| \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} |\mu(A_m \cap E_n)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\mu|(E_n). \end{aligned}$$

Como esto vale para toda partición de E , tenemos

$$|\mu|(E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\mu|(E_n).$$

Falta probar que $|\mu|$ es finita. Supongamos que existe un conjunto medible E tal que $|\mu|(E) = +\infty$. Sea $t = 2(1 + |\mu(E)|)$. Puesto que $|\mu|(E) > t$, por

definición de variación total existen conjuntos medibles E_n contenidos en E y disjuntos dos a dos tales que

$$t < \sum_{n=1}^k |\mu(E_n)|.$$

Sea P la suma de los términos $|\mu(E_n)|$ tales que $\mu(E_n) \geq 0$ y sea N la suma de los $|\mu(E_n)|$ tales que $\mu(E_n) < 0$. Por la desigualdad anterior tenemos $t < P + N$, luego $t < 2P$ o bien $t < 2N$, según si $N \leq P$ o $P \leq N$. Sea A la unión de los E_n correspondientes a P o N según el caso, de modo que $A \subset E$ y $t < 2|\mu(A)|$, luego $|\mu(A)| > t/2 > 1$.

Sea ahora $B = E \setminus A$. Entonces

$$|\mu(B)| = |\mu(B) - \mu(A)| \geq |\mu(A)| - |\mu(E)| > \frac{t}{2} - |\mu(E)| = 1.$$

Así pues, hemos partido E en dos conjuntos disjuntos A y B tales que $|\mu(A)| > 1$ y $|\mu(B)| > 1$. Obviamente $|\mu|(A) = +\infty$ o bien $|\mu|(B) = +\infty$.

Supongamos ahora que el espacio total X tiene variación total infinita. Por el argumento anterior podemos partirlo en dos conjuntos medibles disjuntos $X = A_1 \cup B_1$ tales que $|\mu|(B_1) = +\infty$ y $|\mu(A_1)| > 1$. Aplicando el mismo razonamiento a B_1 obtenemos $B_1 = A_2 \cup B_2$ con $|\mu|(B_2) = +\infty$ y $|\mu(A_2)| > 1$. Procediendo de este modo construimos una familia numerable de conjuntos medibles disjuntos $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ tales que $|\mu(A_n)| > 1$ para todo n . Debería cumplirse

$$\mu \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n),$$

pero la serie no converge, porque su término general no tiende a 0. Esta contradicción prueba que $|\mu|(X) < +\infty$ y por lo tanto $|\mu|$ es una medida finita. ■

Ejercicio: Probar que el conjunto de todas las medidas signadas sobre una σ -álgebra en un conjunto X es un espacio normado con la norma dada por $\|\mu\| = |\mu|(X)$.

Definición 6.18 Si μ es una medida signada en un conjunto X , llamaremos *variación positiva* y *variación negativa* de μ a las medidas (definidas sobre la misma σ -álgebra) dadas por

$$\mu^+ = \frac{|\mu| + \mu}{2}, \quad \mu^- = \frac{|\mu| - \mu}{2}.$$

Claramente son dos medidas positivas finitas y cumplen las relaciones

$$\mu = \mu^+ - \mu^-, \quad |\mu| = \mu^+ + \mu^-.$$

Por ejemplo, si μ representa la carga eléctrica contenida en una región del espacio, μ^+ y μ^- representan, respectivamente, la carga positiva y la carga negativa que contiene dicha región.

Diremos que una función $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ es *integrable* respecto a una medida signada μ si lo es respecto a μ^+ y μ^- , y definimos su integral como

$$\int_X f d\mu = \int_X f d\mu^+ - \int_X f d\mu^-.$$

Es fácil ver que el conjunto $L^1(\mu)$ de las funciones integrables es un espacio vectorial y la integral determina sobre él una aplicación lineal. Además se cumple la desigualdad

$$\left| \int_X f d\mu \right| \leq \int_X |f| d|\mu|.$$

También es claro que la aplicación dada por $\nu(E) = \int_E f d\mu$ es una medida signada en X .

Nos encaminamos a probar ahora uno de los teoremas más importantes de la teoría de la medida. Para ello necesitamos algunos conceptos y resultados previos.

Definición 6.19 sea μ una medida positiva en un conjunto X y λ una medida arbitraria (positiva o signada) en la misma σ -álgebra. Diremos que λ es *absolutamente continua* respecto a μ , y lo representaremos por $\lambda \ll \mu$, si todos los conjuntos nulos para μ son nulos para λ .

Si existe un conjunto medible A tal que para todo conjunto medible E se cumple $\lambda(E) = \lambda(A \cap E)$ se dice que λ *está concentrada* en A . Esto equivale a que $\lambda(E) = 0$ siempre que $E \cap A = \emptyset$.

Diremos que dos medidas arbitrarias (sobre una misma σ -álgebra) son *mutuamente singulares*, y lo representaremos por $\lambda_1 \perp \lambda_2$, si existen conjuntos medibles disjuntos A y B tales que λ_1 está concentrada en A y λ_2 está concentrada en B .

Ejemplo Si admitimos como principio que toda masa ocupa un volumen, entonces la medida μ que a cada región del espacio le asigna la masa que contiene es absolutamente continua respecto a la medida de Lebesgue m . Por el contrario, a veces es más conveniente trabajar con masas puntuales, es decir, suponiéndolas localizadas en puntos del espacio sin volumen. Éste sería el caso de una distribución de masas de la forma $\mu = \sum_{n=1}^k m_n \delta_{x_n}$. Es fácil ver que entonces $\mu \perp m$. ■

He aquí algunas propiedades elementales:

Teorema 6.20 Sean λ , λ_1 y λ_2 medidas arbitrarias en un conjunto X y μ una medida positiva, todas ellas con los mismos conjuntos medibles. Entonces

- a) Si λ está concentrada en un conjunto medible A , también lo está $|\lambda|$.
- b) Si $\lambda_1 \perp \lambda_2$ entonces $|\lambda_1| \perp |\lambda_2|$.

- c) Si $\lambda_1 \perp \mu$ y $\lambda_2 \perp \mu$ entonces $\lambda_1 + \lambda_2 \perp \mu$.
- d) Si $\lambda_1 \ll \mu$ y $\lambda_2 \ll \mu$ entonces $\lambda_1 + \lambda_2 \ll \mu$.
- e) Si $\lambda \ll \mu$, entonces $|\lambda| \ll \mu$.
- f) Si $\lambda_1 \ll \mu$ y $\lambda_2 \perp \mu$ entonces $\lambda_1 \perp \lambda_2$.
- g) Si $\lambda \ll \mu$ y $\lambda \perp \mu$ entonces $\lambda = 0$.

DEMOSTRACIÓN: a) Si $E \cap A = \emptyset$ y $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ es cualquier partición de E , entonces $\lambda(E_n) = 0$ para todo n , luego $|\lambda|(E) = 0$.

b) Es consecuencia inmediata de a).

c) Existen conjuntos disjuntos A_1 y B_1 tales que λ_1 está concentrada en A_1 y μ está concentrada en B_1 e igualmente existen conjuntos disjuntos A_2 y B_2 tales que λ_2 está concentrada en A_2 y μ está concentrada en B_2 . Entonces $\lambda_1 + \lambda_2$ está concentrada en $A = A_1 \cap A_2$ y μ está concentrada en $B = B_1 \cap B_2$.

d) Obvio.

e) Si $\mu(E) = 0$ y $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una partición de E en conjuntos medibles disjuntos, entonces $\mu(E_n) = 0$ para todo n , luego $\lambda(E_n) = 0$ y $|\lambda|(E) = 0$.

f) Tenemos que λ_2 está concentrada en un conjunto A tal que $\mu(A) = 0$. Como $\lambda_1 \ll \mu$ ha de ser $\lambda_1(E) = 0$ para todo conjunto medible $E \subset A$. Por consiguiente λ_1 está concentrada en $X \setminus A$.

g) Por f) tenemos $\lambda \perp \lambda$, pero esto implica que $\lambda = 0$. ■

Ahora probamos dos hechos elementales sobre medidas positivas que nos harán falta a continuación.

Teorema 6.21 Si μ es una medida positiva σ -finita en un conjunto X , entonces existe una función $w \in L^1(\mu)$ tal que $0 < w(x) < 1$ para todo $x \in X$.

DEMOSTRACIÓN: Sea $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ una partición de X en conjuntos disjuntos de medida finita. Definamos

$$w_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^n(1+\mu(E_n))} & \text{si } x \in E_n \\ 0 & \text{si } x \in X \setminus E_n \end{cases}$$

La función $w = \sum_{n=1}^{\infty} w_n$ cumple lo pedido. ■

Teorema 6.22 Sea μ una medida positiva finita, $f \in L^1(\mu)$ y $C \subset \mathbb{R}$ un conjunto cerrado. Si

$$P_E(f) = \frac{1}{\mu(E)} \int_E f d\mu \in C$$

para todo conjunto medible E no nulo, entonces $f(x) \in C$ p.c.t. $x \in X$.

DEMOSTRACIÓN: Sea $I = [x - r, x + r]$ un intervalo cerrado disjunto de C . Puesto que $\mathbb{R} \setminus C$ es unión de una familia numerable de tales intervalos, basta probar que $E = f^{-1}[I]$ es nulo. En caso contrario

$$|P_E(f) - x| = \frac{1}{\mu(E)} \left| \int_E (f - x) d\mu \right| \leq \frac{1}{\mu(E)} \int_E |f - x| d\mu \leq r,$$

lo cual es imposible, pues $P_E(f) \in C$. ■

Finalmente podemos probar:

Teorema 6.23 (de Lebesgue-Radon-Nikodým) *Sea μ una medida positiva σ -finita en un conjunto X y sea λ una medida signada sobre la misma σ -álgebra. Entonces*

a) *Existe un único par de medidas signadas λ_a y λ_s tales que*

$$\lambda = \lambda_a + \lambda_s, \quad \lambda_a \ll \mu, \quad \lambda_s \perp \mu.$$

Si λ es positiva (y finita) también lo son λ_a y λ_s .

b) *Existe una única $h \in L^1(\mu)$ tal que para todo conjunto medible E*

$$\lambda_a(E) = \int_E h d\mu.$$

La parte a) se conoce como Teorema de Lebesgue. La parte b) es el Teorema de Radon-Nikodým.

DEMOSTRACIÓN: La unicidad de a) es clara a partir de 6.20, pues si λ'_a, λ'_s es otro par que cumpla lo mismo, entonces $\lambda'_a - \lambda_a = \lambda_s - \lambda'_s$, $\lambda'_a - \lambda_a \ll \mu$ y $\lambda_s - \lambda'_s \perp \mu$, luego $\lambda'_a - \lambda_a = \lambda_s - \lambda'_s = 0$.

La unicidad de h en b) (como función de $L^1(\mu)$, es decir, p.c.t.p.) es fácil de probar: si existe otra h' en las mismas condiciones entonces $f = h - h'$ tiene integral nula sobre todo conjunto. Tomamos $E = \{x \in X \mid f(x) > 0\}$ y, como f tiene integral nula sobre E , por el teorema 4.56 concluimos que $f = 0$ p.c.t.p.

Supongamos primero que λ es positiva (y finita). Sea w según el teorema 6.21. Sea ν la medida positiva finita dada por

$$\nu(E) = \lambda(E) + \int_E w d\mu.$$

En otros términos, si $f = \chi_E$ se cumple

$$\int_X f d\nu = \int_X f d\lambda + \int_X fw d\mu.$$

Claramente, la misma relación vale cuando f es una función simple y, en consecuencia, para funciones medibles no negativas. Si $f \in L^2(\nu)$ la desigualdad de Hölder implica

$$\left| \int_X f d\lambda \right| \leq \int_X |f| d\lambda \leq \int_X |f| d\nu \leq \left(\int_X |f|^2 d\nu \right)^{1/2} \nu(X)^{1/2} = \nu(X)^{1/2} \|f\|_2.$$

Según el teorema 3.35, esto significa que

$$f \mapsto \int_X f d\lambda$$

es una aplicación lineal continua de $L^2(\nu)$ en \mathbb{R} . Como $L^2(\nu)$ es un espacio de Hilbert, el teorema 3.42 implica que existe $g \in L^2(\nu)$ tal que para toda $f \in L^2(\nu)$ se cumple

$$\int_X f d\lambda = \int_X fg d\nu. \quad (6.2)$$

Si aplicamos esto a una función característica $f = \chi_E$, donde $\nu(E) > 0$ el miembro izquierdo es $\lambda(E)$ y así

$$0 \leq \frac{1}{\nu(E)} \int_E g d\nu = \frac{\lambda(E)}{\nu(E)} \leq 1.$$

Según el teorema 6.22, resulta que $g(x) \in [0, 1]$ p.c.t.x (respecto a ν). Puesto que g sólo está determinada como elemento de $L^2(\nu)$, podemos modificarla en un conjunto nulo y suponer que $0 \leq g(x) \leq 1$ para todo $x \in X$. Entonces (6.2) puede reescribirse como

$$\int_X (1-g)f d\lambda = \int_X fgw d\mu. \quad (6.3)$$

Sean

$$A = \{x \in X \mid 0 \leq g(x) < 1\}, \quad B = \{x \in X \mid g(x) = 1\}.$$

Definimos las medidas λ_a y λ_s mediante

$$\lambda_a(E) = \lambda(A \cap E), \quad \lambda_s(E) = \lambda(B \cap E).$$

Haciendo $f = \chi_B$ en (6.3) el miembro izquierdo es 0 y el derecho es $\int_B w d\mu$, y como $w > 0$ concluimos que $\mu(B) = 0$, luego $\lambda_s \perp \mu$.

Ahora aplicamos (6.3) a $(1 + g + \dots + g^n)\chi_E$, con lo que tenemos

$$\int_E (1 - g^{n+1}) d\lambda = \int_E g(1 + g + \dots + g^n)w d\mu.$$

El integrando de la izquierda es nulo en B y converge a 1 en A , luego la integral de la izquierda converge a $\lambda(A \cap E) = \lambda_a(E)$. Por otra parte, el integrando de la derecha converge a una función medible no negativa h (quizá con valores infinitos), luego tomando límites en n resulta que

$$\lambda_a(E) = \int_E h d\mu.$$

En particular esto vale para $E = X$, lo que prueba que h toma valores finitos p.c.t.p., luego modificándola si es necesario en un conjunto nulo podemos suponer que $h \in L^1(\mu)$.

Esto prueba el teorema cuando λ es positiva. Si es una medida signada arbitraria basta aplicar la parte ya probada a λ^+ y λ^- . ■

Definición 6.24 Si μ una medida positiva σ -finita en un conjunto X y λ es una medida signada sobre la misma σ -álgebra tal que $\lambda \ll \mu$, entonces la función h cuya existencia afirma el teorema de Radon-Nikodým se llama la *derivada de Radon-Nikodým* de λ respecto a μ . La relación que expresa el teorema se representa también por $d\lambda = h d\mu$.

Veamos una aplicación del teorema de Radon-Nikodým. Una interpretación del teorema siguiente es que si μ representa la distribución de carga eléctrica en el espacio, entonces el espacio puede dividirse en dos regiones, una íntegramente ocupada por cargas positivas y otra por cargas negativas.

Teorema 6.25 (Teorema de descomposición de Hahn) *Sea μ una medida signada en un conjunto X . Entonces X se descompone en unión de dos conjuntos medibles disjuntos A y B tales que para todo conjunto medible E se cumple*

$$\mu^+(E) = \mu(A \cap E), \quad \mu^-(E) = -\mu(B \cap E).$$

DEMOSTRACIÓN: Obviamente $\mu \ll |\mu|$, luego existe una función $h \in L^1(|\mu|)$ tal que $d\mu = h d|\mu|$. Veamos que h toma los valores ± 1 p.c.t.p. Dado un número real r , sea $A_r = \{x \in X \mid |h(x)| < r\}$. Para toda partición $\{E_n\}_{n=1}^\infty$ de A_r se cumple

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\mu(E_n)| = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \int_{E_n} h d|\mu| \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} r |\mu|(E_n) = r |\mu|(A_r).$$

Para $r < 1$ esto implica que $|\mu|(A_r) = 0$, luego $|h| \geq 1$ p.c.t.p. Por otra parte, si $|\mu|(E) > 0$ tenemos que

$$\left| \frac{1}{|\mu|(E)} \int_E h d|\mu| \right| = \frac{|\mu(E)|}{|\mu|(E)} \leq 1,$$

luego el teorema 6.22 implica que $|h| \leq 1$ p.c.t.p. Modificando h en un conjunto nulo podemos suponer que $h = \pm 1$. Ahora basta definir

$$A = \{x \in X \mid h(x) = 1\}, \quad B = \{x \in X \mid h(x) = -1\}.$$

En efecto, por definición de μ^+ tenemos que para todo conjunto medible E se cumple

$$\mu^+(E) = \frac{1}{2} \int_E (1+h) d|\mu| = \int_{E \cap A} h d|\mu| = \mu(E \cap A).$$

Igualmente se razona con la variación negativa. ■

Se dice que el par (A, B) es una *partición de Hahn* de μ . Como aplicación obtenemos un par de hechos de interés sobre la derivada de Radon-Nikodým de una medida signada:

Teorema 6.26 Sea μ una medida positiva σ -finita en un conjunto X y sea $f \in L^1(\mu)$. Sea λ la medida signada determinada por $d\lambda = f d\mu$. Entonces $|\lambda| = |f| d\mu$ y si $g \in L^1(\lambda)$ también $gf \in L^1(\mu)$ y

$$\int_X g d\lambda = \int_X gf d\mu.$$

DEMOSTRACIÓN: Claramente $\lambda \ll \mu$, luego $|\lambda| \ll \mu$, luego $\lambda^+ \ll \mu$ y $\lambda^- \ll \mu$. Por el teorema de Radon-Nikodým existen funciones $f_+, f_- \in L^1(\mu)$ tales que $d\lambda^+ = f_+ d\mu$, $d\lambda^- = f_- d\mu$. Si (A, B) es una partición de Hahn para λ , podemos exigir que f_+ se anule en B y f_- se anule en A . Es claro que $f = f_+ - f_-$ p.c.t.p., luego $|f| = f_+ + f_-$ p.c.t.p. Por consiguiente $d|\lambda| = (f_+ + f_-) d\mu = |f| d\mu$.

La segunda parte del teorema es obvia si g es una función simple. Si g es positiva tomamos una sucesión creciente $\{s_n\}$ de funciones simples $0 \leq s_n \leq g$ que converja puntualmente a g . Entonces

$$\int_X s_n |f| d\mu = \int_X s_n d|\lambda|.$$

Por el teorema de la convergencia monótona concluimos que

$$\int_X g |f| d\mu = \int_X g d|\lambda| < +\infty,$$

luego $gf \in L^1(\mu)$. También tenemos

$$\int_X s_n d\lambda^+ - \int_X s_n d\lambda^- = \int_X s_n f d\mu$$

Aplicando el teorema de la convergencia monótona a la izquierda y el de la convergencia dominada a la derecha llegamos a la igualdad del enunciado. Si g no es positiva aplicamos la parte ya probada a g^+ y g^- . ■

Para terminar probaremos una versión del teorema de Riesz para medidas signadas. Sea K un espacio topológico compacto y $C(K)$ el espacio de todas las funciones reales continuas sobre K . Sabemos que $C(K)$ es un espacio de Banach con la norma supremo. Sea $C(K)'$ el espacio de las aplicaciones lineales continuas de $C(K)$ en \mathbb{R} , que también es un espacio de Banach con la norma

$$\|T\| = \sup\{|T(f)| \mid \|f\|_\infty \leq 1\}.$$

Además, para toda $f \in C(K)$ se cumple $|T(f)| \leq \|T\| \|f\|_\infty$. Llamemos $M(K)$ al conjunto de todas las medidas signadas de Borel en K , que claramente es un espacio normado con la norma $\|\mu\| = |\mu|(K)$.

Teorema 6.27 (Teorema de representación de Riesz) Si K es un espacio compacto, a cada funcional lineal continuo $T \in C(K)'$ le corresponde una única medida signada $\mu \in M(K)$ tal que para toda función $f \in C(K)$ se cumple

$$T(f) = \int_K f d\mu.$$

Además esta correspondencia es una isometría $C(K)' \rightarrow M(K)$.

DEMOSTRACIÓN: Si T fuera positivo, es decir, si $T(f) \geq 0$ cuando $f \geq 0$, la versión del teorema de Riesz que probamos en el capítulo anterior nos daría la medida que buscamos. En el caso general vamos a descomponer T en diferencia de dos funcionales positivos. Sea $C^-(K) = \{f \in C(K) \mid f \geq 0\}$ y definamos

$$T^+(f) = \sup\{T(u) \mid u \in C^+(K), u \leq f\}, \quad \text{para } f \in C^+(K).$$

Notemos que si $0 \leq u \leq f$ se cumple $|T(u)| \leq \|T\| \|u\|_\infty \leq \|T\| \|f\|_\infty$, luego T^+ es finito y $|T^+(f)| \leq \|T\| \|f\|_\infty$.

Es claro que si $\alpha \geq 0$ se cumple $T^+(\alpha f) = \alpha T^+(f)$. Además $T^+(f+g) = T^+(f) + T^+(g)$. En efecto, si $0 \leq u \leq f$ y $0 \leq v \leq g$ entonces $0 \leq u+v \leq f+g$, luego $T(u)+T(v) \leq T^+(f+g)$. Tomando supremos $T^+(f)+T^+(g) \leq T^+(f+g)$. Recíprocamente, si $w \leq f+g$ es claro que $u = f \wedge w$ y $v = w - u$ son funciones continuas y $0 \leq u \leq f$, $0 \leq v \leq g$, $w = u+v$, luego $T(w) \leq T^+(f) + T^+(g)$ y, tomando supremos, $T^+(f+g) \leq T^+(f) + T^+(g)$.

Dada $f \in C(K)$ definimos $T^+(f) = T^+(f^+) - T^+(f^-)$. Es fácil probar que $T^+ : C(K) \rightarrow \mathbb{R}$ es un funcional lineal continuo positivo. Lo mismo vale para $T^- = T^+ - T$. Por el teorema de Riesz para funcionales positivos existen medidas positivas μ_+ y μ_- tales que

$$T^+(f) = \int_K f d\mu_+, \quad T^-(f) = \int_K f d\mu_-.$$

Ambas medidas son finitas (basta aplicar las fórmulas a $f = 1$). Por lo tanto podemos definir $\mu = \mu_+ - \mu_-$, que es una medida signada en K y claramente representa a T .

Veamos que $\|\mu\| = \|T\|$. Si $\|f\|_\infty \leq 1$ tenemos

$$|T(f)| = \left| \int_K f d\mu \right| \leq \int_K |f| d|\mu| \leq |\mu|(K) = \|\mu\|,$$

luego $\|T\| \leq \|\mu\|$. Dado $\epsilon > 0$ consideramos una partición de Hahn (A, B) para μ . Sean K_1 y K_2 conjuntos compactos tales que $K_1 \subset A$, $K_2 \subset B$, $\mu^+(A) - \mu^+(K_1) + \mu^-(B) - \mu^-(K_2) < \epsilon$. Es fácil construir una función continua $f : X \rightarrow [-1, 1]$ que valga 1 sobre K_1 y -1 sobre K_2 . Entonces

$$\|\mu\| = \int_A d\mu^+ + \int_B d\mu^- \leq \int_K f d\mu + \epsilon = T(f) + \epsilon \leq \|T\| + \epsilon,$$

luego $\|\mu\| \leq \|T\|$. En particular tenemos que la correspondencia $T \mapsto \mu$ es inyectiva (su núcleo es trivial) y obviamente es suprayectiva. ■

6.4 Derivación de medidas

Supongamos que μ representa la distribución de la masa en el espacio y m es la medida de Lebesgue. Si suponemos que $\mu \ll m$, es decir, si la materia ocupa un volumen, entonces tiene sentido hablar de la densidad de materia en

un punto x del espacio, entendida como la cantidad de materia por unidad de volumen. Una aproximación a dicha densidad es el cociente

$$\frac{\mu(B)}{m(B)},$$

donde B es un entorno de x . Sin embargo, si la distribución de la materia no es uniforme, dicho cociente no es exactamente la densidad, pero se parecerá más a ella cuanto menor sea el entorno considerado. Estas ideas nos llevan a la definición siguiente:

Definición 6.28 Sea m la medida de Lebesgue en \mathbb{R}^n y μ una medida de Borel signada en \mathbb{R}^n . Definimos los cocientes

$$C_r\mu(x) = \frac{\mu(B_r(x))}{m(B_r(x))},$$

donde las bolas las tomamos respecto a la distancia euclídea. Definimos la *derivada* de μ en x como

$$\frac{d\mu}{dm}(x) = \lim_{r \rightarrow 0} C_r\mu(x).$$

Probaremos que si $\mu \ll m$ entonces la derivada existe p.c.t.p. Para ello nos apoyaremos en la *función maximal* M , definida por

$$M\mu(x) = \sup_{0 < r < +\infty} C_r|\mu|(x).$$

Veamos que es medible usando para ello el teorema 4.41. Sea E la antiimagen por $M\mu$ de un intervalo $]t, +\infty]$, es decir, $E = \{x \in X \mid M\mu(x) > t\}$. Veamos que es abierto. Dado $x \in E$, existe un $r > 0$ tal que $u = C_r|\mu|(x) > t$, luego $\mu(B_r(x)) = um(B_r(x))$. Tomemos $\delta > 0$ tal que $(r + \delta)^n < r^n u/t$. Así, si $|y - x| < \delta$ entonces $B_r(x) \subset B_{r+\delta}(y)$, con lo que

$$|\mu|(B_{r+\delta}(y)) \geq \mu(B_r(x)) = u \left(\frac{r}{r+\delta} \right)^n m(B_{r+\delta}(y)) > tm(B_{r+\delta}(y)).$$

Esto prueba que $y \in E$, es decir, tenemos que $B_\delta(x) \subset E$, luego E es abierto. ■

Ahora necesitamos un par de hechos técnicos:

Teorema 6.29 Sea W la unión de una familia finita de bolas $B_{r_i}(x_i) \subset \mathbb{R}^n$, para $i = 1, \dots, N$. Entonces existe un conjunto $S \subset \{1, \dots, n\}$ tal que:

- a) Las bolas $B_{r_i}(x_i)$ con $i \in S$ son disjuntas,
- b) $W \subset \bigcup_{i \in S} B_{3r_i}(x_i)$,
- c) $m(W) \leq 3^n \sum_{i \in S} m(B_{r_i}(x_i))$.

DEMOSTRACIÓN: Escribiremos $B_i = B_{r_i}(x_i)$. Ordenemos las bolas de modo que sus radios sean decrecientes. Sea $i_1 = 1$. Eliminemos todas las bolas que corten a B_{i_1} . Sea B_{i_2} la primera bola restante, si es que queda alguna, eliminemos las bolas que cortan a B_{i_2} y continuemos el proceso hasta que no queden bolas. Veamos que las bolas que hemos dejado cumplen el teorema. Ciertamente son disjuntas. Cada bola B_j de las que hemos eliminado está contenida en una bola $B_{3r_i}(x_i)$, para algún $i \in S$, pues si $r' \leq r$ y $B_{r'}(x')$ corta a $B_r(x)$ entonces $B_{r'}(x') \subset B_{3r}(x)$.

La parte c) es consecuencia inmediata de b). ■

Teorema 6.30 Si μ es una medida signada de Borel en \mathbb{R}^n y $t > 0$, entonces

$$m(\{x \in \mathbb{R}^n \mid M\mu(x) > t\}) \leq \frac{3^n}{t} |\mu|(\mathbb{R}^n).$$

DEMOSTRACIÓN: Sea K un subconjunto compacto del abierto que aparece en el miembro izquierdo. Cada $x \in K$ es el centro de una bola abierta B tal que $|\mu|(B) > tm(B)$.

Estas bolas forman un cubrimiento de K , del cual podemos extraer un subcubrimiento finito al que a su vez podemos aplicar el teorema anterior, digamos $\{B_1, \dots, B_k\}$ de modo que

$$m(K) \leq 3^n \sum_{i=1}^k m(B_i) \leq \frac{3^n}{t} \sum_{i=1}^k |\mu|(B_i) \leq \frac{3^n}{t} |\mu|(\mathbb{R}^n).$$

La medida μ es regular porque lo son sus variaciones positiva y negativa, luego tomando el supremo sobre todos los compactos K obtenemos la desigualdad del enunciado. ■

Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ podemos aplicar el teorema anterior a la medida definida por

$$\mu(E) = \int_E |f| dm.$$

En este caso $M\mu$ es la función

$$Mf(x) = \sup_{0 < r < +\infty} \frac{1}{m(B_r(x))} \int_{B_r(x)} |f| dm$$

y la tesis del teorema es

$$m(\{x \in \mathbb{R}^n \mid Mf(x) > t\}) \leq \frac{3^n}{t} \|f\|_1. \quad (6.4)$$

La existencia de la derivada de una medida se deducirá de un teorema de existencia de puntos de Lebesgue, que definiremos a continuación:

Definición 6.31 Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ (representaremos así al espacio $L^1(m)$, para la medida de Lebesgue en \mathbb{R}^n). Un *punto de Lebesgue* de f es un punto $x \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{m(B_r(x))} \int_{B_r(x)} |f(y) - f(x)| dm(y) = 0.$$

Notemos que si x es un punto de Lebesgue entonces, dado que

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{m(B_r(x))} \int_{B_r(x)} f \, dm - f(x) \right| &= \left| \frac{1}{m(B_r(x))} \int_{B_r(x)} (f(y) - f(x)) \, dm(y) \right| \\ &\leq \frac{1}{m(B_r(x))} \int_{B_r(x)} |f(y) - f(x)| \, dm(y), \end{aligned}$$

se cumple

$$f(x) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{m(B_r(x))} \int_{B_r(x)} f \, dm.$$

Es claro que si f es continua en x entonces x es un punto de Lebesgue para f , pero necesitamos la existencia de puntos de Lebesgue de funciones integrables cualesquiera:

Teorema 6.32 Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, entonces casi todo $x \in \mathbb{R}^n$ es un punto de Lebesgue de f .

DEMOSTRACIÓN: Sea

$$T_r(f)(x) = \frac{1}{m(B_r(x))} \int_{B_r(x)} |f - f(x)| \, dm$$

y sea

$$T(f)(x) = \overline{\lim}_{r \rightarrow 0} T_r(f)(x).$$

Tenemos que probar que $Tf = 0$ p.c.t.p. Fijemos un número real $y > 0$ y un número natural k . Por el teorema 6.14 existe una función $g \in C_c(\mathbb{R}^n)$ tal que $\|f - g\| - 1 < 1/k$. Sea $h = f - g$. La continuidad de g implica que $T(g) = 0$. Como

$$T_r(h)(x) \leq \frac{1}{m(B_r(x))} \int_{B_r(x)} |h| \, dm + |h(x)|,$$

tenemos que $T(h) \leq Mh + |h|$. Por otra parte, dado que $T_r(f) \leq T_r(g) + T_r(h)$, vemos que $T(f) \leq Mh + |h|$. Así pues,

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid T(f)(x) > 2y\} \subset \{x \in \mathbb{R}^n \mid M(h)(x) > y\} \cup \{x \in \mathbb{R}^n \mid |h|(x) > y\}$$

Llamemos $E(y, k)$ al miembro derecho de la inclusión anterior. Por 6.4 tenemos que la medida del primero de los conjuntos de la unión es menor o igual que $3^n/(yk)$. Respecto al segundo, llamémoslo A , observamos que

$$ym(A) \leq \int_A |h| \, dm \leq \int_{\mathbb{R}^n} |h| \, dm = \|h\|_1 < \frac{1}{k},$$

luego en total, $m(E(y, k)) \leq (3^n + 1)/(yk)$.

El conjunto $\{x \in \mathbb{R}^n \mid T(f)(x) > 2y\}$ es independiente de k y está contenido en la intersección de los conjuntos $E(y, k)$ para todo k , que es nula. Por la completitud de la medida de Lebesgue concluimos que es medible Lebesgue y tiene medida nula. Como esto vale para todo $y > 0$ concluimos que $Tf = 0$ p.c.t.p. ■

Con esto llegamos al teorema principal de esta sección:

Teorema 6.33 Sea μ una medida signada de Borel en \mathbb{R}^n tal que $\mu \ll m$ y sea f la derivada de Radon-Nikodým de μ respecto a m . Entonces $d\mu/dm = f$ p.c.t.p. y para todo conjunto de Borel $E \subset \mathbb{R}^n$ se cumple

$$\mu(E) = \int_E \frac{d\mu}{dm} dm.$$

DEMOSTRACIÓN: El teorema de Radon-Nikodým afirma que se verifica la igualdad del enunciado con f en lugar de $d\mu/dm$. Para cada punto de Lebesgue x de f se cumple

$$f(x) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{m(B_r(x))} \int_{B_r(x)} f dm = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mu(B_r(x))}{m(B_r(x))} = \frac{d\mu}{dm}(x).$$

■

Más en general, el teorema 6.26 nos da que, en las condiciones del teorema anterior, si $g \in L^1(\lambda)$ entonces

$$\int_X g d\mu = \int_X g \frac{d\mu}{dm} dm.$$

6.5 El teorema de cambio de variables

Finalmente estamos en condiciones de probar la versión general del teorema de cambio de variables para funciones de varias variables. El planteamiento es el siguiente: Supongamos que $g : U \rightarrow V$ es un difeomorfismo entre dos abiertos en \mathbb{R}^n . El problema es relacionar la integral de una función $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ con la de $g \circ f$. Según el teorema 4.36, si g fuera una aplicación lineal de determinante Δ se cumpliría que $m(g(A)) = |\Delta| m(A)$, para todo conjunto medible $A \subset U$. En este caso no es difícil deducir que

$$\int_V f dm = |\Delta| \int_U (g \circ f) dm.$$

En el caso general, sabemos que en un entorno de cada punto x la aplicación g se confunde con su diferencial $dg(x)$, que es una aplicación lineal de determinante $\Delta_g(x) = \det Jg(x)$ (el *determinante jacobiano* de g en x). Esto se traduce en que si A es un conjunto medible contenido en un entorno de x suficientemente pequeño, entonces $m(g(A)) \approx |\Delta_g(x)| m(A)$. Esto es suficiente para llegar a un resultado análogo al caso lineal:

$$\int_V f dm = \int_U (g \circ f) |\Delta_g| dm.$$

Éste es el contenido del teorema de cambio de variable. La prueba detallada no es trivial en absoluto, sino que depende de una gran parte de los resultados que hemos visto hasta ahora. Observemos que $dg(x)$ es de hecho un isomorfismo, luego $\Delta_g(x) \neq 0$. Comencemos probando la relación entre la medida de un conjunto y la de su imagen para el caso de bolas abiertas:

Teorema 6.34 Sea $g : U \rightarrow V$ un difeomorfismo entre dos abiertos de \mathbb{R}^n y $x \in U$. Entonces

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{m(g[B_r(x)])}{m(B_r(x))} = |\Delta_g(x)|.$$

DEMOSTRACIÓN: Puesto que la medida de Lebesgue es invariante por traslaciones, no perdemos generalidad si suponemos $x = 0$ y $g(0) = 0$. Sea $\phi = dg(0)$ y $h = g \circ \phi^{-1}$. Probaremos que

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{m(h[B_r(0)])}{m(B_r(0))} = 1.$$

El teorema 4.36 nos da que $m(h[B_r(0)]) = |\Delta_g(0)|^{-1}m(g[B_r(0)])$, luego la igualdad anterior implica la que figura en el enunciado. La aplicación h cumple $h(0) = 0$ y además $dh(0)$ es la aplicación identidad. Por definición de diferenciabilidad esto significa que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x) - x}{\|x\|} = 0.$$

Así, dado $0 < \epsilon < 1$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$\text{si } \|x\| < \delta \text{ entonces } \|h(x) - x\| < \epsilon\|x\|. \quad (6.5)$$

Como h es un difeomorfismo en particular es una aplicación abierta, luego podemos tomar δ de modo que además $B_\delta(0)$ está contenida en la imagen de h . Veamos que si $0 < r < \delta$ entonces

$$B_{(1-\epsilon)r}(0) \subset h[B_r(0)] \subset B_{(1+\epsilon)r}(0). \quad (6.6)$$

En efecto, si $y \in B_{(1-\epsilon)r}(0) \subset B_\delta(0)$ entonces existe un $x \in U$ tal que $h(x) = y$. La relación 6.5 implica $\|y - x\| < \epsilon\|x\|$. Entonces

$$\|x\| \leq \|x - y\| + \|y\| < \epsilon\|x\| + (1 - \epsilon)r,$$

luego $(1 - \epsilon)\|x\| < (1 - \epsilon)r$ y $\|x\| < r$. Así $y \in h[B_r(0)]$. Por otra parte, si $y \in h[B_r(0)]$, es decir, si $y = h(x)$ con $\|x\| < r$, la relación 6.5 implica que $\|y - x\| < \epsilon r$, luego $\|y\| < (1 + \epsilon)r$, lo que nos da la otra inclusión.

Tomando medidas en 6.6 resulta

$$(1 - \epsilon)^n \leq \frac{m(h[B_r(0)])}{m(B_r(0))} \leq (1 + \epsilon)^n, \quad \text{para todo } r < \delta,$$

y la conclusión es clara. ■

En las condiciones del teorema anterior la aplicación g biyecta claramente los conjuntos de Borel de U con los de V , por lo que podemos definir una medida de Borel en U mediante $\mu(A) = m(g[A])$. Si se trata de una medida finita el teorema afirma que

$$\frac{d\mu}{dm}(x) = \Delta_g(x).$$

En realidad no hay ningún problema en definir la derivada de una medida positiva, aunque no sea finita, pues se trata de un concepto local, y la igualdad anterior es cierta en cualquier caso.

Todo conjunto medible Lebesgue se puede expresar como unión de un conjunto de Borel y un conjunto nulo. El teorema 4.39 prueba que si $g : U \rightarrow V$ es un difeomorfismo entre dos abiertos de \mathbb{R}^n y $E \subset U$ es medible Lebesgue, entonces $g[E]$ es medible Lebesgue.

Veamos finalmente el teorema principal:

Teorema 6.35 (Teorema de cambio de variables) *Sea $g : U \rightarrow V$ un difeomorfismo entre dos abiertos de \mathbb{R}^n y sea $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ una aplicación integrable Lebesgue. Entonces*

$$\int_V f \, dm = \int_U (g \circ f) |\Delta_g| \, dm.$$

DEMOSTRACIÓN: Para cada natural k , sea $U_k = \{x \in U \mid \|g(x)\| < k\}$. Claramente U_k es abierto. Para cada conjunto medible E definimos $\mu_k(E) = m(g[E \cap U_k])$. Claramente μ_k es una medida finita sobre la σ -álgebra de los conjuntos medibles Lebesgue en \mathbb{R}^n . El teorema 4.39 prueba que $\mu_k \ll m$.

Ahora podemos aplicar el teorema 6.33, según el cual existe $d\mu_k/dm$ p.c.t.p., es integrable Lebesgue y para todo conjunto medible E se cumple

$$\mu_k(E) = \int_E \frac{d\mu_k}{dm} \, dm.$$

En principio 6.33 prueba esto para conjuntos de Borel, pero la igualdad se extiende obviamente a conjuntos medibles arbitrarios. Del teorema 6.34 se sigue fácilmente que si $x \in U_k$ entonces

$$\frac{d\mu_k}{dm} = |\Delta_g(x)|.$$

En total hemos probado que si E es medible entonces

$$m(g[E \cap U_k]) = \int_{U_k} \chi_E |\Delta_g| \, dm.$$

Por el teorema de la convergencia monótona concluimos que

$$m(g[E \cap U]) = \int_U \chi_E |\Delta_g| \, dm. \quad (6.7)$$

Vamos a deducir de aquí que si A es un conjunto medible, entonces

$$\int_V \chi_A \, dm = \int_U (g \circ \chi_A) |\Delta_g| \, dm.$$

Basta tomar $E = g^{-1}(A) \subset U$. El comentario previo al teorema prueba que E es medible y claramente $\chi_E = g \circ \chi_A$. Además $g[E \cap U] = g[E] = A \cap V$, luego (6.7) se convierte en la igualdad buscada.

De aquí se sigue la fórmula del enunciado para el caso en que f es una función simple no negativa. Por el teorema de la convergencia monótona llegamos al mismo resultado para funciones medibles no negativas y a su vez se extiende a toda función integrable aplicándolo a f^+ y f^- . ■

Ejemplo: La integral de Gauss En la sección [IC 3.3] calculamos la integral de Gauss

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Como primera aplicación del teorema de cambio de variables vamos a ver un cálculo alternativo mucho más simple. Para ello consideramos la función $f(x, y) = e^{-x^2 - y^2}$. Calculamos la integral de esta función en la bola de centro 0 y radio r mediante el cambio a coordenadas polares

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \operatorname{sen} \theta,$$

cuya matriz jacobiana es

$$J = \begin{pmatrix} \cos \theta & \operatorname{sen} \theta \\ -\rho \operatorname{sen} \theta & \rho \cos \theta \end{pmatrix},$$

de modo que el determinante jacobiano es $\Delta = \rho$. La bola $B_r(0)$ se corresponde con el rectángulo $[0, r] \times [0, 2\pi]$, luego

$$\int_{B_r(0)} e^{-x^2 - y^2} dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^r e^{-\rho^2} \rho d\rho d\theta = 2\pi \left[-\frac{e^{-\rho^2}}{2} \right]_0^r = \pi(1 - e^{-r^2}).$$

El teorema de la convergencia monótona implica que f es integrable en \mathbb{R}^2 y además

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2 - y^2} dx dy = \pi.$$

Por otro lado podemos aplicar el teorema de Fubini, que nos da

$$\pi = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2} e^{-y^2} dx dy = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dx \right) = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \right)^2,$$

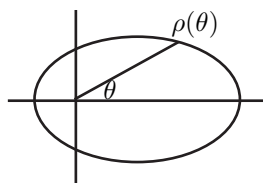
luego tenemos la igualdad que buscábamos. ■

Ejemplo: Área en coordenadas polares En [IC 2.6] demostramos la fórmula

$$A = \frac{1}{2} \int_{\theta_0}^{\theta_1} \rho^2(\theta) d\theta$$

para el área limitada por una curva en coordenadas polares mediante un razonamiento de aproximación por sumas finitas. Ahora podemos justificarla por una simple aplicación del teorema de cambio de variables.

Consideramos una curva cerrada en \mathbb{R}^2 que rodee a $(0,0)$ y admita una expresión en coordenadas polares $\rho = \rho(\theta)$ (es decir, que corte a cada semirrecta de origen $(0,0)$ en un único punto). El recinto S limitado por la curva estará formado por los puntos (ρ_0, θ_0) tales que $0 \leq \rho_0 \leq \rho(\theta_0)$. Para calcular el área de S efectuamos el cambio de variables $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$, cuyo jacobiano es ρ . Así, el área se puede calcular como



$$A = \int_S dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^{\rho(\theta)} \rho d\rho d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{\rho^2}{2} d\theta.$$

(Hemos aplicado el teorema anterior en el abierto

$$\{(\rho, \theta) \mid 0 < \rho < \rho(\theta), 0 < \theta < 2\pi\}.$$

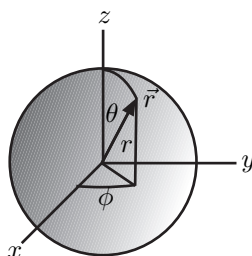
El cambio de coordenadas lo transforma biyectivamente en S menos el radio $\theta = 0$, que tiene área nula, por lo que no importa despreciarlo.)

Si limitamos los extremos de la integral a un intervalo $\theta_0 < \theta_1$ obtenemos el área del sector de la superficie limitado por las semirrectas correspondientes a los extremos, tal y como consideramos en [IC 2.6]. ■

Coordenadas esféricas Un cambio de variables muy útil es el que expresa las coordenadas cartesianas en términos de las *coordenadas esféricas*:

$$x = r \sin \theta \cos \phi, \quad y = r \sin \theta \sin \phi, \quad z = r \cos \theta,$$

para $(r, \theta, \phi) \in]0, +\infty[\times]0, \pi[\times]-\pi, \pi[$.



Aquí θ es el ángulo que forma \vec{r} con el eje z . Notemos que podemos definir $\theta(t_0) = 0$ y $\rho(t_0) = z(t_0)$, pero el ángulo $\phi(t_0)$ no está definido. Es claro que este cambio de coordenadas biyecta el abierto $]0, +\infty[\times]-\pi, \pi[\times]0, \pi[$ con todo \mathbb{R}^3 salvo un semiplano limitado por el eje Z (que tiene medida nula, por lo que esto no será relevante en el cálculo de integrales). La matriz jacobiana es

$$J = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi & \sin \theta \sin \phi & \cos \theta \\ r \cos \theta \cos \phi & r \cos \theta \sin \phi & -r \sin \theta \\ -r \sin \theta \sin \phi & r \sin \theta \cos \phi & 0 \end{pmatrix}$$

y su determinante es $\Delta = r^2 \sin \theta$:

$$\begin{aligned} r^2 \cos \theta (\sin \theta \cos \theta \sin^2 \phi + \sin \theta \cos \theta \cos^2 \phi) + r^2 \sin \theta (\sin^2 \theta \cos^2 \phi + \sin^2 \theta \sin^2 \phi) \\ = r^2 \sin \theta \cos^2 \theta + r^2 \sin^3 \theta = r^2 \sin \theta. \end{aligned}$$

Una ligera modificación de este cambio de variables es

$$x = ar \sin \theta \cos \phi, \quad y = br \sin \theta \sin \phi, \quad z = cr \cos \theta,$$

con determinante jacobiano $\Delta = abc r^2 \sin \theta$, que, para $r = 1$, parametriza el elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

y, para $0 < r < 1$, parametriza el elipsoide sólido E formado por los puntos que cumplen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1.$$

Esto nos da una forma alternativa de calcular su volumen:

$$\begin{aligned} V = \int_E dx dy dz &= \int_0^1 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} abc r^2 \sin \theta d\phi d\theta dr = \\ &= 2abc\pi \int_0^1 r^2 dr \int_0^\pi \sin \theta d\theta = \frac{4}{3} abc\pi. \end{aligned}$$

Esta integral ya la habíamos calculado tras el teorema 4.67, pero con el cambio a coordenadas esféricas podemos calcular fácilmente muchas otras, como

$$\begin{aligned} \int_E (x^2 + y^2) dx dy dz &= \int_0^1 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^2 \sin^2 \theta (a^2 \cos^2 \phi + b^2 \sin^2 \phi) abc r^2 \sin \theta d\phi d\theta dr \\ &= abc \int_0^1 r^4 dr \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta \int_0^{2\pi} (a^2 \cos^2 \phi + b^2 \sin^2 \phi) d\phi = \frac{4abc\pi}{15} (a^2 + b^2), \end{aligned}$$

donde hemos usado las primitivas (C.1) y (C.2) calculadas en [IC]. ■

Veamos otra aplicación:

Teorema 6.36 *La función $f : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 1/\|x\|^\alpha$ es integrable en una bola de centro 0 si y sólo si $\alpha < 3$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $B(r_0, R) = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid r_0 < \|x\| < R\}$. La imagen del conjunto de las ternas (r, θ, ϕ) tales que $r_0 < r < R$, $0 < \theta < \pi$, $-\pi < \phi < \pi$ es todo $B(r_0, R)$ menos su intersección con un semiplano, que es un conjunto nulo, luego

$$\int_{B(r_0, R)} \frac{1}{\|x\|^\alpha} dx dy dz = \int_{r_0}^R \int_0^\pi \int_{-\pi}^\pi \frac{1}{r^\alpha} r^2 \sin \theta d\phi d\theta dr =$$

$$2\pi \int_{r_0}^R r^{2-\alpha} \int_0^\pi \operatorname{sen} \theta \, d\theta \, dr = 4\pi \int_{r_0}^R r^{2-\alpha} \, dr =$$

$$4\pi \left[\frac{r^{3-\alpha}}{3-\alpha} \right]_{r_0}^R = 4\pi \left(\frac{R^{3-\alpha}}{3-\alpha} - \frac{r_0^{3-\alpha}}{3-\alpha} \right),$$

donde en la última línea hemos supuesto que $\alpha \neq 3$. Si $\alpha = 3$ el resultado es $3\pi \log(R/r_0)$. Es claro entonces que el límite cuando $r_0 \rightarrow 0$ sólo existe cuando $\alpha < 3$, en cuyo caso

$$\int_{\|x\| < R} \frac{1}{\|x\|^\alpha} \, dx \, dy \, dz = \frac{4\pi R^{3-\alpha}}{3-\alpha}. \quad \blacksquare$$

Ejercicio: Usar las coordenadas polares para probar que la función $1/\|x\|^\alpha$ es integrable en una bola de centro 0 de \mathbb{R}^2 si y sólo si $\alpha < 2$.

Coordenadas cilíndricas Otra forma conveniente de parametrizar ciertas regiones del espacio es mediante las *coordenadas cilíndricas*, dadas por

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \operatorname{sen} \theta, \quad z = z,$$

para $(r, \theta, z) \in]0, +\infty[\times]0, 2\pi[\times \mathbb{R}$, cuya interpretación geométrica es evidente: (r, θ) son las coordenadas polares de (x, y) y z es la coordenada cartesiana z . La matriz jacobiana es

$$J = \begin{pmatrix} \cos \theta & \operatorname{sen} \theta & 0 \\ -r \operatorname{sen} \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y su determinante es $\Delta = r$.

Por ejemplo, si E es el cilindro determinado por

$$x^2 + y^2 \leq R^2, \quad -\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2},$$

tenemos que

$$\int_E (x^2 + y^2) \, dx \, dy \, dz = \int_{-h/2}^{h/2} \int_0^R \int_0^{2\pi} r^3 \, d\theta \, dr \, dz = \frac{1}{2} \pi h R^4. \quad \blacksquare$$

En el apéndice A exponemos los resultados fundamentales sobre la dinámica de un sólido rígido, y en las secciones A.3 y A.4 aplicaremos estas técnicas de integración para el cálculo de centros de masas y momentos de inercia.

Capítulo VII

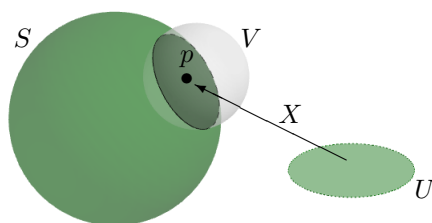
Introducción a las variedades diferenciables

Si tenemos un subconjunto $S \subset \mathbb{R}^3$, ¿qué debe cumplir S para que podamos decir que es una superficie? Si excluimos superficies que se corten a sí mismas, como ésta:



una definición razonable es la siguiente:

Un subconjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ es una superficie si para cada punto $p \in S$ existe un entorno V de p , un abierto U en \mathbb{R}^2 y un homeomorfismo $X : U \rightarrow V \cap S$.



Es decir, S es una superficie si alrededor de cada punto es homeomorfa a un abierto de \mathbb{R}^2 . Notemos que no pedimos que S sea homeomorfa a un abierto de \mathbb{R}^2 , sino sólo que lo sea alrededor de cada punto. Basta pensar en una esfera para comprender la importancia de este hecho. Una esfera no es homeomorfa a un abierto de \mathbb{R}^2 , pero un pequeño trozo de esfera es como un trozo de plano abombado, homeomorfo a un trozo de plano “llano”.

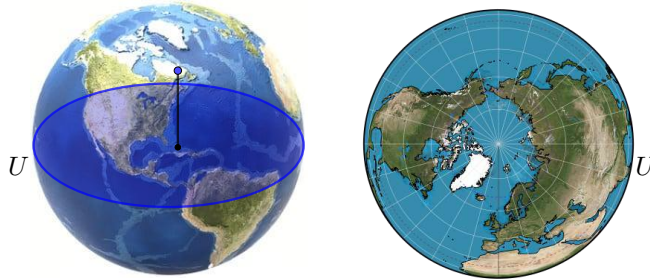
Los homeomorfismos X son como “mapas” que “cartografían” una parte de la superficie, aunque en geometría es usual llamarlos “cartas” (en el mismo sentido de “mapa” que tiene la raíz “carta” en “cartografía”).

Por ejemplo, si $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = r^2\}$ es una esfera en \mathbb{R}^3 , una carta que cubre todo su hemisferio norte es

$$X(x, y) = (x, y, \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}),$$

tomando $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < r^2\}$, $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z > 0\}$.

Por ejemplo, si S es una versión a escala de la superficie terrestre, el disco U es el mapa de la derecha:



donde hay que entender que en cada punto (x, y) del disco U hemos representado el punto de S de coordenadas $X(x, y)$. Con esto hemos cubierto únicamente el hemisferio norte, pero una carta del hemisferio sur viene dada por

$$X(x, y) = (x, y, -\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}),$$

y así aún nos quedan por cubrir los puntos del ecuador. Para ello podemos usar las cuatro cartas adicionales

$$X(x, z) = (x, \pm\sqrt{r^2 - x^2 - z^2}, z), \quad X(y, z) = (\pm\sqrt{r^2 - y^2 - z^2}, y, z).$$

Todo punto de S tiene un entorno contenido en la imagen de una de las seis cartas anteriores. Esto prueba que la esfera S es una superficie de acuerdo con la definición anterior.

Ahora bien, aquí vamos a estudiar superficies diferenciables, que son superficies con la propiedad adicional de que, si las ampliamos lo suficiente alrededor de cualquiera de sus puntos, se vuelven indistinguibles de planos. La Tierra ilustra que ése es precisamente el caso de una superficie esférica: cuando vemos de cerca una esfera del tamaño de la Tierra, no podemos discernir si lo que vemos a nuestro alrededor es un fragmento de superficie esférica o un fragmento de plano.

En la sección [IC 5.1] razonamos que una función $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable en un punto (x_0, y_0) si su gráfica $\{(x, y, f(x, y)) \mid (x, y) \in U\}$ se

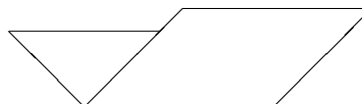
vuelve indistinguible de un plano en un entorno del punto (x_0, y_0) . Dicho plano es, concretamente, la gráfica de la función

$$(x, y) \mapsto f(x_0, y_0) + df(x_0, y_0)(x - x_0, y - y_0).$$

Las imágenes de las seis cartas de la esfera que hemos definido son las gráficas de otras tantas funciones. Por ejemplo, las dos últimas son las gráficas de las dos funciones $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por $f(y, z) = \pm\sqrt{r^2 - y^2 - z^2}$ (donde estamos admitiendo gráficas de funciones que expresen cualquiera de las tres coordenadas en función de las otras dos, y no únicamente z como función de (x, y) , lo cual no afecta a la discusión de [IC]). Esto nos garantiza que una esfera es diferenciable en el sentido que acabamos de indicar, y podría parecer que, para definir en general una superficie diferenciable basta añadir a la definición anterior la condición de que las cartas X sean diferenciables. Sin embargo, esto no es suficiente, porque en general la imagen de una carta diferenciable no tiene por qué ser la gráfica de una función diferenciable.

Por ejemplo, la superficie

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = |x|\}$$



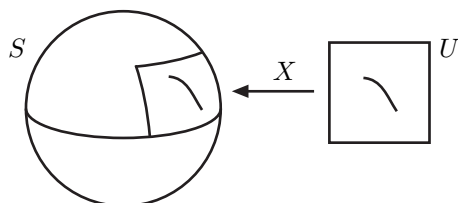
no es diferenciable, ya que si la ampliamos alrededor de cualquiera de los puntos de su “doblez” nunca dejaremos de ver que está doblada y reconoceremos que no es una superficie plana. Si embargo, toda ella puede cubrirse por una carta diferenciable:¹

$$X(u, v) = (u^3, v, |u^3|).$$

Para excluir casos como éste necesitamos imponer una condición adicional a las cartas, además de la mera diferenciability. Antes de analizar este problema con más detalle conviene analizar la definición de superficie que vamos a adoptar:

7.1 Variedades diferenciables

Definición 7.1 Un conjunto $S \subset \mathbb{R}^m$ es una *variedad diferenciable* de dimensión $n \leq m$ y de clase C^q si para cada punto $p \in S$ existe un entorno V de p , un abierto U en \mathbb{R}^n y una función $X : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ de clase C^q de modo que el rango de la matriz JX sea igual a n en todo punto y $X : U \rightarrow S \cap V$ sea un homeomorfismo. Una aplicación X en estas condiciones se llama *carta* de S alrededor de p .



¹Si cambiamos u^3 por la función $h(u)$ construida en el ejemplo tras el teorema 5.12, que tiene todas sus derivadas nulas en $u = 0$, podemos conseguir incluso una carta de S clase C^∞ .

Tal y como hemos explicado, la palabra “carta” hay que entenderla en el sentido de “mapa”, pues podemos pensar en U como un mapa “plano” de una región de S , y la aplicación X es la que hace corresponder cada punto del mapa con el punto real que representa.

En lo sucesivo supondremos que las variedades con las que trabajamos son de clase C^q para un q suficientemente grande como para que existan las derivadas que consideremos (y sean continuas). Rara vez nos hará falta suponer $q \geq 2$, aunque de hecho todos los ejemplos que consideraremos serán de clase C^∞ .

Alternativamente, podemos pensar en X^{-1} como una aplicación que asigna a cada punto $p \in S \cap V$ unas *coordenadas* $x = (x_1, \dots, x_n) \in U \subset \mathbb{R}^n$, de forma análoga a los sistemas de coordenadas en un espacio afín.² Pronto veremos que es equivalente trabajar con cartas o con sistemas de coordenadas, pero por el momento podemos decir que las cartas son diferenciables y en cambio no tiene sentido decir que las funciones coordenadas lo sean, pues no están definidas sobre abiertos de \mathbb{R}^m .

Tenemos pendiente analizar el significado geométrico de la condición que hemos impuesto sobre el rango de la matriz jacobiana, pero posponemos esto hasta la sección siguiente.

Ejemplo Todo abierto $U \subset \mathbb{R}^n$ es una variedad diferenciable de dimensión n y clase C^∞ . Basta tomar como carta la identidad en U . De este modo, todos los resultados sobre variedades diferenciables valen en particular para \mathbb{R}^n y sus abiertos. ■

Ejemplo La esfera $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = r^2\}$ es una variedad de clase C^∞ .

En efecto, ya hemos probado que todo punto de S está cubierto por una carta de clase C^∞ , pero falta probar que las cartas que hemos encontrado cumplen la condición sobre el rango de la matriz jacobiana que hemos impuesto en la definición. Por ejemplo, si consideramos la carta

$$X(x, y) = (x, y, \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}),$$

su matriz jacobiana es

$$JX = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}} \\ 0 & 1 & \frac{-y}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}} \end{pmatrix}$$

y su rango es 2 porque las dos primeras columnas son linealmente independientes. Lo mismo vale para las otras cartas. ■

²Etimológicamente, una “variedad” no es más que un conjunto cuyos elementos vienen determinados por “varias” coordenadas. En los resultados generales llamaremos x_1, \dots, x_n a las coordenadas para marcar la analogía con \mathbb{R}^n , aunque en el caso de curvas usaremos habitualmente la variable t (o s si la parametrización es la parametrización por el arco) y en el caso de superficies $S \subset \mathbb{R}^3$ usaremos x, y, z para las coordenadas en \mathbb{R}^3 y u, v para las coordenadas en S .

El ejemplo anterior es un caso particular del teorema siguiente:

Teorema 7.2 Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ una aplicación de clase C^q sobre un abierto U y $X : U \rightarrow \mathbb{R}^{n+k}$ la aplicación dada por $X(x) = (x, f(x))$. Entonces $X[U]$ es una variedad diferenciable de dimensión n y clase C^q .

DEMOSTRACIÓN: Basta observar que X es obviamente un homeomorfismo en su imagen (su inversa es una proyección) y $JX(x)$ contiene una submatriz de orden n igual a la identidad, luego su rango es n . La definición se satisface tomando $V = \mathbb{R}^{n+k}$. ■

Notemos que $X[U]$ es la gráfica de f , luego el teorema anterior afirma que la gráfica de una función diferenciable es siempre una variedad diferenciable. Un poco más en general, tenemos que si X es una “carta” de clase C^q de una variedad S salvo por que a lo sumo no cumple la propiedad sobre el rango, pero es de la forma $X(x) = (x, f(x))$, entonces la condición sobre el rango se cumple trivialmente, y esto sigue siendo cierto aunque las coordenadas $f_1(x), \dots, f_k(x)$ no se pongan todas al final de $X(x)$, sino que se intercalen entre las coordenadas de x . Esto es relevante porque, por ejemplo, en una esfera podemos considerar cartas de la forma

$$X(u, v) = (u, v, \pm\sqrt{r^2 - u^2 - v^2}), \quad X(u, v) = (u, \pm\sqrt{r^2 - u^2 - v^2}, v),$$

$$X(u, v) = (\pm\sqrt{r^2 - u^2 - v^2}, u, v),$$

y, para cubrir toda la esfera, es esencial que podamos insertar la función con la raíz cuadrada en cualquiera de las tres posiciones posibles.

Ahora veamos que todo punto de una variedad diferenciable tiene un entorno en el que la variedad es la gráfica de una función.

Teorema 7.3 Sea $S \subset \mathbb{R}^{n+k}$ una variedad de clase C^q y de dimensión n . Sea $p \in S$. Entonces existe un entorno V de p , un abierto U en \mathbb{R}^n y una función $f : U \rightarrow \mathbb{R}^k$ de clase C^q de modo que la aplicación $X : U \rightarrow \mathbb{R}^{n+k}$ dada por $X(x) = (x, f(x))$ es una carta alrededor de p .

En realidad hemos de entender que las coordenadas de x y $f(x)$ se intercalan en un cierto orden que no podemos elegir, tal y como muestra la prueba y como ilustra el caso de la esfera.

DEMOSTRACIÓN: Sea $Y : W \rightarrow \mathbb{R}^{n+k}$ una carta alrededor de p . Sea V un entorno de p tal que $Y : W \rightarrow S \cap V$ sea un homeomorfismo. Sea $t_0 \in W$ el vector de coordenadas de p , es decir, $Y(t_0) = p$. Puesto que $JY(t_0)$ tiene rango n , reordenando las funciones coordenadas de Y podemos suponer que el determinante formado por las derivadas parciales de las n primeras es no nulo. Digamos que $Y(t) = (Y_1(t), Y_2(t))$, donde $|JY_1(t_0)| \neq 0$. Sea $p_1 = Y_1(t_0)$.

Por el teorema de la función inversa 5.41, existe un entorno abierto $G \subset W$ de t_0 tal que Y_1 es inyectiva en G , $Y_1[G] = U$ es abierto en \mathbb{R}^n y la función $Y_1^{-1} : U \rightarrow G$ es de clase C^q .

El conjunto $Y[G]$ es un entorno abierto de p en $S \cap V$, luego existe un entorno abierto V' de p en \mathbb{R}^{n+k} tal que $Y[G] = S \cap V \cap V'$. Cambiando V' por $V \cap V'$ podemos suponer que $V' \subset V$ y que $Y[G] = S \cap V'$.

De este modo, cada punto $p \in S \cap V'$ está determinado por sus coordenadas $t \in G$, las cuales a su vez están determinadas por $x = Y_1(t) \in U$, con la particularidad de que x es el vector de las primeras componentes de p . Concretamente, p está formado por x y $f(x) = Y_2(Y_1^{-1}(x))$. La función f es de clase C^q en U . De este modo, si $x \in U$ y $t = Y_1^{-1}(x) \in G$, tenemos que

$$X(x) = (x, f(x)) = (Y_1(t), Y_2(t)) = Y(t) \in S \cap V'.$$

Recíprocamente, si $(x, y) \in S \cap V'$, entonces $x = Y_1(t)$, $y = Y_2(t)$ para un cierto $t \in G$, luego $(x, y) = (x, f(x)) = X(x)$. En definitiva tenemos que $X : U \rightarrow S \cap V'$ es biyectiva. Su inversa es la proyección en las primeras componentes, luego X es un homeomorfismo. ■

En las condiciones de la prueba anterior, sea $\pi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ la proyección en las n primeras componentes y $g : V' \rightarrow G$ la aplicación dada por $g(x) = Y_1^{-1}(\pi(x))$. Notemos que si $x \in V'$ entonces $\pi(x) \in U$, luego g está bien definida y es de clase C^q . Si $t \in G$ entonces

$$g(Y(t)) = g(Y_1(t), Y_2(t)) = Y_1^{-1}(Y_1(t)) = t,$$

luego $(Y|_G)^{-1}$ es la restricción a $V' \cap S$ de g . Con esto hemos probado:

Teorema 7.4 Sea $Y : U \rightarrow S \subset \mathbb{R}^m$ una carta de una variedad diferenciable de dimensión n y clase C^q . Para cada punto $t \in U$ existe un entorno $G \subset U$ de t , un entorno V de $Y(t)$ y una aplicación $g : V \rightarrow G$ de clase C^q tal que $(Y|_G)^{-1} = g|_{V \cap S}$.

De aquí se sigue una propiedad fundamental de las cartas:

Teorema 7.5 Sea $S \subset \mathbb{R}^m$ una variedad diferenciable de dimensión n y de clase C^q . Sea $p \in S$ y $X : U \rightarrow S \cap V$, $Y : U' \rightarrow S \cap V'$ dos cartas alrededor de p . Sean $V_0 = V \cap V'$, $U_0 = X^{-1}[V_0]$, $U'_0 = Y^{-1}[V_0]$. Entonces la aplicación $X \circ Y^{-1} : U_0 \rightarrow U'_0$ es biyectiva, de clase C^q y con determinante jacobiano no nulo, con lo que su inversa es también de clase C^q .

DEMOSTRACIÓN: Si $t \in U_0$, por el teorema anterior existe una función g de clase C^q definida en un entorno de $X(t)$ de modo que $X \circ Y^{-1} = X \circ g$ (en un entorno de t), luego $X \circ Y^{-1}$ es de clase C^q en un entorno de t , luego en todo U_0 . Lo mismo vale para su inversa $Y \circ X^{-1}$, luego la regla de la cadena nos da que sus diferenciales son mutuamente inversas, luego los determinantes jacobianos son no nulos. ■

Ejercicio: Refinar el argumento del teorema 3.24 para concluir que dos puntos cualesquiera de una variedad conexa S de clase C^q pueden ser unidos por un arco de clase C^q contenido en S .

Veremos ahora otro ejemplo importante de variedades diferenciables. Primeramente consideraremos el caso lineal al cual generaliza.

Ejemplo Una variedad afín de dimensión n en \mathbb{R}^m es también una variedad diferenciable de la misma dimensión y de clase C^∞ . En efecto, una tal variedad está formada por los puntos que satisfacen un sistema de $m - n$ ecuaciones lineales linealmente independientes. Esto implica que la matriz de coeficientes del sistema tiene un determinante de orden $m - n$ no nulo, luego agrupando adecuadamente las variables podemos expresar el sistema como $xA + yB = c$, donde $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^{m-n}$, $|B| \neq 0$, luego podemos despejar

$$y = f(x) = (c - xA)B^{-1},$$

donde la función f es obviamente de clase C^∞ . Esto significa que la variedad lineal está formada por los puntos (x, y) tales que $y = f(x)$, luego es la gráfica de f y por consiguiente es una variedad de clase C^∞ . ■

Ahora probamos que las soluciones de un sistema de $k = m - n$ ecuaciones diferenciables con m incógnitas constituyen una variedad de dimensión n supuesto que se cumpla una condición de independencia similar a la independencia lineal que exigíamos en el ejemplo anterior.

Definición 7.6 Si $f : A \subset \mathbb{R}^{n+k} \rightarrow \mathbb{R}^k$ es diferenciable en $(x, y) \in A$, donde $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^k$, definimos

$$\frac{\partial(f_1 \cdots f_k)}{\partial(y_1 \cdots y_k)}(x, y) = \begin{vmatrix} D_{n+1}f_1(x, y) & \cdots & D_{n+1}f_k(x, y) \\ \vdots & & \vdots \\ D_{n+k}f_1(x, y) & \cdots & D_{n+k}f_k(x, y) \end{vmatrix}.$$

Teorema 7.7 (Teorema de la función implícita) Consideremos una aplicación $f : A \subset \mathbb{R}^{n+k} \rightarrow \mathbb{R}^k$ de clase C^q en el abierto A , con $q \geq 1$. Sea $(x^0, y^0) \in A$ tal que $f(x^0, y^0) = 0$ y supongamos que

$$\frac{\partial(f_1 \cdots f_k)}{\partial(y_1 \cdots y_k)}(x^0, y^0) \neq 0.$$

Entonces existen abiertos $V \subset A$, $U \subset \mathbb{R}^n$ de modo que $(x^0, y^0) \in A$, $x^0 \in U$ y una función $g : U \rightarrow \mathbb{R}^k$ de clase C^q tal que

$$\{(x, y) \in V \mid f(x, y) = 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+k} \mid x \in U, y = g(x)\}.$$

DEMOSTRACIÓN: Sea $F : A \rightarrow \mathbb{R}^{n+k}$ la función $F(x, y) = (x, f(x, y))$. Sus funciones coordenadas son las proyecciones en las componentes de \mathbb{R}^n más las funciones coordenadas de f , luego F es de clase C^q . Su determinante jacobiano es

$$\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 0 & D_1f_1(x, y) & \cdots & D_1f_k(x, y) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & D_nf_1(x, y) & \cdots & D_nf_k(x, y) \\ 0 & \cdots & 0 & D_{n+1}f_1(x, y) & \cdots & D_{n+1}f_k(x, y) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & D_{n+k}f_1(x, y) & \cdots & D_{n+k}f_k(x, y) \end{vmatrix},$$

que claramente coincide (salvo signo) con

$$\frac{\partial(f_1 \cdots f_k)}{\partial(y_1 \cdots y_k)}(x, y).$$

Así $|J_F(x^0, y^0)| \neq 0$. Por el teorema de la función inversa 5.41 existe un entorno V de (x^0, y^0) donde F es inyectiva y su determinante jacobiano no se anula, $W = F[V]$ es abierto en \mathbb{R}^{n+k} y la función $G = F^{-1} : W \rightarrow V$ es de clase C^q .

Podemos expresar $G(x, y) = (G_1(x, y), G_2(x, y))$. Claramente G_1 y G_2 son ambas de clase C^q . Si $(x, y) \in W$, entonces

$$(x, y) = F(G(x, y)) = F(G_1(x, y), G_2(x, y)) = (G_1(x, y), f(G(x, y))),$$

luego $G_1(x, y) = x$, con lo que en general $G(x, y) = (x, G_2(x, y))$.

Definimos $U = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (x, 0) \in W\}$. Es claro que se trata de un abierto. Además, $F(x^0, y^0) = (x^0, 0) \in W$, luego $x^0 \in U$. Definimos $g : U \rightarrow \mathbb{R}^k$ mediante $g(x) = G_2(x, 0)$. Claramente g es de clase C^q .

Tomemos ahora $x \in U$ e $y = g(x)$. Hemos de probar que $(x, y) \in V$ y $f(x, y) = 0$. En efecto, por definición de U es $(x, 0) \in W$, luego $G(x, 0) \in V$, pero

$$G(x, 0) = (x, G_2(x, 0)) = (x, g(x)) = (x, y).$$

Además $(x, 0) = F(G(x, 0)) = F(x, y) = (x, f(x, y))$, luego $f(x, y) = 0$.

Recíprocamente, si $(x, y) \in V$ y $f(x, y) = 0$ entonces

$$F(x, y) = (x, f(x, y)) = (x, 0) \in W,$$

luego $x \in U$ y $(x, y) = G(F(x, y)) = G(x, 0) = (x, G_2(x, 0)) = (x, g(x))$, con lo que $g(x) = y$. ■

Lo que afirma este teorema es que si $S = \{x \in \mathbb{R}^{n+k} \mid f(x) = 0\}$ es un conjunto determinado por un sistema de k ecuaciones de clase C^q y $p \in S$ cumple la hipótesis entonces $V \cap S = X[U]$, donde $X(x) = (x, g(x))$, de donde se sigue que X cumple las condiciones para ser una carta de S alrededor de p . Si la hipótesis se cumple en todo punto entonces S es una variedad diferenciable de dimensión n .

Por ejemplo, si $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - r^2$, entonces el conjunto S es una esfera. Para comprobar que se trata de una superficie de clase C^∞ basta comprobar que en cada punto al menos una de las derivadas

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 2z,$$

es no nula, pero las tres sólo se anulan simultáneamente en $(0, 0, 0)$, que no es un punto de S , luego, efectivamente, la esfera es una superficie diferenciable.

Es importante observar que la derivada que no se anula no siempre es la misma. Por ejemplo, en el polo norte $(0, 0, r)$ la única derivada que no se anula

es la de z , luego en un entorno podemos expresar z como función $z(x, y)$. Concretamente, $z = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$. Similarmente, la porción de esfera alrededor del polo sur es la gráfica de la función $z = -\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$. En cambio, alrededor de $(r, 0, 0)$ la esfera no es la gráfica de ninguna función $z(x, y)$. Es fácil ver que dado cualquier entorno U de $(r, 0, 0)$ y cualquier entorno V de $(r, 0)$ siempre hay puntos (x, y) en U para los cuales hay dos puntos distintos $(x, y, \pm z)$ en U (con lo que (x, y) debería tener dos imágenes) y puntos (x, y) con $x^2 + y^2 > r^2$ para los que no existe ningún z tal que $(x, y, z) \in U$. Sin embargo, alrededor de este punto la esfera es la gráfica de la función $x = \sqrt{r^2 - y^2 - z^2}$.

El mismo argumento prueba en general que la *esfera* de dimensión n

$$S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\|_2^2 = 1\}$$

es una variedad diferenciable.

Ejemplo: Superficies de revolución Sea C una variedad diferenciable de dimensión 1 en \mathbb{R}^2 . Supongamos que todos sus puntos (x, z) cumplen $x > 0$. Llamaremos *superficie de revolución* generada por C al conjunto

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (\sqrt{x^2 + y^2}, z) \in C\}.$$

El conjunto S está formado por todos los puntos que resultan de girar alrededor del eje Z los puntos de C . Vamos a ver que se trata de una variedad diferenciable de dimensión 2.

Tomemos $(x_0, y_0, z_0) \in S$ y $\bar{x}_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$. Entonces $(\bar{x}_0, z_0) \in C$. Sea $\alpha(u) = (r(u), z(u))$ una carta de C alrededor de este punto, digamos $r(u_0) = \bar{x}_0$, $z(u_0) = z_0$. Por definición existe un entorno V_0 de u_0 y un entorno U_0 de (\bar{x}_0, z_0) de modo que $C \cap U_0 = \alpha[V_0]$. Sea

$$X(u, v) = (r(u) \cos v, r(u) \sin v, z(u)), \quad (u, v) \in V_0 \times \mathbb{R}.$$

Claramente X es diferenciable (de la misma clase que α) y su matriz jacobiana es

$$JX(u, v) = \begin{pmatrix} r'(u) \cos v & r'(u) \sin v & z'(u) \\ -r(u) \sin v & r(u) \cos v & 0 \end{pmatrix}.$$

El menor formado por las dos primeras columnas es $r(u)r'(u)$. Por hipótesis r no se anula y, por ser α una carta, su matriz jacobiana (r', z') no puede ser nula tampoco, luego si $r'(u) = 0$, entonces $z'(u) \neq 0$, luego uno de los menores $r(u)z'(u) \sin v$ o $-r(u)z'(u) \cos v$ es no nulo. En cualquier caso el rango de JX es 2.

Es claro que existe un $v_0 \in \mathbb{R}$ tal que $X(u_0, v_0) = (x_0, y_0, z_0)$. La aplicación X no es inyectiva, pero sí lo es su restricción a $V = V_0 \times]v_0 - \pi, v_0 + \pi[$. Veamos que es una carta para el punto dado. Sea

$$U = \{(x \cos v, x \sin v, z) \mid (x, z) \in U_0, |v - v_0| < \pi\}.$$

Sin la restricción sobre v , el conjunto U sería la antiimagen de U_0 por la aplicación continua $(x, y, z) \mapsto (\sqrt{x^2 + y^2}, z)$. En realidad U es la intersección

de este abierto con el complementario del semiplano formado por los puntos $(x \cos v_0, x \sin v_0, z)$, con $x \geq 0$, que es un cerrado, luego U es abierto. Es fácil ver que $X[V] = U \cap S$. Falta probar que X^{-1} es continua, ahora bien, dado $(x, y, z) \in U \cap S$ podemos obtener su coordenada u como $u = \alpha^{-1}(\sqrt{x^2 + y^2}, z)$, que es una aplicación continua, y su coordenada v se obtiene aplicando a $(x/r(u), y/r(u))$ la inversa del homeomorfismo $v \mapsto (\cos v, \sin v)$ definido para $|v - v_0| < \pi$. Por lo tanto $X|_V$ es una carta alrededor de (x_0, y_0, z_0) .

Si la variedad C es cubrible por una única carta $(r(u), z(u))$, lo que se traduce en que C es una curva regular, entonces tenemos una única función X , de modo que todo punto de S admite como carta a una restricción de X . Expresaremos esto diciendo simplemente que X es una carta de S .

Las líneas de la forma $X(u, v_0)$ y $X(u_0, v)$, donde u_0 y v_0 son constantes, se llaman *meridianos* y *paralelos* de la superficie S . Los paralelos son siempre circunferencias paralelas entre sí, los meridianos son giros de la curva C .

Ejemplo Si $(r(u), z(u)) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$, para $-\pi/2 < \theta < \pi$, tenemos media circunferencia que, al girar, genera una esfera sin sus dos polos. En particular, la carta $X :]-\pi, \pi[\times]-\pi/2, \pi/2[\rightarrow S$ dada por

$$X(\theta, \phi) = (r \cos \phi \cos \theta, r \cos \phi \sin \theta, r \sin \phi)$$

cubre toda la esfera menos el meridiano de longitud π , con lo que determina un mapa rectangular en el que cada punto tiene por coordenadas su latitud y su longitud. Se trata de la proyección equirrectangular de la que hemos hablado en la introducción. ■

La tabla siguiente contiene algunos ejemplos de funciones $(r(u), z(u))$ que definen superficies de revolución de interés, además de la esfera, que acabamos de considerar.

	$r(u)$	$z(u)$	
Cilindro	r	u	
Cono	$u \tan \alpha$	u	$u \neq 0$
Esfera	$r \cos u$	$r \sin u$	$-\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}$
Exponencial	u	$\log u$	$u > 0$
Catenoide	u	$\operatorname{arcosh} u$	$u > 1$
Pseudoesfera	$l \sin u$	$l \cos u + l \log \tan(u/2)$	$0 < u < \pi, u \neq \frac{\pi}{2}$
Toro	$R + r \cos u$	$r \sin u$	

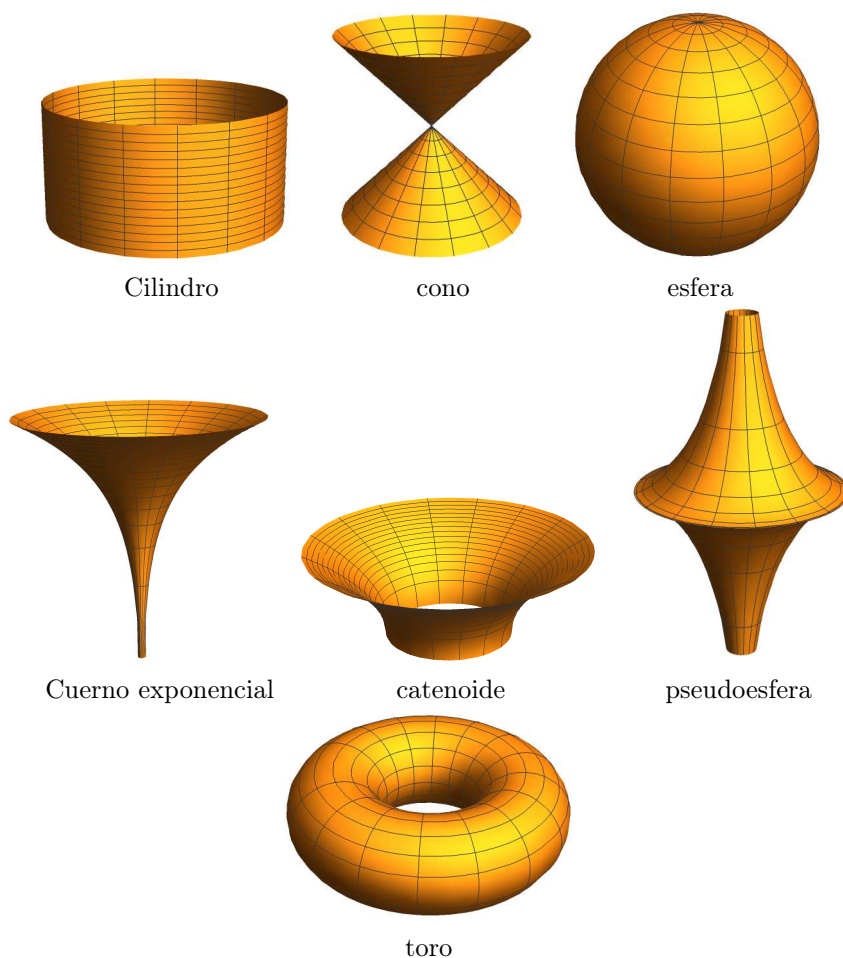
Los ejemplos más simples se obtienen al girar una recta. Si ésta es paralela al eje de giro obtenemos un *cilindro*, y en caso contrario un *cono*. En el caso del cono $(r(u), z(u)) = (u \tan \alpha, u)$ hemos de excluir el punto $u = 0$ pues corresponde al vértice del cono, donde S no es diferenciable.

El *cuerno exponencial* se obtiene al girar la gráfica de la función exponencial $x = e^z$. Si tomamos como parámetro $u = x$ es $(r(u), z(u)) = (u, \log u)$. Similarmente, la *catenoide* se obtiene haciendo girar una catenaria $x = \cosh z$, de modo que si tomamos como parámetro $u = x$ queda $(r(u), z(u)) = (u, \operatorname{arcosh} u)$, para $u > 1$.

La *pseudoesfera* es la superficie de revolución de la *tractriz* (véase la sección [IC B.4]), que admite como parametrización $(l \operatorname{sen} u, l \cos u + l \log \tan(u/2))$, para $0 < u < \pi$, pero hay que tener en cuenta que la tractriz tiene un pico en $u = \pi/2$, por lo que la pseudoesfera no es diferenciable en los puntos de la circunferencia $(l \cos v, l \operatorname{sen} v, 0)$. Para considerarla como variedad diferenciable tenemos que excluir dicha circunferencia.

Finalmente, el toro se obtiene con el giro de una circunferencia de radio r cuyo centro se encuentra a una distancia $R > r$ del eje de giro, por lo que $(r(u), z(u)) = (R + r \cos u, r \operatorname{sen} u)$.

Las figuras siguientes muestran ejemplos de estas superficies, con algunos de sus meridianos y paralelos:



Ejemplo: La cinta de Möbius Consideremos la aplicación

$$X : \mathbb{R} \times]-1/2, 1/2[\longrightarrow \mathbb{R}^3$$

dada por

$$X(u, v) = \left(\left(1 + \frac{v}{2} \cos \pi u\right) \cos 2\pi u, \left(1 + \frac{v}{2} \cos \pi u\right) \sin 2\pi u, \frac{v}{2} \sin \pi u \right).$$

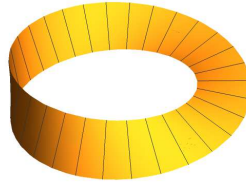
Para interpretarla observamos que la curva $X(u, 0)$ recorre la circunferencia de centro $(0, 0, 0)$ y radio 1 contenida en el plano XY , y da una vuelta completa cada vez que u aumenta 1 unidad, mientras que, para cada u fijo, la curva $X(u, v)$ es un segmento de longitud 1 perpendicular a la circunferencia, pues sus vectores tangentes respectivos son

$$\begin{aligned} X_u(u, 0) &= (-2\pi \sin 2\pi u, 2\pi \cos 2\pi u, 0), \\ X_v(u, v) &= \left(\frac{1}{2} \cos \pi u \cos 2\pi u, \frac{1}{2} \cos \pi u \sin 2\pi u, \frac{1}{2} \sin \pi u \right), \end{aligned}$$

y ciertamente son vectores ortogonales. Más en general, un cálculo rutinario muestra que la matriz jacobiana $JX(u, v)$ tiene rango 2 en cada punto, con lo que no es difícil probar que la situación es la misma que en el caso de las superficies de revolución: la imagen M de X es una variedad diferencial de clase C^∞ que admite como cartas las restricciones de X a cualquier rectángulo

$$]u_0 - 1/2, u_0 + 1/2[\times]-1/2, 1/2[.$$

La variedad M se conoce como *cinta de Möbius* y su aspecto es el que muestra la figura:



Podemos pensar que M se obtiene pegando los extremos opuestos de un rectángulo, pero no de la forma natural que da lugar a un cilindro, sino dando media vuelta a uno de los extremos antes de unirlo al otro. ■

Ejemplo: Producto de variedades Si $S_1 \subset \mathbb{R}^{m_1}$ y $S_2 \subset \mathbb{R}^{m_2}$ son variedades entonces $S_1 \times S_2 \subset \mathbb{R}^{m_1+m_2}$ es también una variedad. Si $X_1 : U_1 \rightarrow V_1 \cap S_1$ es una carta alrededor de un punto $p_1 \in S_1$ y $X_2 : U_2 \rightarrow V_2 \cap S_2$ es una carta alrededor de $p_2 \in S_2$, entonces $X_1 \times X_2 : U_1 \times U_2 \rightarrow (V_1 \times V_2) \cap (S_1 \times S_2)$ dada por $(X_1 \times X_2)(u_1, u_2) = (X_1(u_1), X_2(u_2))$ es una carta alrededor de (p_1, p_2) .

Sean $\pi_i : S_1 \times S_2 \rightarrow S_i$ las proyecciones. Si la carta X_1 tiene coordenadas x_1, \dots, x_{n_1} y la carta X_2 tiene coordenadas y_1, \dots, y_{n_2} , entonces las coordenadas de $X_1 \times X_2$ son las funciones $\pi_1 \circ x_i$ y $\pi_2 \circ y_i$, a las que podemos seguir llamando x_i e y_i sin riesgo de confusión. ■

7.2 Espacios tangentes, diferenciales

Veamos ahora cómo la diferenciabilidad de las cartas junto con la condición adicional de que sus matrices jacobianas tengan rango máximo garantiza que las variedades diferenciables tienen variedades afines tangentes con las que se confunden en un entorno de cada punto.

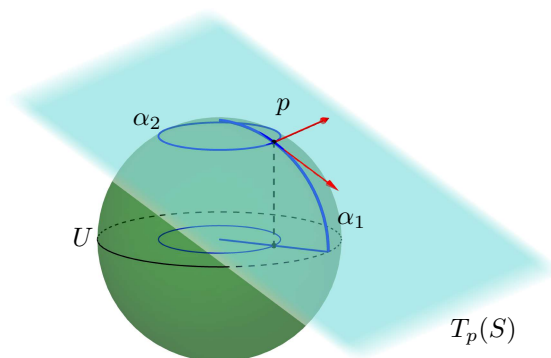
Definición 7.8 Sea $S \subset \mathbb{R}^m$ una variedad diferenciable de dimensión n y sea $X : U \rightarrow S$ una carta alrededor de un punto $p \in S$. Sea $x \in U$ tal que $X(x) = p$. Llamaremos *espacio tangente* a S en el punto p a la variedad lineal $T_p(S) = dX(x)[\mathbb{R}^n]$, mientras que la *variedad tangente* a S por el punto p será la variedad afín $p + T_p(S)$.

La condición de que la matriz jacobiana $JX(x)$ tenga rango n se traduce ahora en que las variedades tangentes tienen dimensión n . El teorema 7.5 prueba que el espacio tangente no depende de la carta con la que se construye, pues si X e Y son dos cartas alrededor de p , digamos $X(x) = Y(y) = p$, sabemos que $g = X \circ Y^{-1}$ es diferenciable en un entorno de x y $X = g \circ Y$, luego $dX(x) = dg(x) \circ dY(y)$, luego $dX(x)$ y $dY(y)$ tienen la misma imagen (pues $dg(x)$ es un isomorfismo).

Veamos ahora una caracterización geométrica de la variedad tangente que muestra más explícitamente que $T_p(S)$ sólo depende de S .

Vamos a considerar curvas $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^m$, donde $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo abierto. Una curva es *regular* si es derivable tiene derivada no nula en cada punto, en cuyo caso, el vector $\alpha'(t) \in \mathbb{R}^m$ es precisamente el vector tangente a la curva en el punto $\alpha(t)$ (véase [IC 1.3]).

Teorema 7.9 Sea $S \subset \mathbb{R}^m$ una variedad diferenciable de dimensión n . Entonces $T_p(S)$ está formado por el vector nulo más los vectores tangentes en p a todas las curvas regulares que pasan por p contenidas en S .



La figura muestra dos curvas que pasan por un punto p de una esfera S (un arco de meridiano y un paralelo) junto con sus vectores tangentes respectivos, que forman parte del plano tangente a S en p .

DEMOSTRACIÓN: Sea $X : U \rightarrow S$ una carta alrededor de p . Podemos suponer que es de la forma $X(x) = (x, f(x))$, para una cierta función diferenciable f . Sea $X(p_1) = p$. Sea $v \in \mathbb{R}^n$ no nulo. Consideremos la curva $x(t) = p_1 + tv$. Para valores suficientemente pequeños de t se cumple que $x(t) \in U$. Consideremos la curva $\alpha(t) = X(x(t))$. Claramente α está contenida en S y cumple $\alpha(0) = p$. Su vector tangente en p es

$$\alpha'(0) = dX(x(0))(x'(0)) = dX(p_1)(v).$$

Esto prueba que todo vector de $T_p(S)$ es de la forma indicada. Recíprocamente, si $\alpha(t)$ es una curva regular contenida en S que pasa por p , digamos $\alpha(t_0) = p$, sea $x(t) = X^{-1}(\alpha(t))$, definida en un entorno de t_0 . Se cumple que $x(t)$ es derivable, pues X^{-1} no es más que la restricción de la proyección $\pi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, que es diferenciable, luego $x = \alpha \circ \pi$. Tenemos $\alpha = x \circ X$, luego $\alpha'(t) = dX(x(t))(x'(t))$. Esta relación prueba que $x'(t) \neq 0$ o de lo contrario también se anularía $\alpha'(t)$. Por lo tanto x es regular. Además la tangente de α en p es $\alpha'(t_0) = dX(p_1)(x'(t_0)) \in T_p(S)$. ■

En la prueba de este teorema hemos visto un hecho importante: si α es una curva contenida en una variedad S y pasa por un punto p , dada una carta $X : U \rightarrow S$ alrededor de p , podemos trasladar a la carta el arco de curva alrededor de p , es decir, existe otra curva x en U de modo que $\alpha = x \circ X$ (en un entorno de las coordenadas de p). En otras palabras, x es la representación de α en el mapa de S determinado por X .

Ejercicio: Probar que el plano tangente a la gráfica de una función diferenciable vista como variedad diferenciable coincide con el que ya teníamos definido.

Nota Ahora podemos entender qué es lo que fallaba en el ejemplo de la “hoja doblada” que hemos puesto al principio del capítulo, es decir, la superficie S definida por la carta diferenciable $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$X(u, v) = (u^3, v, |u^3|).$$

En los puntos de la “doblez”, es decir, los puntos de la forma $X(0, v)$, sucede que la matriz jacobiana

$$JX(0, v) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

lo que se corresponde con que

$$dX(0, v) = (0, dv, 0)$$

por lo que el “plano” tangente es la recta

$$(0, v, 0) + dX(0, v)[\mathbb{R}^2] = \{(x, y, z) \mid x = z = 0\}$$

alrededor de la cual se dobla la hoja.

Por lo tanto, la condición que hemos incluido en la definición de variedad diferenciable sobre el rango de las matrices jacobianas de las cartas es la que garantiza que cada curva regular $\alpha(t)$ que pasa por un punto $u_0 \in U$ del dominio de una carta se eleva hasta una curva regular $X(\alpha(t))$ con un vector tangente no nulo en $p = X(u_0)$ que forma parte de (y contribuye a determinar) la variedad tangente a S en p . ■

Vamos a analizar con más detalle en qué sentido una variedad diferenciable S se confunde con sus variedades tangentes. Fijamos un punto $p \in X$ y una carta $X : U \rightarrow V \cap S$ alrededor de p . Sea $x = X^{-1} : V \cap S \rightarrow U$ su sistema de coordenadas asociado.

Si $q \in V \cap S$, la recta $t \mapsto x(p) + t(x(q) - x(p))$ pasa por el punto $x(q)$ cuando $t = 1$, luego la curva $\alpha(t) = p + X(x(p) + t(x(q) - x(p)))$ está contenida en S (para valores de t no muy grandes, incluyendo $t = 1$) y cumple $\alpha(0) = p$, $\alpha(1) = q$. Su recta tangente en p es

$$T(t) = p + t\alpha'(x(p)) = p + t dX(x(p))(x(q) - x(p)).$$

Si q está suficientemente próximo a p , se confundirá con el punto

$$T(1) = p + dX(x(p))(x(q) - x(p))$$

de la recta tangente. Próximo o no, tenemos una aplicación entre S y $p + T_p(S)$:

Definición 7.10 Sea $S \subset \mathbb{R}^n$, $p \in S$, sea $X : U \rightarrow V \cap S$ una carta alrededor de p y sea x su sistema de coordenadas. Llamaremos *proyección* asociada a X a la aplicación $\pi_p : S \cap V \rightarrow T_p(S)$ dada por $\pi_p(q) = dX(x(p))(x(q) - x(p))$.

Según acabamos de razonar, cada punto $q \in S$ suficientemente próximo a p (en particular, lo suficientemente próximo como para que $q \in V \cap S$), se confundirá con el punto $p + \pi_p(q) \in p + T_p(S)$. Ahora veamos que las coordenadas de q en la carta coinciden con las coordenadas de $p + \pi_p(q)$ asociadas a un cierto sistema de referencia afín en $p + T_p(S)$.

En efecto, si llamamos $x = x(p)$, tenemos que $dX(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow T_p(S)$ es un isomorfismo. Por consiguiente, si e_1, \dots, e_n son los vectores de la base canónica en \mathbb{R}^n , sus imágenes $dX(x)(e_i) = D_i X(x)$ forman una base de $T_p(S)$. El espacio tangente no tiene una base canónica pero, según acabamos de ver, cada carta alrededor de p determina una base en $T_p(S)$.

Ahora, si consideramos en la variedad tangente $p + T_p(S)$ el sistema de referencia afín determinado por dicha base y con origen en $O = p - dX(x)(x)$, tenemos que, si $x(q) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, entonces

$$\begin{aligned} p + \pi_p(q) &= O + dX(x)(x) + dX(x)(x(q) - x) = O + dX(x)(x(q)) \\ &= O + \sum_{i=1}^n \alpha_i dX(x)(e_i), \end{aligned}$$

y esto significa que las coordenadas de $p + \pi_p(q)$ respecto del sistema de referencia afín que hemos fijado en la variedad tangente son precisamente las coordenadas

$x(q)$ de q respecto de la carta prefijada. En otras palabras, que la proyección $q \mapsto p + \pi_p(q)$ hace corresponder cada punto de $V \cap S$ con el punto de $p + T_p(S)$ con las mismas coordenadas que q respecto al sistema de referencia de la variedad tangente asociado a la carta. En particular, esto prueba que π_p es inyectiva.

Notemos que si la carta cumple $x(p) = 0$, entonces el sistema de referencia afín de $p + T_p(S)$ tiene su origen en $O = p$.

En estos términos, tenemos que cada carta X asigna unas coordenadas a cada punto de $V \cap S$ y unas coordenadas a cada punto de $p + T_p(S)$, de modo que cada punto suficientemente próximo a p se confunde con el punto de $p + T_p(S)$ con las mismas coordenadas.

Ejercicio: Probar que si S_1 y S_2 son variedades diferenciables y $(p, q) \in S_1 \times S_2$ entonces $T_{(p,q)}(S_1 \times S_2) = T_p(S_1) \times T_q(S_2)$.

Seguidamente generalizamos la noción de diferenciabilidad al caso de aplicaciones entre variedades cualesquiera (no necesariamente abiertos de \mathbb{R}^n).

Definición 7.11 Diremos que una aplicación continua $f : S \rightarrow T$ entre dos variedades es *diferenciable* (de clase C^q) en un punto $p \in S$ si existen cartas X e Y alrededor de p y $f(p)$ respectivamente de modo que $X \circ f \circ Y^{-1}$ sea diferenciable (de clase C^q) en $X^{-1}(p)$.

El teorema 7.5 implica que la diferenciabilidad de f en p no depende de la elección de las cartas X e Y , en el sentido de que si unas cartas prueban que f es diferenciable, otras cualesquiera lo prueban igualmente.

Es fácil ver que la composición de aplicaciones diferenciables es diferenciable. Una aplicación $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ definida en un abierto U de \mathbb{R}^n es diferenciable en el sentido que ya teníamos definido si y sólo si lo es considerando a U y a \mathbb{R}^m como variedades diferenciables (con la identidad como carta).

Por el teorema 7.4, si $S \subset T \subset \mathbb{R}^m$ son variedades diferenciables, la inclusión $i : S \rightarrow T$ es diferenciable, lo que se traduce en que las restricciones a S de las funciones diferenciables en T son funciones diferenciables en S .

Es claro que todas estas propiedades valen también si sustituimos la diferenciabilidad por la propiedad de ser de clase C^q .

Una aplicación $f : S \rightarrow T$ entre dos variedades es un *difeomorfismo* si es biyectiva, diferenciable y su inversa es diferenciable. Dos variedades son *difeomorfas* si existe un difeomorfismo entre ellas. Es obvio que las cartas de una variedad son difeomorfismos en su imagen. Más aún:

Teorema 7.12 *Todo difeomorfismo entre un abierto de \mathbb{R}^n y un abierto de una variedad S en \mathbb{R}^m es una carta para S .*

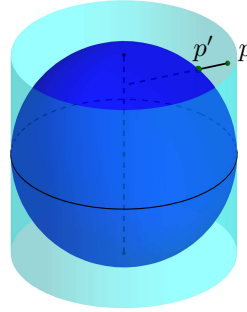
DEMOSTRACIÓN: Sea $f : U \rightarrow W$ un difeomorfismo, donde $W \subset S$ es abierto en S . Entonces existe un abierto V en \mathbb{R}^m tal que $f[U] = W = V \cap S$. Obviamente df tiene rango máximo en cada punto, con lo que se cumple la definición de carta. ■

En particular tenemos que las coordenadas $x_i : S \cap V \rightarrow \mathbb{R}$ asociadas a una carta X son funciones diferenciables (son la composición de X^{-1} con las proyecciones $\pi_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$).

Ejemplo Sea C el cilindro de radio r dado por

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = r^2, -r \leq z \leq r\},$$

y sea S la esfera de centro $(0, 0, 0)$ y radio r . Entonces, la aplicación $f : C \rightarrow S$ que a cada punto p del cilindro lo lleva al punto p' de la esfera que está sobre el mismo radio horizontal, como muestra la figura siguiente, es un difeomorfismo del cilindro en la esfera menos sus dos polos. En efecto, tomemos como carta del cilindro



$$Y(u, v) = (r \cos v, r \sin v, u),$$

definida sobre un abierto $]-\pi/2, \pi/2[\times]v_0, v_1[$, donde v_0, v_1 se eligen de modo que $v_1 - v_0 = 2\pi$ (lo que garantiza que Y es inyectiva). Cualquier punto del cilindro está en la imagen de una carta de este tipo. Como carta de la esfera menos sus polos tomemos la que hemos considerado al tratar las superficies de revolución:

$$X(\phi, \theta) = (r \cos \phi \cos \theta, r \cos \phi \sin \theta, r \sin \phi), \quad \phi \in]-\pi/2, \pi/2[.$$

Entonces $f(Y(u, v))$ es el punto de la esfera que está a la misma altura u en el mismo radio determinado por el ángulo v , es decir, que si igualamos

$$f(Y(u, v)) = (r \cos \phi \cos \theta, r \cos \phi \sin \theta, r \sin \phi),$$

tiene que ser $\theta = v$, $u = r \sin \phi$, luego

$$(Y \circ f \circ X^{-1})(u, v) = (\arcsen(u/r), v),$$

que es una biyección $]-\pi/2, \pi/2[\times]v_0, v_1[\rightarrow]-\pi/2, \pi/2[\times]v_0, v_1[$ de clase C^∞ y con inversa de clase C^∞ , lo que prueba que f es diferenciable en la imagen de la carta Y , luego en todo el cilindro. ■

Ejemplo Consideremos el toro T de carta

$$X(u, v) = (R \cos v + r \cos u \cos v, R \sin v + r \cos u \sin v, r \sin u).$$

Recordemos que X no es exactamente una carta de T , sino que las cartas de T son restricciones de X a dominios adecuados en los que sea inyectiva. Consideremos la circunferencia unidad $S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| = 1\}$. Entonces la aplicación $f : S^1 \times S^1 \rightarrow T$ dada por

$$f(x, y) = (Ry_1 + rx_1y_1, Ry_2 + rx_1y_2, rx_2)$$

es un difeomorfismo. Notemos que si $x = (\cos u, \sin u)$, $y = (\cos v, \sin v)$, entonces $f(x, y) = X(u, v)$. Teniendo esto en cuenta es fácil ver que f es biyectiva. Además, si consideramos cartas de las circunferencias de la forma $X_1(u) = (\cos u, \sin u)$, $X_2(v) = (\cos v, \sin v)$, con lo que $X_1 \times X_2$ es una carta de $S^1 \times S^1$, la composición $(X_1 \times X_2) \circ f \circ X^{-1}$ es la identidad, lo que prueba que f es un difeomorfismo (de clase C^∞). Así pues, un toro es difeomorfo al producto de dos circunferencias. ■

Ejercicio: Probar que un cilindro es difeomorfo al producto de un segmento por una circunferencia y que una bola abierta menos su centro es difeomorfa al producto de un segmento por una esfera.

Ahora definimos la diferencial de una función diferenciable:

Supongamos que $f : S \rightarrow T$ es una aplicación entre dos variedades que sea diferenciable en un punto p . Sean $X : U \rightarrow S$ e $Y : W \rightarrow T$ cartas alrededor de p y $f(p)$. Digamos que $U(x) = p$, $Y(y) = f(p)$. Entonces $j = X \circ f \circ Y^{-1}$ es diferenciable en x y tenemos las aplicaciones lineales siguientes:

$$\begin{array}{ccc} T_p(S) & & T_{f(p)}(T) \\ dX(x) \uparrow & & \uparrow dY(y) \\ \mathbb{R}^n & \xrightarrow{dj(x)} & \mathbb{R}^m \end{array}$$

Las flechas verticales representan isomorfismos, luego podemos definir la *diferencial* de f en p como la aplicación lineal $df(p) : T_p(S) \rightarrow T_{f(p)}(T)$ dada por $df(p) = dX(x)^{-1} \circ dj(x) \circ dY(y)$. Teniendo en cuenta que las diferenciales aproximan localmente a las funciones correspondientes no es difícil convencerse de que $df(p)$ se confunde con f cuando los puntos de $T_p(S)$ se confunden con los de S . El teorema siguiente prueba que $df(p)$ no depende de la elección de las cartas X e Y .

Teorema 7.13 Sea $f : S \rightarrow T$ una aplicación diferenciable en un punto $p \in S$. Sea $v \in T_p(S)$. Si α es cualquier curva contenida en S que pase por p con tangente v , entonces $\alpha \circ f$ es una curva contenida en T que pasa por $f(p)$ con tangente $df(p)(v)$.

DEMOSTRACIÓN: Sean X e Y cartas alrededor de p y $f(p)$ respectivamente. Digamos que $X(x) = p$ e $Y(y) = f(p)$. Sea β la representación de α en la carta X , es decir, $\alpha = \beta \circ X$. Entonces $v = \alpha'(t_0) = dX(x)(\beta'(t_0))$.

Podemos descomponer $\alpha \circ f = \alpha \circ X^{-1} \circ X \circ f \circ Y^{-1} \circ Y$. Con la notación que hemos empleado en la definición de $df(p)$ tenemos $\alpha \circ f = \beta \circ j \circ Y$. Esto prueba que $\alpha \circ f$ es derivable en t_0 y además

$$(\alpha \circ f)'(t_0) = dY(y) \left(dj(x)(\beta'(t_0)) \right) = dY(y) \left(dj(x)(dX(x)^{-1}(v)) \right) = df(p)(v).$$

■

Es inmediato comprobar que la regla de la cadena sigue siendo válida para aplicaciones diferenciables entre variedades, es decir,

$$d(f \circ g)(p) = df(p) \circ dg(f(p)).$$

De aquí se sigue en particular que si f es un difeomorfismo, entonces $df(p)$ es un isomorfismo y $df^{-1}(f(p)) = df(p)^{-1}$.

Si $S \subset T \subset \mathbb{R}^m$ son variedades diferenciables entonces el teorema anterior prueba que la diferencial de la inclusión $i : S \rightarrow T$ en cada punto $p \in S$ es simplemente la inclusión de $T_p(S)$ en $T_p(T)$. De aquí se sigue que la diferencial en un punto p de la restricción a S de una función f diferenciable en T es simplemente la restricción de $df(p)$ a $T_p(S)$, pues la restricción no es más que la composición con la inclusión.

Si $f, g : S \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones diferenciables, es fácil ver que

$$d(f + g) = df + dg, \quad d(fg) = g df + f dg,$$

donde las operaciones hay que entenderlas como definidas puntualmente, por ejemplo, $g df + f dg$ representa la aplicación que a cada $p \in S$ le asigna la aplicación $g(p) df(p) + f(p) dg(p) : T_p S \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$v \mapsto g(p) df(p)(v) + f(p) dg(p)(v).$$

Probamos la fórmula para el producto y dejamos al lector la de la suma, que es más simple: Dado $p \in S$, tomamos una carta $X : U \rightarrow S$ alrededor de p y $x \in U$ tal que $X(x) = p$. Sean $\bar{f} = X \circ f$, $\bar{g} = X \circ g$, que son funciones diferenciables $\bar{f}, \bar{g} : U \rightarrow \mathbb{R}$. Además $X \circ (fg) = \bar{f}\bar{g}$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} d(fg)(p)(v) &= d(\bar{f}\bar{g})(x)(dX(x)^{-1}(v)) = (\bar{g}(x) d\bar{f}(x) + \bar{f}(x) d\bar{g}(x))(dX(x)^{-1}(v)) \\ &= g(p) df(x)(dX(x)^{-1}(v)) + f(p) dg(x)(dX(x)^{-1}(v)) \\ &= g(p) df(p)(v) + f(p) dg(p)(v) = (g(p) df(p) + f(p) dg(p))(v). \end{aligned}$$

Si $X : U \rightarrow S$ es una carta de una variedad S alrededor de un punto p , entonces sus coordenadas asociadas x_i son ciertamente diferenciables. Más concretamente, si $\pi_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es la proyección en la i -ésima coordenada, tenemos que $x_i = X^{-1} \circ \pi_i$, luego $dx_i(p) = dX(p)^{-1} \circ d\pi_i(x)$ y en particular

$$dx_i(p)(D_j X(x)) = d\pi_i(x)(e_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j, \end{cases}$$

luego las aplicaciones $dx_i(p)$ forman la base dual de $D_1 X(x), \dots, D_n X(x)$. Por consiguiente, para cada $v \in T_p(S)$ se cumple que $dx_i(p)(v)$ es la coordenada correspondiente a $D_i X(x)$ en la expresión de v como combinación lineal de las derivadas de X .

Ejemplo Consideremos el plano tangente a \mathbb{R}^2 en el punto $p = (1, 1)$ (que es el propio \mathbb{R}^2). La base asociada a la carta identidad es simplemente la base canónica (e_1, e_2) , y su base dual es la dada por las proyecciones $dx(p)$, $dy(p)$. También podemos considerar también la carta determinada por las coordenadas polares (ρ, θ) , es decir, $(x, y) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$. Su base asociada es la formada por las derivadas parciales:

$$v_1(\rho, \theta) = (\cos \theta, \sin \theta), \quad v_2(\rho, \theta) = (-\rho \sin \theta, \rho \cos \theta).$$

En particular, en el punto $(1, 1)$ queda

$$v_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \quad v_2 = (-1, 1).$$

Dado un vector $u \in \mathbb{R}^2$, sus coordenadas (en la base canónica) son $(dx(p)(u), dy(p)(u))$, mientras que $(d\rho(p)(u), d\theta(p)(u))$ son sus coordenadas en la base (v_1, v_2) .

Conocemos la relación entre las diferenciales:

$$dx = \cos \theta d\rho - \rho \sin \theta d\theta, \quad dy = \sin \theta d\rho + \rho \cos \theta d\theta.$$

Concretamente, en el punto $(1, 1)$ se cumple

$$dx = \frac{\sqrt{2}}{2} d\rho - d\theta, \quad dy = \frac{\sqrt{2}}{2} d\rho + d\theta. \quad (7.1)$$

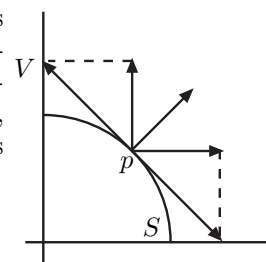
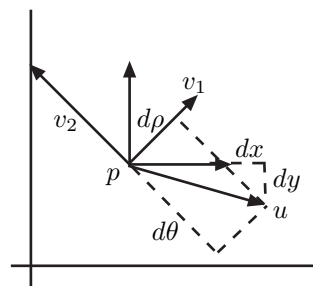
Sea ahora S la circunferencia de radio $\sqrt{2}$. Tres posibles cartas de S alrededor de $(1, 1)$ son

$$g_1(x) = (x, \sqrt{2-x^2}), \quad g_2(y) = (\sqrt{2-y^2}, y), \quad g_3(\theta) = \sqrt{2}(\cos \theta, \sin \theta).$$

Sus funciones coordenadas son respectivamente (las restricciones de) las funciones x, y, θ , luego sus diferenciales asociadas son las restricciones de las diferenciales correspondientes, que seguiremos llamando $dx(p)$, $dy(p)$, $d\theta(p)$. Es fácil ver que las bases asociadas a las tres cartas son respectivamente

$$v_x = (1, -1), \quad v_y = (-1, 1), \quad v_\theta = (-1, 1).$$

Obviamente no podemos tomar a ρ como coordenada, pues ρ es constante en S . Esto se traduce en que $d\rho(p) = 0$ (sobre $T_p(S)$). Alternativamente, vemos que los vectores de $T_p(S)$ tienen nula la primera coordenada de su expresión en la base (v_1, v_2) . Como consecuencia, de (7.1) se sigue ahora que $dy = d\theta = -dx$. ■



Definición 7.14 Sea $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ una función definida sobre una variedad y sea $p \in S$ un punto donde f sea diferenciable. Sea X una carta de S alrededor de p y sean x_1, \dots, x_n sus coordenadas asociadas. Definimos la *derivada parcial* de f respecto a x_i en p como

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = df(p)(D_i X(x)),$$

donde x es el vector de coordenadas de p en la carta dada.

Es claro que esta noción de derivada parcial generaliza a la que ya teníamos para el caso de funciones definidas en abiertos de \mathbb{R}^n . En el caso general sea $j = X \circ f$. Según la definición de $df(p)$ resulta que

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = dj(x)(e_i) = \frac{\partial j}{\partial x_i}(x),$$

donde e_i es el i -ésimo vector de la base canónica de \mathbb{R}^n . Si f es diferenciable en un entorno de p tenemos

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = X^{-1} \circ \frac{\partial j}{\partial x_i}.$$

Ahora es claro que una función f es de clase C^q en S si y sólo si tiene derivadas parciales continuas de orden q .

Puesto que $dx_1(p), \dots, dx_n(p)$ es la base dual de $D_1 X(x), \dots, D_n X(x)$, de la propia definición de derivada parcial se sigue que

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n.$$

También es fácil ver que las reglas usuales de derivación de sumas y productos siguen siendo válidas, así como el teorema de Schwarz. Además

$$\frac{\partial x_j}{\partial x_i} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Es importante observar que la derivada de una función f respecto a una coordenada x_i no depende sólo de f y x_i , sino de la carta de la cual forma parte x_i . Por ejemplo, si en la esfera de centro 0 y radio 1 consideramos un punto cuyas tres coordenadas (x, y, z) sean no nulas, en un entorno podemos considerar la carta de coordenadas (x, y) , respecto a la cual

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}.$$

Sin embargo, también podemos considerar la carta de coordenadas (x, z) y entonces resulta que

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 0.$$

7.3 La métrica de una variedad

Todas las propiedades métricas de \mathbb{R}^n se derivan de su producto escalar, que es una forma bilineal $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. En una variedad $S \subset \mathbb{R}^m$ no tenemos definido un producto escalar, pero sí tenemos uno en cada uno de sus espacios tangentes: la restricción del producto escalar en \mathbb{R}^m .

Conviene introducir ciertos hechos básicos sobre formas bilineales. Puesto que son puramente algebraicas las enunciaremos para un espacio vectorial arbitrario E , pero en la práctica E será siempre el espacio tangente $T_p(S)$ de una variedad S en un punto p . Fijada una base (v_1, \dots, v_n) de E , representaremos su base dual por (dx_1, \dots, dx_n) . Esta notación —puramente formal en un principio— se ajusta al único ejemplo que nos interesa, pues si $E = T_p(S)$ y (v_1, \dots, v_n) es la base asociada a una carta X , entonces la base dual que en general hemos llamado (dx_1, \dots, dx_n) es concretamente la formada por las diferenciales $dx_1(p), \dots, dx_n(p)$, donde x_1, \dots, x_n son las funciones en S que a cada punto le asignan sus coordenadas respecto a X .

Definición 7.15 Sea E un espacio vectorial de dimensión n . Llamaremos $B(E)$ al conjunto de todas las formas bilineales $F : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$, que es claramente un espacio vectorial con la suma y el producto definidos puntualmente.³

Si $f, g : E \rightarrow \mathbb{R}$ son aplicaciones lineales, definimos su *producto tensorial* como la forma bilineal $f \otimes g \in B(E)$ dada por $(f \otimes g)(u, v) = f(u)g(v)$.

Las propiedades siguientes son inmediatas:

- a) $f \otimes (g + h) = f \otimes g + f \otimes h, \quad (f + g) \otimes h = f \otimes h + g \otimes h.$
- b) $(\alpha f) \otimes g = f \otimes (\alpha g) = \alpha(f \otimes g), \quad \text{para } \alpha \in \mathbb{R}.$

Teorema 7.16 Todo elemento de $B(E)$ se expresa de forma única como

$$F = \sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij} dx_i \otimes dx_j, \quad \text{con } \alpha_{ij} \in \mathbb{R}.$$

Concretamente $\alpha_{ij} = F(v_i, v_j)$.

DEMOSTRACIÓN: Basta observar que

$$(dx_i \otimes dx_j)(v_r, v_s) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = r, j = s \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

De aquí se sigue que F y el miembro derecho de la igualdad actúan igual sobre todos los pares de vectores básicos. La unicidad es clara. ■

Por ejemplo, en estos términos el producto escalar en \mathbb{R}^n viene dado por

$$dx_1 \otimes dx_1 + \dots + dx_n \otimes dx_n.$$

³Los elementos de $B(E)$ se llaman *tensores dos veces covariantes*, pero aquí no vamos a entrar en el cálculo tensorial.

Definición 7.17 Un *campo tensorial* (dos veces covariante) en una variedad $S \subset \mathbb{R}^m$ es una aplicación que a cada $p \in S$ le hace corresponder una forma bilineal en $T_p(S)$. El *tensor métrico* de S es el campo g que a cada punto p le asigna la restricción a $T_p(S)$ del producto escalar en \mathbb{R}^m .

Si llamamos $T(S)$ al conjunto de los campos tensoriales en S según la definición anterior, es claro que se trata de un espacio vectorial con las operaciones definidas puntualmente. Más aún, podemos definir el producto de una función $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ por un campo $F \in T(S)$ como el campo $fF \in T(S)$ dado por $(fF)(p) = f(p)F(p)$.

Claramente, si $x_i : S \rightarrow \mathbb{R}$ son las restricciones de las funciones coordenadas de \mathbb{R}^m , una expresión para el tensor métrico es

$$dx_1 \otimes dx_1 + \cdots + dx_m \otimes dx_m,$$

pero es más conveniente expresar el tensor métrico en términos de las coordenadas de una carta de S y no de una carta de \mathbb{R}^m . Veamos cuál es esta expresión:

Sea $X : U \rightarrow S$ una carta de S . Representaremos por x_1, \dots, x_n las funciones coordenadas respecto a X . Si $x \in U$ y $p = X(x)$, sabemos que $D_1X(x), \dots, D_nX(x)$ es una base de $T_p(S)$ y $dx_1(p), \dots, dx_n(p)$ es su base dual. Por consiguiente, todo $w \in T_p(S)$ se expresa como

$$w = dx_1(p)(w)D_1X(x(p)) + \cdots + dx_n(p)(w)D_nX(x(p)).$$

Así pues, si $w_1, w_2 \in T_p(S)$, su producto escalar es

$$g_p(w_1, w_2) = \sum_{i,j=1}^n D_iX(x(p))D_jX(x(p))dx_i(p)(w_1)dx_j(p)(w_2),$$

luego

$$g_p = \sum_{i,j=1}^n g_{ij}(p)dx_i(p) \otimes dx_j(p), \quad \text{con } g_{ij}(p) = D_iX(x(p))D_jX(x(p)),$$

o, más brevemente, como igualdad de campos:

$$g = \sum_{i,j=1}^n g_{ij}dx_i \otimes dx_j, \quad (7.2)$$

Esta expresión recibe el nombre de *expresión en coordenadas* del tensor métrico de S en la carta X . Las funciones g_{ij} se llaman *coeficientes* del tensor métrico en la carta dada. Claramente son funciones diferenciables. Notemos que la expresión coordenada no está definida en toda la variedad S , sino sólo sobre los puntos del rango V de la carta X .

La matriz $(g_{ij}(p))$ es la matriz del producto escalar de $T_p(S)$ en una cierta base. Es claro entonces que su determinante es no nulo. Este hecho será relevante en varias ocasiones.

A través del difeomorfismo $X : U \rightarrow V$ juntamente con los isomorfismos $dX(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow T_p(S)$ podemos transportar la restricción a V del tensor métrico de S hasta un campo tensorial en U , concretamente el dado por

$$\begin{aligned} h_X(w_1, w_2) &= g_p(dX(x)(w_1), dX(x)(w_2)) \\ &= \sum_{i,j=1}^n g_{ij}(X(x)) dx_i(X(x))(dX(x)(w_1)) dx_j(X(x))(dX(x)(w_2)) \\ &= \sum_{i,j=1}^n g_{ij}(X(x)) d(X \circ x_i)(x)(w_1) d(X \circ x_j)(x)(w_2) \\ &= \sum_{i,j=1}^n g_{ij}(x) dx_i(x)(w_1) dx_j(x)(w_2), \end{aligned}$$

donde en el último término x_i es simplemente la proyección en la i -ésima coordenada de U y $g_{ij}(x) = (X \circ g_{ij})(x)$. Por lo tanto h_X tiene la misma expresión (7.2) interpretando convenientemente las funciones.

Al transportar a la carta el tensor métrico, podemos calcular el producto de dos vectores tangentes a dos curvas α y β que se cortan en p a partir de sus representaciones en X . Digamos que $\alpha(t) = X(x(t))$ y $\beta(t) = X(\bar{x}(t))$ y supongamos que en t_0 pasan por p . Entonces

$$g_p(\alpha'(t_0), \beta'(t_0)) = h_X(x'(t_0), \bar{x}'(t_0)).$$

Del mismo modo que el tensor métrico de una variedad S asigna a cada punto p el producto escalar de $T_p(S)$, también podemos considerar la aplicación que a cada punto p le asigna la norma en $T_p(S)$. Ésta recibe el nombre de *elemento de longitud* de S y se representa por ds . Así pues,

$$ds(p)(v) = \|v\| = \sqrt{g_p(v, v)}.$$

El tensor métrico y el elemento de longitud se determinan mutuamente por la relación

$$ds^2(p)(u+v) = ds^2(p)(u) + ds^2(p)(v) + 2g_p(u, v),$$

luego en la práctica es equivalente trabajar con uno o con otro y ds suele dar lugar a expresiones más simples. Por ejemplo, la expresión de ds^2 en una carta es

$$ds^2 = \sum_{i,j=1}^n g_{ij} du_i du_j. \quad (7.3)$$

La misma expresión es válida para el campo que resulta de transportarlo al dominio de la carta interpretando adecuadamente las funciones.

El nombre de “elemento de longitud” se debe a que si $\alpha : [a, b] \rightarrow S$ es una curva regular cuya imagen está contenida en el rango de una carta X y

$\alpha(t) = X(x(t))$, entonces $ds^2(x'(t)) = \|\alpha'(t)\|^2$, luego la longitud de α es (véase [IC 2.13], que obviamente se generaliza a curvas en \mathbb{R}^n)

$$\begin{aligned} L &= \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{\sum_{i,j=1}^n g_{ij}(x(t))x'_i(t)x'_j(t)} dt \\ &= \int_a^b \sqrt{\sum_{i,j=1}^n g_{ij}(x(t))x'_i(t)dx_j(t)} = \int_a^b ds, \end{aligned}$$

entendiendo ahora que en (7.3) $x = x(t)$ y $dx_i = x'_i(t)dt$.

En el caso de una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ es costumbre representar las derivadas parciales de una carta $X(u, v)$ mediante X_u , X_v y los coeficientes del tensor métrico como $E = X_u X_u$, $F = X_u X_v$, $G = X_v X_v$, de modo que la expresión en coordenadas del tensor métrico es

$$E du \otimes du + F(du \otimes dv + dv \otimes du) + G dv \otimes dv. \quad (7.4)$$

El elemento de longitud es

$$ds^2 = E du^2 + 2F dudv + G dv^2.$$

Ejemplo Vamos a calcular los coeficientes del tensor métrico de la superficie de revolución dada por

$$X = (r(u) \cos v, r(u) \sin v, z(u)).$$

Tenemos

$$\begin{aligned} X_u &= (r'(u) \cos v, r'(u) \sin v, z'(u)) \\ X_v &= (-r(u) \sin v, r(u) \cos v, 0), \end{aligned}$$

luego

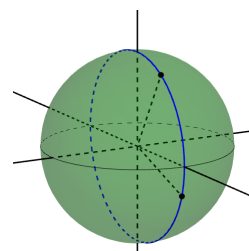
$$E = r'(u)^2 + z'(u)^2, \quad F = 0, \quad G = r(u)^2.$$

Observemos que E es el módulo al cuadrado del vector tangente de la curva que genera la superficie, luego si su parametrización es la natural tenemos simplemente $E = 1$.

El lector puede entretenerse calculado en particular los coeficientes del tensor métrico de las superficies de revolución siguientes:

	$r(u)$	$z(u)$	E	G
Cilindro	r	u	1	r^2
Cono	$u \tan \alpha$	u	$1/\cos^2 \alpha$	$u^2 \tan^2 \alpha$
Esfera	$r \cos u$	$r \sin u$	r^2	$r^2 \cos^2 u$
Exponencial	u	$\log u$	$1 + 1/u^2$	u^2
Catenoide	u	$\operatorname{arcosh} u$	$\frac{u^2}{u^2-1}$	u^2
Pseudoesfera	$l \sin u$	$l \cos u + l \log \tan(u/2)$	$\frac{l^2}{\tan^2 u}$	$l^2 \sin^2 u$
Toro	$R + r \cos u$	$r \sin u$	r^2	$(R + r \cos u)^2$

Ejemplo Vamos a demostrar que la curva de menor longitud que une dos puntos de una esfera es el menor arco de círculo máximo que los une, es decir, el arco de la circunferencia que pasa por los dos puntos con centro en el centro de la esfera y que tiene amplitud $\leq \pi$.



Vamos a suponer en primer lugar que los puntos no son antípodas. Entonces podemos elegir un sistema de referencia de \mathbb{R}^3 de modo que, respecto a él, los dos puntos estén sobre el semiplano $y = 0, x > 0$, con lo que en particular están sobre el mismo meridiano de la esfera, como muestra la figura. Entonces, respecto de la carta que estamos considerando en la esfera como superficie de revolución, las coordenadas de los puntos son $(u, v) = (u_1, 0), (u_2, 0)$, con $u_1 < u_2$, y el arco que los une tiene amplitud $u_2 - u_1$, luego tiene longitud $r(u_2 - u_1)$. Veamos que cualquier arco que una dichos puntos tiene que tener longitud mayor o igual.

En efecto, sea $\alpha : [t_1, t_2] \rightarrow S$ un arco contenido en la esfera, de modo que $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$, con $u(t_1) = u_1, u(t_2) = u_2, v(t_1) = v(t_2) = 0$. Entonces

$$r(u_2 - u_1) = |r(u(t_2) - u(t_1))| = \left| r \int_{t_1}^{t_2} u'(t) dt \right| \leq \int_{t_1}^{t_2} |ru'(t)| dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{r^2 u'^2(t)} dt \leq \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{r^2 u'^2(t) + r^2 \cos^2 u(t) v'^2(t)} dt = L(\alpha).$$

Si los puntos dados, digamos p_1 y p_2 , son antípodas, podemos suponer que son el polo sur y el polo norte de la esfera. Entonces todos los meridianos son arcos de amplitud π que los unen, pero todos tienen longitud $r\pi$. Si existiera un arco $\alpha : [t_1, t_2] \rightarrow S$ que los uniera con longitud $L < r\pi$, por continuidad podríamos tomar $t_1 < t_0 < t_2$ de modo que $\alpha(t_0)$ tuviera latitud $v_0 > L/r - \pi/2$, con lo que $\alpha|_{[t_1, t_0]}$ sería un arco que conectaría el polo sur con un punto distinto del polo norte con longitud menor que $L < r(v_0 + \pi/2)$, en contradicción con la parte ya probada. ■

Definición 7.18 Diremos que un difeomorfismo $f : S \rightarrow T$ entre dos variedades es una *isometría* si para todo arco α de clase C^1 contenido en S se cumple que $\alpha \circ f$ tiene la misma longitud.

Explícitamente, si f es una isometría y $\alpha : [a, b] \rightarrow S$ es un arco y $\alpha(t_0) = p$, entonces

$$\int_a^t \|\alpha'(x)\| dx = \int_a^t \|(\alpha \circ f)'(x)\| dx,$$

y derivando resulta

$$\|\alpha'(t_0)\| = \|(\alpha \circ f)'(t_0)\| = \|df(p)(\alpha'(t_0))\|.$$

Ahora bien, todo vector no nulo de $T_p(S)$ es de la forma $\alpha'(t_0)$ para un cierto arco α , luego tenemos que $df(p) : T_p(S) \rightarrow T_{f(p)}(T)$ es una isometría para todo punto p . Igualmente se prueba el recíproco.

Ejercicio: Probar que las isometrías de \mathbb{R}^n en \mathbb{R}^n en el sentido que acabamos de definir coinciden con las isometrías en el sentido del álgebra lineal.

Si f es una isometría, X es una carta alrededor de p con $X(x) = p$ y llamamos $Y = X \circ f$, es claro que Y es una carta alrededor de $f(p)$. Además tenemos que $D_i Y(x) = dY(x)(e_i) = df(p)(dX(x)(e_i)) = df(p)(D_i X(x))$, de donde se sigue que los coeficientes del tensor métrico son iguales en ambas cartas, es decir,

$$g_{ij}(x) = D_i X(x) D_j X(x) = D_i Y(x) D_j Y(x).$$

Similarmente se concluye que si dos variedades tienen cartas con un mismo dominio y con los mismos coeficientes g_{ij} del tensor métrico, entonces los fragmentos de superficie cubiertos por las cartas son superficies isométricas.

En particular, una carta $X : U \rightarrow X$ es una isometría si y sólo si, para cada $u \in U$, si $p = X(u)$, la diferencial $dX(u) : \mathbb{R}^n \rightarrow T_p(S)$ es una isometría, lo cual equivale a que transforme la base canónica e_1, \dots, e_n de \mathbb{R}^n en una base ortonormal de $T_p(S)$, lo cual equivale a su vez a que los coeficientes $g_{ij}(u)$ del tensor métrico formen la matriz identidad.

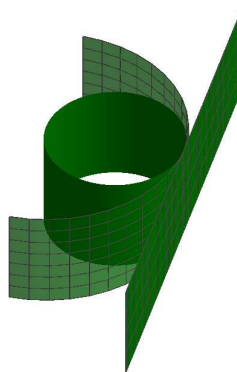
Para el caso de una superficie, esto equivale a que $E = G = 1$, $F = 0$.

Ejemplo Es fácil ver que la carta del cilindro dada por

$$X(u, v) = \left(r \cos \frac{v}{r}, r \sin \frac{v}{r}, u \right)$$

cumple $E = G = 1$, $F = 0$. No podemos decir que es una isometría porque no es biyectiva (es decir, no es realmente una carta), pero si la restringimos a un dominio en el que sea biyectiva, por ejemplo, en $\mathbb{R} \times]-\pi r, \pi r[$, obtenemos una isometría del cilindro menos una recta en una banda del plano. Como todo punto del cilindro admite un entorno contenido en el cilindro menos una recta (paralela a su eje), concluimos que un cilindro y un plano son localmente isométricos, en el sentido de que todo punto de un cilindro tiene un entorno isométrico a un abierto del plano.

La interpretación geométrica de este hecho es clara: si a un cilindro le quitamos una recta paralela a su eje, la superficie que resulta se puede “desenrollar” hasta que quede plana. La carta que hemos considerado es la que a cada punto del cilindro desenrollado le asigna el punto correspondiente del cilindro enrollado, y es claro que cualquier arco de curva contenido en el cilindro (que no corte a la recta eliminada) conserva su longitud cuando éste se desenrolla, y viceversa. ■



Con un cono puede hacerse lo mismo: si a un cono se le quita una de sus generatrices, la superficie resultante se puede desplegar hasta que quede plana, y esto permite definir una carta que cubra todo el cono menos una generatriz y que sea una isometría (dejamos al lector como ejercicio encontrar la expresión explícita de una carta así).

El sueño del cartógrafo es encontrar una carta que una esfera (o de un fragmento de esfera) que sea una isometría, de modo que la longitud de una curva sobre el mapa (por ejemplo, el trayecto de un viaje) coincida (salvo un factor de escala) con la longitud de la curva real sobre la esfera. Por desgracia, esto es imposible. El método que hemos considerado para el cilindro y el cono no sirve para la esfera: aunque a una esfera le quitemos una circunferencia, o incluso aunque la partamos por la mitad, las semiesferas resultantes no se dejan aplanar. De hecho, ninguna porción bidimensional de esfera, por pequeña que sea, se deja aplanar sin deformarse, es decir, sin alterar las distancias entre sus puntos. Cualquiera que sea la forma en que cartografiemos una porción de esfera, siempre habrá curvas en el mapa cuya longitud no coincidirá con la de las curvas reales que representan. El lector puede meditar sobre si esto le parece o no evidente, pero en cualquier caso la demostración no es obvia. Lo probaremos más adelante.

Ciertamente, la diferenciabilidad de la esfera implica que si cartografiamos una región suficientemente pequeña, las discrepancias entre la longitud de una curva en el mapa y la curva que representa pueden hacerse inapreciables, pero nunca se harán nulas y, en cualquier caso, esto no ayuda en nada para mapas que pretenden cartografiar el planeta entero. No obstante, hay una propiedad útil que sí que puede conseguirse que tenga un mapa de una esfera:

Definición 7.19 Un difeomorfismo $f : S \rightarrow T$ entre dos variedades es *conforme* si, para cada punto $p \in S$ se cumple que $df(p) : T_p S \rightarrow T_{f(p)}(T)$ conserva los ángulos entre los vectores.

Teorema 7.20 Un difeomorfismo $f : S \rightarrow T$ entre variedades es conforme en un punto $p \in S$ si y sólo si, dada una carta X alrededor de p y llamando $Y = X \circ f$, que es una carta de T alrededor de $f(p)$, existe un $\alpha > 0$ tal que si $g_{ij}(p)$ son los coeficientes del tensor métrico de S en p respecto de X , los coeficientes del tensor métrico de $f(p)$ en T respecto de Y son $\alpha g_{ij}(p)$.

DEMOSTRACIÓN: Basta probar que si $f : V \rightarrow W$ es un isomorfismo entre dos espacios vectoriales euclídeos, se cumple que conserva los ángulos de los vectores si y sólo si, fijada una base e_1, \dots, e_n de V y considerando la base $u_i = f(e_i)$ de W , las matrices A y B del producto escalar de V y W en las bases consideradas cumplen la relación $B = \alpha A$, para cierto $\alpha > 0$.

En efecto, si se cumple esto, en las condiciones del enunciado, si $p = X(x)$, tenemos que $df(p) : T_p(S) \rightarrow T_{f(p)}(T)$ hace corresponder las bases $D_i X(x)$ y $D_i Y(x)$, por lo que f es conforme en p si y sólo si los coeficientes del tensor métrico de $f(p)$ en T respecto de Y son múltiplos de los de p en S , tal y como requiere el enunciado.

Supongamos en primer lugar que la base e_i es ortonormal. Entonces, el hecho de que f conserve ángulos implica en particular que $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$ si y sólo si $\langle f(v_1), f(v_2) \rangle = 0$. En particular, como $\langle e_i, e_j \rangle = 0$, para $i \neq j$, también $\langle u_i, u_j \rangle = 0$.

Además, como $\langle e_i + e_j, e_i - e_j \rangle = 0$, también $\langle u_i + u_j, u_i - u_j \rangle = 0$, de donde se sigue que $\langle u_i, u_i \rangle = \langle u_j, u_j \rangle$ para todo $i \neq j$, luego si llamamos $\alpha > 0$ a este valor común, resulta que la matriz del producto escalar en V es la identidad I y la matriz del producto escalar en W es αI .

En el caso general, tomamos una base ortogonal \bar{e}_i de V y llamamos M a la matriz de cambio de base, es decir, a la matriz tal que si x es la n -tupla de coordenadas de un vector en la base \bar{e}_i , entonces xM es la n -tupla de sus coordenadas respecto de la base e_i . La linealidad de f implica que la matriz de cambio de base entre la base ortonormal $\bar{u}_i = f(\bar{e}_i)$ y la base u_i es también M . Como las matrices del producto escalar respecto de las bases ortonormales son la identidad I y αI , por la parte ya probada, las matrices respecto de las bases dadas serán $MIM^t = MM^t$ y $M\alpha IM^t = \alpha MM^t$, luego también se cumple que una es un múltiplo de la otra. ■

En particular, si $X : U \rightarrow S$ es una carta de una superficie S y $p = X(u)$, la diferencial $dX(x) : \mathbb{R}^2 \rightarrow T_p(S)$ conservará ángulos si y sólo si, al considerar la base $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$ de \mathbb{R}^2 y su imagen $D_1X(x), D_2X(x)$ por la diferencial, se cumple que la matriz

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

de los coeficientes del tensor métrico en T_pS es un múltiplo de la matriz del producto escalar en \mathbb{R}^2 respecto de la base canónica, es decir, de la identidad, lo que equivale a que $E = G$ y $F = 0$. Ésta es, pues, la condición necesaria y suficiente para que la carta X sea conforme.

La proyección de Mercator La proyección equirrectangular no es conforme, pues, según hemos visto, cumple $E = r^2$, $G = r^2 \cos^2 u$. Para ser más precisos, sólo es conforme sobre los puntos del ecuador, donde $u = 0$. Esta proyección no hace más que representar el punto de la esfera de longitud $\theta \in]-\pi, \pi[$ y latitud $\phi \in]-\pi/2, \pi/2[$ mediante el punto del plano (θ, ϕ) .

En la introducción hemos planteado el problema de determinar una proyección cilíndrica que sea conforme (la que se conoce como proyección de Mercator). Más concretamente, se trata de modificar el espaciado de los paralelos en el mapa, de modo que al punto determinado por par latitud-longitud (θ, ϕ) no le hagamos corresponder este mismo par como vector de coordenadas, sino otro de la forma $(\theta, \Phi(\phi))$, para cierta función Φ . Vamos a ver que eligiendo Φ adecuadamente podemos conseguir una carta conforme. Explícitamente, vamos a estudiar las cartas de la forma

$$X(\theta, \Phi(\phi)) = (r \cos \phi \cos \theta, r \cos \phi \sin \theta, r \sin \phi),$$

donde $\Phi :]-\pi/2, \pi/2[\rightarrow \mathbb{R}$ es una función monótona creciente a la que podemos exigir que cumpla $\Phi(0) = 0$, de modo que los puntos del ecuador de la esfera tendrán su "latitud modificada" nula. Si llamamos $\Psi = \Phi^{-1}$, la igualdad anterior equivale a

$$X(v, u) = (r \cos \Psi(u) \cos v, r \cos \Psi(u) \sin v, r \sin \Psi(u)).$$

Así,

$$X_u = (-r\Psi'(u) \operatorname{sen} \Psi(u) \cos v, r\Psi'(u) \operatorname{sen} \Psi(u) \operatorname{sen} v, r\Psi'(u) \cos \Psi(u)),$$

$$X_v = (-r \cos \Psi(u) \operatorname{sen} v, r \cos \Psi(u) \cos v, 0).$$

Se comprueba entonces que $F = X_u \cdot X_v = 0$, así como que

$$E = X_u \cdot X_u = r^2 \Psi'(u)^2, \quad G = X_v \cdot X_v = r^2 \cos^2 \Psi(u).$$

Por lo tanto, la carta será conforme si la función Ψ cumple

$$\Psi'(u)^2 = \cos^2 \Psi(u).$$

Como Ψ tiene que ser monótona creciente y tiene que tomar valores en $]-\pi/2, \pi/2[$, esto equivale a que

$$\Psi'(u) = \cos \Psi(u), \quad \Psi(0) = 0.$$

Esto es una ecuación diferencial de variables separables:

$$\frac{d\Psi}{\cos \Psi} = du.$$

Para integrarla hacemos el cambio de variable $t = \tan \frac{\Psi}{2}$ (véase la sección [IC C.4]), con lo que

$$\cos \Psi = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad d\Psi = \frac{2}{1+t^2} du.$$

La ecuación se convierte en

$$\int \frac{2}{1-t^2} dt = u + c,$$

o también en

$$\int \frac{1}{1+t} dt + \int \frac{1}{1-t} dt = u + c,$$

de modo que la solución general de la ecuación es

$$\log \frac{1+t}{1-t} = u + c.$$

Puesto que tiene que ser $t(0) = \tan \frac{\Psi(0)}{2} = 0$, la constante es $c = 0$. Así pues,

$$u = \log \frac{1 + \tan \Psi/2}{1 - \tan \Psi/2}.$$

Por la fórmula de la tangente de una suma [ITAn (5.14)]:

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta},$$

esto equivale a

$$u = \log \tan \left(\frac{\Psi(u)}{2} + \frac{\pi}{4} \right).$$

Sustituyendo $u = \Phi(\phi)$, concluimos que $\Phi :]-\pi/2, \pi/2[\rightarrow \mathbb{R}$ viene dada por

$$\Phi(\phi) = \log \tan \left(\frac{\phi}{2} + \frac{\pi}{4} \right),$$

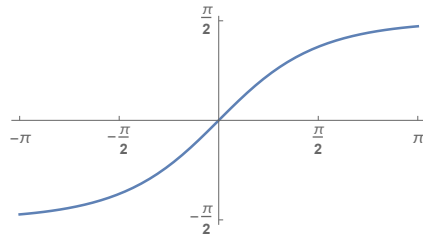
y $\Psi : \mathbb{R} \rightarrow]-\pi/2, \pi/2[$ se obtiene haciendo $\Psi(u) = \phi$ y despejando:

$$\phi = \Psi(u) = 2 \arctan e^u - \frac{\pi}{2}.$$

En resumen, la carta buscada es $X :]-\pi, \pi[\times \mathbb{R} \rightarrow S$ dada por

$$X(v, u) = (r \cos \Psi(u) \cos v, r \cos \Psi(u) \sin v, r \sin \Psi(u)),$$

donde Ψ es la función que muestra la gráfica siguiente:



En principio, nuestro mapa tiene altura infinita, pero si lo cortamos, por ejemplo, para que sea cuadrado, es decir, si lo restringimos a $]-\pi, \pi[\times]-\pi, \pi[$, cubrimos todas puntos comprendidos entre los 85° de latitud Norte y los 85° de latitud Sur, como muestra la figura siguiente, en la que vemos que Groenlandia y la Antártida se ven desproporcionadamente grandes, pero, para latitudes no tan extremas, el “aspecto” del mapa de Mercator es bastante razonable.

Como explicamos en la introducción, la proyección de Mercator permite calcular fácilmente la loxodrómica que une dos puntos. Más precisamente, una loxodrómica que forme un ángulo α con los meridianos tiene sobre el mapa la ecuación $u = \cot \alpha v + c$, luego su elemento de longitud es

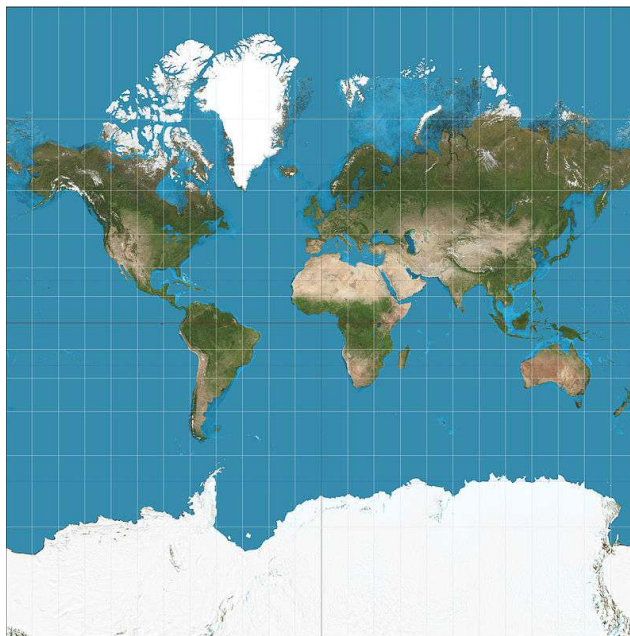
$$ds^2 = r^2 \cos^2 \Psi(u) du^2 + r^2 \cos^2 \Psi(u) dv^2 = r^2 \cos^2 \Psi(u) \left(1 + \frac{1}{\cot^2 \alpha} \right) du^2,$$

luego

$$ds = \frac{r}{\cos \alpha} \cos \Psi(u) du = \frac{r}{\cos \alpha} \Psi'(u) du,$$

luego la longitud de una loxodrómica es

$$L = \frac{r}{\cos \alpha} \int_{u_0}^{u_1} \Psi'(u) du = \frac{r}{\cos \alpha} (\Psi(u_1) - \Psi(u_0)).$$



Equivalentemente:

$$L = \frac{r}{\cos \alpha}(\phi_1 - \phi_0),$$

donde ϕ_0 y ϕ_1 son las latitudes geográficas del origen y el destino, respectivamente.

Ejemplo Supongamos que queremos viajar de Porth Elizabeth, en Sudáfrica, hasta Kupang, en Timor Occidental, cuyas coordenadas son

$$33^\circ 57' 29'' S, 25^\circ 36' E, \quad 10^\circ 9' 48'' S, 123^\circ 34' 40'' E,$$

respectivamente. En radianes:

$$(\theta, \phi) = (0.446804, -0.59268), \quad (2.15684, -0.177384).$$

Sobre el mapa las coordenadas son (calculando $u = \Phi(\phi)$):

$$(v, u) = (0.446804, -0.630775), \quad (2.15684, -0.178321).$$

A partir de aquí se calcula $\cos \alpha = 0.255786$ ($\alpha \approx 75.18^\circ$). Por lo tanto, la longitud de la loxodrómica que une ambos puntos es

$$L = \frac{6378.13}{\cos \alpha}(-0.177384 + 0.59268) = 10355.6 \text{ km.}$$

Las coordenadas cartesianas de los puntos sobre la superficie terrestre son $X(\theta, \phi)$. El producto

$$\frac{1}{r^2} X(\theta_0, \phi_0) \cdot X(\theta_1, \phi_1) = -0.0147466$$

es el coseno del ángulo que forman los dos vectores de posición, que corresponde a un ángulo $\delta \approx 1.58554$ rad. Al multiplicarlo por el radio r de la Tierra obtenemos la distancia que recorreremos si vamos de un punto a otro por el arco del círculo máximo que pasa por ellos:

$$L^* = 10\,112.8 \text{ km.}$$

La longitud de la loxodrómica es apenas un 2.4% mayor. En palabras de Mercator, siguiendo la loxodrómica, “no se llega antes, pero se llega seguro”. ■

7.4 Integración en variedades

En [IC] obtuvimos varias fórmulas (2.7), (2.8), (2.9) para calcular el área de la superficie de revolución determinada por una curva, y en particular vimos que el área de una esfera de radio r es $4\pi r^2$. Sin embargo, tal y como hemos observado en la introducción, dichas fórmulas no nos permiten abordar, por ejemplo, el problema de la bóveda de Viviani. Para abordarlo vamos a desarrollar una teoría general sobre integración en variedades. Para ello, lo primero que debemos preguntarnos es qué hay que entender por área de una variedad diferenciable o, por concretar en un caso particular no trivial: ¿qué es el área de una porción de esfera? Cualquier fragmento de esfera, por pequeño que sea, no es plano, y no es evidente cómo puede compararse su área con la de ninguna figura plana. Obviamente podemos definir aplicaciones de conjuntos planos en la esfera (difeomorfismos incluso, es decir, cartas de la esfera), pero nada nos garantiza que conserven el área, y difícilmente podríamos probar que así es sin tener de hecho una definición de área.

Para hacernos una idea de lo que vamos a hacer pensemos en una esfera del tamaño de la Tierra. Si situamos sobre ella una baldosa plana de un metro cuadrado, no descansaría perfectamente sobre el suelo esférico, pero, suponiendo que se apoyara en su centro, cada esquina se levantaría tan sólo 0.04 micras del suelo. Resulta, pues, razonable considerar que el fragmento de la Tierra cubierto por la baldosa (aunque sea imperfectamente en teoría) tiene una superficie de 1m^2 , salvo un error muy pequeño. Si cubrimos toda la Tierra con baldosas de 1m^2 , aunque sin duda no encajarán a la perfección, el número de baldosas empleadas será una buena aproximación de la superficie de la Tierra, y el mínimo error cometido se podrá reducir arbitrariamente a base de considerar baldosas más y más pequeñas.

Para formalizar (y generalizar) esta idea empezamos observando que si E^n es un espacio vectorial euclídeo de dimensión n (por ejemplo un subespacio de \mathbb{R}^m de dimensión n con el producto escalar inducido desde \mathbb{R}^m), entonces existe una isometría $\phi : E^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ que es, de hecho, un homeomorfismo entre las topologías euclídeas. Definimos los conjuntos medibles de E^n como las antiimágenes por ϕ de los conjuntos medibles Lebesgue de \mathbb{R}^n y la *medida de Lebesgue* en E^n como la dada por $m(G) = m(\phi(G))$.

Teniendo en cuenta que las isometrías en \mathbb{R}^n conservan la medida de Lebesgue, es inmediato comprobar que m así definida es una medida en E^n que

no depende de la elección de ϕ . Claramente se corresponde con la noción de longitud, área, volumen, etc. en E^n . El teorema 4.36 puede enunciarse ahora en este contexto general:

Teorema 7.21 *Sea $\phi : E^n \rightarrow F^n$ una aplicación lineal entre dos espacios vectoriales euclídeos de dimensión n y sea Δ_ϕ el determinante de la matriz de ϕ respecto a dos bases ortonormales cualesquiera. Entonces, para todo conjunto medible $A \subset E^n$ se cumple $m(\phi(A)) = |\Delta_\phi| m(A)$.*

DEMOSTRACIÓN: Sean $f : \mathbb{R}^n \rightarrow E^n$ y $g : \mathbb{R}^n \rightarrow F^n$ dos isometrías. Sea $h = f \circ \phi \circ g^{-1}$. Claramente el determinante de h es igual a Δ_ϕ y $\phi = f^{-1} \circ h \circ g$. Basta aplicar el teorema 4.36 y el hecho de que f y g conservan la medida. ■

Así pues, si $S \subset \mathbb{R}^m$ es una variedad diferenciable de dimensión n , para cada punto $p \in S$ tenemos definida la medida de Lebesgue en el espacio tangente $T_p S$ que es, según sabemos, una formalización adecuada del concepto de longitud, área, volumen, o una generalización natural de éste, según la dimensión n .

Consideremos una carta $X : U \rightarrow \mathbb{R}^m$, llamemos $V = X[U]$, fijemos un punto $p = X(x)$ y consideremos la diferencial $dX(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow T_p S$. Para cada punto $t \in U$ tenemos que

$$X(t) \approx p + dX(x)(t - p),$$

de modo que, si t está suficientemente próximo a p , el punto $X(t) \in V$ “se confunde” con $p + dX(x)(t - p) \in p + T_p S$. Por lo tanto, si $B \subset V$ es un conjunto de Borel en un entorno suficientemente pequeño de p y $B_X = X^{-1}[B]$, el conjunto de Borel $B^t = dX(x)[B_X - x] \subset T_p S$ cumple que $p + B^t$ es prácticamente indistinguible de B .

Particularizando esto al ejemplo de la Tierra que hemos considerado antes, si B es la superficie cubierta por una baldosa que se apoya en el punto p , entonces $p + B^t$ es la baldosa tangente a la superficie terrestre.⁴ Por ello, lo que vamos a hacer es probar que existe una medida de Borel regular μ en V con la propiedad de que si $K \subset V$ es un subconjunto compacto y lo cubrimos por un conjunto finito de conjuntos de Borel B_i disjuntos dos a dos, entonces la suma de las medidas $m(B_i^t)$ se aproxima a $\mu(K)$, y la aproximación es mejor cuanto menores son los diámetros de los conjuntos B_i . Esta propiedad justifica que consideremos a $\mu(K)$ como el volumen de K .

Empezamos calculando las medidas $m(B^t)$:

Teorema 7.22 *Sea $X : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ una carta de una variedad S . Sea $X(x) = p$. Para cada conjunto de Borel $B \subset U$ se cumple $m(dX(x)[B]) = \Delta_X(x) m(B)$, donde $\Delta_X = \sqrt{\det(g_{ij})}$ y las funciones g_{ij} son los coeficientes del tensor métrico de S .*

⁴Al menos si elegimos la carta X de modo que la aplicación $t \mapsto p + dX(x)(t - p)$ sea la proyección ortogonal en el plano tangente. Puede probarse que podemos elegir así la carta, pero no será necesario, porque la medida que vamos a construir sobre S no dependerá de la elección de ninguna carta de S .

DEMOSTRACIÓN: Sea $\phi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ una isometría que transforme $T_p(S)$ en $\mathbb{R}^n \times \{0\}$ y sea $p_n : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ la proyección en las primeras componentes. De este modo la restricción a $T_p(S)$ de $\phi \circ p_n$ es una isometría del plano tangente en \mathbb{R}^n , luego $m(dX(x)[B]) = m((dX(x) \circ \phi \circ p_n)[B])$.

Sean A y P_n las matrices de ϕ y p_n en las bases canónicas. Entonces la matriz de $(dX(x) \circ \phi \circ p_n)$ es $J_X(x)AP_n$ y según el teorema 7.21 tenemos que $m(dX(x)[B_r]) = \Delta_X(x) m(B_r)$, donde $\Delta_X(x) = |\det(J_X(x)AP_n)|$. Ahora usamos que para toda matriz cuadrada M se cumple $|\det M| = \sqrt{\det(MM^t)}$, con lo que

$$\Delta_X(x) = \sqrt{\det(J_X(x)AP_nP_n^tA^tJ_X(x)^t)}.$$

Pero $J_X(x)AP_nP_n^tA^tJ_X(x)^t = J_X(x)AA^tJ_X(x)^t$. En efecto, el elemento (i, j) de esta matriz es el producto de $e_iJ_X(x)AP_n$ por $(e_jJ_X(x)AP_n)^t$, donde e_i y e_j son los vectores de la base canónica de \mathbb{R}^n , pero $e_iJ_X(x) \in T_p(S)$, luego $e_iJ_X(x)A \in \mathbb{R}^n \times \{0\}$, e igualmente $e_jJ_X(x)A \in \mathbb{R}^n \times \{0\}$, luego el producto es el mismo aunque suprimamos P_n . Como A es la matriz de una isometría, se cumple $AA^t = I$, luego concluimos que

$$\Delta_X(x) = \sqrt{\det(J_X(x)J_X(x)^t)} = \sqrt{\det(g_{ij}(x))}. \quad \blacksquare$$

Así, con la notación previa al teorema, tenemos que $m(B^t) = \Delta_X(x) m(B_X)$. Ahora vamos a probar que la medida en V dada por

$$\mu(B) = \int_{X^{-1}[B]} \Delta_X dm$$

cumple la propiedad requerida.

Claramente μ es una medida de Borel regular en V . Es fácil comprobar que si f es una función integrable en V , entonces

$$\int_V f d\mu = \int_U (X \circ f) \Delta_X dm$$

(se prueba primero para funciones simples y luego para no negativas).

Sea ahora $K \subset V$ un conjunto compacto, de modo que $K_X \subset U$ es también compacto. Dado $\epsilon > 0$, como $X^{-1} \circ \Delta_X$ es uniformemente continua sobre K , existe un $\delta > 0$ tal que si $p = X(x)$, $q = X(y) \in K$ cumplen $\|p - q\| < \delta$ entonces

$$|\Delta_X(x) - \Delta_X(y)| < \epsilon_0 = \frac{\epsilon}{1 + m(K_X)}.$$

A continuación consideramos cualquier cubrimiento finito de K por conjuntos de Borel B_i disjuntos dos a dos de diámetro menor que δ (es fácil probar que existen tales cubrimientos) y tomemos puntos $x_i \in X^{-1}[B_i]$. Así, si $x \in X^{-1}[B_i]$ tenemos que $|\Delta_X(x) - \Delta_X(x_i)| < \epsilon_0$. Por consiguiente:

$$\left| \sum_i m(B_i^t) - \mu(K) \right| = \left| \sum_i (m(B_i^t) - \mu(B_i)) \right|$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \sum_i (\Delta_X(x_i) m(X^{-1}[B_i]) - \int_{X^{-1}[B_i]} \Delta_X dm) \right| \\
&= \left| \sum_i \int_{X^{-1}[B_i]} (\Delta_X(x_i) - \Delta_X) dm \right| \leq \sum_i \int_{X^{-1}[B_i]} |\Delta_X(x_i) - \Delta_X| dm \\
&\leq \epsilon_0 \sum_i m(X^{-1}[B_i]) = \epsilon_0 m(K_X) < \epsilon,
\end{aligned}$$

como había que probar.

En principio tenemos definida una medida sobre la imagen de cada carta de la variedad S , pero a continuación probamos que todas estas medidas se extienden a una única medida en S que, en particular, no depende de ninguna carta en concreto:

Teorema 7.23 *Sea $S \subset \mathbb{R}^m$ una variedad diferenciable de dimensión n . Entonces existe una única medida de Borel regular m en S tal que si $X : U \rightarrow V$ es una carta y f es una función integrable en V , se tiene*

$$\int_V f dm = \int_U (X \circ f) \Delta_X dm, \quad \text{donde } \Delta_X = \sqrt{\det(g_{ij})}.$$

DEMOSTRACIÓN: Consideremos dos cartas $X : U_1 \rightarrow V_1$ e $Y : U_2 \rightarrow V_2$ y sea $B \subset V_1 \cap V_2$ un conjunto de Borel. Vamos a probar que

$$\int_{X^{-1}[B]} \Delta_X dm = \int_{Y^{-1}[B]} \Delta_Y dm.$$

Restringiendo las cartas podemos suponer que $V_1 = V_2$, y entonces basta aplicar el teorema de cambio de variable a la función $f = X \circ Y^{-1}$. En efecto, se cumple que $f : U_1 \rightarrow U_2$ es un difeomorfismo y, como $f \circ Y = X$, tenemos $J_f(x) J_Y(f(x)) = J_X(x)$, luego

$$\begin{aligned}
\Delta_X^2(x) &= \det(J_X(x) J_X(x)^t) = \det(J_f(x) J_Y(f(x)) J_Y(f(x))^t J_f(x)^t) \\
&= \det(J_f(x))^2 \Delta_Y^2(f(x))
\end{aligned}$$

y por consiguiente $\Delta_X(x) = \Delta_Y(f(x)) |\det J_f(x)| = \Delta_Y(f(x)) |\Delta_f(x)|$. Así:

$$\begin{aligned}
\int_{X^{-1}[B]} \Delta_X dm &= \int_{U_1} \chi_{X^{-1}[B]} \Delta_X dm = \int_{U_1} (f \circ \chi_{Y^{-1}[B]})(f \circ \Delta_Y) |\Delta_f| dm \\
&= \int_{U_2} \chi_{Y^{-1}[B]} \Delta_Y dm = \int_{Y^{-1}[B]} \Delta_Y dm.
\end{aligned}$$

Con esto hemos probado que las distintas medidas que tenemos definidas sobre las imágenes de las cartas de S coinciden en su dominio común. El paso siguiente es “pegar” las medidas correspondientes a un número finito de cartas. Aunque intuitivamente es obvio que esto puede hacerse, formalmente conviene simplificar las comprobaciones usando el teorema de Riesz.

Supongamos que $X_i : U_i \rightarrow V_i$, para $i = 1, \dots, k$ son cartas de S con imágenes acotadas. Por el teorema 3.17 existe una partición de la unidad subordinada a los abiertos V_i , es decir, una familia de funciones $h_i \prec V_i$ tales que $h_1 + \dots + h_k = 1$. Sea $V = V_1 \cup \dots \cup V_k$. Para cada $f \in C_c(V)$ definimos

$$T(f) = \int_{V_1} h_1 f d\mu_1 + \dots + \int_{V_k} h_k f d\mu_k,$$

donde μ_i es la medida asociada a la carta X_i . Claramente T es un operador lineal y positivo, luego existe una medida μ en V tal que para toda $f \in C_c(V)$ se cumple

$$\int_V f d\mu = \int_{V_1} h_1 f d\mu_1 + \dots + \int_{V_k} h_k f d\mu_k.$$

Si en particular tomamos $f \in C_c(V_i)$ entonces $h_j f \in C_c(V_i \cap V_j)$, luego

$$\int_{V_j} h_j f d\mu_j = \int_{V_i \cap V_j} h_j f d\mu_j = \int_{V_i \cap V_j} h_j f d\mu_i = \int_{V_i} h_j f d\mu_i,$$

luego

$$\int_V f d\mu = \int_{V_i} (h_1 + \dots + h_k) f d\mu_i = \int_{V_i} f d\mu_i.$$

Por la unicidad del teorema de Riesz, esto prueba que la restricción de μ a V_i es precisamente μ_i , y es claro que esta propiedad determina a μ . En particular la construcción de μ no depende de la partición de la unidad escogida.

Finalmente “pegamos” todas las medidas asociadas a todas las cartas en una única medida en S . Para ello definimos un operador $T : C_c(S) \rightarrow \mathbb{R}$. Para cada $f \in C_c(S)$ tomamos un número finito de cartas con imagen acotada cuya unión cubra el soporte de f . Sea V la unión de las imágenes y μ_V la medida sobre V que acabamos de construir. Definimos

$$T(f) = \int_V f d\mu_V.$$

Es claro que $T(f)$ no depende de las cartas con que cubrimos el soporte, pues si realizamos dos cubrimientos distintos $V = V_1 \cup \dots \cup V_k$ y $V' = V'_1 \cup \dots \cup V'_k$, entonces cada abierto $V_i \cap V'_j$ es la imagen de dos cartas que inducen la misma medida y $T(f)$ coincide con la integral de f en $V \cap V'$ respecto a la única medida que extiende a todas ellas. Teniendo esto en cuenta es fácil probar que T es lineal y positivo, con lo que existe una única medida de Borel regular m en S tal que

$$\int_S f dm = T(f).$$

Es claro que m extiende a la medida inducida por cualquier carta. El resto del teorema es ya inmediato. ■

La completión de la medida construida en el teorema anterior se llama a veces *medida de Lebesgue* en la variedad S . Observemos que si tomamos $S = \mathbb{R}^n$ con la carta identidad, la medida del teorema es precisamente la medida de Lebesgue en \mathbb{R}^n (pues $\Delta_X = 1$). Lo mismo es válido si S es un subespacio vectorial de \mathbb{R}^m de dimensión n .

En definitiva, hemos probado que si $K \subset S$ está contenido en la imagen de una carta X y cubrimos K por un número finito de conjuntos de Borel B_i disjuntos dos a dos, las sumas $\sum_i m(B_i^t)$, que en principio dependen de la carta X y de los puntos $p_i \in B_i$ respecto a los que se calculan las proyecciones, convergen —cuando los diámetros de los conjuntos B_i tienden a 0— a la medida de Lebesgue $m(K)$, que no depende de la carta ni de las elecciones de los puntos p_i . Podríamos generalizar esta propiedad para compactos no contenidos en el rango de una carta y para subconjuntos de Borel arbitrarios, pero no es necesario, puesto que el “volumen” que pretendemos definir sobre la variedad S debe extender a las medidas que hemos construido sobre las imágenes de las cartas (ya que cumplen la propiedad de aproximación que hemos tomado como condición necesaria para que la definición sea aceptable) concluimos que la única medida consistente con dicha condición es la medida de Lebesgue que acabamos de definir, luego es la única definición posible de volumen en una variedad.

Demostraremos únicamente la siguiente relación local entre la medida de Lebesgue y las medidas de las proyecciones en los espacios tangentes:

Teorema 7.24 *Sea $S \subset \mathbb{R}^m$ una variedad diferenciable de dimensión n y sea $X : U \rightarrow S \cap V$ una carta alrededor de un punto $p \in S$. Sea $x \in U$ tal que $X(x) = p$. Para cada conjunto de Borel $B \subset S \cap V$ sea $B^t = dX(x)[X^{-1}[B]]$. Entonces*

$$\lim_{B \rightarrow p} \frac{m(B)}{m(B^t)} = 1,$$

donde el límite ha de entenderse como sigue: Para todo $\epsilon > 0$ existe un entorno G de p en $S \cap V$ tal que si $B \subset G$ es un conjunto de Borel no nulo en S entonces $|m(B)/m(B^t) - 1| < \epsilon$.

DEMOSTRACIÓN: Dado $\epsilon > 0$, sea $\delta = (\epsilon/2)\Delta_X(x)$. Por la continuidad de X^{-1} y Δ_X en x existe un entorno G de p tal que si $y \in X^{-1}[G]$ entonces $|\Delta_X(y) - \Delta_X(x)| < \delta$. Si E es un conjunto de Borel no nulo contenido en G y $B_X = X^{-1}[B]$ tenemos que

$$m(B_X)(\Delta_X(x) - \delta) \leq m(B) = \int_{B_X} \Delta_X dm \leq m(B_X)(\Delta_X(x) + \delta),$$

luego

$$\left| \frac{m(B)}{m(B_X)} - \Delta_X(x) \right| \leq \delta < \Delta_X(x)\epsilon.$$

Por consiguiente:

$$\left| \frac{m(B)}{\Delta_X(x)m(B_X)} - 1 \right| < \epsilon,$$

pero por 7.22 tenemos que $m(B^t) = m(dX(x)[B_X]) = \Delta_X(x)m(B_X)$, con lo que

$$\left| \frac{m(B)}{m(B^t)} - 1 \right| < \epsilon. \quad \blacksquare$$

Ejemplo Si $\alpha :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}^n$ es una curva parametrizada regular que no se corta a sí misma (de modo que su imagen es una variedad S de dimensión 1 con carta α) entonces $J_\alpha(t) = \alpha'(t)$, luego $\Delta_\alpha(t) = \|\alpha'(t)\|$ y por consiguiente

$$m(S) = \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt$$

es la longitud de α tal y como la teníamos definida.

Si S es una superficie en \mathbb{R}^3 entonces el elemento de superficie se suele representar por $d\sigma = \sqrt{EG - F^2} dm$. Por consiguiente el área de una región C de S cubierta por la carta puede calcularse como

$$A = \int_{X^{-1}(C)} \sqrt{EG - F^2} dudv. \quad \blacksquare$$

La tabla siguiente contiene el valor de Δ_X para las cartas que consideramos en las superficies de revolución:

	E	G	Δ
Cilindro	1	r^2	r
Cono	$1/\cos^2 \alpha$	$u^2 \tan^2 \alpha$	$ u \sin \alpha / \cos^2 \alpha$
Esfera	r^2	$r^2 \cos^2 u$	$r^2 \cos u$
Exponencial	$1 + 1/u^2$	u^2	$\sqrt{u^2 + 1}$
Catenoide	$\frac{u^2}{u^2 - 1}$	u^2	$\frac{u^2}{\sqrt{u^2 - 1}}$
Pseudoesfera	$\frac{l^2}{\tan^2 u}$	$l^2 \sin^2 u$	$l^2 \cos u $
Toro	r^2	$(R + r \cos u)^2$	$r(R + r \cos u)$

En general, para una superficie de revolución determinada por

$$X = (r(u) \cos v, r(u) \sin v, z(u)),$$

sabemos que

$$E = r'(u)^2 + z'(u)^2, \quad F = 0, \quad G = r(u)^2,$$

luego el área del tronco limitado por los parámetros $u_0 < u_1$ es

$$A = \int_0^{2\pi} \int_{u_0}^{u_1} r(u) \sqrt{r'(u)^2 + z'(u)^2} dudv = 2\pi \int_{u_0}^{u_1} r(u) \sqrt{r'(u)^2 + z'(u)^2} du.$$

Si en particular $z(u) = u$, la fórmula se reduce a

$$A = 2\pi \int_{u_0}^{u_1} r(u) \sqrt{1 + r'(u)^2} du.$$

Ésta es la fórmula que obtuvimos en [IC], concretamente la fórmula (2.7). Por ejemplo, el área de la esfera es

$$A = 2\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} R^2 \cos u du = 4\pi R^2.$$

Si hacemos $\rho = R(\pi/2 - u)$ y $\theta = v$, entonces ρ es la distancia del punto al polo norte y se cumple que

$$x = R \operatorname{sen} \frac{\rho}{R} \cos \theta, \quad y = R \operatorname{sen} \frac{\rho}{R} \operatorname{sen} \theta, \quad z = R \cos \frac{\rho}{R},$$

de modo que las coordenadas (ρ, θ) son el análogo esférico a las coordenadas polares en el plano. El área de un círculo esférico de radio (esférico) r es

$$A_r = 2\pi \int_0^r R^2 \operatorname{sen} \frac{\rho}{R} d\rho = 2\pi R^2 \left(1 - \cos \frac{r}{R}\right) = 4\pi R^2 \operatorname{sen}^2 \frac{r}{2R}.$$

Así, si $r = \pi R$ recuperamos el área de la esfera $4\pi R^2$, si r es pequeño con respecto a R entonces $\operatorname{sen}(r/2R) \approx r/2R$ y por consiguiente $A_r \approx \pi r^2$, el área del círculo plano del mismo radio. ■

La bóveda de Viviani Ahora podemos calcular el área de la bóveda de Viviani, descrita en la introducción. Para ello observamos que los puntos que están dentro de la superficie cilíndrica con base en el círculo de centro $(r/2, 0, 0)$ y radio $r/2$ son los que cumplen

$$(x - r/2)^2 + y^2 \leq r^2/4,$$

y esta ecuación se simplifica a

$$x^2 - rx + y^2 \leq 0.$$

En términos de las coordenadas esféricas es

$$R^2 \cos^2 \phi \cos^2 \theta - R^2 \cos \phi \cos \theta + R^2 \cos^2 \phi \operatorname{sen}^2 \theta \leq 0,$$

que se simplifica a

$$\cos^2 \phi \leq \cos \phi \cos \theta.$$

Vamos a considerar únicamente el octante de esfera determinado por las cotas $0 \leq \phi \leq \pi/2$ y $0 \leq \theta \leq \pi/2$. El único punto en dicho octante que cumple $\cos \phi = 0$ es el polo norte, de modo que, salvo el polo, los puntos del octante contenidos en el cilindro cumplen $\cos \phi \leq \cos \theta$, que equivale a $0 \leq \theta \leq \phi \leq \pi/2$. Por consiguiente, los puntos del octante de bóveda de Viviani son los que cumplen $0 \leq \phi \leq \theta \leq \pi/2$. Por lo tanto, el área del octante de bóveda de Viviani es

$$\int_0^{\pi/2} \int_0^\theta R^2 \cos \phi d\phi d\theta = R^2 \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} \theta d\theta = R^2.$$

Como la bóveda completa consta de cuatro octantes, el área de la bóveda de Viviani es $4R^2$, que, en efecto, es cuadrable, como requería el problema. ■

La proyección de Lambert Veamos ahora que con un ajuste similar al que hemos hecho en la proyección equirectangular para obtener la proyección de Mercator podemos obtener una proyección cilíndrica de la esfera que conserva las áreas. Nos aprovechamos los cálculos que hicimos para calcular la proyección de Mercator, pues buscamos igualmente una carta de la esfera de la forma

$$X(v, u) = (r \cos \Psi(u) \cos v, r \cos \Psi(u) \sin v, r \sin \Psi(u)),$$

cuyos coeficientes del tensor métrico son, según vimos:

$$E = r^2 \Psi'(u)^2, \quad F = 0, \quad G = r^2 \cos^2 \Psi(u).$$

La diferencia es que ahora, para que conserve áreas, lo que queremos es que

$$\Delta_X = \sqrt{EG - F^2} = r^2 \Psi'(u) \cos \Psi(u) = 1.$$

Esto se traduce en la ecuación diferencial

$$\cos \Psi \, d\Psi = \frac{1}{r^2} du, \quad \Psi(0) = 0,$$

cuya solución es, claramente, $u = r^2 \sin \Psi(u)$, con lo que $\cos \Psi(u) = \sqrt{1 - u^2/r^4}$, por lo que la carta es

$$X(v, u) = (\sqrt{r^2 - (u/r)^2} \cos v, \sqrt{r^2 - (u/r)^2} \sin v, u/r),$$

donde, para cubrir toda la esfera, $(v, u) \in]-\pi, \pi[\times]-r^2, r^2[$. Si hacemos $u = \Phi(\phi)$, donde Φ es la inversa de Ψ y ϕ es la longitud geográfica, tenemos que $u = \Phi(\phi) = r^2 \sin \phi$, y $v = \theta$ es la latitud.

Esta carta es un tanto “peculiar”, pues los mapas con esta proyección tienen anchura fija 2π y una altura que depende de la escala del mapa, es decir, del valor r que queramos darle al radio de la Tierra en el mapa. Por ello resulta más natural hacer una modificación. Es obvio que si componemos la carta X con una aplicación lineal que conserve las áreas (es decir, de determinante 1) obtenemos otra carta que conserva áreas. Concretamente, consideramos la transformación $(v, u) = (\bar{v}/r, r\bar{u})$, de modo que las nuevas coordenadas (\bar{v}, \bar{u}) varían en el rectángulo $U =]-\pi r, \pi r[\times]-r, r[$, que tiene una proporción fija independiente del valor que le demos a r . La carta es entonces (llamando de nuevo u y v a lo que serían \bar{u} y \bar{v}):

$$X(v, u) = (\sqrt{r^2 - u^2} \cos \frac{v}{r}, \sqrt{r^2 - u^2} \sin \frac{v}{r}, u).$$

Esta proyección se conoce como *proyección de Lambert*, porque fue descrita en 1772 por el matemático suizo Johann Heinrich Lambert, y tiene una interpretación geométrica mucho más simple, pues vemos que, tal y como ya señalábamos en la introducción, los puntos de altura u en el mapa se corresponden con los puntos de altura u en la esfera terrestre, por lo que la proyección es simplemente el difeomorfismo descrito en el ejemplo de la página 297 seguido del desarrollo del cilindro en un rectángulo plano. ■

Veamos una fórmula general para el elemento de volumen de la gráfica de una función de n -variables:

Teorema 7.25 Sea $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^1 en un abierto $U \subset \mathbb{R}^n$, sea $S = \{(u, f(u)) \mid u \in U\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ la gráfica de f y sea $X : U \rightarrow S$ la carta dada por $X(u) = (u, f(u))$. Entonces $\Delta_X = \sqrt{1 + \|\nabla f\|^2}$.

DEMOSTRACIÓN: Si intentamos usar la fórmula $\Delta_X = \sqrt{\det(J_X \cdot J_X^t)}$, el determinante que obtenemos no es fácil de calcular, así que vamos a obtener otra expresión alternativa para Δ_X . En primer lugar, observemos que

$$X_{u_i} = (0, \dots, 1, \dots, 0, \frac{\partial f}{\partial u_i}),$$

donde el 1 se encuentra en la posición i -ésima. Por lo tanto, el vector

$$N = \frac{1}{\sqrt{1 + \|\nabla f\|^2}}(-\nabla f, 1)$$

es claramente ortogonal a todos los vectores X_{u_i} , y tiene norma 1. La relación $m(dX(u)[B]) = \Delta_X(u) m(B)$ que nos da el teorema 7.22, teniendo en cuenta el teorema 7.21, nos da que $\Delta_X(u)$ es el determinante de la matriz de la aplicación lineal $dX(u) : \mathbb{R}^n \rightarrow T_{X(u)}(S)$ respecto de dos bases ortonormales cualesquiera.

En \mathbb{R}^n podemos tomar la base canónica e_1, \dots, e_n , y en el espacio tangente tomamos una base cualquiera, v_1, \dots, v_n . Ahora consideramos la aplicación lineal $D : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ que sobre los primeros vectores $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n$ de la base canónica de \mathbb{R}^{n+1} toma el valor $D(\bar{e}_i) = dX(u)(e_i)$ y además $D(\bar{e}_{n+1}) = N$.

Como N es ortogonal a todos los vectores de una base de $T_{X(u)}(S)$, es de hecho ortogonal a todos los vectores tangentes, luego v_1, \dots, v_n, N es una base ortonormal de \mathbb{R}^{n+1} , y la matriz de D respecto a la base canónica y esta base es

$$\bar{M} = \left(\begin{array}{c|c} M & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right),$$

donde M es la matriz de $dX(u)$ respecto de las bases e_i y v_i . Por lo tanto, $\Delta_X(u)$ es el determinante de \bar{M} , o también el determinante de la matriz de D respecto de cualquier par de bases ortonormales de \mathbb{R}^{n+1} . En lugar de \bar{M} , vamos a considerar la matriz de D respecto de las bases canónicas, que es

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \|\nabla f\|^2}} \left(\begin{array}{c|c} I_n & (\nabla f)^t \\ \hline -\nabla f & 1 \end{array} \right).$$

Basta probar que el determinante de la matriz sin el factor de la izquierda es $1 + \|\nabla f\|^2$. Por simplificar la notación, tenemos una matriz de la forma

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & a_1 \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & a_n \\ \hline -a_1 & \cdots & -a_n & 1 \end{array} \right).$$

Para calcular su determinante, lo más sencillo es usar la fórmula [A1 6.4]:

$$|M| = \sum_{\sigma \in \Sigma_{n+1}} (\text{sig } \sigma) m_{1\sigma(1)} \cdots m_{n+1\sigma(n+1)}.$$

Tomemos $\sigma \in \Sigma_{n+1}$ y supongamos que su sumando correspondiente no es nulo. Si $\sigma(i) = n+1$, para cierto $i \leq n$. Entonces $m_{i\sigma(i)} = a_i$ y, para cada $j \leq n$, $j \neq i$, como $\sigma(j) \neq n+1$, para que el sumando sea no nulo tiene que ser $\sigma(j) = j$, con lo que $m_{j\sigma(j)} = 1$. Esto sólo deja la posibilidad $\sigma(n+1) = i$, por lo que σ es la trasposición $(i, n+1)$ y $m_{n+1, \sigma(n+1)} = -a_i$, luego el sumando correspondiente es a_i^2 (teniendo en cuenta que la signatura de las trasposiciones es negativa).

Falta considerar el caso en que $\sigma(n+1) = n+1$. Entonces, para que $m_{i\sigma(i)}$ sea no nulo, con $i \leq n$, tiene que ser $\sigma(i) = i$, luego $\sigma = 1$ y el sumando vale 1. En total, el determinante es $1 + a_1^2 + \dots + a_n^2$. ■

Ejemplo Si aplicamos el teorema anterior a la función

$$f(x_1, \dots, x_{n-1}) = \pm \sqrt{r^2 - x_1^2 - \dots - x_{n-1}^2}$$

obtenemos que el elemento de volumen para la esfera $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ de radio r respecto de la carta

$$X(x_1, \dots, x_{n-1}) = (x_1, \dots, x_{n-1}, \pm \sqrt{r^2 - x_1^2 - \dots - x_{n-1}^2})$$

es

$$\Delta_X^2 = 1 + \frac{x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2}{r^2 - x_1^2 - \dots - x_{n-1}^2} = \frac{r^2}{r^2 - x_1^2 - \dots - x_{n-1}^2},$$

luego

$$\Delta_X = \frac{r}{\sqrt{r^2 - x_1^2 - \dots - x_{n-1}^2}}. \quad \blacksquare$$

A partir del ejemplo anterior podríamos intentar calcular el volumen de S^{n-1} como el doble de la integral de Δ_X sobre el disco $\|x\| \leq 1$ en \mathbb{R}^n , pero la integral resultante no es fácil de calcular. Vamos a calcular dicho volumen indirectamente a partir del teorema siguiente, que afirma que una función en \mathbb{R}^n puede integrarse “por capas”:

Teorema 7.26 Si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es una función integrable, entonces

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = \int_0^{+\infty} r^{n-1} \int_{S^{n-1}} f(rx) dm dr.$$

DEMOSTRACIÓN: Sean

$$A_+ = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n > 0\}, \quad A_- = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n < 0\},$$

$$S_+^{n-1} = \{x \in S^{n-1} \mid x_n > 0\}, \quad S_-^{n-1} = \{x \in S^{n-1} \mid x_n < 0\}.$$

Como \mathbb{R}^n es la unión de A_+ , A_- y el plano $x_n = 0$, que tiene medida nula, tenemos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = \int_{A_+} f(x) dx + \int_{A_-} f(x) dx,$$

e igualmente la integral sobre S^{n-1} se descompone en suma de las integrales correspondientes en S_+^{n-1} y S_-^{n-1} . Por lo tanto, basta probar que

$$\int_{A_+} f(x) dx = \int_0^{+\infty} r^{n-1} \int_{S_+^{n-1}} f(rx) dm dr$$

y la igualdad análoga para A_- y S_-^{n-1} . Las dos se prueban del mismo modo, así que probaremos únicamente ésta. Para ello llamamos $U = \{u \in \mathbb{R}^{n-1} \mid \|u\| < 1\}$ y consideramos las cartas $X :]0, +\infty[\times U \rightarrow A_+$, $Y : U \rightarrow S_+^{n-1}$ dadas por

$$X(r, u) = r(u, \sqrt{1 - \|u\|^2}), \quad Y(u) = (u, \sqrt{1 - \|u\|^2}).$$

Vemos que

$$J_X J_X^t = \begin{pmatrix} Y \\ r \frac{\partial Y}{\partial u_1} \\ \vdots \\ r \frac{\partial Y}{\partial u_{n-1}} \end{pmatrix} \left(Y^t, r \left(\frac{\partial Y}{\partial u_1} \right)^t, \dots, r \left(\frac{\partial Y}{\partial u_{n-1}} \right)^t \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 J_Y J_Y^t \end{pmatrix},$$

donde usamos que $Y \in S^{n-1}$, luego $Y \cdot Y = 1$, luego al derivar queda

$$2Y \frac{\partial Y}{\partial u_i} = 0.$$

Por consiguiente,

$$\det(J_X J_X^t) = r^{2(n-1)} \det(J_Y J_Y^t),$$

luego $\Delta_X = r^{n-1} \Delta_Y$. Con esto ya podemos calcular:

$$\begin{aligned} \int_{A_+} f(x) dx &= \int_0^{+\infty} \int_U f(r(u, \sqrt{1 - \|u\|^2})) r^{n-1} \Delta_Y du dr = \\ &= \int_0^{+\infty} r^{n-1} \int_{S_+^{n-1}} f(rx) dm dr. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Como primera aplicación generalizamos el teorema 6.36 y el ejercicio posterior:

Teorema 7.27 *La función $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 1/\|x\|^\alpha$ es integrable en una bola de centro 0 si y sólo si $\alpha < n$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $B(r_0, R) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid r_0 < \|x\| < R\}$. Por el teorema anterior

$$\begin{aligned} \int_{B(r_0, R)} \frac{1}{\|x\|^\alpha} dx &= \int_{r_0}^R r^{n-1} \int_{S^{n-1}} r^{-\alpha} dm dr = \int_{r_0}^R r^{n-1-\alpha} \int_{S^{n-1}} dm dr = \\ m(S^{n-1}) \int_{r_0}^R r^{n-1-\alpha} dr &= m(S^{n-1}) \left[\frac{r^{n-\alpha}}{n-\alpha} \right]_{r_0}^R = m(S^{n-1}) \left(\frac{R^{n-\alpha}}{n-\alpha} - \frac{r_0^{n-\alpha}}{n-\alpha} \right), \end{aligned}$$

donde en la última línea hemos supuesto que $\alpha \neq n$. Si $\alpha = n$ el resultado es $m(S^{n-1}) \log(R/r_0)$. Es claro entonces que el límite cuando $r_0 \rightarrow 0$ existe si y sólo si $\alpha < n$, en cuyo caso

$$\int_{\|x\| < R} \frac{1}{\|x\|^\alpha} dx = m(S^{n-1}) \frac{R^{n-\alpha}}{n-\alpha}. \quad \blacksquare$$

Ejercicio: Probar que $\log \|x\|$ es integrable en cualquier bola $B_R(0) \subset \mathbb{R}^2$.

Ejemplo Vamos a calcular la medida de Lebesgue σ_n de la esfera S^n . Para ello consideramos la función $g: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(x) = e^{-x_1^2 - \dots - x_n^2}$. Por el teorema de Fubini,

$$\int_{\mathbb{R}^{n+1}} g(x) dx = \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} dt \right)^{n+1} = \pi^{(n+1)/2},$$

donde hemos usado el cálculo de la integral de Gauss que hemos visto en la página 276. Por otro lado, el teorema 7.26 nos da que

$$\int_{\mathbb{R}^{n+1}} g(x) dx = \int_0^{+\infty} r^n \int_{S^n} e^{-r^2} dm dr = \sigma_n \int_0^{+\infty} r^n e^{-r^2} dr.$$

Ahora hacemos el cambio de variable $t = r^2$, con lo que

$$\pi^{(n+1)/2} = \frac{\sigma_n}{2} \int_0^{+\infty} t^{n/2} e^{-t} t^{-1/2} dt = \frac{\sigma_n}{2} \Pi\left(\frac{n+1}{2}\right),$$

donde Π es la función factorial [IC 3.30]. Así pues:

$$\sigma_n = \frac{2\pi^{(n+1)/2}}{\Pi(\frac{n+1}{2})} = \frac{(n+1)\pi^{(n+1)/2}}{\Pi(\frac{n+1}{2})}.$$

Más aún, en la prueba del teorema anterior, para $\alpha = 0$ y $R = 1$, hemos obtenido que la medida de Lebesgue v_n de la bola unitaria en \mathbb{R}^n es

$$v_n = \int_{\|x\| < 1} dx = \frac{\sigma_{n-1}}{n} = \frac{\pi^{n/2}}{\Pi(n/2)},$$

que es la misma expresión que obtuvimos en el ejemplo de la página 193. \blacksquare

Teorema 7.28 Si $S_1 \subset \mathbb{R}^{m_1}$ y $S_2 \subset \mathbb{R}^{m_2}$ son variedades diferenciables, entonces la medida de Lebesgue en $S_1 \times S_2$ (restringida a los conjuntos de Borel) es el producto de las medidas de Lebesgue de S_1 y S_2 (sobre los conjuntos de Borel).

DEMOSTRACIÓN: Sean m, m_1 y m_2 las medidas de Lebesgue en $S_1 \times S_2, S_1$ y S_2 respectivamente. Basta probar que si A_1 y A_2 son conjuntos de Borel en S_1 y S_2 entonces $m(A_1 \times A_2) = m_1(A_1)m_2(A_2)$. Es fácil ver que A_1 y A_2 se descomponen en una unión numerable disjunta de conjuntos de Borel, cada

uno de los cuales está contenido en el rango de una carta. También es claro que si probamos la igualdad anterior para los productos de estos abiertos de ahí se sigue el caso general. En definitiva, podemos suponer que A_1 está contenido en el rango de una carta X_1 y A_2 está contenido en el rango de una carta X_2 . Una simple comprobación nos da que $\Delta_{X_1 \times X_2} = \Delta_{X_1} \Delta_{X_2}$, luego aplicando el teorema de Fubini concluimos que

$$\begin{aligned} m(A_1 \times A_2) &= \int_{X_1^{-1}[A_1] \times X_2^{-1}[A_2]} \Delta_{X_1} \Delta_{X_2} dx_1 \cdots dx_{n_1+n_2} \\ &= \left(\int_{X_1^{-1}[A_1]} \Delta_{X_1} dx_1 \cdots dx_{n_1} \right) \left(\int_{X_2^{-1}[A_2]} \Delta_{X_2} dx_{n_1+1} \cdots dx_{n_1+n_2} \right) \\ &= m_1(A_1) m_2(A_2). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

7.5 Geodésicas

Imaginemos la superficie S de un planeta cuyos habitantes creen que es plano. Cuando éstos creen caminar en línea recta, en realidad sus trayectorias son curvas, sin embargo su distinción entre rectas y curvas tiene un significado objetivo. Tratemos de explicitarlo. Sea $N_p(S)$ el *espacio normal* a S en p , es decir, el complemento ortogonal de $T_p(S)$. Consideremos una curva α contenida en S . Entonces $\alpha'(t) \in T_{\alpha(t)}(S)$. Podemos descomponer $\alpha''(t) = v_t(t) + v_n(t)$, donde $v_t(t) \in T_{\alpha(t)}(S)$ y $v_n(t) \in N_{\alpha(t)}(S)$. La descomposición es única. El vector v_n contiene la parte de la aceleración que mantiene a los habitantes del planeta pegados a su superficie (la gravedad) y es “invisible” para ellos, pues si el planeta fuera realmente plano la gravedad no curvaría sus trayectorias. El vector v_t contiene la variación de la velocidad que ellos detectan: determina si la trayectoria se curva a la izquierda o a la derecha. Ellos llaman rectas a las curvas que cumplen $v_t = 0$. A continuación desarrollamos estas ideas en un contexto más general:

Definición 7.29 Sea $S \subset \mathbb{R}^m$ una variedad de dimensión n , sea $\alpha : I \rightarrow S$ una curva regular y $V : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ una función de clase C^1 tal que para todo $t \in I$ se cumpla $V(t) \in T_{\alpha(t)}(S)$. En estas condiciones diremos que V es un *campo de vectores* sobre α . Llamaremos *derivada covariante* de V en cada punto t a la proyección ortogonal de $V'(t)$ sobre $T_{\alpha(t)}(S)$. La representaremos por $DV(t)$.

En la situación que describíamos antes, el vector v_t es la derivada covariante del campo dado por $V(t) = \alpha'(t)$. Para ilustrar el caso general podemos pensar en un habitante del planeta S que camina rumbo norte con su brazo derecho apuntando hacia el noreste. Si interpretamos el brazo como un campo de vectores sobre su trayectoria, desde el punto de vista del caminante éste apunta siempre en la misma dirección, pues él camina “recto”, es decir, sin desviarse ni hacia el este ni hacia el oeste, y su brazo forma un ángulo fijo con su dirección de avance. En otras palabras, considera que el campo vectorial es constante y

su derivada es nula. Esto es falso, pues en realidad su trayectoria no es recta, sino una circunferencia y su brazo sí cambia de dirección (el único caso en que la dirección no variaría sería si apuntara al este o al oeste, con lo que siempre marcaría la dirección perpendicular al plano de la circunferencia en que se mueve). La que en realidad es nula es la derivada covariante del campo, que los habitantes confunden con la derivada total al desconocer la curvatura de su planeta.

En las condiciones de la definición anterior, sea $X : U \rightarrow S$ una carta de S y expresemos la curva (localmente) como $\alpha(t) = X(x(t))$. Entonces una base de $T_{\alpha(t)}(S)$ en cada punto es

$$D_1X(x(t)), \dots, D_nX(x(t)),$$

luego podremos expresar

$$V(t) = a_1(t)D_1X(x(t)) + \dots + a_n(t)D_nX(x(t)), \quad (7.5)$$

para ciertas funciones $a_i(t)$. Multiplicando la igualdad por $D_iX(x(t))$ se obtiene un sistema de ecuaciones lineales con coeficientes $g_{ij}(x(t))$. Como el determinante es no nulo, resolviendo el sistema concluimos que las funciones $a_i(t)$ son derivables. Entonces

$$V'(t) = \sum_{i=1}^n a'_i(t)D_iX(x(t)) + \sum_{i,j=1}^n a_i(t)D_{ij}X(x(t))x'_j(t). \quad (7.6)$$

El primer término es tangente a S , luego no se altera al tomar la proyección ortogonal. Para calcular la proyección del segundo conviene introducir un nuevo concepto:

Definición 7.30 Sea $X : U \rightarrow S$ una carta de una variedad S . Llamaremos *símbolos de Christoffel* de S en la carta X a las funciones $\Gamma_{ij}^k : U \rightarrow \mathbb{R}$ que cumplen

$$D_{ij}X = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k D_kX + N_{ij}, \quad (7.7)$$

donde $N_{ij}(x) \in N_p(S)$ (con $p = X(x)$). Observemos que $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$.

Las proyecciones de las segundas parciales $D_{ij}X$ se obtienen eliminando la componente N_{ij} , con lo que al calcular la proyección de (7.6) llegamos a que la derivada covariante de V viene dada por

$$DV = \sum_{k=1}^n \left(a'_k + \sum_{i,j=1}^n a_i \Gamma_{ij}^k x'_j \right) D_kX. \quad (7.8)$$

Un hecho muy importante es que los símbolos de Christoffel, y por consiguiente la derivada covariante, dependen únicamente de los coeficientes g_{ij} de la primera forma fundamental de S . En efecto, multiplicando las ecuaciones (7.7) por D_lX obtenemos

$$D_{ij}X D_lX = \sum_{k=1}^n g_{kl} \Gamma_{ij}^k.$$

Una simple comprobación nos da que

$$D_{ij}X D_l X = \frac{1}{2}(D_i g_{jl} + D_j g_{il} - D_l g_{ij}),$$

luego en total resulta

$$\sum_{k=1}^n g_{kl} \Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}(D_i g_{jl} + D_j g_{il} - D_l g_{ij}). \quad (7.9)$$

Fijando i, j y variando l obtenemos un sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas y coeficientes (g_{kl}) , que nos permite despejar los símbolos Γ_{ij}^k en términos de los coeficientes g_{ij} y sus derivadas, como queríamos probar. Ahora nos ocupamos con detalle del caso particular que describíamos al principio de la sección:

Definición 7.31 Sea $\alpha(t)$ una curva contenida en una variedad S . Llamaremos *aceleración geodésica*⁵ de α a la derivada covariante del campo vectorial α' .

Supongamos que α está parametrizada por el arco. Entonces $\|\alpha'(s)\| = 1$, luego derivando resulta $\alpha''(s)\alpha'(s) = 0$, y esta ortogonalidad se conserva al proyectar sobre $T_p(S)$, de modo que $D\alpha'(s)$ es perpendicular al vector tangente de α . Llamaremos *curvatura geodésica* de α a $\kappa_g = \|D\alpha'\|$. Si $\kappa_g \neq 0$ definimos el *vector normal geodésico* de α como el vector $\kappa_g^{-1} D\alpha'$, de modo que $D\alpha' = \kappa_g n_g$.

En el caso de que α no esté parametrizada por el arco el vector normal geodésico y la curvatura geodésica se definen a través de su parametrización natural. Explícitamente, si $\alpha(t)$ es una curva contenida en S y $s(t)$ es su longitud de arco, usando la notación $v = s'(t) = \|\alpha'(t)\|$, $a = v'(t)$ para la velocidad y aceleración sobre la trayectoria y $T = \alpha'(s)$ para el vector tangente, tenemos

$$\alpha'(t) = v\alpha'(s), \quad \alpha''(t) = aT + v^2\alpha''(s).$$

Al proyectar sobre el espacio tangente resulta

$$D\alpha'(t) = aT + v^2\kappa_g n_g.$$

De este modo, la aceleración geodésica de α se descompone en una aceleración tangencial, cuyo módulo a es la tasa de variación de la velocidad v , y una aceleración normal, cuyo módulo es $v^2\kappa_g$. Un habitante del planeta S que “crea” vivir en $T_p(S)$ confundirá la aceleración geodésica, el vector normal geodésico y la curvatura geodésica de α con la aceleración, el vector normal y la curvatura de α . Por lo tanto llamará rectas a las curvas sin aceleración normal geodésica:

⁵La *geodesia* (gr. = división de la tierra) estudia la forma de la Tierra, deducida a partir de mediciones realizadas desde su superficie. La geometría diferencial ha adoptado este adjetivo para referirse en general a los conceptos que puede medir un “habitante” de una variedad arbitraria sin salir de ella.

Definición 7.32 Una curva α contenida en una variedad S es una *geodésica*⁶ si cumple $\kappa_g = 0$, o equivalentemente, si $D\alpha'$ es proporcional a α' en cada punto. En tal caso el módulo de $D\alpha'$ es $a = s''(t)$, donde s es la longitud de arco, por lo que si α está parametrizada por el arco entonces α es una geodésica si y sólo si $D\alpha' = 0$.

Vamos a particularizar las ecuaciones que determinan la derivada covariante de un campo al caso de la aceleración geodésica de una curva. Si $\alpha(t) = X(x(t))$, entonces

$$\alpha'(t) = \sum_{i=1}^n D_i X(x(t)) x'_i(t),$$

luego si en (7.5) hacemos $V = \alpha'$ tenemos $a_i = x'_i$, luego la fórmula (7.8) se convierte en

$$DV = \sum_{k=1}^n \left(x''_k + \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}^k x'_i x'_j \right) D_k X.$$

El vector

$$\left(x''_k + \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}^k x'_i x'_j \right)_{k=1}^n$$

es la antiimagen por dX de $D\alpha'$, es decir, la representación en el mapa de la aceleración geodésica de α . Lo llamaremos *expresión en coordenadas* de dicha aceleración geodésica.

La condición necesaria y suficiente para que una curva parametrizada por el arco de coordenadas $x(s)$ sea una geodésica es

$$x''_k + \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}^k x'_i x'_j = 0, \quad k = 1, \dots, n. \quad (7.10)$$

Si la parametrización es arbitraria sólo hemos de exigir que el vector formado por los miembros izquierdos sea proporcional a x' .

Observemos ahora que si $p \in S$ y $w \in T_p(S)$ es un vector unitario, fijada una carta X alrededor de p , de modo que $p = X(x_0)$ y $w = dX(x_0)(x'_0)$, el teorema 5.48 nos asegura que existe una única curva $x(t)$ que verifica las ecuaciones (7.10) con las condiciones iniciales $x(0) = x_0$, $x'(0) = x'_0$. La curva $g(t) = X(x(t))$ es una geodésica de S parametrizada por el arco tal que $g(0) = p$ y $g'(0) = w$. Recíprocamente, la representación en la carta de cualquier geodésica que cumpla esto ha de ser solución de las ecuaciones (7.10), luego g es única (salvo cambio de parámetro). En resumen:

Teorema 7.33 *Por cada punto de una variedad diferenciable pasa una única geodésica en cada dirección.*

Ejemplo En un plano (tomando como carta la identidad) todos los símbolos de Christoffel son nulos, por lo que las geodésicas parametrizadas por el arco son las curvas que cumplen $(u'', v'') = (0, 0)$, es decir, las rectas. ■

⁶Deberíamos decir "recta geodésica", es decir, el equivalente en S a una recta, pero es preferible contraer el término pues, al fin y al cabo, normalmente las geodésicas no son rectas.

Ejemplo Si una carta $X(u, v)$ de una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ cumple $F = 0$, las ecuaciones (7.9) se reducen a

$$\begin{aligned}\Gamma_{11}^1 &= \frac{E_u}{2E}, & \Gamma_{11}^2 &= -\frac{E_v}{2G}, & \Gamma_{12}^1 &= \frac{E_v}{2E}, \\ \Gamma_{12}^2 &= \frac{G_u}{2G}, & \Gamma_{22}^1 &= -\frac{G_u}{2E}, & \Gamma_{22}^2 &= \frac{G_v}{2G}.\end{aligned}\tag{7.11}$$

■

Ejemplo En la superficie de revolución generada por la curva $(r(u), z(u))$, suponiendo a ésta parametrizada por el arco, los únicos símbolos de Christoffel no nulos son

$$\Gamma_{12}^2 = \frac{r'(u)}{r(u)}, \quad \Gamma_{22}^1 = -r(u)r'(u).$$

Por lo tanto las ecuaciones de las geodésicas parametrizadas por el arco son

$$u'' = v'^2 r(u)r'(u), \quad v'' = -2u'v' \frac{r'(u)}{r(u)}.$$

Es inmediato comprobar que los meridianos (t, v_0) cumplen estas ecuaciones, luego son geodésicas. Si se cumple $r'(u) = 0$, (por ejemplo en los extremos locales de r) entonces el paralelo (u_0, t) también cumple las ecuaciones, luego es una geodésica.

En el caso concreto de la esfera los meridianos son los arcos de circunferencia de radio máximo que unen los polos. Dada la simetría de la esfera, que permite tomar cualquier par de puntos antípodas como polos, podemos afirmar que todas las circunferencias máximas son geodésicas. Como, por cada punto y cada dirección pasa una única circunferencia máxima, el teorema 7.33 implica que las circunferencias máximas son las únicas geodésicas de las esferas. ■

7.6 Superficies

Terminaremos el capítulo con algunos resultados específicos sobre superficies $S \subset \mathbb{R}^3$. Concretamente, vamos a tratar de medir la “curvatura” de una superficie.

En el caso de una curva $\alpha(t)$ (véase la sección [IC 4.1]) tenemos definida su curvatura

$$\kappa = \frac{\|\alpha' \times \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3}$$

que se interpreta como la variación del ángulo del vector tangente por unidad de avance. Así, una curvatura grande indica que la curva cambia de dirección muy rápidamente. Nuestro objetivo de cuantificar de algún modo similar la curvatura de una superficie en cada uno de sus puntos.

La idea básica es que una superficie está más curvada en un punto cuando las curvas que pasan por dicho punto (contenidas en la superficie) están más

curvadas, pero esto hay que precisarlo mejor, porque literalmente es falso. Por ejemplo, una esfera debería considerarse “menos curvada” cuando mayor sea su radio, pero por cualquier punto de cualquier esfera pasan circunferencias de radio arbitrariamente pequeño y, por consiguiente, con curvatura arbitrariamente grande. Lo que ocurre es que esas circunferencias se curvan “porque quieren” y no porque la esfera les obligue a ello. Para medir la curvatura de una superficie tenemos que estudiar la curvatura que necesariamente tienen que tener las curvas que no quieran salirse de ella, sin contar la que tienen “gratuitamente”.

Por ejemplo, en el caso de una esfera, “lo más recto” que podemos movernos por ella es a través de una geodésica, es decir, de un círculo máximo. Si un objeto se mueve por una superficie siguiendo una geodésica, podemos decir que su trayectoria se está curvando lo imprescindible para no salirse de la superficie, por lo que lo relevante a la hora de estimar la curvatura de una superficie es la curvatura de sus geodésicas.

Éste podría ser un modo de abordar el problema, pero vamos a ver que es más fácil considerar curvas arbitrarias y separar en ellas la curvatura “esencial” debida a la superficie de la curvatura “accidental” debida a la elección de la trayectoria dentro de la superficie. Para ello necesitamos un concepto previo:

Si X es una carta de una superficie S , entonces X_u, X_v son en cada punto (u, v) una base del plano tangente en $X(u, v)$, luego el vector $X_u \times X_v$ es no nulo y perpendicular a dicho plano. Si llamamos α al ángulo formado por X_u y X_v en un punto dado, entonces

$$\|X_u \times X_v\|^2 = \|X_u\|^2 \|X_v\|^2 (1 - \cos^2 \alpha) = X_u X_u X_v X_v - (X_u X_v)^2 = EG - F^2.$$

Así pues, $\|X_u \times X_v\| = \sqrt{EG - F^2}$.

Definición 7.34 La *aplicación de Gauss* asociada a una carta $X : U \rightarrow S$ de una superficie S es la aplicación $n : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$n(u, v) = \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|} = \frac{X_u \times X_v}{\sqrt{EG - F^2}}.$$

De este modo, $n(u, v)$ es en cada punto un vector unitario perpendicular a S en $X(u, v)$. Esto lo determina completamente salvo en su sentido. Si cambiamos de carta, el sentido de n puede cambiar.

Si X y \bar{X} son dos cartas que cubren una misma región conexa de una variedad, entonces $n(u, v) = \epsilon(u, v)\bar{n}(u, v)$, donde $\epsilon(u, v) = \pm 1$. Es claro que ϵ es una función continua en un conexo, luego ha de ser constante. En definitiva, $n(u, v) = \pm \bar{n}(u, v)$. Resulta, pues, que en un entorno de cada punto de S existen exactamente dos determinaciones opuestas del vector normal. A cualquiera de ellas la llamaremos también *aplicación de Gauss* de la superficie.

Si llamamos $G \subset S$ a la imagen de X , la aplicación n induce otra aplicación $n : G \rightarrow S^2$, donde S^2 es la esfera de centro $(0, 0, 0)$ y radio 1, que está unívocamente determinada en un entorno de cada punto excepto por su signo.

Es importante notar que no siempre es posible extender esta aplicación n a toda la superficie S (sin perder la continuidad).

Ejemplo Consideremos de nuevo la cinta de Möbius M . Un simple cálculo muestra que, sobre la circunferencia $X(u, 0)$, se cumple que

$$X_u \times X_v = (\pi \cos 2\pi u \operatorname{sen} \pi u, \pi \operatorname{sen} 2\pi u \operatorname{sen} \pi u, -\pi \cos \pi u)$$

cuyo módulo es π , por lo que

$$n(u, 0) = (\cos 2\pi u \operatorname{sen} \pi u, \operatorname{sen} 2\pi u \operatorname{sen} \pi u, -\cos \pi u)$$

Si se pudiera definir una aplicación continua $N : M \rightarrow S^2$ que fuera perpendicular a M en cada punto, tendría que ser $n(u, 0) = \alpha(u)N(X(u, 0))$, donde $\alpha(u) = n(u, 0) \cdot N(X(u, 0))$ sería una función continua igual a ± 1 en cada $u \in \mathbb{R}$, luego sería constante. Sin embargo,

$$n(0, 0) = (0, 0, -1), \quad n(1, 0) = (0, 0, 1),$$

mientras que $X(0, 0) = X(1, 0) = (1, 0, 0)$, luego $N(1, 0, 0)$ tendría que ser a la vez dos vectores opuestos.

Esto significa que si desplazamos de forma continua un vector normal a M hasta dar una vuelta completa a la cinta, terminamos con el vector apuntando en sentido opuesto al vector de partida, por lo que no es posible asignar de forma continua un vector normal a cada punto.

No vamos a entrar en ello aquí, pero esto se expresa diciendo que la cinta de Möbius es una variedad diferencial *no orientable*. ■

En la sección anterior hemos estudiado la componente tangencial (o geodésica) de la curvatura de una curva contenida en una variedad. Del mismo modo podemos definir la curvatura normal como el módulo de la componente normal de la segunda derivada. En el caso de las superficies en \mathbb{R}^3 podemos apoyarnos en la aplicación de Gauss:

Definición 7.35 Sea S una superficie (al menos de clase C^2) y α una curva contenida en S parametrizada por el arco y que pase por un punto p . Fijada una determinación n del vector normal a S alrededor de p , llamaremos *curvatura normal* de α a $\kappa_n = \alpha'' \cdot n$. Definimos $N_n = \kappa_n n$ y $N_t = \alpha'' - N_n$.

Notemos que el signo de κ_n depende de la determinación que elijamos de la aplicación de Gauss. Supongamos que sobre una carta la curva es $(u(t), v(t))$. Entonces

$$\alpha' = X_u u' + X_v v', \quad \alpha'' = X_{uu} u'^2 + X_u u'' + X_{uv} u' v' + X_{vu} u' v' + X_{vv} v'^2 + X_v v'',$$

luego

$$\kappa_n = \alpha'' \cdot n = (X_{uu} n) u'^2 + 2(X_{uv} n) u' v' + (X_{vv} n) v'^2.$$

Llamamos

$$e = X_{uu} n, \quad f = X_{uv} n, \quad g = X_{vv} n,$$

que son funciones de la carta X (salvo por el signo, que depende de la elección del sentido de n). Si la parametrización de la curva no es la natural y $s(t)$ es la longitud de arco, usamos la regla de la cadena:

$$\frac{du}{dt} = \frac{du}{ds} \frac{ds}{dt}, \quad \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds} \frac{ds}{dt},$$

con la que la fórmula, llamando ahora u' , v' , s' a las derivadas respecto de t (hasta ahora eran las derivadas respecto de s), se convierte en

$$\kappa_n = \frac{e u'^2 + 2f u'v' + g v'^2}{s'^2}.$$

Observemos que esta expresión no depende de la curva (u, v) , sino sólo de su derivada (u', v') (recordemos que $s' = \|(u', v')\|$). De aquí deducimos:

Teorema 7.36 (Teorema de Meusnier) *Si S es una superficie, todas las curvas contenidas en S que pasan por un punto p con un mismo vector tangente tienen la misma curvatura normal. Ésta viene dada por*

$$\kappa_n = \frac{e du^2 + 2f dudv + g dv^2}{E du^2 + 2F dudv + G dv^2}.$$

DEMOSTRACIÓN: Es claro que X es una carta alrededor de p y α es una curva contenida en S que pasa por p con vector tangente w , entonces la representación de α en la carta X es $X^{-1} \circ \alpha$, luego el vector tangente de esta representación —el que en la discusión previa al teorema llamábamos (u', v') — es $(du(p)(w), dv(p)(w))$, donde ahora u y v son las funciones coordenadas de X .

Así pues, la fórmula que habíamos obtenido nos da que

$$\kappa_n(p)(w) = \frac{e(p) du(p)^2(w) + 2f(p) du(p)(w)dv(p)(w) + g(p) dv(p)^2(w)}{E(p) du(p)^2(w) + 2F(p) du(p)(w)dv(p)(w) + G dv(p)^2(w)},$$

entendiendo aquí a e , f , g como las composiciones con X^{-1} de las funciones del mismo nombre que teníamos definidas. ■

Vemos así que la curvatura normal de las curvas que pasan por un punto p expresa (salvo el signo) una característica intrínseca de la superficie S , que no depende de la elección de las curvas, sino únicamente de su vector tangente en $T_p(S)$. Vamos a precisar esta idea:

Definición 7.37 El elemento de longitud de una superficie S se conoce también con el nombre que le dio Gauss: *la primera forma fundamental* de S . Definimos la *segunda forma fundamental* de S como la aplicación que a $p \in S$ y cada vector $w \in T_p(S)$ le asigna la curvatura normal en p de las curvas contenidas en S que pasan por p con tangente w multiplicada por $\|w\|^2$.

El teorema anterior prueba que la segunda forma fundamental es en cada punto p una forma cuadrática definida sobre $T_p(S)$. Concretamente, si fijamos una carta tenemos

$$F^1 = E du^2 + 2F dudv + G dv^2, \quad F^2 = e du^2 + 2f dudv + g dv^2.$$

Ambas formas cuadráticas pueden considerarse definidas tanto sobre la superficie S como sobre el dominio de la carta (en cuyo caso du y dv representan simplemente las proyecciones de \mathbb{R}^2). Sin embargo, una diferencia importante es que, aunque las expresiones anteriores son válidas únicamente sobre el rango de una carta, la primera forma fundamental está definida sobre toda la superficie y está completamente determinada por la misma, mientras que la segunda sólo la tenemos definida en un entorno de cada punto y además salvo signo.

Para calcular explícitamente la segunda forma fundamental de una superficie notamos que

$$e = X_{uu}n = X_{uu} \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|} = \frac{(X_{uu}, X_u, X_v)}{\sqrt{EG - F^2}},$$

e igualmente

$$f = \frac{(X_{uv}, X_u, X_v)}{\sqrt{EG - F^2}}, \quad g = \frac{(X_{vv}, X_u, X_v)}{\sqrt{EG - F^2}}.$$

Ejemplo Los coeficientes de la segunda forma fundamental de la superficie de revolución generada por la curva $(r(u), z(u))$ son

$$e = \frac{z''(u)r'(u) - z'(u)r''(u)}{\sqrt{r'(u)^2 + z'(u)^2}}, \quad f = 0, \quad g = \frac{z'(u)r(u)}{\sqrt{r'(u)^2 + z'(u)^2}}. \quad \blacksquare$$

El lector puede comprobar los resultados de la tabla siguiente:

	$r(u)$	$z(u)$	e	g
Cilindro	r	u	0	r
Cono	$u \tan \alpha$	u	0	$u \operatorname{sen} \alpha$
Esfera	$r \cos u$	$r \operatorname{sen} u$	r	$r \cos^2 u$
Exponencial	u	$\log u$	$-\frac{1}{u\sqrt{u^2+1}}$	$\frac{u}{\sqrt{u^2+1}}$
Catenoide	u	$\operatorname{arcosh} u$	$-\frac{1}{u^2-1}$	1
Pseudoesfera	$l \operatorname{sen} u$	$l \cos u + l \log \tan \frac{u}{2}$	$-l \cot u $	$l \operatorname{sen} u \cos u $
Toro	$R + r \cos u$	$r \operatorname{sen} u$	r	$(R + r \cos u) \cos u$

Según [Al 6.54], si F es una forma bilineal simétrica en un espacio euclídeo existe una base ortonormal en la que la matriz de F es diagonal. Podemos aplicar esto a un plano tangente $T_p(S)$ de una superficie tomando el producto escalar determinado por la primera forma fundamental y como F la segunda forma fundamental. Entonces concluimos que existe una base (e_1, e_2) de $T_p(S)$ en la cual las expresiones en coordenadas de las formas fundamentales es

$$F^1(x, y) = x^2 + y^2 \quad \text{y} \quad F^2(x, y) = \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2.$$

Los números λ_1 y λ_2 son los valores propios de cualquiera de las matrices de F^2 en cualquier base ortonormal de $T_p(S)$, luego están unívocamente determinados salvo por el hecho de que un cambio de carta puede cambiar sus signos.

Reciben el nombre de *curvaturas principales* de S en p . El menor de los dos recibe el nombre de *curvatura mínima* y el mayor *curvatura máxima* de S en p , pues se trata del menor y el mayor valor que toma F^2 entre los vectores de norma 1. En efecto, suponiendo, por ejemplo, $\lambda_1 \leq \lambda_2$, tenemos que

$$\lambda_1 = \lambda_1(x^2 + y^2) \leq \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = F^2(x, y) \leq \lambda_2(x^2 + y^2) = \lambda_2.$$

Si $w \in T_p(S)$ tiene norma arbitraria entonces aplicamos esto a $w/\|w\|$ y concluimos que

$$\lambda_1 \leq \frac{F^2(w)}{F^1(w)} \leq \lambda_2,$$

es decir, $\lambda_1 \leq \kappa_n \leq \lambda_2$. Así pues, λ_1 y λ_2 son la menor y la mayor curvatura normal que alcanzan las curvas que pasan por p . Además se alcanzan en direcciones perpendiculares e_1 y e_2 , llamadas *direcciones principales* en p . Notemos que puede ocurrir $\lambda_1 = \lambda_2$, en cuyo caso la curvatura normal es la misma en todas direcciones y no hay direcciones principales distinguidas. Los puntos de S donde $\lambda_1 = \lambda_2$ se llaman *puntos umbilicales*.

Veamos ahora cómo calcular las direcciones principales en una carta. Consideremos la fórmula de Meusnier como función (diferenciable) de dos variables. Si (du, dv) marca una dirección principal⁷ entonces κ_n es máximo o mínimo en este punto, luego el teorema 5.35 afirma que sus derivadas parciales han de anularse en él. Así pues, se ha de cumplir

$$\begin{aligned} \frac{\partial \kappa_n}{\partial du} &= \frac{2(e du + f dv)}{F^1(du, dv)} - \frac{2(E du + F dv)}{F^1(du, dv)^2} F^2(du, dv) = 0, \\ \frac{\partial \kappa_n}{\partial dv} &= \frac{2(f du + g dv)}{F^1(du, dv)} - \frac{2(F du + G dv)}{F^1(du, dv)^2} F^2(du, dv) = 0. \end{aligned}$$

Despejando obtenemos

$$\begin{aligned} \kappa_n &= \frac{F^2(du, dv)}{F^1(du, dv)} = \frac{e du + f dv}{E du + F dv}, \\ \kappa_n &= \frac{F^2(du, dv)}{F^1(du, dv)} = \frac{f du + g dv}{F du + G dv}. \end{aligned} \tag{7.12}$$

Al igualar ambas ecuaciones obtenemos una condición necesaria para que un vector indique una dirección principal. Es fácil ver que puede expresarse en la forma:

$$\begin{vmatrix} dv^2 & -dudv & du^2 \\ E & F & G \\ e & f & g \end{vmatrix} = 0.$$

⁷Aquí podemos considerar $(du, dv) \in \mathbb{R}^2$. La notación diferencial está motivada por lo siguiente: Fijada una carta con coordenadas u, v , una curva regular en la superficie viene determinada por una representación coordenada $(u(t), v(t))$. El vector tangente a la curva en un punto dado marcará una dirección principal si y sólo si la fórmula de Meusnier evaluada en $(u'(t), v'(t))$ toma un valor máximo o mínimo, pero dicha fórmula depende sólo de las diferenciales $(du(t), dv(t))$, por lo que en realidad buscamos una relación entre du y dv .

Si (E, F, G) (en un punto) es múltiplo de (e, f, g) entonces la ecuación se cumple trivialmente, pero por otra parte es claro que la curvatura normal es constante y no hay direcciones principales. En caso contrario es claro que tenemos una forma cuadrática con al menos dos coeficientes no nulos. Si suponemos, por ejemplo, que el coeficiente de dv^2 es no nulo, entonces $du \neq 0$, y al dividir entre du^2 la forma cuadrática se convierte en una ecuación de segundo grado en la razón dv/du . Esta ecuación tiene a lo sumo dos soluciones linealmente independientes, luego éstas han de ser necesariamente las direcciones principales. Por consiguiente la ecuación caracteriza dichas direcciones.

Un caso especialmente simple se da cuando $F = f = 0$ (en un punto). Entonces la ecuación se reduce a $(Eg - eG)dudv = 0$, por lo que las direcciones principales son $(1, 0)$ y $(0, 1)$, luego las curvaturas principales son

$$\lambda_1 = \frac{e}{E}, \quad \lambda_2 = \frac{f}{F}.$$

Esto sucede en particular en todos los puntos de una superficie de revolución respecto de la carta que estamos considerando en ella, por lo que las direcciones principales son las determinadas por los meridianos y los paralelos. Tenemos, pues, la tabla siguiente:

	E	G	e	g	λ_1	λ_2
Cil.	1	r	0	r	0	$\frac{1}{r}$
Cono	$\frac{1}{\cos^2 \alpha}$	$u^2 \tan^2 \alpha$	0	$u \sin \alpha$	0	$\frac{\cos^2 \alpha}{u \sin \alpha}$
Esf.	r^2	$r^2 \cos^2 u$	r	$r \cos^2 u$	$\frac{1}{r}$	$\frac{1}{r}$
Exp.	$1 + \frac{1}{u^2}$	u^2	$-\frac{1}{u\sqrt{u^2+1}}$	$\frac{u}{\sqrt{u^2+1}}$	$-\frac{u}{\sqrt{(u^2+1)^3}}$	$\frac{1}{u\sqrt{u^2+1}}$
Cat.	$\frac{u^2}{u^2-1}$	u^2	$-\frac{1}{u^2-1}$	1	$-\frac{1}{u^2}$	$\frac{1}{u^2}$
Pseud.	$l^2 \cot^2 u$	$l^2 \sin^2 u$	$-l \cot u $	$l \sin u \cos u $	$-\frac{ \tan u }{l}$	$\frac{1}{l \tan u }$
Toro	r^2	$(R + r \cos u)^2$	r	$(R + r \cos u) \cos u$	$\frac{1}{r}$	$\frac{\cos u}{R + r \cos u}$

Vemos así que, por ejemplo, los meridianos del cilindro tienen la mínima curvatura normal posible (curvatura nula), mientras que los paralelos tienen la máxima posible, que es la curvatura $1/r$ de la circunferencia de radio r .

Algo similar ocurre en un cono, donde la curvatura normal de los meridianos es nula y la de los paralelos es mayor en módulo cuanto más cerca está el punto del vértice.

Por el contrario, en una esfera todos los puntos son umbilicales: la curvatura normal es siempre $1/r$, la curvatura de los círculos máximos que pasan por cada punto.

En principio, las curvaturas principales λ_1 y λ_2 pueden considerarse una descripción satisfactoria de la curvatura de una superficie en cada punto, pues nos indican entre qué valores se mueve la curvatura normal de la superficie en las distintas direcciones posibles y, más aún, nos dice que la curvatura normal en la dirección de coordenadas $(\cos t, \sin t)$ respecto de las direcciones principales es $\lambda_1 \cos^2 t + \lambda_2 \sin^2 t$. Si queremos resumir esta información en un único número, tenemos varias alternativas:

Definición 7.38 Se llama *curvatura media* y *curvatura total o de Gauss* de una superficie S en un punto p a los números

$$H = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}, \quad K = \lambda_1 \lambda_2.$$

Notemos que el signo de H depende de la carta, mientras que el de K es invariante. Si operamos en (7.12) obtenemos

$$\begin{aligned} (e - E\kappa_n)du + (f - F\kappa_n)dv &= 0, \\ (f - F\kappa_n)du + (g - G\kappa_n)dv &= 0. \end{aligned}$$

Puesto que el sistema tiene una solución no trivial en (du, dv) se ha de cumplir

$$\begin{vmatrix} e - E\kappa_n & f - F\kappa_n \\ f - F\kappa_n & g - G\kappa_n \end{vmatrix} = 0,$$

o equivalentemente

$$(EG - F^2)\kappa_n^2 - (eG - 2Ff + gE)\kappa_n + (eg - f^2) = 0.$$

Esta ecuación la cumplen las curvaturas principales $\kappa_n = \lambda_1, \lambda_2$ y por otro lado tiene sólo dos soluciones, luego, por las formulas de Vieta, que relacionan los coeficientes de un polinomio con sus raíces,

$$\begin{aligned} H &= \frac{eG - 2Ff + gE}{2(EG - F^2)}, \\ K &= \frac{eg - f^2}{EG - F^2}. \end{aligned} \tag{7.13}$$

En particular vemos que la curvatura de Gauss es el cociente de los determinantes de las dos formas fundamentales.

La interpretación de la curvatura media es simplemente la que indica su nombre: nos da un promedio de la curvatura normal de S en un punto p en las distintas direcciones posibles, aunque esto hay que entenderlo correctamente. Por ejemplo, la curvatura media de la catenoide es 0, pero eso no indica que la catenoide no esté curvada, sino únicamente que las curvaturas máxima y mínima tienen el mismo módulo y signos opuestos.

En cambio, la curvatura de Gauss puede parecer forzada: ¿qué sentido tiene multiplicar curvaturas? Por ejemplo, en el caso de un cilindro o un cono, la curvatura de Gauss es 0 por el simple hecho de que la curvatura de los meridianos es nula, lo cual oculta por completo la curvatura de los paralelos. Sin embargo, la curvatura de Gauss resulta ser una magnitud crucial en el estudio de las superficies. No vamos a tener ocasión de apreciar aquí toda su importancia, pero sí que podremos hacernos una idea de por qué es tan relevante.

En primer lugar es fácil interpretar su signo que, como ya hemos señalado, no depende de la elección de la carta con la que se calcula:

	λ_1	λ_2	K
Cilindro	0	$\frac{1}{r_2}$	0
Cono	0	$\frac{\cos^2 \alpha}{u \operatorname{sen} \alpha}$	0
Esfera	$\frac{1}{r}$	$\frac{1}{r}$	$\frac{1}{r^2}$
Exponencial	$-\frac{u}{\sqrt{(u^2+1)^3}}$	$\frac{1}{u\sqrt{u^2+1}}$	$-\frac{1}{(u^2+1)^2}$
Catenoide	$-\frac{1}{u^2}$	$\frac{1}{u^2}$	$-\frac{1}{u^4}$
Pseudoesfera	$-\frac{ \tan u }{l}$	$\frac{1}{l \tan u }$	$-\frac{1}{l^2}$
Toro	$\frac{1}{r}$	$\frac{\cos u}{R+r \cos u}$	$\frac{\cos u}{r(R+r \cos u)}$

Definición 7.39 Un punto p de una superficie S es *elíptico* o *hiperbólico* según si $K(p) > 0$ o $K(p) < 0$. Si $K(p) = 0$ distinguiremos entre puntos *parabólicos*, cuando sólo una de las curvaturas principales es nula, y puntos *planos*, cuando las dos curvaturas principales son nulas.

Si un punto es elíptico todas las curvas que pasan por él tienen la curvatura normal del mismo signo, por lo que la superficie se curva toda hacia el mismo lado del plano tangente, como es el caso de la esfera o del toro. Si un punto es hiperbólico entonces hay curvas (perpendiculares, de hecho) que pasan por él con curvaturas en sentidos opuestos, luego la superficie tiene puntos próximos a ambos lados del plano tangente.

Por ejemplo, si apoyamos un toro sobre un plano y ponemos otro plano sobre él, los puntos de contacto con cada plano forman dos circunferencias, correspondientes a los puntos con coordenadas $u = \pm\pi/2$, cuyos puntos son todos parabólicos. Estas circunferencias dividen el toro en dos mitades, una exterior formada por puntos elípticos y otra interior formada por puntos parabólicos.

Ejemplo El toro no tiene puntos planos, pues una de las curvaturas principales en cada punto vale siempre $1/r$. Como ejemplo de superficie con puntos planos podemos considerar la determinada por la ecuación

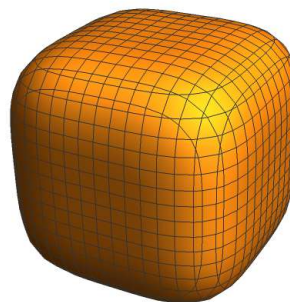
$$x^4 + y^4 + z^4 = 1,$$

representada en la figura. Aunque parezca “un cubo”, ninguna de sus caras es completamente plana, pero el punto central de cada una de ellas es un punto plano. En efecto, una carta alrededor de la cara superior es

$$X(u, v) = (u, v, \sqrt[4]{1 - u^4 - v^4}),$$

de modo que

$$X_u = (1, 0, -u^3(1 - u^4 - v^4)^{-3/4}), \quad X_v = (0, 1, -v^3(1 - u^4 - v^4)^{-3/4}),$$



luego

$$E = 1 + u^6(1 - u^4 - v^4)^{-3/2}, \quad F = u^6(1 - u^4 - v^4)^{-3/2}, \quad G = 1 + v^6(1 - u^4 - v^4)^{-3/2},$$

que para el punto $(u, v) = (0, 0)$ se reducen a $E = 1, F = 0, G = 1$. Por otro lado,

$$X_{uu} = (0, 0, -3u^2(1 - u^4 - v^4)^{-3/4} + 12u^6(1 - u^4 - v^4)^{-7/4}),$$

que en $(u, v) = (0, 0)$ se reduce al vector nulo, al igual que X_{uv} y que X_{vv} , de donde se sigue que, en dicho punto, $e = f = g = 0$. Es claro entonces que $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, por lo que el punto $X(0, 0) = (0, 0, 1)$ es un punto plano. ■

Otro ejemplo obvio es que los puntos de un plano son claramente puntos planos.

Para interpretar geoméricamente el valor absoluto de la curvatura de Gauss necesitamos primero una caracterización algebraica: Observemos que si n es una determinación del vector normal alrededor de un punto p en una superficie S y llamamos S^2 a la esfera de centro $(0, 0, 0)$ y radio 1, entonces

$$dn(p) : T_p(S) \longrightarrow T_{n(p)}(S^2),$$

pero como $n(p)$ es perpendicular a $T_p(S)$, en realidad $T_{n(p)}(S^2) = T_p(S)$, luego podemos considerar a $dn(p)$ como un endomorfismo de $T_p(S)$.

Teorema 7.40 *Sea S una superficie y n una determinación del vector normal alrededor de un punto p . Entonces $K(p) = |dn(p)|$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea X una carta alrededor de p . Entonces una base de $T_p(S)$ la forman los vectores X_u y X_v . Llamemos $n(u, v)$ a $X \circ n$. Entonces

$$\begin{aligned} dn(p)(X_u) &= dn(p)(dX(u, v)(1, 0)) = dn(u, v)(1, 0) = n_u, \\ dn(p)(X_v) &= dn(p)(dX(u, v)(0, 1)) = dn(u, v)(0, 1) = n_v. \end{aligned}$$

Si expresamos

$$\begin{aligned} n_u &= aX_u + bX_v \\ n_v &= cX_u + dX_v \end{aligned}$$

entonces el determinante de $dn(p)$ es el de la matriz formada por a, b, c, d . Notemos que derivando las igualdades $nX_u = nX_v = 0$ se deduce la relación $n_uX_u = -nX_{uu} = -e$ y similarmente $n_uX_v = n_vX_u = -f, n_vX_v = -g$.

Por consiguiente al multiplicar las ecuaciones anteriores por X_u y X_v obtenemos

$$-e = aE + bF, \quad -f = aF + bG, \quad -f = cE + dF, \quad -g = cF + dG,$$

de donde

$$-\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}.$$

Tomando determinantes concluimos que

$$eg - f^2 = |dn(p)|(EG - F^2),$$

luego efectivamente $|dn(p)| = K(p)$. ■

Ahora consideremos un punto p en una superficie S , sea $n : V \rightarrow S^2$ una determinación del vector normal a S en un entorno de p y tomemos cualquier conjunto de Borel no nulo $p \in E \subset V$. Entonces, al recorrer los puntos de E , el vector normal recorre un subconjunto $n[E] \subset S^2$, y podemos comparar sus áreas mediante el cociente

$$\frac{m(n[E])}{m(E)}.$$

Este cociente no es exactamente la curvatura de S en p , pero converge a su valor absoluto cuando E tiende a p en el sentido del teorema 7.24. De hecho, la caracterización siguiente fue lo que Gauss tomó como definición de la curvatura de una superficie:

Teorema 7.41 *Sea S una superficie y p un punto en el que la curvatura no sea nula. Sea n una determinación del vector normal en un entorno de p . Entonces*

$$|K(p)| = \lim_{E \rightarrow p} \frac{m(n[E])}{m(E)},$$

donde el límite se entiende en el mismo sentido que en el teorema 7.24.

DEMOSTRACIÓN: Por el teorema 7.40 sabemos que $K(p)$ es el determinante de $dn(p)$, luego ésta diferencial es un isomorfismo. Sea g una carta alrededor de p y sea $h = g \circ n$. Es fácil ver que h puede restringirse hasta una carta alrededor de $n(p)$ en la esfera unidad. Del teorema 7.24 se sigue que

$$\lim_{E \rightarrow p} \frac{m(E)}{m(E_t)} = 1, \quad \lim_{E \rightarrow p} \frac{m(n[E])}{m(n[E]_t)} = 1,$$

y por otra parte $n[E]_t = dn(p)[E_t]$, luego $m(n[E]_t) = |K(p)|m(E_t)$, de donde se sigue claramente el teorema. ■

Así, por ejemplo, si consideramos todos los vectores normales en los puntos que rodean a un punto de un cilindro, todos ellos estarán sobre un mismo arco de circunferencia en la esfera S^2 , y como los arcos de circunferencia tienen medida nula, por eso la curvatura en un cilindro es nula. En cambio, si hacemos lo mismo con un punto de una esfera de radio r , el vector normal recorrerá en S^2 el conjunto homotético a E , cuya medida será $m(n[E]) = (1/r^2)m(E)$, y de ahí que la curvatura en todo punto de la esfera sea $1/r^2$.

En general, un punto de una superficie tiene curvatura mayor (en valor absoluto) cuando, al mover el vector normal a su alrededor, el área recorrida en la esfera S^2 es mucho mayor en proporción al área recorrida en S , es decir, cuanto más trozo de esfera abarca el vector normal al moverse un poco alrededor del punto en S .

El teorema egregium Finalmente vamos a probar un hecho sorprendente que Gauss obtuvo sobre la curvatura que hoy lleva su nombre, y que es la razón de fondo de su relevancia en el estudio de las superficies. Para tratar de entender su significado, imaginemos un universo en el que hubiera planetas de todas las formas geométricas posibles. Imaginemos que estamos en uno de esos planetas y a nuestro alrededor vemos una vasta superficie aparentemente plana, pero, ¿estamos en un planeta plano, cilíndrico, esférico...?

Una forma de saber si nuestro planeta es plano sería mirar las estrellas. Si desde puntos distintos una misma estrella forma ángulos diferentes respecto de la vertical, podemos asegurar que nuestro planeta no es plano. Con ello, lo que estamos haciendo es medir las variaciones del vector normal en cada punto del planeta. De hecho, con esa clase de mediciones podríamos llegar a calcular incluso las curvaturas principales del planeta en cada punto. Pero, ¿y sin mirar las estrellas? ¿Podríamos saber si nuestro planeta es plano, cilíndrico o esférico sin más que realizar medidas entre puntos de la superficie del planeta?

Obviamente, si caminando en línea recta durante un tiempo suficiente volvemos al punto de partida, podremos asegurar que nuestro planeta no es plano, pero supongamos también que no podemos movernos tanto como para dar la vuelta al mundo. Imaginemos que estamos en un continente lo suficientemente extenso como para tomar medidas entre puntos suficientemente alejados como para que pequeñas discrepancias fueran apreciables, pero no tanto como para darle la vuelta al planeta. ¿Podemos en esas condiciones identificar si nuestro planeta es plano o curvo?

Hay algo que podemos concluir fácilmente: en esas condiciones es imposible distinguir si nuestro planeta es plano o cilíndrico. Una hoja plana se puede curvar hasta convertirla en un cilindro sin alterar las distancias entre sus puntos (prescindiendo del hecho de que puntos muy alejados pasarán a estar muy próximos al unirse los extremos opuestos de la hoja, pero eso no se puede apreciar si no podemos dar la vuelta al planeta). Por lo tanto, si estamos en un planeta plano, nunca podremos estar seguros de que no es cilíndrico, ni viceversa, porque si algún proceso geológico curvara nuestro planeta plano o aplanara nuestro planeta cilíndrico, eso no alteraría el resultado de ninguna medida que pudiéramos tomar sobre la superficie. Alteraría el punto del cielo en el que se ve cada estrella desde cada posición, o alteraría la posibilidad o no de dar la vuelta al planeta, pero no alteraría las medidas que podamos hacer sobre la superficie del planeta.

En cambio, una consecuencia de lo que Gauss llamó *theorema egregium* es que sí que podríamos discernir si nuestro planeta es plano o esférico sin más que realizar medidas sobre su superficie, porque la curvatura de Gauss se conserva por isometrías. Aunque hemos visto cómo calcularla analizando las variaciones del vector normal, también puede calcularse a partir de mediciones sobre la superficie del planeta. Por eso es imposible convertir una porción de esfera en una porción de plano sin deformarla, es decir, sin alterar las distancias entre sus puntos, y por eso el sueño de los cartógrafos de realizar un mapa de la Tierra o de una región de ella de modo que todas las distancias en el mapa sean proporcionales a las reales es imposible, porque ello supondría determinar una

isometría entre una porción de plano y una porción de esfera, y eso es imposible porque tienen curvaturas distintas.

Vamos a ver, pues, que aunque no es evidente en absoluto, la curvatura de Gauss se puede calcular considerando exclusivamente la primera forma fundamental (es decir, midiendo distancias sobre la superficie) sin tener en cuenta la segunda forma fundamental (sin medir las variaciones del vector normal).

Consideremos para ello las fórmulas (7.7) que definen los símbolos de Christoffel. Al particularizarlas al caso de una superficie se convierten en

$$\begin{aligned} X_{uu} &= \Gamma_{11}^1 X_u + \Gamma_{11}^2 X_v + en, \\ X_{uv} &= \Gamma_{12}^1 X_u + \Gamma_{12}^2 X_v + fn, \\ X_{vv} &= \Gamma_{22}^1 X_u + \Gamma_{22}^2 X_v + gn, \end{aligned}$$

(en principio la componente normal ha de ser de la forma αn para cierto α , y multiplicando la igualdad por n se sigue que $\alpha = e, f, g$ según el caso.)

De estas ecuaciones se sigue

$$\begin{aligned} X_{uu}X_{vv} - X_{uv}^2 &= eg - f^2 + (\Gamma_{11}^1\Gamma_{22}^1 - (\Gamma_{12}^1)^2)E \\ &+ (\Gamma_{11}^1\Gamma_{22}^2 + \Gamma_{11}^2\Gamma_{22}^1 - 2\Gamma_{12}^1\Gamma_{12}^2)F \\ &+ (\Gamma_{11}^2\Gamma_{22}^2 - (\Gamma_{12}^2)^2)G. \end{aligned}$$

Por otra parte, derivando respecto a v y u respectivamente las relaciones

$$X_{uu}X_v = F_u - \frac{1}{2}E_v, \quad X_{uv}X_v = \frac{1}{2}G_u$$

y restando los resultados obtenemos

$$X_{uu}X_{vv} - X_{uv}^2 = -\frac{1}{2}E_{vv} + F_{uv} - \frac{1}{2}G_{uu}.$$

En definitiva resulta la expresión

$$\begin{aligned} eg - f^2 &= -\frac{1}{2}E_{vv} + F_{uv} - \frac{1}{2}G_{uu} - (\Gamma_{11}^1\Gamma_{22}^1 - (\Gamma_{12}^1)^2)E \\ &- (\Gamma_{11}^1\Gamma_{22}^2 + \Gamma_{11}^2\Gamma_{22}^1 - 2\Gamma_{12}^1\Gamma_{12}^2)F \\ &- (\Gamma_{11}^2\Gamma_{22}^2 - (\Gamma_{12}^2)^2)G. \end{aligned}$$

Según hemos razonado tras la definición 7.30, el miembro derecho de la igualdad anterior depende únicamente de los coeficientes E, F, G de la primera forma fundamental y sus derivadas, y la fórmula (7.13) implica entonces que lo mismo vale para la curvatura de Gauss de un punto. Puesto que dos superficies localmente isométricas tienen cartas con los mismos coeficientes E, F, G , ya podemos concluir:

Teorema 7.42 (Teorema egregium de Gauss) *Las isometrías locales conservan la curvatura.*

Las ecuaciones (7.11) nos dan la siguiente expresión para la curvatura respecto a una carta con $F = 0$:

$$K = \frac{E_u G_u + E_v^2}{4E^2 G} + \frac{E_v G_v + G_u^2}{4EG^2} - \frac{E_{vv} + G_{uu}}{2EG}, \quad \text{si } F = 0.$$

Desde aquí es fácil deducir a su vez los siguientes casos particulares:

$$K = -\frac{1}{2A} \left(\frac{\partial^2 \log A}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \log A}{\partial v^2} \right), \quad \text{si } F = 0, \quad E = G = A,$$

$$K = -\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^2}, \quad \text{si } F = 0, \quad E = 1.$$

En particular, la curvatura de la superficie de revolución definida por una curva $(r(u), z(u))$ parametrizada por el arco (es decir, con $E = 1$) es

$$K = -\frac{r''(u)}{r(u)}.$$

Ejemplo Cabe señalar que el recíproco del *teorema egregium* no es cierto: un difeomorfismo entre dos superficies que conserve la curvatura no es necesariamente una isometría, ni las superficies tienen por qué ser isométricas, aunque sea con otro difeomorfismo. Un ejemplo nos lo proporcionan el cuerno exponencial y la catenoide. Si en la parametrización que estamos considerando del cuerno exponencial:

$$X(u, v) = (u \cos v, u \operatorname{sen} v, \log u), \quad u > 0,$$

hacemos el cambio de parámetro $u = \sqrt{\bar{u}^2 - 1}$, para $\bar{u} > 1$, obtenemos otra carta

$$X(u, v) = (\sqrt{u^2 - 1} \cos v, \sqrt{u^2 - 1} \operatorname{sen} v, \log \sqrt{u^2 - 1}), \quad u > 1,$$

respecto a la cual la curvatura es $K = -1/u^4$, es decir, la misma que la de la catenoide. Concretamente:

	E	G	e	g	λ_1	λ_2	K
Exp.	$\frac{u^4}{(u^2-1)^2}$	$u^2 - 1$	$-\frac{u}{\sqrt{(u^2-1)^3}}$	$\frac{\sqrt{u^2-1}}{u}$	$-\frac{\sqrt{u^2-1}}{u^3}$	$\frac{1}{u\sqrt{u^2-1}}$	$-\frac{1}{u^4}$
Cat.	$\frac{u^2}{u^2-1}$	u^2	$-\frac{1}{u^2-1}$	1	$-\frac{1}{u^2}$	$\frac{1}{u^2}$	$-\frac{1}{u^4}$

Esto significa que si llamamos

$$Y(u, v) = (u \cos v, u \operatorname{sen} v, \operatorname{arccosh} v), \quad u > 1$$

a la carta de la catenoide, la aplicación $f = X^{-1} \circ Y$ es un difeomorfismo entre ambas superficies tal que la curvatura del cuerno en un punto p es la misma que la de la catenoide en $f(p)$. Sin embargo, las dos superficies no son isométricas. Ni siquiera son localmente isométricas.

En efecto, imaginemos que existiera una isometría $f : W_1 \rightarrow W_2$ de un abierto W_1 del cuerno exponencial en un abierto W_2 de la catenoide. Llamemos $\tilde{f} : U_1 \rightarrow U_2$ a la composición $X \circ f \circ Y^{-1}$. Restringiendo f podemos suponer que $U_1 = X^{-1}[W_1] =]u_0 - \epsilon, u_0 + \epsilon[\times]v_0 - \epsilon, v_0 + \epsilon[$.

Por cada punto $X(u, v) \in W_1$ pasa una única geodésica (el paralelo correspondiente) que tiene la propiedad de estar formada por puntos con curvatura constante (igual a $-1/u^4$) y, como las isometrías conservan la curvatura, la imagen por f de dicha geodésica tiene que ser la geodésica que pasa por $f(X(u, v))$ con la misma curvatura $-1/u^4$, luego concluimos que f transforma arcos de paralelo en arcos de paralelo. Más precisamente, la primera función coordenada de \tilde{f} tiene que ser $\tilde{f}_1(u, v) = u$. En particular, $\tilde{f}(u_0, v_0) = (u_0, v_1)$.

Por otro lado, el meridiano $\alpha(u) = X(u, v_0)$ es una curva con la propiedad de que corta ortogonalmente a todos los paralelos (a todas las geodésicas sobre las que la curvatura es constante), luego su imagen por f tiene que ser también una curva con esta misma propiedad, es decir, tiene que ser una curva que pase por $f(X(u_0, v_0))$ que corte ortogonalmente a todos los paralelos.

Ahora bien, si una curva $\gamma(t)$ tiene, respecto de la carta Y , la expresión coordenada $(u(t), v(t))$, que $\gamma'(t)$ sea ortogonal al vector tangente al paralelo que pasa por $\gamma(t)$ equivale a que, sobre la carta, el vector $(u'(t), v'(t))$ sea ortogonal al vector $(0, 1)$ respecto al tensor métrico de la catenoide, lo que se traduce en que $G(t)v'(t) = 0$, o también en que $v'(t) = 0$, luego v es constante y, por consiguiente, γ es un meridiano.

Así pues, la imagen del meridiano $\alpha(u) = X(u, v_0)$ tiene que ser el meridiano $Y(u, v_1)$, y como $\tilde{f}_1(u) = u$, concretamente, tiene que ser $\tilde{f}(u, v_0) = (u, v_1)$. Por último, como f tiene que conservar la longitud de cualquier arco de este meridiano, para todo $u_0 < t < u_0 + \epsilon$ se tiene que cumplir

$$\int_{u_0}^t \sqrt{\frac{u^4}{(u^2 - 1)^2}} du = \int_{u_0}^t \sqrt{\frac{u^2}{u^2 - 1}} du.$$

Derivando respecto de t resulta que, para todo $u_0 - \epsilon < t < u_0 + \epsilon$,

$$\frac{t^2}{t^2 - 1} = \sqrt{\frac{t^2}{t^2 - 1}},$$

lo cual es absurdo. ■

Hemos visto que una esfera de radio r tiene curvatura constante $1/r^2$, luego las esferas proporcionan ejemplos de superficies con cualquier curvatura constante $K > 0$. Similarmente, la pseudoesfera de parámetro l tiene curvatura constante $-1/l^2$, luego las pseudoesferas proporcionan ejemplos de superficies con cualquier curvatura constante $K < 0$. Por último, los planos son superficies de curvatura constante $K = 0$.

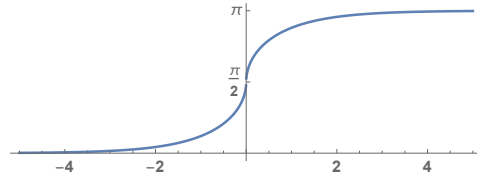
La pseudoesfera Consideremos con más detalle la pseudoesfera, que es la superficie de revolución de la tractriz

$$(r(u), z(u)) = (l \operatorname{sen} u, l \cos u + l \log \tan \frac{u}{2}), \quad 0 < u < \pi, \quad u \neq \frac{\pi}{2}.$$

Por consiguiente, la pseudoesfera admite cartas de la forma

$$X(u, v) = \left(l \operatorname{sen} u \cos v, l \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v, l \cos u + l \log \tan \frac{u}{2} \right).$$

En la sección [IC B.4] vimos que la longitud de arco de la tractriz viene dada por $w = -l \log \operatorname{sen} u$, de modo que $u(w) = \operatorname{arcsen} e^{-|w|/l}$ es una función biyectiva $u : \mathbb{R} \rightarrow]0, \pi[$, derivable excepto en 0, si convenimos en que cuando $w < 0$ tomamos el arco seno en $]0, \pi/2[$ y cuando $w > 0$ lo tomamos en $] \pi/2, \pi[$:



Así obtenemos la parametrización por el arco de la tractriz:

$$(r(w), z(w)) = (l e^{-|w|/l}, l \cos u(w) + l \log \tan \frac{u(w)}{2}),$$

que a su vez determina una carta de la pseudoesfera respecto a la cual el tensor métrico está determinado por $E = 1$ (precisamente porque la tractriz está parametrizada por el arco) y $G = r(w)^2 = l^2 e^{-2|w|/l}$, con lo que el elemento de longitud es

$$ds^2 = dw^2 + l^2 e^{-2|w|/l} dv^2.$$

La expresión se simplifica aún más si hacemos el cambio de coordenadas $x = v$, $y = e^{w/l}$, para $w > 0$. De este modo obtenemos una carta de media pseudoesfera en la que x sigue siendo el ángulo de rotación y ahora $y \in]1, +\infty[$. Puesto que $dv = dx$ y $dw = (l/y) dy$, el tensor métrico se reduce a

$$ds^2 = \frac{l^2}{y^2} (dx^2 + dy^2).$$

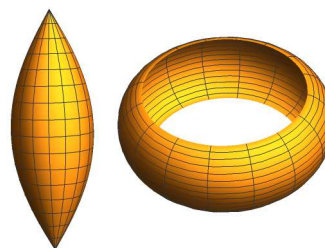
Observemos que las líneas coordenadas $y = \text{cte.}$ siguen siendo circunferencias y las de la forma $x = \text{cte.}$ siguen siendo tractrices, pero con una parametrización distinta de la dada por el arco. ■

Superficies de curvatura 1 Es interesante observar que también existen otras superficies de curvatura constante no nula aparte de las esferas. Por ejemplo, basta considerar las superficies de revolución determinadas por las curvas

$$(r(u), z(u)) = \left(c \cos u, \int_0^u \sqrt{1 - c^2 \operatorname{sen}^2 t} dt \right).$$

Si $0 < c \leq 1$, la función z está definida para $-\pi/2 < u < \pi/2$, mientras que si $c > 1$ tiene que cumplirse que $|\operatorname{sen} u| \leq 1/c$, por lo que u tiene que restringirse a un intervalo $-\delta < u < \delta$, concretamente con $\delta = \operatorname{arcsen}(1/c)$.

Para $c = 1$ la superficie es una esfera de radio 1, mientras que la figura siguiente muestra los casos $c = 0.5$ y $c = 1.5$. No es difícil comprobar que, para $0 < c < 1$, las superficies no son diferenciables en sus dos “picos”, mientras que para $c = 1$ tenemos simplemente una esfera de radio 1.



Notemos que $z'(u) = \sqrt{1 - c^2 \operatorname{sen}^2 u}$, y esto es todo lo necesario para calcular las formas fundamentales, etc. El lector puede comprobar los resultados que muestra la tabla siguiente:

E	G	e	g	λ_1	λ_2
1	$c^2 \cos^2 u$	$\frac{c \cos u}{\sqrt{1 - c^2 \operatorname{sen}^2 u}}$	$c \cos u \sqrt{1 - c^2 \operatorname{sen}^2 u}$	$\frac{c \cos u}{\sqrt{1 - c^2 \operatorname{sen}^2 u}}$	$\frac{\sqrt{1 - c^2 \operatorname{sen}^2 u}}{c \cos u}$

de donde llegamos a que la curvatura es $K = 1$ en todos los puntos. ■

Capítulo VIII

Introducción al cálculo vectorial

El cálculo vectorial es esencialmente el estudio analítico de campos vectoriales, es decir, de funciones diferenciables $\vec{F} : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ concebidas, no como transformaciones geométricas (giros, simetrías, homotecias, etc.) sino como aplicaciones que a cada punto del espacio le asignan un vector (una fuerza, una velocidad, etc.) Con la diferencia sutil entre puntos y vectores que introduce la geometría afín (o la geometría diferencial en una versión más abstracta que la que hemos expuesto en este libro), un campo de vectores no es una aplicación $E \rightarrow E$ de un espacio afín euclídeo en sí mismo, sino una aplicación $E \rightarrow \vec{E}$ de un espacio afín euclídeo en su espacio vectorial euclídeo asociado. Esta distinción desaparece cuando identificamos E y \vec{E} con \mathbb{R}^n , pero vuelve a aparecer en la formulación abstracta de la geometría diferencial, donde la diferencia entre puntos y vectores se vuelve abismal.

Un ejemplo típico de campo vectorial es el campo de velocidades de un fluido: si consideramos un fluido en movimiento (un líquido o un gas, como una corriente de agua, o el movimiento del aire en la atmósfera), tiene sentido considerar la velocidad del fluido en cada punto del espacio por el que fluye. Esto nos da un campo de velocidades $\vec{v} : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que es uno de los conceptos fundamentales de la mecánica de fluidos.

En física también son fundamentales los campos de fuerzas, como el campo que asigna a cada punto del espacio la intensidad de la gravedad en dicho punto (la fuerza gravitatoria que actuaría por unidad de masa sobre una partícula situada en dicho punto), etc.

El resultado central del cálculo vectorial es el conocido como teorema de Stokes generalizado, que no vamos a demostrar aquí, pues su formulación natural requiere el contexto de la geometría diferencial abstracta. En su lugar probaremos una de sus consecuencias, que es más que suficiente para un gran número de aplicaciones.

8.1 El teorema de la divergencia

El teorema de la divergencia, como muchos otros resultados del cálculo vectorial, relaciona lo que sucede en un conjunto con lo que sucede en su frontera. Un ejemplo elemental de este tipo de resultados es la regla de Barrow, que relaciona la integral de una función en un intervalo con el valor que toma una primitiva en sus extremos (que son su frontera). Para enunciar un resultado de estas características en dimensiones superiores necesitamos considerar abiertos Ω cuya frontera $\partial\Omega$ sea una variedad diferenciable y de modo que la relación entre las variedades Ω y $\partial\Omega$ carezca de ciertas patologías que podrían darse si no las excluimos con una definición adecuada. La definición es la siguiente:

Definición 8.1 *Un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, con $n \geq 2$, tiene frontera de clase C^k si, para cada punto $p \in \partial\Omega$ existen abiertos $U \subset \mathbb{R}^{n-1}$ y $V \subset \mathbb{R}^n$, con $p \in V$, una función $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^k , un $\delta > 0$ y un índice i_0 de modo que, si representamos por $[u, \alpha]_{i_0}$ la n -tupla que resulta de intercalar α en la posición i_0 en la n -tupla u , entonces*

$$\partial\Omega \cap V = \{[u, f(u)]_{i_0} \mid u \in U\}, \quad V = \{[u, \alpha]_{i_0} \in \mathbb{R}^n \mid u \in U, |\alpha - f(u)| < \delta\},$$

$$\Omega \cap V = \{[u, \alpha]_{i_0} \mid u \in U, \alpha < f(u)\} \quad \text{o} \quad \Omega \cap V = \{[u, \alpha]_{i_0} \mid u \in U, \alpha > f(u)\}.$$

Es claro que, en estas condiciones, $\partial\Omega$ es una variedad de clase C^k , pues en un entorno de cada punto es la gráfica de una función de clase C^k .

Ejemplo Veamos que una bola abierta

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < r\}$$

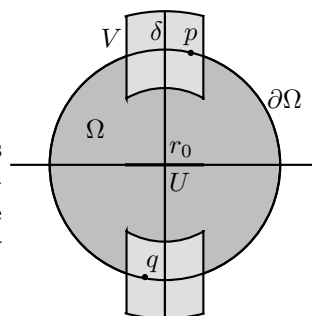
tiene frontera de clase C^∞ . Para ello consideramos cualquier punto $p \in \partial\Omega$, que tendrá alguna componente no nula. Por simplicidad supongamos que es $p_n \neq 0$. Entonces $\|(x_1, \dots, x_{n-1})\| < r_0 < r$ y consideramos la bola abierta

$$U = \{u \in \mathbb{R}^{n-1} \mid \|u\| < r_0\}$$

y la función $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(u) = \pm\sqrt{r^2 - \|u\|^2}$, donde el signo es el de p_n . Podemos tomar un $\delta > 0$ tal que el abierto

$$V = \{(u, x_n) \mid u \in U, |f(u) - x_n| < \delta\}$$

sólo tenga puntos con la n -sima coordenada del mismo signo que p_n . Es claro que con estos abiertos y esta función se cumple la definición anterior: los puntos de $\partial\Omega \cap V$ son precisamente la gráfica de f y los puntos de $\Omega \cap V$ son los puntos de V que están por encima o por debajo de la gráfica, según el signo de p_n . En la figura se muestra un punto p para el cual Ω está por debajo de la gráfica y otro q para el cual Ω está por encima de la gráfica. ■



Nota Para hacernos una idea de lo que acepta y lo que excluye la definición de abierto con frontera diferenciable, pensemos, por ejemplo que U es \mathbb{R}^3 menos un plano. Ciertamente se trata de un abierto, y su frontera es el plano que hemos eliminado, y es una variedad de clase C^∞ , pero U no es un abierto con frontera diferenciable, porque U se encuentra a los dos lados de su frontera, mientras que la definición exige que (localmente) los puntos de U estén sólo a uno de los dos lados posibles.

La definición exige que ∂U tenga dimensión $n - 1$, pero no exige que sea conexa. Por ejemplo, si a una esfera abierta le quitamos varias esferas cerradas menores disjuntas, obtenemos un abierto con frontera de clase C^∞ , cuya frontera es la unión de varias superficies esféricas. ■

En un abierto Ω con frontera de clase C^1 tiene sentido hablar del vector normal (al espacio tangente) unitario $N : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ que apunta hacia afuera de Ω . Concretamente, si $p \in \partial\Omega$ y $X(u) = (u, f(u))$ es una carta de $\partial\Omega$, donde f es una función en las condiciones de la definición anterior, en la prueba del teorema 7.25 hemos visto que un vector normal unitario es

$$N = \frac{1}{\sqrt{1 + \|\nabla f\|^2}}(-\nabla f, 1).$$

Concretamente, como la última coordenada es positiva, éste es el vector normal que apunta hacia arriba de la gráfica, por lo que apuntará hacia afuera de Ω si Ω está por debajo de la gráfica. En caso contrario, podemos cambiarle el signo a N para que apunte en la dirección deseada.

Observemos que la posibilidad de elegir N con un criterio “natural” como es pedir que apunte hacia afuera de Ω , se traduce en que es posible definir un vector normal unitario continuo $N : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, por lo que las fronteras de los abiertos con frontera diferenciable son siempre variedades orientables.

Con esto podemos definir uno de los conceptos fundamentales del cálculo vectorial:

Definición 8.2 Sea $S \subset \mathbb{R}^n$ una variedad diferenciable compacta de dimensión $n - 1 \geq 1$ y $\vec{n} : S \rightarrow \mathbb{R}^n$ una aplicación continua que a cada punto $p \in S$ le asigna un vector unitario ortogonal a $T_p(S)$. Sea V un abierto $S \subset V \subset \mathbb{R}^n$ y sea $\vec{F} : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vectorial de clase C^1 . Definimos el *flujo* de \vec{F} a través de S como la integral

$$\Phi = \int_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, d\sigma.$$

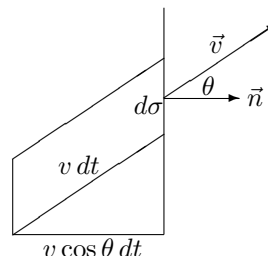
Notemos que el flujo depende de la elección de \vec{n} . Si cambiamos \vec{n} por $-\vec{n}$, el flujo cambia de signo.

Aunque, como veremos, el concepto de “flujo” tiene aplicaciones en los contextos más diversos, su interpretación natural se da en el contexto de la mecánica de fluidos. Por desgracia no contamos con el marco teórico necesario para

justificar con rigor dicha interpretación, así que nos conformaremos, a título meramente orientativo, con bosquejarla de forma no rigurosa.¹

Imaginemos un fluido (un líquido o un gas) que está en movimiento, de modo que en cada punto del espacio podemos hablar de la velocidad \vec{v} que tiene el fluido en ese punto (como la velocidad del viento en un punto dado). Fijemos un punto x del espacio en el seno del fluido y consideremos un entorno lo suficientemente pequeño como para que la velocidad \vec{v} sea prácticamente constante en la zona. Consideremos una superficie plana de área $d\sigma$ que contiene a x y sea \vec{n} uno de los dos posibles vectores unitarios normales a la superficie en el punto p . Podemos plantearnos qué volumen de fluido está atravesando la superficie por unidad de tiempo. Para ello consideramos un intervalo de tiempo dt lo suficientemente pequeño como para que la velocidad \vec{v} no sufra ningún cambio apreciable. Entonces la situación es la que muestra la figura:

El fluido que atravesará la superficie $d\sigma$ en un tiempo dt será el contenido en el cilindro de base $d\sigma$ (no necesariamente circular) y generatriz $v dt$, lo que corresponde a una altura $v \cos \theta dt$, donde θ es al ángulo que forman \vec{v} y \vec{n} , con lo que $v \cos \theta = \vec{v} \cdot \vec{n}$. El volumen de dicho cilindro será $dV = v \cos \theta dt d\sigma$, luego el volumen de fluido que atraviesa la superficie por unidad de tiempo será



$$\frac{dV}{dt} = \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma,$$

teniendo en cuenta que el resultado será positivo si el fluido atraviesa la superficie en la dirección de \vec{n} y negativo en caso contrario. Considerando que cada punto p de una superficie S tiene un entorno suficientemente pequeño como para que la región de S en dicho entorno sea prácticamente plana y entendiendo que al integrar las cantidades $\vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma$ estamos sumando (con su signo) todos los volúmenes de fluido que entran o salen por cada región diminuta de S , podemos decir que la integral

$$\Phi = \int_S \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma$$

representa el volumen neto de fluido que atraviesa la superficie S , entendiendo que se suman los volúmenes de fluido cuando éste atraviesa S en la dirección de \vec{n} y que se restan los que la atraviesan en la dirección contraria.

En particular, si S es la frontera que encierra un abierto Ω y \vec{n} es el vector normal que apunta hacia afuera de Ω , entonces el flujo de \vec{v} es el volumen neto de fluido que sale de Ω por unidad de tiempo, pues el que sale se cuenta positivamente y el que entra se cuenta negativamente.

Una variante de interés en esta interpretación consiste en observar que si el fluido tiene en cada punto una densidad ρ , entonces, en el “cálculo” anterior, la

¹Los razonamientos no rigurosos que suenan plausibles se dividen en dos tipos: los que son falaces (independientemente de que lleguen a una conclusión correcta o no) y los que se pueden justificar con rigor con el marco teórico adecuado. El que vamos a dar es de los segundos.

masa de fluido contenida en el cilindro será $d^2m = \rho \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma$ y concluiremos que la masa de fluido que atraviesa la superficie por unidad de tiempo es el flujo

$$\int_S \rho \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma.$$

Así pues, podemos pensar en el flujo Φ de un campo vectorial a través de una superficie S como el volumen neto de un fluido que la atraviesa (contado positivamente si lo hace en la dirección de \vec{n} y negativamente en caso contrario) si la velocidad en cada punto del fluido viene dada por \vec{F} , o como la masa de fluido si pensamos en \vec{F} como el producto de la densidad por la velocidad. ■

Ejemplo Supongamos que una corriente de agua fluye de modo que la velocidad del agua en cada punto viene dada por el campo $\vec{v} = (x + y + z, x - y, y - z)$. Vamos a calcular el volumen de agua que atraviesa cada una de las seis caras del cubo $[0, 1]^3$, tomando en cada una de ellas el vector normal que apunta hacia afuera del cubo.

En la cara contenida en el plano $x = 1$, el vector normal es $\vec{n} = (1, 0, 0)$, luego el flujo de agua es

$$\Phi_{x1} = \int_0^1 \int_0^1 (1 + y + z) dydz = 2.$$

Esto significa que por esta cara salen del cubo 2 m^3 de agua por segundo. En el plano $x = 0$ el vector normal es $\vec{n} = (-1, 0, 0)$, con lo que el flujo es

$$\Phi_{x0} = \int_0^1 \int_0^1 (-y - z) dydz = -1.$$

Por lo tanto, por esta cara entra en el cubo 1 m^3 de agua por segundo. Similarmente, en la cara contenida en el plano $y = 1$ el vector normal es $\vec{n} = (0, 1, 0)$, luego

$$\Phi_{y1} = \int_0^1 \int_0^1 (x - 1 + z) dx dz = 0.$$

Esto significa que en esa cara hay zonas por donde entra agua y zonas por donde sale (porque el integrando toma signos opuestos), pero el balance neto es que entra la misma que sale. En cambio, en el plano $y = 0$ el vector normal es $\vec{n} = (0, -1, 0)$, con lo que

$$\Phi_{y0} = \int_0^1 \int_0^1 (-x - z) dx dz = -1,$$

luego por esta cara entra 1 m^3 de agua por segundo. Similarmente,

$$\Phi_{z1} = \int_0^1 \int_0^1 (y - 1) dx dy = -\frac{1}{2}, \quad \Phi_{z0} = \int_0^1 \int_0^1 -y dx dy = -\frac{1}{2}.$$

En resumen, la situación es peculiar, pues del cubo están saliendo 2 m^3 de agua por segundo a la vez que entran $-1 + 0 - 1 - 1/2 - 1/2 = -3 \text{ m}^3$ de

agua por segundo. El flujo neto de agua que atraviesa la superficie del cubo es $\Phi = -1 \text{ m}^3$ por segundo, lo que significa que en el cubo “desaparece” 1 m^3 de agua por segundo.

Concluimos que el campo \vec{v} no es razonable como modelo de flujo de una corriente de agua. Con un campo “realista”, bajo el supuesto de que la densidad del agua no varía, el flujo neto debería ser 0.

Por ejemplo, el lector puede comprobar que si el campo de velocidades es $\vec{v} = (2x + y + z, x - y, y - z)$, entonces el flujo neto que atraviesa la superficie del cubo sí que da 0. Más aún, puede probar con cualquier otro cubo o cualquier otra superficie que rodee una porción de espacio (una esfera, un cilindro, etc.) y comprobará que el flujo siempre da 0. El teorema de la divergencia explica por qué. ■

Definición 8.3 Si $\vec{F} : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un campo vectorial (de clase C^1) definido en un abierto $V \subset \mathbb{R}^n$, definimos su *divergencia* como

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n}.$$

La interpretación de este concepto nos la proporcionará el teorema de la divergencia:

Teorema 8.4 (Teorema de la divergencia) Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, con $n \geq 2$ un abierto acotado con frontera de clase C^1 , sea $\vec{F} : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo de clase C^1 definido en un abierto $\bar{\Omega} \subset V \subset \mathbb{R}^n$ y sea $\vec{n} : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ el vector normal unitario que apunta hacia afuera de Ω . Entonces

$$\int_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \vec{n} \, d\sigma = \int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{F} \, dv.$$

Aquí usamos $d\sigma$ para referirnos a la medida de Lebesgue en la frontera $\partial\Omega$ y dv para referirnos a la medida de Lebesgue en Ω .

Notemos que, si interpretamos \vec{F} como el campo de velocidades de un fluido, el miembro izquierdo se interpreta como la “divergencia” (la diferencia) entre el fluido que sale de Ω y el que entra, y lo que prueba el teorema es que esta “divergencia” es la integral en Ω de la divergencia del campo.

Así, en el ejemplo anterior, $\operatorname{div} \vec{F} = 1 - 1 - 1 = -1$, por lo que el flujo total por la superficie del cubo debe ser

$$\int_{[0,1]^3} -1 \, dv = -1,$$

que es ciertamente lo que hemos obtenido. Observemos que la versión del teorema de la divergencia que hemos enunciado no nos permite concluir esto, porque un cubo no cumple la definición de “abierto con frontera diferenciable”, a causa de sus aristas, cuyos puntos no cumplen la definición (ni siquiera tenemos

definido el vector normal \vec{n} en un punto de una arista de un cubo). Luego veremos cómo modificar la prueba para cubrir casos como éste, pero de momento observemos que el campo alternativo $\vec{v} = (2x + y + z, x - y, y - z)$ que hemos propuesto al final del ejemplo anterior tiene divergencia nula, y ésa es la razón por la que su flujo a través de la frontera de cualquier abierto (acotado) con frontera diferenciable es necesariamente nulo.

Vamos a demostrar en primer lugar el teorema de la divergencia para el caso en que Ω es una bola abierta en \mathbb{R}^n , porque así se ve mejor la idea subyacente en la demostración, que en el caso general se oscurece entre tecnicismos. Conviene destacar que el caso de las esferas será suficiente para la mayoría de las aplicaciones. Después daremos un argumento general que no dependerá del caso particular demostrado previamente.

DEMOSTRACIÓN PARA UNA BOLA ABIERTA: Trasladando V , el campo y la bola si es preciso, es claro que no perdemos generalidad si suponemos que el centro de la bola es el origen de coordenadas, de modo que

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leq r^2\}, \quad \partial\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \cdots + x_n^2 = r^2\}.$$

Los dos términos de la igualdad son lineales en \vec{F} , luego, descomponiendo

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \cdots + \vec{F}_n,$$

donde $\vec{F}_i = (0, \dots, F_i, \dots, 0)$, basta probar la igualdad para cada campo \vec{F}_i . Consideramos, por ejemplo, \vec{F}_n o, equivalentemente, podemos suponer que el campo es de la forma $\vec{F} = (0, \dots, 0, F)$. Llamemos

$$D = \{u \in \mathbb{R}^{n-1} \mid \|u\| \leq r\}.$$

y consideremos las cartas $X_+, X_- : D \rightarrow S$ dadas por

$$X_{\pm}(u) = \left(u, \pm\sqrt{r^2 - \|u\|^2}\right).$$

Entonces, por el teorema de Fubini,

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{F} \, dv = \int_D \left(\int_{X_-(u)}^{X_+(u)} \frac{\partial F}{\partial x_n} \, dx_n \right) du = \int_D (F(X_+(u)) - F(X_-(u))) \, du,$$

donde hemos usado la regla de Barrow.

Por otro lado, $\vec{n} = (x_1, \dots, x_n)/r$ y $\vec{F} \cdot \vec{n} = Fx_n/r$. Además, por el ejemplo tras el teorema 7.25, sabemos que

$$\Delta_{X_{\pm}} = \frac{r}{\sqrt{r^2 - \|u\|^2}}.$$

Por lo tanto, separando la integral en $\partial\Omega$ en una integral sobre la semiesfera superior (cubierta por X_+) más otra sobre la semiesfera inferior (cubierta por X_-), tenemos que

$$\int_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \vec{n} \, d\sigma = \int_D F(X_+(u)) \frac{\sqrt{r^2 - \|u\|^2}}{r} \frac{r}{\sqrt{r^2 - \|u\|^2}} \, du +$$

$$\int_D F(X_-(u)) \frac{-\sqrt{r^2 - \|u\|^2}}{r} \frac{r}{\sqrt{r^2 - \|u\|^2}} du = \int_D (F(X_+(u)) - F(X_-(u))) du.$$

Esto termina la prueba para el caso de una bola abierta.

Para la prueba general necesitamos demostrar la existencia de particiones de la unidad diferenciables. El primer paso es la observación siguiente:

Teorema 8.5 *Dados números reales $0 < r < R$ y un $p \in \mathbb{R}^n$, existe una función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$ de clase C^∞ que vale 1 en los puntos que cumplen $\|x - p\| \leq r$ y vale 0 en los puntos que cumplen $\|x - p\| \geq R$.*

DEMOSTRACIÓN: Basta aplicar el teorema 5.14, que nos da la existencia de una función $g : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ de clase C^∞ que vale 1 si $x \leq r$ y vale 0 si $x \geq R$ (la del teorema cumple justo lo contrario, pero basta cambiarla por $1 - g$). La función requerida es $f(x) = g(\|x - p\|)$. Notemos que en p es de clase C^∞ porque en un entorno es constante igual a 1. ■

Ahora probamos la versión diferenciable del lema de Uryson:

Teorema 8.6 *Si $K \subset V \subset \mathbb{R}^n$, donde K es compacto y V es abierto, existe una función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$ de clase C^∞ que vale 1 en K y vale 0 en $\mathbb{R}^n \setminus V$.*

DEMOSTRACIÓN: Para cada punto $p \in K$ tomamos $0 < r_p < R_p$ tales que $B_{R_p}(p) \subset V$, con lo que las bolas $B_{r_p}(p)$ forman un cubrimiento abierto de K del que podemos extraer un subcubrimiento finito. Tenemos así que

$$K \subset B_{r_1}(p_1) \cup \dots \cup B_{r_k}(p_k).$$

Sea $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$ una función de clase C^∞ que valga 1 en $B_{r_i}(p_i)$ y valga 0 fuera de $B_{R_i}(p_i) \subset V$. Sea $g = \sum_{i=1}^k f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty[$, que es ≥ 1 en todos los puntos de K y es 0 fuera de V . Por el teorema 5.14, existe una función $h : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ que vale 0 si y sólo si $x \leq 0$ y vale 1 si $x \geq 1$. La función $f(x) = h(g(x))$ cumple lo requerido. ■

Teorema 8.7 *Sean $K \subset U_1 \cup \dots \cup U_k \subset \mathbb{R}^n$, donde K es compacto y los U_i son abiertos. Entonces existen funciones $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$ de clase C^∞ de soporte compacto contenido en U_i y de modo que $\sum_{i=1}^k f_i$ vale 1 sobre K .*

DEMOSTRACIÓN: Para cada $p \in K$, podemos tomar radios $R_p > r_p > 0$ tales que $\bar{B}_{R_p}(p) \subset U_i$, para cierto i . Las bolas abiertas $B_{r_p}(p)$ forman un cubrimiento abierto de K , del que podemos extraer un subcubrimiento finito. Así tenemos que $K \subset B_{r_1}(p_1) \cup \dots \cup B_{r_l}(p_l)$ y para cada j existe un i_j tal que $\bar{B}_{r_j}(p_j) \subset \bar{B}_{R_j}(p_j) \subset U_{i_j}$. Sea $g_j : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$ una función de clase C^∞ que valga 1 en $\bar{B}_{r_j}(p_j)$ y valga 0 fuera del compacto $\bar{B}_{R_j}(p_j) \subset U_{i_j}$.

Sea g_i^* la suma de todas las funciones g_j para las que $i_j = i$. De este modo cada $g_i^* : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty[$ es de clase C^∞ y tiene soporte compacto contenido

en U_i . Además, la suma $g^* = \sum_{i=1}^k g_i^*$ cumple que $g^*(x) \geq 1$ en todos los puntos de K . Consideremos los abiertos

$$W_0 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g^*(x) > 3/2\}, \quad W = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g^*(x) > 1/2\},$$

de modo que $K \subset W_0 \subset W \subset \mathbb{R}^n$. En el abierto W están definidas las funciones $f_i^* = g_i^*/g^* : W \rightarrow [0, 1]$, de clase C^∞ con soporte compacto contenido en el correspondiente $U_i \cap W$, y además la suma de las f_i^* vale 1 sobre K . Por último, tomamos una función $h : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$ de clase C^∞ que valga 1 en K y que se anule fuera de W_0 . Así las funciones $f_i = f_i^* h$ siguen sumando 1 en K , tienen soporte compacto contenido en el abierto U_i correspondiente, y son nulas en $W \setminus W_0$, luego se extienden a funciones $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$ de clase C^∞ (que se anulan en $\mathbb{R}^n \setminus W_0$) que cumplen todo lo requerido. ■

Con esto ya podemos demostrar el teorema de la divergencia.

DEMOSTRACIÓN GENERAL: Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$ una función de clase C^∞ que valga 1 en $\bar{\Omega}$ y que se anule fuera de una bola abierta que contenga a $\bar{\Omega}$. Si cambiamos el campo \vec{F} por $f\vec{F}$, esto no altera ninguna de las dos integrales del enunciado, luego no perdemos generalidad si suponemos que \vec{F} se anula fuera de una bola abierta suficientemente grande es decir, que tiene soporte compacto.

Para cada $p \in \partial\Omega$, podemos tomar abiertos U_p y V_p en las condiciones de la definición 8.1. Los abiertos V_p forman un cubrimiento de $\partial\Omega$, y si añadimos el propio Ω tenemos un cubrimiento de la clausura $\bar{\Omega}$, que es compacta, por lo que podemos tomar un subcubrimiento finito, digamos $\bar{\Omega} \subset \Omega \cup V_1 \cup \dots \cup V_k$. Por el teorema anterior podemos tomar una partición de la unidad $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$, para $i = 0, \dots, k$, de clase C^∞ y con soporte compacto contenido en Ω en el caso de f_0 y en el correspondiente V_i en los demás casos. Entonces

$$\vec{F} = f_0\vec{F} + \dots + f_k\vec{F},$$

y como las dos integrales del enunciado son lineales en \vec{F} , basta probar el teorema para cada $f_i\vec{F}$, luego podemos suponer que \vec{F} tiene soporte compacto contenido en Ω o bien en un abierto V en las condiciones de la definición 8.1. Vamos a tratar estos dos casos por separado.

Si \vec{F} tiene soporte compacto contenido en Ω , en particular se anula en $\partial\Omega$, por lo que el miembro izquierdo de la fórmula del enunciado es nulo. Hay que probar que lo mismo sucede con el miembro derecho. Para ello tomamos $a < b$ tales que $\Omega \subset [a, b]^n$. Como \vec{F} se anula fuera de Ω , tenemos que

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{F} \, dv = \sum_{i=1}^n \int_{[a,b]^n} \frac{\partial F_i}{\partial x_i} \, dv,$$

Por el teorema de Fubini, podemos integrar primero respecto de x_i :

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial F_i}{\partial x_i} \, dv = \int_{[a,b]^{n-1}} \int_a^b \frac{\partial F_i}{\partial x_i} \, dx_i \, dv' = \int_{[a,b]^{n-1}} (F_i(b) - F_i(a)) \, dv' = 0,$$

donde dv' representa a las diferenciales distintas de dx_i . La integral vale 0 porque F_i se anula en a y en b .

Ahora supongamos que \vec{F} tiene soporte compacto contenido en un abierto V tal que existe una función $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ y un $\delta > 0$ tal que

$$\partial\Omega \cap V = \{(u, f(u)) \mid u \in U\}, \quad V = \{(u, \alpha) \in \mathbb{R}^n \mid u \in U, |\alpha - f(u)| < \delta\},$$

$$\Omega \cap V = \{(u, \alpha) \mid u \in U, \alpha < f(u)\}.$$

Por simplicidad en la notación hemos supuesto que la coordenada que se expresa como función de las demás es precisamente x_n , así como que $\Omega \cap V$ queda concretamente por debajo de la gráfica de f . Vamos a calcular

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{F} \, dv = \sum_{i=1}^n \int_{\Omega \cap V} \frac{\partial F_i}{\partial x_i} \, dv.$$

Para ello observamos que

$$\int_{\Omega \cap V} \frac{\partial F_i}{\partial x_i} \, dv = \int_U \int_{f(u)-\delta}^{f(u)} \frac{\partial F_i}{\partial x_i} \, dx_n \, du.$$

Para $i = n$ podemos aplicar la regla de Barrow:

$$= \int_U (F_i(u, f(u)) - F_i(u, f(u) - \delta)) \, du = \int_U F_i(u, f(u)) \, du,$$

donde usamos que $F_i(u, f(u) - \delta) = 0$ porque $(u, f(u) - \delta)$ está fuera de V . Consideremos ahora el caso $i < n$:

$$\int_U \int_{f(u)-\delta}^{f(u)} \frac{\partial F_i}{\partial x_i} \, dx_n \, du = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{-\infty}^{f(u)} \frac{\partial F_i}{\partial x_i} \, dx_n \, du =$$

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{-\infty}^0 \frac{\partial F_i}{\partial x_i} \Big|_{(u, f(u)+s)} \, ds \, du.$$

Sea $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ la función dada por $g(u, s) = F_i(u, f(u) + s)$. Así,

$$\frac{\partial g}{\partial u_i} = \frac{\partial F_i}{\partial x_i} \Big|_{(u, f(u)+s)} + \frac{\partial F_i}{\partial x_n} \Big|_{(u, f(u)+s)} \frac{\partial f}{\partial u_i}.$$

Por lo tanto, la integral que estamos calculando es

$$= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{-\infty}^0 \frac{\partial g}{\partial u_i} \, ds \, du - \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{-\infty}^0 \frac{\partial F_i}{\partial x_n} \Big|_{(u, f(u)+s)} \frac{\partial f}{\partial u_i} \, ds \, du.$$

Para calcular la primera integral podemos integrar primero respecto de la variable u_i , que podemos restringir a un intervalo $[a, b]$ lo suficientemente amplio como para que $g(a) = g(b) = 0$, ya que F_i se anula fuera de un compacto, luego al aplicar la regla de Barrow sale que la primera integral es nula. En la segunda

integral integramos primero respecto de s , restringida a un intervalo $[a, 0]$, con a suficientemente pequeño como para que F_i se anule, y el resultado es

$$= - \int_{\mathbb{R}^{n-1}} F_i(u, f(u)) \frac{\partial f}{\partial u_i} du.$$

Por consiguiente, hemos probado que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{F} dx_1 \cdots dx_n &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \vec{F}(u, f(u)) \cdot (-\nabla f, 1) du = \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \sqrt{1 + \|\nabla f\|^2} \vec{F}(u, f(u)) \cdot \vec{n} du, \end{aligned}$$

y ahora es crucial observar que el vector normal

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + \|\nabla f\|^2}} (-\nabla f, 1)$$

apunta hacia arriba de la gráfica de f , mientras que hemos supuesto que Ω está por debajo de la gráfica (si hubiéramos supuesto lo contrario, habríamos llegado al vector normal opuesto), por lo que, \vec{n} es precisamente el vector normal que requiere el enunciado. Ahora sólo queda recordar el teorema 7.25, según el cual, si $X(u) = (u, f(u))$ es la carta de $\partial\Omega \cap V$ determinada por f , se cumple que $\Delta_X = \sqrt{1 + \|\nabla f\|^2}$, luego la última integral no es sino

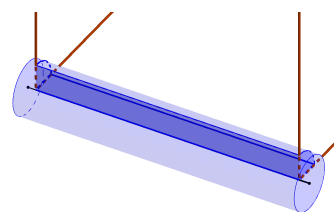
$$\int_{\partial\Omega \cap V} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = \int_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma. \quad \blacksquare$$

Veamos ahora cómo una ligera modificación de la prueba anterior permite probar que el teorema de la divergencia es aplicable a abiertos como el interior de un cubo en \mathbb{R}^3 . Puede probarse una versión general del teorema que incluya este caso, pero eso requiere más tecnicismos, así que vamos a ver simplemente cómo adaptar el argumento para incluir los pocos casos sencillos en dos y tres dimensiones para los que realmente nos va a interesar la generalización.

Por ejemplo, si Ω es el interior de un cubo en \mathbb{R}^3 , conviene que usemos $\partial\Omega$ para referirnos, no a su frontera topológica (que sería la superficie del cubo) sino a su *frontera diferenciable*, que es el conjunto de puntos de la frontera que cumplen la definición 8.1. En este caso nos referimos a la unión de las seis caras del cubo sin sus aristas. Observemos que, así entendida, $\partial\Omega$ es una variedad diferenciable con seis componentes conexas, y están definidas las dos integrales que intervienen en el teorema de la divergencia. Sólo tenemos que demostrar que el hecho de que ahora $\partial\Omega$ tenga “grietas” no hace que deje de cumplirse la igualdad, y la razón de fondo es que esas “grietas” tienen medida nula, tanto tridimensional como bidimensional.

Dado $\epsilon > 0$, para cada arista del cubo, tomamos un cilindro de altura ligeramente mayor, para que los extremos de la arista queden en su interior, y de modo que el exceso de altura y el radio sean lo suficientemente pequeños como para que, tanto el volumen del cilindro, como la suma de las áreas de los dos rectángulos y los dos sectores circulares en los que corta a las caras del cubo sean menores que ϵ :

Tenemos así doce abiertos V_1, \dots, V_{12} en estas condiciones. Para cada punto $p \in \partial\Omega$, es decir, en una de las caras del cubo, pero no en una arista, tomamos un abierto V_p en las condiciones de la definición 8.1 que, junto con Ω , forman un cubrimiento del compacto $\bar{\Omega}$. Por compacidad obtenemos un subcubrimiento finito que estará formado por los doce abiertos que cubren las aristas. más $V_{13} = \Omega$, más otros abiertos V_{14}, \dots, V_k que cumplen la definición 8.1. Tomamos una partición de la unidad $\{f_i\}$ subordinada a este cubrimiento, es decir, de modo que cada f_i tenga soporte compacto contenido en V_i , lo que nos permite descomponer $\vec{F} = \vec{F}_1 + \dots + \vec{F}_k$, donde el soporte de \vec{F}_i está contenido en V_i .



Ahora es fácil ver que la prueba que hemos dado del teorema de la divergencia es válida para los campos $\vec{F}_{13}, \dots, \vec{F}_k$, pues todos los cálculos se llevan a cabo en $\Omega \cap V_i$, donde no hay aristas. Por consiguiente,

$$\left| \int_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \vec{n} \, d\sigma - \int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{F} \, dv \right| = \left| \sum_{i=1}^{12} \int_{\partial\Omega} \vec{F}_i \cdot \vec{n} \, d\sigma - \int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{F}_i \, dv \right| \leq \sum_{i=1}^{12} \left(\int_{\partial\Omega} \|\vec{F}_i\| \, d\sigma + \int_{\Omega} |\operatorname{div} \vec{F}_i| \, dv \right) = \sum_{i=1}^{12} \left(\int_{\partial\Omega \cap V_i} \|\vec{F}_i\| \, d\sigma + \int_{\Omega \cap V_i} |\operatorname{div} \vec{F}_i| \, dv \right).$$

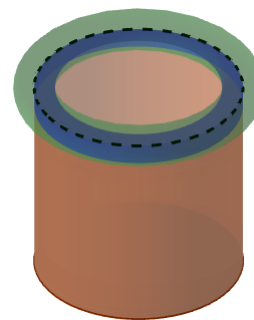
En efecto, hemos usado que al descomponer las integrales para \vec{F} en suma de las correspondientes a cada \vec{F}_i , el término correspondiente a la primera integral se cancela con el correspondiente a la segunda siempre que $i \geq 13$.

Ahora usamos que, por continuidad, tanto $\|\vec{F}_i\|$ como $|\operatorname{div} \vec{F}_i|$ están acotados en el compacto $\bar{\Omega}$, digamos que por una constante K . Por lo tanto

$$\left| \int_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \vec{n} \, d\sigma - \int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{F} \, dv \right| \leq \sum_{i=1}^{12} (K\sigma(\partial\Omega \cap V_i) + Km(\Omega \cap V_i)) \leq 2K\epsilon.$$

Como esto vale para todo $\epsilon > 0$, el miembro izquierdo tiene que ser nulo, y eso prueba el teorema de la divergencia para un cubo.

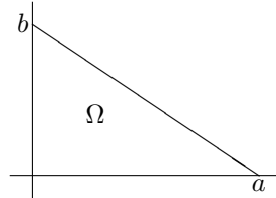
Es obvio que el mismo argumento vale para cualquier poliedro y, más en general, para cualquier abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ tal que los puntos de $\partial\Omega$ que no cumplan la definición 8.1 sea una unión finita de puntos o curvas. Por ejemplo, para probar el teorema para un cilindro, sólo necesitamos considerar dos abiertos V_1 y V_2 que tengan forma de toro con radio suficientemente pequeño como para que su volumen y el área de sus intersecciones con la superficie del cilindro (la unión de un cilindro y de una corona circular) sean menores que un $\epsilon > 0$ prefijado.



El caso bidimensional es mucho más simple, pues se trata de probar únicamente que el teorema de la divergencia se sigue cumpliendo, por ejemplo, para

un triángulo, a pesar de que sus vértices no cumplan la definición 8.1. En general, si la definición no se cumple en un número finito de puntos, podemos aplicar el mismo argumento anterior tomando una bola abierta alrededor de cada punto excepcional con radio suficientemente pequeño como para que el área de la bola y la suma de las longitudes de los fragmentos de $\partial\Omega$ contenidos en ella sean menores que un $\epsilon > 0$ prefijado.

Ejemplo Vamos a comprobar explícitamente el teorema de la divergencia para un triángulo rectángulo como el que muestra la figura. Podemos descomponer el campo $\vec{F} = (F_1, 0) + (0, F_2)$, con lo que no perdemos generalidad si suponemos que $\vec{F} = (0, F)$. Entonces



$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{F} \, dx dy = \int_0^a \int_0^{b-bx/a} \frac{\partial F}{\partial y} \, dy dx = \int_0^a (F(x, b-bx/a) - F(x, 0)) dx.$$

Una carta de la hipotenusa es $X(x) = (x, b - bx/a)$, cuyo elemento de longitud es $dl = \sqrt{1 + b^2/a^2} \, dx$, y el vector normal unitario en $X(x)$ que apunta hacia afuera del triángulo es

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + b^2/a^2}} (b/a, 1).$$

Por lo tanto, el flujo a través de la hipotenusa es

$$\int_0^a \frac{F(x, b - bx/a)}{\sqrt{1 + b^2/a^2}} \sqrt{1 + b^2/a^2} \, dx = \int_0^a F(x, b - bx/a) \, dx.$$

El vector normal al cateto vertical es $\vec{n} = (-1, 0)$, por lo que $\vec{F} \cdot \vec{n} = 0$ y el flujo por ese lado es nulo. Para el cateto horizontal es $\vec{n} = (0, -1)$, con lo que el flujo es

$$\int_0^a -F(x, 0) \, dx$$

y, por consiguiente,

$$\int_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dl = \int_0^a (F(x, b - bx/a) - F(x, 0)) dx.$$

Notemos que esto prueba el teorema de la divergencia para cualquier triángulo rectángulo, aunque no tenga sus catetos sobre los ejes. La razón es que, en general, si un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ cumple el teorema de la divergencia, lo mismo vale para cualquier otro $f[\Omega]$ que resulte de aplicarle un movimiento. En efecto, por el teorema de cambio de variable (teniendo en cuenta que los movimientos tienen determinante jacobiano unitario):

$$\int_{f[\Omega]} \vec{F} \, dv = \int_{\Omega} (f \circ \vec{F}) \, dv,$$

y, si $X : U \rightarrow f[\partial\Omega]$ es una carta, entonces $X \circ f^{-1} : U \rightarrow \partial\Omega$ es otra carta tal que

$$\int_{X[U]} \vec{F} \cdot \vec{n} \, d\sigma = \int_{f^{-1}[X[U]]} (f \circ \vec{F}) \cdot \vec{n} \, d\sigma,$$

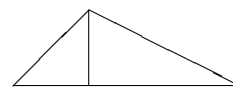
pues ambas integrales se reducen a la misma integral sobre U . De aquí se sigue que

$$\int_{f[\partial\Omega]} \vec{F} \cdot \vec{n} \, d\sigma = \int_{\Omega} (f \circ \vec{F}) \cdot \vec{n} \, d\sigma,$$

luego aplicando el teorema de la divergencia a $f \circ \vec{F}$ sobre Ω obtenemos el teorema de la divergencia para \vec{F} sobre $f[\Omega]$.

Alternativamente, el lector puede convencerse de que las integrales que estamos considerando no dependen de la carta que consideramos en \mathbb{R}^n visto como variedad diferencial, es decir, del sistema de referencia afín que consideramos en \mathbb{R}^n y, dado un triángulo, siempre podemos tomar un sistema de referencia con los ejes sobre sus catetos.

Por lo tanto, el cálculo precedente prueba explícitamente el teorema de la divergencia para cualquier triángulo rectángulo y, como todo triángulo puede descomponerse como unión de dos triángulos rectángulos con un cateto en común, de ahí se sigue el teorema de la divergencia para cualquier triángulo (porque al sumar las igualdades para ambos triángulos, como el vector normal sobre el cateto común tiene sentido opuesto sobre cada triángulo, el flujo por dicho cateto respecto de un triángulo se cancela con el correspondiente al otro). ■



La prueba del teorema de la divergencia que hemos dado supone que $n \geq 2$, pero el caso $n = 1$ puede interpretarse como un hecho elemental: Si $\Omega =]a, b[$, podemos entender que el vector normal es $\vec{n}(a) = -1$, $\vec{n}(b) = 1$, luego

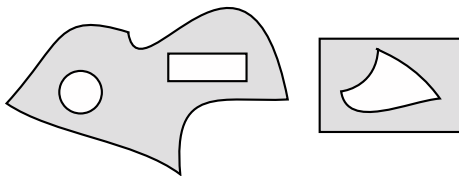
$$\int_{\partial\Omega} f \cdot \vec{n} \, d\sigma = f(b) - f(a).$$

Por otro lado, la divergencia de f es simplemente su derivada, luego

$$\int_a^b \operatorname{div} f \, dx = \int_a^b f'(x) \, dx,$$

y el teorema de la divergencia se convierte en la regla de Barrow.

El teorema de la divergencia para abiertos en \mathbb{R}^2 se conoce como teorema de Green. Para enunciarlo en este caso particular consideramos un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ con frontera de clase C^1 , aunque hemos visto que no importa si esta condición falla en un número finito de puntos. Esto significa que la frontera $\partial\Omega$ puede cubrirse por un número finito de curvas regulares de clase C^1 sin necesidad de que la frontera sea diferenciable en los puntos de enlace. Un ejemplo típico es:



En este ejemplo $\partial\Omega$ es de clase C^1 salvo en 14 puntos y puede cubrirse con 16 arcos de clase C^1 .

En general, consideremos un arco regular $\alpha : [a, b] \rightarrow \partial\Omega$ de clase C^1 , con funciones coordenadas $\alpha(t) = (x(t), y(t))$. Podemos ver a α como una carta de la variedad $\partial\Omega$, cuyo tensor métrico es

$$ds = \sqrt{x'^2 + y'^2} dt.$$

El vector tangente unitario en $\alpha(t)$ es

$$\tau(t) = \frac{1}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}(x', y'),$$

y un vector normal unitario es

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}(y', -x').$$

Concretamente, es fácil ver que se trata del vector normal que apunta hacia la derecha cuando miramos en la dirección que señala $\tau(t)$. El teorema de la divergencia requiere considerar el vector normal que apunta hacia afuera de Ω , pero, en lugar de cambiar \vec{n} por su opuesto si es preciso, podemos lograr que sea el que acabamos de indicar cambiando la parametrización de α si es preciso, es decir, cambiando $\alpha(t)$ por $(-\alpha)(t) = \alpha(-t)$. Esto invierte los signos de x' , y' y hace que \vec{n} cambie de sentido.

Ahora consideramos un campo \vec{F} de clase C^1 definido sobre un abierto que contenga a $\bar{\Omega}$, que por conveniencia vamos a expresar en la forma $\vec{F} = (f, -g)$. Su flujo por el fragmento de $\partial\Omega$ parametrizado por α es

$$\int_a^b (fy' + gx') dt = \int_a^b f dy + g dx,$$

donde hemos abreviado $dx = x' dt$, $dy = y' dt$. Notemos que el elemento de longitud se cancela con el denominador de \vec{n} .

En este punto conviene observar que, por el teorema de cambio de variable, esta integral no se altera si realizamos un cambio de parámetro $\gamma : [c, g] \rightarrow [a, b]$ tal que $\gamma'(t) > 0$, pero cambia de signo si el cambio de parámetro tiene derivada negativa. Lo que hemos probado es que, si llamamos $S = \alpha[a, b]$, se da la igualdad

$$\int_S \vec{F} \cdot \vec{n} ds = \int_a^b f dy + g dx$$

para cualquier carta $\alpha = (x, y)$ de S respecto a la cual el vector normal que apunta hacia afuera de Ω sea el que hemos fijado, es decir, el que apunta hacia la derecha del sentido de avance. Sumando las integrales correspondientes a una familia de curvas que cubran $\partial\Omega$, concluimos que

$$\int_{\partial\Omega} (f, -g) \cdot n ds = \int_{\partial\Omega} f dy + g dx,$$

donde la segunda integral hay que entenderla como acabamos de explicar, es decir, como la suma de integrales respecto de las curvas que cubren $\partial\Omega$ con

cualquier parametrización que cumpla que Ω queda a la izquierda respecto del sentido de avance (de modo que el vector normal que apunta hacia afuera de Ω es el que apunta hacia la derecha). Ahora basta aplicar el teorema de la divergencia para concluir:

Teorema 8.8 (Teorema de Green) *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un abierto acotado con frontera de clase C^1 (salvo a lo sumo un número finito de puntos singulares) y sean $f, g : V \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones de clase C^1 definidas en un abierto que contenga a $\bar{\Omega}$. Entonces*

$$\int_a^b f dy + g dx = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y} \right) dx dy,$$

entendiendo que el miembro izquierdo se calcula con parametrizaciones de $\partial\Omega$ que dejan a Ω a la izquierda respecto del sentido de avance.

El caso clásico de este teorema es en realidad el caso particular en que Ω está rodeado por una única curva diferenciable a trozos, y en tal caso es claro que lo que debe cumplir la curva es que rodee a Ω en sentido antihorario.

Si elegimos funciones f y g tales que el integrando del miembro derecho de la fórmula del teorema de Green valga 1, obtenemos expresiones para el área de un abierto Ω rodeado (en sentido antihorario) por una curva α . Algunas posibilidades son

$$A = \int_a^b x dy = - \int_a^b y dx = \frac{1}{2} \int_a^b (-y dx + x dy).$$

Podemos eliminar la condición sobre el sentido de giro de α si añadimos un valor absoluto a las integrales. Esto es el teorema [IC 2.10]. Allí vimos algunas aplicaciones de estas fórmulas.

8.2 Aplicaciones del teorema de la divergencia

Hidroestática Imaginemos un fluido en reposo (un líquido o un gas, como por ejemplo una cierta cantidad de agua en un cubo). Que esté en reposo no significa que no esté sometido a la acción de diversas fuerzas. Vamos a ver cuáles son estas fuerzas y cómo se compensan. Consideremos, concretamente, la porción de fluido que ocupa un abierto Ω con frontera diferenciable (por ejemplo, una bola abierta). Sobre ella, como en el caso de los sólidos rígidos estudiado en la sección A.5, actúan dos clases de fuerzas: las de *largo* y *corto alcance*.

Las fuerzas de largo alcance son las que afectan a todos los puntos de Ω , y que vienen determinadas por una función de densidad de fuerza \vec{f} , de modo que la fuerza total (de largo alcance) que actúa sobre Ω es

$$\vec{F} = \int_{\Omega} \vec{f} dv.$$

En la práctica, la única fuerza de largo alcance que consideraremos será la gravitatoria. Si suponemos su intensidad constante, será de la forma $\vec{f} = (0, 0, -\rho g)$.

Las fuerzas de corto alcance son las fuerzas que experimenta Ω por el contacto con el fluido que lo rodea y sólo se ejercen sobre los puntos de $\partial\Omega$. Se dividen en dos clases: las *normales*, que actúan en cada punto en la dirección normal a $\partial\Omega$ y son el equivalente a las fuerzas de reacción entre sólidos, como la que impide que un objeto situado sobre una mesa caiga como si la mesa no estuviera, y las *tangenciales*, que actúan en una dirección tangente a $\partial\Omega$ y son el equivalente a las fuerzas de rozamiento entre sólidos. En los fluidos, estas fuerzas tangenciales determinan lo que se llama su *viscosidad*, es decir, su resistencia a fluir. Por ejemplo, si tenemos un líquido viscoso en un tubo y lo ponemos boca abajo, el líquido caerá más lentamente cuanto más cerca esté de las paredes del tubo, pues el contacto con la pared ejerce una fuerza tangencial hacia arriba que se opone a la caída y, por la viscosidad, se transmite hacia el centro del tubo. En cambio, si el líquido carece de viscosidad, caerá exactamente igual que si el tubo no estuviera.

Vamos a considerar lo que se llama un *fluido ideal*, es decir, un fluido sin viscosidad. Todo fluido tiene un mayor o menor grado de viscosidad, pero, como el rozamiento, según el contexto se puede pasar por alto.

Esto nos reduce el problema a cuantificar las fuerzas normales, que en los fluidos reciben el nombre de presión. La *presión* $p : V \rightarrow [0, +\infty[$ es un campo escalar definido sobre los puntos en los que se encuentra el fluido, de modo que la densidad de fuerza de corto alcance que se ejerce en un punto de $\partial\Omega$ es $-p\vec{n}$, donde \vec{n} es el vector normal a $\partial\Omega$ que apunta hacia afuera de Ω . Así, la presión total que se ejerce sobre la superficie de Ω es

$$\vec{P} = - \int_{\partial\Omega} p\vec{n} \, d\sigma.$$

La unidad de presión en el sistema internacional es el *pascal*, Pa = N/m².

Si el fluido está en reposo, en cada abierto Ω se tiene que cumplir la relación $\vec{F} + \vec{P} = \vec{0}$. Necesitamos el teorema de la divergencia para relacionar las dos fuerzas, una expresada mediante una integral de volumen y otra mediante una integral de superficie. Para ello, si $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ son los vectores de la base canónica de \mathbb{R}^3 , descomponemos

$$\vec{n} = (\vec{n} \cdot \vec{e}_1, \vec{n} \cdot \vec{e}_2, \vec{n} \cdot \vec{e}_3).$$

Así, por el teorema de la divergencia,

$$\vec{P}_i = - \int_{\partial\Omega} p\vec{e}_i \cdot \vec{n} \, d\sigma = - \int_{\Omega} \operatorname{div}(p\vec{e}_i) \, dv = - \int_{\Omega} \frac{\partial p}{\partial x_i} \, dv,$$

y combinando las tres componentes obtenemos que

$$\vec{P} = - \int_{\Omega} \nabla p \, dv.$$

Por lo tanto, la condición necesaria y suficiente para que un fluido esté en reposo es que

$$\int_{\Omega} (\vec{f} - \nabla p) \, dv = \vec{0},$$

para todo abierto Ω con frontera diferenciable o, simplemente, para toda bola abierta Ω en el seno del fluido, pues el hecho de que una función continua que integre 0 en toda bola abierta implica que tiene que ser idénticamente nula, luego tiene integral nula sobre cualquier abierto. Así pues, *la ecuación fundamental de la hidrostática* para un fluido ideal es $\vec{f} = \nabla p$. En el caso en que la fuerza de largo alcance sea una fuerza gravitatoria de intensidad constante dirigida hacia abajo, la ecuación se concreta en

$$(0, 0, -\rho g) = \nabla p,$$

Si la densidad ρ es constante, tenemos tres ecuaciones diferenciales triviales que nos llevan a esta conclusión:

La presión en un fluido homogéneo (de densidad constante) en reposo depende únicamente de la altura z , en la forma

$$p = -\rho g z + p_0, \quad (8.1)$$

donde p_0 es la presión en los puntos de altura $z = 0$.

He aquí una consecuencia clásica de este hecho:

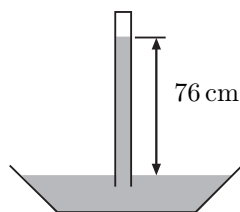
El principio de Arquímedes Es una propiedad bien conocida que determina la “pérdida de peso” que experimenta un objeto al estar sumergido en un fluido:

Todo cuerpo sumergido en un fluido experimenta un empuje hacia arriba de intensidad igual al peso del fluido que desplaza.

Aquí hay que entender que el fluido es ideal, homogéneo y que está en reposo. La prueba es trivial: la fuerza superficial que experimenta el volumen Ω ocupado por el cuerpo se obtiene integrando $-p\vec{n}$ sobre $\partial\Omega$, pero ya hemos visto que dicha integral coincide con la integral de $-\nabla p = (0, 0, \rho g)$ sobre Ω . El resultado es una fuerza dirigida hacia arriba cuya intensidad es la integral de la tercera componente de $-\nabla p$ (pues las otras dos son nulas), a saber:

$$F = \int_{\Omega} \rho g \, dv = Mg,$$

donde M es la masa de fluido que cabría en Ω , luego F es el peso del fluido que cabría en Ω , es decir, el fluido desplazado por el cuerpo. ■



El experimento de Torricelli Es famoso el experimento de Torricelli que permite medir la presión atmosférica. Consiste en llenar de mercurio un tubo cerrado por un extremo, bloquear momentáneamente el otro extremo para sumergirlo en una cuba de mercurio y finalmente, con el tubo en vertical, destapar su embocadura como indica la figura.² Entonces parte del mercurio del tubo pasa a la cuba, pero otra parte forma una columna que se mantiene por encima del nivel de la cuba.

²En realidad la superficie del mercurio dentro del tubo no será plana, como indica la figura, sino que formará una superficie convexa debido a la llamada *tensión superficial*, pero no vamos a entrar en este fenómeno.

Ello se debe a que la presión en lo alto de la columna de mercurio es nula (depreciando la que pueda ejercer el vapor de mercurio que necesariamente contendrá), mientras que la presión en la superficie de la cuba es la presión atmosférica. Por lo tanto, si tomamos la superficie de la cuba como altura cero y p_0 es la presión atmosférica (que podemos suponer independiente de la altura, pues decrece muy lentamente con ésta), la presión a una altura arbitraria vendrá dada por $p = -\rho gz + p_0$, donde ρ es la densidad del mercurio. La altura h de la columna de mercurio cumplirá, pues, que $h = p_0/\rho g$ o, recíprocamente, midiendo h podemos calcular la presión atmosférica como $p_0 = \rho gh$.

La altura de la columna de mercurio a nivel del mar es de unos 76 cm. Teniendo en cuenta que la densidad del mercurio es $\rho = 13\,600 \text{ kg/m}^3$ y $g = 9.8 \text{ N/m}$, esto nos da un valor de $p_0 = 101\,292.8 \text{ Pa}$. Una medición más precisa arroja un valor de $101\,325 \text{ Pa}$, y a este valor se le denomina *atmósfera* (atm), y es más habitual que el pascal como unidad de presión.

La razón por la que Torricelli usó mercurio y no agua (por ejemplo) es que el mercurio es 13.6 veces más denso. Para compensar la presión atmosférica, una columna de agua ha de elevarse más de 10 m. Si se usa un tubo más corto éste queda lleno y no hay medición posible.

Notemos que el nivel del mercurio es distinto dentro y fuera del tubo porque dentro no actúa la presión atmosférica. Es evidente que si tenemos un líquido contenido en un recipiente, todos los puntos del líquido que estén en contacto con la atmósfera formarán una superficie donde la presión será la atmosférica, luego todos tienen que estar a la misma altura, cualquiera que sea la forma del recipiente. Éste es el llamado *principio de los vasos comunicantes*, pues un caso particular es que si tenemos dos o más recipientes llenos de líquido y conectados por tuberías, a todos los efectos son un único recipiente, por lo que el líquido fluirá como sea necesario por las tuberías para que, al quedar en reposo, todas las superficies del líquido en contacto con la atmósfera estén a la misma altura. ■

La presión atmosférica La fórmula (8.1) es válida bajo el supuesto de que la densidad del fluido es constante. Esta hipótesis es razonable para muchos líquidos, pero no para gases, pues la densidad de un gas depende, entre otros factores, de la presión. Concretamente, para un *gas ideal* (suponiendo la temperatura constante), la densidad es directamente proporcional a la presión. Por consiguiente, si conocemos la densidad de un gas ρ_0 para una presión dada p_0 , su densidad para cualquier otro valor de p será $\rho = \rho_0 p/p_0$, y así la ecuación

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g$$

se convierte en la ecuación diferencial

$$\frac{dp}{dz} = -\frac{\rho_0 g}{p_0} p,$$

cuya solución es

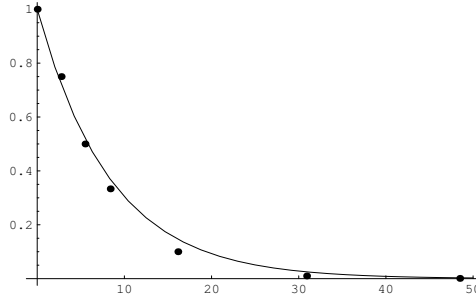
$$p = p_0 e^{-z/\alpha}, \quad \text{donde } \alpha = p_0/\rho_0 g$$

y la altura z se mide desde el punto en el que la densidad y la presión son ρ_0 y p_0 respectivamente.

La densidad del aire a nivel del mar se estima en $\rho_0 = 1.23 \text{ kg/m}^3$, lo cual, junto con el valor $p_0 = 101\,325 \text{ Pa}$ para la presión atmosférica a nivel del mar, nos da una constante $\alpha \approx 8\,400 \text{ m}$. Si usamos la atmósfera como unidad de presión, la fórmula que hemos obtenido para la presión atmosférica se reduce a

$$p = e^{-h/8\,400},$$

donde h es la altura sobre el nivel del mar.



La gráfica muestra la función $p(h)$ hasta una altura de 50 km (el límite superior de la estratosfera). Los puntos son promedios calculados por la NASA a partir de datos empíricos correspondientes a un intervalo de un año en lugares repartidos por toda la superficie del planeta a las alturas correspondientes.

La ecuación de continuidad Tras la definición 8.2 hemos visto un ejemplo de un presunto campo de velocidades de un fluido que tenía la propiedad de que parte del fluido entraba en un cubo y desaparecía misteriosamente. Podría pensarse que la condición que debe cumplir un campo de velocidades \vec{v} que sea aceptable para describir el movimiento de un fluido es $\text{div } \vec{v} = 0$, pero en general no es así, porque eso supondría una conservación del volumen del fluido, cuando éste puede variar si varía su densidad sin que ello signifique una aparición o desaparición de materia. Por otro lado, conviene admitir la posibilidad de que haya puntos en los que aparece o desaparece masa de fluido, pero en tal caso conviene tenerlos identificados. Vamos, pues, a deducir la ecuación que describe la conservación de la masa en un fluido.

Para ello consideramos un fluido que en cada punto del espacio tiene densidad ρ y velocidad \vec{v} . Fijado un punto p , dado $\epsilon > 0$, podemos tomar un $\delta > 0$ tal que si $\|q - p\| < \delta$, entonces

$$|\text{div}(\rho\vec{v})(q) - \text{div}(\rho\vec{v})(p)| < \epsilon.$$

Por lo tanto, si $0 < r < \delta$,

$$(\operatorname{div}(\rho\vec{v})(p) - \epsilon)m(B_r(p)) \leq \int_{B_r(p)} \operatorname{div}(\rho\vec{v}) \, dv \leq (\operatorname{div}(\rho\vec{v})(p) + \epsilon)m(B_r(p)).$$

Cambiando la integral por el teorema de la divergencia tenemos que

$$\operatorname{div}(\rho\vec{v})(p) - \epsilon \leq \frac{1}{m(B_r(p))} \int_{S_r(p)} \rho\vec{v} \cdot \vec{n} \, d\sigma \leq \operatorname{div}(\rho\vec{v})(p) + \epsilon,$$

luego

$$\operatorname{div}(\rho\vec{v}) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{m(B_r(p))} \int_{S_r(p)} \rho\vec{v} \cdot \vec{n} \, d\sigma.$$

Por consiguiente, $\operatorname{div} \rho\vec{v}_t$ representa la “divergencia” (la diferencia) entre la masa que sale y la masa que entra en un entorno de p por unidad de tiempo y de volumen, en el sentido de que, si consideramos una bola $B_r(p)$ suficientemente pequeña y un incremento de tiempo Δt suficientemente pequeño, la diferencia entre la masa que sale y la que entra en $B_r(p)$ en el tiempo Δt partiendo del instante t es aproximadamente $m(B_r(p))\Delta t \operatorname{div} \rho\vec{v}_t$, donde el error de la aproximación tiende a 0 cuando Δt tiende a 0 y $B_r(p)$ “tiende” a p .

Por otra parte, la variación de la masa de fluido contenida en $B_r(p)$ es

$$\frac{d}{dt} \int_{B_r(p)} \rho \, dv = \int_{B_r(p)} \frac{\partial \rho}{\partial t} \, dv.$$

Sea

$$\psi_r(p) = \frac{1}{m(B_r(p))} \left(\int_{B_r(p)} \frac{\partial \rho}{\partial t} \, dv + \int_{B_r(p)} \operatorname{div}(\rho\vec{v}) \, dv \right).$$

Así, $m(B_r(p))\psi_r(p)$ se interpreta como el aumento de masa de fluido en la bola $B_r(p)$ menos la masa de fluido que entra en $B_r(p)$ por unidad de tiempo, es decir, la masa de fluido creada en $B_r(p)$. Por ejemplo, si en una unidad de tiempo la masa en la bola ha aumentado en 5 kg, pero han entrado 2 kg, entonces sólo se han creado en $B_r(p)$ los $\psi_r(p) = 5 - 2 = 3$ que no han venido de fuera, mientras que si han salido 2 kg, entonces se han creado $\psi_r(p) = 5 + 2 = 7$ kg, de los cuales 2 han salido, y por ello el aumento de masa en la bola sólo ha sido de 5 kg.

Por consiguiente $\psi_r(p)$ es la cantidad de masa que se crea en $B_r(p)$ por unidad de tiempo y de volumen (la masa que aparece en $B_r(p)$ sin entrar por su frontera). Ahora, el mismo argumento empleado anteriormente muestra que

$$\psi(p) = \lim_{r \rightarrow 0} \psi_r(p) = \left. \frac{\partial \rho}{\partial t} \right|_p + \operatorname{div} \rho\vec{v}(p), \quad (8.2)$$

luego $\psi(p)$ representa la cantidad de fluido que se crea alrededor de p por unidad de tiempo y de volumen. La ecuación

$$\operatorname{div} \rho\vec{v} = \psi - \frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (8.3)$$

se denomina *ecuación de continuidad de la hidrodinámica*, y expresa la conservación de la masa.

Los puntos donde $\psi > 0$ se llaman *fuentes* (son puntos donde aparece fluido) y los puntos donde $\psi < 0$ se llaman *sumideros* (en los cuales desaparece fluido).

En un fluido homogéneo (de densidad constante) sin fuentes ni sumideros (es decir, tal que la masa de fluido permanece constante) la ecuación de continuidad se reduce a $\operatorname{div} \vec{v} = 0$. ■

La ecuación del calor Los físicos del siglo XVII creían que el calor era una sustancia a la que llamaban “flogisto”, pero en 1773 Antoine Lavoisier publicó un artículo según el cual la teoría del flogisto era incompatible con sus resultados experimentales, y propuso que el calor era un fluido al que llamó “calórico”, y que se transmite de los cuerpos más calientes a los más fríos. No fue hasta mediados del siglo XIX cuando los físicos entendieron la naturaleza del calor como el movimiento de las partículas microscópicas que forman la materia, pero, aunque el calor no sea un fluido, lo cierto es que su comportamiento se asemeja bastante al de un fluido, y ello sirvió de base para una formulación matemática razonable sobre la transmisión del calor.

En efecto, desde un punto de vista moderno, lo que llamamos “temperatura” de un cuerpo es una medida de la velocidad media de las partículas que lo forman.³

Por otra parte, la suma de la energía cinética de cada partícula es lo que llamamos la cantidad de calor Q del cuerpo (y se mide en julios, como corresponde a la energía). Puesto que T es un promedio de velocidades, ya no es cierto que Q sea proporcional al cuadrado de T , sino que la experiencia establece que la proporción es lineal y la constante depende de las características químicas de cada sustancia. Concretamente cada sustancia tiene asociado un *calor específico* c (que se mide en J/kg K), de modo que la cantidad de calor de un cuerpo de masa m , calor específico c y temperatura T es $Q = mcT$.

Aquí suponemos que T y c son constantes. Si, por el contrario, c y T dependen de la posición entonces $Q = \int_V c\rho T dv$, donde ρ es la densidad del cuerpo (función de la posición) y dv es el elemento de volumen. Por consiguiente $c\rho T$ es la densidad de calor de un cuerpo de calor específico c , densidad ρ y temperatura T . Podemos suponer que, para un objeto en reposo, c y ρ sólo dependen de la posición, mientras que Q y T dependerán también del tiempo, y se plantea el problema de determinar esta dependencia, esto es, de determinar cómo se transmite el calor a través de un cuerpo.

El modelo más simple al respecto es la *ley de Fourier*, que postula que el calor es como un fluido que se mueve hacia el punto más frío posible. La dirección en la que la temperatura disminuye más rápidamente es la de $-\nabla T$ (la dirección de máximo decrecimiento), luego, más específicamente, lo que afirma la ley de Fourier es que el “calórico” es un fluido de densidad $\rho c T$ que en cada punto se mueve con velocidad $\vec{v} = -k_0 \nabla T$, para cierta constante $k_0 > 0$ que conviene incluir en otra constante $k = k_0 \rho c$ llamada *conductividad térmica*.

³En el Sistema Internacional de unidades, la temperatura se mide en *grados Kelvin* (K), que se define de modo que la temperatura en que el agua se hiela sea de 273.16 K, mientras que 0 K es el “cero absoluto”, correspondiente a un estado ideal en el que las moléculas carecen de movimiento.

Así, el flujo de $-k\nabla T$ a través de una superficie representa la cantidad de calor que la atraviesa por unidad de tiempo, y podemos repetir todo el argumento con el que hemos deducido la ecuación de continuidad. Ahora, la cantidad de calor que sale de una bola $B_r(p)$ es

$$\int_{S_r(p)} -\nabla T \cdot \vec{n} \, d\sigma = - \int_{B_r(p)} k \operatorname{div} \nabla T \, dv = - \int_{B_r(p)} k \Delta T \, dv,$$

donde usamos que, en general, para toda función T , se cumple que $\operatorname{div} \nabla T = \Delta T$ es el laplaciano de T definido en 5.49. Por otro lado, la variación de calor en $B_r(p)$ es

$$\frac{d}{dt} \int_{B_r(p)} \rho c T \, dv = \int_{B_r(p)} \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \, dv,$$

luego

$$\psi_r = \frac{1}{m(B_r(p))} \left(\int_{B_r(p)} -k \Delta T \, dv + \int_{B_r(p)} \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \, dv \right)$$

representa el calor generado en $B_r(p)$ por unidad de tiempo y volumen, y pasando al límite como en el caso de la ecuación de continuidad, tenemos que la función

$$\psi(p) = \lim_{r \rightarrow 0} \psi_r(p) = -k \Delta T + \rho c \frac{\partial T}{\partial t}.$$

representa la cantidad de calor creada por unidad de tiempo y volumen alrededor de p .

Así pues, la *ecuación del calor* es

$$k \Delta T + \psi = \rho c \frac{\partial T}{\partial t}.$$

El segundo término y el tercero representan cantidad de calor por unidad de tiempo y volumen, luego se miden en $\text{Jm}^{-3}\text{s}^{-1}$, luego lo mismo vale para el primer término, pero como ΔT se mide en K/m^2 , las unidades de la conductividad térmica son $\text{Jm}^{-2}\text{K}^{-1}\text{s}^{-1}$.

En ausencia de fuentes o sumideros de calor y agrupando todas las constantes, la ecuación del calor se reduce a efectos matemáticos a

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \Delta T,$$

donde la constante α se llama *difusividad térmica*, y se mide en m^2/s . ■

El laplaciano en coordenadas esféricas Si $f : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ es una función de clase C^2 , vamos a obtener una expresión para Δf en términos de las coordenadas esféricas

$$x = r \operatorname{sen} \theta \cos \phi, \quad y = r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi, \quad z = r \cos \theta.$$

En un entorno de cualquier punto que no esté situado sobre el eje Z este cambio de variables determina un difeomorfismo entre abiertos de \mathbb{R}^3 , de modo que podemos expresar $f(r, \theta, \phi)$ en términos de las coordenadas polares, y lo que queremos es una expresión para

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

en términos de la función $f(r, \theta, \phi)$ y sus derivadas. Por ejemplo,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial x},$$

donde, teniendo en cuenta que $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, se cumple que

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x}{r} = \text{sen } \theta \cos \phi.$$

Un poco más laborioso es expresar $\partial \theta / \partial x$ y $\partial \phi / \partial x$ en términos de r, θ, ϕ , pero puede hacerse y así obtenemos una expresión para $\partial f / \partial x$ en términos de las derivadas de $f(r, \theta, \phi)$ y de r, θ, ϕ . Sin embargo, el cálculo de las segundas derivadas, aunque puede hacerse aplicando sistemáticamente la regla de la cadena, es laboriosísimo. Aquí vamos a ver cómo el teorema de la divergencia nos permite calcular la expresión en coordenadas del laplaciano con muy pocos cálculos. Para ello demostraremos primero una fórmula que puede considerarse como una generalización de la integración por partes.

Es inmediato comprobar que si $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y $\vec{F} : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ son funciones de clase C^1 , con $n \geq 2$, se cumple la relación

$$\text{div}(f\vec{F}) = f \text{div } \vec{F} + \nabla f \cdot \vec{F}.$$

Por lo tanto, si $\Omega \subset \bar{\Omega} \subset A$ es un abierto acotado con frontera de clase C^1 , el teorema de la divergencia nos da que

$$\int_{\Omega} f \text{div } \vec{F} \, dv = - \int_{\Omega} \nabla f \cdot \vec{F} \, dv + \int_{\partial \Omega} f \vec{F} \cdot \vec{n} \, d\sigma. \quad (8.4)$$

El caso $n = 1$ de esta fórmula, con $\Omega =]a, b[$, puede interpretarse como la fórmula de integración por partes, si entendemos que la última integral es $[f(x)F(x)]_a^b$.

Volviendo a las coordenadas esféricas, observemos que, si llamamos $\vec{r} = (x, y, z)$, se cumple que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} &= \vec{u}_r = (\text{sen } \theta \cos \phi, \text{sen } \theta \text{sen } \phi, \cos \theta), \\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} &= r \vec{u}_\theta = r(\cos \theta \cos \phi, \cos \theta \text{sen } \phi, -\text{sen } \theta), \\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} &= r \text{sen } \theta \vec{u}_\phi = (-\text{sen } \phi, \cos \phi, 0), \end{aligned}$$

donde los vectores $\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\phi$ forman una base ortonormal de \mathbb{R}^3 . Por lo tanto, si f es cualquier campo escalar, se cumple que

$$\begin{aligned}\nabla f &= (\nabla f \cdot \vec{u}_r)\vec{u}_r + (\nabla f \cdot \vec{u}_\theta)\vec{u}_\theta + (\nabla f \cdot \vec{u}_\phi)\vec{u}_\phi = \\ &= (\nabla f \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial r})\vec{u}_r + \frac{1}{r}(\nabla f \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta})\vec{u}_\theta + \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta}(\nabla f \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi})\vec{u}_\phi \\ &= \frac{\partial f}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta}\frac{\partial f}{\partial \phi}\vec{u}_\phi,\end{aligned}$$

donde en el último paso hemos usado la regla de la cadena. Por lo tanto, si tenemos dos campos escalares cualesquiera f y g , teniendo en cuenta que la base se ortonormal, se cumple que

$$\nabla f \cdot \nabla g = \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial g}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{\partial g}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2 \theta}\frac{\partial f}{\partial \phi}\frac{\partial g}{\partial \phi}.$$

Ahora consideramos un campo $f : A \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^2 arbitrario, llamamos $U =]0, +\infty[\times]0, \pi[\times]-\pi, \pi[$, de modo que las coordenadas esféricas determinan un difeomorfismo entre U y \mathbb{R}^3 menos un semiplano. Consideramos una función $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ con soporte compacto contenido en A fuera de dicho semiplano. Así podemos considerar que $g \nabla f$ está definido en todo \mathbb{R}^3 , pues es nulo fuera de un compacto contenido en A , luego se puede extender a todo \mathbb{R}^3 con valor 0 y la extensión es obviamente de clase C^2 .

$$\begin{aligned}\int_U g \Delta f r^2 \operatorname{sen} \theta dr d\theta d\phi &= \int_{\mathbb{R}^3} g \operatorname{div} \nabla f dx dy dz = - \int_{\mathbb{R}^3} \nabla g \cdot \nabla f dx dy dz = \\ &= - \int_U \left(\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial g}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{\partial g}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2 \theta}\frac{\partial f}{\partial \phi}\frac{\partial g}{\partial \phi} \right) r^2 \operatorname{sen} \theta dr d\theta d\phi = \\ &= - \int_U \nabla g \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial r} r^2 \operatorname{sen} \theta + \operatorname{sen} \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{1}{\operatorname{sen} \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \right) dr d\theta d\phi = \\ &= \int_U g \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) \operatorname{sen} \theta + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\operatorname{sen} \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\operatorname{sen} \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} \right) dr d\theta d\phi = \\ &= \int_U g \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\operatorname{sen} \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} \right) r^2 \operatorname{sen} \theta dr d\theta d\phi.\end{aligned}$$

En la primera y en la tercera igualdad hemos usado el teorema de cambio de variables. En la segunda hemos usado la fórmula 8.4 tomando como Ω una bola lo suficientemente grande como para que g se anule en $\partial\Omega$, con lo que la integral sobre $\partial\Omega$ es nula y las integrales en \mathbb{R}^3 coinciden con las integrales en Ω . En la quinta igualdad hemos vuelto a aplicar la fórmula 8.4, esta vez a un cubo abierto acotado con clausura contenida en U y que contenga al soporte compacto de la función $g(r, \theta, \phi)$. Si llamamos X a la expresión entre paréntesis en la última integral, hemos demostrado que

$$\int_U g(\Delta f - X)r^2 \operatorname{sen} \theta dr d\theta d\phi = 0$$

para toda función $g(r, \theta, \phi)$ con soporte compacto contenido en U y en la anti-imagen de A por el cambio de coordenadas. Esto implica que $\Delta f = X$, pues en caso contrario, habría un punto donde la diferencia sería no nula, y por continuidad habría un entorno en el que $\Delta f - X$ sería siempre positivo o siempre negativo, y por el teorema 8.6 podríamos tomar $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow [0, 1]$ no nula con soporte compacto contenido en dicho entorno, de modo que la integral anterior tendría integrando no nulo y con signo constante, luego la integral no podría ser nula y tendríamos una contradicción. Así pues, hemos demostrado lo siguiente:

Teorema 8.9 Si $f : A \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ es una función de clase C^2 , la expresión de su laplaciano en coordenadas esféricas es

$$\Delta f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}.$$

8.3 Las fórmulas de Green

Hay tres fórmulas que se conocen como “fórmulas de Green” y que permiten probar resultados de unicidad sobre ciertas ecuaciones en derivadas parciales. La primera es el caso particular de la fórmula (8.4) que hemos probado en la sección anterior que resulta de tomar $\vec{F} = \nabla g$. Entonces:

$$\int_{\Omega} g \Delta f \, dv + \int_{\Omega} \nabla f \cdot \nabla g \, dv = \int_{\partial \Omega} g \frac{df}{d\vec{n}} \, d\sigma,$$

donde la *derivada de f en la dirección de \vec{n}* se define como

$$\frac{df}{d\vec{n}} = \nabla f \cdot \vec{n}.$$

Ésta es la *primera fórmula de Green*. Si intercambiamos los papeles de f y g y restamos las dos fórmulas obtenemos la *segunda fórmula de Green*:

$$\int_{\Omega} (g \Delta f - f \Delta g) \, dv = \int_{\partial \Omega} \left(g \frac{df}{d\vec{n}} - f \frac{dg}{d\vec{n}} \right) d\sigma.$$

Como primera aplicación vamos a probar una propiedad de las funciones armónicas (definición 5.49):

Teorema 8.10 Si $f, g : V \rightarrow \mathbb{R}$ son dos funciones armónicas y Ω es un abierto acotado con frontera de clase C^1 tal que $\Omega \subset \bar{\Omega} \subset V$ y $f|_{\partial \Omega} = g|_{\partial \Omega}$, entonces $f|_{\Omega} = g|_{\Omega}$.

DEMOSTRACIÓN: Basta aplicar la primera fórmula de Green a la función $h = f - g$, que cumple $h|_{\partial \Omega} = 0$, por lo que la fórmula se reduce a

$$\int_{\Omega} \nabla h \cdot \nabla h \, dv = 0,$$

pero el integrando es una función continua ≥ 0 , luego para tener integral nula tiene que ser idénticamente nulo en Ω , lo que significa que todas las derivadas parciales de h son nulas, luego h es constante, pero, como se anula en $\partial\Omega$, tiene que ser $h = 0$, luego $f = g$. ■

Similarmente podemos probar la unicidad de la solución de la ecuación del calor si imponemos ciertas condiciones:

Teorema 8.11 *Sea $\Omega \subset \bar{\Omega} \subset V \subset \mathbb{R}^n$ donde $\bar{\Omega}$ es compacto y V es abierto. Sea $T : V \times [0, b[\rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^2 que cumpla:*

Ecuación del calor $\Delta T = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}$.

Condición inicial $T(x, 0) = 0$ para todo $x \in \Omega$.

Condiciones de frontera Para cada punto $x \in \partial\Omega$ y cada $t \geq 0$, o bien $T(x, t) = 0$, o bien $\frac{dT}{d\bar{n}} = 0$.

Entonces $T|_{\Omega} = 0$.

Esto implica que si tenemos dos soluciones T_1 y T_2 de la ecuación del calor sobre Ω que satisfagan la misma condición inicial $T_i(x, 0) = f(x)$, para todo $x \in \Omega$ y las mismas condiciones de frontera $T_i(x, t) = g(x, t)$ o bien $\frac{dT_i}{d\bar{n}} = g(x, t)$ para todo $x \in \partial\Omega$, entonces⁴ $T_1 = T_2$. Basta aplicar el teorema a $T = T_1 - T_2$. Por lo tanto, la evolución en el tiempo de la temperatura de un cuerpo está completamente determinada por la temperatura de su superficie, o también por el flujo de calor que se produce a través de ésta.

DEMOSTRACIÓN: Llamemos

$$J(t) = \int_{\Omega} \frac{1}{2} T^2 dv,$$

de modo que, aplicando la ecuación del calor y la primera fórmula de Green con $f = g = T$, obtenemos

$$J'(t) = \int_{\Omega} T \frac{\partial T}{\partial t} dv = \alpha \int_{\Omega} T \Delta T dv = \int_{\partial\Omega} T \frac{dT}{d\bar{n}} d\sigma - \int_{\Omega} \nabla T \cdot \nabla T dv,$$

pero la primera integral del último término es nula por hipótesis, luego

$$\frac{dJ}{dt} = - \int_{\Omega} \nabla T \cdot \nabla T dv.$$

Esto implica que $J'(t) \leq 0$ y, por la condición inicial, $J(0) = 0$ luego, para todo $t \geq 0$, se cumple $J(t) \leq 0$, pero la propia definición de J muestra que $J(t) \geq 0$, luego tiene que ser $J(t) = 0$ para todo $t \geq 0$. Pero entonces $T^2(x, t) = 0$ para todo x y todo $t \geq 0$, luego $T = 0$. ■

⁴En nuestro contexto, necesitamos suponer siempre que las soluciones admiten una extensión de clase C^2 a un abierto mayor que Ω , pero esta hipótesis se puede suprimir trabajando en variedades diferenciales con frontera, un concepto que nosotros no hemos definido.

Para enunciar la tercera fórmula de Green consideramos un abierto $U \subset \mathbb{R}^n$ con $n \geq 3$, sea $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^2 y sea Ω un abierto acotado con frontera de clase C^1 tal que $\Omega \subset \bar{\Omega} \subset U$. Fijemos un punto $x \in \Omega$ y apliquemos la segunda fórmula de Green a la función f , a

$$g(y) = \frac{1}{\|x - y\|^{n-2}}$$

y al abierto Ω_ϵ que resulta de quitarle a Ω una bola cerrada de radio ϵ suficientemente pequeño para que esté contenida en Ω . Observamos que $\Delta g = 0$. En efecto:

$$\frac{\partial g}{\partial y_i} = (n-2) \frac{x_i - y_i}{\|x - y\|^n}, \quad \frac{\partial g^2}{\partial y_i^2} = -\frac{n-1}{\|x - y\|^n} + n(n-2) \frac{(x_i - y_i)^2}{\|x - y\|^{n+2}},$$

y al sumar sobre i queda 0. Si llamamos S_ϵ a la esfera de centro x y radio ϵ , la fórmula de Green nos da que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\epsilon} \frac{\Delta f(y)}{\|x - y\|^{n-2}} dv(y) &= \int_{\partial\Omega} \left(\frac{1}{\|x - y\|^{n-2}} \frac{df}{d\vec{n}} - f \frac{d}{d\vec{n}} \frac{1}{\|x - y\|^{n-2}} \right) d\sigma(y) \\ &+ \int_{S_\epsilon} \left(f \frac{d}{d\vec{n}} \frac{1}{\|x - y\|^{n-2}} - \frac{1}{\|x - y\|^{n-2}} \frac{df}{d\vec{n}} \right) d\sigma(y). \end{aligned}$$

Observemos que hemos cambiado el signo al segundo integrando porque la segunda fórmula de Green exige que \vec{n} sea en cada punto de $\partial\Omega_\epsilon$ el vector normal que apunta hacia afuera de Ω_ϵ , y en el caso de los puntos de S_ϵ dicho vector es el que apunta hacia dentro de la esfera, luego hemos cambiado el signo de modo que, en la segunda integral, \vec{n} sigue siendo, como es habitual, el vector normal que apunta hacia afuera de la esfera.

Puesto que f es de clase C^2 , tenemos que Δf es continua en Ω , luego está acotada en el compacto $\bar{\Omega}$, y el teorema 7.27 implica que el integrando del primer miembro es integrable en Ω , luego existe el límite cuando $\epsilon \rightarrow 0$ de ambos miembros de la igualdad, luego también del último término. Vamos a calcularlo.

Notemos que sobre los puntos de S_ϵ el vector normal unitario viene dado por $\vec{n}(y) = (y - x)/\|x - y\|$, luego los cálculos que hemos hecho antes muestran que

$$\frac{d}{d\vec{n}} \frac{1}{\|x - y\|^{n-2}} = -\frac{n-2}{\|x - y\|^{n-1}}.$$

El último término es, pues,

$$-\frac{(n-2)}{\epsilon^{n-1}} \int_{S_\epsilon} f(y) d\sigma(y) - \int_{S_\epsilon} \frac{1}{\epsilon^{n-2}} \frac{df}{d\vec{n}} d\sigma(y).$$

Si llamamos σ_{n-1} a la medida de Lebesgue de la esfera unitaria de dimensión $n-1$, entonces $\sigma(S_\epsilon) = \epsilon^{n-1} \sigma_{n-1}$, y es claro que la segunda integral está acotada

por $K\sigma_{n-1}\epsilon$, donde K es una cota de la derivada direccional de f en un entorno de x . Por consiguiente este término tiende a 0. Veamos, por último, que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon^{n-1}} \int_{S_\epsilon(x)} f(y) d\sigma = \sigma_{n-1}f(x). \quad (8.5)$$

En efecto:

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{\epsilon^{n-1}} \int_{S_\epsilon(x)} f(y) d\sigma - \sigma_{n-1}f(x) \right| &= \left| \frac{1}{\epsilon^{n-1}} \int_{S_\epsilon(x)} f(y) - f(x) d\sigma \right| \\ &\leq \frac{1}{\epsilon^{n-1}} \int_{S_\epsilon(x)} |f(y) - f(x)| d\sigma. \end{aligned}$$

Dado $\eta > 0$, existe un $\delta > 0$ de manera que si $\|y - x\| < \delta$ entonces $|f(y) - f(x)| < \eta/\sigma_{n-1}$ y entonces, para todo $\epsilon < \delta$, la expresión anterior está acotada por η .

Así pues, hemos probado la igualdad

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\epsilon} \frac{\Delta f(y)}{\|x - y\|^{n-2}} dv(y) &= \int_{\partial\Omega} \left(\frac{1}{\|x - y\|^{n-2}} \frac{df}{d\vec{n}} - f \frac{d}{d\vec{n}} \frac{1}{\|x - y\|^{n-2}} \right) d\sigma(y) \\ &\quad - (n-2)\sigma_{n-1}f(x). \end{aligned}$$

Despejando $f(x)$ llegamos a la *tercera fórmula de Green*:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{(n-2)\sigma_{n-1}} \left(- \int_{\Omega} \frac{\Delta f(y)}{\|x - y\|^{n-2}} dv(y) \right. \\ &\quad \left. + \int_{\partial\Omega} \left(\frac{1}{\|x - y\|^{n-2}} \frac{df}{d\vec{n}} - f \frac{d}{d\vec{n}} \frac{1}{\|x - y\|^{n-2}} \right) d\sigma(y) \right). \end{aligned}$$

Esta fórmula nos dice que el valor de una función de clase C^2 en un punto x está determinado por Δf en un entorno de x y las funciones f y $df/d\vec{n}$ sobre una superficie que rodee a x .

La fórmula se simplifica en el caso en que f es armónica (es decir, si cumple la ecuación $\Delta f = 0$), pues entonces resulta que

$$f(x) = \frac{1}{(n-2)\sigma_{n-1}} \int_{\partial\Omega} \left(\frac{1}{\|x - y\|^{n-2}} \frac{df}{d\vec{n}} - f \frac{d}{d\vec{n}} \frac{1}{\|x - y\|^{n-2}} \right) d\sigma(y),$$

donde Ω es un abierto acotado en \mathbb{R}^n con frontera de clase C^2 en el cual f sea armónica (con $n \geq 3$).

Esta fórmula nos dice en principio que una función armónica f en V está completamente determinada por los valores que f y $df/d\vec{n}$ toman sobre $\partial\Omega$, pero el teorema 8.10 nos dice que en realidad $df/d\vec{n}$ es innecesario. Así pues, aparentemente la tercera fórmula de Green nos da un resultado más débil, pero

si la aplicamos concretamente al caso en que Ω es la bola de centro x y radio r obtenemos la forma explícita en que $f(x)$ depende de $f|_{\partial\Omega}$. En efecto, ahora

$$f(x) = \frac{1}{r^{n-2}(n-2)\sigma_{n-1}} \int_{\partial\Omega} \frac{df}{d\vec{n}} d\sigma + \frac{1}{r^{n-1}\sigma_{n-1}} \int_{\partial\Omega} f d\sigma,$$

y por el teorema de la divergencia

$$\int_{\partial\Omega} \frac{df}{d\vec{n}} d\sigma = \int_{\partial\Omega} \nabla f \cdot \vec{n} d\sigma = \int_{\Omega} \Delta f dv = 0,$$

luego se cumple la relación siguiente:

Teorema 8.12 (Teorema del valor medio de Gauss) *Si f es una función armónica en un abierto⁵ $U \subset \mathbb{R}^n$, $x \in U$ y $r > 0$ cumple que $\bar{B}_r(x) \subset U$, entonces*

$$f(x) = \frac{1}{\sigma(\partial B_r(x))} \int_{\partial B_r(x)} f d\sigma.$$

Esta fórmula afirma que el valor que toma una función armónica en un punto x es la media aritmética de los valores que toma en cualquier esfera con centro en x .

Ejercicio: Deducir la tercera fórmula de Green y sus consecuencias para el caso en que $n = 2$, tomando para ello $g(y) = \log \|x - y\|$ en lugar de $\|x - y\|^{2-n}$.

En la sección siguiente veremos una aplicación más de la tercera fórmula de Green.

8.4 La ecuación de Poisson

En esta sección veremos cómo se aplica el teorema de la divergencia para resolver una ecuación en derivadas parciales, la llamada *ecuación de Poisson*:

$$\Delta g = f,$$

donde f es una función dada y g es la incógnita. Veamos primero un contexto en el que surge una ecuación de Poisson. Antes de leer el apartado siguiente, el lector debería leer la introducción al apéndice B sobre gravitación.

Potenciales newtonianos Vamos a probar que el campo gravitatorio generado por una distribución continua de materia determinada por una función de densidad ρ deriva de una función potencial dada por la definición siguiente para $n = 3$ y $f = \rho$:

⁵Hemos probado el teorema para $n \geq 3$, pero se cumple también si $n = 2$ (véase el ejercicio siguiente).

Definición 8.13 Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ (con $n \geq 3$) un abierto acotado y f una función medible acotada en Ω . Llamaremos *potencial newtoniano* asociado a f a la función

$$V_f(x) = \int_{\Omega} \frac{f(y)}{\|x-y\|^{n-2}} dv(y), \quad \text{para } x \in \mathbb{R}^n.$$

El teorema 7.27 garantiza que el integrando es realmente integrable en Ω , por lo que V_f está bien definido. Sea $g(x, y) = \|x-y\|^{2-n}$. Es claro que g es de clase C^1 en $(\mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}) \times \bar{\Omega}$, luego 5.27 nos garantiza⁶ que V_f es de clase C^1 en $\mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}$ y sus derivadas valen

$$\frac{\partial V_f}{\partial x_i}(x) = -(n-2) \int_{\Omega} \frac{f(y)}{\|x-y\|^n} (x_i - y_i) dv(y). \quad (8.6)$$

Vamos a probar que esta expresión vale igualmente en $\bar{\Omega}$. Por lo pronto observemos que el integrando del segundo miembro es ciertamente integrable. Basta tener en cuenta que

$$\frac{|x_i - y_i|}{\|x-y\|} \leq 1,$$

con lo que el integrando está mayorado por la función integrable $K/\|x-y\|^{n-1}$.

Para cada natural $k \geq 1$ consideremos la función $a_k : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$a_k(r) = \begin{cases} \frac{1}{k^{n-2}} + \frac{n-2}{k^{n-3}} \left(r - \frac{1}{k}\right) & \text{si } r < 1/k \\ r^{n-2} & \text{si } r \geq 1/k \end{cases}$$

Claramente a_k es de clase C^1 en su dominio y además no se anula, pues la derivada es positiva en $[0, 1/k]$. Definimos las funciones

$$V_k(x) = \int_{\bar{\Omega}} \frac{f(y)}{a_k(\|x-y\|)} dv(y).$$

La función $a_k(\|x-y\|)^{-1}$ es de clase C^1 en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, por lo que podemos aplicar el teorema 5.27.

Si probamos que las funciones V_k convergen uniformemente a V_f y sus derivadas convergen uniformemente al segundo miembro de (8.6), el teorema 5.4 nos dará que dicha igualdad es válida en todo punto.

Puesto que los integrandos de $V_f(x)$ y $V_k(x)$ difieren sólo sobre $B_{1/k}(x)$, tenemos que

$$\begin{aligned} |V_f(x) - V_k(x)| &\leq M \int_{B_{1/k}(x)} \left| \frac{1}{\|x-y\|^{n-2}} - \frac{1}{a_k(\|x-y\|)} \right| dv(y) \\ &= M \int_{B_{1/k}(0)} \left| \frac{1}{\|y\|^{n-2}} - \frac{1}{a_k(\|y\|)} \right| dv(y). \end{aligned}$$

⁶La integral puede tomarse en el compacto $\bar{\Omega}$.

La última integral, como función del dominio de integración, es una medida finita en $B_1(0)$ por el teorema 4.51, luego el último miembro tiende a 0 con k , por el teorema 4.20. Esto prueba la convergencia uniforme de V_k . El mismo argumento vale para las derivadas. Observemos que no es necesario calcular explícitamente la derivada del integrando de V_k . Basta tener en cuenta que consta de $f(y)$ multiplicada por una función continua, luego integrable.

Notemos que las derivadas de V_f en los puntos de Ω son el límite uniforme de una sucesión de funciones continuas (las derivadas de V_k), luego V_f es una función de clase C^1 en \mathbb{R}^n .

En particular tenemos (véase la introducción al apéndice B) que el campo y el potencial gravitatorio determinados por una distribución de masa ρ están bien definidos y satisfacen la relación $E = -\nabla V$, como queríamos probar.

Ahora vamos a calcular el laplaciano de V_f . El teorema 5.27 nos permite concluir directamente que V_f es de clase C^∞ en $\mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}$. Más aún, es fácil comprobar que $\Delta_x g = 0$, con lo que también $\Delta V_f = 0$. Para los puntos de $\bar{\Omega}$ no podemos emplear la misma técnica que hemos usado para calcular las primeras parciales, pues las derivadas segundas del integrando no son integrables.

Consideremos un punto $x_0 \in \Omega$ tal que f es de clase C^1 en una bola $B_{2\epsilon}(x_0) \subset \Omega$.

Descomponemos $V_f = V_1 + V_2$, donde ambos sumandos tienen la misma definición que V_f salvo que el dominio de integración es $\bar{B}_\epsilon(x_0)$ en el caso de V_1 y $\bar{\Omega} \setminus B_\epsilon(x_0)$ en el caso de V_2 .

Es claro que V_2 es de clase C^2 en $B_\epsilon(x_0)$. Sus parciales segundas se pueden calcular derivando el integrando. Además $\Delta V_2 = 0$. Por lo tanto, para probar que V_f es de clase C^2 en $B_\epsilon(x_0)$ basta probar que lo es V_1 , y además tendremos que $\Delta V_f(x_0) = \Delta V_1(x_0)$. Ya sabemos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_1}{\partial x_i}(x) &= \int_{\bar{B}_\epsilon(x_0)} f(y) \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{\|x-y\|^{n-2}} \right) dv(y) \\ &= - \int_{\bar{B}_\epsilon(x_0)} f(y) \frac{\partial}{\partial y_i} \left(\frac{1}{\|x-y\|^{n-2}} \right) dv(y) \\ &= - \int_{\bar{B}_\epsilon(x_0)} \left(\frac{\partial}{\partial y_i} \left(\frac{f(y)}{\|x-y\|^{n-2}} \right) - \frac{1}{\|x-y\|^{n-2}} \frac{\partial f}{\partial y_i}(y) \right) dv(y). \end{aligned}$$

La integral del segundo término es el potencial newtoniano de la derivada de f , luego sabemos que tiene derivada continua y viene dada por

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \int_{\bar{B}_\epsilon(x_0)} \frac{1}{\|x-y\|^{n-2}} \frac{\partial f}{\partial y_i}(y) dv(y) = \int_{\bar{B}_\epsilon(x_0)} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{\|x-y\|^{n-2}} \right) \frac{\partial f}{\partial y_i}(y) dv(y).$$

Nos ocupamos ahora del otro término. Aplicamos el teorema de la divergencia al campo \vec{F} dado por

$$\vec{F}(y) = \frac{f(y)}{\|x-y\|^{n-2}} \vec{e}_i,$$

donde e_i es el i -ésimo vector de la base canónica. La divergencia de F es nuestro integrando y su flujo a través de la esfera de radio ϵ (precedido del signo negativo de nuestra integral) es

$$- \int_{\partial B_\epsilon(x_0)} \frac{f(y)}{\|x-y\|^{n-2}} \vec{e}_i \cdot \vec{n}(y) d\sigma(y),$$

donde \vec{n} es el vector unitario normal a la esfera y $d\sigma$ es el elemento de medida de la esfera. A esta integral también le podemos aplicar 5.27, con lo que tiene derivada continua respecto a x_i y viene dada por

$$(n-2) \int_{\partial B_\epsilon(x_0)} \frac{f(y)}{\|x-y\|^n} (x_i - y_i) \vec{e}_i \cdot \vec{n}(y) d\sigma(y).$$

En este punto ya tenemos que V_1 es de clase C^2 en $B_\epsilon(x_0)$. Teniendo en cuenta que $n(y) = (y - x_0)/\|x_0 - y\|$, al particularizar en x_0 tenemos en total

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V_1}{\partial x_i^2}(x_0) &= -(n-2) \int_{\partial B_\epsilon(x_0)} \frac{f(y)(x_{0i} - y_i)^2}{\epsilon^{n+1}} d\sigma(y) \\ &+ \int_{\overline{B}_\epsilon(x_0)} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{\|x-y\|^{n-2}} \right) (x_0, y) \frac{\partial f}{\partial y_i}(y) dv(y). \end{aligned}$$

Por consiguiente:

$$\begin{aligned} \Delta V_f(x_0) = \Delta V_1(x_0) &= -\frac{n-2}{\epsilon^{n-1}} \int_{\partial B_\epsilon(x_0)} f(y) d\sigma \\ &+ \sum_{i=1}^n \int_{\overline{B}_\epsilon(x_0)} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{\|x-y\|^{n-2}} \right) (x_0, y) \frac{\partial f}{\partial y_i} dv. \end{aligned}$$

Como el miembro izquierdo no depende de ϵ , podemos tomar el límite cuando ϵ tiende a 0. El último sumatorio tiende a 0, luego queda

$$\Delta V_f(x_0) = -(n-2) \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon^{n-1}} \int_{\partial B_\epsilon(x_0)} f(y) d\sigma.$$

Este límite lo hemos calculado en (8.5), de modo que la conclusión es que

$$\Delta V_f(x_0) = -(n-2)\sigma_{n-1}f(x_0).$$

Si extendemos f a \mathbb{R}^n con el valor 0 fuera de Ω , hemos probado que V_f es de clase C^2 allí donde f es de clase C^2 (lo cual incluye a todos los puntos de $\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$) y en tales puntos $\Delta V_f = -(n-2)\sigma_{n-1}f$. El análisis que hemos hecho de las parciales de V_f puede usarse inductivamente para probar que si f es de clase C^k alrededor de un punto, lo mismo vale para V_f . Resumimos en un teorema lo que hemos obtenido:

Teorema 8.14 Sea Ω un abierto acotado en \mathbb{R}^n , para $n \geq 3$, y sea f una función medible acotada que se anula fuera de Ω . Entonces el potencial newtoniano

$$V_f(x) = \int_{\Omega} \frac{f(y)}{\|x-y\|^{n-2}} dv(y), \quad \text{para } x \in \mathbb{R}^n$$

es una función de clase C^1 en \mathbb{R}^n y de clase C^k en todos los puntos donde f es de clase C^k . Además

$$\nabla V_f = -(n-2) \int_{\Omega} \frac{f(y)}{\|x-y\|^n} (x-y) dv(y),$$

y en los puntos donde f es de clase C^2 cumple $\Delta V_f = -(n-2)\sigma_{n-1}f$, donde σ_{n-1} es la medida de la esfera unitaria de dimensión $n-1$.

Equivalentemente, hemos probado que la función $g = -\frac{1}{(n-2)\sigma_{n-1}}V_f$ es una solución de la ecuación de Poisson $\Delta g = f$.

La sección B.1 muestra las aplicaciones de los potenciales newtonianos tridimensionales a la gravitación.

Ejercicio: Probar un teorema análogo para $n = 2$ definiendo

$$V_f(x) = \int_{\Omega} f(y) \log \|x-y\| dv(y).$$

Recordemos (véase la sección [ITAn 7.2]) que la notación $f = O(g)$ indica que existen constantes M y R tales que si $\|x\| \geq R$ entonces $|f(x)| \leq M|g(x)|$ (se dice entonces que f es una función del orden de g).

Si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es una función medible acotada que se anula fuera de un conjunto compacto, donde $n \geq 3$, su potencial newtoniano V_f cumple

$$V_f = O(1/\|x\|^{n-2}), \quad \|\nabla V_f\| = O(1/\|x\|^{n-1}).$$

En efecto, si $\Omega \subset B_c(0)$, para cada $y \in \Omega$ y cada x que cumpla $\|x\| \geq c+1$ se cumple que $\|x-y\| \geq \|x\| - \|y\| \geq 1$, luego

$$\frac{\|x\|}{\|x-y\|} \leq \frac{\|x-y\| + \|y\|}{\|x-y\|} \leq 1 + \frac{\|y\|}{\|x-y\|} \leq 1 + c,$$

con lo que

$$\| \|x\|^{n-2} V_f \| \leq \int_{\Omega} \frac{|f(y)| \|x\|^{n-2}}{\|x-y\|^{n-2}} dv(y) \leq \int_{\Omega} K dv = Km(\Omega).$$

Similarmente se razona con el gradiente. Ahora usaremos la tercera fórmula de Green para concluir:

Teorema 8.15 Si $n \geq 3$ y $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es una función medible acotada de soporte compacto y $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es una función de clase C^1 tal que

$$u = O(1/\|x\|), \quad \|\nabla u\| = O(1/\|x\|^2), \quad \Delta u = -(n-2)\sigma_{n-1}f,$$

necesariamente $u = V_f$.

DEMOSTRACIÓN: Basta aplicar la tercera fórmula de Green a la bola B_r de centro 0 y radio r :

$$u(x) = \int_{B_r} \frac{f(y)}{\|x-y\|^{n-2}} dv(y) + \frac{1}{(n-2)\sigma_{n-1}} \int_{\partial B_r} \left(\frac{1}{\|x-y\|^{n-2}} \frac{du}{d\vec{n}} - u \frac{d}{d\vec{n}} \frac{1}{\|x-y\|^{n-2}} \right) d\sigma(y).$$

Si $r \geq 2\|x\|$ es suficientemente grande como para que se cumplan las estimaciones de u y ∇u que estamos suponiendo, tenemos que, en puntos $y \in \partial B_r$, se cumple

$$\left| \frac{du}{d\vec{n}} \right| = |\nabla u \cdot \vec{n}| \leq \|\nabla u\| \leq \frac{K}{r^2}.$$

Por otra parte, teniendo en cuenta que

$$\left| \frac{d}{d\vec{n}} \frac{1}{\|x-y\|^{n-2}} \right| = \left| \nabla \frac{1}{\|x-y\|^{n-2}} \cdot \vec{n} \right| \leq \left\| \frac{(n-2)(x-y)}{\|x-y\|^n} \right\| = \frac{n-2}{\|x-y\|^{n-1}},$$

así como que $\|x-y\| \geq \|y\| - \|x\| \geq r/2$, el integrando de la última integral está acotado por

$$\frac{1}{\|x-y\|^{n-2}} \frac{K}{r^2} + \frac{K}{r} \frac{n-2}{\|x-y\|^{n-1}} \leq \frac{2^{n-2} K}{r^{n-2} r^2} + \frac{K}{r} \frac{(n-2)2^{n-1}}{r^{n-1}} \leq \frac{K'}{r^n},$$

luego la última integral está acotada por K''/r , luego tiende a 0 cuando r tiende a $+\infty$. Consecuentemente

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{\|x-y\|^{n-2}} dv(y).$$

El dominio de integración se puede reducir a cualquier abierto fuera del cual se anule f . Así pues, $u = V_f$. ■

8.5 Funciones armónicas

En 5.49 hemos definido las funciones armónicas en un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ como las funciones de clase C^2 que son soluciones de la *ecuación de Laplace* $\Delta f = 0$. Ya hemos probado algunos hechos sobre ellas, pero ahora vamos a estudiarlas con más detalle.

Observemos que el espacio $H(\Omega)$ de todas las funciones armónicas en Ω es un espacio vectorial, es decir, que la suma de funciones armónicas es armónica, al igual que el producto de un número real por una función armónica.

En cambio, el producto de dos funciones armónicas no es necesariamente armónica. Por ejemplo, $f(x_1, \dots, x_n) = x_1$ es claramente armónica en \mathbb{R}^n , pero su cuadrado no lo es, pues $\Delta f^2 = 2$. El polinomio $f(x, y) = x^2 + y^2$ no es armónico, mientras que $g(x, y) = x^2 - y^2$ sí que lo es.

El teorema 5.50 nos da todas las funciones armónicas en $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ con simetría esférica.

Otra propiedad elemental de las funciones armónicas es la siguiente:

Teorema 8.16 *Si $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una semejanza y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ es una función armónica, donde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es abierto, entonces $g = h \circ f : h^{-1}[\Omega] \rightarrow \mathbb{R}$ es armónica.*

DEMOSTRACIÓN: De acuerdo con [G 5.20], toda semejanza es composición de una isometría y una homotecia, luego basta probar el teorema cuando h es de uno de estos dos tipos.

Si h es una isometría, entonces $h(x) = a + xA$, donde A es una matriz ortogonal. Basta aplicar la regla de la cadena:

$$D_i g(x) = \sum_{j=1}^n D_j f(a + xA) a_{ij}, \quad D_{ii} g(x) = \sum_{j,k=1}^n D_{jk} f(a + xA) a_{ij} a_{ik},$$

luego

$$\Delta g(x) = \sum_{j,k=1}^n D_{jk} f(a + xA) \sum_{i=1}^n a_{ij} a_{ik},$$

pero, como $A^t A = I$, el último sumatorio es la componente j, k de la matriz identidad, luego

$$\Delta g(x) = \sum_{j=1}^n D_{jj} f(a + xA) = \Delta f(h(x)).$$

Por lo tanto, si f es armónica, también lo es g . Si $h(x) = a + r(x - a)$ es una homotecia, entonces

$$D_i g(x) = D_i f(a + r(x - a))r, \quad D_{ii} g(x) = D_{ii} f(a + r(x - a))r^2,$$

luego $\Delta g(x) = \Delta f(h(x))r^2$ y g es armónica si f lo es. ■

Observemos que una función de una variable $f :]u, v[\rightarrow \mathbb{R}$ es armónica si y sólo si es de clase C^2 y $f'' = 0$. Es inmediato que esto equivale a que existen $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $f(x) = ax + b$, para todo $x \in]u, v[$. En otras palabras, las funciones armónicas de una variable son las funciones afines, cuya gráfica es una recta. Ahora vamos a generalizar a funciones armónicas arbitrarias las siguientes propiedades elementales de las rectas:

- a) Toda función armónica $f :]u, v[\rightarrow \mathbb{R}$ es de clase C^∞ .
- b) Si $f :]u, v[\rightarrow \mathbb{R}$ es armónica y $[a - r, a + r] \subset]u, v[$, entonces

$$f(a) = \frac{f(a + r) + f(a - r)}{2}.$$

- c) Si $f :]u, v[\rightarrow \mathbb{R}$ es armónica no constante, entonces no tiene ni máximo ni mínimo. Si f admite una extensión continua $f : [u, v] \rightarrow \mathbb{R}$, entonces su máximo y su mínimo se alcanzan en los extremos del intervalo.
- d) Existe una única función continua $f : [u, v] \rightarrow \mathbb{R}$, armónica en $]u, v[$ que en u y v tome dos valores prefijados cualesquiera.
- e) Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es armónica y está acotada, entonces es constante.

La clave es el teorema del valor medio de Gauss 8.12, que afirma que el valor que una función armónica toma en un punto es la media de los valores que toma en cualquier esfera centrada en él.⁷ Por ejemplo, de él deducimos fácilmente una generalización de la propiedad c): una función armónica no constante f no puede alcanzar un máximo local en ningún punto de su dominio (y aplicando el teorema a $-f$, tampoco un mínimo):

Teorema 8.17 (Principio del máximo) *Sea f una función armónica no constante en un abierto conexo $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Entonces*

- a) *Para todo $x_0 \in \Omega$ se cumple $f(x_0) < \sup_{x \in \Omega} f(x)$.*
- b) *Si Ω está acotado y f es continua en $\bar{\Omega}$, entonces para todo $x_0 \in \Omega$ se cumple*

$$f(x_0) < \max_{x \in \partial\Omega} f(x).$$

DEMOSTRACIÓN: Sea $m = \sup_{x \in \Omega} f(x)$ (quizá $m = +\infty$). Descomponemos Ω como unión de los conjuntos

$$\Omega_1 = \{x \in \Omega \mid f(x) = m\}, \quad \Omega_2 = \{x \in \Omega \mid f(x) < m\}.$$

La continuidad de f implica que Ω_2 es abierto. Si probamos que Ω_1 también lo es, por conexión uno de los dos será vacío, pero como f no es constante tendrá que serlo Ω_1 y a) quedará demostrado. Para probar que Ω_1 es abierto podemos suponer que es no vacío, lo que implica que m es finito.

Tomemos $x_0 \in \Omega_1$. Por el teorema anterior, para r suficientemente pequeño se cumple

$$0 = \int_{\|x-x_0\|=r} f(x) d\sigma - \sigma(\partial B_r(x_0))f(x_0) = \int_{\|x-x_0\|=r} (f(x) - f(x_0)) d\sigma.$$

Como $f(x) - f(x_0) = f(x) - m \leq 0$, la desigualdad anterior es una igualdad, y $f(x) = m$ para todo x tal que $\|x - x_0\| = r$, para todo r suficientemente pequeño, es decir, hay un entorno de x_0 contenido en Ω_1 . Esto prueba a). El apartado b) es una consecuencia inmediata. ■

Nota En la demostración anterior hemos supuesto tácitamente $n \geq 2$, cosa que haremos habitualmente, pues, dado que las funciones armónicas en \mathbb{R} son simplemente las rectas, los enunciados para $n = 1$ se prueban siempre trivialmente. ■

⁷Esta propiedad podría justificar el nombre de “funciones armónicas”, si bien históricamente no proviene de ella.

El problema de Dirichlet La generalización de la propiedad d) se conoce como el problema de Dirichlet. Más precisamente, dado un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ con frontera no vacía y una función f continua en $\partial\Omega$, el *problema de Dirichlet* para Ω y f consiste en encontrar una función continua $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$, armónica en Ω y tal que $u|_{\partial\Omega} = f$.

En primer lugar observamos que, si un problema de Dirichlet tiene solución, ésta es única:

Teorema 8.18 *Sea Ω un abierto en \mathbb{R}^n distinto de \emptyset y de \mathbb{R}^n . Sea $f : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua armónica en Ω y tal que $f = 0$ en $\partial\Omega$. Entonces $f = 0$ en Ω .*

DEMOSTRACIÓN: Podemos suponer que Ω es conexo y basta probar que f es constante en Ω , pero si no lo fuera, por el teorema anterior debería ser $f < 0$ en Ω y $f > 0$ en Ω (porque $-f$ también es armónica). ■

Esto prueba, en efecto, la unicidad de la solución del problema de Dirichlet, pues si u_1, u_2 son funciones continuas en $\bar{\Omega}$ y armónicas en Ω que coinciden en $\partial\Omega$, entonces $u_1 - u_2$ está en las hipótesis del teorema anterior, y la conclusión es que $u_1 = u_2$.

No todos los problemas de Dirichlet tienen solución, pero aquí probaremos que sí que la tienen cuando Ω es una bola abierta. En principio consideramos una bola $B_r(0) \subset \mathbb{R}^n$ de centro 0 y una función continua $f : \partial B_r(0) \rightarrow \mathbb{R}$. Vamos a extenderla a una función continua que sea armónica en $B_r(0)$.

Definición 8.19 El *núcleo de Poisson para esferas* es la función

$$P(x, y) = \frac{\|y\|^2 - \|x\|^2}{\|x - y\|^n}.$$

Una comprobación rutinaria muestra que, para cada $y \in \mathbb{R}^n$ fijo y todo $x \neq y$ se cumple $\Delta_x P = 0$, donde $\Delta_x P$ representa el laplaciano de la función $x \mapsto P(x, y)$. Definimos

$$u_f(x) = \frac{1}{\sigma(\partial B_r(0))} \int_{\|y\|=r} P(x, y) f(y) d\sigma(y), \quad \text{para } \|x\| < r.$$

Como podemos derivar bajo la integral (teorema 5.27), es claro que Δu_f es armónica en $B_r(0)$. Vamos a probar que si $z \in \partial B_r(0)$, entonces existe

$$\lim_{x \rightarrow z} u_f(x) = f(z).$$

Esto prueba que si extendemos u_f a la frontera de la bola como $u_f(z) = f(z)$ obtenemos una extensión continua de f , que resuelve el problema de Dirichlet. Consideremos primero el caso en que $f = 1$. Entonces

$$u_1(x) = \frac{1}{\sigma(\partial B_r(0))} \int_{\|y\|=r} \frac{r^2 - \|x\|^2}{\|x - y\|^n} d\sigma(y).$$

Sea h el giro de centro 0 que cumple $h(\|x\|e_1) = x$, donde e_1 es el primer vector de la base canónica. Aplicando el teorema de cambio de variable resulta que

$$u_1(x) = \frac{1}{\sigma(\partial B_r(0))} \int_{\|y\|=r} \frac{r^2 - \|h(\|x\|e_1)\|^2}{\|h(\|x\|e_1) - y\|^n} d\sigma(y) = u_1(\|x\|e_1),$$

luego si llamamos $g(r) = u_1(re_1)$ hemos probado que $u_1(x) = g(\|x\|)$, luego u_1 tiene la forma indicada en el teorema 5.50. Ahora bien, u_1 está definida en 0, luego la única posibilidad es que u_1 sea constante. Es fácil ver que $u_1(0) = 1$, luego $u_1 = 1$.

Volvamos ahora al caso general. Fijemos un punto tal que $\|z\| = r$. Como f es continua en z , dado $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $\|y - z\| < \delta$ entonces $|f(y) - f(z)| < \epsilon/2$. Tomemos $\|x\| < r$ tal que $\|x - z\| \leq \delta/2$. Entonces

$$\begin{aligned} u_f(x) - f(z) &= u_f(x) - f(z)u_1(x) = \\ &= \frac{1}{\sigma(\partial B_r(0))} \int_{\|y\|=r} \frac{r^2 - \|x\|^2}{\|x - y\|^n} (f(y) - f(z)) d\sigma(y). \end{aligned}$$

Descomponemos en dos partes la integral. La primera sobre el conjunto de los puntos que cumplen $\|y - z\| \geq \delta$ y la segunda sobre los que cumplen $\|y - z\| < \delta$.

En el primer caso tenemos $\delta \leq \|y - z\| \leq \|x - y\| + \|x - z\| \leq \|x - y\| + \delta/2$, luego $\|x - y\| \geq \delta/2$. Así pues, si M es una cota de f ,

$$\begin{aligned} |u_f(x) - f(z)| &\leq \frac{2M}{\sigma(\partial B_r(0))} (r^2 - \|x\|^2) \left(\frac{2}{\delta}\right)^n \\ &+ \frac{\epsilon}{2\sigma(\partial B_r(0))} \int_{\|y\|=r} \frac{r^2 - \|x\|^2}{\|x - y\|^n} d\sigma(y) \\ &\leq \frac{2M}{\sigma(\partial B_r(0))} (r^2 - \|x\|^2) \left(\frac{2}{\delta}\right)^n + \frac{\epsilon}{2}. \end{aligned}$$

Si tomamos x suficientemente próximo a z podemos exigir que el primer sumando sea menor que $\epsilon/2$, con lo que obtenemos $|u_f(x) - f(z)| < \epsilon$.

Con esto hemos probado que el problema de Dirichlet siempre tiene solución para una bola $B_r(0)$. Si partimos de una bola de centro arbitrario $B_r(x_0)$ y de una función continua $f : \partial B_r(0) \rightarrow \mathbb{R}$, el problema se reduce al caso ya considerado tomando la función $f^* : \partial B_r(0) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f^*(x) = f(x + x_0)$, que nos proporciona la función $u_{f^*} : \bar{B}_r(0) \rightarrow \mathbb{R}$ a partir de la cual podemos definir $u_f : \bar{B}_r(0) \rightarrow \mathbb{R}$ mediante $u_f(x) = u_{f^*}(x - x_0)$. Es inmediato comprobar que la traslación de una función armónica sigue siendo armónica, con lo que u_f es una solución del problema de Dirichlet planteado por f en $B_r(x_0)$. En suma, hemos probado el teorema siguiente:

Teorema 8.20 Sea $f : \partial B_r(x_0) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Entonces existe una única función continua $u_f : \bar{B}_r(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$ que extiende a f y es armónica en $B_r(x_0)$. En los puntos interiores de la bola u_f viene dada por

$$u_f(x) = \frac{1}{\sigma(\partial B_r(x_0))} \int_{\|y-x_0\|=r} P(x-x_0, y) f(y) d\sigma(y).$$

De aquí se desprenden muchas consecuencias. La unicidad de la extensión nos da inmediatamente la siguiente propiedad de las funciones armónicas, que generaliza al teorema de Gauss:

Teorema 8.21 Sea Ω un abierto en \mathbb{R}^n , sea $f \in H(\Omega)$, sea $x_0 \in \Omega$ y $r > 0$ tal que $\bar{B}_r(x_0) \subset \Omega$. Entonces si $\|x\| < r$ se cumple

$$f(x) = \frac{1}{\sigma(\partial B_r(x_0))} \int_{\|y-x_0\|=r} P(x-x_0, y-x_0) f(y) d\sigma(y).$$

La ventaja de esta expresión es que ahora x es un parámetro en la integral, lo que permite aplicar el teorema 5.27:

Teorema 8.22 Toda función armónica en un abierto de \mathbb{R}^n es de clase C^∞ , y sus derivadas parciales son también funciones armónicas.

DEMOSTRACIÓN: Basta tener en cuenta que, en las condiciones del teorema anterior, el núcleo de Poisson

$$P(x-x_0, y-y_0) = \frac{r^2 - \|x-x_0\|^2}{\|x-y\|^n}$$

tiene derivadas parciales de todos los órdenes respecto las variables x_i y todas ellas son continuas en $B_r(x_0) \times \partial B_r(x_0)$. Por lo tanto, el teorema 5.27 implica que f es de clase C^∞ en $B_r(x_0)$.

Además el teorema de Schwarz implica que el laplaciano de una derivada parcial de una función de clase C^3 es la derivada parcial del laplaciano, luego es nulo si la función es armónica, y concluimos que las derivadas parciales de una función armónica son armónicas. ■

Ahora podemos probar que la propiedad del valor medio caracteriza a las funciones armónicas, sin necesidad de ningún requisito de diferenciabilidad:

Teorema 8.23 Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto no vacío y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua tal que para cada $x \in \Omega$ existe una sucesión $\{r_j\}_j$ convergente a 0 de números reales positivos tales que

$$f(x) = \frac{1}{\sigma(\partial B_{r_j}(x))} \int_{\partial B_{r_j}(x)} f d\sigma.$$

Entonces f es armónica en Ω .

DEMOSTRACIÓN: Tomemos $a \in \Omega$ y fijemos un $R > 0$ tal que $\bar{B}_R(a) \subset \Omega$. Sea g la única función continua en $\bar{B}_R(a)$, armónica en $B_R(a)$ que cumple $g|_{\partial B_R(a)} = f|_{\partial B_R(a)}$. Basta probar que $f|_{B_R(a)} = g$.

Supongamos que f y g difieren en algún punto de la bola. Intercambiando una por otra si es preciso, podemos suponer, más concretamente, que $g - f$ es positiva en algún punto de la bola. Sea $M > 0$ el valor máximo de $g - f$ en $\bar{B}_R(a)$ y sea $E = f|_{\bar{B}_R(a)}^{-1}(M)$. Como E es compacto, podemos tomar $x \in E$ donde $\|x - a\|$ tome el valor máximo. Como $E \cap \partial B_R(a) = \emptyset$, tenemos que $x \in B_R(a)$, luego podemos tomar $r > 0$ tal que $B_r(x) \subset B_R(a)$ y de modo que f tenga la propiedad del valor medio en $B_r(x)$. Como g también la tiene, resulta que

$$M = g(x) - f(x) = \frac{1}{\sigma(\partial B_r(x))} \int_{\partial B_r(x)} (g - f) d\sigma < M,$$

donde la última desigualdad se debe a que $g(y) - f(y) \leq M$ en todos los puntos de $\partial B_r(x)$ y, por la forma en que hemos elegido x , la desigualdad es estricta en un abierto no vacío (al menos media esfera, luego de medida positiva). Así tenemos una contradicción. ■

Sólo nos falta generalizar propiedad e) que habíamos enunciado para funciones de una variable. Para ello conviene probar antes lo siguiente:

Teorema 8.24 (Desigualdades de Cauchy) *Para cada $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y todos los índices $j_1 + \dots + j_n = m$, existe una constante $C_{j_1, \dots, j_n} > 0$ tal que si $r > 0$ y $f : B_r(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$ es una función armónica acotada por M , entonces*

$$\left| \frac{\partial^m f}{\partial x_1^{j_1} \dots \partial x_n^{j_n}} \Big|_{x_0} \right| \leq \frac{C_{j_1, \dots, j_n} M}{r^m}.$$

DEMOSTRACIÓN: Definimos

$$C_{j_1, \dots, j_n} = \int_{\|y\|=1} \left| \frac{\partial^m P(0, y)}{\partial x_1^{j_1} \dots \partial x_n^{j_n}} \Big|_{x_0} \right| d\sigma(y).$$

Sea $0 < r' < r$ y, para cada función armónica $f : B_r(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$ acotada por M , consideremos la función $g(x) = f(r'x + x_0)$, que por 8.16 es armónica en $B_{r/r'}(0)$ y también está acotada por M . Para cada $x \in B_{r'}(x_0)$, el teorema 8.21 nos da que

$$f(x) = g((x - x_0)/r') = \frac{1}{\sigma(\partial B_0(1))} \int_{\|y\|=1} P((x - x_0)/r', y) g(y) d\sigma(y),$$

luego

$$\frac{\partial^m f}{\partial x_1^{j_1} \dots \partial x_n^{j_n}} = \frac{1}{r'^m \sigma(\partial B_0(1))} \int_{\|y\|=1} \frac{\partial^m P((x - x_0)/r')}{\partial x_1^{j_1} \dots \partial x_n^{j_n}} g(y) d\sigma(y),$$

de donde, a su vez,

$$\left| \frac{\partial^m f}{\partial x_1^{j_1} \cdots \partial x_n^{j_n}} \Big|_{x_0} \right| \leq \frac{C_{j_1, \dots, j_n} M}{r'^m}.$$

Como esto vale para todo $0 < r' < r$, es claro que también vale para r . ■

Como consecuencia:

Teorema 8.25 (Teorema de Liouville) *Si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es una función armónica acotada, entonces es constante.*

DEMOSTRACIÓN: El teorema anterior implica que las derivadas parciales de f en cualquier punto son nulas (pues podemos tomar r arbitrariamente grande), luego f es constante. ■

Con esto hemos probado ya todos los resultados que nos habíamos propuesto demostrar, pero vamos a ver una consecuencia interesante de 8.21:

Teorema 8.26 *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto no vacío y $\{f_m\}_{m=0}^\infty$ una sucesión de funciones armónicas en Ω que converge uniformemente en cada subconjunto compacto de Ω a una función $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Entonces f es armónica en Ω y las derivadas parciales $\frac{\partial f_m}{\partial x_i}$ convergen a $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ uniformemente en cada subconjunto compacto de Ω .*

DEMOSTRACIÓN: Sea $x_0 \in \Omega$ y fijemos un $r > 0$ tal que $\bar{B}_r(x_0) \subset \Omega$. El hecho de que f_m converja uniformemente a f en la bola cerrada implica que f es continua en $\bar{B}_r(x_0)$ (luego, de hecho, en todo Ω). Además, por 8.21, para todo $x \in B_r(x_0)$, tenemos que

$$f_m(x) = \frac{1}{\sigma(\partial B_r(x_0))} \int_{\|y-x_0\|=r} P(x-x_0, y-x_0) f_m(y) d\sigma(y).$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} & \left| f_m(x) - \frac{1}{\sigma(\partial B_r(x_0))} \int_{\|y-x_0\|=r} P(x-x_0, y-x_0) f(y) d\sigma(y) \right| \\ & \leq \frac{1}{\sigma(\partial B_r(x_0))} \int_{\|y-x_0\|=r} P(x-x_0, y-x_0) |f_m(y) - f(y)| d\sigma(y) \leq \\ & \max_{y \in \partial B_r(x_0)} |f_m(y) - f(y)| \frac{1}{\sigma(\partial B_r(x_0))} \int_{\|y-x_0\|=r} P(x-x_0, y-x_0) d\sigma(y) \\ & = \max_{y \in \partial B_r(x_0)} |f_m(y) - f(y)|, \end{aligned}$$

donde la parte que hemos eliminado en el último paso es la expresión que extiende la función constante 1 a una función armónica en la bola abierta, luego

es constante igual a 1. Usando ahora que f_m converge uniformemente a f en el compacto $\partial B_r(x_0)$, concluimos que

$$f(x) = \frac{1}{\sigma(\partial B_r(x_0))} \int_{\|y-x_0\|=r} P(x-x_0, y-x_0) f(y) d\sigma(y),$$

y esto significa que $f|_{B_r(x)}$ es la función armónica que extiende a $f|_{\partial B_r(x)}$, luego f es armónica. Similarmente se cumple que

$$\frac{\partial f_m(x)}{\partial x_i} = \frac{1}{\sigma(\partial B_r(x_0))} \int_{\|y-x_0\|=r} \frac{\partial P(x-x_0, y-x_0)}{\partial x_i} f_m(y) d\sigma(y),$$

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_i} = \frac{1}{\sigma(\partial B_r(x_0))} \int_{\|y-x_0\|=r} \frac{\partial P(x-x_0, y-x_0)}{\partial x_i} f(y) d\sigma(y),$$

luego

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\partial f_m(x)}{\partial x_i} - \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \right| \leq \\ & \frac{1}{\sigma(\partial B_r(x_0))} \int_{\|y-x_0\|=r} \left| \frac{\partial P(x-x_0, y-x_0)}{\partial x_i} \right| |f_m(y) - f(y)| d\sigma(y). \end{aligned}$$

Si $K \subset B_r(x_0)$ es compacto y M es una cota de $\partial H/\partial x_i$ en $K \times \partial B_r(x_0)$, llegamos a que, para todo $x \in K$,

$$\left| \frac{\partial f_m}{\partial x_i} - \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \leq K \max_{y \in \partial B_r(x_0)} |f_m(y) - f(y)|,$$

y la convergencia uniforme de f_m en $\partial B_r(x_0)$ nos da la convergencia uniforme de las derivadas en K . Falta probar que la convergencia es uniforme en cualquier subconjunto compacto $K \subset \Omega$, aunque no esté contenido en una bola como la que hemos considerado. Ahora bien, para cada $x_0 \in K$ podemos tomar bolas $B_r(x_0) \subset \bar{B}_r(x_0) \subset B_{r'}(x_0) \subset \bar{B}_{r'}(x_0) \subset \Omega$, extraemos un subcubrimiento finito de las bolas $B_r(x_0)$ y usamos que la convergencia es uniforme en cada compacto $K \cap \bar{B}_r(x_0) \subset B_{r'}(x_0)$, lo que implica la convergencia uniforme en K . ■

Terminamos con una última aplicación: las funciones del teorema 5.50 son ejemplos de funciones armónicas en $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ con una singularidad aislada en 0, es decir, que no pueden prolongarse a funciones armónicas en un entorno de 0, porque tienden a infinito en 0. Ahora vamos a probar que si una función f es armónica en $B_r(x_0) \setminus \{x_0\}$ y está acotada, entonces puede extenderse a una función armónica en x_0 . En realidad vamos a probar este resultado con una hipótesis más débil que la acotación:

Teorema 8.27 *Sea $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una función armónica en un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ y sean $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$ tales que $B_r(x_0) \setminus \{x_0\} \subset \Omega$. Sea*

$$g(x) = \begin{cases} \|x-x_0\|^{n-2} & \text{si } n \geq 3, \\ \log \|x-x_0\| & \text{si } n = 2, \end{cases}$$

y supongamos que existe $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$. Entonces f se extiende a una función armónica en $\Omega \cup \{x_0\}$.

DEMOSTRACIÓN: Cambiando r por un radio menor podemos suponer que $\partial B_r(x_0) \subset \Omega$. Sea $v : B_r(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$ la solución del problema de Dirichlet para f . Basta probar que $f|_{B_r(x_0) \setminus \{x_0\}} = v|_{B_r(x_0) \setminus \{x_0\}}$.

Equivalentemente, tenemos que probar que $w = f - v : B_r(x_0) \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$ es idénticamente nula. En principio sabemos que es continua, que se anula en $\partial B_r(x_0)$ y que es armónica en $B_r(x_0) \setminus \{x_0\}$. Además, si llamamos

$$r' = \begin{cases} r^{2-n} & \text{si } n \geq 3, \\ \log r & \text{si } n = 2, \end{cases}$$

tenemos que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{w(x)}{r' - g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)/g(x) - v(x)/g(x)}{r'/g(x) - 1} = 0,$$

pues v está acotada y $g(x)$ tiende a infinito. Por consiguiente, para todo $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $0 < \|x - x_0\| < \delta$ entonces

$$|w(x)| \leq \epsilon(r' - g(x)).$$

Equivalentemente, $\pm w(x) - \epsilon(r' - g(x)) \leq 0$ en $\bar{B}_\delta(x_0)$. Se trata de una función armónica en la corona $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \delta < \|x - x_0\| < r\}$ y es ≤ 0 en la frontera (aquí usamos que w se anula en $\partial B_r(x_0)$). Por el principio del máximo concluimos que la desigualdad es válida en $\bar{B}_\delta(x_0) \setminus \{0\}$, y también lo es en la forma original $|w(x)| \leq \epsilon(r' - g(x))$. Como esto se cumple para todo $\epsilon > 0$, tiene que ser $w = 0$. ■

8.6 Funciones holomorfas

En [IC] vimos que las propiedades fundamentales de las funciones holomorfas en abiertos del plano complejo se pueden demostrar a partir de un único resultado no trivial, el teorema de Cauchy para triángulos [IC 7.13]. Concretamente, allí lo usamos para demostrar la existencia de primitivas [7.14] y las fórmulas de Cauchy para circunferencias [7.16]. En esta sección vamos a probar que el teorema de Cauchy para un triángulo es una consecuencia del teorema de la divergencia si incluimos en la definición de función holomorfa la condición de que sea de clase C^1 .

Recordemos que al principio de la sección [IC 7.1] definimos una función holomorfa $f : A \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ como una función derivable en sentido complejo en todos los puntos del abierto A , y en [IC 7.2] vimos que esto equivale a que la función sea diferenciable como función $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ y que satisfaga las ecuaciones de Cauchy-Riemann. Pero en [IC 7.16] vimos que las funciones holomorfas son, de hecho, de clase C^∞ .

Por consiguiente, si definimos una función holomorfa $f : A \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ como una función de clase C^1 derivable en todos los puntos del abierto A en el sentido complejo, o equivalentemente, como una función de clase C^1 que satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann, las funciones holomorfas en este sentido son las mismas definidas en [IC].

Sin embargo, el hecho de que la condición de ser de clase C^1 se pueda relajar a la mera diferenciabilidad, aunque no es evidente y tiene interés conceptual, no es especialmente útil a la hora de trabajar con funciones holomorfas, por lo que es razonable reforzar la definición de función holomorfa exigiendo de antemano que sea de clase C^1 , y lo que vamos a ver aquí es que entonces el teorema de Cauchy para un triángulo se sigue inmediatamente del teorema de la divergencia o, más precisamente, de su versión bidimensional, el teorema de Green.

Recordemos que en [IC 7.5] definimos la integral curvilínea de una función $f : A \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ sobre un arco $\phi : [a, b] \rightarrow A$ como

$$\begin{aligned} \int_{\phi} f(\zeta) d\zeta &= \int_a^b f(\phi(t))\phi'(t) dt = \\ &= \int_a^b (\operatorname{Re} f(\phi(t))x' - \operatorname{Im} f(\phi(t))y') dt + i \int_a^b (\operatorname{Re} f(\phi(t))y' + \operatorname{Im} f(\phi(t))x') dt = \\ &= \int_a^b (\operatorname{Re} f dx - \operatorname{Im} f dy) + i \int_a^b (\operatorname{Re} f dy + \operatorname{Im} f dx), \end{aligned}$$

donde $\phi(t) = (x(t), y(t))$. Por lo tanto, si f es de clase C^1 y $\Omega \subset \bar{\Omega} \subset A$ es un abierto con frontera de clase C^1 (salvo a lo sumo en un número finito de puntos), aplicando el teorema de Green a los campos $(-\operatorname{Im} f, \operatorname{Re} f)$ y $(\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f)$, concluimos que

$$\int_{\partial\Omega} f(\zeta) d\zeta = \int_{\Omega} \left(-\frac{\partial \operatorname{Im} f}{\partial x} - \frac{\partial \operatorname{Re} f}{\partial y} \right) dx dy + i \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \operatorname{Re} f}{\partial x} - \frac{\partial \operatorname{Im} f}{\partial y} \right) dx dy.$$

Y si suponemos que f es holomorfa, entonces las ecuaciones de Cauchy-Riemann [IC 7.2] implican que los últimos integrandos son nulos. Así pues:

Teorema 8.28 *Si $f : A \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es una función holomorfa en un abierto A y $\Omega \subset \bar{\Omega} \subset A$ es un abierto acotado con frontera de clase C^1 (salvo a lo sumo en un número finito de puntos singulares), entonces*

$$\int_{\partial\Omega} f(\zeta) d\zeta = 0,$$

donde la integral se calcula con parametrizaciones de $\partial\Omega$ que dejan a Ω a la izquierda del sentido de avance.

Esto se aplica en particular al caso en que Ω es el interior de un triángulo, con lo que obtenemos el teorema de Cauchy para triángulos [IC 7.13], salvo que en [IC] lo enunciamos con una hipótesis ligeramente más débil según la cual f podía no ser holomorfa en un punto excepcional p , en el que sólo exigíamos que fuera continua.

La única razón para admitir un punto excepcional era que así lo requiere la prueba de la fórmula de Cauchy para circunferencias [IC 7.16], pero a continuación vamos a ver que ésta se deduce también del teorema anterior sin necesidad de puntos excepcionales:

Teorema 8.29 (Fórmula de Cauchy para circunferencias) Sea A un abierto en \mathbb{C} y $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa. Si $z_0 \in A$ y $r > 0$ es tal que $\overline{D(z_0, r)} \subset A$, entonces, si $|z - z_0| < r$,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

DEMOSTRACIÓN: Aquí hay que entender que la integral se calcula recorriendo la circunferencia en sentido antihorario. Veamos en primer lugar el caso $z = z_0$, para lo cual probamos en primer lugar que la integral no depende de r , es decir, que si $0 < r_1 < r_2$ cumplen que $\overline{D(z_0, r_2)} \subset A$, entonces

$$\int_{|\zeta - z_0| = r_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta = \int_{|\zeta - z_0| = r_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta.$$

Basta aplicar el teorema anterior el abierto $\Omega = \{z \in \mathbb{C} \mid r_1 < |z - z_0| < r_2\}$, según el cual

$$\int_{|\zeta - z_0| = r_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta - \int_{|\zeta - z_0| = r_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta = 0.$$

En efecto, sólo tenemos que observar que, para que Ω quede a la izquierda respecto del sentido de avance, la circunferencia exterior de radio r_2 debe recorrerse en sentido antihorario, mientras que la interior debe recorrerse en sentido horario. En la igualdad anterior, hay que entender que ambas circunferencias se recorren en sentido antihorario, pero hemos puesto un signo negativo a la segunda para compensar que su sentido de giro no es el que requiere el teorema.

Ahora fijamos $\epsilon > 0$ y tomamos $r > 0$ suficientemente pequeño como para que si $|\zeta - z_0| = r$, entonces $|f(\zeta) - f(z_0)| < \epsilon$. Usamos además que

$$\int_{|z - z_0| = r} \frac{1}{\zeta - z_0} d\zeta = 2\pi i,$$

que se obtiene por un cálculo sencillo de la mera definición (está hecho tras el teorema [IC 7.8]). Así, usando [IC 7.6 c)]:

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta - f(z_0) \right| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta) - f(z_0)}{\zeta - z_0} d\zeta \right| \\ &\leq \frac{\epsilon}{2\pi r} L(\phi) = \epsilon. \end{aligned}$$

Como esto se cumple para todo ϵ , concluimos que se da la igualdad buscada.

Sea ahora un z arbitrario y tomemos un radio s tal que $\overline{D(z, s)} \subset D(z_0, r)$. Entonces el teorema anterior, junto con la parte ya probada, implica que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z| = s} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = f(z),$$

pues las dos circunferencias constituyen la frontera del abierto $D(z_0, r) \setminus \overline{D(z, s)}$. ■

Capítulo IX

Análisis harmónico

En la introducción hemos presentado el problema de la cuerda vibrante y su relación con las series de Fourier. Antes de presentar la teoría sobre estas series vamos a ver cómo permiten resolver también la ecuación del calor, que fue la que estudió Fourier. Para ello planteamos un ejemplo concreto:

Una esfera de hierro de 1 cm de radio se calienta hasta una temperatura de 100° C y a continuación se sumerge en una cuba de agua a 30° C. Determinar la temperatura en cada punto de la esfera a partir del momento de la inmersión.

Identificamos la esfera con el conjunto

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

y llamamos $T(x, t)$ a la función que da la temperatura en cada instante t del punto x de la esfera. En la sección 8.2 hemos visto que un modelo razonable sobre cómo evoluciona la temperatura T en la situación descrita viene dado por la ecuación del calor:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \Delta T,$$

donde α es una constante llamada *difusividad térmica* que para el caso del hierro puede estimarse en $\alpha = 2.3 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s} = 0.23 \text{ cm}^2/\text{s}$.

Hay que suponer que la cuba es lo suficientemente grande como para absorber el calor de la esfera sin modificar apreciablemente su temperatura, de modo que al cabo de un tiempo la esfera terminará a la temperatura ambiente de 30° C. Más aún, vamos a suponer que el tiempo que tarda la superficie de la esfera en alcanzar la temperatura ambiente es despreciable o, dicho de otro modo, que la superficie pasa instantáneamente de la temperatura de 100°C a la de 30°C. Un planteamiento más realista sería considerar la *ley de enfriamiento de Newton*, que postula que la variación de temperatura en la superficie de la esfera es proporcional a la diferencia de temperatura respecto de la temperatura ambiente T_0 :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -r(T - T_0).$$

De este modo, el descenso de temperatura en la superficie es también gradual, pero el problema con la ley de Newton requiere técnicas que exceden el alcance de la teoría que vamos a desarrollar aquí.

Por comodidad vamos a usar una escala alternativa de temperatura en la que $30^\circ C$ corresponda a $T = 0$ y $100^\circ C$ corresponda a $T = 1$. Al final expresaremos los resultados de nuevo en grados centígrados. En lugar de suponer que la temperatura inicial de la esfera es constante, podemos trabajar en el contexto más general en el que la distribución de temperatura es radial, es decir, que $T = T(r, t)$ depende únicamente de la distancia r al centro de la esfera y del tiempo. Por simetría, si esto es así en el instante inicial $t = 0$, seguirá siendo así en todo momento. Teniendo en cuenta que $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, vemos que

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial r} \frac{x}{r}, \quad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} \frac{x^2}{r^2} + \frac{\partial T}{\partial r} \frac{r - x^2/r}{r^2},$$

y al derivar respecto de y, z obtenemos fórmulas análogas, con lo que

$$\Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (rT)}{\partial r^2}.$$

(Esta fórmula es un caso particular de la probada en el teorema 8.9.) Resulta conveniente definir $T(r, t)$ para valores negativos de r estableciendo que $T(-r, t) = T(r, t)$, para $-1 \leq r \leq 1$. Esto significa que r recorre, no sólo un radio, sino un diámetro completo de la esfera. En estos términos, el planteamiento completo del problema es:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2 (rT)}{\partial r^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}, \quad T(\pm 1, t) = 0, \quad T(r, 0) = F(r), \quad \text{para } -1 < r < 1.$$

donde $F : [-1, 1] \rightarrow [0, +\infty[$ es, en principio, una función arbitraria (razonable) que cumpla $F(-r) = F(r)$ (que en las condiciones del enunciado es concretamente $F(r) = 1$). La segunda ecuación es lo que se llama la *condición de frontera*, y establece que la temperatura en la frontera de la esfera tiene que ser 0 en todo momento, mientras que la tercera ecuación es la *condición inicial*, y prescribe la temperatura de la superficie de la esfera en $t = 0$.

Notemos que sólo exigimos la condición inicial para $|r| < 1$ porque nuestra intención es particularizar al caso $F(r) = 1$, y suponer que la condición inicial se cumple para $r = \pm 1$ contradiría la condición de frontera, debido al supuesto de “enfriamiento instantáneo” de la superficie que hemos discutido antes.

Conviene hacer el cambio de variable $U(r, t) = rT(r, t)$. En términos de la función U el problema se convierte en

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial U}{\partial t}, \quad U(\pm 1, t) = 0, \quad U(r, 0) = rF(r), \quad \text{para } -1 < r < 1.$$

La técnica de D'Alembert de separación de variables nos permite encontrar soluciones sencillas de esta ecuación de la forma $U(r, t) = u(r)v(t)$. Al sustituir

esta expresión en la ecuación diferencial obtenemos $u''(r)v(t) = u(r)v'(t)/\alpha$, o también

$$\frac{u''(r)}{u(r)} = \frac{v'(t)}{\alpha v(t)} = -\lambda^2$$

No nos preocupamos mucho por si podemos estar dividiendo entre 0 porque nuestro propósito es acabar con una función que cumpla la ecuación y, si el resultado es correcto, el camino recorrido no importará para nada. La cuestión es que el hecho de que una función que depende sólo de r sea igual a otra que depende sólo de t implica que ambas tienen que ser constantes, y llamamos $-\lambda^2$ a dicha constante. Con esta notación estamos anticipando el hecho de que, como veremos, la constante tiene que ser negativa.

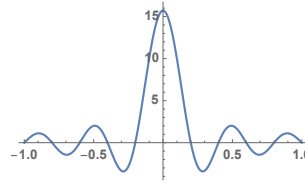
La ecuación para $v(t)$ tiene una solución muy simple: Integrando ambos miembros vemos que $\log v(t) = -\alpha\lambda^2 t + k$, de donde $v(t) = c'e^{-\alpha\lambda^2 t}$, para cierta constante c' . La ecuación para $u(r)$ es del tipo estudiado en [IC 1.35], donde vimos que sus soluciones son $v(r) = c'' \cos(\lambda r + \phi)$, para ciertas constantes c'' , $\phi \in \mathbb{R}$. Por lo tanto, una solución de la ecuación del calor es de la forma

$$U(r, t) = c \cos(\lambda r + \phi) e^{-\alpha\lambda^2 t}$$

(y podemos comprobar que esto es así independientemente del camino que hemos seguido para llegar hasta ella). Para que se cumpla $U(0, 0) = 0$ podemos tomar $\phi = \pi/2$, lo cual equivale a que $U(r, t) = c \operatorname{sen}(\lambda r) e^{-\alpha\lambda^2 t}$. Las condiciones $U(\pm 1, 0) = 0$ equivalen a¹ que $\lambda = n\pi$, luego las funciones

$$U_n(r, t) = c_n \operatorname{sen}(n\pi r) e^{-\alpha n^2 \pi^2 t}$$

cumplen todas las condiciones del problema salvo la condición inicial. Por ejemplo, la figura muestra la gráfica de la función $F_5(r) = U_5(r, 0)/r$ con $c_5 = 1$, que es la condición inicial para la cual U_5 resuelve el problema. Esta condición inicial no se parece en nada a la que nos interesa, pero es evidente que la suma de dos soluciones de la ecuación del calor es otra solución, por lo que Fourier consideró soluciones de la forma



$$U(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen}(n\pi r) e^{-\alpha n^2 \pi^2 t}.$$

Aquí hay que señalar que la presencia de las exponenciales impide que se dé el fenómeno que hemos visto en la introducción que puede darse en el caso de la ecuación de ondas, y es que en este caso podemos asegurar que la serie infinita definirá una función de clase C^∞ siempre que los coeficientes c_n formen una sucesión acotada, y dicha función será también una solución de la ecuación del calor.

¹Si hubiéramos usado λ^2 en vez de $-\lambda^2$ [IC 1.36] nos daría $v(r) = A \cosh(\lambda r) + B \operatorname{senh}(\lambda r)$, y la condición $U(0, 0) = 0$ forzaría $A = 0$, mientras que $U(1, 0) = 0$ nos daría $\lambda = 0$. Pero, en realidad, si partimos de $\lambda = 0$ obtenemos $v(r) = ar + b$, $v(t) = c$, y de ahí se llega a la solución $U(r, t) = 0$.

En efecto, basta aplicar el teorema [IC 1.21]. Consideramos primero un t fijo, de modo que la serie converge trivialmente en $r = 0$ y las derivadas de los sumandos son

$$f'_n(r) = n\pi c_n \cos(n\pi r) e^{-\alpha n^2 \pi^2 t},$$

de modo que

$$|f'_n(r)| \leq K n e^{-\alpha n^2 \pi^2 t} = M_n,$$

y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ converge por el criterio de D'Alembert [ITAn 2.12]. El teorema [IC 1.21] nos asegura entonces que la serie converge a una función derivable, de modo que

$$\frac{\partial U}{\partial r} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial U_n}{\partial r} = \sum_{n=1}^{\infty} n\pi c_n \cos(n\pi r) e^{-\alpha n^2 \pi^2 t},$$

pero el mismo razonamiento se puede aplicar inductivamente a las derivadas sucesivas, luego U es infinitamente derivable respecto de r , y además

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^2 U_n}{\partial r^2}.$$

Por otro lado, si ahora fijamos un valor de r y consideramos la serie como función de t en un intervalo $]\epsilon, K[$, hemos probado que la serie converge para cualquier valor de t , y sus derivadas son

$$f'_n(t) = -\alpha n^2 \pi^2 c_n \sin(n\pi r) e^{-\alpha n^2 \pi^2 t},$$

de modo que

$$|f'_n(t)| \leq K n^2 e^{-\alpha n^2 \pi^2 \epsilon} = M_n,$$

y de nuevo la serie $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ converge por el criterio de D'Alembert. La conclusión es ahora que existe

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial U_n}{\partial t} = -\alpha \pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} n^2 c_n \sin(n\pi r) e^{-\alpha n^2 \pi^2 t},$$

y el argumento es aplicable inductivamente a las derivadas sucesivas, incluso a las derivadas cruzadas. Más aún, todas las derivadas de cualquier orden son funciones continuas en $]-1, 1[\times]0, +\infty[$ por el criterio de mayoración de Weierstrass.

El hecho de que las funciones U_n cumplan la ecuación del calor se traduce en que

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^2 U_n}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha} \frac{\partial U_n}{\partial t} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial U}{\partial t}.$$

También es inmediato que, como los sumandos cumplen la condición de frontera, lo mismo le sucede a la suma U . Por último, que U cumpla la condición inicial equivale a que

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(n\pi r) = rF(r), \quad (9.1)$$

y éste es el punto donde interviene la teoría de Fourier. En la primera sección demostraremos que la función $f(r) = rF(r)$ admite un desarrollo en serie de Fourier en el que la propiedad $f(-r) = -f(r)$ implica que no hay sumandos correspondientes a cosenos, por lo que será justamente de la forma (9.1), para ciertos coeficientes c_n a partir de los cuales obtendremos una solución $U(r, t)$ del problema que tenemos planteado, concretamente, la dada por

$$T(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{\text{sen}(n\pi r)}{r} e^{-\alpha n^2 \pi^2 t}.$$

Veremos que la teoría de Fourier no sólo asegura (bajo condiciones “razonables”) la existencia de desarrollos en serie de Fourier, sino que indica cómo calcular explícitamente los coeficientes para una función dada. Por ejemplo, en el caso en que $F(r) = 1$, veremos que el desarrollo en serie de Fourier de $f(x) = x$ en el intervalo $[-1, 1]$ es

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi} \text{sen } n\pi x, \quad -1 < x < 1,$$

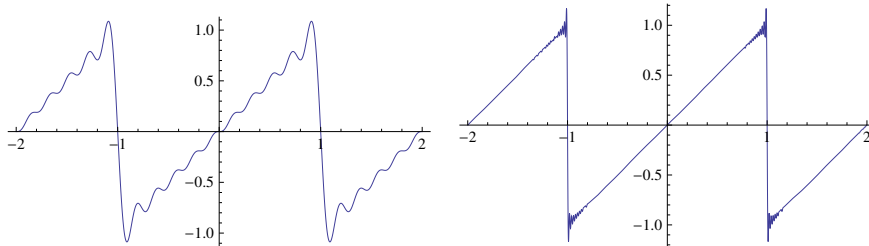
lo que a su vez da lugar a la solución

$$T(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2}{n\pi} \frac{\text{sen}(n\pi r)}{r} e^{-\alpha n^2 \pi^2 t}$$

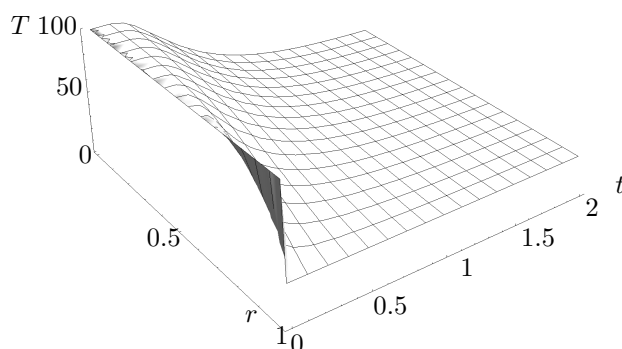
o, si volvemos a expresar la temperatura en grados:

$$T(r, t) = 30 + 140 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi} \frac{\text{sen}(n\pi r)}{r} e^{-\alpha n^2 \pi^2 t}.$$

He aquí las sumas parciales de la serie de Fourier de $f(x) = x$ con 10 y 100 sumandos, respectivamente:



La figura siguiente muestra la función T (calculada como la suma de los 5 000 primeros términos de la serie que la define). Vemos que su comportamiento es el requerido: en $t = 0$ es constante igual a 100° , y a partir de ahí la temperatura va descendiendo con el tiempo hasta alcanzar la temperatura ambiente de 30° . Observamos también la discontinuidad en $(r, t) = (1, 0)$ provocada por la hipótesis de enfriamiento instantáneo de la superficie de la esfera.

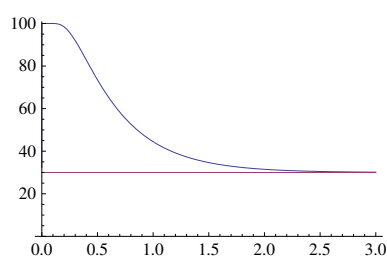


La temperatura en el centro de la esfera ($r = 0$) viene dada por

$$T(0, t) = 30 + 140 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} e^{-\alpha n^2 \pi^2 t}.$$

Vemos en la gráfica que al cabo de 3s el centro y, por consiguiente, toda la esfera, ha alcanzado ya prácticamente la temperatura ambiente.

También es interesante observar que hay un breve lapso de unas décimas de segundo en las que la temperatura del centro apenas varía. Teóricamente, la ecuación del calor establece que las variaciones de calor se transmiten de forma instantánea, en el sentido de que, por ejemplo, la temperatura del centro empieza a variar (aunque sea poco) en el mismo instante en que la esfera se sumerge en el agua, lo cual no es físicamente posible, pero en la práctica el modelo es aceptable, pues predice que la variación inicial que se da en teoría es prácticamente inapreciable. ■



9.1 Series de Fourier

Dada una función $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, vamos a abordar el problema de en qué condiciones puede expresarse como suma de una serie trigonométrica y con qué coeficientes. Ahora bien, para operar con funciones trigonométricas a menudo es útil la relación $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, pues la exponencial compleja es más fácil de manejar. Esto requiere considerar funciones de variable compleja a pesar de que nuestro problema inicial está planteado para funciones de variable real. Para ello necesitamos algunas definiciones:

Si (X, μ) es un espacio medida y $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ es una función arbitraria, podemos expresarla de forma única como $f = f_1 + if_2$, donde las funciones $f_1, f_2 : X \rightarrow \mathbb{R}$ son las partes real e imaginaria de f . Diremos que f es *medible* o *integrable* en X si lo son f_1 y f_2 , y en caso de que sea integrable definiremos

$$\int_X f d\mu = \int_X f_1 d\mu + i \int_X f_2 d\mu.$$

En 6.8 definimos los espacios $L^p(\mu)$ reales, pero la definición se adapta trivialmente para definir un espacio análogo de funciones con valores complejos. Nos centramos en el caso $p = 2$, que es el único que vamos a necesitar:

Definición 9.1 Si (X, μ) es un espacio medida, definimos $L^2(\mu)$ como el conjunto de todas las funciones medibles $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ tales que

$$\|f\| = \sqrt{\int_X |f|^2 d\mu} < \infty,$$

donde $|f| = \sqrt{f_1^2 + f_2^2}$ es una función real.

Si usamos \mathbb{K} para referirnos indistintamente a \mathbb{R} o \mathbb{C} , ahora tenemos definido el espacio $L^2(\mu)$ real y el complejo. Vamos a ver que las propiedades básicas del espacio real implican sus análogas complejas.

Para empezar, tenemos claramente que $|f|^2 = |f_1|^2 + |f_2|^2$ es integrable si y sólo si lo son $|f_1|^2$ y $|f_2|^2$, luego $f \in L^2(\mu)$ (complejo) si y sólo si $f_1, f_2 \in L^2(\mu)$ (real). Además, se cumple que $\|f\| = \sqrt{\|f_1\|^2 + \|f_2\|^2}$.

De aquí se sigue inmediatamente que si $f, g \in L^2(\mu)$, entonces $f + g \in L^2(\mu)$, pues, de hecho,

$$\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|.$$

Y como $|\alpha f| = |\alpha| |f|$, para todo $\alpha \in \mathbb{C}$, de la propia definición de la norma se sigue que si $f \in L^2(\mu)$, entonces $\alpha f \in L^2(\mu)$ y $\|\alpha f\| = |\alpha| \|f\|$.

A su vez, esto implica que $L^2(\mu)$ es un \mathbb{K} -espacio vectorial, y que las funciones de norma nula forman un subespacio vectorial, por lo que podemos considerar el espacio cociente, al que llamaremos también $L^2(\mu)$, cuyos elementos son clases de equivalencia de funciones, de modo que $[f] = [g]$ si y sólo si $\|f - g\| = 0$. En la práctica escribiremos f en lugar de $[f]$. Además, la norma $\|f\|$ no depende del representante elegido en una clase, por lo que, en el cociente, $\| \cdot \| : L^2(\mu) \rightarrow \mathbb{R}$ es una norma en el sentido de la definición 2.1.

La relación $\|f\| = \sqrt{\|f_1\|^2 + \|f_2\|^2}$ implica que una sucesión en un espacio $L^2(\mu)$ complejo es de Cauchy o convergente si y sólo si lo son las sucesiones de las partes reales e imaginarias en el espacio $L^2(\mu)$ real, y entonces el hecho de que el espacio real sea un espacio de Banach (teorema 6.9) implica que el espacio complejo también lo es.

Podemos dotar a cada espacio $L^2(\mu)$ complejo de estructura de espacio de Hilbert considerando el producto escalar dado por

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle &= \int_X f \bar{g} d\mu = \int_X f_1 g_1 d\mu + \int_X f_2 g_2 d\mu + i \left(\int_X f_2 g_1 d\mu - \int_X f_1 g_2 d\mu \right) \\ &= \langle f_1, g_1 \rangle + \langle f_2, g_2 \rangle + i(\langle f_2, g_1 \rangle - \langle f_1, g_2 \rangle), \end{aligned} \tag{9.2}$$

donde los últimos productos escalares son los correspondientes al espacio $L^2(\mu)$ real. Notemos que la norma inducida por el producto escalar, es decir, la dada por $\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}$ es precisamente la norma que ya teníamos definida, y precisamente por eso decimos que el espacio complejo $L^2(\mu)$ es un espacio de Hilbert.

Como vamos a considerar únicamente la medida de Lebesgue sobre diferentes espacios, en lo sucesivo escribiremos $L^2(X)$ en lugar de $L^2(\mu)$, destacando el conjunto en el que trabajamos en lugar de su medida.

Por último observamos que el teorema 6.14 para el caso real implica inmediatamente la versión compleja, luego si X es un espacio topológico localmente compacto, el espacio $C_c(X)$ de las funciones continuas en X con soporte compacto es denso en $L^2(X)$.

Fijemos ahora un intervalo $[a, b]$ en \mathbb{R} y sea $T = b - a > 0$. En principio estamos interesados en el espacio $L^2([a, b])$, pero es conveniente observar que podemos representarlo en términos de funciones definidas en toda la recta real:

Definimos $L^2(T)$ como el espacio de todas las funciones $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$ de periodo T cuya restricción a $[0, T]$ está en $L^2([0, T])$. Si $f \in L^2(T)$, definimos $\|f\| = \|f|_{[0, T]}\|$.

Es claro entonces que $L^2(T)$ es un \mathbb{K} -espacio vectorial y que el subconjunto formado por las funciones de norma 0 es un subespacio vectorial, por lo que podemos llamar también $L^2(T)$ al espacio cociente.

Observemos que la restricción $L^2(T) \rightarrow L^2([0, T])$, es decir, la aplicación $[f] \mapsto [f|_{[0, T]}]$, es un isomorfismo de espacios vectoriales. Para ello observamos que, dada $[f] \in L^2([0, T])$, podemos suponer que $f(0) = f(T)$, porque podemos modificar el valor de $f(T)$ sin modificar la clase $[f]$ y, una vez garantizado esto, podemos extender f a una función periódica $F \in L^2(T)$ tal que $F|_{[0, T]} = f$, y esto implica que la restricción es suprayectiva. El resto de la prueba es una comprobación rutinaria.

Más aún, la restricción es una isometría si en $L^2(T)$ consideramos el producto escalar dado por

$$\langle f, g \rangle = \langle f|_{[0, T]}, g|_{[0, T]} \rangle = \int_0^T f(x) \overline{g(x)} dx.$$

Esto significa que, teniendo en cuenta que podemos modificar las funciones en conjuntos nulos, es lo mismo considerar una función definida en un intervalo $[0, T]$ que considerarla como función en \mathbb{R} de periodo T . Pero todavía podemos decir más: para todos los números $a, t \in \mathbb{R}$, la periodicidad de las funciones implica que

$$\int_0^T f(x) \overline{g(x)} dx = \int_a^{a+T} f(x+t) \overline{g(x+t)} dx.$$

En efecto, podemos expresar $a+t = nT + a'$, con $n \in \mathbb{Z}$ y $0 \leq a' < T$, y entonces

$$\begin{aligned} \int_0^T f(x) \overline{g(x)} dx &= \int_0^{a'} f(x) \overline{g(x)} dx + \int_{a'}^T f(x) \overline{g(x)} dx = \\ &= \int_T^{a'+T} f(x-T) \overline{g(x-T)} dx + \int_{a'}^T f(x) \overline{g(x)} dx = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_T^{a'+T} f(x)\overline{g(x)} dx + \int_{a'}^T f(x)\overline{g(x)} dx = \int_{a'}^{a'+T} f(x)\overline{g(x)} dx \\
& = \int_{a-t}^{a+t+T} f(x-nT)\overline{g(x-nT)} dx = \int_{a+t}^{a+t+T} f(x)\overline{g(x)} dx = \\
& \qquad \qquad \qquad \int_a^{a+T} f(x+t)\overline{g(x+t)}.
\end{aligned}$$

Esta relación para $t = 0$ implica que la restricción define, de hecho, una isometría $L^2(T) \rightarrow L^2([a, b])$, para cualquier intervalo $[a, b]$ con $T = b - a$, mientras que con $a = 0$ obtenemos que las traslaciones $T_t : L^2(T) \rightarrow L^2(T)$ dadas por $T_t(f)(x) = f(x + t)$ son isometrías.

Por otra parte, podemos definir una isometría $L^2(S^1) \rightarrow L^2(T)$ mediante

$$f \mapsto f^*(x) = \sqrt{\frac{2\pi}{T}} f\left(\cos \frac{2\pi x}{T}, \operatorname{sen} \frac{2\pi x}{T}\right).$$

En efecto, es claro que $f \mapsto f^*$ transforma funciones de cuadrado integrable en funciones de cuadrado integrable y, de hecho,

$$\int_{S^1} |f|^2 d\sigma = \int_0^T |f|^2\left(\cos \frac{2\pi x}{T}, \operatorname{sen} \frac{2\pi x}{T}\right) \frac{2\pi}{T} dx = \int_0^T |f^*|^2(x) dx.$$

Por lo tanto, $\|f\| = \|f^*\|$. En particular $f \mapsto f^*$ transforma funciones de norma nula en funciones de norma nula, luego induce una aplicación entre los espacios cociente respectivos respecto de las funciones de norma nula, que claramente es un isomorfismo de espacios vectoriales. Además es una isometría, porque

$$\begin{aligned}
\langle f, g \rangle &= \int_{S^1} f\bar{g} d\sigma = \int_0^T (f\bar{g})\left(\cos \frac{2\pi x}{T}, \operatorname{sen} \frac{2\pi x}{T}\right) \frac{2\pi}{T} dx \\
&= \int_0^T f^*(x)\overline{g^*(x)} dx = \langle f^*, g^* \rangle.
\end{aligned}$$

En resumen, lo que tenemos es que los espacios $L^2(S^1)$, $L^2(T)$ y $L^2([a, b])$, para cualquier intervalo de longitud T , son esencialmente el mismo espacio (todos son isométricos), de modo que es indistinto ver sus elementos como funciones definidas sobre S^1 , como funciones definidas sobre \mathbb{R} con periodo T , o como funciones definidas en $[a, b]$.

Ahora vamos a sacar partido al hecho de que podemos trabajar sobre S^1 considerando $S^1 \subset \mathbb{C}$, de modo que los puntos de S^1 pueden verse como números complejos, y entonces, entre las funciones continuas $S^1 \rightarrow \mathbb{C}$ tenemos las potencias z^n , con $n \in \mathbb{Z}$. Veamos que

$$\int_{S^1} z^n d\sigma = \begin{cases} 2\pi & \text{si } n = 0, \\ 0 & \text{si } n \neq 0. \end{cases}$$

En efecto, para calcular la integral podemos tomar la carta $X :]0, 2\pi[\rightarrow S^1$ dada por $X(t) = (\cos t, \sin t) = e^{it}$, que cumple $\Delta = 1$ y, por otra parte,

$$X(t)^n = e^{int} = \cos nt + i \sin nt,$$

luego

$$\begin{aligned} \int_{S^1} z^n d\sigma &= \int_0^{2\pi} (\cos nt + i \sin nt) dt = \int_0^{2\pi} \cos nt dt + i \int_0^{2\pi} \sin nt dt \\ &= \frac{1}{n} [\sin nt]_0^{2\pi} - \frac{i}{n} [\cos nt]_0^{2\pi} = 0, \end{aligned}$$

donde en la última línea hemos supuesto que $n \neq 0$, pues si $n = 0$ la integral vale claramente 2π .

Esto se traduce a su vez en que las funciones $\{z^n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ forman una familia ortogonal en $L^2(S^1)$, pues, teniendo en cuenta que —sobre S^1 — la conjugación se reduce a $\overline{z^n} = z^{-n}$, tenemos que

$$\langle z^n, z^m \rangle = \int_{S^1} z^{n-m} d\sigma = \begin{cases} 2\pi & \text{si } m = n, \\ 0 & \text{si } m \neq n. \end{cases}$$

Además, vemos que $\|z^n\| = \sqrt{2\pi}$. Vamos a probar que esta familia es una base ortogonal de $L^2(S^1)$. Para ello llamamos $V \leq L^2(S^1)$ al subespacio generado por todas las funciones z^n , es decir, el conjunto de todas las combinaciones lineales finitas de potencias de z (con exponentes enteros). De acuerdo con el teorema 3.50, basta probar que V es denso en $L^2(S^1)$. Ahora bien, como $C(S^1, \mathbb{K})$ es denso en $L^2(S^1)$, basta ver que V es denso en $C(S^1, \mathbb{C})$.

Para probar esto usaremos el teorema de Stone-Weierstrass. En primer lugar, el hecho de que el producto de potencias de z sea una potencia de z implica claramente que el producto de elementos de V está en V , luego V es una subálgebra de $C(S^1, \mathbb{C})$, y ciertamente $1 = z^0 \in V$. Además $z : S^1 \rightarrow \mathbb{C}$ no es más que la identidad, luego separa cualquier par de puntos de S^1 . Por último, el hecho de que $\overline{z^n} = z^{-n}$ implica que si $f \in V$ también $\bar{f} \in V$.

Con esto hemos probado que V es denso en $C(S^1, \mathbb{C})$ respecto de la topología de la convergencia uniforme, pero es inmediato que si una sucesión $\{f_n\}_{n=0}^\infty$ de funciones de V converge uniformemente a una función $f \in C(S^1, \mathbb{C})$, también converge respecto de la norma de $L^2(S^1)$.

En efecto, lo que sabemos es que, dado $\epsilon > 0$, para todo n suficientemente grande se cumple que $\|f - f_n\|_\infty < \epsilon^2/m(S^1)$, y esto implica que

$$\|f - f_n\|_2^2 = \int_{S^1} |f - f_n|^2 d\sigma \leq \int_{S^1} \|f - f_n\|_\infty^2 d\sigma < \epsilon^2,$$

luego $\|f - f_n\|_2 < \epsilon$. Así pues, hemos demostrado lo siguiente:

Teorema 9.2 *La familia $\{z^n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ es una base ortogonal de $L^2(S^1)$ cuyos elementos tienen todos norma $\sqrt{2\pi}$.*

Veamos ahora qué aspecto tiene esta base cuando la consideramos en $L^2(T)$. Para ello, si $f_n(z) = z^n$, calculamos

$$\begin{aligned} f_n^*(t) &= \sqrt{\frac{2\pi}{T}} f_n\left(\cos \frac{2\pi x}{T}, \operatorname{sen} \frac{2\pi x}{T}\right) = \sqrt{\frac{2\pi}{T}} f_n\left(\cos \frac{2\pi x}{T} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi x}{T}\right) = \\ &= \sqrt{\frac{2\pi}{T}} f_n(e^{2\pi xi/T}) = \sqrt{\frac{2\pi}{T}} e^{2\pi nxi/T}. \end{aligned}$$

Como $f \mapsto f^*$ es una isometría, sabemos que estas funciones tienen norma $\sqrt{2\pi}$. Así hemos probado la mitad del teorema siguiente:

Teorema 9.3 Dado $T > 0$, se cumple:

a) Las funciones

$$e^{2\pi nxi/T}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

son una base ortogonal de $L^2(T)$ cuyos elementos tienen todos norma \sqrt{T} .

b) Las funciones

$$1, \quad \cos \frac{2\pi nx}{T}, \quad \operatorname{sen} \frac{2\pi nx}{T}, \quad n \geq 1,$$

son una base ortogonal de $L^2(T)$ cuyos elementos tienen todos norma $\sqrt{T}/2$ excepto la función 1, que tiene norma \sqrt{T} .

DEMOSTRACIÓN: Sólo falta probar b). Para ello observamos que

$$\begin{aligned} \cos \frac{2\pi nx}{T} &= \frac{1}{2} e^{2\pi nxi/T} + \frac{1}{2} e^{-2\pi nxi/T}, \\ \operatorname{sen} \frac{2\pi nx}{T} &= \frac{1}{2i} e^{2\pi nxi/T} - \frac{1}{2i} e^{-2\pi nxi/T}, \end{aligned}$$

de donde se sigue que el subespacio vectorial de $L^2(T)$ generado por las funciones $e^{2\pi nxi/T}$ es el mismo que el generado por las funciones

$$1, \quad \cos \frac{2\pi nx}{T}, \quad \operatorname{sen} \frac{2\pi nx}{T}, \quad n \geq 1,$$

que es denso en $L^2(T)$, y el hecho de que la base de las exponenciales sea ortogonal se traduce inmediatamente en que estas funciones trigonométricas son una familia ortogonal, luego también son una base ortogonal de $L^2(T)$. Además,

$$\left\langle \cos \frac{2\pi nx}{T}, \cos \frac{2\pi nx}{T} \right\rangle = \frac{1}{4}(T + T) = \frac{T}{2},$$

e igualmente con los senos, por lo que las funciones tienen norma $\sqrt{T}/2$ excepto la función 1, que claramente tiene norma \sqrt{T} . ■

En particular, la base $\frac{1}{\sqrt{T}} e^{2\pi nxi/T}$ es ortonormal, luego todo $f \in L^2(T)$ se expresa de forma única como

$$f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left\langle \frac{1}{\sqrt{T}} e^{2\pi nxi/T}, f \right\rangle \frac{1}{\sqrt{T}} e^{2\pi nxi/T} = \frac{1}{T} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left\langle e^{2\pi nxi/T}, f \right\rangle e^{2\pi nxi/T}$$

Igualmente se razona con la segunda base, y esto nos lleva a la definición siguiente:

Definición 9.4 Sean $a < b$ dos números reales y $T = b - a$. Si $f \in L^2([a, b])$, su *serie de Fourier* es la serie funcional

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \frac{2n\pi x}{T} + b_n \operatorname{sen} \frac{2n\pi x}{T}),$$

donde

$$a_n = \frac{2}{T} \int_a^b f(x) \cos \frac{2n\pi x}{T} dx, \quad b_n = \frac{2}{T} \int_a^b f(x) \operatorname{sen} \frac{2n\pi x}{T} dx.$$

Alternativamente, se llama también *serie de Fourier* de f a la serie

$$f(x) \sim \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{2n\pi xi/T}, \quad \text{donde} \quad \hat{f}(n) = \frac{1}{T} \int_a^b f(x) e^{-2n\pi xi/T} dx.$$

Observemos que hemos dejado un 2 “fuera” de la definición de a_0 para compensar el hecho de que la norma de la función 1 es distinta de la de las demás funciones de la base, de manera que la definición de a_0 sigue el mismo esquema que la de los otros a_n .

Escribimos \sim para indicar que, en principio, sólo tenemos asegurado que las series convergen (a f) respecto de la norma de $L^2([a, b])$, lo cual no garantiza que converjan puntualmente y, aunque así sea, no tenemos asegurado que converjan puntualmente a f .

Se comprueban inmediatamente las relaciones $a_0 = 2\hat{f}(0)$ y

$$a_n = \hat{f}(n) + \hat{f}(-n), \quad b_n = i(\hat{f}(n) - \hat{f}(-n)), \quad \text{para } n \neq 0,$$

de donde, despejando, obtenemos a su vez que $\hat{f}(0) = a_0/2$ y

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2}(a_n - ib_n), \quad \hat{f}(-n) = \frac{1}{2}(a_n + ib_n), \quad \text{para } n \geq 0.$$

Observemos que si f toma valores reales, entonces sus coeficientes de Fourier a_n y b_n son también números reales y $\hat{f}(-n) = \overline{\hat{f}(n)}$.

Particularizamos ahora a nuestro contexto algunos resultados generales de la sección 3.5:

Teorema 9.5 (Identidad de Parseval) *Los coeficientes de Fourier de cualquier función f cumplen:*

$$\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n|^2 + |b_n|^2) = \frac{2}{T} \|f\|^2$$

o, respecto de la base compleja:

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|^2 = \frac{1}{T} \|f\|^2.$$

El teorema siguiente es 3.51:

Teorema 9.6 (Riesz-Fischer) *Todo par de sucesiones $\{a_n\}_{n=0}^\infty$, $\{b_n\}_{n=1}^\infty$ para las que converge la serie del teorema anterior constituyen la sucesión de coeficientes de Fourier de una única función $f \in L^2(T)$. Alternativamente, toda $\hat{f} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ es la sucesión de coeficientes de Fourier de una única función $f \in L^2(T)$.*

Más aún, como las funciones $\frac{1}{\sqrt{T}}e^{2\pi nxi/T}$ forman una base ortonormal de $L^2(T)$, la prueba del teorema 3.51 muestra que una isometría $L^2(T) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z})$ viene dada explícitamente por

$$f \mapsto \left\langle f, \frac{1}{\sqrt{T}}e^{2\pi nxi/T} \right\rangle_n = \sqrt{T}\hat{f}.$$

Teorema 9.7 (Lema de Riemann-Lebesgue) *Las sucesiones de coeficientes de Fourier tienden a 0:*

$$\lim_n \int_0^T f(x) \cos \frac{2n\pi x}{T} dx = \lim_n \int_0^T f(x) \sin \frac{2n\pi x}{T} dx = 0,$$

$$\lim_n \int_0^T f(x) e^{\pm 2n\pi xi/T} = 0.$$

(Porque sus módulos al cuadrado determinan series convergentes, luego tienden a 0.)

En principio, las series de Fourier convergen a la función que las define respecto de la norma de $L^2(T)$, lo cual no garantiza que converjan puntualmente. Una condición suficiente para la convergencia puntual es que la función sea derivable:

Teorema 9.8 *Sea $f \in L^2(T)$ y $x_0 \in \mathbb{R}$ un punto en el que f es derivable. Entonces la serie de Fourier de f converge puntualmente a $f(x_0)$ en x_0 .*

DEMOSTRACIÓN: No perdemos generalidad si trabajamos en el intervalo $[-\pi, \pi]$ y suponemos que $x_0 = 0$. Más aún, podemos suponer que $f(0) = 0$, pues la serie de Fourier de $f^* = f - f(0)$ es la misma que la de f , salvo que $\hat{f}^*(0) = \hat{f}(0) - f(0)$. La derivabilidad equivale a que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = f'(0).$$

Consideramos la función

$$g(x) = \frac{f(x)}{e^{ix} - 1},$$

²El espacio $\ell^2(\mathbb{Z})$ se define igual que $\ell^2 = \ell^2(\mathbb{N})$ pero considerando sucesiones en \mathbb{Z} . Cualquier biyección entre \mathbb{Z} y \mathbb{N} induce una isometría entre ambos.

que claramente cumple

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -i \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)/x}{(e^{ix} - 1)/ix} = -if'(0).$$

Esto implica que g y, por consiguiente, $|g|^2$, esté acotada en un entorno de 0. Es fácil ver que g es medible, luego $|g|^2$ es integrable en dicho entorno, y el resto del intervalo $[-\pi, \pi]$ también es integrable porque $|f|^2$ lo es y la función $|e^{ix} - 1|^{-2}$ está acotada fuera de cualquier entorno de 0. En suma, $g \in L^2(T)$ y

$$f(x) = (e^{ix} - 1)g(x).$$

Esta relación implica inmediatamente que $\hat{f}(n) = \hat{g}(n-1) - \hat{g}(n)$. Por lo tanto

$$\sum_{n=-k}^l \hat{f}(n) = \hat{g}(-k-1) - \hat{g}(l),$$

pues al expresar cada $\hat{f}(n)$ en términos de \hat{g} todos los términos se cancelan excepto los dos que aparecen en el miembro derecho. Ahora basta observar que si evaluamos en $x = 0$ la serie de Fourier de f obtenemos

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n),$$

y las sumas parciales de esta serie convergen a 0 por el lema de Riemann-Lebesgue aplicado a \hat{g} . ■

Así pues, si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$ es una función periódica derivable, entonces es la suma (puntual) de su serie de Fourier.

Ejemplo Vamos a calcular la serie de Fourier de la función $f(x) = x$ en el intervalo $[-1, 1]$. El hecho de que sea una función impar (es decir, que cumple $f(-x) = -f(x)$), se traduce fácilmente en que $a_n = 0$ para todo n . Por otra parte,

$$b_n = \int_{-1}^1 x \operatorname{sen} n\pi x \, dx = \frac{2}{n\pi} (-1)^{n+1},$$

como se obtiene fácilmente integrando por partes. Por consiguiente,

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} (-1)^{n+1} \operatorname{sen} n\pi x, \quad -1 < x < 1,$$

tal y como hemos usado en el problema que hemos discutido en la introducción. En la página 398 están las gráficas de dos sumas parciales de la serie, en las que se aprecia claramente la convergencia. ■

Observación La serie del ejemplo anterior converge a 0 en ± 1 , y ello no es casual. En general, si existen

$$f(x_0^+) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x), \quad f(x_0^-) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x),$$

$$f'_+(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}, \quad f'_-(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h},$$

entonces la serie de Fourier de f converge en x_0 a $(f(x_0^+) + f(x_0^-))/2$.

En efecto, trasladando f y sumándole una constante podemos suponer sin pérdida de generalidad que $x_0 = 0$ y que $f(0^+) = -f(0^-)$. Entonces las sumas parciales en 0 de la serie de Fourier son

$$\sum_{n=-k}^k \hat{f}(n) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) D_k(x) dx,$$

donde

$$D_k(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-k}^k e^{-nxi}.$$

Ahora bien, es inmediato que $D_k(x) = D_k(-x)$, luego

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) D_k(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(-x) D_k(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x) + f(-x)}{2} D_k(x) dx.$$

Pero la función $g(x) = (f(x) + f(-x))/2$ (definida en 0 como $g(0) = 0$) es derivable en 0, luego el teorema anterior aplicado a esta función nos da que

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{g}(n) = 0.$$

En particular, vemos que si f es continua en x_0 y tiene derivadas por la izquierda y la derecha en x_0 , entonces la serie de Fourier de f converge a f en x_0 . ■

Podemos decir más sobre las series de Fourier de las funciones derivables:

Teorema 9.9 Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función derivable de periodo $T > 0$ y su desarrollo en serie de Fourier es

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2n\pi x}{T} + b_n \operatorname{sen} \frac{2n\pi x}{T} \right),$$

entonces

$$f'(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n\pi b_n}{T} \cos \frac{2n\pi x}{T} - \frac{2n\pi a_n}{T} \operatorname{sen} \frac{2n\pi x}{T} \right),$$

que es la serie que resulta de derivar término a término la serie dada. En términos de las funciones exponenciales es $\hat{f}'(n) = -\frac{2n\pi i}{T} \hat{f}(n)$.

DEMOSTRACIÓN: Por ejemplo, integrando por partes:

$$\begin{aligned} \frac{T}{2} a_n(f') &= \int_0^T f'(x) \cos \frac{2n\pi x}{T} dx \\ &= \int_0^T f(x) \frac{2n\pi}{T} \operatorname{sen} \frac{2n\pi x}{T} dx = -\frac{2n\pi}{T} \frac{T}{2} b_n(f), \end{aligned}$$

luego $a_n(f') = \frac{2n\pi}{T} b_n(f)$, e igualmente se prueban las demás relaciones. ■

Nota En la prueba del teorema anterior es fundamental que $f(0) = f(T)$ para que se anule el primer término que resulta de aplicar la fórmula de integración por partes. Por ejemplo, si derivamos término a término la serie de Fourier de la función $f(x) = x$ calculada en el ejemplo anterior no obtenemos la serie (trivial) de $f'(x) = 1$. Por el contrario, obtenemos una serie divergente cuyos coeficientes ni siquiera están en ℓ^2 . ■

Ahora es fácil probar:

Teorema 9.10 Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función de clase C^1 de periodo $T > 0$, entonces su serie de Fourier converge absoluta y uniformemente a f .

DEMOSTRACIÓN: Por el teorema anterior tenemos que

$$a_n(f') = \frac{2n\pi}{T} b_n(f), \quad b_n(f') = -\frac{2n\pi}{T} a_n(f), \quad a_0(f') = 0.$$

Por la identidad de Parseval aplicada a f' , la serie

$$\frac{4\pi^2}{T^2} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 (|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2)$$

es convergente. A partir de aquí escribiremos a_n y b_n en vez de $a_n(f)$, $b_n(f)$. Por la desigualdad de Schwarz aplicada a las sucesiones

$$\{1/n\}_{n=1}^{\infty}, \quad \{n\sqrt{|a_n|^2 + |b_n|^2}\}_{n=1}^{\infty} \in \ell^2,$$

tenemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{|a_n|^2 + |b_n|^2} \leq \sum_{n=1}^{\infty} n^2 (|a_n|^2 + |b_n|^2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

La desigualdad $|u| + |v| \leq \sqrt{2}\sqrt{|u|^2 + |v|^2}$ nos da la convergencia de la serie

$$\frac{|a_0(f)|}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|),$$

luego el criterio de mayoración de Weierstrass nos da la convergencia absoluta y uniforme de la serie de Fourier de f . ■

El problema de la cuerda vibrante Ahora estamos en condiciones de encontrar la solución general del problema de la cuerda vibrante que hemos discutido en la introducción. Vamos a considerar “soluciones” de la forma

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} \cos \frac{n\pi vt}{l} + B_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} \operatorname{sen} \frac{n\pi vt}{l} \right), \quad (9.3)$$

con la precaución de que no hemos demostrado nada sobre la convergencia y la derivabilidad de estas series infinitas. Si hacemos $t = 0$ obtenemos que

$$y_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l}, \quad 0 \leq x \leq l.$$

Esto no es la serie de Fourier de y_0 en $[0, l]$, pero sí la serie de Fourier en $[-l, l]$ de la extensión de y_0 dada por $y_0(-x) = -y_0(x)$. Por lo tanto,

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l y_0(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} dx$$

(tendríamos que integrar en $[-l, l]$ y dividir entre $2l$, pero el integrando es par, por lo que el resultado coincide con la integral que hemos planteado).

Ahora, para cada x fijo, la serie (9.3) es una serie de Fourier en t , luego derivando respecto de t según el teorema 9.9 (que no presupone la convergencia puntual) y haciendo luego $t = 0$ obtenemos que

$$y_0'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nB_n\pi v}{l} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l},$$

de donde, como antes,

$$\frac{nB_n\pi v}{l} = \frac{2}{l} \int_0^l y_0'(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} dx,$$

luego

$$B_n = \frac{2}{n\pi} \int_0^l y_0'(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} dx.$$

En particular, vemos que si la cuerda parte del reposo todos los B_n son nulos.

Para el caso de la función

$$y_0(x) = \begin{cases} \frac{1-x}{175} & \text{si } \frac{3}{10} \leq x \leq 1, \\ \frac{x}{75} & \text{si } -\frac{3}{10} \leq x \leq \frac{3}{10}, \\ -\frac{1+x}{175} & \text{si } -1 \leq x \leq -\frac{3}{10}, \end{cases}$$

que es la que define la condición inicial del ejemplo considerado en la introducción, un cálculo rutinario muestra que

$$A_n = \frac{4}{105\pi^2 n^2} \operatorname{sen} \frac{3\pi n}{10},$$

con lo que $|A_n| \leq K/n^2$, y esto implica que la serie (9.3) (con los coeficientes $B_n = 0$) converge absoluta y uniformemente a una función continua en su dominio $[0, 1] \times [0, +\infty[$. La función $y(x, t)$ no es derivable en todos los puntos, pero la convergencia uniforme implica que, para N suficientemente grande, se vuelve indistinguible de la suma parcial N -sima de la serie, que sí que es de clase C^∞ y satisface la ecuación de ondas. ■

La desigualdad isoperimétrica Veamos ahora una aplicación de las series de Fourier a un contexto diferente del de las ecuaciones diferenciales. La desigualdad isoperimétrica afirma que si anudamos una cuerda para formar una curva cerrada, la forma de abarcar la mayor área posible con ella es disponerla en forma de circunferencia. Con más precisión:

Teorema 9.11 (Desigualdad isoperimétrica) *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un abierto acotado con frontera diferenciable difeomorfa a S^1 y de longitud 2π . Entonces el área A de Ω cumple $A \leq \pi$ y se da la igualdad si y sólo si Ω es un círculo.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $\phi : S^1 \rightarrow \partial\Omega$ un difeomorfismo (que suponemos al menos de clase C^1). Componiendo con $t \mapsto (\cos t, \sin t)$ obtenemos una aplicación $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ de clase C^1 y periódica de periodo 2π . Más aún, como la longitud de $\partial\Omega$ es 2π , podemos suponer que γ está parametrizada por el arco, es decir, que si $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, entonces $x'^2 + y'^2 = 1$ (al parametrizar γ por el arco obtendríamos una nueva curva de periodo 2π).

Consideramos a x, y (y también a x', y') como elementos de $L^2([0, 2\pi])$, y así es claro que $\|x'\|^2 + \|y'\|^2 = 2\pi$. Por la igualdad de Parseval, también $\|\hat{x}'\|^2 + \|\hat{y}'\|^2 = 1$, donde ahora la norma es en $\ell^2(\mathbb{Z})$. Explícitamente:

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} (|\hat{x}'(n)|^2 + |\hat{y}'(n)|^2) = 1.$$

Ahora usamos 9.9, que nos da $\hat{x}'(n) = -ni \hat{x}(n)$, $\hat{y}'(n) = -ni \hat{y}(n)$, con lo que

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} n^2 (|\hat{x}(n)|^2 + |\hat{y}(n)|^2) = 1. \quad (9.4)$$

Por otro lado, el teorema de Green 8.8 (véase el comentario posterior) nos da que el área de Ω es

$$A = \frac{1}{2} \int_a^b (-y dx + x dy) = \frac{1}{2} \int_0^1 (x(t)y'(t) - y(t)x'(t)) dt = \frac{1}{2} (x \cdot y' - y \cdot x').$$

Ahora usamos que $x \mapsto \sqrt{2\pi} \hat{x}$ es una isometría (véase la observación tras el teorema 9.6), por lo que

$$\begin{aligned} A &= \pi \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} (\hat{x}(n) \overline{\hat{y}'(n)} - \hat{y}(n) \overline{\hat{x}'(n)}) \right| = \pi \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} n (\hat{x}(n) \overline{\hat{y}(n)} - \hat{y}(n) \overline{\hat{x}(n)}) \right| \\ &\leq \pi \sum_{n \in \mathbb{Z}} |n| 2 |\hat{x}(n)| |\hat{y}(n)| \leq \pi \sum_{n \in \mathbb{Z}} n^2 (|\hat{x}(n)|^2 + |\hat{y}(n)|^2) = \pi. \end{aligned} \quad (9.5)$$

Para que se dé la igualdad, todas las desigualdades

$$|n| 2 |\hat{x}(n)| |\hat{y}(n)| \leq |n| (|\hat{x}(n)|^2 + |\hat{y}(n)|^2) \leq n^2 (|\hat{x}(n)|^2 + |\hat{y}(n)|^2)$$

tienen que ser igualdades. La primera lo es si y sólo si $n = 0$ o $|\hat{x}(n)| = |\hat{y}(n)|$ y la segunda requiere que $|\hat{x}(n)| = |\hat{y}(n)| = 0$ salvo si $|n| \leq 1$. Por lo tanto, si $A = \pi$ se cumple que

$$x(t) = \hat{x}(-1)e^{it} + \hat{x}(0) + \hat{x}(1)e^{-it}, \quad y(t) = \hat{y}(-1)e^{it} + \hat{y}(0) + \hat{y}(1)e^{-it}.$$

Como $x(t)$ e $y(t)$ toman valores reales, tiene que ser $\hat{x}(-1) = \overline{\hat{x}(1)}$, $\hat{y}(-1) = \overline{\hat{y}(1)}$, y la ecuación (9.4) nos da que

$$2(|\hat{x}(1)|^2 + |\hat{y}(1)|^2) = 4|\hat{x}(1)|^2 = 4|\hat{y}(1)|^2 = 1,$$

luego $|\hat{x}(1)| = |\hat{y}(1)| = 1/2$. Pongamos que $\hat{x}(1) = \frac{1}{2}e^{i\alpha}$, $\hat{y}(1) = \frac{1}{2}e^{i\beta}$.

Ahora usamos que la primera desigualdad de (9.5) también tiene que ser una igualdad, lo cual equivale a que

$$2|\hat{x}(1)\overline{\hat{y}(1)} - \overline{\hat{x}(1)}\hat{y}(1)| = 1.$$

Por lo tanto

$$|e^{i(\alpha-\beta)} - e^{-i(\alpha-\beta)}| = 2,$$

luego $|\operatorname{sen}(\alpha - \beta)| = 1$, luego $\alpha - \beta = k\pi/2$, donde k es un entero impar. Concluimos que

$$\begin{aligned} x(t) &= \hat{x}(0) + \hat{x}(1)e^{-it} + \overline{\hat{x}(1)}e^{-it} = \hat{x}(0) + 2\operatorname{Re}(\hat{x}(1)e^{-it}) \\ &= \hat{x}(0) + \cos\alpha \cos t + \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen} t = \hat{x}(0) + \cos(\alpha + t), \end{aligned}$$

e igualmente $y(t) = \hat{y}(0) + \cos(\beta + t) = \hat{y}(0) \pm \operatorname{sen}(\alpha + t)$. Así pues, $\partial\Omega$ es la circunferencia de centro $(\hat{x}(0), \hat{y}(0))$ y radio 1. ■

9.2 Los polinomios de Legendre

La teoría de las series de Fourier que acabamos de presentar se basa esencialmente en que las funciones $\cos(2\pi x/T)$, $\operatorname{sen}(2\pi x/T)$ constituyen una base ortogonal de $L^2([a, b])$ (donde $T = b - a$), y resulta natural preguntarse si considerando otras bases ortogonales podremos extender la potencia de las técnicas que hemos mostrado.

Observemos que en cualquier espacio $L^2([a, b])$ podemos considerar una base ortonormal formada por polinomios. En efecto, El espacio vectorial $\mathbb{R}[x]$ tiene por base a la sucesión $1, x, x^2, \dots$. No es una base ortogonal en $L^2([a, b])$, pero podemos aplicarle el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt [G 3.21] para obtener una base ortonormal $\{P_n\}_{n=0}^\infty$ tal que cada P_n sea un polinomio de grado n . El teorema de Stone-Weierstrass nos asegura que toda función continua puede aproximarse uniformemente (luego también respecto de la norma de $L^2([a, b])$) por un polinomio, es decir, por una combinación lineal de los polinomios P_n , y el teorema 3.50 nos garantiza entonces que $\{P_n\}_{n=0}^\infty$ forma una base ortonormal de $L^2([a, b])$.

Ahora bien, la sucesión de polinomios que obtenemos al aplicar el proceso de Gram-Schmidt a la base $1, x, x^2, \dots$ depende del intervalo $[a, b]$ en el que calculamos el producto escalar. Por ejemplo, los polinomios 1 y x son ortogonales en $[-1, 1]$, pero no en $[0, 2]$. Los polinomios de Legendre son los que se obtienen al aplicar el proceso de Gram-Schmidt concretamente al intervalo $[-1, 1]$, sin embargo, admiten muchas otras definiciones equivalentes. Aquí los introduciremos a partir de las consideraciones que llevaron a Legendre a iniciar su estudio:

El potencial gravitatorio generado por una partícula puntual situada en una posición \vec{r}_0 es en cada punto \vec{r} inversamente proporcional a la distancia $\|\vec{r} - \vec{r}_0\|$. Esto hace que la expresión

$$\frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}_0\|}$$

aparezca en muchos cálculos relacionados con la gravitación y a menudo complica las derivadas y las integrales. Por ello Legendre se planteó encontrar una expresión más manejable. Para ello, en primer lugar, observamos que

$$\|\vec{r} - \vec{r}_0\| = \sqrt{(\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0)} = \sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos \theta},$$

donde θ es el ángulo que forman los vectores \vec{r}_0 y \vec{r} . Si llamamos $x = \cos \theta$, de modo que $-1 \leq x \leq 1$, para $r \geq r_0$ tenemos que

$$\frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}_0\|} = \frac{1}{r} \frac{1}{\sqrt{1 + s^2 - 2sx}}, \quad (9.6)$$

donde $s = r_0/r \leq 1$. Para $r \leq r_0$ tenemos

$$\frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}_0\|} = \frac{1}{r_0} \frac{1}{\sqrt{1 + s^2 - 2sx}}, \quad (9.7)$$

donde ahora $s = r/r_0 \leq 1$.

Esto nos lleva a estudiar la expresión

$$F(x, s) = \frac{1}{\sqrt{1 + s^2 - 2sx}},$$

para $0 \leq s \leq 1$ y $-1 \leq x \leq 1$.

Visto como función de s , el radicando es un polinomio de grado 2 con raíces $x \pm i\sqrt{1 - x^2}$, las dos de módulo 1, luego el radicando es una función holomorfa que no se anula en el disco abierto unitario. El teorema [IC 7.29] nos da una función holomorfa g definida en dicho disco unitario tal que $e^{g(z)} = 1 + z^2 - 2zx$. Por lo tanto, $r(z) = e^{g(z)/2}$ es una raíz cuadrada holomorfa del radicando, es decir, que cumple $r(z)^2 = 1 + z^2 - 2zx$. Como $r(s)$ es real cuando $0 \leq s \leq 1$ y no se anula, o bien es siempre positiva o siempre negativa, luego cambiando r por $-r$ si es preciso, podemos suponer que $r(s) = \sqrt{1 + s^2 - 2xs}$. Así podemos concluir que $F(x, s)$ (para cada x fijo) se extiende a una función holomorfa en el disco abierto unitario.

El teorema [IC 7.21] nos asegura que $F(x, s)$ admite un desarrollo en serie de Taylor

$$F(x, s) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) s^n.$$

convergente en el disco unitario y, en particular, en el intervalo $] -1, 1[$. Calculamos

$$\frac{\partial F}{\partial s} = -\frac{1}{2}(1 + s^2 - 2sx)^{-3/2}(2s - 2x) = \frac{s - x}{1 + s^2 - 2sx} F(x, s).$$

Equivalentemente,

$$(1 + s^2 - 2sx) \frac{\partial F}{\partial s} = (x - s) F(x, s).$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} nP_n(x)s^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} nP_n(x)s^{n+1} - \sum_{n=1}^{\infty} 2nxP_n(x)s^n \\ = \sum_{n=0}^{\infty} xP_n(x)s^n - \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)s^{n+1}. \end{aligned}$$

Reordenando las potencias:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)P_{n+1}(x)s^n + \sum_{n=1}^{\infty} (n-1)P_{n-1}(x)s^n - \sum_{n=1}^{\infty} 2nxP_n(x)s^n \\ = \sum_{n=0}^{\infty} xP_n(x)s^n - \sum_{n=1}^{\infty} P_{n-1}(x)s^n. \end{aligned}$$

Agrupamos:

$$P_1(x) - xP_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} ((n+1)P_{n+1}(x) - x(2n+1)P_n(x) + nP_{n-1}(x))s^n = 0$$

y así llegamos a la relación de recurrencia:

$$(n+1)P_{n+1}(x) - x(2n+1)P_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0, \quad P_1(x) = xP_0(x).$$

Como $F(x, 0) = 1$, ha de ser $P_0(x) = 1$, luego la segunda relación nos da que $P_1(x) = x$ y la primera implica que $P_n(x)$ es un polinomio de grado n .

Definición 9.12 Llamaremos *polinomios de Legendre* a los polinomios $P_n(x)$ que aparecen en el desarrollo en serie de Taylor

$$\frac{1}{\sqrt{1+s^2-2sx}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)s^n, \quad -1 \leq x \leq 1, \quad -1 < s < 1,$$

y que vienen determinados por la relación de recurrencia: $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$,

$$(n+1)P_{n+1}(x) - x(2n+1)P_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0. \quad (9.8)$$

Los primeros polinomios de Legendre son:

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \quad P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x),$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3), \quad P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x).$$

La figura siguiente muestra sus gráficas. Se reconoce cuál es cada uno por el número de raíces. En efecto, demostraremos más adelante que P_n tiene n raíces simples en el intervalo $] -1, 1[$. Algunas propiedades elementales (que podemos apreciar en la figura) son las siguientes:

- $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$.

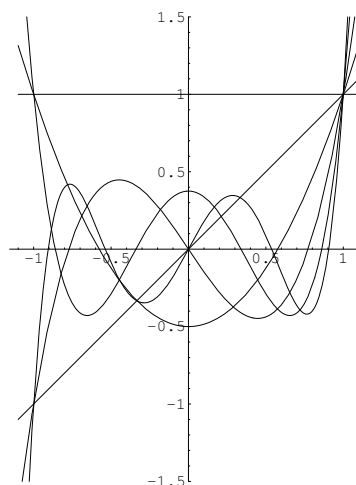
Esto se demuestra inductivamente a partir de la relación (9.8).

- $P_n(1) = 1$,
porque $F(1, s) = \frac{1}{1-s} = 1 + s + s^2 + \dots$

- $P_n(-1) = (-1)^n$,
porque

$$F(-1, s) = \frac{1}{1+s} = 1 - s + s^2 - \dots$$

- $P_n(0) = \begin{cases} \frac{(-1)^{n/2}}{2^n} \binom{n}{n/2} & \text{si } n \text{ es par,} \\ 0 & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$



Porque (9.8) para $x = 0$ se reduce a $(n+1)P_{n+1}(0) = -nP_{n-1}(0)$, y es fácil ver que la sucesión del enunciado cumple esta misma relación recurrente.

Otra expresión útil para los polinomios de Legendre es la siguiente:

Teorema 9.13 (Fórmula de Olinde Rodrigues)

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n (x^2 - 1)^n}{dx^n}.$$

DEMOSTRACIÓN: Aplicamos la fórmula integral de Cauchy [IC 7.16]:

$$P_n(x) = \frac{1}{n!} \left. \frac{\partial^n F}{\partial s^n} \right|_0 = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{1}{\sqrt{1+s^2-2sx}} \frac{1}{s^{n+1}} ds,$$

donde C es una circunferencia de centro 0 y radio $r < 1$ recorrida en sentido positivo.

Calcularemos la integral con el cambio de variable $1 - us = \sqrt{1 - 2xs + s^2}$. Notemos que la raíz cuadrada es una función holomorfa en el disco unitario cuyo desarrollo en serie de Taylor es de la forma

$$\sqrt{1 - 2xs + s^2} = 1 - xs + \dots$$

lo que implica que la función

$$u = \frac{1}{s}(1 - \sqrt{1 - 2xs + s^2}) = x + \dots$$

se extiende a una función holomorfa en el disco haciendo $u(0) = x$. Por consiguiente, u biyecta el disco unitario en un cierto abierto D , donde la función inversa viene dada por

$$s = \frac{2(u-x)}{u^2-1}.$$

De aquí se sigue que

$$\sqrt{1 - 2xs + s^2} = -\frac{u^2 - 2ux + 1}{u^2 - 1}, \quad ds = -\frac{2(u^2 - 2ux + 1)}{(u^2 - 1)^2} du.$$

Si llamamos C' al arco imagen de C por la aplicación u ,

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n 2\pi i} \int_{C'} \frac{(u^2 - 1)^n}{(u - x)^{n+1}} du.$$

Por el teorema 8.28 aplicado a $u[B_r(0)]$ menos una bola de centro x y radio r' suficientemente pequeño, podemos sustituir C' por la circunferencia $|u - x| = r'$ en la integral anterior. Entonces basta aplicar de nuevo la fórmula integral de Cauchy:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n (x^2 - 1)^n}{dx^n}.$$

■

De aquí se sigue la propiedad sobre las raíces de $P_n(x)$ que habíamos anticipado:

Teorema 9.14 *El polinomio $P_n(x)$ tiene n raíces simples en el intervalo $]-1, 1[$.*

DEMOSTRACIÓN: El polinomio $(x^2 - 1)^n$ tiene exactamente dos raíces de orden n en los puntos ± 1 . Si $m < n$, la derivada m -ésima tiene raíces de orden $n - m$ en ± 1 . Supongamos inductivamente que tiene m raíces simples en el intervalo $]-1, 1[$. Entonces, la derivada $m + 1$ -ésima, ha de tener dos raíces de orden $n - m - 1$ en ± 1 y, por el teorema de Rolle, entre cada par de raíces de la derivada m -ésima ha de haber una de la derivada $m + 1$ -ésima, lo que da al menos $m + 1$ raíces en el intervalo $]-1, 1[$. Como en total suman $2n - m - 1$, que es el grado de la derivada, han de ser todas las raíces y han de ser simples. Por inducción concluimos que la derivada n -ésima tiene n raíces simples. ■

Veamos otra consecuencia sencilla de la fórmula de Rodrigues:

Teorema 9.15 *Se cumple $P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x) = (2n + 1)P_n(x)$. Equivalentemente:*

$$\int P_n(x) dx = \frac{1}{2n + 1} (P_{n+1}(x) - P_{n-1}(x)) + C.$$

DEMOSTRACIÓN: Por la fórmula de Rodrigues,

$$\begin{aligned} P'_{n+1}(x) &= \frac{1}{2^{n+1}(n+1)!} \frac{d^{n+2}}{dx^{n+2}} ((x^2 - 1)^{n+1}) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} ((x^2 - 1)^n x) = \\ &= \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (2n(x^2 - 1)^{n-1} x^2 + (x^2 - 1)^n) = \\ &= \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (2n(x^2 - 1)^{n-1} (x^2 - 1 + 1) + (x^2 - 1)^n) = \\ &= \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (2n(x^2 - 1)^n + 2n(x^2 + 1)^{n-1} + (x^2 - 1)^n) = \\ &= \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} ((2n + 1)(x^2 - 1)^n + 2n(x^2 - 1)^{n-1}) = (2n + 1)P_n(x) - P'_{n-1}(x). \end{aligned}$$

■

Ahora probamos que, tal y como anticipábamos, los polinomios de Legendre son ortogonales:

Teorema 9.16 (Relaciones de ortogonalidad)

$$\int_{-1}^1 P_m(x)P_n(x) dx = \begin{cases} \frac{2}{2n+1} & \text{si } m = n, \\ 0 & \text{si } m \neq n. \end{cases}$$

DEMOSTRACIÓN: Llamemos $u(x) = (x^2 - 1)^n$. Entonces, por la fórmula de Rodrigues, para $0 \leq m < n$, se cumple que

$$2^n n! \int_{-1}^1 x^m P_n(x) dx = \int_{-1}^1 x^m u^{(n)}(x) dx.$$

Integrando por partes queda

$$2^n n! \int_{-1}^1 x^m P_n(x) dx = [x^m u^{(n-1)}(x)]_{-1}^1 - m \int_{-1}^1 x^{m-1} u^{(n-1)}(x) dx,$$

y el primer término es nulo porque $u(x)$ tiene raíces de orden n en ± 1 , luego $u^{(m)}(x) = 0$ para $m < n$. Después de integrar por partes m veces llegamos a que

$$\begin{aligned} 2^n n! \int_{-1}^1 x^m P_n(x) dx &= (-1)^m m! \int_{-1}^1 u^{(n-m)}(x) dx \\ &= (-1)^m m! [u^{(n-m-1)}(x)]_{-1}^1 = 0. \end{aligned}$$

Por linealidad,

$$\int_{-1}^1 Q(x)P_n(x) dx = 0$$

para todo polinomio $Q(x)$ de grado $m < n$, en particular para $Q(x) = P_m(x)$.

Calculamos ahora

$$(2^n n!)^2 \int_{-1}^1 P_n^2(x) dx = \int_{-1}^1 u^{(n)}(x)u^{(n)}(x) dx.$$

Integrando por partes n veces queda

$$\begin{aligned} (2^n n!)^2 \int_{-1}^1 P_n^2(x) dx &= (-1)^n \int_{-1}^1 u^{(2n)}(x)u(x) dx = \\ &= (-1)^n \int_{-1}^1 \frac{d^{2n}(t^2 - 1)^n}{dx^{2n}} u(x) dx = (-1)^n \int_{-1}^1 (2n)! u(x) dx \\ &= (2n)! \int_{-1}^1 (1 - x^2)^n dx = (2n)! \int_{-1}^1 (1 - x)^n (1 + x)^n dx. \end{aligned}$$

Integramos otra vez por partes:

$$\begin{aligned} & (2^n n!)^2 \int_{-1}^1 P_n^2(x) dx \\ &= (2n)! \left(\left[(1-x)^n \frac{(1+x)^{n+1}}{n+1} \right]_{-1}^1 + \frac{n}{n+1} \int_{-1}^1 (1-x)^{n-1} (1+x)^{n+1} dx \right) \end{aligned}$$

y, nuevamente, el primer término es nulo. Tras haber integrado n veces llegamos a que

$$\begin{aligned} (2^n n!)^2 \int_{-1}^1 P_n^2(x) dx &= (2n)! \frac{n! n!}{(2n)!} \int_{-1}^1 (1+x)^{2n} dx \\ &= (n!)^2 \left[\frac{(1+x)^{2n+1}}{2n+1} \right]_{-1}^1 = (n!)^2 \frac{2^{2n+1}}{2n+1}. \end{aligned}$$

Por consiguiente:

$$\int_{-1}^1 P_n^2(x) dx = \frac{2}{2n+1}. \quad \blacksquare$$

El mero hecho de que $P_n(x)$ tenga grado n implica que los polinomios de Legendre son una base del espacio vectorial $\mathbb{R}[x]$, luego el teorema de Stone-Weierstrass implica que toda función continua en $[-1, 1]$ se puede aproximar por una combinación lineal de polinomios de Legendre, luego el teorema 3.50 implica que los polinomios de Legendre son una base ortogonal de $L^2([-1, 1])$. Por lo tanto, los polinomios normalizados

$$P_n^*(x) = \sqrt{n + \frac{1}{2}} P_n(x)$$

forman una base ortonormal de $L^2([-1, 1])$, y ahora es fácil ver que, tal y como habíamos señalado, estos polinomios son los que se obtienen al aplicar el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt a la base $1, x, x^2, \dots$

En particular tenemos que toda función $f \in L^2([-1, 1])$ admite un desarrollo en serie de la forma

$$f \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x),$$

donde³

$$a_n = \left(n + \frac{1}{2} \right) \int_{-1}^1 f(x) P_n(x) dx.$$

Estas series se llaman *series de Fourier-Legendre*, pues son el análogo a las series de Fourier respecto de la base ortonormal determinada por los polinomios de Legendre.

³Notemos que los coeficientes del desarrollo respecto de la base $P_n^*(x)$ son

$$a_n \|P_n(x)\| = \langle f, P_n / \|P_n\| \rangle,$$

luego $a_n = \|P_n\|^{-2} \langle f, P_n \rangle$.

Como en el caso de las series de Fourier, la serie de Fourier-Legendre de una función $f \in L^2([-1, 1])$ converge a f en $L^2([-1, 1])$, lo cual no significa que tenga que converger puntualmente. La identidad de Parseval nos da que

$$\sum_{n=0}^{\infty} (P_n^* \cdot f)^2 = \|f\|^2,$$

luego el análogo al lema de Riemann-Lebesgue es que

$$\lim_n \langle P_n^*, f \rangle = \lim_n \sqrt{n + \frac{1}{2}} \int_{-1}^1 f(x) P_n(x) dx = 0, \quad (9.9)$$

para toda función $f \in L^2([-1, 1])$.

Para estudiar la convergencia puntual necesitamos algunos hechos previos.

Teorema 9.17 (Relación de Laplace) *Si $-1 < x < 1$ se cumple que*

$$P_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (x + i\sqrt{1-x^2} \cos \phi)^n d\phi.$$

DEMOSTRACIÓN: Por la fórmula integral de Cauchy [IC 7.16] a partir de la fórmula de Rodrigues tenemos que

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n} \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{(u^2 - 1)^n}{(u - x)^{n+1}} du,$$

donde C es la circunferencia $u = x + re^{i\phi}$, $\phi \in [0, 2\pi]$. Se cumple que

$$du = ire^{i\phi} d\phi = i(u - x) d\phi,$$

$$\frac{u^2 - 1}{u - x} = \frac{x^2 + r^2 e^{2i\phi} + 2xre^{i\phi} - 1}{re^{i\phi}} = \frac{1}{r} ((x^2 - 1)e^{-i\phi} + r^2 e^{i\phi} + 2xr),$$

con lo que

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n} \frac{1}{2\pi} \frac{1}{r^n} \int_0^{2\pi} ((x^2 - 1)e^{-i\phi} + r^2 e^{i\phi} + 2xr)^n d\phi.$$

Esto es válido para todo número complejo $r \neq 0$ (no necesariamente real). En particular podemos tomar $r = i\sqrt{1-x^2}$, con lo que

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \frac{1}{2^n} \frac{1}{2\pi} \frac{1}{r^n} \int_0^{2\pi} (r^2(e^{i\phi} + e^{-i\phi}) + 2xr)^n d\phi \\ &= \frac{1}{2^n} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (2i\sqrt{1-x^2} \cos \phi + 2x)^n d\phi = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (x + i\sqrt{1-x^2} \cos \phi)^n d\phi. \end{aligned}$$

■

De aquí obtenemos fácilmente:

Teorema 9.18 Si $-1 \leq x \leq 1$, se cumple que $|P_n(x)| \leq 1$.

DEMOSTRACIÓN: Podemos suponer que $-1 < x < 1$, pues ya hemos visto que $P_n(1) = 1$ y $P_n(-1) = (-1)^n$. Entonces

$$|x + i\sqrt{1-x^2} \cos \phi|^2 = x^2 + (1-x^2) \cos^2 \phi \leq x^2 + 1 - x^2 = 1,$$

luego

$$|P_n(x)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |x + i\sqrt{1-x^2} \cos \phi|^n d\phi \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi = 1.$$

■

No obstante, podemos obtener una acotación más fina:

Teorema 9.19 Si $0 < \theta < \pi$ se cumple que

$$|P_n(\cos \theta)| \leq \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2n} \sin \theta}.$$

DEMOSTRACIÓN: Por la relación de Laplace:

$$P_n(\cos \theta) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (\cos \theta + i \sin \theta \cos \phi)^n d\phi.$$

Calculamos el módulo del integrando multiplicando por su conjugado y tomando la raíz cuadrada:

$$\begin{aligned} |P_n(\cos \theta)| &\leq \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta \cos^2 \phi)^{n/2} d\phi \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta \cos^2 \phi)^{n/2} d\phi. \end{aligned}$$

Ahora observamos que

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta \cos^2 \phi = 1 - \sin^2 \theta (1 - \cos^2 \phi) = 1 - \sin^2 \theta \sin^2 \phi.$$

Ahora usamos⁴ que $\sin \phi \geq 2\phi/\pi$ y que $1 - y \leq e^{-y}$:

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta \cos^2 \phi \leq 1 - \sin^2 \theta (2\phi/\pi)^2 \leq e^{-\sin^2 \theta (2\phi/\pi)^2}.$$

Por lo tanto:

$$|P_n(\cos \theta)| \leq \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} e^{-\frac{2n \sin^2 \theta}{\pi^2} \phi^2} d\phi.$$

⁴Esto se debe a que la función seno es cóncava en el intervalo $[0, \pi/2]$. Una prueba directa consiste en considerar $f(\phi) = \sin \phi - 2\phi/\pi$ y observar que $f(0) = f(\pi/2) = 0$, así como que $f''(\phi) < 0$, luego $f'(\phi)$ es decreciente, luego sólo se anula una vez en el intervalo, luego f es siempre positiva en $]0, \pi/2[$, porque empieza siendo creciente y, si se anulara en algún punto intermedio, f' tendría que anularse dos veces.

Ahora hacemos el cambio de variable

$$t = \sqrt{2n} \frac{\phi}{\pi} \operatorname{sen} \theta.$$

$$\begin{aligned} |P_n(\cos \theta)| &\leq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n} \operatorname{sen} \theta} \int_0^{\sqrt{n/2} \operatorname{sen} \theta} e^{-t^2} dt < \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n} \operatorname{sen} \theta} \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt \\ &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n} \operatorname{sen} \theta} \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2n} \operatorname{sen} \theta}. \end{aligned}$$

■

El teorema siguiente se puede probar con hipótesis más débiles:

Teorema 9.20 Sea $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada continua a trozos. Entonces, para todo $x \in]-1, 1[$ donde f sea derivable, se cumple que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x),$$

con

$$a_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \int_{-1}^1 f(x) P_n(x) dx.$$

DEMOSTRACIÓN: Consideremos las sumas parciales:

$$\begin{aligned} S_m(x) &= \sum_{n=0}^m a_n P_n(x) = \sum_{n=0}^m \left(n + \frac{1}{2}\right) P_n(x) \int_{-1}^1 f(y) P_n(y) dy \\ &= \int_{-1}^1 f(y) K_m(x, y) dy, \end{aligned}$$

donde

$$K_m(x, y) = \sum_{n=0}^m \left(n + \frac{1}{2}\right) P_n(x) P_n(y).$$

Para calcular esta expresión multiplicamos (9.8) por $P_n(y)$ y al resultado le restamos la misma fórmula intercambiando x con y . El resultado es

$$\begin{aligned} (2n+1)(x-y)P_n(x)P_n(y) &= (n+1)(P_{n+1}(x)P_n(y) - P_n(x)P_{n+1}(y)) \\ &\quad - n(P_n(x)P_{n-1}(y) - P_{n-1}(x)P_n(y)). \end{aligned}$$

Comprobamos que esta expresión es válida incluso para $n = 0$ aunque no esté definido P_{-1} , que en la fórmula aparece multiplicado por 0.

Ahora observamos que al sumar sobre n , la primera parte de cada término de la derecha se cancela con la segunda parte del correspondiente al sumando siguiente, con lo que

$$(x-y) \sum_{n=0}^m (2n+1)P_n(x)P_n(y) = (m+1)(P_{m+1}(x)P_m(y) - P_m(x)P_{m+1}(y)).$$

Por consiguiente,

$$K_m(x, y) = \frac{m+1}{2} \frac{P_{m+1}(x)P_m(y) - P_m(x)P_{m+1}(y)}{x-y}.$$

Notemos que esta expresión no está definida cuando $x = y$, pero la definición de K_m muestra que ha de ser continuo en (x, y) , luego las discontinuidades son evitables.

De la propia definición de $K_m(x, y)$, junto con las relaciones de ortogonalidad, se sigue que

$$\int_{-1}^1 K_m(x, y) dy = \sum_{n=0}^m \left(n + \frac{1}{2}\right) P_n(x) \int_{-1}^1 P_0(x) P_n(y) dy = 1.$$

Ahora ya podemos comparar las sumas parciales con la función f :

$$\begin{aligned} S_m(x) - f(x) &= \int_{-1}^1 f(y) K_m(x, y) dy - \int_{-1}^1 f(x) K_m(x, y) dy \\ &= \int_{-1}^1 K_m(x, y) (f(y) - f(x)) dy \\ &= \frac{m+1}{2} \int_{-1}^1 (P_m(x)P_{m+1}(y) - P_{m+1}(x)P_m(y)) \frac{f(y) - f(x)}{y-x} dy \\ &= \frac{m+1}{2} P_m(x) \int_{-1}^1 P_{m+1}(y) \phi(x, y) dy - \frac{m+1}{2} P_{m+1}(x) \int_{-1}^1 P_m(y) \phi(x, y) dy, \end{aligned}$$

donde

$$\phi(x, y) = \frac{f(y) - f(x)}{y-x}.$$

Notemos que $\phi(x, y)$, como función de y , tiene una discontinuidad evitable en $y = x$, donde tiende a $f'(x)$, luego es una función acotada y continua a trozos, en particular integrable. Por (9.9) tenemos que

$$\lim_n \sqrt{n + \frac{1}{2}} \int_{-1}^1 P_n(x) \phi(x, y) dy = 0,$$

y lo mismo vale si cambiamos la raíz por \sqrt{n} . Así, si llamamos

$$I_n = \sqrt{n} \int_{-1}^1 P_n(x) \phi(x, y) dy,$$

tenemos que

$$S_m(x) - f(x) = \frac{m+1}{2} P_m(x) \frac{I_{m+1}}{\sqrt{m+1}} - \frac{m+1}{2} P_{m+1}(x) \frac{I_m}{\sqrt{m}}$$

y basta probar que las cantidades

$$\sqrt{m+1}P_m(x), \quad \text{y} \quad \frac{m+1}{\sqrt{m}}P_{m+1}(x)$$

permanecen acotadas cuando $m \rightarrow \infty$. Claramente, basta verlo para $\sqrt{n}P_n(x)$. Para ello aplicamos el teorema 9.19, que nos da

$$|P_n(x)| \leq \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2n}\sqrt{1-x^2}},$$

luego

$$|\sqrt{n}P_n(x)| \leq \sqrt{\frac{\pi}{2-2x^2}}$$

y el teorema queda demostrado. ■

Ejemplo Vamos a calcular la serie de Fourier-Legendre de la función

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < x < 1, \\ 0 & \text{si } x = 0, \\ -1 & \text{si } -1 < x < 0. \end{cases}$$

En realidad, el valor de $f(0)$ es irrelevante. Tenemos que calcular

$$a_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \int_{-1}^1 f(x)P_n(x) dx.$$

Como $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$ y $f(-x) = -f(x)$, es inmediato que $a_{2k} = 0$ para todo k . Por otra parte,

$$a_{2k+1} = 2 \left(2k + \frac{3}{2}\right) \int_0^1 P_{2k+1}(x) dx.$$

La integral la calculamos usando 9.15:

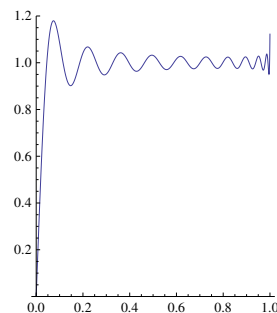
$$\begin{aligned} \int_0^1 P_{2k+1}(x) dx &= \frac{1}{4k+3} [P_{2k+2}(x) - P_{2k}(x)]_0^1 = \frac{1}{4k+3} (P_{2k}(0) - P_{2k+2}(0)) \\ &= \frac{1}{4k+3} \left(\frac{(-1)^k (2k)}{2^{2k} \binom{2k}{k}} - \frac{(-1)^{k+1} (2k+2)}{2^{2k+2} \binom{2k+2}{k+1}} \right) = \frac{(-1)^k (2k)}{2^{2k+1} (k+1) \binom{2k}{k}}. \end{aligned}$$

En definitiva, para $-1 < x < 1$ se cumple que

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (4k+3)}{2^{2k+1} (k+1) \binom{2k}{k}} P_{2k+1}(x),$$

La figura muestra la suma de los 20 primeros términos de la serie. ■

Veamos ahora que los polinomios de Legendre son soluciones de una ecuación diferencial, conocida precisamente como *ecuación de Legendre*:



Teorema 9.21 *Los polinomios de Legendre satisfacen la ecuación diferencial*

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n + 1)y = 0, \quad (9.10)$$

o, equivalentemente,

$$\frac{d}{dx}((1 - x^2)\frac{dy}{dx}) + n(n + 1)y = 0.$$

DEMOSTRACIÓN: Consideremos la función $u(x) = (x^2 - 1)^n$. Tenemos que

$$u'(x) = 2n(x^2 - 1)^{n-1}x,$$

luego

$$(x^2 - 1)u'(x) = 2nxu(x),$$

luego

$$\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}((x^2 - 1)u'(x)) = \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}(2nxu(x)).$$

Aplicando la fórmula del producto en ambos miembros obtenemos

$$\begin{aligned} (x^2 - 1)u^{(n+2)}(x) + (n + 1)2xu^{(n+1)}(x) + (n + 1)nu^{(n)}(x) \\ = 2nxu^{(n+1)}(x) + 2n(n + 1)u^{(n)}(x). \end{aligned}$$

Equivalentemente:

$$(x^2 - 1)u^{(n+2)}(x) + 2xu^{(n+1)}(x) - n(n + 1)u^{(n)}(x) = 0.$$

La fórmula de Rodrigues nos da entonces que

$$(x^2 - 1)P_n''(x) + 2xP_n'(x) - n(n + 1)P_n(x) = 0. \quad \blacksquare$$

Los polinomios de Legendre no son las únicas soluciones de la ecuación de Legendre. No obstante, antes de encontrar otras conviene observar que, expresada en la forma general considerada en el teorema 5.48, es

$$y'' = \frac{2x}{1 - x^2}y' - \frac{n(n + 1)}{1 - x^2}y,$$

de modo que sus coeficientes no están definidos para $x = \pm 1$. Esto hace que en realidad esta ecuación determina tres ecuaciones diferenciales en principio sin conexión entre sí: una para $x < -1$, otra para $-1 < x < 1$ y otra para $x > 1$. Aquí nos vamos a centrar en los valores de x en $] -1, 1[$.

Notemos también la ecuación es lineal en (y, y', y'') , lo cual implica que el conjunto V de sus soluciones es un subespacio vectorial del espacio de todas las funciones $] -1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$. Más aún, la unicidad para unas condiciones iniciales dadas hace que la aplicación $V \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $y \mapsto (y(0), y'(0))$ sea un isomorfismo de espacios vectoriales, por lo que la solución general es de la forma

$$c_1P_n + c_2Q_n, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

donde P_n y Q_n son dos soluciones cualesquiera linealmente independientes. Podemos tomar como P_n el polinomio de Legendre, y nos falta encontrar otra solución⁵ particular Q_n que sea linealmente independiente de P_n .

Vamos a buscarla de la forma $Q_n(x) = P_n(x)u(x)$, para cierta función $u(x)$ no constante. Al sustituir en la ecuación queda

$$(1-x^2)(P_n'' + 2P_n'u' + u'') - 2x(P_n'u + P_nu') + n(n+1)u = 0,$$

o equivalentemente:

$$(1-x^2)P_nu'' + (2(1-x^2)P_n' - 2xP_n)u' + ((1-x^2)P_n'' - 2xP_n' + n(n+1))u = 0.$$

El último término se anula porque P_n cumple la ecuación de Legendre. Por lo tanto obtenemos

$$\frac{u''}{u'} = -\frac{2P_n'}{P_n} + \frac{2x}{1-x^2}.$$

Integrando ambos miembros llegamos a que

$$\log|u'| = -\log P_n^2 - \log(1-x^2) = -\log((1-x^2)P_n^2(x)).$$

No consideramos ninguna constante de integración porque sólo estamos interesados en encontrar una solución particular. Así llegamos a que

$$u'(x) = \frac{1}{(1-x^2)P_n^2(x)}.$$

Al margen del proceso que hemos seguido para llegar hasta aquí, se comprueba sin dificultad que si u cumple esta condición entonces P_nu cumple la ecuación de Legendre. De aquí llegamos a que

$$u(x) = \int \frac{dx}{(1-x^2)P_n^2(x)}.$$

De nuevo, no especificamos límites de integración porque nos basta encontrar una primitiva concreta.

Hemos visto que $P_n(x)$ tiene n raíces simples en el intervalo $] -1, 1[$, de modo que $P_n(x) = x_0(x-x_1)\cdots(x-x_k)$. Consideramos la descomposición en fracciones simples del integrando (véase [A, 3.36]), que será de la forma

$$\frac{1}{(1-x^2)P_n^2(x)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \sum_{k=1}^n \left(\frac{D_k}{(x-x_k)^2} + \frac{E_k}{x-x_k} \right), \quad (9.11)$$

para ciertos coeficientes $A, B, D_k, E_k \in \mathbb{R}$ que tenemos que calcular.

Para calcular A multiplicamos ambos miembros por $x-1$, con lo que obtenemos que

$$\frac{-1}{(x+1)P_n^2(x)} = A + \cdots,$$

⁵En realidad, necesitamos encontrar una solución Q_n definida sobre todo el intervalo $] -1, 1[$, lo cual justificará que todas las soluciones están definidas en todo el intervalo.

donde los puntos suspensivos son términos que valen 0 en 1, luego evaluando en 1 queda que $A = -1/2P_n^2(1) = -1/2$. Multiplicando ambos miembros por $x + 1$ obtenemos igualmente que $B = 1/2$. Para calcular D_k observamos que

$$D_k = \lim_{x \rightarrow x_k} (x - x_k)^2 u'(x).$$

En efecto, evaluando el límite en el miembro derecho de (9.11) vemos que al multiplicar por $(x - x_k)^2$ todos los sumandos tienden a 0 excepto el correspondiente a D_k , que es D_k . Si hacemos el cálculo con el miembro izquierdo resulta que

$$D_k = \lim_{x \rightarrow x_k} \frac{(x - x_k)^2}{(1 - x^2)P_n^2(x)} = \lim_{x \rightarrow x_k} \frac{1}{(1 - x^2) \left(\frac{P_n(x) - P_n(x_k)}{x - x_k} \right)^2} = \frac{1}{(1 - x_k^2)P_n'^2(x_k)}.$$

El cálculo de E_k es más delicado. Podemos obtenerlo como

$$E_k = \lim_{x \rightarrow x_k} \frac{d}{dx} ((x - x_k)^2 u'(x)).$$

En efecto, los sumandos del miembro izquierdo de (9.11) distintos de los dos correspondientes al índice k son de la forma $(x - x_k)^2 T(x)$, donde $T(x)$ está definido en x_k . Al derivar queda $2(x - x_k)T(x) + (x - x_k)^2 T'(x)$, que tiende a 0 en x_k .

El primer sumando correspondiente al índice k es D_k , que al derivar se anula, y el segundo es $E_k(x - x_k)$, que al derivar pasa a ser E_k . Lo calculamos con el miembro izquierdo:

$$\begin{aligned} E_k &= \lim_{x \rightarrow x_k} \frac{d}{dx} \frac{(x - x_k)^2}{(1 - x^2)P_n^2(x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_k} \frac{2(x - x_k)(1 - x^2)P_n^2(x) - (x - x_k)^2(-2xP_n^2(x) + (1 - x^2)2P_n(x)P_n'(x))}{(1 - x^2)^2 P_n^4(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_k} \frac{2(x - x_k)P_n(x)}{(1 - x^2)P_n^2(x)} \frac{(1 - x^2)P_n(x) - (x - x_k)(-xP_n(x) + (1 - x^2)P_n'(x))}{P_n^2(x)}. \end{aligned}$$

En el primer factor se simplifica el $x - x_k$ (porque x_k es raíz de $P_n(x)$) y el cociente tiende a un valor finito. Basta probar que el segundo factor tiende a 0, con lo que podremos concluir que $E_k = 0$. Aplicamos la regla de L'Hôpital:

$$\frac{-2xP_n + (1 - x^2)P_n' - (-xP_n + (1 - x^2)P_n') - (x - x_k)(-P_n - xP_n' - 2xP_n' + (1 - x^2)P_n'')}{2P_n P_n'}.$$

Usando que P_n cumple la ecuación de Legendre la expresión se simplifica a

$$\lim_{x \rightarrow x_k} \frac{-xP_n(x) - (x - x_k)(-P_n(x) - xP_n'(x) - n(n - 1)P_n(x))}{2P_n(x)P_n'(x)}.$$

Volvemos a aplicar la regla de L'Hôpital:

$$\frac{-P_n - xP'_n - (-P_n - xP'_n - n(n-1)P_n) - (x-x_k)(-P'_n - P'_n - xP''_n - n(n-1)P'_n)}{2P_n'^2 + 2P_n P_n''}.$$

El límite cuando $x \rightarrow x_k$ es

$$\frac{-x_k P'_n(x_k) - (-x_k P'_n(x_k))}{2P_n'^2(x_k)} = 0.$$

En definitiva:

$$\begin{aligned} u(x) &= \int \left(\frac{-1/2}{x-1} + \frac{1/2}{x+1} + \sum_{k=1}^n \frac{D_k}{(x-x_k)^2} \right) dx = \\ &= -\frac{1}{2} \log(1-x) + \frac{1}{2} \log(1+x) - \sum_{k=1}^n \frac{D_k}{x-x_k} \\ &= \frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{(1-x_k^2)P_n'^2(x_k)} \frac{1}{x-x_k}. \end{aligned}$$

Las funciones

$$Q_n(x) = P_n(x) \frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{(1-x_k^2)P_n'^2(x_k)} \frac{P_n(x)}{x-x_k}$$

se llaman *funciones de Legendre de segunda clase* (las de primera clase son los polinomios de Legendre). Observemos que el sumatorio es un polinomio, porque $x-x_k$ divide a $P_n(x)$.

Teniendo en cuenta la relación $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$, es inmediato que $Q_n(-x) = (-1)^{n+1} Q_n(x)$. También se comprueba fácilmente que tienden a ∞ en ± 1 .

La figura muestra las primeras funciones de Legendre de segunda clase, que son las siguientes:

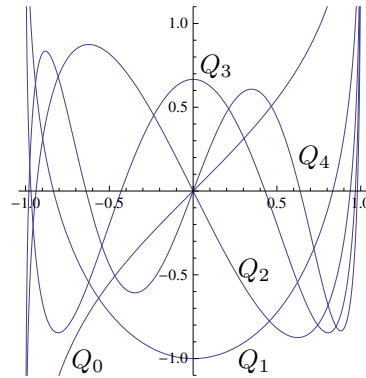
$$Q_0(x) = \frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x}$$

$$Q_1(x) = \frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x} - 1$$

$$Q_2(x) = \frac{3x^2-1}{2} \log \frac{1+x}{1-x} - \frac{3x}{2}$$

$$Q_3(x) = \frac{5x^3-3x}{2} \log \frac{1+x}{1-x} + \frac{2}{3} - \frac{5x^2}{2}$$

$$Q_4(x) = \frac{35x^4-30x^2+3}{8} \log \frac{1+x}{1-x} + \frac{55x}{24} - \frac{25x^3}{8}.$$



Veamos una aplicación:

Ejemplo La base de una bóveda semiesférica de 10m de radio se mantiene caldeada a una temperatura constante de $30^\circ C$, mientras que su superficie se encuentra a la temperatura ambiente de $5^\circ C$. Determinar la temperatura en cada punto del interior de la bóveda.

SOLUCIÓN: Por simetría, la temperatura de cada punto tiene que ser una función que, en coordenadas esféricas será de la forma $T = T(r, \theta)$, de modo que no dependerá de la coordenada ϕ . Por simplicidad vamos a tomar los 10m de radio de la bóveda como unidad de longitud, de modo que el radio es ahora unitario. Similarmente, vamos a tomar los $30^\circ C$ de la base como origen de temperaturas, de modo que la base está a temperatura 0 (y la superficie de la bóveda a -25).

Buscamos una solución estacionaria a la ecuación del calor (es decir, con temperatura constante, lo cual no significa que no haya flujo de calor, pues ciertamente el calor fluirá de la base a la superficie). La ecuación se reduce entonces a la de Laplace: $\Delta T = 0$, de modo que buscamos una función armónica en el interior de la semiesfera que tienda a 0 en la base y a $T_f = -25$ en la superficie.

Según el teorema 8.9, la expresión de ΔT en coordenadas esféricas es

$$\Delta T = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right),$$

donde hemos suprimido el término con la derivada respecto de ϕ , pues T no depende de esta variable. Usando que $z = \cos \theta$, con lo que

$$\frac{\partial}{\partial \theta} = -\sin \theta \frac{\partial}{\partial z},$$

podemos expresar T como función $T = T(r, z)$, y el laplaciano es

$$\begin{aligned} \Delta T &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial z} \left(-\sin^2 \theta \frac{\partial T}{\partial z} \right) \\ &= \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial z} \left((1 - z^2) \frac{\partial T}{\partial z} \right). \end{aligned}$$

Así pues, tenemos que resolver la ecuación en derivadas parciales

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial z} \left((1 - z^2) \frac{\partial T}{\partial z} \right) = 0$$

en la semiesfera abierta, con las condiciones de frontera que establecen que la temperatura debe tender a 0 cuando $z \rightarrow 0$ y a un valor T_0 cuando $r \rightarrow 1$.

En primer lugar buscamos soluciones de la forma $T(r, z) = R(r)Z(z)$. Al sustituir en la ecuación y separar variables queda

$$\frac{r^2}{R} (R'' + \frac{2}{r} R') = -\frac{1}{z} \frac{d}{dz} ((1 - z)^2 Z') = n(n + 1).$$

Como cada miembro depende de una variable distinta, ambos tienen que ser constantes, y vamos a considerar los casos en los que la constante es de la

forma $n(n+1)$, donde $n \in \mathbb{N}$. De este modo, la función Z satisface la ecuación de Legendre

$$\frac{d}{dz}((1-Z)^2 Z') + zn(n-1) = 0,$$

cuyas soluciones son de la forma $Z = C_1 P_n(z) + C_2 Q_n(z)$, pero tomamos $C_2 = 0$ porque buscamos soluciones con límite finito cuando $z \rightarrow 1$. Además, la condición de frontera referente a la base de la semiesfera exige que $C_1 P_n(0) = 0$, lo cual se cumple si n es impar.

Por otra parte, la función R tiene que cumplir

$$r^2 R'' + 2rR' = n(n+1)R.$$

Se trata de una ecuación de Euler-Cauchy, precisamente la que hemos resuelto en la página 243. Sus soluciones son de la forma

$$C_3 r^n + C_4 r^{-(n+1)},$$

pero hacemos $C_4 = 0$ porque no queremos soluciones que tiendan a ∞ en 0.

En total, concluimos que las funciones de la forma $T_n(r, z) = c_n r^n P_n(z)$, con n impar, cumplen las condiciones del problema salvo la condición de frontera que exige que la temperatura tienda a T_0 cuando $r \rightarrow 1$. Ahora pasamos a considerar soluciones de la forma

$$T(r, z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1} r^{2n+1} P_{2n+1}(z).$$

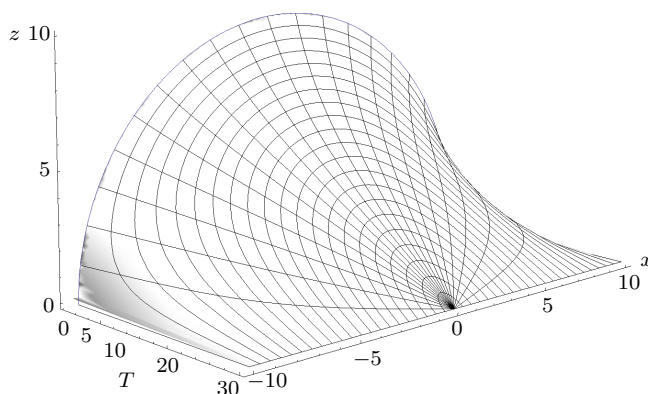
Si la sucesión de coeficientes c_{2n+1} determina una serie de Fourier-Legendre convergente para cada $0 < z < 1$, entonces el criterio de mayoración de Weierstrass nos asegura que $T(r, z)$, como función de r para un z fijo, es una serie de potencias de radio de convergencia ≥ 1 , y por lo tanto las derivadas parciales sucesivas de T respecto de r son las sumas de las correspondientes a los sumandos. Similarmente, si fijamos $0 < r < 1$, la acotación $|c_{2n+1} r^{2n+1} P_{2n+1}(z)| \leq K r^{2n+1}$ (donde K es una cota para los coeficientes) nos da la convergencia uniforme en z , y podemos aplicar el teorema 5.4 para concluir que T es derivable respecto de z y que sus derivadas sucesivas son las sumas de las derivadas de los sumandos. De aquí se sigue que ΔT es la suma de los laplacianos de los sumandos, luego $\Delta T = 0$ y claramente cumple todos los requisitos del problema, salvo quizá la condición de frontera en la superficie. Concretamente:

$$T(1, z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1} P_{2n+1}(z).$$

Sólo falta ajustar los coeficientes para que esta serie sume 1 si $0 < z \leq 1$. Como los polinomios de Legendre impares cumplen $P_{2n+1}(-z) = -P_{2n+1}(z)$, en el intervalo $[-1, 1]$ la serie tiene que converger (respecto a la norma de L^2) a la función

$$f(z) = \begin{cases} 1 & \text{si } z \geq 0, \\ -1 & \text{si } z < 0. \end{cases}$$

El teorema 9.20 prueba que la serie de Fourier-Legendre de esta función converge puntualmente a 1 en $0 < z < 1$ (porque f es derivable en estos puntos), luego nos proporciona la solución deseada de la ecuación diferencial. Para volver a las unidades iniciales sólo hay que transformarla en $30 - 25T(r/10, z/10)$.



La figura muestra la solución $T(z, x)$ (con $x^2 + z^2 \leq 100$) calculada con 500 sumandos de la serie. Vemos cómo, en efecto, la temperatura en la base de la semiesfera es de 30°C, mientras que en su superficie es de 5°C. ■

9.3 Las funciones asociadas de Legendre

A partir de las soluciones de la ecuación de Legendre es posible obtener las de otra ecuación diferencial conocida como *ecuación asociada de Legendre*:

Teorema 9.22 Si una función $y(x)$ satisface la ecuación diferencial de Legendre (9.10), entonces, para cada número natural m ,

$$u(x) = (1 - x^2)^{m/2} \frac{d^m y}{dx^m}$$

satisface la ecuación asociada de Legendre:

$$(1 - x^2)u'' - 2xu' + \left(n(n + 1) - \frac{m^2}{1 - x^2} \right) u = 0. \quad (9.12)$$

DEMOSTRACIÓN: Al derivar m veces (9.10) obtenemos

$$(1 - x^2)v'' - 2(m + 1)xv' + (n - m)(n + m + 1)v = 0,$$

donde $v = y^{(m)} = (1 - x^2)^{-m/2} u$. Entonces

$$v' = (1 - x^2)^{-m/2} \left(u' + \frac{mx}{1 - x^2} u \right),$$

$$v'' = (1 - x^2)^{-m/2} \left(u'' + \frac{2mx}{1 - x^2} u' + \frac{m}{1 - x^2} u + \frac{m(m + 2)x^2}{(1 - x^2)^2} u \right).$$

Sustituyendo en la última ecuación diferencial y simplificando se llega a que u cumple la ecuación del enunciado. ■

Definición 9.23 Para cada par de números naturales $0 \leq m \leq n$ definimos las *funciones asociadas de Legendre* como

$$P_n^m(x) = (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m P_n}{dx^m}.$$

Similarmente, las *funciones asociadas de Legendre de segunda clase* son las dadas por

$$Q_n^m(x) = (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m Q_n}{dx^m},$$

donde Q_n son las funciones de Legendre de segunda clase. Claramente las funciones de Legendre son el caso particular $P_n^0 = P_n$ y $Q_n^0 = Q_n$.

Es fácil concluir que la solución general de la ecuación asociada de Legendre en $]-1, 1[$ es $AP_n^m + BQ_n^m$, donde A y B son constantes de integración arbitrarias.

La fórmula de Rodrigues nos da una expresión alternativa para las funciones de Legendre de primera clase:

$$P_n^m(x) = \frac{1}{2^n n!} (1-x^2)^{m/2} \frac{d^{n+m}(x^2-1)^n}{dx^{n+m}}. \quad (9.13)$$

A veces a estas funciones se las llama *polinomios asociados de Legendre*, a pesar de que sólo son polinomios se m es par. La razón es que, en cualquier caso, $P_n^m(\cos \theta)$ es un polinomio de grado n en $\cos \theta$ y $\sin \theta$.

Observemos que la expresión precedente tiene sentido cuando $-n \leq m \leq n$, por lo que podemos tomarla como definición cuando $-n \leq m < 0$, si bien las nuevas funciones que obtenemos no son esencialmente nuevas:

Teorema 9.24 Si $-n \leq m \leq n$, se cumple la relación

$$P_n^{-m}(x) = (-1)^m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(x).$$

DEMOSTRACIÓN: Es claro que esta fórmula se cumple para un m si y sólo si se cumple para $-m$, por lo que basta probarla para $0 \leq m \leq n$. Para ello aplicamos la fórmula de Leibniz 5.2 a la función $(x^2-1)^n = (x+1)^n(x-1)^n$:

$$\frac{d^{n+m}(x^2-1)^n}{dx^{n+m}} = \sum_{i=0}^{n+m} \binom{n+m}{i} \frac{d^i(x+1)^n}{dx^i} \frac{d^{n+m-i}(x-1)^n}{dx^{n+m-i}}.$$

Notemos que los sumandos son nulos salvo si $m \leq i \leq n$, por lo que

$$\begin{aligned} \frac{d^{n+m}(x^2-1)^n}{dx^{n+m}} &= \sum_{i=m}^n \frac{(n+m)!}{i!(n+m-i)!} \frac{n!^2}{(n-i)!(i-m)!} (x+1)^{n-i} (x-1)^{i-m} \\ &= \sum_{i=0}^{n-m} \frac{(n+m)!}{(m+i)!(n-i)!} \frac{n!^2}{(n-m-i)!i!} (x+1)^{n-m-i} (x-1)^i. \end{aligned}$$

Similarmente:

$$\begin{aligned}
\frac{d^{n-m}(x^2-1)^n}{dx^{n-m}} &= \sum_{i=0}^{n-m} \binom{n-m}{i} \frac{d^i(x+1)^n}{dx^i} \frac{d^{n-m-i}(x-1)^n}{dx^{n-m-i}} \\
&= \sum_{i=0}^{n-m} \frac{(n-m)!}{i!(n-m-i)!} \frac{n!^2}{(n-i)!(m-i)!} (x+1)^{n-i} (x-1)^{m+i} \\
&= \frac{(n-m)!}{(n+m)!} (x+1)^m (x-1)^m \frac{d^{n+m}(x^2-1)^n}{dx^{n+m}} \\
&= (-1)^m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} (1-x^2)^m \frac{d^{n+m}(x^2-1)^n}{dx^{n+m}},
\end{aligned}$$

de donde se sigue inmediatamente la relación del enunciado. \blacksquare

Las funciones asociadas se calculan más fácilmente mediante esta relación recurrente (válida para $m \geq 0$):

$$(n-m+1)P_{n+1}^m(x) - (2n+1)xP_n^m(x) + (n+m)P_{n-1}^m(x) = 0. \quad (9.14)$$

Para demostrarla partimos de la relación recurrente de los polinomios de Legendre:

$$(2n+1)xP_n(x) = (n+1)P_{n+1}(x) + nP_{n-1}(x).$$

Al derivarla m veces (usando la regla de Leibniz) obtenemos

$$\begin{aligned}
(2n+1)x \frac{d^m}{dx^m} P_n(x) + m(2n+1) \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} P_n(x) &= \\
(n+1) \frac{d^m}{dx^m} P_{n+1}(x) + n \frac{d^m}{dx^m} P_{n-1}(x). &
\end{aligned}$$

Multiplicamos por $(1-x^2)^{m/2}$:

$$(2n+1)xP_n^m(x) + m(2n+1)(1-x^2)P_n^{m-1}(x) = (n+1)P_{n+1}^m(x) + nP_{n-1}^m(x).$$

Ahora derivamos m veces la relación dada por el teorema 9.15:

$$(2n+1) \frac{d^m}{dx^m} P_n(x) = \frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}} P_{n+1}(x) - \frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}} P_{n-1}(x)$$

y multiplicamos por $(1-x^2)^{(m+1)/2}$:

$$(2n+1)(1-x^2)P_n^m(x) = P_{n+1}^{m+1}(x) - P_{n-1}^{m+1}(x).$$

Al sustituir esta ecuación en la que habíamos obtenido resulta (9.14). \blacksquare

He aquí algunos polinomios asociados de Legendre:

$$\begin{aligned} P_0^0(x) &= 1, \\ P_1^{-1}(x) &= \frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}, \quad P_1^0(x) = x, \quad P_1^1(x) = -\sqrt{1-x^2}, \\ P_2^{-2}(x) &= \frac{3}{24}(1-x^2), \quad P_2^{-1}(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}, \\ P_2^0(x) &= \frac{1}{2}(3x^2-1), \\ P_2^1(x) &= -3x\sqrt{1-x^2}, \quad P_2^2(x) = 3(1-x^2). \end{aligned}$$

Veamos ahora que las funciones asociadas de Legendre para un m fijo son ortogonales dos a dos en $L^2([0, 1])$. Concretamente:

Teorema 9.25 *Si $0 \leq m \leq n$ y $0 \leq m \leq n'$, entonces*

$$\int_{-1}^1 P_n^m(x) P_{n'}^m(x) dx = \begin{cases} \frac{2(n+m)!}{(2n+1)(n-m)!} & \text{si } n = n', \\ 0 & \text{si } n \neq n'. \end{cases}$$

DEMOSTRACIÓN: Llamemos $X = x^2 - 1$. Si $n \neq n'$ no perdemos generalidad si suponemos $n < n'$. Usando (9.13):

$$\int_{-1}^1 P_n^m(x) P_{n'}^m(x) dx = \frac{(-1)^m}{2^{n+n'} n! n'} \int_{-1}^1 X^m \frac{d^{n+m}}{dx^{n+m}} X^n \frac{d^{n'+m}}{dx^{n'+m}} X^{n'} dx.$$

Si integramos $n' + m$ veces por partes obtenemos

$$\int_{-1}^1 P_n^m(x) P_{n'}^m(x) dx = \frac{(-1)^m (-1)^{n'+m}}{2^{n+n'} n! n'} \int_{-1}^1 X^{n'} \frac{d^{n'+m}}{dx^{n'+m}} \left(X^m \frac{d^{n+m}}{dx^{n+m}} X^n \right) dx.$$

Observemos que lo que queda fuera de la integral al integrar por partes es

$$\frac{d^{n'+m-i}}{dx^{n'+m-i}} X^{n'} \frac{d^{i-1}}{dx^{i-1}} \left(X^m \frac{d^{n+m}}{dx^{n+m}} X^n \right)$$

y cuando $i \leq m$ el segundo factor se anula⁶ en ± 1 , mientras que si $i > m$ lo hace el primero. Ahora desarrollamos el integrando mediante la regla de Leibniz:

$$\begin{aligned} X^{n'} \frac{d^{n'+m}}{dx^{n'+m}} \left(X^m \frac{d^{n+m}}{dx^{n+m}} X^n \right) &= \\ X^{n'} \sum_{i=0}^{n'+m} \frac{(n'+m)!}{i!(n'+m-i)!} \frac{d^{n'+m-i}}{dx^{n'+m-i}} X^m \frac{d^{n+m+i}}{dx^{n+m+i}} X^n. \end{aligned}$$

⁶Por ejemplo, ± 1 son raíces del polinomio $X^{n'}$ de multiplicidad n' , luego todas sus derivadas hasta orden $n' - 1$ son nulas.

La primera derivada se anula si $i < n' - m$ y la segunda si $i > n - m$, luego si $n < n'$ todos los términos se anulan y la integral vale 0. Si $n = n'$ el único término no nulo es el correspondiente a $i = n - m$, y entonces

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 P_n^m(x)^2 dx &= \frac{(-1)^n (n+m)!}{2^{2n} n! n! (n-m)! (2m)!} \int_{-1}^1 X^n \frac{d^{2m}}{dx^{2m}} X^m \frac{d^{2n}}{dx^{2n}} X^n dx \\ &= \frac{(-1)^n (n+m)! (2n)!}{2^{2n} n! n! (n-m)!} \int_{-1}^1 X^n dx = \frac{(n+m)! (2n)!}{2^{2n} n! n! (n-m)!} \int_{-1}^1 (1+x)^n (1-x)^n dx. \end{aligned}$$

Integrando por partes n veces queda

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 P_n^m(x)^2 dx &= \frac{(n+m)! (2n)!}{2^{2n} n! n! (n-m)!} \int_{-1}^1 \frac{(1+x)^{2n}}{(2n)!/n!} n! dx = \\ &= \frac{(n+m)!}{2^{2n} (n-m)!} \int_{-1}^1 (1+x)^{2n} dx = \frac{2(n+m)!}{(2n+1)(n-m)!}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Podríamos estudiar las series asociadas de Fourier-Legendre, análogas a las series de Fourier-Legendre, pero no vamos a entrar en ello. Los resultados que hemos presentado aquí son los que vamos a necesitar en las secciones siguientes.

9.4 Harmónicos esféricos

En principio podríamos resumir el contenido de esta sección sin faltar a la verdad diciendo que vamos a estudiar los polinomios harmónicos, pero en realidad veremos que los resultados que vamos a obtener nos proporcionarán información sobre una clase muy amplia de funciones definidas sobre esferas, concretamente sobre el espacio $L^2(S^d)$, lo que en particular incluye a todas las funciones continuas en S^d .

Funciones homogéneas Introducimos aquí algunos preliminares que vamos a necesitar, relativos al concepto siguiente:

Definición 9.26 Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto. Una función $f: \Omega \rightarrow \mathbb{K}$ es *homogénea de grado* $\alpha \in \mathbb{R}$ si para todo $x \in \Omega$ y todo $\lambda > 0$ tal que $\lambda x \in \Omega$ se cumple que $f(\lambda x) = \lambda^\alpha f(x)$.

Observemos que cuando $\alpha = 0$ esto equivale a que $f(\lambda x) = f(x)$.

Es claro que si $f = f_1 + if_2$ entonces f es homogénea de grado α si y sólo si lo son f_1 y f_2 . Esto permite reducir al caso real todos los hechos que vamos a señalar a continuación, aunque a menudo las pruebas son directas, sin necesidad de tal reducción.

Un polinomio no nulo $f(x) \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ (visto como función $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{K}$) es homogéneo de grado $m \in \mathbb{N}$ si y sólo si es suma de monomios de grado m (es decir, lo que hemos llamado una forma de grado m).

En efecto, es claro que toda suma de monomios de grado m es homogénea de grado m , así como que f se descompone de forma única como $f = f_0 + \dots + f_r$, donde cada f_i es una suma de monomios de grado i . Entonces, si $\lambda > 0$, tenemos que

$$\lambda^m f(x) = f_0(x) + \lambda f_1(x) + \dots + \lambda^r f_r(x).$$

Así pues, para cada $x \in \mathbb{R}^n$ tenemos que los dos miembros son polinomios en λ que toman los mismos valores para todo $\lambda > 0$. Esto sólo puede ocurrir si son el mismo polinomio, es decir, si $f(x) = f_m(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Observemos que los polinomios homogéneos cumplen la definición de homogeneidad para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, no necesariamente positivo. Si K es un cuerpo arbitrario podemos definir los *polinomios homogéneos de grado m* en $K[x_1, \dots, x_n]$ como las sumas de monomios de grado m , y la definición coincide con la precedente para el caso en que $K = \mathbb{K}$.

También es inmediato que las derivadas parciales de una función homogénea de grado α son homogéneas de grado $\alpha - 1$. En efecto, sólo tenemos que derivar en la relación que define la homogeneidad para obtener que

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\lambda x)\lambda = \lambda^\alpha \frac{\partial f}{\partial x_i} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i}(\lambda x) = \lambda^{\alpha-1} \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Las funciones homogéneas de clase C^1 admiten una caracterización en términos de sus derivadas:

Teorema 9.27 (Euler) *Si $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es abierto, una función $f : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$ de clase C^1 es homogénea de grado $\alpha \in \mathbb{R}$ si y sólo si, para todo $x \in \Omega$, se cumple*

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \dots + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = \alpha f.$$

DEMOSTRACIÓN: Consideramos la ecuación $f(\lambda x) = \lambda^\alpha f(x)$ y derivamos ambos miembros respecto de λ :

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(\lambda x)x_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\lambda x)x_n = \alpha \lambda^{\alpha-1} f(x).$$

Tomando $\lambda = 1$ resulta la ecuación del enunciado. Para probar el recíproco no perdemos generalidad si suponemos que $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, pues el caso real implica trivialmente el caso complejo. Si f cumple la ecuación del enunciado, llamamos $g(\lambda) = f(\lambda x)$, de modo que

$$g'(\lambda) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\lambda x)x_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\lambda x)x_n = \alpha \lambda^{\alpha-1} f(x) = \frac{\alpha}{\lambda} g(\lambda).$$

Tenemos así una ecuación diferencial de variables separables:

$$\frac{g'(\lambda)}{g(\lambda)} = \frac{\alpha}{\lambda},$$

luego $\log g(\lambda) = \alpha \log(\lambda) + c$, luego $g(\lambda) = k\lambda^\alpha$ con $k = g(1) = f(x)$, luego $f(\lambda x) = \lambda^\alpha f(x)$. ■

Observamos ahora que toda función $F : \mathbb{R}^{d+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{K}$ homogénea de grado $m \in \mathbb{N}$ está determinada por su restricción $f = F|_{S^d}$, pues obviamente $F(x) = r^m f(x/r)$, donde $r = \|x\|$. Recíprocamente, si $f : S^d \rightarrow \mathbb{K}$, la relación $F(x) = r^m f(x/r)$ define una extensión de f a $\mathbb{R}^{d+1} \setminus \{0\}$ homogénea de grado m .

Más precisamente, observemos que si $f \in C^k(S^d)$, es decir, si para cada $p \in S^d$ existe una carta $X : U \rightarrow S^d$ que cubre p de modo que $X \circ f$ es de clase C^k , entonces la extensión F es de clase C^k en $\mathbb{R}^{d+1} \setminus \{0\}$. Basta tener en cuenta que la función $f(x/r)$ es de clase C^k , porque en un entorno de cada punto se descompone como

$$\{x \in \mathbb{R}^{d+1} \setminus \{0\} \mid x/r \in X[U]\} \xrightarrow{x/r} X[U] \xrightarrow{f} \mathbb{K},$$

donde las dos funciones son de clase C^k , y claramente $x \mapsto r^m$ también es de clase C^k en $\mathbb{R}^{d+1} \setminus \{0\}$.

Definición 9.28 Definimos el *operador de Laplace-Beltrami* en S^d como la aplicación $\Delta_d : C^2(S^d, \mathbb{K}) \rightarrow C^2(S^d, \mathbb{K})$ definida por $\Delta_d f = \Delta F|_{S^d}$, donde $F(x) = f(x/r)$ es la extensión de f a $\mathbb{R}^{d+1} \setminus \{0\}$ homogénea de grado 0.

Aquí hay que entender que si $F = F_1 + iF_2$, entonces $\Delta F = \Delta F_1 + i\Delta F_2$, con lo que si $f = f_1 + if_2$, se cumple $\Delta_d f = \Delta_d f_1 + i\Delta_d f_2$. Como en el caso de la homogeneidad, Esta relación permite reducir al caso real todas las propiedades que vamos a considerar.

Observemos que, para puntos de $\mathbb{R}^{d+1} \setminus \{0\}$ que no estén necesariamente en S^d se cumple que $\Delta F(x) = r^{-2}\Delta_d f(x/r)$ pues, como F es homogénea de grado 0, su laplaciano es una función homogénea de grado -2 , luego

$$\Delta F(x) = r^{-2}\Delta F(x/r) = r^{-2}\Delta_d f(x/r).$$

El teorema siguiente generaliza esta fórmula:

Teorema 9.29 Sea $f \in C^2(S^d, \mathbb{K})$ y $F : \mathbb{R}^{d+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{K}$ su extensión homogénea de grado m . Entonces

$$\Delta F(x) = r^{m-2}(m(d+m-1)f(x/r) + \Delta_d f(x/r)).$$

DEMOSTRACIÓN: Llamamos $F_0(x) = f(x/r)$, de modo que $F(x) = r^m F_0(x)$. Entonces

$$\nabla F = F_0 \nabla r^m + r^m \nabla F_0, \quad \Delta F = F_0 \Delta r^m + r^m \Delta F_0 + 2\nabla r^m \nabla F_0.$$

Ahora bien, $\nabla r^m = m r^{m-1} \nabla r = m r^{m-2} x$, y por el teorema de Euler $x \nabla F_0 = 0$, luego

$$\Delta F = \Delta r^m f(x/r) + r^{m-2} \Delta_d f(x/r).$$

Sólo falta calcular

$$\begin{aligned} \Delta r^m &= m \nabla (r^{m-2} x) = m (\nabla r^{m-2} \cdot x + r^{m-2} \nabla x) = \\ &= m \left((m-2) r^{m-3} \frac{x}{r} \cdot x + (d+1) r^{m-2} \right) = m \left((m-2) r^{m-3} r + (d+1) r^{m-2} \right) = \\ &= r^{m-2} m(d+m-1). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Necesitamos una última propiedad del operador de Laplace-Beltrami:

Teorema 9.30 Si $f, g \in C^2(S^d, \mathbb{K})$, entonces

$$\int_{S^d} f \overline{\Delta_d g} d\sigma = \int_{S^d} \Delta_d f \bar{g} d\sigma.$$

DEMOSTRACIÓN: La relación (9.2) permite reducir trivialmente el caso complejo al caso real, así que no perdemos generalidad si suponemos que las funciones son reales. Sean $F, G : \mathbb{R}^{d+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ las extensiones de f y g homogéneas de grado 0. Entonces

$$\int_{S^d} (f \Delta_d g - g \Delta_d f) d\sigma = \int_{S^d} (F \Delta G - G \Delta F) d\sigma.$$

Como el integrando, visto como función en $\mathbb{R}^{d+1} \setminus \{0\}$, no depende de r y $\int_0^1 r^d dr = 1$, el teorema 7.26 nos da que

$$\begin{aligned} \int_{S^d} (f \Delta_d g - g \Delta_d f) d\sigma &= \int_0^1 r^d \int_{S^d} (F \Delta G - G \Delta F) d\sigma dr = \\ &= \int_{B^{d+1}} (F \Delta G - G \Delta F) dm = \int_{S^d} (F \frac{dG}{d\vec{n}} - G \frac{dF}{d\vec{n}}) d\sigma = 0, \end{aligned}$$

donde hemos aplicado la segunda fórmula de Green y el teorema de Euler, según el cual (teniendo en cuenta que el vector normal a S^d es simplemente $\vec{n} = x$)

$$\frac{dF}{d\vec{n}} = \nabla F \cdot x = 0. \quad \blacksquare$$

Observemos que la igualdad del teorema anterior puede expresarse en términos del producto escalar de $L^2(S^d)$, pues equivale a que $\langle f, \Delta_d g \rangle = \langle \Delta_d f, g \rangle$.

Pasamos ya a ocuparnos del objeto de esta sección:

Definición 9.31 Si $\Omega \subset \mathbb{R}^{d+1}$ es un abierto no vacío y $F \in C^2(\Omega, \mathbb{K})$, diremos que F es *armónica* si lo son su parte real y su parte imaginaria o, equivalentemente, si $\Delta F = 0$.

El operador de Laplace-Beltrami caracteriza a las funciones de S^d que admiten una extensión armónica homogénea:

Teorema 9.32 Una función $f \in C^2(S^d, \mathbb{K})$ admite una extensión a $\mathbb{R}^{d+1} \setminus \{0\}$ armónica y homogénea de grado m si y sólo si

$$-\Delta_d f = m(d + m - 1)f.$$

DEMOSTRACIÓN: Si F es la extensión homogénea de grado m de f , el teorema 9.29 nos da que, sobre los puntos de Ω ,

$$\Delta F = m(d + m - 1)f + \Delta_d f.$$

Entonces F es armónica si y sólo si $\Delta F = 0$, si y sólo si $\Delta F|_{S^d} = 0$ (porque ΔF es homogénea de grado $m - 2$) si y sólo si se cumple la igualdad del enunciado. ■

A partir de aquí nos restringimos a polinomios. Observemos que si $F = F_0 + \cdots + F_m$ es la descomposición en formas (sumas de monomios del mismo grado) de un polinomio F , entonces

$$\Delta F = \Delta F_2 + \cdots + \Delta F_m,$$

donde cada ΔF_k es una forma de grado $k - 2$ (o la forma nula), luego $\Delta F = 0$ si y sólo si $\Delta F_k = 0$ para todo k . Equivalentemente, un polinomio es armónico si y sólo si lo son las formas que lo componen.

Definición 9.33 Diremos que un polinomio F es *armónico de grado n* si y sólo si es armónico y homogéneo de grado n . Llamaremos \mathcal{P}_n^d al espacio vectorial de los polinomios homogéneos de grado n en $\mathbb{K}[X_0, \dots, X_d]$ (más el polinomio nulo) y \mathcal{PH}_n^d al subespacio de los polinomios armónicos de grado n .

Vamos a calcular las dimensiones de estos espacios vectoriales. Para ello probamos lo siguiente:

Teorema 9.34 La aplicación $\mathcal{P}_n^d \rightarrow \mathcal{P}_{n-2}^d$ dada por $F \mapsto \Delta F$ es un epimorfismo, (con el convenio de que $\mathcal{P}_{-1}^d = \mathcal{P}_{-2}^d = 0$).

DEMOSTRACIÓN: Es evidente que se trata de una aplicación lineal. Sólo hemos de probar que es suprayectiva. Podemos suponer que $n \geq 2$. Basta probar que todo monomio $X_0^{n_0} \cdots X_d^{n_d}$ con $n_0 + \cdots + n_d = n - 2$ puede expresarse en la forma ΔG para un cierto $G \in \mathcal{P}_n^d$. Lo probaremos por inducción descendente sobre n_0 , es decir, observamos que es evidentemente cierto cuando $n_0 = n - 2$, suponemos que se cumple para monomios $X_0^{m_0} \cdots X_d^{m_d}$ con $n_0 < m_0 \leq n - 2$ y lo demostramos para n_0 . Para ello observamos que

$$X_0^{n_0} \cdots X_d^{n_d} = \frac{1}{(n_0 + 1)(n_0 + 2)} \Delta(X_0^{n_0+2} X_1^{n_1} \cdots X_d^{n_d}) + R,$$

donde R es una forma de grado $n - 2$ en la que la indeterminada X_0 tiene exponente $n_0 + 2$. Por hipótesis de inducción $R = \Delta G$, para cierto $G \in \mathcal{P}_n^d$, y la conclusión es inmediata. ■

Es fácil ver que $\dim \mathcal{P}_n^d = \binom{d+n}{n}$, pues una base la forman los monomios⁷ $X_0^{n_0} \cdots X_d^{n_d}$ que cumplen $n_0 + \cdots + n_d = n$.

⁷Su número coincide con el de $d + 1$ -tuplas (n_0, \dots, n_d) con $1 \leq n_i \leq n + 1$ que sumen $n + d + 1$. Pensemos en $n + d + 1$ puntos alineados, entre los que hay $n + d$ separaciones, y hay que calcular todas las formas de situar d separadores en las $n + d$ posiciones posibles para partir los $n + d + 1$ puntos en $d + 1$ partes.

Por consiguiente el teorema anterior nos da que

$$\begin{aligned} \dim \mathcal{PH}_n^d &= \dim \mathcal{P}_n^d - \dim \mathcal{P}_{n-2}^d \\ &= \binom{d+n}{n} - \binom{d+n-2}{n-2} = \frac{(2n+d-1)(n+d-2)!}{(d-1)!n!}, \end{aligned}$$

entendiendo que el segundo número combinatorio es nulo para $n < 2$. Además, esto no depende de si \mathbb{K} es \mathbb{R} o \mathbb{C} , y tenemos que $\mathcal{PH}_n^d(\mathbb{R}) \subset \mathcal{PH}_n^d(\mathbb{C})$, de donde se sigue fácilmente que una \mathbb{R} -base de $\mathcal{PH}_n^d(\mathbb{R})$ es también una \mathbb{C} -base de $\mathcal{PH}_n^d(\mathbb{C})$ (pues sigue siendo linealmente independiente sobre \mathbb{C}).

Ejemplo Si $d = 1$ tenemos que $\dim \mathcal{PH}_n^1 = 2$, independientemente de $n \geq 1$. Obviamente $\mathcal{PH}_1^1 = \langle X, Y \rangle$. Para calcular una base de \mathcal{PH}_2^1 consideramos un polinomio homogéneo arbitrario $F(X, Y) = aX^2 + bXY + cY^2$ y calculamos el laplaciano $\Delta F = 2a + 2c$, con lo que los polinomios armónicos de grado 2 son los de la forma $aX^2 + bXY - aY^2$, luego $\mathcal{PH}_2^1 = \langle X^2 - Y^2, XY \rangle$.

En el caso complejo podemos hallar una base para n arbitrario observando que los polinomios conjugados $F(X, Y) = (X \pm iY)^n$ son armónicos. Podemos calcular su laplaciano separando la parte real y la imaginaria o, alternativamente, usando que las derivadas parciales de la multiplicación compleja (y, por consiguiente, de las potencias) cumplen la regla del producto usual. Así

$$\Delta F = n(n-1)(X \pm iY)^{n-2} - n(n-1)(X \pm iY)^{n-2} = 0.$$

Además, como ambos polinomios son distintos y el coeficiente de X^n es 1 en ambos casos, es claro que son linealmente independientes, luego

$$\mathcal{PH}_n^1 = \langle (X + iY)^n, (X - iY)^n \rangle.$$

Por ejemplo, una base de \mathcal{PH}_3^1 la forman el polinomio

$$(X + iY)^3 = X^3 + 3X^2Yi - 3XY^2 - Y^3i = X^3 - 3XY^2 + (3X^2Y - Y^3)i$$

y su conjugado. Si queremos una base formada por funciones reales basta tomar la parte real y la imaginaria:

$$\mathcal{PH}_3^1 = \langle X^3 - 3XY^2, 3X^2Y - Y^3 \rangle.$$

A su vez, esto implica que todo polinomio armónico complejo es una suma finita de la forma

$$a_0 + a_1(X + iY) + b_1(X - iY) + a_2(X + iY)^2 + b_2(X - iY)^2 + \dots$$

■

Puesto que un polinomio homogéneo está determinado por su restricción a S^d , resulta natural la definición siguiente:

Definición 9.35 Llamaremos *armónicos esféricos* de grado n a las restricciones a S^d de los polinomios de \mathcal{PH}_n^d . Llamaremos $\mathcal{H}_n^d \subset C(S^d, \mathbb{K})$ al espacio vectorial formado por todos ellos.

En realidad podría considerarse “artificial” que nos limitemos a considerar restricciones de polinomios armónicos y no restricciones de polinomios en general. Sin embargo, pronto veremos que esta restricción es sólo aparente, pues la restricción a S^d de un polinomio arbitrario se expresa de forma única como suma finita de armónicos esféricos. El considerar polinomios armónicos sirve para garantizar la unicidad de la descomposición.

En primer lugar probamos que una misma función no nula en S^d no puede ser un armónico esférico de dos grados distintos:

Teorema 9.36 *Si $f \in \mathcal{H}_m^d$ y $g \in \mathcal{H}_n^d$ y $m \neq n$, entonces f y g son ortogonales en $L^2(S^d)$.*

DEMOSTRACIÓN: Basta probarlo en el caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, pues una base de $\mathcal{H}_m^d(\mathbb{R})$ sobre \mathbb{R} es también base de $\mathcal{H}_m^d(\mathbb{C})$ sobre \mathbb{C} , luego todo elemento de $\mathcal{H}_m^d(\mathbb{C})$ es combinación lineal de elementos de $\mathcal{H}_m^d(\mathbb{R})$, y es claro entonces que si éstos son ortogonales a los elementos de $\mathcal{H}_n^d(\mathbb{R})$, entonces los elementos de $\mathcal{H}_m^d(\mathbb{C})$ son también ortogonales a los elementos de $\mathcal{H}_n^d(\mathbb{C})$.

Sean $F \in \mathcal{PH}_m^d$ y $G \in \mathcal{PH}_n^d$ polinomios homogéneos cuyas restricciones a S^d sean f y g respectivamente. Vamos a aplicarles la primera fórmula de Green, que afirma (para el caso de la bola unitaria $B^{d+1} \subset \mathbb{R}^{d+1}$) que

$$\int_{S^d} G(\nabla F \cdot \vec{n}) d\sigma = \int_{B^{d+1}} G \Delta F dm + \int_{B^{d+1}} \nabla G \nabla F dm,$$

donde $d\sigma$ es el elemento de medida en S^d , dm es el elemento de medida en B^d y \vec{n} es el vector unitario normal a S^d . Ahora bien, en el caso concreto de S^d , el vector normal unitario en un punto x es el propio x , luego, para una función homogénea F de grado m se cumple que

$$\nabla F \cdot \vec{n} = \sum_{j=0}^d x_j \frac{\partial F}{\partial x_j} = mF.$$

Como además $\Delta F = 0$, la fórmula de Green se reduce a

$$m \int_{S^d} GF d\sigma = \int_{B^{d+1}} \nabla G \nabla F dm.$$

Intercambiando los papeles de F y G tenemos también que

$$n \int_{S^d} GF d\sigma = \int_{B^{d+1}} \nabla G \nabla F dm.$$

Por consiguiente:

$$(m - n) \int_{S^d} fg d\sigma = 0,$$

luego $\langle f, g \rangle = 0$. ■

Esto implica que, como anunciábamos, un armónico esférico no sólo determina su grado, sino también el polinomio armónico al cual se extiende:

Teorema 9.37 *La restricción $\mathcal{PH}_n^d \rightarrow \mathcal{H}_n^d$ es un isomorfismo de espacios vectoriales. Más aún, si $F \in \mathcal{PH}_n^d$ y $G \in \mathcal{PH}_m^d$ tienen la misma restricción a S^d , entonces $F = G$ (y en particular $n = m$ si F y G son no nulos).*

DEMOSTRACIÓN: Por el teorema anterior tiene que ser $m = n$, y cada función en S^d admite una única extensión homogénea de grado m . ■

Como consecuencia:

$$\dim \mathcal{H}_n^d = \dim \mathcal{PH}_n^d = \binom{d+n}{n} - \binom{d+n-2}{n-2} = \frac{(2n+d-1)(n+d-2)!}{(d-1)!n!}$$

(siempre considerando nulo el segundo número combinatorio si $n < 2$).

Una consecuencia inmediata del teorema 9.36 es que el espacio generado por los armónicos esféricos se descompone en suma directa (suma ortogonal, de hecho) de los espacios homogéneos correspondientes:

$$\mathcal{H}^d = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}_n^d.$$

Ahora vamos a probar que \mathcal{H}^d no es sino el espacio de todas las funciones polinómicas en S^d . Nos basamos en el teorema siguiente:

Teorema 9.38 *Cada polinomio homogéneo F de grado n se descompone de forma única como*

$$F(x) = P_n(x) + \|x\|^2 P_{n-2}(x) + \|x\|^4 P_{n-4}(x) + \dots$$

donde $P_j \in \mathcal{PH}_j^d$, para $j = n, n-2, n-4, \dots$

DEMOSTRACIÓN: Sea \mathcal{F} el subespacio vectorial de \mathcal{P}_n^d formado por los polinomios que se pueden expresar en la forma indicada. Observemos que si

$$P_n(x) + \|x\|^2 P_{n-2}(x) + \|x\|^4 P_{n-4}(x) + \dots = 0,$$

entonces, restringiendo a S^d , los correspondientes armónicos esféricos cumplirán $p_n + p_{n-2} + p_{n-4} + \dots = 0$ y, como los sumandos son ortogonales dos a dos, han de ser nulos. Esto nos da la unicidad de la descomposición, así como que

$$\dim \mathcal{F} = \dim \mathcal{PH}_n^d + \dim \mathcal{PH}_{n-2}^d + \dim \mathcal{PH}_{n-4}^d + \dots$$

luego $\dim \mathcal{F} = \binom{d+n}{n} = \dim \mathcal{P}_n^d$. Por consiguiente, $\mathcal{F} = \mathcal{P}_n^d$, y esto nos da la conclusión. ■

Puesto que todo polinomio es suma de polinomios homogéneos de grado igual o inferior, el teorema siguiente es ahora inmediato:

Teorema 9.39 *Si G es un polinomio de grado n y g es su restricción a S^d , entonces existen unos únicos armónicos esféricos $h_j \in \mathcal{H}_j^d$ (para $j = 0, \dots, n$) tales que $g = h_0 + h_1 + \dots + h_n$.*

Así pues, si llamamos *harmónicos esféricos* de dimensión d a los elementos de \mathcal{H}^d , acabamos de probar que los harmónicos esféricos no son ni más ni menos que las funciones polinómicas en S^d , es decir, que $\mathcal{H}^d = \mathbb{K}[x_0, \dots, x_d]$, donde x_i son las restricciones a S^d de las coordenadas cartesianas. Esto puede reformularse como sigue:

Teorema 9.40 *Si f es un polinomio de grado n , entonces la solución del problema de Dirichlet planteado por $f|_{S^d}$ en $\bar{B}_1(0)$ es un polinomio harmónico de grado $\leq n$.*

Ya hemos señalado que $C(S^d, \mathbb{K})$ es denso en $L^2(S^d)$, y a su vez, el teorema de Stone-Weierstrass nos da que el álgebra $\mathcal{H}^d = \mathbb{K}[x_0, \dots, x_d]$ es densa en $C(S^d, \mathbb{K})$ (luego también en $L^2(S^d)$). Por consiguiente, es razonable buscar una base de $L^2(S^d)$ formada por harmónicos esféricos. De hecho, hay muchas:

Definición 9.41 Llamaremos *sucesión ortogonal canónica* de harmónicos esféricos a toda sucesión formada por una base ortogonal de \mathcal{H}_0^d , seguida de una base ortogonal de \mathcal{H}_1^d , etc.

Teorema 9.42 *Toda sucesión ortogonal canónica de harmónicos esféricos es completa.*

DEMOSTRACIÓN: Toda $f \in L^2(S^d)$ (en el caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) puede aproximarse por una función continua $g \in C(S^d)$, la cual a su vez, por el teorema de Stone-Weierstrass puede aproximarse por un polinomio h , que según el teorema anterior, es una suma de harmónicos esféricos (aquí usamos que la convergencia uniforme en $C(S^d)$ implica la convergencia en $L^2(S^d)$, como es fácil comprobar). Hemos probado esto en el caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, pero la conclusión es válida obviamente cuando $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, ya que basta aproximar la parte real e imaginaria de f por respectivas sumas h_1 y h_2 de harmónicos esféricos, y entonces $h_1 + ih_2$ es una aproximación de f por una suma de harmónicos esféricos.

Una sucesión ortogonal canónica de harmónicos esféricos tiene la propiedad de que cualquier suma de harmónicos esféricos es combinación lineal de un número finito de sus términos, luego hemos probado que todo $f \in L^2(S^d)$ se puede aproximar por una combinación lineal finita de términos de la sucesión ortogonal dada. El teorema 3.50 nos da entonces la completitud. ■

En general no es fácil encontrar explícitamente bases ortogonales de los espacios \mathcal{H}_n^d , pero para $n = 1$ tenemos el resultado siguiente:

Teorema 9.43 *Una base ortogonal de \mathcal{H}_1^d está formada por las funciones coordenadas x_0, \dots, x_d , cuya norma es $\|x_j\|^2 = \sigma_d/(d+1)$, donde σ_d es la medida de S^d .*

DEMOSTRACIÓN: Si $i \neq j$ se cumple que

$$\int_{S^d} x_i x_j d\sigma = 0$$

porque podemos partir

$$S^d = \{x \in S^d \mid x_i x_j < 0\} \cup \{x \in S^d \mid x_i x_j > 0\} \cup \{x \in S^d \mid x_i x_j = 0\},$$

el tercer conjunto es nulo y los otros dos se corresponden a través de la reflexión $x_i \mapsto -x_i$, por lo que la integral en uno de ellos es opuesta a la integral en el otro.

Por simetría, las normas $\|x_i\|$ han de ser todas iguales, luego

$$\|x_i\|^2 = \frac{1}{d+1} \sum_{j=0}^d \|x_j\|^2 = \frac{1}{d+1} \int_{S^d} \sum_{j=0}^d x_j^2 d\sigma = \frac{1}{d+1} \int_{S^d} d\sigma = \frac{\sigma_d}{d+1}.$$

■

Definición 9.44 Si $\{h_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión ortogonal canónica de armónicos esféricos en S^d , el teorema anterior implica que toda función $f \in L^2(S^d)$ puede expresarse de forma única como

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} c_n h_n,$$

para ciertos $c_n \in \mathbb{K}$, que concretamente vienen dados por⁸ $c_n = \|h_n\|^{-2} \langle f, h_n \rangle$.

Esta serie recibe el nombre de *serie de Laplace* (o de *Fourier-Laplace*) de la función f respecto de la base ortogonal prefijada. Los coeficientes c_n son los *coeficientes de Laplace* de f .

A menudo se escribe

$$f \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n h_n$$

para indicar que la serie converge a f respecto de la norma de $L^2(S^d)$, lo cual no implica necesariamente que la convergencia sea puntual, es decir, que para todo $x \in S^d$ se cumpla

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n h_n(x).$$

Ahora particularizamos a este contexto los resultados de la sección 3.5:

- La identidad de Parseval se traduce en que

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 \|h_n\|^2 = \|f\|^2.$$

- Una sucesión $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ es la sucesión de coeficientes de Laplace de una función $f \in L^2(S^d)$ si y sólo la serie de la igualdad anterior es convergente.

Esto es el teorema 3.51.

- En particular, $\lim_n c_n \|h_n\| = 0$, es decir,

$$\lim_n \frac{1}{\|h_n\|} \int_{S^d} f(x) \overline{h_n(x)} d\sigma = 0.$$

⁸La definición 3.48 es aplicable a la base ortonormal $\|h_n\|^{-1} h_n$, con lo que tenemos el desarrollo $f = \sum_{n=0}^{\infty} \langle f, \|h_n\|^{-1} h_n \rangle \|h_n\|^{-1} h_n = \sum_{n=0}^{\infty} \|h_n\|^{-2} \langle f, h_n \rangle h_n$.

Como en el caso de las series de Fourier, esto no nos dice nada sobre las condiciones bajo las cuales una serie de Laplace converge puntualmente a la función que la define. Nos ocuparemos de ello en la sección siguiente, pero antes probamos un último resultado elemental sobre armónicos esféricos que vamos a necesitar:

Sea $O(d)$ el grupo ortogonal en \mathbb{R}^d , es decir, el grupo formado por las matrices $A \in \text{Mat}_d(\mathbb{R})$ que cumplen $AA^t = I_d$. Identificaremos cada matriz $A \in O(d)$ con la isometría $\rho : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ dada por $\rho(u) = uA$. En particular, ρ se restringe a una isometría $\rho : S^{d-1} \rightarrow S^{d-1}$. Si $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{K}$ (o bien $f : S^{d-1} \rightarrow \mathbb{K}$), escribiremos $\rho f = \rho \circ f$.

Teorema 9.45 *Cada $\rho \in O(d+1)$ induce una isometría $L^2(S^d) \rightarrow L^2(S^d)$ dada por $f \mapsto \rho f$, que se restringe a una isometría en \mathcal{H}_n^d .*

DEMOSTRACIÓN: Es claro que si una función $f : S^d \rightarrow \mathbb{K}$ cumple que $|f|^2$ es integrable, también lo es $|\rho f|^2 = \rho \circ |f|^2$. Además si f y g coinciden casi por todas partes, lo mismo vale para ρf y ρg . Esto significa que ρ induce una aplicación $L^2(S^d) \rightarrow L^2(S^d)$. Además,

$$\langle \rho f, \rho g \rangle = \int_{S^d} (\rho f)(\rho g) d\sigma = \int_{S^d} \rho(fg) d\sigma = \int_{S^d} fg d\sigma = \langle f, g \rangle,$$

porque, al reducir las integrales a \mathbb{R}^{d+1} a través de cartas, el teorema de cambio de variable permite eliminar ρ , ya que su determinante jacobiano es ± 1 . Así pues, ρ induce una isometría en $L^2(S^d)$.

Por otra parte, si $h \in \mathcal{H}_n^d$ es la restricción de $H \in \mathcal{PH}_n^d$, entonces ρh es la restricción de ρH , y es claro que al componer un polinomio homogéneo armónico con una isometría de \mathbb{R}^{d+1} , el resultado sigue siendo un polinomio homogéneo armónico. Por lo tanto, $\rho h \in \mathcal{H}_n^d$. ■

9.5 El teorema de adición

La convergencia puntual de las series de armónicos esféricos la obtendremos como aplicación del teorema siguiente:

Teorema 9.46 (Teorema de adición) *Para cada $d \geq 1$ y cada $n \geq 0$ existe un único polinomio $P_n^d(t)$ con la propiedad siguiente: Si h_1, \dots, h_N es una base ortonormal de \mathcal{H}_n^d , entonces*

$$\sum_{i=1}^N h_i(u) \overline{h_i(v)} = \frac{N}{\sigma_d} P_n^d(u \cdot v),$$

donde σ_d es la medida de S^d . Además, $P_n^d(t)$ es un polinomio de grado n con coeficientes reales y, para cualquier $v \in S^d$ fijo, la función $P_n^d(u \cdot v)$ es un elemento de \mathcal{H}_n^d .

DEMOSTRACIÓN: Tomemos dos bases ortonormales h_1, \dots, h_N y h'_1, \dots, h'_N y consideremos las funciones

$$F(u, v) = \sum_{i=1}^N h_i(u) \overline{h_i(v)}, \quad F'(u, v) = \sum_{i=1}^N h'_i(u) \overline{h'_i(v)}.$$

Vamos a probar que $F = F'$. Para ello tomamos $h \in \mathcal{H}_n^d$ y fijamos $v \in S^d$. Es claro que las funciones $F(u, v)$ y $F'(u, v)$ están en \mathcal{H}_n^d , pues son combinaciones lineales de las bases dadas. Además:

$$\begin{aligned} \langle h(u), F(u, v) - F'(u, v) \rangle &= \sum_{i=1}^N \langle h(u), h_i(u) \rangle h_i(v) - \sum_{i=1}^N \langle h(u), h'_i(u) \rangle h'_i(v) \\ &= h(v) - h(v) = 0. \end{aligned}$$

Tomando concretamente $h(u) = F(u, v) - F'(u, v)$ concluimos que

$$\|F(u, v) - F'(u, v)\| = 0$$

y como F y F' son funciones continuas, ha de ser $F = F'$.

Así pues, la función F puede ser calculada con cualquier base ortonormal de \mathcal{H}_n^d . En particular, dada la base del enunciado y un $\rho \in O(d+1)$, según 9.45 podemos considerar la base ortonormal $\rho h_1, \dots, \rho h_N$, lo que nos da que F es invariante por isometrías:

$$F(u, v) = \sum_{i=1}^N \rho h_i(u) \overline{\rho h_i(v)} = \sum_{i=1}^N h_i(\rho(u)) \overline{h_i(\rho(v))} = F(\rho(u), \rho(v)).$$

Ahora, dados dos puntos $u, v \in S^d$, podemos tomar una base ortonormal u_0, \dots, u_d de \mathbb{R}^{d+1} tal que $u_0 = u$ y de modo que $v \in \langle u_0, u_1 \rangle$. Respecto a esta base, las coordenadas de u y v serán $(1, 0, \dots, 0)$ y $(uv, \sqrt{1-(uv)^2}, 0, \dots, 0)$. La matriz de cambio de base (respecto a una base ortonormal arbitraria prefijada) determina una isometría $\rho \in O(d+1)$ tal que $\rho(u) = (1, 0, \dots, 0)$ y $\rho(v) = (uv, \sqrt{1-(uv)^2}, 0, \dots, 0)$. Por consiguiente,

$$F(u, v) = F((1, 0, \dots, 0), (uv, \sqrt{1-(uv)^2}, 0, \dots, 0)).$$

Si definimos

$$Q(t) = F((1, 0, \dots, 0), (t, \sqrt{1-t^2}, 0, \dots, 0)),$$

entonces $F(u, v) = Q(u \cdot v)$, donde la función Q no es idénticamente nula, pues podemos tomar una base h_1, \dots, h_N formada por funciones con imagen en \mathbb{R} y, como ha de haber un $u \in S^d$ tal que $h_1(u) \neq 0$, ha de ser $Q(u \cdot u) \neq 0$ (pues es una suma de cuadrados reales no todos nulos).

El teorema quedará probado si demostramos que existe un polinomio de grado n con coeficientes reales que coincide con $Q(t)$ en el intervalo $[-1, 1]$.

Vamos a tratar aparte el caso $d = 1$. Para $n = 0$ una base ortonormal de \mathcal{H}_0^1 es $h_1 = 1/\sqrt{2\pi}$, con lo que $Q(t) = 1/2\pi$ y podemos tomar $P_0^1(t) = 1$. Para $n \geq 1$, podemos tomar $h_1 = (1/\sqrt{\pi}) \cos n\alpha$, $h_2 = (1/\sqrt{\pi}) \sin n\alpha$, con lo que, si

$$u = (\cos \alpha, \sin \alpha), \quad v = (\cos \beta, \sin \beta), \quad u \cdot v = \cos(\alpha - \beta)$$

$$h_1(u)h_1(v) + h_2(u)h_2(v) = \frac{1}{\pi}(\cos n\alpha \cos n\beta + \sin n\alpha \sin n\beta) = \frac{1}{\pi} \cos(n(\alpha - \beta)).$$

Llamando $\gamma = \alpha - \beta$, la relación $(\cos \gamma + i \sin \gamma)^n = \cos n\gamma + i \sin n\gamma$ implica que

$$Q(u \cdot v) = \cos n\gamma = P(\cos \gamma) = P(u \cdot v),$$

donde P es un polinomio de grado n con coeficientes reales, y podemos tomar $P_n^1 = P$, de modo que

$$\frac{N}{\sigma_1} P_n^1(u \cdot v) = \frac{2}{2\pi} P(u \cdot v) = \frac{1}{\pi} P(\cos(\alpha - \beta)) = \frac{1}{\pi} \cos(n(\alpha - \beta)),$$

de acuerdo con la igualdad del enunciado.

Supongamos ahora que $d \geq 2$, fijemos $e_0 = (1, 0, \dots, 0)$ y consideremos el armónico esférico $h(u) = Q(u \cdot e_0)$. Observamos que es invariante por isometrías $\rho \in O(d+1)$ que cumplan $\rho e_0 = e_0$, pues

$$\rho h(u) = F(\rho u, e_0) = F(u, \rho^{-1} e_0) = F(u, e_0) = h(u).$$

Sea $H \in \mathcal{PH}_n^d$ el polinomio cuya restricción a S^d es h . Como la base de partida se puede tomar formada por armónicos esféricos reales, el polinomio H puede tomarse con coeficientes reales. Podemos expresarlo en la forma

$$H = \sum_{j=0}^n x_0^{n-j} P_j(x_1, \dots, x_d),$$

donde cada P_j es homogéneo de grado j . Puesto que ρH se restringe a $\rho h = h$, el teorema 9.37 implica que H es invariante respecto a isometrías que fijen a e_0 . Fijado un punto $u \in \mathbb{R}^{d+1}$, existe $\rho \in O(d+1)$ que deja invariante a e_0 y tal que $\rho(u) = (u_0, \sqrt{u_1^2 + \dots + u_d^2}, 0, \dots, 0)$. Al aplicar la invarianza de H concluimos que

$$P_j(x_1, \dots, x_d) = P_j((x_1^2 + \dots + x_d^2)^{1/2}, 0, \dots, 0) = (x_1^2 + \dots + x_d^2)^{j/2} P_j(1, 0, \dots, 0).$$

Como P_j es un polinomio, para que $c_j = P_j(1, 0, \dots, 0)$ pueda ser no nulo es necesario que $j = 2k$, con lo que

$$H(x) = \sum_{k=0}^{[n/2]} c_{2k} x_0^{n-2k} (x_1^2 + \dots + x_d^2)^k,$$

donde $[n/2]$ representa al mayor entero que no supera a $n/2$. Así, si $t \in [-1, 1]$, tenemos que

$$Q(t) = Q((t, \sqrt{1-t^2}, 0, \dots, 0) \cdot e_0) = \sum_{k=0}^{[n/2]} c_{2k} t^{n-2k} (1-t^2)^k,$$

luego Q coincide en $[-1, 1]$ con el polinomio de la derecha, que tiene coeficientes reales. Sólo falta probar que tiene grado n . Notemos que todos los sumandos tienen grado n , salvo que sean nulos. Hemos de probar que $c_0 - c_2 + c_4 - \dots \neq 0$. Para ello probaremos que c_{2k} y c_{2k+2} tienen signos opuestos, con lo que todos los sumandos tienen el mismo signo y la única posibilidad para que la suma fuera nula sería que todo el polinomio fuera nulo, con lo que sería $Q = 0$ y ya hemos probado que no es así.

Nos basaremos en que H es armónico, luego cumple $\Delta H = 0$. Un cálculo rutinario muestra que

$$\begin{aligned} \Delta H &= \sum_{k=0}^{[n/2]} c_{2k} (n-2k)(n-2k-1) x_0^{n-2k-2} (x_1^2 + \dots + x_d^2)^k \\ &\quad + \sum_{k=0}^{[n/2]} c_{2k} 2k(d+2k-2) x_0^{n-2k} (x_1^2 + \dots + x_d^2)^{k-1} \\ &= \sum_{k=0}^{[n/2]} ((n-2k)(n-2k-1)c_{2k} + 2(k+1)(d+2k)c_{2k+2}) x_0^{n-2k-2} (x_1^2 + \dots + x_d^2)^k. \end{aligned}$$

Así pues, la condición $\Delta H = 0$ equivale a la relación

$$c_{2k+2} = -\frac{(n-2k)(n-2k-1)}{2(k+1)(d+2k)} c_{2k},$$

luego los coeficientes tienen signos alternos, como teníamos que probar. ■

Definición 9.47 El polinomio $P_n^d(t)$ dado por el teorema anterior se llama *polinomio de Legendre (generalizado)* de grado n y dimensión d .

Veremos que los polinomios de Legendre clásicos que hemos definido en 9.12 son los polinomios de Legendre generalizados correspondientes a $d = 2$ (véase la observación tras el teorema 9.51). En la prueba del teorema de adición hemos visto que $P_n^1(\cos \gamma) = \cos n\gamma$. Esta propiedad caracteriza a los llamados *polinomios de Chebyshev*, que son, pues, los polinomios de Legendre de dimensión 1. Además, hemos visto que en este caso el teorema de adición se reduce a la relación

$$\cos \alpha \cos \beta + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta = \cos(\alpha - \beta).$$

Obviamente, cualquier aplicación explícita del teorema de adición requiere una descripción explícita de los polinomios de Legendre y para obtenerla necesitaremos algunos resultados previos. Empezamos con un resultado elemental sobre integración en esferas:

Teorema 9.48 Sea $f : S^d \rightarrow \mathbb{R}$ una función integrable, con $d > 1$. Entonces

$$\int_{S^d} f \, d\sigma = \int_{-1}^1 (1-t^2)^{(d-2)/2} \int_{S^{d-1}} f(t, u\sqrt{1-t^2}) \, d\sigma(u) \, dt.$$

DEMOSTRACIÓN: Consideramos el difeomorfismo $f :]-1, 1[\times S^{d-1} \rightarrow S^d$ dado por $f(t, u) = (t, u\sqrt{1-t^2})$, cuya imagen es toda S^d menos dos puntos. Sea $X : U \rightarrow S^{d-1}$ una carta arbitraria que cubra también todo S^{d-1} menos un conjunto nulo y tomamos la identidad I como carta del intervalo abierto. Entonces $I \times X$ es una carta del producto cartesiano y $Y = (I \times X) \circ f$ es una carta de S^d . Explícitamente, $Y(t, u) = (t, \sqrt{1-t^2}X(u))$. Calculamos la matriz jacobiana

$$JY = \left(\begin{array}{c|c} 1 & -\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}X \\ \hline 0 & \sqrt{1-t^2}JX \end{array} \right).$$

El elemento de medida de S^d respecto de la carta Y es

$$d\sigma = \sqrt{\det((JY)(JY)^t)} dm,$$

donde dm es la medida de Lebesgue en $]0, 1[\times U$. Teniendo en cuenta que $X \cdot X = 1$ y que X es ortogonal a todas las filas de JX , es claro que

$$(JY)(JY)^t = \left(\begin{array}{c|c} \frac{1}{1-t^2} & 0 \\ \hline 0 & (1-t^2)(JX)(JX)^t \end{array} \right),$$

luego el determinante es

$$(1-t^2)^{d-2} \det((JX)(JX)^t).$$

Así pues,

$$\begin{aligned} \int_{S^d} f d\sigma &= \int_{]-1, 1[\times U} f(t, X(u)\sqrt{1-t^2})(1-t^2)^{d-2} \det((JX)(JX)^t) dt du = \\ &= \int_{-1}^1 (1-t^2)^{d-1} \int_U f(t, X(u)\sqrt{1-t^2}) \det((JX)(JX)^t) du dt = \\ &= \int_{-1}^1 (1-t^2)^{d-1} \int_{S^{d-1}} f(t, u\sqrt{1-t^2}) d\sigma(u) dt. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Observemos que, para $d = 1$, un razonamiento mucho más elemental demuestra que

$$\int_{S^1} f d\sigma = \int_{-1}^1 \frac{f(t, \sqrt{1-t^2}) + f(t, -\sqrt{1-t^2})}{\sqrt{1-t^2}} dt,$$

y está fórmula es un caso particular de la del teorema anterior si consideramos que $S^2 = \{\pm 1\}$ y que ambos puntos tienen medida 1, de modo que

$$\int_{S^0} f d\sigma = f(-1) + f(1).$$

Pasamos ya a estudiar los polinomios de Legendre. Conviene recordar que su conexión con los armónicos esféricos tiene que ver únicamente con los valores que toman en el intervalo $[-1, 1]$.

Teorema 9.49 Si $n \geq 0$, entonces $P_n^d(1) = 1$ y para todo $t \in [-1, 1]$ se cumple $|P_n^d(t)| \leq 1$.

DEMOSTRACIÓN: Fijemos una base ortonormal h_1, \dots, h_n de \mathcal{H}_n^d que podemos suponer que está formada por funciones reales. Por el teorema de adición, si $u \in S^d$ es un punto arbitrario,

$$\frac{N}{\sigma_d} P_n^d(1) = \sum_{i=1}^N h_i(u)^2.$$

Integrando ambos miembros sobre S^d , y teniendo en cuenta que cada h_i tiene norma 1, obtenemos que $NP_n^d(1) = N$, luego $P_n^d(1) = 1$. Dado $t \in [-1, 1]$, claramente existen $u, v \in S^d$ tales que $uv = t$, con lo que

$$\begin{aligned} |P_n^d(t)|^2 &= |P_n^d(uv)|^2 = \frac{\sigma_d^2}{N^2} \left(\sum_{i=1}^N h_i(u)h_i(v) \right)^2 \\ &\leq \frac{\sigma_d}{N} \left(\sum_{i=1}^N h_i(u)^2 \right) \frac{\sigma_d}{N} \left(\sum_{i=1}^N h_i(v)^2 \right) = P_n^d(1)^2 = 1, \end{aligned}$$

donde hemos usado la desigualdad de Cauchy-Schwarz en \mathbb{R}^N . ■

Los polinomios de Legendre verifican una condición de ortogonalidad en $L^2([-1, 1])$, pero no con respecto al producto escalar usual, sino respecto al producto ponderado dado por

$$[f, g] = \int_{-1}^1 f(t)g(t)(1-t^2)^\vartheta dt,$$

donde $\vartheta = (d-2)/2$. Es inmediato comprobar que $L^2([-1, 1])$ con este producto es isométrico a $L^2([-1, 1])$ con el producto usual. (La isometría natural es $f(t) \mapsto f(t)(1-t^2)^{\vartheta/2}$.)

Teorema 9.50 Se cumple que

$$[P_m^d, P_n^d] = \delta_{mn} \frac{\sigma_d}{\sigma_{d-1}N},$$

donde $N = \dim \mathcal{H}_n^d$ y σ_d es la medida de S^d . Además, si Q_0, Q_1, \dots es una sucesión finita o infinita de polinomios tales que Q_i tiene grado i y $[Q_m, Q_n] = 0$ cuando $m \neq n$, entonces $Q_n(t) = \eta_n^d P_n^d(t)$, para un cierto $\eta_n^d \in \mathbb{R}$.

DEMOSTRACIÓN: Si $m \neq n$, entonces

$$\int_{S^d} P_m^d(u \cdot e_0) P_n^d(u \cdot e_0) d\sigma = 0$$

porque los dos factores del integrando son armónicos esféricos de distinto grado. Si $m = n$, usamos el teorema de adición:

$$\begin{aligned} \int_{S^d} P_n^d(u \cdot e_0)^2 d\sigma &= \frac{\sigma_d^2}{N^2} \int_{S^{d-1}} \left(\sum_{i=1}^N h_i(u)h_i(e_0) \right)^2 d\sigma \\ &= \frac{\sigma_d^2}{N^2} \left(\sum_{i=1}^N h_i(u)h_i(e_0) \cdot \sum_{i=1}^N h_i(u)h_i(e_0) \right) = \frac{\sigma_d^2}{N^2} \sum_{i=1}^N h_i(e_0)^2 = \frac{\sigma_d}{N} P_n^d(1) = \frac{\sigma_d}{N}. \end{aligned}$$

Así pues,

$$\int_{S^d} P_m^d(u_0) P_n^d(u_0) d\sigma = \delta_{mn} \frac{\sigma_d}{N}.$$

Aplicando el teorema 9.48, la integral se convierte en

$$\int_{-1}^1 (1-t^2)^\vartheta P_m^d(t) P_n^d(t) \int_{S^{d-1}} d\sigma_{d-1} dt = \sigma_{d-1} [P_m^d, P_n^d].$$

Esto prueba la primera parte del teorema. Notemos que la conclusión es válida para $d = 1$ con el convenio de que $\sigma_0 = 2$. Para la segunda parte razonamos por inducción sobre n que Q_n es un múltiplo de P_n^d . Para $n = 0$ es trivial, pues ambos polinomios tienen grado 0. Supongamos que $Q_m = \eta_m^d P_m^d$ para $m < n$. Como los polinomios P_m^d con $m \leq n$ forman una base del espacio de los polinomios de grado $\leq n$, podemos expresar

$$Q_n = \sum_{m=0}^n a_m P_m^d,$$

pero, aplicando $[-, Q_m] = \eta_m^d [-, P_m^d]$, concluimos que $a_m = 0$ para todo $m < n$, luego $Q_n = a_n P_n^d$ y basta tomar $\eta_n^d = a_n$. ■

Finalmente podemos obtener una expresión explícita para los polinomios de Legendre:

Teorema 9.51 (Fórmula de Olinde Rodrigues)

$$P_n^d(t) = \frac{(-1)^n}{2^n (\vartheta + 1)(\vartheta + 2) \cdots (\vartheta + n)} (1-t^2)^{-\vartheta} \frac{d^n}{dt^n} (1-t^2)^{\vartheta+n},$$

donde $\vartheta = (d-2)/2$.

DEMOSTRACIÓN: Llamemos $f_n(t)$ al miembro derecho de la fórmula del enunciado. Vamos a calcular la derivada descomponiendo

$$(1-t^2)^{\vartheta+n} = (1-t)^{\vartheta+n} (1+t)^{\vartheta+n}$$

y aplicando la regla de Leibniz para las derivadas sucesivas de un producto:

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{dt^n} (1-t^2)^{\vartheta+n} &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{d^k}{dt^k} (1-t)^{n+\vartheta} \frac{d^{n-k}}{dt^{n-k}} (1+t)^{n+\vartheta} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k (n+\vartheta) \cdots (n+\vartheta-k+1) (1-t)^{n+\vartheta-k} (n+\vartheta) \cdots (k+\vartheta-1) (1+t)^{k+\vartheta} \\ &= (t^2-1)^\vartheta \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k (n+\vartheta) \cdots (n+\vartheta-k+1) (1-t)^{n-k} (n+\vartheta) \cdots (k+\vartheta-1) (1+t)^k. \end{aligned}$$

Como en $f_n(t)$ la derivada aparece multiplicada por $(t^2-1)^{-\vartheta}$, vemos que $f_n(t)$ es un polinomio de grado n . Al evaluarlo en $t = 1$ desaparecen todos los

sumandos de la derivada excepto el correspondiente a $k = n$, de donde se sigue inmediatamente que $f_n(1) = 1 = P_n^d(1)$. Por el teorema anterior, basta probar que $[f_m, f_n] = 0$ para $m < n$. Integrando por partes n veces obtenemos que

$$[f_m, f_n] = c_1 \int_{-1}^1 f_m(t) \frac{d^n}{dt^n} (1-t^2)^{\vartheta+n} dt = c_2 \int_{-1}^1 (1-t^2)^{\vartheta+n} \frac{d^n}{dt^n} f_m(t) dt = 0,$$

pues f_m es un polinomio de grado m . En la integración por partes hemos usado que las derivadas

$$\frac{d^j}{dt^j} (1-t^2)^{\vartheta+n}$$

para $j < n$ se anulan en ± 1 , lo cual se prueba calculando la derivada j -ésima igual que hemos calculado antes la derivada n -ésima. ■

Al particularizar esta fórmula para $d = 2$ obtenemos precisamente 9.13, lo que prueba que los polinomios P_n^2 son los polinomios de Legendre clásicos, como habíamos indicado.

Nos ocupamos finalmente al estudio de la convergencia de las series de Laplace. Empezamos probando lo siguiente:

Teorema 9.52 *Existe una constante C_d tal que si h_1, \dots, h_N es una base ortonormal de \mathcal{H}_n^d entonces, para todo $u \in S^d$, se cumple que*

$$\sum_{i=1}^N |h_i(u)|^2 \leq C_d n^{d-1}.$$

DEMOSTRACIÓN: Podemos suponer $n > 0$, pues para $n = 0$ el miembro izquierdo vale 1, independientemente de d . Por el teorema de adición,

$$\sum_{i=1}^N |h_i(u)|^2 = \sum_{i=1}^N h_i(u) \overline{h_i(u)} = \frac{N}{\sigma_d} P_n^d(1) = \frac{N}{\sigma_d}.$$

Ahora observamos que

$$\begin{aligned} \frac{N}{n^{d-1}} &= \frac{(2n+d-1)(n+d-2)!}{(d-1)! n! n^{d-1}} = \left(2 + \frac{d-1}{n}\right) \frac{(n+d-2)!}{(d-1)! n! n^{d-2}} \\ &= \frac{1}{(d-1)!} \left(2 + \frac{d-1}{n}\right) \left(1 + \frac{d-2}{n}\right) \left(1 + \frac{d-3}{n}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq K_d, \end{aligned}$$

donde K_d es la constante que resulta de hacer $n = 1$ en la expresión precedente. Basta tomar $C_d = K_d/\sigma_d$. ■

Teorema 9.53 *Sea $k = 2E[1 + d/4]$, sea $f \in C^k(S^d)$ y sea $h_1^n, \dots, h_{N(d,n)}^n$ una base ortonormal de \mathcal{H}_n^d . Entonces la serie de Laplace*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{N(d,n)} c_{n,j} h_j^n$$

converge absoluta y uniformemente a f en S^d .

DEMOSTRACIÓN: Llamamos $\lambda_n = n(d+n-1)$, de modo que, según 9.32, las funciones h_j^n cumplen que $-\Delta_d h_j^n = \lambda_n h_j^n$. Tomemos $p \in \mathbb{N}$ y cualquier $u \in S^d$. Entonces

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{N(d,n)} |c_{n,j} h_j^n(u)| &\leq \sum_{j=1}^{N(d,n)} 2|\lambda_n^p c_{n,j}| |\lambda_n^{-p} h_j^n(u)| \\ &\leq \sum_{j=1}^{N(d,n)} |\lambda_n^p c_{n,j}|^2 + \sum_{j=1}^{N(d,n)} |\lambda_n^{-p} h_j^n(u)|^2. \end{aligned}$$

Por el teorema anterior, el segundo sumando puede acotarse así:

$$\lambda_n^{-2p} \sum_{j=1}^{N(d,n)} |h_j^n(u)|^2 \leq \frac{C_d n^{d-1}}{(n(d+n-1))^{2p}} \leq \frac{C_d}{n^{4p+1-d}}.$$

Según [An 8.62], la serie definida por la última expresión es convergente si $p > d/4$. A partir de aquí fijamos el menor p que cumple esto, $p = E[1 + d/4]$.

Por otra parte, consideramos la función $g = (-\Delta_d)^p(f)$, donde el exponente indica composición, es decir, se trata de la aplicación a f del operador de Laplace-Beltrami p veces consecutivas. Notemos que la hipótesis del teorema garantiza que f es de clase C^{2p} . Por lo tanto, g está bien definida y $g \in C(S^d) \subset L^2(S^d)$. Sean $c_{n,j}^*$ los coeficientes de Laplace de g . Por los teoremas 9.30 y 9.32, tenemos que

$$c_{n,j}^* = \langle (-\Delta_d)^p(f), h_j^n \rangle = \langle f, (-\Delta_d)^p(h_j^n) \rangle = \langle f, \lambda_n^p h_j^n \rangle = \lambda_n^p c_{n,j}.$$

Así pues,

$$\sum_{j=1}^{N(d,n)} |\lambda_n^p c_{n,j}|^2 = \sum_{j=1}^{N(d,n)} |c_{n,j}^*|^2,$$

y la serie definida por la última expresión es convergente (por la identidad de Parseval para g). El teorema de mayoración de Weierstrass prueba entonces que la serie de Laplace de f es absolutamente convergente en S^d . Su suma F es una función continua, y la serie de Laplace converge también a F en $L^2(S^d)$. Esto significa que $F = f$ como funciones de $L^2(S^d)$, pero al ser ambas funciones continuas esto implica que son la misma función. ■

9.6 Harmónicos esféricos bidimensionales

En el ejemplo tras el teorema 9.34 hemos visto que una base de \mathcal{PH}_n^1 la forman los dos polinomios $(X \pm iY)^n$, luego sus restricciones a S^1 son una base de \mathcal{H}_n^1 , que está formada precisamente por las funciones z^n y z^{-n} , que según el teorema 9.2 son ortogonales y, al variar n , forman una base ortogonal de $L^2(S^1)$.

Así pues, las funciones $1, z, z^{-1}, z^2, z^{-2}, z^3, z^{-3}, \dots$ forman una sucesión ortogonal canónica de harmónicos esféricos de dimensión 1, y las series de Laplace correspondientes a esta sucesión son simplemente las series de Fourier. En esta sección vamos a encontrar una sucesión ortogonal canónica de harmónicos esféricos de dimensión 2. Recordemos que $\dim \mathcal{H}_n^2 = 2n + 1$.

Del mismo modo que en el caso unidimensional ha sido conveniente parametrizar la circunferencia unidad como $(\cos(2\pi x/T), \sin(2\pi x/T))$, ahora conviene parametrizar S^2 con las coordenadas esféricas:

$$(x, y, z) = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta),$$

que nos expresarán los armónicos esféricos como polinomios trigonométricos.

Para cada natural $n \geq 0$ y cada entero $m = -n, \dots, n$, llamamos Y_n^m a la función sobre S^2 que en coordenadas esféricas viene dada por

$$Y_n^m(\theta, \phi) = P_n^m(\cos \theta) e^{im\phi},$$

donde P_n^m es la función asociada de Legendre definida en 9.23.

Observamos que las funciones $Y_n^m(\theta, \phi)$ están bien definidas, en el sentido de que $Y_n^m(\theta, \phi)$ depende sólo del resto de ϕ módulo 2π y que cuando $\theta = 0$ o $\theta = \pi$ no depende de ϕ , pues si $m \neq 0$ se cumple que $P_n^m(\pm 1) = 0$.

De acuerdo con el teorema 9.24, se cumple que

$$Y_n^{-m}(\theta, \phi) = (-1)^m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \bar{Y}_n^m,$$

donde la barra indica la conjugación compleja.

Teorema 9.54 *Las funciones Y_n^m , para $m = -n, \dots, n$ forman una base ortogonal de \mathcal{H}_n^2 .*

DEMOSTRACIÓN: Pasando las coordenadas esféricas a cartesianas, tenemos que

$$\begin{aligned} Y_n^m(\theta, \phi) &= c \frac{d^{n+m}(z^2 - 1)^n}{dz^{n+m}} \sin^m \theta (\cos \phi + i \sin \phi)^m \\ &= c \frac{d^{n+m}(z^2 - 1)^n}{dz^{n+m}} (x + iy)^m. \end{aligned}$$

Por otra parte, una simple inducción demuestra que la derivada k -ésima del polinomio $(z^2 - 1)^n$ es una combinación lineal de polinomios de la forma

$$(z^2 - 1)^r z^{2n-k-2r}.$$

(Basta derivar esta expresión y comprobar que la derivada es suma de dos términos de esta forma con $k+1$ en lugar de k .) Por consiguiente, la derivada que aparece en la expresión de $Y_n^m(\theta, \phi)$ es una combinación lineal de polinomios de la forma

$$(z^2 - 1)^r z^{n-m-2r} = (-x^2 - y^2)^r z^{n-m-2r}.$$

Así pues, dicha derivada es la restricción a S^2 de un polinomio homogéneo de grado $n-m$ y concluimos que $Y_n^m(\theta, \phi)$ es la restricción a S^2 de un polinomio homogéneo F de grado n . Vamos a probar que es armónico.

La expresión de F en coordenadas esféricas es

$$\begin{aligned} F(r, \theta, \phi) &= F(r \operatorname{sen} \theta \cos \phi, r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi, r \cos \theta) \\ &= r^n F(\operatorname{sen} \theta \cos \phi, \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi, \cos \theta) = r^n P_n^m(\cos \theta) e^{im\phi}. \end{aligned}$$

Ahora calculamos su laplaciano con la fórmula para coordenadas esféricas (teorema 8.9):

$$\Delta F = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial F}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\operatorname{sen} \theta \frac{\partial F}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2 \theta} \frac{\partial^2 F}{\partial \phi^2}.$$

El primer sumando es:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial F}{\partial r} \right) = \frac{1}{r^2} (n+1)nF, \quad (9.15)$$

el segundo:

$$r^{n-2} e^{\pm im\phi} \left(\frac{d^2 P_n^m}{dx^2}(\cos \theta) \operatorname{sen}^2 \theta - 2 \frac{dP_n^m}{dx}(\cos \theta) \cos \theta \right).$$

y el tercero:

$$-\frac{r^{n-2} e^{im\phi}}{\operatorname{sen}^2 \theta} m^2 P_n^m(\cos \theta).$$

Ahora sumamos los dos últimos sumandos sustituyendo $z = \cos \theta$ y llamando $u(z) = P_n^m(z)$:

$$r^{n-2} e^{im\phi} \left((1-z^2)u'' - 2zu' - \frac{m^2}{1-z^2}u \right). \quad (9.16)$$

Como u satisface la ecuación diferencial (9.12), el término entre paréntesis es $-n(n+1)u$, luego (9.16) es igual a

$$-(n+1)nr^{n-2}P_n^m(\cos \theta)e^{im\phi} = -\frac{1}{r^2}(n+1)nF.$$

Como faltaba sumar (9.15), concluimos que $\Delta F = 0$. Esto prueba que las funciones Y_n^m son harmónicos esféricos.

Sabemos que $\dim \mathcal{H}_n^2 = 2n - 1$, por lo que para demostrar que las funciones Y_n^m son una base ortogonal de este espacio basta ver que son ortogonales (ya que entonces serán linealmente independientes, luego serán una base). Ahora bien, esto es inmediato:⁹

$$Y_n^m \cdot Y_n^{m'} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi Y_n^m(\phi, \theta) \overline{Y_n^{m'}(\phi, \theta)} \operatorname{sen} \theta \, d\theta \, d\phi$$

⁹Recordemos que el elemento de superficie de S^1 en coordenadas esféricas viene dado por $d\sigma = \operatorname{sen} \theta \, d\theta \, d\phi$.

$$\begin{aligned}
&= \int_0^\pi P_n^m(\cos \theta) P_n^{m'}(\cos \theta) \operatorname{sen} \theta \, d\theta \int_0^{2\pi} e^{i(m-m')\phi} \, d\phi \\
&= \int_{-1}^1 P_n^m(x) P_n^{m'}(x) \, dx \int_0^{2\pi} e^{i(m-m')\phi} \, d\phi \\
&= \left(\int_{-1}^1 P_n^m(x) P_n^{m'}(x) \, dx \right) \frac{1}{i(m-m')} \left[e^{i(m-m')\phi} \right]_0^{2\pi} = 0,
\end{aligned}$$

suponiendo $m \neq m'$. Esto termina la prueba. \blacksquare

Observemos que los cálculos de la demostración anterior nos dan también la norma de los armónicos que hemos construido:

$$Y_n^m \cdot Y_n^m = 2\pi \int_{-1}^1 (P_n^m(x))^2 \, dx = \frac{4\pi}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!},$$

por el teorema 9.25 si $m \geq 0$, y de aquí se sigue fácilmente que también se cumple cuando $m < 0$. Esto nos lleva a modificar la definición de Y_n^m :

Definición 9.55 Para cada natural n y cada entero $-n \leq m \leq n$, definimos Y_n^m como la función sobre S^2 que en coordenadas esféricas viene dada por

$$Y_n^m(\theta, \phi) = (-1)^m \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi} \frac{(n-m)!}{(n+m)!}} P_n^m(\cos \theta) e^{im\phi}. \quad (9.17)$$

Hemos probado que las funciones Y_n^m para $m = -n, \dots, n$ forman una base ortonormal de \mathcal{H}_n^2 . Además, se comprueba inmediatamente que

$$Y_n^{-m}(\theta, \phi) = (-1)^m \bar{Y}_n^m(\theta, \phi),$$

donde la barra indica la conjugación compleja.

Notemos que el factor $(-1)^m$ era innecesario para la normalización, pero es un convenio habitual en física, conocido como *fase de Condon-Shortley*.

Podemos obtener una base ortonormal formada por funciones reales definiendo

$$Y_{nm} = \begin{cases} \frac{i}{\sqrt{2}}(Y_n^m - (-1)^m Y_n^{-m}) & \text{si } m < 0, \\ Y_n^0 & \text{si } m = 0, \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(Y_n^{-m} + (-1)^m Y_n^m) & \text{si } m > 0, \end{cases} = \begin{cases} \sqrt{2}(-1)^m \operatorname{Im} Y_n^{|m|} & \text{si } m < 0, \\ Y_n^0 & \text{si } m = 0, \\ \sqrt{2}(-1)^m \operatorname{Re} Y_n^m & \text{si } m > 0. \end{cases}$$

Explícitamente:

$$Y_{nm} = \begin{cases} \sqrt{2} \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi} \frac{(n-|m|)!}{(n+|m|)!}} P_n^{|m|}(\cos \theta) \operatorname{sen}(|m|\phi) & \text{si } m < 0, \\ \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi}} P_n^0(\cos \theta) & \text{si } m = 0, \\ \sqrt{2} \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi} \frac{(n-m)!}{(n+m)!}} P_n^m(\cos \theta) \cos(m\phi) & \text{si } m > 0. \end{cases}$$

Ahora es fácil calcular los armónicos esféricos básicos reales. Los primeros son:

$$Y_{0,0} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}.$$

$$Y_{1,-1} = -\sqrt{\frac{3}{4\pi}}y, \quad Y_{1,0} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}z, \quad Y_{1,1} = -\sqrt{\frac{3}{4\pi}}x,$$

$$Y_{2,-2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{15}{\pi}}xy, \quad Y_{2,-1} = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{15}{\pi}}yz, \quad Y_{2,0} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{5}{\pi}}(-x^2 - y^2 + 2z^2),$$

$$Y_{2,1} = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{15}{\pi}}xz, \quad Y_{2,2} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{\pi}}(x^2 - y^2).$$

Los armónicos esféricos básicos (reales o complejos) con $m = 0$ son los que no dependen de θ . Más precisamente, es inmediato que Y_n^m o Y_{nm} se anulan en $|m|$ paralelos $\phi = \text{cte}$ y, teniendo en cuenta el teorema 9.14 y la definición de las funciones P_n^m , también en $n - |m|$ pares de meridianos complementarios (círculos máximos) $\theta = \text{cte}$. Además Y_{nm} toma signos alternos a cada lado de cada uno de estos meridianos y paralelos.

Por ejemplo, se cumple que

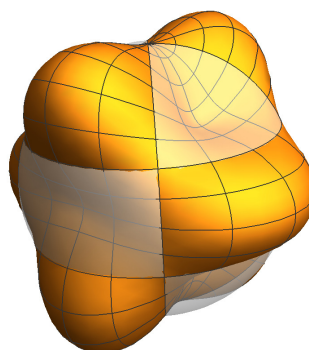
$$Y_{4,2} = \frac{3}{8}\sqrt{\frac{5}{\pi}}(x^2 - y^2)(7z^2 - 3).$$

La figura muestra la representación de la función

$$(1 + Y_{4,2}(x, y, z))(x, y, z),$$

para todo $(x, y, z) \in S^2$. Así, el valor de $Y_{4,2}$ se visualiza como la altura de la gráfica medida radialmente a partir de (x, y, z) .

En particular, los puntos donde la gráfica corta a la esfera S^2 son los puntos donde se anula $Y_{4,2}$. Vemos que, según las observaciones precedentes, $Y_{4,2}$ se anula en $m = 2$ paralelos y en $n - m = 2$ pares de meridianos, lo que da lugar a una división de la esfera en 12 regiones en las que el armónico esférico toma signos alternados.



Capítulo X

Funciones holomorfas

Vamos a profundizar un poco más en el estudio de las funciones holomorfas de una variable compleja que iniciamos en el capítulo VII de [IC]. Recordemos que, en principio, las funciones holomorfas en un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$ pueden definirse como las funciones derivables en Ω en el sentido de [IC 1.1], pero en [IC 7.16] probamos que las funciones holomorfas son, de hecho, infinitamente derivables. En la sección 8.6 hemos probado que los resultados de [IC] sobre funciones holomorfas admiten pruebas conceptualmente más simples si consideramos que las funciones holomorfas son, por definición, funciones de clase C^1 .

10.1 Arcos cerrados

En esta sección llamaremos *arcos* a las funciones continuas $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$. Llamaremos $\phi^* = \phi[[a, b]] \subset \mathbb{C}$, que es un subconjunto compacto de \mathbb{C} .

Si un arco ϕ es *derivable*, en el sentido de que se extiende a una aplicación de clase C^1 en un intervalo abierto que contenga al intervalo $[a, b]$, entonces está definida su longitud [IC 2.13], dada por

$$L(\phi) = \int_a^b |\phi'(t)| dt.$$

Por ejemplo, si $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, se define el segmento $[z_1, z_2] : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ como el arco dado por $[z_1, z_2](t) = (1-t)z_1 + tz_2$, y es fácil ver que su longitud es $|z_2 - z_1|$.

Un poco más en general, la longitud está definida para cualquier arco *derivable a trozos*, en el sentido de que podemos partir su dominio

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$$

de modo que la restricción de ϕ a cada intervalo $[t_{i-1}, t_i]$ sea derivable, en cuyo caso $L(\phi)$ se define como la suma de las longitudes de dichas restricciones.

En la sección 3.3 hemos definido la concatenación $\phi \cup \psi$ de dos arcos (tales que el segundo empieza donde termina el primero) y el arco opuesto $-\phi$ de un arco dado. Allí hemos dado las definiciones para arcos con dominio $[0, 1]$, pero es fácil generalizarlas a arcos con dominios arbitrarios.

Concretamente, si $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ y $\psi : [c, d] \rightarrow \mathbb{C}$ cumplen que $\phi(b) = \psi(c)$, podemos definir $(\phi \cup \psi) : [a, b + d - c] \rightarrow \mathbb{C}$ mediante

$$(\phi \cup \psi)(t) = \begin{cases} \phi(t) & \text{si } a \leq t \leq b, \\ \psi(t - b + c) & \text{si } b \leq t \leq b + d - c, \end{cases}$$

mientras que $-\phi : [-b, -a] \rightarrow \mathbb{C}$ puede definirse como $(-\phi)(t) = \phi(-t)$.

Es claro que $(\phi \cup \psi)^* = \phi^* \cup \psi^*$, $(-\phi)^* = \phi^*$, así como que el punto inicial de $\phi \cup \psi$ es $\phi(a)$ y su punto final es $\psi(d)$.

En general, la unión de arcos derivables no tiene por qué ser derivable, pero la unión de arcos derivables a trozos es claramente derivable a trozos, y además $L(\phi \cup \psi) = L(\phi) + L(\psi)$.

La definición de arco algunos elementos arbitrarios de los que conviene prescindir. Por ejemplo, dados dos puntos z_1 y z_2 , si escribimos explícitamente las definiciones de los segmentos $[z_1, z_2]$ y $-[z_2, z_1]$ veremos que no son exactamente el mismo arco, pues el dominio del primero es $[0, 1]$ y el del segundo es $[-1, 0]$. Por lo demás ambos tienen los mismos extremos en el mismo orden, el mismo rango y la misma longitud. En todos los contextos en que necesitaremos trabajar con arcos será indistinto considerar uno u otro. Ello nos lleva a introducir un concepto de equivalencia de arcos.

Definición 10.1 Diremos que dos arcos $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ y $\psi : [c, d] \rightarrow \mathbb{C}$ son *equivalentes* si existe una función $\rho : [c, d] \rightarrow [a, b]$ biyectiva, monótona creciente y continua tal que $\psi = \rho \circ \phi$.

De este modo, dos arcos equivalentes tienen el mismo rango y los mismos extremos en el mismo orden. Cuando trabajemos con arcos derivables a trozos exigiremos que ρ sea también derivable a trozos, con lo que además se cumple que dos arcos equivalentes tienen la misma longitud. En efecto, podemos suponer que ϕ , ψ y ρ son derivables, pues en general podemos restringirnos a un número finito de intervalos donde así ocurra. Aplicando la regla de la cadena a las partes real e imaginaria de ψ obtenemos la relación

$$\psi'(t) = (\operatorname{Re} \phi)'(\rho(t))\rho'(t) + (\operatorname{Im} \phi)'(\rho(t))\rho'(t) = \phi'(\rho(t))\rho'(t),$$

y el teorema de cambio de variable nos da

$$L(\psi) = \int_c^d |\psi'(t)| dt = \int_c^d |\phi'(\rho(t))| \rho'(t) dt = \int_a^b |\phi'(t)| dt = L(\phi).$$

Notemos que ρ' no necesita valor absoluto porque ρ es monótona creciente, luego $\rho' > 0$.

Es evidente que la equivalencia de arcos es una relación reflexiva, simétrica y transitiva. Una familia de arcos equivalentes representa una misma forma de moverse de un punto a otro por un mismo camino. Si pensamos en $\phi(t)$ como la posición de un móvil en el instante t , entonces la equivalencia de arcos hace abstracción del sistema de referencia temporal (tanto da viajar entre el instante 0 y el instante 1 como entre el instante -1 y el instante 0) así como de la velocidad del móvil.

La definición de integral curvilínea dada en [IC 7.5] se generaliza trivialmente al caso de arcos derivables a trozos. El teorema [IC 7.6 b] prueba que la integral curvilínea no se altera si sustituimos el arco por otro equivalente, pero cambia de signo si el cambio de parámetro es decreciente. En particular,

$$\int_{-\phi} f(\zeta) d\zeta = - \int_{\phi} f(\zeta) d\zeta,$$

y de estos hechos se sigue a su vez fácilmente que

$$\int_{\phi \cup \psi} f(\zeta) d\zeta = \int_{\phi} f(\zeta) d\zeta + \int_{\psi} f(\zeta) d\zeta.$$

Probamos ahora una consecuencia inmediata de [IC 7.6 c]:

Teorema 10.2 *Sea ϕ un arco y $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones continuas sobre ϕ^* que converge uniformemente a una función f . Entonces existe*

$$\lim_n \int_{\phi} f_n(\zeta) d\zeta = \int_{\phi} f(\zeta) d\zeta.$$

DEMOSTRACIÓN: Notemos que la función f es continua por ser límite uniforme de funciones continuas. Sea $\epsilon > 0$. Existe un número natural n_0 tal que si $n \geq n_0$ entonces $|f(\zeta) - f_n(\zeta)| < \epsilon/(L(\phi) + 1)$ para todo $\zeta \in \phi^*$.

Entonces $\sup\{|f(\zeta) - f_n(\zeta)| \mid \zeta \in \phi^*\} \leq \epsilon/(L(\phi) + 1)$ y, por consiguiente,

$$\left| \int_{\phi} f(\zeta) d\zeta - \int_{\phi} f_n(\zeta) d\zeta \right| = \left| \int_{\phi} (f(\zeta) - f_n(\zeta)) d\zeta \right| \leq \frac{L(\phi)\epsilon}{L(\phi) + 1} < \epsilon.$$

■

10.2 Convergencia casi uniforme

En [IC 7.18], como consecuencia del teorema de Morera, dimos un criterio para garantizar que una serie de funciones holomorfas converja a una función holomorfa. En esta sección vamos a analizar la topología subyacente a dicho resultado. Los resultados centrales de esta sección son generales y podríamos haberlos introducido en la sección 3.6, pero los hemos pospuesto hasta aquí porque hasta ahora no los habíamos necesitado.

Sea X un espacio topológico e Y un espacio métrico. Llamamos Y^X al conjunto de todas las aplicaciones de X en Y . En este espacio está definida la topología de la convergencia puntual, pero, tal y como explicamos en la sección 3.6, es demasiado débil, en el sentido de que, por ejemplo, el subespacio $C(X, Y)$ de las funciones continuas de X en Y no es cerrado en Y^X (un límite puntual de funciones continuas no es necesariamente continuo). Esto lo resolvimos considerando la topología de la convergencia uniforme, pero ésta resulta demasiado fuerte ya que, por ejemplo, las series de potencias no convergen uniformemente. Ahora vamos a introducir una topología intermedia entre ambas:

Definición 10.3 Sea X un espacio topológico e Y un espacio métrico. Llamaremos *topología de la convergencia casi uniforme* en Y^X a la que tiene como base a los conjuntos

$$V(f_0, K, \epsilon) = \{f \in Y^X \mid \sup_{x \in K} d(f(x) - f_0(x)) < \epsilon\},$$

donde $f_0 \in Y^X$, $K \subset X$ es compacto y $\epsilon > 0$.

Para comprobar que efectivamente estos conjuntos definen una topología observamos que si $f \in V(f_0, K, \epsilon) \cap V(f_1, K', \epsilon')$, podemos tomar un $\delta > 0$ tal que

$$\sup_{x \in K} d(f(x) - f_0(x)) + \delta < \epsilon \quad \text{y} \quad \sup_{x \in K'} d(f(x) - f_1(x)) + \delta < \epsilon',$$

y entonces $V(f, K \cup K', \delta) \subset V(f_0, K, \epsilon) \cap V(f_1, K', \epsilon')$.

De aquí se sigue además que los conjuntos $V(f_0, K, \epsilon)$ para una f_0 fija son una base de entornos de f_0 .

La convergencia respecto de esta topología se denomina, como cabía esperar, *convergencia casi uniforme*.

Una sucesión de funciones $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ converge casi uniformemente a una función f si y sólo si converge uniformemente en cada compacto $K \subset X$.

En efecto, la convergencia casi uniforme equivale a que la sucesión esté finalmente en cada entorno $V(f, K, \epsilon)$ de su límite, es decir, a que para todo compacto $K \subset X$ y todo $\epsilon > 0$ existe un índice n_0 de modo que si $n \geq n_0$, entonces $d(f_n(x) - f(x)) < \epsilon$ para todo $x \in K$. Esto significa que para todo compacto $K \subset X$, la sucesión $\{f_n|_K\}_{n=0}^{\infty}$ converge uniformemente a $f|_K$.

De aquí se desprende que la convergencia uniforme implica la convergencia casi uniforme y que la convergencia casi uniforme implica la convergencia puntual (pues los puntos son compactos). Más tarde veremos ejemplos de que los recíprocos son falsos en general.

De acuerdo con 3.59, la convergencia casi uniforme es precisamente la convergencia que presentan las series de potencias.

Teorema 10.4 Si X es un espacio topológico localmente compacto con una base numerable e Y es un espacio métrico (completo), entonces la topología de la convergencia casi uniforme en Y^X es (completamente) metrizable.

DEMOSTRACIÓN: Para cada punto de X seleccionamos un entorno abierto con clausura compacta. Tales entornos cubren X y la base numerable nos da un subcubrimiento numerable $\{U_n\}_{n=0}^\infty$ formado por abiertos de clausura compacta. Sustituyendo cada U_n por su unión con sus precedentes podemos suponer que la sucesión es creciente, al igual que lo será la sucesión de sus clausuras compactas $\{K_n\}_{n=0}^\infty$. Se trata de una sucesión de compactos cuya unión es X y con la propiedad de que todo compacto $K \subset X$ está contenido en un K_n , pues K está cubierto por los U_n , luego está contenido en uno de ellos.

Para cada par de funciones $f, g \in Y^X$ definimos

$$\rho_n(f, g) = \sup_{x \in K_n} d(f(x), g(x)) \in [0, +\infty].$$

Se comprueba fácilmente que $\rho_n(f, g) \geq 0$, $\rho_n(f, g) = \rho_n(g, f)$, así como que

$$\rho_n(f, g) \leq \rho_n(f, h) + \rho_n(h, g),$$

donde hay que entender que $+\infty + r = r + \infty = \infty + \infty = +\infty$.

Definimos $d_n(f, g) = \min\{1, \rho_n(f, g)\}$. Así d_n tiene las mismas propiedades que ρ_n , pero además $0 \leq d_n(f, g) \leq 1$. Las aplicaciones d_n no son distancias porque $d_n(f, g) = 0$ sólo implica que $f|_{K_n} = g|_{K_n}$, pero no necesariamente que $f = g$. Ahora bien, si definimos

$$d(f, g) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_n(f, g)}{2^{n+1}} \leq 1,$$

es claro que d sí que es una distancia en Y^X . Tenemos que probar que induce la topología de la convergencia casi uniforme.

Sea $A \subset Y^X$ abierto para la métrica y veamos que es abierto para la topología de la convergencia casi uniforme. Para ello tomamos $f_0 \in A$, con lo que existe un n tal que $B(f_0, 1/2^n) \subset A$. Basta probar que

$$V(f_0, K_n, 1/2^n) \subset B(f_0, 1/2^n) \subset A.$$

Si $f \in V(f_0, K_n, 1/2^n)$, la definición de d_m nos da que $d_m(f_0, f) < 1/2^n$ para $m = 0, \dots, n$, luego

$$d(f_0, f) = \sum_{m=0}^n \frac{d_m(f_0, f)}{2^{m+1}} + \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{d_m(f_0, f)}{2^{m+1}} < \frac{1}{2^n} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2^{m+1}} + \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^{m+1}} = \frac{1}{2^n}.$$

Recíprocamente, si A es abierto para la topología de la convergencia casi uniforme y $f_0 \in A$, existen K y $\epsilon > 0$ tales que $V(f_0, K, \epsilon) \subset A$. Podemos tomar n suficientemente grande como para que $K \subset K_n$ y $1/n < \epsilon$, y basta probar que $B(f_0, 1/2^{2n+1}) \subset V(f_0, K_n, 1/n) \subset V(f_0, K, \epsilon) \subset A$.

Si $d(f, f_0) < 1/2^{2n+1}$, tenemos que $d_n(f, f_0)/2^{n+1} < 1/2^{2n+1}$, luego también $d_n(f, f_0) < 1/2^n < 1/n$, luego $f \in V(f_0, K_n, 1/n)$.

Supongamos ahora que Y es un espacio métrico completo y sea $\{f_n\}_{n=0}^\infty$ una sucesión de Cauchy respecto de la distancia que hemos definido. Si $K \subset X$ es compacto, para todo n suficientemente grande se cumple que $K \subset K_n$ y si $p, q \geq n$, entonces $d_n(f_p, f_q) \leq d(f_p, f_q)$, de donde se sigue que $\{f_n|_K\}_{n=0}^\infty$ es una sucesión de Cauchy para la convergencia uniforme en K . Por 3.54 tenemos que Y^K es un espacio métrico completo con la métrica de la convergencia uniforme, luego existe una función $f_K : K \rightarrow Y$ tal que $\{f_n|_K\}_{n=0}^\infty$ converge uniformemente a f_K . En particular, para todo $x \in K$, tenemos que $f_K(x)$ es el límite de la sucesión $\{f_n(x)\}_{n=0}^\infty$, luego en realidad tenemos una única función $f : X \rightarrow Y$ tal que $f_K = f|_K$ y el hecho de que $\{f_n|_K\}_{n=0}^\infty$ converja uniformemente a $f|_K$ para todo compacto K equivale a que $\{f_n\}_{n=0}^\infty$ converge casi uniformemente a f . ■

Teorema 10.5 *En las condiciones del teorema anterior, el espacio $C(X, Y)$ de las funciones continuas de X en Y es cerrado en Y^X respecto de la topología de la convergencia casi uniforme, por lo que si Y es completamente metrizable, también lo es $C(X, Y)$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $\{f_n\}_{n=0}^\infty$ una sucesión en $C(X, Y)$ que converja casi uniformemente a $f \in Y^X$. Para cada $x \in X$, sea K un entorno compacto de x en X . Entonces $\{f_n|_K\}_{n=0}^\infty$ converge uniformemente a $f|_K$, luego por 3.53 tenemos que $f|_K$ es continua en K , luego f es continua en x . Esto prueba que $f \in C(X, Y)$, luego $C(X, Y)$ es cerrado en Y^X . ■

Conviene observar que, en contra de lo que parece, la topología de la convergencia casi uniforme en $C(X, Y)$ no depende de la métrica de Y , sino únicamente de su topología:

Teorema 10.6 *Si X es un espacio de Hausdorff e Y es un espacio métrico, la topología de la convergencia casi uniforme en $C(X, Y)$ tiene por subbase los conjuntos de la forma*

$$V(K, U) = \{f \in C(X, Y) \mid f[K] \subset U\},$$

donde $K \subset X$ es compacto y $U \subset Y$ es abierto.

DEMOSTRACIÓN: Veamos que los conjuntos $V(K, U)$ son abiertos para la topología de la convergencia casi uniforme. Para ello tomamos $g \in V(K, U)$ y llamamos $\epsilon = d(g[K], Y \setminus U) > 0$. Claramente,

$$g \in V(g, K, \epsilon) \subset V(K, U),$$

pues si $f \in V(g, K, \epsilon)$ y $x \in K$, entonces $d(g(x), f(x)) < \epsilon = d(g[K], Y \setminus U)$, luego $f(x) \in U$, luego $f[K] \subset U$.

Recíprocamente, veamos que los conjuntos $V(f_0, K, \epsilon)$ son abiertos para la topología definida por la subbase dada en el enunciado. Para ello tomamos $g \in V(f_0, K, \epsilon)$, de modo que

$$\delta_0 = \sup_{x \in K} d(g(x), f_0(x)) < \epsilon.$$

Sea $\delta_0 + \delta_1 < \epsilon$. Las bolas $B_{\delta_1/4}(g(x))$ con $x \in K$ cubren $g[K]$, luego por compacidad podemos extraer un subcubrimiento finito

$$g[K] \subset B_{\delta_1/4}(g(x_1)) \cup \cdots \cup B_{\delta_1/4}(g(x_n)).$$

Sea $K_i = K \cap g^{-1}[\overline{B_{\delta_1/4}(g(x_i))}]$, de modo que $K = K_1 \cup \cdots \cup K_n$ y

$$g[K_i] \subset \overline{B_{\delta_1/4}(g(x_i))} \subset B_{\delta_1/2}(g(x_i)) = U_i.$$

Basta ver que $g \in \bigcap_i V(K_i, U_i) \subset V(f_0, K, \epsilon)$.

En efecto, si f está en la intersección y $x \in K$, existe un i tal que $x \in K_i$, con lo que

$$d(f(x), f_0(x)) \leq d(f(x), g(x)) + d(g(x), f_0(x)) \leq \delta_1 + \delta_0 < \epsilon,$$

donde hemos usado que $f(x), g(x) \in U_i$, luego $d(f(x), g(x)) < \delta_1$. ■

Tal y como observamos tras 3.54, si \mathbb{K} es un cuerpo métrico completo, el espacio $C(X, \mathbb{K})$ no es, en general, un espacio vectorial topológico con la topología de la convergencia uniforme, salvo que todas las funciones continuas en X estén acotadas. Este inconveniente desaparece cuando consideramos la topología de la convergencia casi uniforme:

Teorema 10.7 *Si X es un espacio topológico localmente compacto con una base numerable y \mathbb{K} es un cuerpo métrico completo, entonces la suma y el producto de funciones definidos puntualmente en $C(X, \mathbb{K})$ son funciones continuas respecto de la topología de la convergencia casi uniforme.*

DEMOSTRACIÓN: Sean $\{f_n\}_{n=0}^\infty, \{g_n\}_{n=0}^\infty$, dos sucesiones en $C(X, \mathbb{K})$ que converjan, respectivamente, a $f, g \in C(X, \mathbb{K})$ y sea $K \subset X$ un subconjunto compacto. Entonces $\{f_n|_K\}_{n=0}^\infty$ y $\{g_n|_K\}_{n=0}^\infty$ convergen uniformemente a $f|_K$ y $g|_K$, respectivamente, luego, dado $\epsilon > 0$, existe un n_0 tal que si $n \geq n_0$, entonces

$$\sup_{x \in K} |f_n(x) - f(x)| < \epsilon/2, \quad \sup_{x \in K} |g_n(x) - g(x)| < \epsilon/2,$$

de donde, para todo $x \in K$, tenemos que

$$|f_n(x) + g_n(x) - f(x) - g(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |g_n(x) - g(x)| < \epsilon,$$

y esto significa que $\{(f_n + g_n)|_K\}_{n=0}^\infty$ converge uniformemente a $(f + g)|_K$, luego $\{f_n + g_n\}_{n=0}^\infty$ converge uniformemente a $f + g$, luego la suma es continua.

Para probar la continuidad del producto, fijado K y dado $0 < \epsilon < 1$, tomamos una cota M de $|f|$ y $|g|$ en K y elegimos n_0 tal que, para todo $n \geq n_0$, se cumpla que

$$\sup_{x \in K} |f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2M}, \quad \sup_{x \in K} |g_n(x) - g(x)| < \frac{\epsilon}{2(M+1)}.$$

Así, si $x \in K$,

$$\begin{aligned} |f_n(x)g_n(x) - f(x)g(x)| &\leq |f_n(x)g_n(x) - f_n(x)g(x)| + |f_n(x)g(x) - f(x)g(x)| \\ &\leq |f_n(x)| |g_n(x) - g(x)| + |f_n(x) - f(x)| |g(x)| \\ &\leq (|f_n(x) - f(x)| + |f(x)|) |g_n(x) - g(x)| + |f_n(x) - f(x)| |g(x)| \\ &\leq (M+1) \frac{\epsilon}{2(M+1)} + \frac{\epsilon M}{2M} < \epsilon. \end{aligned}$$

Así pues, $\{f_n g_n|_K\}_{n=0}^\infty$ converge uniformemente a $fg|_K$, luego $\{f_n g_n\}_{n=0}^\infty$ converge uniformemente a fg , luego el producto es continuo. ■

En particular, también es continuo el producto por un escalar, con lo que $C(X, \mathbb{K})$ es un espacio vectorial topológico y, más aún, lo que se denomina un *álgebra topológica* (un álgebra dotada de una topología con la que la suma y el producto son funciones continuas), e incluso un *álgebra de Fréchet* (un álgebra topológica completamente metrizable).

Al final de la sección [IC 1.4] vimos un ejemplo debido a Weierstrass de una función continua en \mathbb{R} , pero no derivable en ningún punto. Dicha función se define como un límite uniforme de funciones de clase C^∞ . Dicho ejemplo muestra que el espacio $C^\infty(\mathbb{R})$ formado por las funciones $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^∞ (o incluso el subespacio de las funciones analíticas, que definiremos en el capítulo siguiente) no es cerrado en $C(\mathbb{R})$ para la topología de la convergencia casi uniforme, o siquiera para la topología de la convergencia uniforme. Por otra parte, también se debe a Weierstrass el teorema que muestra que las funciones holomorfas sí que son cerradas para la convergencia casi uniforme:

Teorema 10.8 (Teorema de Weierstrass) *Si $\Omega \subset \mathbb{C}$ es un abierto no vacío y $\{f_m\}_{m=0}^\infty$ es una sucesión en $\mathcal{H}(\Omega)$ que converge casi uniformemente a una función $f \in \mathcal{C}^\Omega$, entonces $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, y la sucesión $\{f'_m\}_{m=0}^\infty$ converge casi uniformemente a f' .*

DEMOSTRACIÓN: Si T es un triángulo tal que $T^* \subset D(\zeta, \epsilon)$, por el teorema de Cauchy [IC 7.13] (o, alternativamente, 8.28) sabemos que $\int_T f_m(z) dz = 0$, y la sucesión $\{f_m|_{T^*}\}_{m=0}^\infty$ converge uniformemente a $f|_{T^*}$, luego el teorema 10.2 nos da que $\int_T f(z) dz = 0$, y el teorema de Morera [IC 7.17] implica entonces que f es holomorfa en el disco $D(\zeta, \epsilon)$.

Tomemos ahora $a \in \Omega$ y sea $R > 0$ tal que $\overline{D(a, 2R)} \subset \Omega$. La fórmula de Cauchy [IC 7.16] nos da que

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta-a|=2R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2} d\zeta,$$

$$f'_m(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta-a|=2R} \frac{f_m(\zeta)}{(\zeta-z)^2} d\zeta.$$

La sucesión dada converge uniformemente en el compacto $K = \partial D(a, 2R)$, luego, dado $\epsilon > 0$, existe un n_0 tal que si $n \geq n_0$, entonces

$$|f(\zeta) - f_m(\zeta)| < \frac{R\epsilon}{4}$$

para todos los puntos de K . Por otro lado, para todo punto $\zeta \in K$ y todo $z \in D(a, R)$, se cumple que $|\zeta - z| \geq R$, luego

$$\begin{aligned} |f'_m(z) - f'(z)| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta-a|=2R} \frac{f_m(\zeta) - f(\zeta)}{(\zeta-z)^2} d\zeta \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} 4\pi R \frac{R\epsilon}{4R^2} = \frac{\epsilon}{2} < \epsilon. \end{aligned}$$

Esto prueba que $\{f'_m(z)\}_{m=0}^\infty$ converge uniformemente a $f'(z)$ en el abierto $D(a, R)$. Como todo compacto en Ω puede cubrirse por un número finito de estos abiertos, concluimos que la sucesión de derivadas converge casi uniformemente en Ω . ■

En otros términos, el teorema anterior afirma que $\mathcal{H}(\Omega)$ es un subespacio cerrado de \mathbb{C}^Ω cuando consideramos en \mathbb{C}^Ω la topología de la convergencia casi uniforme, así como que la aplicación $\mathcal{H}(\Omega) \rightarrow \mathcal{H}(\omega)$ dada por $f \mapsto f'$ es continua.

Observemos que el teorema 8.26 prueba lo mismo para el espacio $H(\Omega)$ de todas las funciones armónicas en un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

10.3 Series de Laurent

Es muy frecuente encontrar funciones que son holomorfas en todo el plano complejo excepto en algunos puntos especiales donde no están definidas. El caso más simple es la función $1/z$, que no está definida en 0. En esta sección vamos a estudiar esta clase de puntos excepcionales donde una función no está definida. Un ejemplo mucho más complicado de esta situación lo presenta la función

$$f(z) = \frac{1}{\operatorname{sen}(1/z)}, \quad (10.1)$$

que está definida en todo el plano complejo excepto en los puntos $1/k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$ y en 0.

Ahora vamos a introducir una herramienta que nos permitirá estudiar una clase particular de puntos singulares. Si Ω es un abierto en \mathbb{C} y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ diremos que un punto z_0 es una *singularidad aislada* de la función f si $z_0 \notin \Omega$ y existe un $r > 0$ tal que $D(z_0, r) \setminus \{z_0\} \subset \Omega$, o sea, si f no está definida en z_0 pero sí en todos los puntos a su alrededor.

Así, por ejemplo, el 0 es una singularidad aislada de la función $1/z$ y los puntos $1/k\pi$ son singularidades aisladas de la función f dada por (10.1). En cambio el 0 no es una singularidad aislada de f , pues cualquier entorno de 0 contiene puntos distintos de 0 donde f no está definida.

Como ilustración de lo que nos proponemos obtener podemos pensar en la función $e^{1/z}$, que presenta una singularidad aislada en 0. Sabemos que para todo número complejo z se cumple

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n,$$

luego para todo $z \neq 0$ tenemos

$$e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n}.$$

Esto es un desarrollo en serie de potencias de $e^{1/z}$ alrededor de 0, pero con exponentes negativos en lugar de positivos. Vamos a probar que toda función holomorfa admite un desarrollo de este tipo en un entorno de cualquiera de sus singularidades aisladas (combinando potencias positivas y negativas).

Las propiedades de las series de potencias con exponentes negativos se deducen fácilmente de las propiedades de las series de potencias usuales mediante la misma técnica con la que hemos obtenido el desarrollo de $e^{1/z}$.

Teorema 10.9 *Dada una serie de la forma*

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z - z_0)^{-n},$$

existe un $r \geq 0$ de modo que la serie converge absoluta y casi uniformemente en el conjunto $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| > r\}$ a una función holomorfa y diverge en $D(z_0, r)$ (admitiendo la posibilidad $r = +\infty$, en cuyo caso la serie diverge en todo \mathbb{C}).

DEMOSTRACIÓN: Consideremos la serie de potencias

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n.$$

Por el teorema 3.59 existe un $R \geq 0$ tal que g converge absoluta y casi uniformemente a una función holomorfa en el disco $D(0, R)$ y diverge en el complementario del disco cerrado. Sea $r = 1/R$ (entendiendo que $1/+\infty = 0$ y $1/0 = +\infty$).

Sea $A = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| > r\}$. La función $h : \mathbb{C} \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ dada por $h(z) = 1/(z - z_0)$ es biyectiva y holomorfa (en particular continua). Además biyecta el abierto A con el disco $D(0, R)$. La función $h \circ g$ es, pues, una función holomorfa en A y viene dada por

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (z - z_0)^{-n}.$$

Por lo tanto la serie f converge en A . Análogamente se ve que si f convergiera en un punto z tal que $|z - z_0| < r$ entonces g convergería en un punto $z' = h(z)$ tal que $|z'| > R$.

Finalmente, si K es un compacto contenido en A , entonces $h[K]$ es un compacto contenido en $D(0, R)$ y g converge uniformemente en $h[K]$. De aquí se sigue sin dificultad que f converge uniformemente en K . ■

Definición 10.10 Sean r y R números reales tales que $0 \leq r < R \leq +\infty$. Llamaremos *anillo* de radios r , R y centro $z_0 \in \mathbb{C}$ al abierto

$$A(z_0, r, R) = \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z - z_0| < R\}.$$

Una *serie de Laurent* centrada en un punto $z_0 \in \mathbb{C}$ es una serie de la forma

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

donde, para todo $n \in \mathbb{Z}$, los coeficientes a_n son números complejos.

Para tener completamente definida una serie de Laurent deberíamos precisar el orden en que hay que sumar sus términos. Por ejemplo, podríamos convenir que se trata de la serie asociada a la sucesión

$$a_0, a_1, a_{-1}, a_2, a_{-2}, \dots$$

pero en realidad esto es irrelevante, pues sólo nos van a interesar los puntos donde una serie de Laurent converge absolutamente, y cuando la convergencia es absoluta no importa el orden de los sumandos. Así pues, cuando digamos que una serie de Laurent *converge* en un punto querremos decir que converge absolutamente con cualquier ordenación de sus términos.

Consideremos las series

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z - z_0)^{-n}.$$

Las llamaremos *parte regular* y *parte singular*, respectivamente, de la serie de Laurent. La segunda la representaremos también por

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z - z_0)^n.$$

Por el teorema 2.88 (tomando $I_n = \emptyset$ para $n \geq 2$) para que una serie de Laurent converja (absolutamente) en un punto es necesario y suficiente que lo hagan sus partes regular y singular. Por el teorema 3.59 la parte regular converge absoluta y casi uniformemente en un disco $|z - z_0| < R$ y por el teorema anterior la parte singular converge absoluta y casi uniformemente en un conjunto de la forma $|z - z_0| > r$. Si $R < r$ entonces la serie de Laurent no converge en ningún punto, mientras que si $r < R$ converge absoluta y casi uniformemente en el anillo $A(z_0, r, R)$, al que llamaremos *anillo de convergencia*

de la serie. También puede haber convergencia en todos o en parte de los puntos de la frontera del anillo. Así mismo, si $r = R$ la serie podría converger en los puntos de la circunferencia $|z - z_0| = r$, pero estos casos no nos van a interesar. Lo importante es que una serie de Laurent determina su anillo de convergencia como el interior del conjunto de puntos del plano complejo donde converge absolutamente. Un caso especial se da cuando todos los coeficientes de la parte singular son nulos. Entonces la serie de Laurent es una serie de potencias, luego $r = 0$ y la serie converge absolutamente en el disco $D(z_0, R)$. En tal caso consideraremos que el anillo de convergencia es $A(z_0, 0, R)$.

A efectos prácticos, para calcular una serie de Laurent en un punto z de su anillo de convergencia podemos agrupar sus términos de cualquier forma, por ejemplo,

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z - z_0)^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n.$$

Como la convergencia de las partes regular y singular es casi uniforme en el anillo $A(z_0, r, R)$, la igualdad anterior justifica que una serie de Laurent puede ser derivada e integrada (sobre un arco) término a término. El teorema siguiente prueba que toda función holomorfa en un anillo puede desarrollarse en serie de Laurent.

Teorema 10.11 *Sea $0 \leq r < R \leq +\infty$ y sea f una función holomorfa en el anillo $A(z_0, r, R)$. Entonces para todo $z \in A(z_0, r, R)$ se cumple*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n,$$

donde

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta,$$

siendo ρ cualquier número $r < \rho < R$.

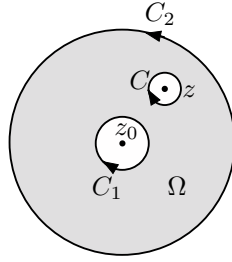
DEMOSTRACIÓN: Notemos en primer lugar que las integrales que definen los coeficientes a_n no dependen de la elección de ρ .

En efecto, si consideramos dos circunferencias cualesquiera C_1 y C_2 con radios entre $r < r_1 < r_2 < R$, al aplicar el teorema 8.28 al abierto Ω limitado por C_1 y C_2 obtenemos que

$$\int_{C_2} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta - \int_{C_1} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta = 0,$$

pues $\bar{\Omega} \subset A(z_0, r, R)$ y el integrando es una función holomorfa en el anillo (compárese con la prueba de 8.29).

Ahora fijemos un $z \in A(z_0, r, R)$ y tomemos $r < r_1 < |z - z_0| < r_2 < R$. Sea C_j la circunferencia de centro z_0 y radio r_j ($j = 1, 2$) y sea C cualquier circunferencia de centro z contenida entre ambas. Llamamos Ω al abierto que muestra la figura:



El teorema 8.28 nos da que

$$\int_{C_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \int_{C_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = 0,$$

luego la fórmula de Cauchy nos da que

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = r_2} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = r_1} \frac{f(\zeta)}{(z - z_0) - (\zeta - z_0)} d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = r_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \frac{d\zeta}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} + \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = r_1} \frac{f(\zeta)}{z - z_0} \frac{d\zeta}{1 - \frac{\zeta - z_0}{z - z_0}} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = r_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^n d\zeta \\ &\quad + \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = r_1} \frac{f(\zeta)}{z - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\zeta - z_0}{z - z_0} \right)^n d\zeta. \end{aligned}$$

Para intercambiar las series con las integrales observamos que convergen uniformemente sobre las circunferencias, pues por ejemplo la primera cumple

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^n \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{|z - z_0|}{r_2} \right)^n < +\infty,$$

y podemos aplicar el teorema de mayoración de Weierstrass. Igualmente se razona con la segunda. Por lo tanto, el teorema 10.2 nos da que

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = r_2} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \right) (z - z_0)^n \\ &\quad + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = r_1} f(\zeta) (\zeta - z_0)^n d\zeta \right) (z - z_0)^{-(n+1)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_{-n-1} (z - z_0)^{-(n+1)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n. \end{aligned}$$

■

Al igual que ocurre con los desarrollos en series de potencias, los desarrollos en series de Laurent son únicos, tal y como prueba el teorema siguiente:

Teorema 10.12 Si una serie $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ converge en un anillo $A(z_0, r, R)$ a una función f , entonces para todo entero n se cumple

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}} d\zeta,$$

siendo ρ cualquier número $r < \rho < R$.

DEMOSTRACIÓN: Para todo entero m , la función

$$\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{m+1}} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(\zeta-z_0)^{n-m+1}$$

es holomorfa en el anillo $A(z_0, r, R)$ y la serie converge uniformemente en la circunferencia $|z-z_0| = \rho$ (sus partes regular y singular convergen uniformemente). Por lo tanto podemos integrar término a término:

$$\int_{|\zeta-z_0|=\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{m+1}} d\zeta = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \int_{|\zeta-z_0|=\rho} (\zeta-z_0)^{n-m+1} d\zeta.$$

Pero las funciones $(\zeta-z_0)^{n-m-1}$ tienen todas primitiva en $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ excepto cuando $n = m$, luego por la regla de Barrow resulta que sus integrales son nulas. Nos queda

$$\int_{|\zeta-z_0|=\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{m+1}} d\zeta = a_m \int_{|\zeta-z_0|=\rho} \frac{1}{\zeta-z_0} d\zeta = a_m 2\pi i.$$

■

Definición 10.13 Llamaremos *entorno reducido* de radio r de un número complejo z_0 al conjunto $D'(z_0, r) = A(z_0, 0, r) = D(z_0, r) \setminus \{z_0\}$.

En estos términos, un punto z_0 es una singularidad aislada de una función f si f está definida (y es holomorfa) en un entorno reducido de z_0 pero no en z_0 .

Hemos probado que si z_0 es una singularidad aislada de una función f entonces f admite un desarrollo en serie de Laurent

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n,$$

convergente en todo entorno reducido de z_0 en el que f esté definida. A esta serie la llamaremos *serie de Laurent* de f en z_0 . Sus coeficientes están unívocamente determinados por f . En la sección siguiente estudiamos las consecuencias de la existencia de estos desarrollos.

10.4 Clasificación de las singularidades aisladas

Definición 10.14 Sea z_0 una singularidad aislada de una función holomorfa f y sea

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$

su desarrollo en serie de Laurent alrededor de z_0 . Llamaremos *orden* de z_0 al mínimo entero n tal que $a_n \neq 0$, entendiendo que el orden es $-\infty$ si hay coeficientes no nulos arbitrariamente pequeños y que el orden es $+\infty$ si todos los coeficientes son nulos. Lo representaremos $o(f, z_0)$.

Observemos que si $o(f, z_0) \geq 0$, entonces la serie de Laurent de f en z_0 es en realidad una serie de potencias, la cual determina una función holomorfa en un entorno de z_0 (incluido éste). Por consiguiente, si extendemos f a z_0 mediante $f(z_0) = a_0$ la extensión es holomorfa en z_0 y su serie de Taylor en z_0 coincide con la serie de Laurent de f en el mismo punto. Notemos que la extensión es única, pues para que sea holomorfa es necesario que $f(z_0)$ sea el límite de f en z_0 .

Si z_0 es una singularidad aislada de una función f tal que $o(f, z_0) \geq 0$ se dice que z_0 es una *singularidad evitable*.

En la práctica, si una función f tiene una singularidad aislada en un punto z_0 y probamos que es evitable, a partir de ese momento supondremos tácitamente que la función está extendida a z_0 con el valor que la hace holomorfa, y por lo tanto ya no contaremos a z_0 entre sus singularidades (se dice entonces que *se evita* la singularidad extendiendo la función).

Pensemos por ejemplo en la función $f(z) = (\operatorname{sen} z)/z$. En principio tiene una singularidad aislada en 0, pero a partir de la serie de Taylor del seno se ve inmediatamente que es evitable, por lo que siempre consideraremos a f como una función entera. Concretamente $f(0) = 1$.

Recíprocamente, si z_0 es una singularidad aislada de una función f y es “evitable” en el sentido de que f se puede extender a una función holomorfa en z_0 , entonces es evitable en el sentido que le hemos dado al término, es decir, $o(f, z_0) \geq 0$, pues la serie de Taylor de la extensión ha de ser la serie de Laurent de f , por la unicidad del desarrollo, luego ésta tiene nulos sus coeficientes de índice negativo. El teorema siguiente da varios criterios útiles para reconocer una singularidad evitable:

Teorema 10.15 Sea Ω un abierto en \mathbb{C} , sea $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y sea z_0 una singularidad aislada de f . Entonces las afirmaciones siguientes son equivalentes:

- a) z_0 es una singularidad evitable de f .
- b) f se puede extender a una función holomorfa en $\Omega \cup \{z_0\}$.
- c) Existe $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \in \mathbb{C}$.

d) f está acotada en un entorno reducido de z_0 .

e) $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z) = 0$.

DEMOSTRACIÓN: Ya hemos visto que a) equivale a b). La única implicación no trivial es e) \Rightarrow a). Consideremos la serie de Laurent de f en z_0 :

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Tenemos que existe

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^{n+1} = 0.$$

La serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^{n+1}$ define una función holomorfa en un entorno de z_0 , y su límite en z_0 es 0. En consecuencia también existe

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z - z_0)^{n+1} = \lim_{z \rightarrow z_0} \sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n} (z - z_0)^{-n+1} = 0.$$

La última serie converge en un entorno reducido de z_0 , luego el teorema 10.9 garantiza que de hecho converge en $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ y en consecuencia la serie de potencias $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} z^{n-1}$ tiene radio de convergencia $+\infty$, es decir, converge en todo \mathbb{C} . Mediante un cambio de variable en el límite anterior llegamos a que

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} z^{n-1} = 0,$$

luego la función entera definida por la serie está acotada. Por el teorema de Liouville [IC 7.23] ha de ser constante. Concretamente es nula, pues tiene límite 0. Esto prueba que todos los coeficientes a_n para $n < 0$ de la serie de Laurent de f en z_0 son nulos, luego $o(f, z_0) \geq 0$ y la singularidad es evitable. ■

Definición 10.16 Si z_0 es una singularidad aislada de una función f tal que $o(f, z_0) = n > 0$, diremos que f tiene un *cero* de orden n en z_0 , mientras que si $o(f, z_0) = -n < 0$ se dice que f tiene un *polo* de orden¹ n en z_0 .

Observemos que el concepto de multiplicidad de un cero generaliza al concepto usual definido algebraicamente para polinomios.

El comportamiento de una función holomorfa alrededor de un cero o de un polo viene dado por el teorema siguiente:

¹Es costumbre hablar de ceros y polos *simples*, *dobles*, *triples*, etc. para referirse a ceros y polos de orden 1, 2, 3, ...

Teorema 10.17 Sea Ω un abierto en \mathbb{C} que contenga a un entorno reducido de un punto z_0 y sea $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $o(f, z_0) = n \in \mathbb{Z}$. Entonces existe una única función $g \in \mathcal{H}(\Omega \cup \{z_0\})$ tal que

$$f(z) = (z - z_0)^n g(z), \quad \text{para todo } z \in \Omega, \quad g(z_0) \neq 0.$$

Recíprocamente, si una función f admite una descomposición de esta forma entonces $o(f, z_0) = n$.

DEMOSTRACIÓN: Si $o(f, z_0) = n$, por definición de orden, el desarrollo de Laurent de f en z_0 es de la forma

$$f(z) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k (z - z_0)^k = (z - z_0)^n \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+n} (z - z_0)^k,$$

con $a_n \neq 0$. Definimos $g(z) = (z - z_0)^{-n} f(z)$, que es claramente holomorfa en Ω y en un entorno reducido de z_0 coincide con la serie de potencias

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{k+n} (z - z_0)^k,$$

que es holomorfa en z_0 . Así pues, definiendo $g(z_0) = a_n \neq 0$ tenemos que g coincide con la serie en un entorno de z_0 , luego g es holomorfa en $\Omega \cup \{z_0\}$. Por definición de g tenemos la factorización buscada.

Recíprocamente, si f admite una factorización en las condiciones del enunciado, el desarrollo de Taylor de g en z_0 será de la forma

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k,$$

con $a_0 \neq 0$, luego en un entorno reducido de z_0

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^{n+k}.$$

Por la unicidad, éste es el desarrollo de f en serie de Laurent alrededor de z_0 , luego $o(f, z_0) = n$. ■

De aquí se desprenden varias consecuencias de interés. Por lo pronto, si z_0 es un polo de orden n de una función f , entonces $f(z) = (z - z_0)^{-n} g(z)$, para cierta función g holomorfa en z_0 , luego $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$.

Pero el teorema anterior nos da más información sobre los polos: Si z_0 es un polo de una función f sabemos que $f(z) = (z - z_0)^{-n} g(z)$, donde g es holomorfa en z_0 , luego $(z - z_0)^n f(z)$ tiene una singularidad evitable en z_0 . Lo mismo vale si cambiamos n por cualquier natural mayor, pero no por otro menor.

Con otras palabras, si z_0 es un polo de una función f entonces la singularidad no puede evitarse extendiendo f a z_0 , sino que primero es necesario multiplicarla por un factor $(z - z_0)^n$, y el mínimo exponente n necesario es precisamente el orden del polo. Cuando convertimos a f en una función holomorfa en z_0 mediante este procedimiento no se dice que evitamos el polo, sino que lo *cancelamos*.

El teorema siguiente recoge estos hechos. La prueba es inmediata.

Teorema 10.18 *Sea z_0 un polo de una función holomorfa f . Entonces*

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$$

y el orden de z_0 es el mínimo número natural n tal que se cumple cualquiera de las tres condiciones siguientes:

- a) *Existe $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^n f(z) \in \mathbb{C}$.*
- b) $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^{n+1} f(z) = 0$.
- c) *La función $(z - z_0)^n f(z)$ está acotada en un entorno reducido de z_0 .*

El teorema siguiente se sigue inmediatamente de 10.17, y prueba entre otras cosas que para cancelar un polo de orden n no es necesario multiplicar por $(z - z_0)^n$, sino que sirve igualmente cualquier función que tenga un cero de orden n en z_0 :

Teorema 10.19 *Sean f y g funciones holomorfas en un entorno reducido de un punto z_0 tales que $o(f, z_0)$ y $o(g, z_0)$ sean finitos (positivos o negativos). Entonces*

$$o(fg, a) = o(f, a) + o(g, a), \quad o(f/g, a) = o(f, a) - o(g, a),$$

$$o(f + g, a) \geq \min\{o(f, a), o(g, a)\}.$$

De aquí se sigue también que si z_0 es una singularidad aislada que cumple cualquiera de las condiciones a), b) o c) del teorema 10.18 entonces z_0 es evitable (si sirve $n = 0$) o bien es un polo (si ha de ser necesariamente $n > 0$). Dicho de otro modo, de entre las singularidades aisladas no evitables, los polos son exactamente las singularidades “cancelables”.

Definición 10.20 Una singularidad aislada z_0 de una función f es *esencial* si $o(f, z_0) = -\infty$.

Con esto terminan las posibilidades para las singularidades aisladas: cualquier singularidad aislada ha de ser evitable, un polo o una singularidad esencial. El comportamiento de éstas últimas viene determinado por el teorema siguiente:

Teorema 10.21 (Teorema de Casorati-Weierstrass) *Sea Ω un abierto en \mathbb{C} , sea $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y z_0 una singularidad esencial de f . Entonces para todo $r > 0$ tal que $D'(z_0, r) \subset \Omega$ se cumple que $\overline{f[D'(z_0, r)]} = \mathbb{C}$.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que $\overline{f[D'(z_0, r)]} \neq \mathbb{C}$. Entonces existen un $a \in \mathbb{C}$ y un $R > 0$ tales que $D(a, R) \subset \mathbb{C} \setminus \overline{f[D'(z_0, r)]}$. Para cada $z \in D'(z_0, r)$ se cumple que $f(z) \neq a$, luego la función $g(z) = 1/(f(z) - a)$ es holomorfa en

$D'(z_0, r)$. Como $|g(z)| \leq 1/R$, el teorema 10.15 nos da que z_0 es una singularidad evitable de g , luego podemos considerar que g es holomorfa en $D(z_0, r)$. Como g no se anula en $D'(z_0, r)$ es claro que $0 \leq o(g, z_0) < +\infty$, luego $1/g$ tiene también orden finito en z_0 . Ahora bien, $f(z) = a + 1/g(z)$ y es fácil ver que si a una función de orden finito en un punto se le suma una constante, el resultado sigue siendo de orden finito (solo modificamos un coeficiente de su serie de Laurent). Por consiguiente z_0 no es una singularidad esencial de f . ■

He aquí un enunciado equivalente:

Teorema 10.22 *Sea Ω un abierto en \mathbb{C} , sea $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y z_0 una singularidad esencial de f . Entonces para todo $c \in \mathbb{C}$ existe una sucesión $\{z_n\} \subset \Omega$ tal que*

$$\lim_n z_n = z_0 \quad \text{y} \quad \lim_n f(z_n) = c.$$

En particular no existe $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ (en $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$).

DEMOSTRACIÓN: Por el teorema anterior podemos tomar $z_n \in \Omega$ tal que $|z_n - z_0| < 1/n$ y $|f(z_n) - c| < 1/n$. ■

Los casos considerados en los teoremas anteriores son mutuamente excluyentes y recogen todas las posibilidades, por lo que en realidad hemos demostrado las siguientes caracterizaciones:

Teorema 10.23 (Teorema de clasificación de singularidades) *Sea z_0 una singularidad aislada de una función holomorfa f . Entonces*

- a) z_0 es evitable si y sólo si existe $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \in \mathbb{C}$.
- b) z_0 es un polo si y sólo si $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$.
- c) z_0 es una singularidad esencial si y sólo si no existe $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ en $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Ejemplo: La función factorial En [ITAn] (véanse las observaciones tras el teorema 7.20) vimos que el producto infinito

$$P(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{k}\right) e^{-z/k}$$

converge absolutamente a una función entera con ceros simples en los enteros negativos (pues podemos separar del producto el factor correspondiente al índice k y éste tiene un cero simple en $-k$, mientras que el resto del producto no se anula en k). Por consiguiente, la función factorial [ITAn 8.16]

$$\Pi(z) = \frac{1}{e^{\gamma z} P(z)}$$

es una función meromorfa en \mathbb{C} (las funciones *meromorfas* en un abierto Ω son las funciones holomorfas en Ω salvo a lo sumo en un conjunto de polos) con polos simples en los enteros negativos.

En la sección siguiente veremos que tiene gran interés el concepto de “residuo” de una función holomorfa en una singularidad aislada:

Definición 10.24 Si z_0 es una singularidad aislada de una función holomorfa f , se llama *residuo* de f en z_0 , y se representa por $\text{Res}(f, z_0)$, al coeficiente a_{-1} de la serie de Laurent de f en z_0 .

En particular, si z_0 es una singularidad evitable de f (o, lo que en la práctica es equivalente, si f es holomorfa en z_0) entonces $\text{Res}(f, z_0) = 0$.

Es fácil calcular los residuos de los polos de la función factorial. Para ello basta tener en cuenta la ecuación funcional $\Pi(z) = z\Pi(z-1)$, de modo que, para cada número natural k , se cumple que

$$\Pi(z+k) = (z+k)(z+k-1)\cdots(z+1)\Pi(z),$$

y al tomar límites queda

$$1 = \Pi(0) = (-1)^{k-1}(k-1)! \lim_{z \rightarrow -k} (z+k)\Pi(z),$$

luego

$$R_{-k} = \lim_{z \rightarrow -k} (z+k)\Pi(z) = \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!},$$

y es claro que este número es precisamente el que cumple

$$\Pi(z) = \frac{R_{-k}}{z+k} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z+k)^n,$$

es decir,

$$\text{Res}(\Pi, -k) = \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!}. \quad \blacksquare$$

10.5 El teorema de los residuos

Ahora probaremos el teorema de los residuos, del que hemos hablado en la introducción:

Teorema 10.25 (Teorema de los residuos) *Si $f : A \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es una función holomorfa en un abierto A salvo a lo sumo en un conjunto de singularidades aisladas y $\Omega \subset \bar{\Omega} \subset A$ es un abierto acotado cuya frontera sea de clase C^1 (salvo a lo sumo en un número finito de puntos singulares) y no contenga ninguna de las singularidades de f entonces*

$$\int_{\partial\Omega} f(\zeta) d\zeta = 2\pi i \sum_{z \in \Omega} \text{Res}(f, z).$$

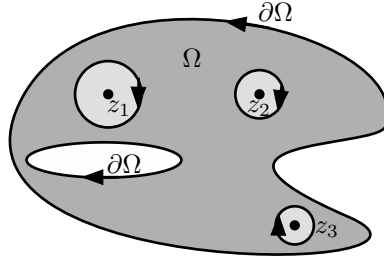
donde la integral se calcula con parametrizaciones de $\partial\Omega$ que dejan a Ω a la izquierda del sentido de avance.

Notemos que, como $\bar{\Omega}$ es compacto, sólo puede contener un número finito de singularidades de f , pues en caso contrario habría una sucesión de puntos singulares convergente a un punto de $\bar{\Omega} \subset A$, y dicho punto sería una singularidad no aislada de f . Por lo tanto, el sumatorio de la derecha es finito (todos sus sumandos son nulos salvo a lo sumo un número finito de ellos).

DEMOSTRACIÓN: Sean z_1, \dots, z_n las singularidades de f contenidas en Ω . Podemos tomar radios r_1, \dots, r_n de modo que los discos cerrados $\bar{D}(z_i, r_i)$ sean disjuntos dos a dos y estén contenidos en Ω . Así $\Omega^* = \Omega \setminus \bigcup_{i=1}^n \bar{D}(z_i, r_i)$ es un abierto,

$$\partial\Omega^* = \partial\Omega \cup \bigcup_{i=1}^n \partial D(z_i, r_i)$$

y $\bar{\Omega}^*$ no contiene ninguna singularidad de f y, como la clausura es compacta, es claro que está contenida en un abierto en el que f es holomorfa.



Esto nos permite aplicar a Ω^* el teorema 8.28 y, teniendo en cuenta que las fronteras $\partial D(z_i, r_i)$ tienen que recorrerse en sentido horario para que Ω^* quede a la izquierda, resulta que

$$\int_{\partial\Omega} f(\zeta) d\zeta - \sum_{i=1}^n \int_{\partial D(z_i, r_i)} f(\zeta) d\zeta = 0,$$

donde hemos antepuesto un signo negativo para recorrer circunferencias en sentido antihorario.

Por lo tanto, basta probar que

$$\int_{|\zeta - z_i| = r_i} f(\zeta) d\zeta = 2\pi i \text{Res}(f, z_i).$$

Equivalentemente, podemos suponer que Ω es un disco abierto $\Omega = D(z_0, r)$ y que la única singularidad aislada de f contenida en $\bar{\Omega}$ es z_0 . Ahora bien, en este caso, el teorema 10.11 nos da que f admite un desarrollo en serie de Laurent convergente en $D(z_0, r)$ y el teorema 10.12 nos dice que

$$\text{Res}(f, z_0) = a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = r} f(\zeta) d\zeta.$$

■

Para mostrar aplicaciones concretas del teorema de los residuos necesitamos técnicas para calcular residuos de singularidades. El método más elemental es calcular directamente el coeficiente de la serie de Laurent.

Ejemplo Calculemos

$$\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z - \operatorname{sen} z}, 0\right).$$

Teniendo en cuenta la serie de Taylor de $\operatorname{sen} z$ es claro que

$$z - \operatorname{sen} z = \frac{z^3}{3!} - \frac{z^5}{5!} + \dots,$$

luego 0 es un cero de orden 3 de $z - \operatorname{sen} z$ y por consiguiente es un polo de orden 3 de la función que nos ocupa. La serie de Laurent será de la forma

$$\frac{1}{z - \operatorname{sen} z} = \frac{1}{z^3} \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

El residuo que buscamos es a_2 . Operando las dos últimas igualdades nos queda

$$1 = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right) \left(\frac{1}{3!} - \frac{z^2}{5!} + \dots\right)$$

Ahora multiplicamos las series e igualamos coeficientes:

$$\begin{aligned} 1 &= a_0 \frac{1}{3!} & a_0 &= 6, \\ 0 &= a_0 \cdot 0 + a_1 \frac{1}{3!} & a_1 &= 0, \\ 0 &= a_0 \cdot \left(-\frac{1}{5!}\right) + a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot \left(-\frac{1}{3!}\right) & a_2 &= \frac{3}{10}. \end{aligned}$$

■

En el caso de polos suele ser útil el teorema siguiente:

Teorema 10.26 Sea f una función holomorfa con un polo de orden m en un punto z_0 . Entonces

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} ((z - z_0)^m f(z)).$$

DEMOSTRACIÓN: Sea $g(z) = (z - z_0)^m f(z)$. La función g tiene una singularidad evitable en z_0 . Más concretamente, si la serie de Laurent de f es

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

la serie de Taylor de g es

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n-m} (z - z_0)^n.$$

El residuo que buscamos es a_{-1} , que es el coeficiente de $(z - z_0)^{m-1}$ de la serie de Taylor de g . Según el teorema [IC 7.21] y, teniendo en cuenta la unicidad del desarrollo,

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{g^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}.$$

Puesto que las derivadas son continuas, podemos sustituir $g^{(m-1)}(z_0)$ por el límite que aparece en el enunciado, que es la forma más útil en la práctica. ■

Notemos que si el polo es simple la fórmula del teorema anterior se reduce a

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z).$$

Es con esta fórmula con la que hemos calculado los residuos de la función factorial al final de la sección anterior.

El teorema siguiente es preferible al anterior cuando puede aplicarse:

Teorema 10.27 Sean $g(z)$ y $h(z)$ funciones holomorfas en un punto z_0 de modo que $o(g, z_0) = 0$, $o(h, z_0) = 1$ (con lo que $f(z) = g(z)/h(z)$ tiene un polo simple en z_0). Entonces

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}.$$

DEMOSTRACIÓN: Tenemos que $h(z_0) = 0$ pero $h'(z_0) \neq 0$. Por el teorema anterior

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) \frac{g(z)}{h(z)} = g(z_0) \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{\frac{h(z) - h(z_0)}{z - z_0}} = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}.$$

■

Veamos un ejemplo de aplicación del teorema de los residuos al cálculo de integrales:

Teorema 10.28 Consideremos una función racional (cociente de polinomios)

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \in \mathbb{R}(x),$$

de modo que $\operatorname{grad} Q(x) \geq \operatorname{grad} P(x) + 2$ y $Q(x)$ no tenga raíces reales. Entonces

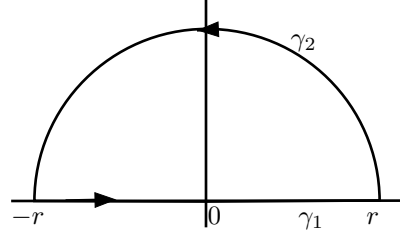
$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z > 0} \operatorname{Res}(R, z).$$

En principio, la integral hay que entenderla simplemente como

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) dx = \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{-r}^r R(x) dx.$$

Ahora bien, R tiene signo constante para todo r suficientemente grande y para todo r suficientemente pequeño. Si ambos signos son iguales, es fácil ver que la existencia de dicho límite implica que $R(x)$ es integrable en \mathbb{R} y que su integral coincide con el límite.

DEMOSTRACIÓN: La función $R(z)$ está definida sobre todo el plano complejo salvo en las raíces de $Q(z)$, que son un número finito. Sea r un número real mayor que el módulo de cualquiera de estas raíces y consideremos el arco cerrado $\gamma_1 \cup \gamma_2$ descrito en la figura.



Al aplicar el teorema de los residuos obtenemos que

$$\int_{-r}^r R(x) dx + ir \int_0^\pi R(re^{it})e^{it} dt = 2\pi i \sum_{\text{Im } z > 0} \text{Res}(R, z).$$

Pongamos que

$$R(z) = \frac{a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0}{b_m z^m + \dots + b_1 z + b_0} = \frac{1}{z^{m-n}} \frac{a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \dots + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \frac{a_0}{z^n}}{b_m + \frac{b_{m-1}}{z} + \dots + \frac{b_1}{z^{m-1}} + \frac{b_0}{z^m}}.$$

El último término tiende a a_n/b_m cuando z tiende a ∞ , luego para valores grandes de $|z|$ se cumple

$$|R(z)| \leq \frac{C}{|z|^{m-n}} \leq \frac{C}{|z|^2}, \quad \text{con } C \in \mathbb{R}.$$

Por consiguiente

$$\left| ir \int_0^\pi R(re^{it})e^{it} dt \right| \leq \frac{\pi r C}{r^2} = \frac{\pi C}{r},$$

luego la segunda integral tiende a 0 cuando r tiende a $+\infty$. ■

Ejemplo 1 Vamos a calcular

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4}.$$

Si llamamos $\zeta = e^{i\pi/4}$, las raíces del denominador son $\zeta, \zeta^3, \zeta^5, \zeta^7$, de las cuales tienen parte imaginaria positiva

$$\zeta = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{y} \quad \zeta^3 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Tenemos que $R(z) = (z - \zeta)^{-1}g(z)$, donde $g(\zeta) \neq 0$, luego ζ es un polo simple del integrando R . Por el teorema 10.27 tenemos que

$$\text{Res}(R, \zeta) = \frac{1}{4\zeta^3} = \frac{\zeta^5}{4}, \quad \text{Res}(R, \zeta^3) = \frac{1}{4\zeta^9} = \frac{\zeta^7}{4}.$$

Por consiguiente

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4} = 2\pi i \frac{\zeta^5 + \zeta^7}{4} = 2\pi i \frac{-\sqrt{2}i}{4} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

(Notemos que la función es integrable porque es positiva.) ■

Ejemplo 2 Calculemos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)^3}, \quad \text{para } a > 0.$$

La función $f(z) = 1/(z^2 + a^2)^3$ tiene polos triples en los puntos $\pm ai$. Mediante el teorema 10.26 es fácil calcular

$$\text{Res}(f, ai) = \frac{3}{16a^5 i}.$$

Por lo tanto:

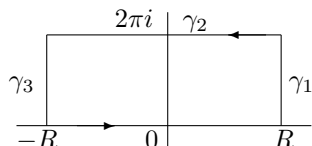
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)^3} = \frac{3\pi}{8a^5}.$$

■

Ejemplo 3 Calculemos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx, \quad 0 < a < 1.$$

Es fácil comprobar que un arco como el del ejemplo anterior no funciona en este caso porque la integral sobre la semicircunferencia no tiende a 0. Consideremos en cambio el arco de la figura.



La idea es que el integrando tiende a 0 cuando x tiende a ∞ (de lo contrario la función no sería integrable), y esto nos permitirá probar que las integrales de la función

$$f(z) = \frac{e^{az}}{1+e^z}$$

sobre los segmentos γ_1 y γ_3 tienden a 0 con R .

La integral sobre γ_2 no se va a anular, pero debido a la periodicidad de la función exponencial resulta que $f(x + 2\pi i) = e^{2a\pi i} f(x)$ y la integral sobre γ_2 es un múltiplo de la integral buscada, con lo que podremos despejarla igualmente. Veamos los detalles.

Ante todo, la función $1 + e^z$ tiene un cero simple en πi (la derivada no se anula), luego $f(z)$ tiene un polo simple en πi . Las singularidades restantes están fuera del arco, luego no nos afectan. Podemos calcular el residuo mediante el teorema 10.27 y queda: $\text{Res}(f, \pi i) = -e^{a\pi i}$. El teorema de los residuos nos da

$$\int_{-R}^R \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx - e^{2a\pi i} \int_{-R}^R \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx + \int_{\gamma_1} f(\zeta) d\zeta + \int_{\gamma_3} f(\zeta) d\zeta = -2\pi i e^{a\pi i}.$$

Por otra parte

$$\left| \int_{\gamma_1} f(\zeta) d\zeta \right| = \left| \int_0^{2\pi} \frac{e^{a(R+it)}}{1 + e^{R+it}} i dt \right| \leq \int_0^{2\pi} \frac{e^{aR}}{|1 + e^{R+it}|} dt.$$

Claramente $|1 + e^{R+it}| \geq |e^{R+it}| - 1 = e^R - 1 > 0$, luego

$$\left| \int_{\gamma_1} f(\zeta) d\zeta \right| \leq \int_0^{2\pi} \frac{e^{aR}}{e^R - 1} dt = \frac{2\pi e^{(a-1)R}}{1 - e^{-R}},$$

y es claro que la última expresión tiende a 0 cuando R tiende a ∞ .

Similarmente se demuestra que la integral sobre γ_3 también tiende a 0. Por lo tanto concluimos que existe

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{1 + e^x} dx = \frac{-2\pi i e^{a\pi i}}{1 - e^{2a\pi i}} = \frac{-2\pi i}{e^{-a\pi i} - e^{a\pi i}} = \frac{2\pi i}{e^{a\pi i} - e^{-a\pi i}} = \frac{\pi}{\operatorname{sen} a\pi}.$$

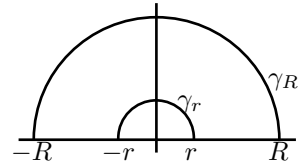
■

El ejemplo que sigue emplea una combinación de las dos ideas precedentes.

Ejemplo 4 Veamos ahora el ejemplo que hemos discutido en la introducción:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\log x}{(x^2 + 1)^2} dx.$$

Consideramos el arco indicado en la figura. Aquí necesitamos una nueva semicircunferencia para evitar la singularidad en 0 debida al logaritmo. Puesto que la función es integrable es razonable conjeturar que la integral sobre γ_r tenderá a 0. Lo mismo le ocurrirá a γ_R , pero, a diferencia de lo que sucedía en el ejemplo 1, aquí no nos interesa la integral sobre el segmento $[-R, -r]$. La solución será reducir la integral sobre este segmento a la integral sobre $[r, R]$, tal y como hemos hecho en el ejemplo 3. Obviamente la función a considerar es



$$f(z) = \frac{\log z}{(z^2 + 1)^2},$$

donde $\log z$ es la rama uniforme del logaritmo con partes imaginarias en el intervalo $]-\pi/2, 3\pi/2[$ (de modo que sobre números reales coincide con el logaritmo real y está definida en un abierto que contiene a nuestro arco).

Sobre el eje negativo tenemos $\log(-x) = \log x + \pi i$, con lo que

$$\int_{[-R, -r]} f(\zeta) d\zeta = - \int_{-R}^{-r} \frac{\log(-x)}{(x^2 + 1)^2} dx = \int_r^R \frac{\log x}{(x^2 + 1)^2} dx + \pi i \int_r^R \frac{dx}{(x^2 + 1)^2}.$$

Con esto hemos eliminado la integral sobre el eje negativo. La última integral que nos aparece podría calcularse como en el ejemplo 1, pero veremos que no será necesario.

La función f tiene dos polos dobles en $\pm i$. El único que nos interesa es i , cuyo residuo se calcula fácilmente con el teorema 10.26 y queda

$$\operatorname{Res}(f, i) = \frac{\pi + 2i}{8}.$$

El teorema de los residuos nos da

$$2 \int_r^R \frac{\log x}{(x^2 + 1)^2} dx + \pi i \int_r^R \frac{dx}{(x^2 + 1)^2} + \int_{\gamma_R} f(\zeta) d\zeta + \int_{\gamma_r} f(\zeta) d\zeta = 2\pi i \frac{\pi + 2i}{8}.$$

Para acotar las integrales sobre las circunferencias observamos que si $|z| = r$ es suficientemente pequeño se cumple

$$\begin{aligned} |\log z| &= |\log r + i \arg z| = \sqrt{(\log r)^2 + (\arg z)^2} \leq \sqrt{(\log r)^2 + \pi^2} \\ &\leq \sqrt{2(\log r)^2} = \sqrt{2} \log(1/r). \end{aligned}$$

Por otra parte la función $1/(z^2 + 1)^2$ es continua en un entorno de 0, luego está acotada, digamos por M . De aquí que

$$\left| \int_{\gamma_r} f(\zeta) d\zeta \right| \leq \pi r M \sqrt{2} \log(1/r),$$

y es claro que la última expresión tiende a 0 cuando r tiende a 0.

Para la otra semicircunferencia usamos que si $|z| = R$ es suficientemente grande entonces $|\log z| \leq \sqrt{2} \log R$, así como que

$$\left| \frac{1}{(z^2 + 1)^2} \right| \leq \frac{1}{(R^2 - 1)^2}.$$

Como consecuencia obtenemos

$$\left| \int_{\gamma_R} f(\zeta) d\zeta \right| \leq \frac{\pi R \sqrt{2} \log R}{(R^2 - 1)^2},$$

que también tiende a 0. Con esto hemos probado que existe

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \lim_{r \rightarrow 0} \left(2 \int_r^R \frac{\log x}{(x^2 + 1)^2} dx + \pi i \int_r^R \frac{dx}{(x^2 + 1)^2} \right) = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi^2}{4} i.$$

Igualando partes reales y partes imaginarias llegamos a que existen

$$\int_0^{+\infty} \frac{\log x}{(x^2 + 1)^2} dx = -\frac{\pi}{4} \quad \text{y} \quad \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^2} = \frac{\pi}{4}.$$

■

En este ejemplo hemos podido reducir la integral en el segmento negativo a la integral en el segmento positivo gracias a que el denominador era par en x (no se alteraba al cambiar x por $-x$). Ahora consideraremos una función muy similar pero en la que esto ya no es cierto, lo que nos obligará a introducir una idea nueva.

Ejemplo 5 Calculemos

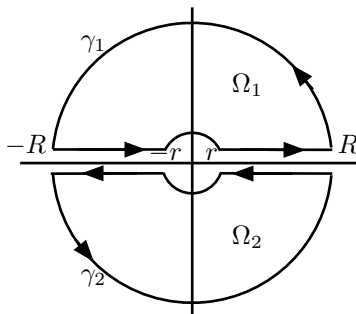
$$\int_0^{+\infty} \frac{\log x}{(x+a)^2 + b^2} dx, \quad \text{para } a, b > 0.$$

Para calcular esta integral consideraremos funciones de la forma

$$f(z) = \frac{\log^2 z}{(z+a)^2 + b^2},$$

donde $\log z$ es una rama uniforme del logaritmo, pero vamos a considerar dos aplicaciones del teorema de los residuos con dos ramas distintas. Recordemos que en la sección [IC 7.2] probamos que, para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, está definida la rama uniforme holomorfa del logaritmo $\log_\alpha : H_\alpha \rightarrow \mathbb{C}$ que a cada número complejo z no nulo que no tenga argumento α le asigna su único logaritmo con parte imaginaria en $]\alpha, \alpha + 2\pi[$.

Fijados radios $0 < r < R$, consideramos los abiertos Ω_1 y Ω_2 descritos en la figura:



Aplicaremos el teorema de los residuos en Ω_1 a la función f definida con la rama uniforme $\log_{-\pi/2}(z)$, mientras que sobre Ω_2 consideraremos la rama uniforme $\log_{\pi/2}(z)$.

La única singularidad de f en Ω_1 es $-a + bi$, y la única singularidad en Ω_2 es $-a - bi$. Por lo tanto, al sumar las igualdades que proporcionan las dos aplicaciones del teorema de los residuos obtenemos que

$$\begin{aligned} & \int_{\gamma_1} \frac{\log_{-\pi/2}^2 \zeta}{(\zeta+a)^2 + b^2} d\zeta + \int_{\gamma_2} \frac{\log_{\pi/2}^2 \zeta}{(\zeta+a)^2 + b^2} d\zeta + \int_{-R}^{-r} \frac{\log_{-\pi/2}^2 x}{(x+a)^2 + b^2} dx \\ & - \int_{-R}^{-r} \frac{\log_{\pi/2}^2 x}{(x+a)^2 + b^2} dx + \int_r^R \frac{\log_{-\pi/2}^2 x}{(x+a)^2 + b^2} dx - \int_r^R \frac{\log_{\pi/2}^2 x}{(x+a)^2 + b^2} dx \\ & = 2\pi i \operatorname{Res}(f_{-\pi/2}, -a + bi) + 2\pi i \operatorname{Res}(f_{\pi/2}, -a - bi). \end{aligned}$$

Ahora bien, sobre el intervalo $[-R, -r]$ ambas ramas del logaritmo tienen parte imaginaria π , luego los dos integrandos sobre dicho segmento son la misma función y las integrales se cancelan. No sucede lo mismo sobre $[r, R]$, donde

$$\log_{-\pi/2}(x) = \log x, \quad \log_{\pi/2}(x) = \log x + 2\pi i.$$

Por lo tanto,

$$\log_{\pi/2}^2(x) = \log_{-\pi/2}^2(x) + 4\pi i \log x - 4\pi^2$$

y las integrales sólo se cancelan parcialmente, con lo que queda:

$$\begin{aligned} & \int_{\gamma_1} \frac{\log_{-\pi/2}^2 \zeta}{(\zeta + a)^2 + b^2} d\zeta + \int_{\gamma_2} \frac{\log_{\pi/2}^2 \zeta}{(\zeta + a)^2 + b^2} d\zeta \\ & - 4\pi i \int_r^R \frac{\log x}{(x + a)^2 + b^2} dx + 4\pi^2 \int_r^R \frac{1}{(x + a)^2 + b^2} dx \\ & = 2\pi i \operatorname{Res}(f_{-\pi/2}, -a + bi) + 2\pi i \operatorname{Res}(f_{\pi/2}, -a - bi). \end{aligned}$$

Aplicando el teorema 10.27 se obtiene fácilmente que

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(f_{-\pi/2}, -a + bi) &= \frac{\log_{-\pi/2}(-a + bi)^2}{2bi}, \\ \operatorname{Res}(f_{\pi/2}, -a + bi) &= -\frac{\log_{\pi/2}(-a - bi)^2}{2bi}. \end{aligned}$$

Concretamente, si llamamos $\theta = \arctan(b/a)$ y $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$ tenemos

$$\log_{-\pi/2}(-a + bi) = \log \rho + (\pi - \theta)i, \quad \log_{\pi/2}(-a - bi) = \log \rho + (\pi + \theta)i.$$

En estos términos queda

$$\begin{aligned} & 2\pi i (\operatorname{Res}(f, -a + bi) + \operatorname{Res}(f, -a - bi)) \\ &= \frac{\pi}{b} (\log(-a + bi) + \log(-a - bi)) (\log(-a + bi) - \log(-a - bi)) \\ &= \frac{\pi}{b} (2 \log \rho + 2\pi i)(-2\theta i) = 4\pi^2 \frac{1}{b} \arctan \frac{b}{a} - 2\pi \frac{\log(a^2 + b^2)}{b} \left(\arctan \frac{b}{a} \right) i. \end{aligned}$$

La prueba de que las integrales sobre las circunferencias tienden a 0 es análoga a la del ejemplo anterior. Omitimos los detalles. Separando como allí la parte real y la parte imaginaria el resultado es

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{\log x}{(x + a)^2 + b^2} dx &= \frac{\log(a^2 + b^2)}{2b} \arctan \frac{b}{a}, \\ \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x + a)^2 + b^2} &= \frac{1}{b} \arctan \frac{b}{a}. \end{aligned}$$

■

Veamos, por último, que el teorema de los residuos puede emplearse también para sumar series infinitas:

Teorema 10.29 *Sea f una función holomorfa en todo el plano complejo excepto en un número finito de puntos a_1, \dots, a_m que no sean enteros. Supongamos además que existe una constante $M > 0$ tal que para z suficientemente grande se cumple $|f(z)| \leq M/|z|^2$. Entonces:*

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n) = -\sum_{j=1}^m \operatorname{Res} \left(\frac{\pi f(z)}{\tan \pi z}, a_j \right)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n f(n) = -\sum_{j=1}^m \operatorname{Res} \left(\frac{\pi f(z)}{\operatorname{sen} \pi z}, a_j \right).$$

DEMOSTRACIÓN: Notemos que la condición $|f(z)| \leq M/z^2$ garantiza que ambas series son absolutamente convergentes. Llamemos

$$g(z) = \frac{\pi f(z)}{\tan z}, \quad h(z) = \frac{\pi f(z)}{\operatorname{sen} \pi z}.$$

Es claro que ambas funciones son holomorfas en todo el plano complejo salvo quizá en $\{a_1, \dots, a_m\} \cup \mathbb{Z}$, donde tienen singularidades aisladas.

Si $n \in \mathbb{Z}$ y $f(n) \neq 0$ entonces n es un polo simple de g y de h y el teorema 10.27 nos da inmediatamente que $\operatorname{Res}(g, n) = f(n)$, $\operatorname{Res}(h, n) = (-1)^n f(n)$.

Si por el contrario $f(n) = 0$, entonces la singularidad es evitable y las igualdades anteriores son ciertas trivialmente.

En estos términos el teorema equivale a que la suma de todos los residuos de las funciones g y h es igual a 0. Demostraremos esto usando el teorema de los residuos.

Para cada número natural k sea C_k la circunferencia de centro 0 y radio $k + 1/2$ (recorrida en sentido positivo). Tomando k suficientemente grande podemos garantizar que C_k contiene a todas las singularidades a_1, \dots, a_m y en particular el arco no pasa por ninguna de las singularidades de g y h .

Podemos aplicar el teorema de los residuos, según el cual

$$\sum_{j=1}^m \operatorname{Res}(g, a_j) + \sum_{n=-k}^k \operatorname{Res}(g, n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_k} g(\zeta) d\zeta,$$

y análogamente para la función h , luego sólo hay que probar que las integrales de g y h sobre los arcos C_k tienden a 0 cuando k tiende a infinito.

Esto será muy sencillo en cuanto hayamos demostrado que las funciones $(\tan \pi z)^{-1}$ y $(\operatorname{sen} \pi z)^{-1}$ están acotadas en el abierto que resulta de eliminar en \mathbb{C} los círculos de centro cada $k \in \mathbb{Z}$ y radio $r < 1/2$. Admitiéndolo, si H es una cota y F es cualquiera de las funciones g o h , teniendo en cuenta la hipótesis sobre la acotación de f , resulta que para z suficientemente grande se cumple $|F(z)| \leq \pi HM/|z|^2$, con lo que

$$\left| \int_{C_k} F(\zeta) d\zeta \right| \leq \frac{2\pi(k+1/2)\pi HM}{(k+1/2)^2} = \frac{2\pi^2 HM}{k+1/2},$$

que ciertamente tiende a 0 con k .

Ahora bien, si $z = x + iy$:

$$\left| \frac{\cos \pi z}{\operatorname{sen} \pi z} \right| = \left| \frac{e^{i\pi z} + e^{-i\pi z}}{e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}} \right| \leq \frac{|e^{i\pi z}| + |e^{-i\pi z}|}{\left| |e^{i\pi z}| - |e^{-i\pi z}| \right|} = \frac{e^{\pi y} + e^{-\pi y}}{|e^{\pi y} - e^{-\pi y}|},$$

e igualmente

$$\left| \frac{1}{\operatorname{sen} \pi z} \right| \leq \frac{2}{|e^{\pi y} - e^{-\pi y}|}.$$

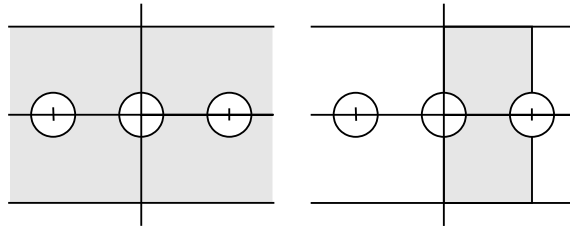
Así pues, en el semiplano $y > 1$ se cumple

$$\left| \frac{\cos \pi z}{\operatorname{sen} \pi z} \right| \leq \frac{1 + e^{-2\pi y}}{1 - e^{-2\pi y}} \leq \frac{1 + e^{-2\pi}}{1 - e^{-2\pi}}, \quad \left| \frac{1}{\operatorname{sen} \pi z} \right| \leq \frac{2e^{-\pi}}{1 - e^{-2\pi}}.$$

Similarmente, en el semiplano $y < -1$ tenemos

$$\left| \frac{\cos \pi z}{\operatorname{sen} \pi z} \right| \leq \frac{1 + e^{2\pi y}}{1 - e^{2\pi y}} \leq \frac{1 + e^{-2\pi}}{1 - e^{-2\pi}}, \quad \left| \frac{1}{\operatorname{sen} \pi z} \right| \leq \frac{2e^{-\pi}}{1 - e^{-2\pi}}.$$

Sólo queda acotar las funciones en la región indicada en la figura de la izquierda:



Ahora bien, las funciones $(\tan \pi z)^{-1}$ y $(\operatorname{sen} \pi z)^{-1}$ tienen periodo 1, luego basta probar que están acotadas en el compacto indicado en la figura de la derecha, donde ciertamente lo están por continuidad. ■

Ejemplo La función $1/(2z + 1)^2$ satisface las hipótesis del teorema anterior, tiene un único polo en $a = -1/2$ y

$$\operatorname{Res} \left(\frac{\pi}{(2z + 1)^2 \tan \pi z}, -\frac{1}{2} \right) = -\frac{\pi^2}{4}.$$

En efecto, se cumple que

$$\lim_{z \rightarrow -1/2} \frac{\cos \pi z}{z + 1/2} = \pi,$$

luego tenemos el desarrollo en serie de Taylor

$$\frac{\pi \cos \pi z}{\operatorname{sen} \pi z} = -\pi^2(z + 1/2) + \dots$$

lo que nos da la serie de Laurent

$$\frac{\pi}{(2z+1)^2 \tan \pi z} = \frac{1}{4(z+1/2)^2} \frac{\pi \cos \pi z}{\operatorname{sen} \pi z} = -\frac{\pi^2/4}{z+1/2} + \dots$$

Por consiguiente,

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{4},$$

de donde claramente

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Por otra parte,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2},$$

y de aquí obtenemos la famosa fórmula de Euler:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{4}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{6}. \quad \blacksquare$$

10.6 Series de Dirichlet

Como aplicación de los resultados que hemos obtenido, vamos a profundizar en el estudio de las series de Dirichlet presentadas en la sección [ITAn 8.4]. Recordemos que una serie de Dirichlet es una serie de la forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^z},$$

donde los coeficientes a_n son números complejos (y $n^z = e^{z \log n}$).

En [ITAn 8.30] vimos que cada serie de Dirichlet tiene asociada una abscisa de convergencia σ_c , de modo que la serie converge en el semiplano de los números complejos z que cumplen $\operatorname{Re} z > \sigma_c$ y diverge en el semiplano $\operatorname{Re} z < \sigma_c$.

Más aún, la prueba del teorema [ITAn 8.29] muestra en realidad que si una serie de Dirichlet converge en un punto z_0 , entonces es uniformemente de Cauchy, luego uniformemente convergente, en todo ángulo de vértice z_0 y lados simétricos respecto de la horizontal. En particular, esto implica claramente que la convergencia es uniforme en todo compacto contenido en el semiplano de convergencia, luego las series de Dirichlet convergen casi uniformemente en su semiplano de convergencia y, por consiguiente, como las sumas parciales son obviamente holomorfas, concluimos que toda serie de Dirichlet define una función holomorfa en su semiplano de convergencia. Esto lo habíamos probado por un

argumento más directo en [ITAn 7.20] (véase la nota posterior). Pero ahora el teorema de Weierstrass nos asegura que la derivada de la función definida por una serie de Dirichlet es

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \log n}{n^z}$$

(en particular, esta serie converge al menos en el mismo semiplano que la serie dada).

Ejercicio: Probar que las series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{-n}}{n^s} \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n^s}$$

tienen abscisa de convergencia $-\infty$ y $+\infty$ respectivamente.

Por otra parte, en [ITAn 8.20] vimos que toda serie de Dirichlet posee una abscisa de convergencia absoluta σ_a , de modo que la serie converge absolutamente en el semiplano $\operatorname{Re} z > \sigma_a$.

En la sección [ITAn 7.4] estudiamos las funciones aritméticas y en [ITAn 8.23] vimos que, si a cada función aritmética f le asignamos la serie de Dirichlet

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^z},$$

entonces el producto de convolución de dos funciones aritméticas con series de Dirichlet con semiplano de convergencia absoluta no vacío se corresponde con la serie de Dirichlet que, en la intersección de ambos semiplanos, converge al producto de las series de las funciones dadas (y esto es trivialmente cierto para la suma de funciones aritméticas y la suma de las series correspondientes).

En términos de funciones aritméticas, la observación precedente sobre la derivada de una serie de Dirichlet puede expresarse así:

Teorema 10.30 *Dada una serie de Dirichlet $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^z}$, su derivada en su semiplano de convergencia $\sigma > \sigma_c$ viene dada por la serie de Dirichlet $-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f'(n)}{n^z}$, donde $f'(n) = f(n) \log n$.*

La serie de Dirichlet más famosa es la función dseta de Riemann, asociada a la función aritmética constante $c_1(n) = 1$:

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}.$$

En [ITAn 4.9] probamos que converge en el semiplano $\operatorname{Re} z > 1$, pero aquí presentamos un argumento alternativo más simple. Sólo hay que observar que, para $s > 1$,

$$\int_n^{n+1} \frac{dx}{x^s} < \frac{1}{n^s} < \int_{n-1}^n \frac{dx}{x^s},$$

para $n \geq 1$ en la desigualdad de la izquierda y $n \geq 2$ en la desigualdad de la derecha. De aquí

$$\int_1^{N+1} \frac{dx}{x^s} < \sum_{n=1}^N \frac{1}{x^s} < 1 + \int_1^N \frac{dx}{x^s},$$

para todo número natural $N > 1$. Integrando y tomando límites en N queda

$$\frac{1}{s-1} \leq \zeta(s) \leq 1 + \frac{1}{s-1}, \quad \text{para } s > 1.$$

Más aún, multiplicando por $s-1$ y tomando límites en s obtenemos

$$\lim_{s \rightarrow 1^+} (s-1)\zeta(s) = 1. \quad (10.2)$$

Más adelante veremos que la función $\zeta(s)$ se prolonga analíticamente a una función meromorfa en \mathbb{C} con un único polo en $z = 1$, que es simple y con residuo 1, pero de momento probamos algo más débil con un argumento mucho más elemental:

Teorema 10.31 *La función $\zeta(s)$ de Riemann puede prolongarse a una función holomorfa en el semiplano $\operatorname{Re} z > 0$ salvo en $z = 1$, donde tiene un polo simple con residuo 1.*

DEMOSTRACIÓN: Consideremos la serie de Dirichlet

$$\eta(z) = 1 - \frac{1}{2^z} + \frac{1}{3^z} - \frac{1}{4^z} + \frac{1}{5^z} - \frac{1}{6^z} + \dots$$

Como las sumas parciales de sus coeficientes están acotadas, el teorema [ITAn 8.31] nos da que η converge en el semiplano $\operatorname{Re} z > 0$. Es obvio que tanto $\zeta(z)$ como $\eta(z)$ convergen absolutamente cuando $\operatorname{Re} z > 1$, luego podemos manipular las series y concluir que

$$\eta(z) = \left(1 - \frac{1}{2^{z-1}}\right) \zeta(z).$$

Por lo tanto la función

$$\eta(z) \left(1 - \frac{1}{2^{z-1}}\right)^{-1}$$

es una extensión meromorfa de $\zeta(s)$ al semiplano $\operatorname{Re} z > 0$. Los polos de esta extensión se encuentran a lo sumo donde el denominador se anula, esto es, en los puntos donde $2^{z-1} = 1$. Es claro que estos puntos son los de la forma

$$1 + \frac{2n\pi i}{\log 2},$$

donde n es un entero. Por otra parte podemos considerar la función

$$g(z) = 1 + \frac{1}{2^z} - \frac{2}{3^z} + \frac{1}{4^z} + \frac{1}{5^z} - \frac{2}{6^z} + \dots$$

y concluir igualmente que

$$g(z) \left(1 - \frac{1}{3^{z-1}}\right)^{-1}$$

es una extensión meromorfa de $\zeta(z)$. Por el principio de prolongación analítica ambas extensiones coinciden, luego un polo de la extensión ha de ser simultáneamente de la forma

$$1 + \frac{2n\pi i}{\log 2} = 1 + \frac{2m\pi i}{\log 3},$$

pero esto implica $2^m = 3^n$, luego $m = n = 0$ y a lo sumo hay un polo en $z = 1$. Pero tenemos que

$$\lim_{z \rightarrow 1} (z-1)\zeta(z) = 1.$$

En principio hemos visto que existe el límite cuando z tiende a 1 por la derecha, pero dado que la función $(z-1)\zeta(z)$ es meromorfa en 1, la singularidad ha de ser necesariamente evitable, luego existe el límite global. Además, como $z-1$ cancela la singularidad, ésta es ciertamente un polo simple con residuo 1. ■

La función $\eta(z)$ que hemos usado en la prueba del teorema anterior muestra que la abscisa de convergencia de una serie de Dirichlet no tiene por qué coincidir con su abscisa de convergencia absoluta, pues dicha serie converge en el semiplano $\operatorname{Re} z > 0$, pero sólo converge absolutamente en el semiplano $\operatorname{Re} z > 1$ (ya que al tomar módulos obtenemos la función $\zeta(\operatorname{Re} z)$). No obstante, las dos abscisas no pueden diferir mucho:

Teorema 10.32 *La abscisa de convergencia y la abscisa de convergencia absoluta de una serie de Dirichlet satisfacen la desigualdad $\sigma_a - \sigma_c \leq 1$, entendiéndose que una es $\pm\infty$ si y sólo si lo es la otra.*

DEMOSTRACIÓN: Basta ver que si una serie de Dirichlet $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ converge en $z_0 = x_0 + iy_0$, entonces converge absolutamente en el semiplano $\operatorname{Re} z > x_0 + 1$. Ahora bien, la sucesión a_n/n^{z_0} tiende a 0, luego está acotada. Sea $C > 0$ tal que $|a_n/n^{z_0}| \leq C$ para todo n . Entonces

$$\left| \frac{a_n}{n^z} \right| = \left| \frac{a_n}{n^{z_0}} \right| \left| \frac{1}{n^{z-z_0}} \right| \leq C \frac{1}{n^{x-x_0}},$$

luego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{a_n}{n^z} \right| \leq C \zeta(x-x_0). \quad \blacksquare$$

Aunque aquí no lo vamos a necesitar, para estudiar las series de Dirichlet que aparecen en la teoría algebraica de números es útil esta ligera generalización del teorema [ITAn 8.31]:

Teorema 10.33 Sea $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^z}$ una serie de Dirichlet tal que

$$\left| \sum_{n=1}^k a_n \right| \leq Ck^{x_0},$$

para ciertas constantes $C > 0$ y $x_0 \geq 0$. Entonces $\sigma_c \leq x_0$.

DEMOSTRACIÓN: Llamemos $A_k = \sum_{n=1}^k a_n$. Entonces

$$\begin{aligned} \sum_{k=N}^M \frac{a_k}{k^z} &= \sum_{k=N}^M \frac{A_k - A_{k-1}}{k^z} = \sum_{k=N}^M \frac{A_k}{k^z} - \sum_{k=N-1}^{M-1} \frac{A_k}{(k+1)^z} \\ &= -\frac{A_{N-1}}{N^z} + \sum_{k=N}^{M-1} \left(\frac{A_k}{k^z} - \frac{A_k}{(k+1)^z} \right) + \frac{A_M}{M^z}. \end{aligned}$$

Por consiguiente

$$\left| \sum_{k=N}^M \frac{a_k}{k^z} \right| \leq C \left(\frac{1}{M^{x-x_0}} + \frac{1}{N^{x-x_0}} + \sum_{k=N}^{M-1} k^{x_0} \left(\frac{1}{k^x} - \frac{1}{(k+1)^x} \right) \right).$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned} \sum_{k=N}^{M-1} k^{x_0} \left(\frac{1}{k^x} - \frac{1}{(k+1)^x} \right) &= \sum_{k=N}^{M-1} x \int_k^{k+1} k^{x_0} \frac{dx}{x^{x+1}} \leq \sum_{k=N}^{M-1} x \int_k^{k+1} \frac{dx}{x^{x-x_0+1}} \\ &= x \int_N^M \frac{dx}{x^{x-x_0+1}} = \frac{x}{x-x_0} \left(\frac{1}{N^{x-x_0}} - \frac{1}{M^{x-x_0}} \right) \leq \frac{x}{(x-x_0)N^{x-x_0}}. \end{aligned}$$

Es claro entonces que, para cada $x > x_0$, la serie del enunciado es de Cauchy, luego converge, y esto implica que $\sigma_c \leq x_0$. ■

De hecho, de aquí a su vez deducimos fácilmente una versión ligeramente más general: (véase la nota tras [TA1 4.8]):

Teorema 10.34 Sea $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^z}$ una serie de Dirichlet tal que

$$\left| \sum_{n=1}^k a_n - k\rho \right| \leq Ck^{x_0},$$

para ciertas constantes $\rho \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $C > 0$ y $0 \leq x_0 < 1$. Entonces $\sigma_c = 1$ y la función definida por la serie admite una prolongación analítica al semiplano $\operatorname{Re} z > x_0$ salvo en $z = 1$, donde tiene un polo simple con residuo ρ .

DEMOSTRACIÓN: Basta considerar la serie de Dirichlet $f(z) - \rho\zeta(z)$. Sus coeficientes satisfacen las condiciones del teorema anterior, luego converge en el semiplano $\operatorname{Re} z > x_0$. Como la serie de $\zeta(z)$ converge en $\operatorname{Re} z > 1$, lo mismo le ocurre a la serie dada. Como $\zeta(z)$ se extiende a una función analítica en $\operatorname{Re} z > x_0$ con un polo simple en $z = 1$, lo mismo vale para la serie dada. También es claro que el residuo es ρ . ■

La función dseta de Hurwitz Vamos a probar que la función dseta se prolonga analíticamente a una función meromorfa en el plano complejo. Para ello trabajaremos con una función (o, más exactamente, una familia de funciones) que nos permitirá aplicar los resultados tanto a la función dseta como a las funciones L de Dirichlet definidas en [ITAn 8.33]. No es exactamente una serie de Dirichlet, pero la diferencia es muy pequeña:

Definición 10.35 Para cada número real $0 < a \leq 1$ definimos la *función dseta de Hurwitz* como

$$\zeta(z, a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+a)^z}.$$

Si $\delta > 0$, $n \geq 1$ y $x = \operatorname{Re} z \geq 1 + \delta$ se cumple claramente

$$\left| \frac{1}{(n+a)^z} \right| \leq \frac{1}{(n+a)^x} \leq \frac{1}{n^x} \leq \frac{1}{n^{1+\delta}}.$$

El teorema de mayoración de Weierstrass implica que la serie $\zeta(x, a)$ converge uniformemente en cada semiplano $\operatorname{Re} z \geq 1 + \delta$, luego define una función holomorfa en el semiplano $\operatorname{Re} z > 1$.

La función dseta de Riemann es el caso particular $\zeta(z) = \zeta(z, 1)$. Vamos a probar que la función $\zeta(z, a)$ admite una prolongación analítica a todo el plano complejo. Para conseguir dicha prolongación partiremos de una expresión integral para la función dseta.

Teorema 10.36 *En el semiplano $\operatorname{Re} z > 1$ se cumple*

$$\Pi(z-1)\zeta(z, a) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{z-1}e^{-ax}}{1-e^{-x}} dx.$$

DEMOSTRACIÓN: Veamos primero la igualdad cuando $z = s$ es real. Entonces, haciendo $x = (n+a)t$ en la expresión integral de la función factorial, tenemos

$$\Pi(s-1) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{s-1} dx = (n+a)^s \int_0^{+\infty} e^{-(n+a)t} t^{s-1} dt,$$

luego

$$\frac{\Pi(s-1)}{(n+a)^s} = \int_0^{+\infty} e^{-nt} e^{-at} t^{s-1} dt$$

y, sumando en n , queda

$$\Pi(s-1)\zeta(s, a) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{+\infty} e^{-nt} e^{-at} t^{s-1} dt.$$

Como los integrandos son positivos, el teorema de convergencia monótona nos permite intercambiar la suma con la integral. Observemos que la serie de los integrandos es geométrica y suma

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nt} e^{-at} t^{s-1} = \frac{e^{-at} t^{s-1}}{1-e^{-t}}.$$

Al hacer el cambio queda la fórmula buscada. Para probar la igualdad cuando s no es real basta probar que la integral es una función holomorfa, pues entonces el principio de prolongación analítica nos da que ambos miembros son iguales. El teorema [IC 7.10] nos asegura que las funciones

$$f_n(z) = \int_{1/n}^n \frac{x^{z-1} e^{-ax}}{1 - e^{-x}} dx$$

son holomorfas en el semiplano $\operatorname{Re} z > 1$. Por el teorema de Weierstrass, basta probar que convergen casi uniformemente al segundo miembro de la igualdad del enunciado. De hecho, vamos a probar que convergen uniformemente en cualquier banda $1 + \delta \leq \operatorname{Re} z \leq c$, y basta tener en cuenta que todo compacto contenido en el semiplano $\operatorname{Re} z > 1$ está contenido, de hecho, en una de estas bandas. Para ello observamos que

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^{+\infty} \frac{x^{z-1} e^{-ax}}{1 - e^{-x}} dx - \int_{1/n}^n \frac{x^{z-1} e^{-ax}}{1 - e^{-x}} dx \right| = \\ & \left| \int_0^{1/n} \frac{x^{z-1} e^{-ax}}{1 - e^{-x}} dx + \int_n^{+\infty} \frac{x^{z-1} e^{-ax}}{1 - e^{-x}} dx \right| \leq \\ & \int_0^{1/n} \left| \frac{x^{z-1} e^{-ax}}{1 - e^{-x}} \right| dx + \int_n^{+\infty} \left| \frac{x^{z-1} e^{-ax}}{1 - e^{-x}} \right| dx = \\ & \int_0^{1/n} \frac{x^{\operatorname{Re} z - 1} e^{-ax}}{1 - e^{-x}} dx + \int_n^{+\infty} \frac{x^{\operatorname{Re} z - 1} e^{-ax}}{1 - e^{-x}} dx. \end{aligned}$$

Si $0 < x \leq 1$ entonces $x^{\operatorname{Re} z - 1} \leq x^\delta$, luego

$$\frac{x^{\operatorname{Re} z - 1} e^{-ax}}{1 - e^{-x}} \leq \frac{x^\delta e^{(1-a)x}}{e^x - 1} \leq e^{1-a} x^{\delta-1}.$$

(Primero hemos multiplicado numerador y denominador por e^x y luego hemos usado que $e^x - 1 \geq x$.) La última expresión es claramente integrable en $]0, 1[$.

Si $1 \leq x$ entonces $x^{\operatorname{Re} z - 1} \leq x^{c-1}$, luego

$$\frac{x^{\operatorname{Re} z - 1} e^{-ax}}{1 - e^{-x}} \leq \frac{x^{c-1} e^{-ax}}{1 - e^{-x}},$$

y el último término es integrable en $]0, +\infty[$, pues la integral es $\Pi(c-1)\zeta(c, a)$. Por lo tanto,

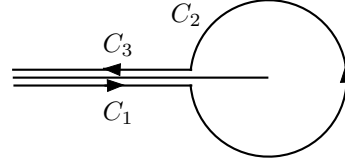
$$\begin{aligned} & \left| \int_0^{+\infty} \frac{x^{z-1} e^{-ax}}{1 - e^{-x}} dx - \int_{1/n}^n \frac{x^{z-1} e^{-ax}}{1 - e^{-x}} dx \right| \leq \\ & e^{1-a} \int_0^{1/n} x^{\delta-1} dx + \int_n^{+\infty} \frac{x^{c-1} e^{-ax}}{1 - e^{-x}} dx. \end{aligned}$$

La última expresión tiende a 0 cuando n tiende a ∞ , lo que implica la convergencia uniforme. ■

La función factorial tiene una prolongación analítica (meromorfa) a todo el plano complejo. Ahora probaremos que a la integral le ocurre lo mismo, de donde obtendremos la prolongación analítica de la función dseta.

Teorema 10.37 Sea $0 < c < 2\pi$ y sea C la unión de las curvas C_1, C_2, C_3 dadas por

$$\begin{aligned} -C_1 &\equiv z = re^{-\pi i}, & r \in [c, +\infty[, \\ C_2 &\equiv z = ce^{i\theta}, & \theta \in [-\pi, \pi], \\ C_3 &\equiv z = re^{\pi i}, & r \in [c, +\infty[. \end{aligned}$$



Sea $0 < a \leq 1$. Entonces la función

$$I(z, a) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\xi^z e^{a\xi}}{1 - e^\xi} d\xi$$

es entera, no depende de la elección de c y, en el semiplano $\text{Re } z > 1$, se cumple

$$\zeta(z, a) = \Pi(-z)I(z - 1, a).$$

Hay que entender que $\xi^z = e^{z \log \xi}$ se calcula con el logaritmo de parte imaginaria $-\pi$ sobre C_1 , con parte imaginaria en $]-\pi, \pi[$ sobre C_2 y con parte imaginaria π sobre C_3 .

DEMOSTRACIÓN: Observemos en primer lugar que la integral sobre C_2 es una función entera en virtud de [IC 7.10]. No es inmediato, porque el integrando no es una función holomorfa definida en un abierto que contenga a C , pero la integral puede descomponerse en suma de dos integrales sobre dos semicírculos. Sobre el semicírculo superior el integrando está definido para todo ξ del plano complejo menos el semieje imaginario negativo, donde ξ^z está definida con la rama uniforme del logaritmo con parte imaginaria entre $-\pi/2$ y $3\pi/2$, y sobre el semicírculo inferior está definido para todo ξ del plano complejo menos el semieje imaginario positivo, donde ξ^z está definida con la rama uniforme del logaritmo con parte imaginaria entre $-3\pi/2$ y $\pi/2$. Por lo tanto, ambos sumandos definen funciones enteras.

Para el caso de C_1 y C_2 tenemos que las funciones

$$f_n(z) = \int_{-n}^c \frac{\xi^z e^{a\xi}}{1 - e^\xi} d\xi$$

son enteras por el teorema [IC 7.10] y basta probar que convergen casi uniformemente a la integral sobre C_1 o C_2 (según la rama del logaritmo con la que calculemos ξ^z). Basta probar que la convergencia es uniforme en cada bola cerrada $|z| \leq M$. Para ello usamos que si $\xi = -r$, entonces

$$|\xi^z| = |e^{z(\log r \pm i\pi)}| = r^{\text{Re } z} e^{\pm \pi \text{Im } z} \leq r^{\text{Re } z} e^{\pi |\text{Im } z|} \leq r^M e^{\pi M}.$$

Por lo tanto,

$$\left| \frac{\xi^z e^{a\xi}}{1 - e^\xi} \right| \leq e^{\pi M} \frac{r^M e^{-ar}}{1 - e^{-r}}$$

y la función es integrable en $]0, +\infty[$, por el teorema anterior (pues la integral vale $\Pi(M)\zeta(M + 1, a)$). Por lo tanto,

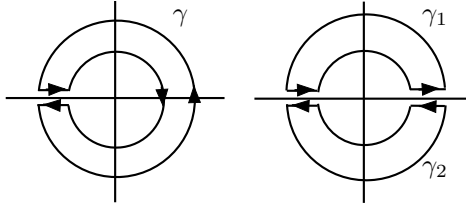
$$\left| \int_{C_i} \frac{\xi^z e^{a\xi}}{1 - e^\xi} d\xi - \int_{-n}^c \frac{\xi^z e^{a\xi}}{1 - e^\xi} d\xi \right| = \left| \int_{-\infty}^{-n} \frac{\xi^z e^{a\xi}}{1 - e^\xi} d\xi \right| \leq e^{\pi M} \int_n^{+\infty} \frac{r^M e^{-ar}}{1 - e^{-r}} dr,$$

y la última expresión tiende a 0 cuando n tiende a ∞ , lo que implica la convergencia uniforme.

Veamos ahora que $I(z, a)$ no depende de c . Para ello observamos que la diferencia entre las funciones calculadas con dos valores $c_1 < c_2$ es

$$I_{c_2}(z, a) - I_{c_1}(z, a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\xi^z e^{a\xi}}{1 - e^\xi} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{\xi^z e^{a\xi}}{1 - e^\xi} d\xi + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{\xi^z e^{a\xi}}{1 - e^\xi} d\xi,$$

donde γ , γ_1 y γ_2 son los arcos cerrados que muestra la figura:



Ahora bien, al igual que cuando hemos observado que la integral sobre C_2 es entera, ahora vemos que las integrales sobre γ_1 y γ_2 son integrales sobre arcos cerrados de dos funciones holomorfas (distintas) definidas sobre abiertos estrellados, luego son nulas por el teorema de Cauchy [ITAn 7.15].

Veamos finalmente la igualdad del enunciado. Tenemos que

$$2\pi i I(s - 1, a) = - \int_c^{+\infty} \frac{x^{z-1} e^{-ax}}{1 - e^{-x}} dx + \int_{|\xi|=c} \frac{\xi^{z-1} e^{a\xi}}{1 - e^\xi} d\xi + \int_c^{+\infty} \frac{x^{z-1} e^{-ax}}{1 - e^{-x}} dx,$$

donde la primera y la tercera integral no son iguales, pues en la primera

$$x^{z-1} = e^{(z-1)(\log x - \pi i)} = e^{(z-1) \log x} e^{-\pi i z},$$

y en la tercera

$$x^{z-1} = e^{(z-1)(\log x + \pi i)} = e^{(z-1) \log x} e^{\pi i z}.$$

Por lo tanto, si a partir de aquí convenimos en que $x^z = e^{z \log x}$, tenemos que

$$2\pi i I(z - 1, a) = (-e^{-\pi i z} + e^{\pi i z}) \int_c^{+\infty} \frac{x^{z-1} e^{-ax}}{1 - e^{-x}} dx + \int_{|\xi|=c} \frac{\xi^{z-1} e^{a\xi}}{1 - e^\xi} d\xi,$$

luego

$$\pi I(z - 1, a) = \operatorname{sen} \pi z \int_c^{+\infty} \frac{x^{z-1} e^{-ax}}{1 - e^{-x}} dx + \int_{|\xi|=c} \frac{\xi^{z-1} e^{a\xi}}{1 - e^\xi} d\xi.$$

Veamos que, cuando $\operatorname{Re} z > 1$, la última integral tiende a 0 cuando c tiende a 0. Para ello observamos que la función $g(\xi) = e^{a\xi}/(1 - e^\xi)$ es holomorfa en el disco $|\xi| < 2\pi$ salvo por un polo simple en $\xi = 0$, luego $\xi g(\xi)$ está acotada, pongamos por A . Entonces,

$$\left| \int_{|\xi|=c} \frac{\xi^{z-1} e^{a\xi}}{1 - e^\xi} d\xi \right| = \left| \int_{-\pi}^{\pi} e^{(z-1)(\log c + i\theta)} g(ce^{i\theta}) ce^{i\theta} i d\theta \right| \leq 2\pi A c^{\operatorname{Re} z - 1} e^{\pi |\operatorname{Im} z|},$$

que ciertamente tiende a 0 cuando c tiende a 0. Por consiguiente, tomando límites y teniendo en cuenta el teorema anterior, llegamos a que

$$\pi I(z - 1, a) = (\operatorname{sen} \pi z) \Pi(z - 1) \zeta(z, a).$$

En principio para $\operatorname{Re} z > 1$, pero por el principio de prolongación analítica, vale para todo z . Por último, la ecuación funcional (véase [ITAn 8.16])

$$z \Pi(z - 1) \Pi(-z) = \Pi(z) \Pi(-z) = \frac{\pi z}{\operatorname{sen} \pi z} \tag{10.3}$$

nos da $\zeta(z, a) = \Pi(-z) I(z - 1, a)$. ■

Definición 10.38 En lo sucesivo llamaremos *función dseta de Hurwitz* a la prolongación analítica de la función definida en 10.35 determinada por la ecuación

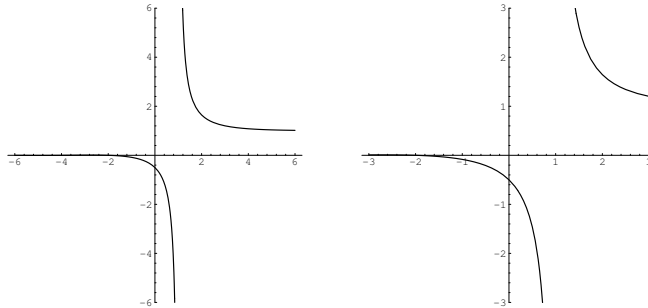
$$\zeta(z, a) = \Pi(-z) I(z - 1, a), \quad \text{para todo } z \in \mathbb{C}.$$

Como la función $I(z, a)$ es entera, concluimos que $\zeta(z, a)$ es una función meromorfa con polos a lo sumo en los puntos donde $\Pi(-z)$ tiene polos, es decir, en los números naturales no nulos. Por otra parte la representación en serie dada en la definición 10.35 muestra que $\zeta(z, a)$ es holomorfa en el semiplano $\operatorname{Re} z > 1$, luego a lo sumo tiene un polo en el punto $z = 1$. Incidentalmente esto prueba que $I(n, a) = 0$ para $n = 1, 2, 3, \dots$

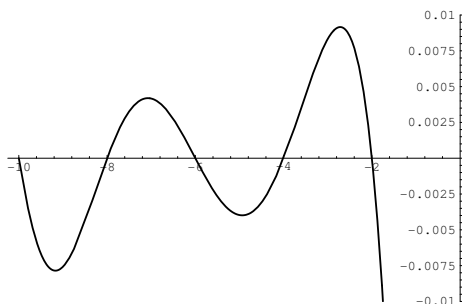
En particular llamaremos *función dseta de Riemann* a $\zeta(z) = \zeta(z, 1)$, que extiende a la que hemos considerado hasta ahora. En la sección [ITAn 8.4] hemos probado que

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x - 1) \zeta(x) = 1,$$

luego ahora podemos concluir que la función dseta de Riemann es holomorfa en todo el plano complejo excepto un polo simple en $z = 1$ cuyo residuo es 1. Éste es su aspecto sobre el eje real:



Estas gráficas contienen mucha información que todavía no sabemos demostrar. En primer lugar suponen que la función ζ es real sobre el eje real.² Más concretamente, la segunda gráfica permite conjeturar que $\zeta(0) = -1/2$. Respecto al comportamiento a partir de -2 las figuras ya no tienen la precisión suficiente para concluir nada. A continuación vemos una ampliación de esa zona, en la que podemos observar que la función ζ se anula en los números pares negativos. Probaremos estos hechos a partir de algunos resultados generales sobre la función de Hurwitz.



El valor de la función ζ sobre cada número entero n puede determinarse con facilidad observando que, en la integral que define la función I , el número ξ^n no depende de la rama del logaritmo con que se calcule la potencia, pues siempre es el valor algebraico usual. Esto hace que la integral sobre C_1 sea exactamente la misma que sobre C_3 salvo que tienen sentidos opuestos, luego ambas se cancelan y queda

$$I(n, a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=c} \frac{\xi^n e^{a\xi}}{1 - e^\xi} d\xi = \text{Res} \left(\frac{\xi^n e^{a\xi}}{1 - e^\xi}, 0 \right).$$

Si ahora tenemos en cuenta la relación [ITAn 6.20]

$$\frac{ze^{xz}}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x)}{n!} z^n$$

que satisfacen los polinomios de Bernoulli, es claro que

$$I(n, a) = \text{Res} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{-B_k(a)}{k!} z^{k+n-1}, 0 \right)$$

De aquí obtenemos de nuevo que $I(n, a) = 0$ si $n \geq 1$, pues es en tal caso la función que aparece es holomorfa en 0, y también es claro que si $n \geq 0$ entonces

$$I(-n, a) = -\frac{B_n(a)}{n!}$$

²Esto es fácil de probar: en general, si $f(z)$ es una función holomorfa, también lo es $\overline{f(\bar{z})}$ (por ejemplo, porque cumple las ecuaciones de Cauchy-Riemann), pero $\overline{\zeta(\bar{x})} = \zeta(x)$ si $x > 1$, luego por el principio de prolongación analítica se da la igualdad en todo \mathbb{C} , lo que implica que $\overline{\zeta(x)} = \zeta(x)$ para todo x real distinto de 1.

Teniendo en cuenta que $B_0(x) = 1$ obtenemos en particular que $I(0, a) = -1$.

Esto nos permite calcular el residuo en 1 de la función de Hurwitz. En efecto,

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(\zeta(z, a), 1) &= \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)\zeta(z, a) = \lim_{z \rightarrow 1} -(z + 1)\Pi(-z)I(z - 1, a) \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} -\Pi(-z + 1)I(z - 1, a) = -\Pi(0)I(0, a) = 1. \end{aligned}$$

También hemos probado que

$$\zeta(-n, a) = \Pi(n)I(-n - 1, a) = -n! \frac{B_{n+1}(a)}{(n + 1)!} = -\frac{B_{n+1}(a)}{n + 1}.$$

Resumimos todos estos hechos en un teorema:

Teorema 10.39 *Para todo número real $0 < a \leq 1$, la función dseta de Hurwitz $\zeta(s, a)$ es holomorfa en todo el plano complejo excepto en $s = 1$, donde tiene un polo simple con residuo 1. Además para todo número natural n se cumple $\zeta(-n, a) = -B_{n+1}(a)/(n + 1)$, donde $B_{n+1}(x)$ es el polinomio de Bernoulli.*

En particular, la relación $B_n(x + 1) - B_n(x) = nx^{n-1}$ (para $n \geq 1$) nos da:

$$\zeta(-n) = -\frac{B_{n+1}(1)}{n + 1} = -\frac{B_{n+1}}{n + 1},$$

lo que prueba por fin que $\zeta(-2n) = 0$ para $n = 1, 2, \dots$, ya que $B_{2n+1} = 0$. También deducimos que $\zeta(0) = -B_1(1) = -1/2$, como mostraban las gráficas.

La fórmula de Hurwitz Demostramos ahora un resultado que nos permitirá probar que tanto la función dseta de Riemann como las funciones L satisfacen ecuaciones funcionales que aportan mucha información. Comenzamos con un resultado técnico auxiliar.

Teorema 10.40 *Sea $\Omega(r)$ el abierto que resulta de eliminar del plano complejo los círculos de centro cada punto $2n\pi i$, para $n \in \mathbb{Z}$ y radio $r < \pi$. Sea a un número real tal que $0 \leq a \leq 1$. Entonces la función $g(z) = e^{az}/(1 - e^z)$ está acotada en $\Omega(r)$.*

DEMOSTRACIÓN: Designemos por $z = x + iy$ las partes real e imaginaria de z . Sea

$$Q(r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |x| \leq 1, |y| \leq \pi, |z| \geq r\}.$$

Claramente $Q(r)$ es un compacto en el que $g(z)$ es continua, luego está acotada. Como $|g(z)| = |g(z + 2\pi i)|$, tenemos que g está acotada en toda la banda agujereada

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |x| \leq 1, |z - 2n\pi i| \geq r \text{ para } n \in \mathbb{Z}\}.$$

En consecuencia basta probar que la función g está acotada fuera de esta banda, es decir, si $|x| \geq 1$. En general tenemos

$$|g(z)| = \left| \frac{e^{az}}{1 - e^z} \right| = \frac{e^{ax}}{|1 - e^z|} \leq \frac{e^{ax}}{|1 - e^x|}.$$

Si $x \geq 1$ entonces $|1 - e^x| = e^x - 1$ y $e^{ax} \leq e^x$, luego

$$|g(z)| \leq \frac{e^x}{e^x - 1} = \frac{1}{1 - e^{-x}} \leq \frac{1}{1 - e^{-1}} = \frac{e}{e - 1}.$$

Si $x \leq -1$ entonces $|1 - e^x| = 1 - e^x$, luego

$$|g(z)| \leq \frac{e^{ax}}{1 - e^x} \leq \frac{1}{1 - e^{-1}} = \frac{e}{e - 1}.$$

Así pues, si $|x| \geq 1$ se cumple $|g(z)| \leq e/(e - 1)$. ■

En la fórmula de Hurwitz aparece la siguiente serie de Dirichlet:

Definición 10.41 Para cada $x \in \mathbb{R}$ definimos

$$F(x, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2\pi i n x}}{n^z}.$$

Como $|e^{2\pi i n x}| = 1$, la serie está mayorada por la función $\zeta(z)$, luego converge absolutamente en el semiplano $\operatorname{Re} z > 1$.

Claramente $F(x, z)$ es periódica en x , de periodo 1. Si x es entero entonces $F(x, z) = \zeta(z)$, mientras que si x no es entero entonces la sucesión $e^{2\pi i n x}$ es geométrica y sus sumas parciales están acotadas:

$$\left| \frac{e^{2\pi i n x} - 1}{e^{2\pi i x} - 1} \right| \leq \frac{2}{|e^{2\pi i x} - 1|},$$

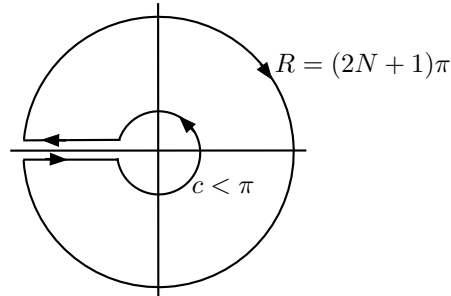
luego el teorema [ITAn 8.31] nos da que $F(x, s)$ converge condicionalmente en el semiplano $\operatorname{Re} z > 0$.

Teorema 10.42 (Fórmula de Hurwitz) Si $0 < a \leq 1$ y $\operatorname{Re} z > 1$, entonces

$$\zeta(1 - z, a) = \frac{\Gamma(z - 1)}{(2\pi)^z} (e^{-\pi i z/2} F(a, z) + e^{\pi i z/2} F(-a, z)).$$

Si $a \neq 1$ la fórmula es válida en el semiplano $\operatorname{Re} z > 0$.

DEMOSTRACIÓN: Para cada número natural N llamamos $C(N)$ al arco descrito en la figura:



Definimos

$$I_N(z, a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(N)} \frac{\xi^z e^{a\xi}}{1 - e^\xi} d\xi,$$

donde hay que entender que el logaritmo que define a ξ^z toma parte imaginaria π sobre el tramo horizontal superior, pasa de π a $-\pi$ por la circunferencia exterior, vale $-\pi$ en el tramo horizontal inferior y pasa de $-\pi$ a π por la circunferencia interior.

Veamos que cuando $\operatorname{Re} z < -1$ la integral sobre la circunferencia exterior tiende a 0 con N . En efecto, sobre ella tenemos $\xi = R e^{i\theta}$, con $-\pi \leq \theta \leq \pi$. Entonces

$$|\xi^z| = R^\sigma e^{-\operatorname{Im} z \theta} \leq R^{\operatorname{Re} z} e^{\pi |\operatorname{Im} z|}.$$

La circunferencia exterior, para cualquier N , está contenida en un conjunto $\Omega(r)$ de los considerados en el teorema 10.40, para cualquier r fijo, con lo que podemos acotar el integrando: $|\xi^z g(\xi)| \leq A R^\sigma e^{\pi |\operatorname{Im} z|}$ y la integral está acotada por $2\pi A R^{\operatorname{Re} z + 1} e^{\pi |\operatorname{Im} z|}$, que tiende a 0 con N si $\operatorname{Re} z < -1$.

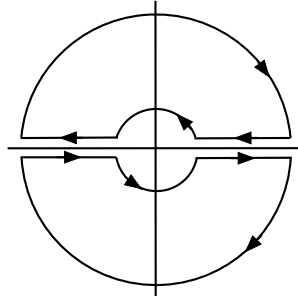
Así pues, teniendo en cuenta la definición de $I(z, a)$ concluimos que

$$I(z, a) = \lim_N I_N(z, a), \quad \text{para } \operatorname{Re} z < -1.$$

Equivalentemente:

$$I(-z, a) = \lim_N I_N(-z, a), \quad \text{para } \operatorname{Re} z > 1.$$

Ahora calcularemos $I_N(-z, a)$ mediante el teorema de los residuos. Éste no es aplicable directamente, pero esto se arregla partiendo $C(N)$ en dos arcos:



Ahora, en los dos segmentos horizontales de la derecha, la exponencial ξ^z se calcula con el logaritmo cuya parte imaginaria es 0, por lo que se trata de la misma rama uniforme en ambos, y como los segmentos se recorren en sentidos opuestos, resulta que la integral sobre $C(N)$ es la suma de las integrales sobre estos dos arcos, ya que las integrales sobre los dos segmentos “nuevos” se cancelan. En cada uno de los dos arcos, el integrando es la restricción de una función holomorfa, en la parte superior la que resulta de calcular ξ^z con la rama uniforme del logaritmo con parte imaginaria en $]-\pi/2, 3\pi/2[$ y en la parte inferior con la rama con parte imaginaria en $]-3\pi/2, \pi/2[$.

Los polos del integrando están en los puntos $2n\pi i$, para $n = -N, \dots, N$ excepto $n = 0$ (en particular, ninguno está sobre los dos segmentos que hemos añadido al partir $C(N)$). El teorema 10.27 nos permite calcular

$$\operatorname{Res} \left(\frac{\xi^{-z} e^{a\xi}}{1 - e^\xi}, 2n\pi i \right) = -\frac{e^{2n\pi i a}}{(2n\pi i)^z},$$

con lo que

$$I_N(-z, a) = \sum_{n=1}^N \left(\frac{e^{2n\pi i a}}{(2n\pi i)^z} + \frac{e^{-2n\pi i a}}{(-2n\pi i)^z} \right).$$

Ahora hay que prestar atención a las exponenciales:

$$i^{-z} = e^{-\pi i z/2}, \quad (-i)^{-z} = e^{\pi i z/2}.$$

Así

$$I_N(-z, a) = \frac{1}{(2\pi)^z} \left(e^{-\pi i z/2} \sum_{n=1}^N \frac{e^{2n\pi i a}}{n^z} + e^{\pi i z/2} \sum_{n=1}^N \frac{e^{-2n\pi i a}}{n^z} \right),$$

y al tomar límites resulta

$$I(-z, a) = \frac{1}{(2\pi)^z} (e^{-\pi i z/2} F(a, z) + e^{\pi i z/2} F(-a, z)).$$

Para concluir el teorema basta aplicar la definición de la función dseta (extendida):

$$\zeta(1-z, a) = \Pi(z-1)I(-z, a). \quad \blacksquare$$

La ecuación funcional de la función dseta Ya estamos en condiciones de probar un resultado fundamental sobre la función dseta:

Teorema 10.43 (Ecuación funcional de la función dseta) *Para todo número complejo z se cumple*

$$\zeta(z) = \chi(z)\zeta(1-z),$$

donde

$$\chi(z) = 2\Pi(-z)(2\pi)^{z-1} \operatorname{sen}(\pi z/2) = \pi(2\pi)^{z-1} \frac{1}{\cos(\pi z/2)\Pi(z-1)}.$$

DEMOSTRACIÓN: Al hacer $a = 1$ en la fórmula de Hurwitz queda

$$\zeta(1-z) = \frac{\Pi(z-1)}{(2\pi)^z} (e^{-\pi i z/2} \zeta(z) + e^{\pi i z/2} \zeta(z)) = 2 \frac{\Pi(z-1)}{(2\pi)^z} \cos(\pi z/2) \zeta(z).$$

En principio tenemos esta igualdad en el semiplano $\operatorname{Re} z > 1$, pero por prolongación analítica es válida en todo el plano. Al cambiar $1-z$ por z queda la ecuación funcional con la primera expresión que hemos dado para $\chi(z)$. La segunda se sigue de (10.3). \blacksquare

De la ecuación funcional se deducen muchas propiedades de la función ζ . Por ejemplo, si hacemos $z = -(2k - 1)$ y aplicamos el teorema 10.39 queda

$$-B_{2k}/2k = 2(2k - 1)!(2\pi)^{-2k}(-1)^k \zeta(2k),$$

lo cual nos proporciona una demostración alternativa de la fórmula

$$\zeta(2k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = \frac{(-1)^{k+1} 2^{2k-1} \pi^{2k} B_{2k}}{(2k)!}.$$

También podemos obtener mucha información sobre los ceros de la función ζ , aunque en lugar de verlo ahora vamos a obtener una ecuación equivalente mucho más simple. En primer lugar sustituimos $\Pi(-z)$ por la expresión que nos da la fórmula de Legendre [IC 3.33], en la forma equivalente

$$\sqrt{\pi} \Pi(z) = 2^z \Pi\left(\frac{z}{2}\right) \Pi\left(\frac{z-1}{2}\right). \quad (10.4)$$

El resultado es

$$\sqrt{\pi} \zeta(z) = 2^z 2^{-z} \Pi\left(-\frac{z}{2}\right) \Pi\left(-\frac{z+1}{2}\right) (2\pi)^{z-1} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi z}{2}\right) \zeta(1-z).$$

Seguidamente sustituimos $\operatorname{sen}(\pi z/2)$ mediante la fórmula (10.3):

$$\Pi\left(\frac{z}{2}\right) \Pi\left(-\frac{z}{2}\right) = \frac{\pi z/2}{\operatorname{sen}(\pi z/2)}.$$

Obtenemos

$$\sqrt{\pi} \zeta(z) \Pi\left(\frac{z}{2}\right) = 2^z 2^{-z} \Pi\left(-\frac{z+1}{2}\right) (2\pi)^{z-1} \frac{\pi z}{2} \zeta(1-z),$$

o equivalentemente

$$\zeta(z) \frac{2}{z} \Pi\left(\frac{z}{2}\right) = \frac{2}{1-z} \Pi\left(\frac{1-z}{2}\right) \pi^{z-1/2} \zeta(1-z).$$

Reordenando los términos llegamos a

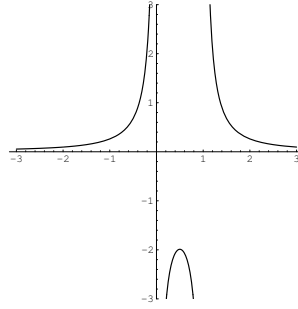
$$\pi^{-z/2} \frac{1}{z} \Pi\left(\frac{z}{2}\right) \zeta(z) = \pi^{-(1-z)/2} \frac{1}{1-z} \Pi\left(\frac{1-z}{2} - 1\right) \zeta(1-z).$$

Esta ecuación tiene la particularidad de que su miembro derecho se obtiene del izquierdo cambiando z por $1-z$. En otras palabras, si definimos

$$\Phi(z) = \pi^{-z/2} \frac{1}{z} \Pi\left(\frac{z}{2}\right) \zeta(z)$$

la ecuación funcional se convierte en $\Phi(z) = \Phi(1-z)$.

Riemann consideró que la ecuación simétrica $\Phi(z) = \Phi(1 - z)$ es la forma más natural de la ecuación funcional.³ Como primera consecuencia observamos que $\Phi(z)$ es claramente holomorfa en el semiplano $\operatorname{Re} z > 0$ salvo un polo simple en $z = 1$, luego la ecuación funcional nos da que también es holomorfa en el semiplano $\operatorname{Re} z < 1$ salvo un polo simple en $z = 0$. Así pues, Φ es una función meromorfa con dos únicos polos. Éste es su aspecto sobre el eje real:

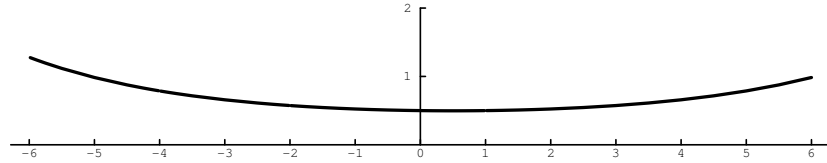


La ecuación funcional se refleja en el hecho de que la gráfica es simétrica respecto de la recta $\operatorname{Re} z = 1/2$.

Riemann todavía mejoró la ecuación funcional eliminando los polos de la función Φ . Para ello observamos que la expresión $z(z - 1)$ no se altera al cambiar z por $1 - z$, luego al multiplicar los dos términos de la ecuación por este factor obtenemos $\xi(z) = \xi(1 - z)$, donde $\xi(z)$ es la función entera dada por

$$\xi(z) = z(z - 1)\Phi(z) = \pi^{-z/2}\Pi\left(\frac{z}{2}\right) (z - 1)\zeta(z).$$

La gráfica de la función ξ sobre el eje real es la siguiente:



Tal y como muestra la figura, vemos que

$$\xi(0) = \xi(1) = \pi^{-1/2}\Pi(1/2) = 1/2.$$

³Y no sabía cuánta razón tenía! Sabemos que la función dseta admite un desarrollo en producto infinito con un factor $(1 - 1/p)^{-1}$ para cada primo p . El lector familiarizado con la teoría algebraica de números debe pensar en $\pi^{-z/2}(1/z)\Pi(z/2)$ como un factor añadido a dicho producto infinito en correspondencia con el único primo arquimediano de \mathbb{Z} . En general, si K es un cuerpo numérico con u primos arquimedianos reales y v complejos, su función dseta se extiende también a todo el plano complejo y verifica una ecuación funcional de la forma $\Phi_K(z) = \Phi_K(1 - z)$, donde

$$\Phi_K(z) = \sqrt{|\Delta|}^z \left(\pi^{-z/2}(1/z)\Pi(z/2) \right)^u \left((2\pi)^{-s}(1/z)\Pi(z/2) \right)^v \zeta_K(z),$$

donde Δ es el discriminante de K .

Observemos que la función $\pi^{-z/2}\Pi(z/2)$ no se anula en ningún punto y tiene polos simples en los números enteros pares negativos. Como la función $\zeta(z)$ es holomorfa y no se anula en el semiplano $\operatorname{Re} z > 1$, lo mismo le sucede a la función $\xi(z)$, y por la ecuación funcional también es holomorfa y no nula en el semiplano $\operatorname{Re} z < 0$. Pero esto requiere que, en dicho semiplano, la función $\zeta(z)$ no se anule más que en los números enteros pares negativos, donde ya habíamos visto que se anula como consecuencia de 10.39, y los ceros tienen que ser simples, para que cancelen los polos de $\Pi(z/2)$ sin anular el producto.

Así pues, descontando estos ceros triviales, la función $\xi(z)$ sólo puede tener más ceros en la *banda crítica* $0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1$. Como en ella $\pi^{-z/2}\Pi(z/2)$ es holomorfa y no se anula, concluimos que $\xi(z)$ se anula en los mismos puntos que $\zeta(z)$ o, dicho de otro modo, que los ceros de $\xi(z)$ coinciden con los ceros no triviales de $\zeta(z)$.

Tal y como señalábamos en la introducción, no es evidente en absoluto, pero puede probarse que existen infinitos ceros no triviales sobre la recta $\operatorname{Re} z = 1/2$, y la famosa *hipótesis de Riemann* afirma que todos los ceros no triviales están sobre dicha recta.

La ecuación funcional de las funciones L En [ITAn 8.33] definimos las funciones L de Dirichlet:

$$L(z, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^z},$$

donde $\chi: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ es un carácter de Dirichlet [ITAn 7.19]. Si hemos trabajado con la función de Hurwitz en lugar de hacerlo directamente con la función $\xi(z)$ de Riemann ha sido porque las funciones L también se expresan en términos de la función de Hurwitz. En efecto, si χ es un carácter módulo m entonces

$$\begin{aligned} L(z, \chi) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^z} = \sum_{r=1}^m \sum_{q=0}^{\infty} \frac{\chi(r)}{(qm+r)^z} = \frac{1}{m^z} \sum_{r=1}^m \chi(r) \sum_{q=0}^{\infty} \left(q + \frac{r}{m}\right)^{-z} \\ &= \frac{1}{m^z} \sum_{r=1}^m \chi(r) \zeta(z, r/m). \end{aligned} \quad (10.5)$$

En principio esta fórmula vale en el semiplano $\operatorname{Re} z > 1$, pero dado que el miembro derecho está definido de hecho sobre todo el plano complejo (salvo quizá en $z = 1$) deducimos que las funciones L admiten una prolongación analítica a todo el plano complejo con a lo sumo un polo simple en $z = 1$. Sin embargo, en [ITAn 8.33] hemos visto que, si el carácter χ no es principal, la función $L(z, \chi)$ converge en el semiplano $\operatorname{Re} z > 0$, luego la singularidad en $z = 1$ es evitable y $L(z, \chi)$ es, de hecho, una función entera.

Esto se deduce también del teorema 10.39. En efecto, si χ es un carácter módulo m es claro que el residuo de $L(z, \chi)$ en 1 vale

$$\lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \frac{1}{m^z} \sum_{r=1}^m \chi(r) \zeta(z, r/m) = \frac{1}{m} \sum_{r=1}^m \chi(r),$$

y por las relaciones de ortogonalidad [ITAn 7.22] esta expresión es 0 si $\chi \neq 1$ (luego $L(s, \chi)$ es entera) y $\phi(m)/m$ si $\chi = 1$.

Teorema 10.44 (Ecuación funcional para funciones L) *Sea χ un carácter primitivo módulo m . Definimos*

$$\epsilon(\chi) = \frac{\chi(-1)G(\chi)}{\sqrt{m}}, \quad a = \begin{cases} 0 & \text{si } \chi(-1) = 1 \\ 1 & \text{si } \chi(-1) = -1 \end{cases}$$

Sea

$$\Phi(z, \chi) = \left(\frac{m}{\pi}\right)^{z/2} \frac{1}{z+a} \Pi\left(\frac{z+a}{2}\right) L(z, \chi).$$

Entonces, para todo $z \in \mathbb{C}$ se cumple $\Phi(z, \chi) = \epsilon(\chi)\Phi(1-z, \bar{\chi})$.

DEMOSTRACIÓN: Para aplicar la fórmula de Hurwitz observamos en primer lugar la relación siguiente entre las funciones L y la función $F(a, z)$. Aplicamos la definición de F y el teorema anterior (en el semiplano $\text{Re } z > 1$):

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^m \bar{\chi}(r) F(r/m, z) &= \sum_{r=1}^m \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\chi}(r) \frac{e^{2\pi i nr/m}}{n^z} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} \sum_{r=1}^m \bar{\chi}(r) e^{2\pi i nr/m} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{G_n(\bar{\chi})}{n^z} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^z} G(\bar{\chi}) = G(\bar{\chi}) L(z, \chi). \end{aligned} \quad (10.6)$$

Por otra parte hacemos $a = r/m$ en la fórmula de Hurwitz, multiplicamos por $\chi(r)$ y sumamos:

$$\begin{aligned} &\sum_{r=1}^m \chi(r) \zeta\left(1-z, \frac{r}{m}\right) \\ &= \frac{\Pi(z-1)}{(2\pi)^z} \left(e^{-\pi iz/2} \sum_{r=1}^m \chi(r) F\left(\frac{r}{m}, z\right) + e^{\pi iz/2} \sum_{r=1}^m \chi(r) F\left(-\frac{r}{m}, z\right) \right). \end{aligned}$$

Usando que $F(a, z)$ es periódica en a con periodo 1, vemos que

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^m \chi(r) F\left(-\frac{r}{m}, z\right) &= \chi(-1) \sum_{r=1}^m \chi(-r) F\left(-\frac{r}{m}, z\right) \\ &= \chi(-1) \sum_{r=1}^m \chi(m-r) F\left(\frac{m-r}{m}, z\right) = \chi(-1) \sum_{r=1}^m \chi(r) F\left(\frac{r}{m}, z\right). \end{aligned}$$

Con esto la fórmula precedente se convierte en

$$\begin{aligned} &\sum_{r=1}^m \chi(r) \zeta\left(1-z, \frac{r}{m}\right) \\ &= \frac{\Pi(z-1)}{(2\pi)^s} \left(e^{-\pi iz/2} \sum_{r=1}^m \chi(r) F\left(\frac{r}{m}, z\right) + \chi(-1) e^{\pi iz/2} \sum_{r=1}^m \chi(r) F\left(\frac{r}{m}, z\right) \right). \end{aligned}$$

Aplicamos (10.6):

$$\sum_{r=1}^m \chi(r) \zeta\left(1-z, \frac{r}{m}\right) = \frac{\Pi(z-1)}{(2\pi)^z} (e^{-\pi iz/2} + \chi(-1)e^{\pi iz/2}) G(\chi) L(z, \bar{\chi}).$$

Multiplicamos por m^{z-1} y aplicamos (10.5):

$$L(1-z, \chi) = \frac{m^{z-1} \Pi(z-1)}{(2\pi)^z} (e^{-\pi iz/2} + \chi(-1)e^{\pi iz/2}) G(\chi) L(z, \bar{\chi}).$$

Esto ya es una forma de la ecuación funcional de las funciones L . En principio estábamos trabajando en el semiplano $\operatorname{Re} z > 1$, pero por prolongación analítica la ecuación vale en todo el plano complejo. Ahora la transformaremos de modo similar a como hemos hecho con la ecuación de la función ζ . En primer lugar aplicamos la fórmula de Legendre (10.4), pero cambiando z por $z-1$. Así queda

$$\begin{aligned} L(1-z, \chi) &= m^{z-1} \pi^{-z-1/2} \frac{1}{2} \Pi\left(\frac{z-1}{2}\right) \Pi\left(\frac{z}{2}-1\right) \\ &\quad (e^{-\pi iz/2} + \chi(-1)e^{\pi iz/2}) G(\chi) L(z, \bar{\chi}). \end{aligned}$$

Multiplicamos y dividimos por $m^{1/2}$ para que aparezca la constante $\epsilon(\chi)$:

$$\begin{aligned} L(1-z, \chi) &= m^{z-1/2} \pi^{-z-1/2} \frac{1}{2} \Pi\left(\frac{z-1}{2}\right) \Pi\left(\frac{z}{2}-1\right) \\ &\quad (e^{-\pi iz/2} + \chi(-1)e^{\pi iz/2}) \chi(-1) \epsilon(\chi) L(z, \bar{\chi}). \end{aligned}$$

Si $\chi(-1) = 1$ entonces

$$e^{-\pi iz/2} + \chi(-1)e^{\pi iz/2} = 2 \cos(\pi z/2) = 2 \operatorname{sen}(\pi(1-z)/2).$$

Si por el contrario $\chi(-1) = -1$ entonces

$$e^{-\pi iz/2} + \chi(-1)e^{\pi iz/2} = 2 \operatorname{sen}(-\psi/2).$$

Al aplicar la ecuación funcional

$$\Pi(z) \Pi(-z) = \frac{\pi z}{\operatorname{sen} \pi z},$$

nuestra ecuación se transforma, según el valor de $\chi(-1)$, en

$$\pi \left(\frac{1-z}{2}\right) L(1-z, \chi) = m^{z-1/2} \pi^{-z+1/2} \frac{1-z}{2} \Pi\left(\frac{z}{2}-1\right) \epsilon(\chi) L(z, \bar{\chi})$$

o bien

$$\begin{aligned} \pi \left(-\frac{z}{2}\right) \Pi\left(\frac{z}{2}\right) L(1-z, \chi) &= -m^{z-1/2} \pi^{-z+1/2} \left(-\frac{z}{2}\right) \Pi\left(\frac{z-1}{2}\right) \\ &\quad \Pi\left(\frac{z}{2}-1\right) \epsilon(\chi) L(z, \bar{\chi}). \end{aligned}$$

En el primer caso multiplicamos y dividimos por $z/2$ el segundo miembro, con lo que resulta

$$\left(\frac{m}{\pi}\right)^{(1-z)/2} \frac{1}{1-z} \Pi\left(\frac{1-z}{2}\right) L(1-z, \chi) = \epsilon(\chi) \left(\frac{m}{\pi}\right)^{z/2} \frac{1}{s} \Pi\left(\frac{z}{2}\right) L(z, \bar{\chi}).$$

En el segundo caso multiplicamos y dividimos por $1-z/2$ el primer miembro y por $(z+1)/2$ el segundo:

$$\begin{aligned} \left(\frac{m}{\pi}\right)^{(1-z)/2} \frac{1}{(1-z)+1} \Pi\left(\frac{(1-z)+1}{2}\right) L(1-z, \chi) \\ = \epsilon(\chi) \left(\frac{m}{\pi}\right)^{z/2} \frac{1}{z+1} \Pi\left(\frac{z+1}{2}\right) L(z, \bar{\chi}). \end{aligned}$$

■

Observemos que si 1 es el carácter principal módulo 1 entonces $\Phi(z, 1)$ es la función Φ construida a partir de la función zeta de Riemann. En cualquier otro caso es claro que $\Phi(z, \chi)$ es una función entera (es holomorfa en el semiplano $\operatorname{Re} z > 0$ y por la ecuación funcional también lo es en el semiplano $\operatorname{Re} z < 1$). Además no se anula en el semiplano $\operatorname{Re} z \geq 1$ y por lo tanto tampoco en el semiplano $\operatorname{Re} z \leq 0$, es decir, sus ceros están en la banda crítica. Si $\chi(-1) = 1$ entonces el factor $\Pi(z/2)/s$ tiene polos simples en los puntos $0, -2, -4, \dots$, luego $L(z, \chi)$ tiene ceros simples en dichos puntos. Si $\chi(-1) = -1$ entonces los ceros triviales están en $-1, -3, -5, \dots$

Apéndice A

Sólidos rígidos

A la hora de estudiar el movimiento de los cuerpos, hay muchas ocasiones en los que podemos identificar cada objeto con una partícula puntual, es decir, con una masa concentrada en un punto del espacio. Sin embargo, cuando los cuerpos presentan movimientos de rotación sobre sí mismos que son relevantes en el análisis, entonces la representación en términos de partículas puntuales es insuficiente, ya que no podemos atribuir a un punto ninguna clase de rotación. En este apéndice expondremos la teoría básica para estudiar el movimiento de sólidos no puntuales bajo la hipótesis adicional de que se trata de cuerpos rígidos, es decir, que no se deforman en ningún momento o —más realistamente— que las deformaciones que puedan experimentar son despreciables. Empezamos con algunas consideraciones geométricas que vamos a necesitar.

A.1 Sistemas de referencia

En todo momento consideraremos un espacio euclídeo tridimensional E sobre \mathbb{R} , de forma que cada punto queda determinado por tres coordenadas sólo tras haber fijado un sistema de referencia (que siempre tomaremos ortonormal) $(O, \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$. El punto P de coordenadas (x, y, z) es

$$P = O + x\vec{u}_1 + y\vec{u}_2 + z\vec{u}_3.$$

El vector $\vec{r} = x\vec{u}_1 + y\vec{u}_2 + z\vec{u}_3$ recibe el nombre de *vector de posición* del punto P respecto del sistema de referencia fijado. No obstante, el vector $\vec{r} = \overrightarrow{OP} \in \vec{E}$ depende únicamente del origen O , pues la base ortonormal $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ sólo es necesaria para determinar las coordenadas de \vec{r} . Usaremos la palabra “observador” como sinónimo de sistema de referencia.

Cuando trabajemos con un único sistema de referencia identificaremos cada vector \vec{r} con su terna de coordenadas, de modo que los vectores $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ podremos representarlos como $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$.

Consideremos ahora dos observadores $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ y $(O', \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ que dependen del tiempo (es decir, que tenemos un sistema de referencia ortonormal distinto en cada instante).

Un mismo punto P del espacio tendrá unas coordenadas (x, y, z) respecto del primer observador y otras (x', y', z') respecto del segundo, pero ambas determinan el mismo punto en el sentido de que

$$O + x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3 = O' + x'\vec{u}_1 + y'\vec{u}_2 + z'\vec{u}_3,$$

lo que equivale a que

$$\vec{r} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3 = \overrightarrow{OO'} + x'\vec{u}_1 + y'\vec{u}_2 + z'\vec{u}_3 = \overrightarrow{OO'} + \vec{r}'.$$

Si las coordenadas de $\overrightarrow{OO'}$ respecto de O son (a_1, a_2, a_3) , entonces la relación entre las coordenadas de P respecto de ambos observadores es de la forma

$$(x, y, z) = (a_1, a_2, a_3) + (x', y', z')B,$$

donde B es la matriz de cambio de base, que tiene por filas las coordenadas (dependientes del tiempo) de los vectores \vec{u}_i en la base $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$.

Si $\vec{v} \in \vec{E}$ es un vector que depende del tiempo (es decir, que se trata de una función $\vec{v}(t)$), podrá expresarse como

$$\vec{v} = v_1\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2 + v_3\vec{e}_3 = v'_1\vec{u}_1 + v'_2\vec{u}_2 + v'_3\vec{u}_3,$$

es decir, que \vec{v} tendrá unas coordenadas distintas (en cada instante) para cada observador. En este contexto, la *derivada* de un vector \vec{v} respecto del tiempo se define como el vector cuyas coordenadas son las derivadas de las funciones coordenadas de \vec{v} , y hay que tener presente que el resultado depende del observador, es decir que los vectores

$$\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_O = \frac{dv_1}{dt}\vec{e}_1 + \frac{dv_2}{dt}\vec{e}_2 + \frac{dv_3}{dt}\vec{e}_3, \quad \left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_{O'} = \frac{dv'_1}{dt}\vec{u}_1 + \frac{dv'_2}{dt}\vec{u}_2 + \frac{dv'_3}{dt}\vec{u}_3$$

no tienen por qué coincidir, y es lógico que así sea. Por ejemplo, si dos observadores tienen el mismo origen O pero uno está rotando respecto del otro, y el vector \vec{v} representa la posición de un objeto para ambos (si el origen es común, el vector de posición es el mismo para ambos), entonces la derivada de \vec{v} es la velocidad con la que cada observador ve moverse al objeto, y el objeto puede estar en reposo respecto de un observador y en movimiento respecto de otro, por lo que la derivada de \vec{v} puede ser el vector nulo para un observador y un vector no nulo para el otro.

Ahora vamos a recordar (de [IC 4.5]) la relación entre las derivadas de un mismo vector respecto de dos observadores diferentes. Por simplificar la notación haremos siempre referencia a los vectores de \vec{E} a través de sus coordenadas en el primer sistema de referencia, de modo que, por ejemplo $\vec{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\vec{e}_2 = (0, 1, 0)$, $\vec{e}_3 = (0, 0, 1)$. En estos términos, $\vec{v} = \sum_i v'_i \vec{u}_i$, por lo que

$$\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_O = \sum_i \frac{dv'_i}{dt} \vec{u}_i + \sum_i v'_i \frac{d\vec{u}_i}{dt} = \left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_{O'} + \sum_i v'_i \frac{d\vec{u}_i}{dt}.$$

Como la base $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ es ortonormal, se cumple que $\vec{u}_i \cdot \vec{u}_i = 1$, luego (considerando siempre derivadas respecto de O), tenemos que

$$\vec{u}_i \cdot \frac{d\vec{u}_i}{dt} = 0.$$

Igualmente, como $\vec{u}_i \cdot \vec{u}_j = 0$ (para $i \neq j$), derivando obtenemos

$$\vec{u}_i \cdot \frac{d\vec{u}_j}{dt} + \vec{u}_j \cdot \frac{d\vec{u}_i}{dt} = 0,$$

luego podemos definir

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{d\vec{u}_2}{dt} \cdot \vec{u}_3 = -\frac{d\vec{u}_3}{dt} \cdot \vec{u}_2, \\ \omega_2 &= \frac{d\vec{u}_3}{dt} \cdot \vec{u}_1 = -\frac{d\vec{u}_1}{dt} \cdot \vec{u}_3, \\ \omega_3 &= \frac{d\vec{u}_1}{dt} \cdot \vec{u}_2 = -\frac{d\vec{u}_2}{dt} \cdot \vec{u}_1. \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

Llamamos $\vec{\omega}$ al vector que para O tiene coordenadas $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$. Ahora usamos que, como la base \vec{u}_i es ortonormal, todo vector $\vec{w} \in \vec{E}$ se expresa en la forma

$$\vec{w} = \sum_i (\vec{w} \cdot \vec{u}_i) \vec{u}_i.$$

En particular,

$$\sum_i v'_i \frac{d\vec{u}_i}{dt} = \sum_{i,j} v'_i \left(\frac{d\vec{u}_i}{dt} \cdot \vec{u}_j \right) \vec{u}_j =$$

$$(-v'_2 \omega_3 + v'_3 \omega_2) \vec{u}_1 + (v'_1 \omega_3 - v'_3 \omega_1) \vec{u}_2 + (-v'_1 \omega_2 + v'_2 \omega_1) \vec{u}_3 = \vec{\omega} \times \vec{v}.$$

Así pues:

$$\left(\frac{d\vec{v}}{dt} \right)_O = \left(\frac{d\vec{v}}{dt} \right)_{O'} + \vec{\omega} \times \vec{v}. \quad (\text{A.2})$$

Para interpretar el término de la derecha, que representa la diferencia entre las derivadas de \vec{v} calculadas en cada sistema de referencia, vamos a aplicar esta fórmula al vector de posición \vec{r} de una partícula que está en reposo respecto de O' . Concretamente, si la partícula se encuentra en el punto P (que depende de t), llamamos $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$ al vector de posición de la partícula respecto de O , mientras que el vector de posición respecto de O' es $\vec{r}' = \overrightarrow{O'P}$, y la relación entre ambos es que

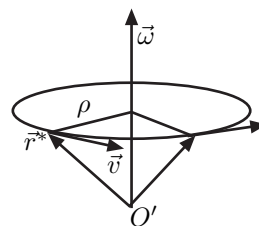
$$\vec{r} = \overrightarrow{OO'} + \vec{r}'.$$

Derivamos esta ecuación llamando \vec{v} a la derivada de \vec{r} respecto del observador O , es decir, la velocidad a la que O ve moverse la partícula, mientras que la derivada de \vec{r}' respecto de O' es \vec{v}' , con lo que nos queda

$$\vec{v} = \vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \times \vec{r}', \quad (\text{A.3})$$

donde $\vec{v}_{O'}$ es la velocidad a la que O ve moverse el origen del sistema de referencia O' .

Esto significa que las partículas que están en reposo respecto de O' se mueven (respecto de O) con una velocidad \vec{v} que es la suma de dos velocidades: una es la velocidad del origen del sistema de referencia O' y la otra es perpendicular a $\vec{\omega}$ y a \vec{r}^* , y tiene el sentido determinado por el producto vectorial (el que determina la regla de la mano derecha si usamos los convenios usuales). Además, si llamamos $\omega = |\vec{\omega}|$, tenemos que $|\vec{\omega} \times \vec{r}^*| = \omega\rho$, donde ρ es la distancia de la partícula a la recta que pasa por O' con vector director $\vec{\omega}$.



En otras palabras, todas las partículas en reposo respecto de O' , descontando el movimiento necesario para seguir a O' en su movimiento, están girando en cada instante alrededor del eje determinado por O' y $\vec{\omega}$ con una velocidad angular¹ común ω (sin perjuicio de que $\vec{\omega}$ pueda variar con el tiempo, de modo que el eje de giro y la velocidad angular vayan variando). ■

A.2 Sistemas de partículas

Como primera aproximación al estudio de un objeto no puntual podemos considerarlo como un *sistema de partículas* formado por un gran número n de partículas puntuales situadas en posiciones \vec{r}_i (dependientes del tiempo) con masas constantes m_i .

Para $i \neq j$, llamaremos \vec{F}_{ij} a la fuerza total que —de un modo u otro— la partícula i -ésima ejerce sobre la j -ésima. Nuestra intención es estudiar el comportamiento global del sistema sin entrar a analizar la naturaleza de estas fuerzas, a las que llamaremos *fuerzas internas*. Si las partículas representan átomos o moléculas, entonces el estudio de las fuerzas internas que se dan entre ellas pertenece al dominio de la química y de la mecánica cuántica. En cualquier caso, las fuerzas internas han de cumplir la tercera ley de Newton, que nos garantiza que $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$. Por otra parte, llamaremos $\vec{F}_i = \vec{F}_{ii}$ a la resultante de todas las fuerzas externas ejercidas sobre la partícula i -ésima (es decir, sin contar las fuerzas \vec{F}_{ji}), y las llamaremos *fuerzas externas* del sistema. De este modo, la fuerza total que actúa sobre la partícula i -ésima es

$$\vec{F} = \sum_{j=1}^n \vec{F}_{ji}.$$

Diremos que un sistema de partículas es un *sólido rígido* si sus fuerzas internas \vec{F}_{ij} son en cada momento las necesarias para que la distancia $\|\vec{r}_i - \vec{r}_j\|$ entre dos cualesquiera de sus partículas permanezca constante. Más aún, supondremos² que las fuerzas internas son *radiales*, es decir, que \vec{F}_{ij} tiene siempre la dirección de la recta que une \vec{r}_i con \vec{r}_j .

¹Notemos que el sentido de giro es antihorario si miramos la partícula con $\vec{\omega}$ apuntando hacia nosotros.

²Notemos que todas estas hipótesis no son más que un artificio para tratar matemáticamente la dinámica de un objeto sólido bajo las hipótesis más simples posibles. En realidad, las moléculas que forman un sólido se mueven (y su movimiento determina la temperatura

El centro de masas Vamos a ver que un sistema de partículas se puede tratar hasta cierto punto como si fuera una única partícula. Para ello definimos la *masa total* del sistema como la suma de las masas de sus componentes:

$$M = \sum_{i=1}^n m_i,$$

y el *centro de masas* del sistema como la posición media de sus partículas ponderadas por sus masas, es decir:

$$\vec{R} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i.$$

Esto significa que si tenemos dos partículas, pero una tiene el doble de masa que la otra, entonces la primera cuenta como si fueran dos partículas muy próximas, y el centro de masas del sistema estará al doble de distancia de la segunda que de la primera. En particular, observemos que en el centro de masas de un sistema de partículas no tiene por qué haber ninguna partícula.

Conviene observar que el centro de masas de un sistema de partículas es independiente del observador, en un sentido que hay que entender correctamente. Sin duda, las coordenadas del centro de masas serán distintas para cada observador, pero éstas corresponderán al mismo punto del espacio. En efecto, si la partícula i -ésima se encuentra en el punto P_i en un instante dado, el centro de masas está en el punto

$$O + \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{OP_i}.$$

Si ahora consideramos otro observador O' , los vectores de posición de la partícula i -ésima están relacionados en la forma $\overrightarrow{OP_i} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P_i}$, por lo que el centro de masas es

$$\begin{aligned} O + \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{OP_i} &= O + \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{OO'} + \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{O'P_i} = \\ &= O + \overrightarrow{OO'} + \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{O'P_i} = O' + \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{O'P_i}, \end{aligned}$$

y la última expresión es la posición del centro de masas respecto de O' , luego ambos observadores hacen referencia al mismo punto del espacio al determinar el centro de masas del sistema, aunque cada uno lo haga con sus propias coordenadas.

La velocidad del centro de masas (para un observador dado) es

$$\vec{V} = \frac{d\vec{R}}{dt} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i,$$

que puede considerarse como la “velocidad media” del sistema.

del sólido) y vibran cada vez que reciben un golpe (lo que se manifiesta en forma de sonido), etc. La definición que estamos dando de sólido rígido es una simplificación que elimina todos estos aspectos postulando las fuerzas internas más simples que garantizan que el aspecto macroscópico del sólido es el que tiene cualquier sólido de aspecto “rígido”, como una piedra, en el que no se aprecia ningún movimiento entre sus partes componentes.

Similarmente, la aceleración del centro de masas es

$$\vec{A} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \vec{a}_i.$$

Momento El *momento lineal* o *cantidad de movimiento* de una partícula se define como el vector $\vec{p} = m\vec{v}$, donde m es su masa y \vec{v} su velocidad. A su vez, el momento de un sistema de partículas se define como

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i.$$

Es inmediato que tenemos la relación $\vec{P} = M\vec{V}$, que es un primer ejemplo de cómo un sistema de partículas verifica en promedio relaciones análogas a las de una única partícula. Ahora observamos que

$$M\vec{A} = \frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{a}_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \vec{F}_{ij} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \vec{F},$$

donde hemos cancelado los pares de fuerzas $\vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ji} = 0$. Así pues, fuerzas interiores no afectan en nada a la cantidad de movimiento del sistema. En particular, si sobre un sistema no actúan fuerzas externas, su cantidad de movimiento permanece constante.

Podemos parafrasear así lo que hemos obtenido:

El centro de masas de un sistema de partículas se mueve como se movería una partícula puntual sobre la que actuaran todas las fuerzas externas que actúan sobre las partículas del sistema.

Esto hace que al estudiar el movimiento de un sistema de partículas resulte útil tratar por separado el movimiento de su centro de masas. En el caso de un sólido rígido considerar simultáneamente tres sistemas de referencia:

- Un sistema de referencia inercial arbitrario O^* .
- Un sistema de referencia cuyo origen O sea el centro de masas del sistema de partículas y cuya base ortonormal sea la misma que la de O^* , es decir, un sistema que se mueva con el sólido, pero que mantenga sus ejes coordenados paralelos a los de O^* .
- Un sistema de referencia O' con el mismo origen que O , pero que esté “anclado” al sólido, es decir, que respecto de él todas las partículas estén en reposo.

Notemos que segundo y el tercer sistema de referencia no tienen por qué ser inerciales y, aunque el segundo lo podemos considerar para cualquier sistema de partículas, el tercero no tiene por qué existir si el sistema no es un sólido rígido.

En la sección A.1 hemos visto que podemos definir un vector $\vec{\omega}$ (dependiente del tiempo) de modo que todas las partículas que están en reposo respecto de O' (en particular, todas las partículas del sólido rígido), se mueven en cada instante respecto de O con velocidad dada por la fórmula (A.3), que en este caso es

$$\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}'_i,$$

donde \vec{r}'_i es el vector de posición de la partícula respecto de O' (y también respecto de O), luego la velocidad respecto del sistema inercial O^* es

$$\vec{v}_i = \vec{V} + \vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R}).$$

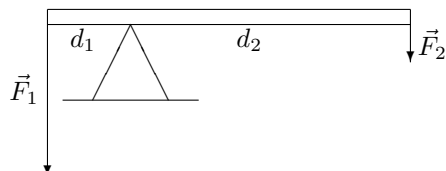
Esto significa que el movimiento de un sólido rígido respecto de un sistema inercial O^* puede descomponerse siempre como suma de un movimiento de traslación determinado por el movimiento de su centro de masas más un movimiento que en cada instante es una rotación respecto del eje que pasa por el centro de masas con dirección $\vec{\omega}$ y velocidad angular $\omega = \|\vec{\omega}\|$ (de modo que el sentido de giro es el antihorario si miramos el sólido con $\vec{\omega}$ apuntando hacia nosotros).

Acabamos de ver que el movimiento de traslación coincide con el que seguiría si toda su masa estuviera concentrada en el centro de masas. Para estudiar la dinámica asociada a la rotación conviene introducir algunos conceptos.

Momento angular Observemos ahora que el hecho de que la suma de todas las fuerzas que actúan sobre un sistema de partículas sea nula no implica que éstas no puedan alterar su cantidad de movimiento. El ejemplo más simple lo proporciona una barra rígida a la que le aplicamos dos fuerzas como muestra la figura:



Las fuerzas tienen sentidos opuestos, luego su suma es nula, pero es obvio que, si la barra está inicialmente en reposo, la acción conjunta de ambas fuerzas la hará girar en sentido antihorario. La clave está en que cada fuerza se aplica en un punto distinto de la barra. Un caso similar nos lleva a la “ley de la palanca”, descubierta por Arquímedes en el siglo III a. C.



Arquímedes razonó geoméricamente (a partir de unos axiomas sobre centros de masas que consideró evidentes) que si ponemos dos objetos en los extremos de una barra rígida apoyada sobre un punto alrededor del cual puede girar, la relación entre los pesos \vec{F}_1 y \vec{F}_2 de ambos objetos para que la barra permanezca en equilibrio es que $F_1 d_1 = F_2 d_2$, donde d_1 y d_2 son las distancias al punto de apoyo de los puntos en los que se aplica la fuerza.

Equivalentemente, esta relación permite calcular la fuerza \vec{F}_2 que hay que ejercer en un extremo de una palanca para levantar un peso \vec{F}_1 situado en su otro extremo. Arquímedes observó que si d_2 es mucho mayor que d_1 , una pequeña fuerza \vec{F}_2 puede levantar un gran peso \vec{F}_1 . La palanca es uno de los muchos mecanismos que permiten transformar fuerzas pequeñas en fuerzas grandes. Para tratar matemáticamente situaciones como las descritas necesitamos el concepto de momento angular:

El *momento angular* de una partícula respecto de un punto O (que podemos tomar como origen del sistema de referencia) se define como el producto vectorial $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$, donde \vec{r} es el vector de posición y \vec{p} el momento lineal.

Su interés radica en que se cumple una versión angular de la segunda ley de Newton, para lo cual tenemos que definir el *momento* de una fuerza \vec{F} que actúa sobre un objeto situado en la posición \vec{r} como el producto

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}.$$

Es claro entonces que el momento de la fuerza total que actúa sobre un cuerpo en un punto es la suma de los momentos de las fuerzas que actúan sobre él. En estos términos:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{v} \times m\vec{v} + \vec{r} \times m\vec{a} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M},$$

es decir, la variación del momento angular de una partícula está determinado por el momento de la fuerza total que actúa sobre él.

Para un sistema de partículas el momento angular se define como la suma de los momentos angulares de sus componentes:

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{p}_i.$$

Ahora calculamos la derivada

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{d\vec{L}_i}{dt} = \sum_{i,j=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_{ji} = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_i + \sum_{i<j} (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{ij},$$

donde hemos usado que

$$\vec{r}_i \times \vec{F}_{ji} + \vec{r}_j \times \vec{F}_{ij} = \vec{r}_i \times \vec{F}_{ji} - \vec{r}_j \vec{F}_{ji} = (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{ij}.$$

En este punto necesitamos suponer que las fuerzas internas son radiales, que es una condición que hemos incluido en la definición de sólido rígido, pero

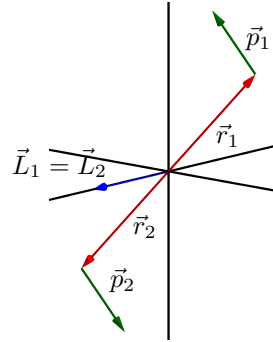
que también cumplen otros sistemas de partículas, como aquellos formados por cuerpos entre los que actúan únicamente fuerzas gravitatorias. Recordemos que esta hipótesis significa que la fuerza \vec{F}_{ij} tiene la misma dirección que $\vec{r}_i - \vec{r}_j$, por lo que el producto vectorial es nulo y así llegamos a la relación

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \sum_{i=1}^n \vec{M}_i = \vec{M},$$

donde \vec{M} es la suma de los momentos que las fuerzas exteriores al sistema realizan sobre el sistema. Ésta es la versión angular de la segunda ley de Newton:

La variación del momento angular de un sistema de partículas con fuerzas internas radiales es igual a la suma de los momentos ejercidos por las fuerzas exteriores al sistema.

Por ejemplo, si una barra gira alrededor de un punto, digamos en sentido antihorario, los puntos situados a un lado del centro de giro tienen momentos \vec{p}_i que apuntan en un sentido y los situados al lado opuesto tienen momentos que apuntan en el sentido opuesto, pero los productos $L_i = \vec{r}_i \times \vec{p}_i$ apuntan todos en el mismo sentido, por lo que su suma no puede cancelarse y concluimos que la barra gira si y sólo si su momento angular total \vec{L} es no nulo. Por lo tanto, si la barra está inicialmente en reposo, la condición para que siga estándolo es que el momento \vec{M} total que actúa sobre ella sea nulo, pues en caso contrario \vec{L} variará, lo que se traduce en que la barra girará.



Esto explica por qué, en el primer ejemplo que hemos puesto en este apartado (la barra con fuerzas en sentidos opuestos actuando en sus extremos) no permanece en reposo a pesar de que la fuerza resultante \vec{F} es nula, y es que el momento resultante \vec{M} no es nulo. Analizamos ahora el caso de la palanca:

La ley de la palanca En la situación descrita en el diagrama de la página 515, tomando un sistema de referencia con origen en el punto de apoyo de la palanca, sobre la barra actúan tres fuerzas: $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{N}$, donde \vec{N} es la reacción (dirigida hacia arriba) que el punto de apoyo ejerce sobre la palanca, opuesta a la fuerza que la palanca ejerce sobre él (dirigida hacia abajo). Si la palanca está en equilibrio, en particular su centro de masas no se mueve, luego tiene que ser $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{N} = \vec{0}$. Esto no aporta mucho, porque simplemente la fuerza que la palanca ejerce sobre el punto de apoyo es $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$ y la reacción es la opuesta. Lo relevante es que la palanca estará en equilibrio si y sólo si $\vec{L} = \vec{0}$, y el módulo de \vec{L} es precisamente

$$-F_1 d_1 + F_2 d_2,$$

(notemos que \vec{N} tiene momento nulo, porque se aplica en el origen de coordenadas) luego la condición de equilibrio es precisamente $F_1 d_1 = F_2 d_2$, que es la ley de la palanca de Arquímedes.

En realidad esto no es exacto, pues no hemos tenido en cuenta que la palanca tiene por sí misma un peso, de modo que si, por ejemplo, $\vec{F}_1 = \vec{F}_2 = 0$, se cumple la ley de la palanca, pero lo cierto es que ésta no estará en equilibrio, sino que caerá por su propio peso, a menos que el punto de apoyo sea el punto medio de la barra. Para calcular momento generado por el peso de la barra podemos pensar que está compuesta de muchas partículas de masa m_i situadas en posiciones \vec{r}_i , y sobre cada una de ellas se ejerce una fuerza $(0, 0, -m_i g)$. Por lo tanto la suma de los momentos es

$$\vec{M}_P = \sum_i \vec{r}_i \times (0, 0, -m_i g) = \sum_i m_i \vec{r}_i \times (0, 0, -g) = M \vec{R} \times (0, 0, -g),$$

donde \vec{R} es la posición del centro de masas de la barra. Si la suponemos homogénea, por simetría éste tiene que estar en el punto medio (si intercambiamos los extremos de la barra o la giramos sobre su eje, tenemos una barra indistinguible de la primera, luego el centro de masas tiene que estar en el mismo sitio, y el único punto que no se altera al intercambiar los extremos o girarla sobre su eje es su punto medio).

Por lo tanto, si llamamos D a la distancia del punto de apoyo al centro de la barra, el módulo del momento asociado al peso \vec{M}_P es MgD , y el momento total será nulo cuando

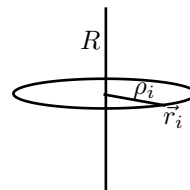
$$-F_1 d_1 + F_2 d_2 + MgD = 0.$$

Si el peso de la barra Mg es despreciable frente a las fuerzas \vec{F}_1 y \vec{F}_2 aplicadas en sus extremos, obtenemos la ley de la palanca de Arquímedes.

Por ejemplo, según la ley de Arquímedes, si una palanca de acero de 1m de longitud pesa 0.5 kg, para levantar a un hombre de 80 kg basta el peso de un niño de 26.66 kg si el punto de apoyo se sitúa a 0.25 cm del adulto sin tener en cuenta el peso de la barra. Si lo tenemos en cuenta, el equilibrio se consigue con 26.5 kg, lo que muestra que el peso de la barra es despreciable. ■

Momento de inercia Las fórmulas elementales sobre el momento angular que hemos obtenido nos permiten dar condiciones de equilibrio como la que hemos visto para la palanca, pero para estudiar el giro de un sólido rígido es necesario considerar una nueva magnitud que representa el papel análogo al de la masa en el movimiento de una partícula puntual, pero que es bastante más sofisticado.

Como motivación para la definición pensemos en un sistema cuyas partículas están girando todas alrededor de una recta R , manteniéndose siempre a una distancia constante ρ_i de la recta (que puede ser distinta para cada partícula) y todas con la misma velocidad angular ω .



Entonces, el módulo v_i de la velocidad de la partícula depende del radio de giro ρ_i mediante la relación³ $v_i = \rho_i\omega$. Por lo tanto, la energía cinética de la partícula es

$$\frac{1}{2}m_i\rho_i^2\omega^2,$$

de modo que la contribución de cada partícula a la energía de rotación del sistema es directamente proporcional a su masa y al cuadrado de su distancia al eje de giro. La energía cinética total del sistema es

$$E_c = \frac{1}{2}\sum_i m_i\rho_i^2\omega^2 = \frac{1}{2}I\omega^2,$$

donde I es el momento de inercia del sistema de partículas, cuya definición general es la siguiente:

Se llama *momento de inercia* de un sistema de partículas respecto de una recta R a

$$I = \sum_i m_i\rho_i^2,$$

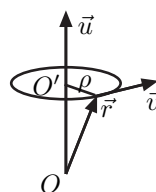
donde ρ_i es la distancia de la partícula i -ésima a la recta.

La fórmula $E_c = (1/2)I\omega^2$ es el análogo rotacional de $E_c = (1/2)mv^2$, donde la velocidad angular ω sustituye a la velocidad v y el momento de inercia I sustituye a la masa.

Vamos a ver que esto no es casual, sino que el momento de inercia (respecto de un eje adecuado) interviene en la descripción del movimiento de rotación de cualquier sólido rígido, no sólo en el caso particular que acabamos de considerar, y no sólo en la expresión de su energía cinética.

En primer lugar observemos que la definición de I depende de la distancia de cada partícula a la recta R prefijada, luego no depende del sistema de referencia considerado: dos observadores que vean un mismo sistema de partículas en un instante dado, le asignarán el mismo momento de inercia respecto de una recta dada en dicho instante.

Tomemos, concretamente, un sistema de referencia con origen O en la recta R y sea \vec{u} un vector director de R . Podemos suponer que \vec{u} tiene módulo 1. Entonces, si \vec{r} es el vector de posición de una partícula de masa m , el producto $\vec{r} \cdot \vec{u}$ es la distancia de O al punto O' de R más cercano a \vec{r} , luego la distancia ρ de \vec{r} a R cumple que $\rho^2 = r^2 - (\vec{r} \cdot \vec{u})^2$.



Vamos a expresar esta distancia en términos de las coordenadas de los vectores, teniendo en cuenta que $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 1$:

$$\begin{aligned} \rho^2 &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1^2u_1^2 - x_2^2u_2^2 - x_3^2u_3^2 - 2x_1x_2u_1u_2 - 2x_1x_3u_1u_3 - 2x_2x_3u_2u_3 \\ &= x_1^2u_1^2 + x_1^2u_2^2 + x_1^2u_3^2 + x_2^2u_1^2 + x_2^2u_2^2 + x_2^2u_3^2 + x_3^2u_1^2 + x_3^2u_2^2 + x_3^2u_3^2 \end{aligned}$$

³Véase la discusión sobre el movimiento circular en la sección [IC 4.1].

$$-x_1^2 u_1^2 - x_2^2 u_2^2 - x_3^2 u_3^2 - 2x_1 x_2 u_1 u_2 - 2x_1 x_3 u_1 u_3 - 2x_2 x_3 u_2 u_3 = \sum_{k,l} u_k A_{kl} u_l,$$

donde

$$\begin{aligned} A_{11} &= x_2^2 + x_3^2, & A_{12} &= A_{21} = -x_1 x_2, \\ A_{22} &= x_1^2 + x_3^2, & A_{13} &= A_{31} = -x_1 x_3, \\ A_{33} &= x_1^2 + x_2^2, & A_{23} &= A_{32} = -x_2 x_3. \end{aligned}$$

Una expresión conjunta para estas nueve cantidades es:

$$A_{kl} = \sum_{j=1}^3 x_j^2 \delta_{kl} - x_k x_l,$$

donde δ_{kl} es la delta de Kronecker, definida por

$$\delta_{kl} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = l, \\ 0 & \text{si } k \neq l. \end{cases}$$

Por consiguiente, el momento de inercia de la partícula i -ésima de un sistema de partículas respecto de una recta que pase por el origen de coordenadas con vector director unitario \vec{u} es

$$\vec{u} \cdot I \cdot \vec{u}^t = \sum_{k,l} u_k I_{kl} u_l,$$

donde I es la matriz con coeficientes

$$I_{kl} = \sum_i m_i \left(\sum_{j=1}^3 x_{ij}^2 \delta_{kl} - x_{ik} x_{il} \right).$$

Notemos que la matriz simétrica I no depende del vector \vec{u} , sino únicamente de las masas de las partículas y de sus coordenadas en el sistema de referencia considerado. Ahora bien, la forma bilineal simétrica $I_O : \vec{E} \times \vec{E} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$I_O(\vec{u}, \vec{v}) = \sum_{k,l} u_k I_{kl} v_l,$$

depende de O , pero es independiente del sistema de referencia con origen en O en el cual calculamos las coordenadas u_k, v_l de los vectores \vec{u} y \vec{v} y los coeficientes I_{kl} .

En efecto, ante todo, según la observación tras la definición [Al 6.43], una forma bilineal simétrica $F : V \times V \rightarrow K$ en un K -espacio vectorial está determinada por la forma cuadrática $v \mapsto F(v, v)$, luego basta probar que la forma cuadrática $q(\vec{u}) = I_O(\vec{u}, \vec{u})$ es independiente del sistema de referencia, pero, como, para vectores no nulos, $q(\vec{u}) = |\vec{u}|q(\vec{u}/|\vec{u}|)$, basta ver que los valores $I_O(\vec{u}, \vec{u})$ cuando \vec{u} es unitario, son independientes del sistema de referencia, pero $I_O(\vec{u}, \vec{u})$ es entonces el momento de inercia del sistema de partículas respecto de la recta que pasa por O con vector director \vec{u} , que por definición es independiente del sistema de referencia.

La forma bilineal simétrica I_O (o, más precisamente, la aplicación I que a cada punto O del espacio le asigna la forma bilineal simétrica $I_O : \vec{E} \times \vec{E} \rightarrow \mathbb{R}$) recibe el nombre de *tensor de inercia* del sistema de partículas.

Vamos a ver que el tensor de inercia da lugar a expresiones convenientes para la energía cinética y el momento angular de un sólido rígido.

Energía cinética Consideremos un sólido rígido, y los tres sistemas de referencia habituales: uno inercial O^* , otro O con origen en el centro de masas con ejes paralelos a los de O^* y un tercero O' que se mueva con el sólido. Según hemos visto, la velocidad de cada partícula respecto a O^* viene dada por

$$\vec{v}_i = \vec{V} + \vec{\omega} \times \vec{r}'_i, \quad (\text{A.4})$$

donde $\vec{r}'_i = \vec{r}_i - \vec{R}$ es el vector de posición de la partícula respecto de O y O' . Entonces

$$\frac{1}{2}m_i v_i^2 = \frac{1}{2}m_i V^2 + \vec{V}(\vec{\omega} \times m_i \vec{r}_i) - m_i \vec{V}(\vec{\omega} \times \vec{R}) + \frac{1}{2}m_i (\vec{\omega} \times \vec{r}'_i)^2,$$

y sumando obtenemos la energía cinética del sólido:

$$\begin{aligned} E_c &= \frac{1}{2}MV^2 + M\vec{V}(\vec{\omega} \times \vec{R}) - M\vec{V}(\vec{\omega} \times \vec{R}) + \frac{1}{2}\sum_i m_i (\vec{\omega} \times \vec{r}'_i)^2 \\ &= \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}\omega^2 \sum_i m_i \rho_i^2, \end{aligned}$$

donde ρ_i es la distancia de \vec{r}'_i a la recta que pasa por O' con la dirección de $\vec{\omega}$.

El último sumatorio es el momento de inercia del sólido rígido respecto de dicha recta, que podemos expresar como

$$I_{\vec{\omega}} = \frac{\vec{\omega}}{\omega} \cdot I \cdot \left(\frac{\vec{\omega}}{\omega}\right)^t,$$

donde I es la matriz del tensor de inercia del sólido respecto de su centro de masas. Así pues, la expresión para la energía cinética es

$$E_c = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}I_{\vec{\omega}}\omega^2 = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}\vec{\omega} \cdot I \cdot \vec{\omega}^t. \quad (\text{A.5})$$

El primer sumando representa la energía de traslación del sólido, mientras que el segundo es la suma de las energías de rotación de sus partículas.

Momento angular Calculamos ahora el momento angular de un sólido rígido. Partimos nuevamente de (A.4):

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \sum_i m_i \vec{r}_i \times \vec{V} + \sum_i m_i (\vec{R} + \vec{r}'_i) \times (\vec{\omega} \times \vec{r}'_i) \\ &= M\vec{R} \times \vec{V} + \sum_i \vec{R} \times (\vec{\omega} \times m_i \vec{r}'_i) + \sum_i m_i \vec{r}'_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}'_i) \\ &= \vec{R} \times \vec{P} + \sum_i m_i \vec{r}'_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}'_i), \end{aligned}$$

donde hemos usado que $\vec{r}'_i = \vec{r}_i - \vec{R}$, luego

$$\sum_i m_i \vec{r}'_i = \sum_i m_i \vec{r}_i - M\vec{R} = \vec{0}.$$

Vamos a llamar $\vec{L}(\vec{\omega})$ al último término de la expresión que hemos obtenido, que claramente es una aplicación lineal, y vamos a probar que su matriz I respecto a la base $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ de O' es la del tensor de inercia respecto de O' . Para ello aplicamos la fórmula de Lagrange [G 4.12]:

$$\vec{L}(\vec{\omega}) = \vec{\omega} \sum_i m_i (r'_i)^2 - \sum_i m_i (\vec{r}'_i \cdot \vec{\omega}) \vec{r}'_i.$$

Ahora, I_{kl} es la coordenada l -ésima de

$$\vec{L}(\vec{u}_k) = \vec{u}_k \sum_i m_i (\vec{r}'_i)^2 - \sum_i m_i x'_{ik} \vec{r}'_i,$$

luego

$$I_{kl} = \sum_i m_i ((\vec{r}'_i)^2 \delta_{kl} - x'_{ik} x'_{il}).$$

Esto prueba que I es la matriz del tensor de inercia del sólido (en el punto O'). En definitiva, la expresión para el momento angular de un sólido rígido es

$$\vec{L} = \vec{R} \times \vec{P} + \vec{\omega} \cdot I. \quad (\text{A.6})$$

El primer término es el momento angular del centro de masas, mientras que el segundo es el análogo angular de la expresión $m\vec{v}$ y contiene el momento angular asociado a la rotación del sólido.

Dinámica del sólido rígido Finalmente estamos en condiciones de obtener las ecuaciones fundamentales que rigen la dinámica de un sólido rígido. Consideramos los tres observadores habituales O^* , O y O' . Ante todo recordamos que el observador O no tiene por qué ser inercial, pero satisfará las leyes de la dinámica si suponemos que sobre la partícula i -ésima del sólido está actuando una fuerza de inercia $-m_i \vec{A}$, donde \vec{A} es la aceleración (respecto de O^*) del centro de masas [IC 4.6].

La suma de todas estas fuerzas de inercia es $-M\vec{A} = -\vec{F}$, donde \vec{F} es la suma de todas las fuerzas reales (no inerciales) que actúan sobre las partículas del sistema (respecto a O^* y también respecto a O). Por lo tanto, al considerar estas fuerzas de inercia, la fuerza total que actúa sobre el sólido rígido respecto del observador O es nula.

Por otro lado, el momento de fuerza que produce la fuerza de inercia que actúa sobre la partícula i -ésima es $-\vec{r}_i \times m_i \vec{A} = -m_i \vec{r}_i \times \vec{A}$, y la suma de todos estos momentos es $-M\vec{R} \times \vec{A} = 0$, porque en O el vector de posición \vec{R} del centro de masas es nulo.

Así pues, respecto del observador O , las fuerzas de inercia vuelven nula la fuerza total que actúa sobre el sólido y no modifican el momento de fuerza total \vec{M} que actúa sobre él.

En la práctica, esto se traduce en que no necesitamos preocuparnos en ningún momento de las fuerzas de inercia. Simplemente, a la hora de considerar la fuerza externa total que actúa sobre el sólido (respecto de O) tenemos que es nula, y a la hora de calcular el momento de fuerza total, no necesitamos considerar las fuerzas de inercia.

Puesto que en O tenemos que la posición del centro de masas es siempre $\vec{R} = \vec{0}$, las fórmulas (A.5) y (A.6) se reducen en este contexto a

$$E_c = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot I \cdot \vec{\omega}^t, \quad \vec{L} = \vec{\omega} \cdot I,$$

donde I es la matriz del tensor de inercia del sólido respecto del centro de masas en el sistema de referencia O' , por lo que sus coeficientes son constantes. Vamos a derivar estas expresiones usando la fórmula (A.2):

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt} \right)_O \cdot I = \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt} \right)_{O'} \cdot I + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \cdot I),$$

donde hemos usado que los coeficientes de I son constantes. Por otra parte, aplicamos otra vez (A.2) para calcular

$$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt} \right)_{O'} + \vec{\omega} \times \vec{\omega} = \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt} \right)_{O'},$$

luego llegamos a que

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\alpha} \cdot I + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \cdot I).$$

Para la energía cinética tenemos $E_c = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot I \cdot \vec{\omega}^t$, luego

$$\frac{dE_c}{dt} = \frac{1}{2} \vec{\alpha} \cdot I \cdot \vec{\omega}^t + \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot I \cdot \vec{\alpha}^t = \vec{\omega} \cdot I \cdot \vec{\alpha}^t = \vec{\omega} \cdot \vec{M}.$$

Vemos así que la variación de la energía cinética de rotación depende únicamente de la componente del momento \vec{M} en la dirección de la velocidad angular. En otros términos: las fuerzas cuyo momento es perpendicular a la velocidad angular no producen trabajo y no alteran la energía cinética (de rotación) de un sólido rígido.

El hecho de que los sistemas de referencia O^* y O tengan la misma base se traduce en que $\vec{\omega}$ es el mismo vector para ambos (por la propia definición de $\vec{\omega}$), por lo que los segundos miembros de (A.5) y (A.6) son la misma función de t en ambos sistemas de referencia. Por consiguiente, sus derivadas coinciden con las que acabamos de calcular y, calculando las derivadas de los primeros miembros, llegamos a que las derivadas de E_c y \vec{L} para un observador inercial O^* son:

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{R} \times \vec{F} + \vec{\alpha} \cdot I + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \cdot I), \quad \frac{dE_c}{dt} = \vec{V} \times \vec{F} + \vec{\omega} \cdot \vec{M}_O,$$

donde $\vec{M}_O = \vec{M} - \vec{R} \times \vec{F}$ es la suma de los momentos de las fuerzas externas respecto del centro de masas O (no respecto del origen de coordenadas O^* del observador inercial), explícitamente:

$$\vec{M}_O = \sum_i (\vec{r}_i - \vec{R}) \times \vec{F}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i - \vec{R} \times \sum_i \vec{F}_i = \vec{M} - \vec{R} \times \vec{F}.$$

A estas ecuaciones hay que añadir, naturalmente, la ecuación $\vec{F} = M\vec{A}$ que determina la aceleración del centro de masas.

Trabajo y energía mecánica Veamos ahora que el trabajo total realizado por las fuerzas internas \vec{F}_{ij} de un sólido rígido es nulo. Recordemos que \vec{F}_{ij} es la fuerza que la partícula i -ésima efectúa sobre la j -ésima y, de acuerdo con [IC 5.21], el trabajo que realiza en un intervalo de tiempo $[t_0, t_1]$ es

$$W_{ij} = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}_{ij} \cdot \vec{v}_j dt,$$

luego

$$W_{ij} + W_{ji} = \int_{t_0}^{t_1} (\vec{F}_{ij} \cdot \vec{v}_j + \vec{F}_{ji} \cdot \vec{v}_i) dt = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}_{ij} \cdot (\vec{v}_j - \vec{v}_i) dt = 0,$$

pues, por definición de sólido rígido, $(\vec{r}_j - \vec{r}_i)^2$ es constante, luego derivando queda que $(\vec{v}_j - \vec{v}_i) \cdot (\vec{r}_j - \vec{r}_i) = 0$ y, también por definición, \vec{F}_{ij} tiene la dirección de $\vec{r}_j - \vec{r}_i$, luego también $\vec{F}_{ij} \cdot (\vec{v}_j - \vec{v}_i) = 0$. Por consiguiente, los trabajos de cada par de fuerzas se cancelan entre sí, y la suma de todos ellos es nula.

Así pues, en ausencia de fuerzas externas, la energía cinética de un sólido rígido permanece constante.

Por otro lado, el trabajo que realiza la fuerza externa \vec{F}_i es

$$W_i = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i dt,$$

luego, usando (A.4), el trabajo total que ejercen las fuerzas externas es

$$\begin{aligned} W &= \int_{t_0}^{t_1} \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i dt = \int_{t_0}^{t_1} \sum_i \vec{F}_i \cdot (\vec{V} + \vec{\omega} \times \vec{r}'_i) dt = \\ &= \int_{t_0}^{t_1} (\vec{F} \cdot \vec{V} + \vec{\omega} \cdot \sum_i \vec{r}'_i \times \vec{F}_i) dt = \int_{t_0}^{t_1} (\vec{F} \cdot \vec{V} + \vec{\omega} \cdot \vec{M}_O) dt, \end{aligned}$$

donde hemos usado [IC A.7] que el producto mixto $(\vec{F}_i, \vec{\omega}, \vec{r}'_i)$ no se altera si se permutan cíclicamente los vectores.

Observemos que el integrando coincide con la expresión que hemos obtenido para la derivada de E_c , lo cual es la expresión para sólidos rígidos del principio de conservación de la energía:

La variación de la energía cinética de un sólido rígido en un intervalo de tiempo coincide con el trabajo ejercido por las fuerzas externas.

Observemos que cualquier descomposición $\vec{F}_i = \vec{F}_i^1 + \vec{F}_i^2$ de las fuerzas externas que actúan sobre un sólido rígido en suma de dos (o más) fuerzas distintas da lugar a descomposiciones $\vec{F} = \vec{F}^1 + \vec{F}^2$ y $\vec{M}_O = \vec{M}_O^1 + \vec{M}_O^2$, de modo que si definimos el trabajo realizado por unas fuerzas externas \vec{F}_i tales que

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i, \quad \vec{M}_O = \sum_i (\vec{r}_i - \vec{R}) \times \vec{F}_i$$

(aunque no sean todas las fuerzas externas que actúan sobre el sólido) como el dado por

$$W = \int_{t_0}^{t_1} \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i dt = \int_{t_0}^{t_1} (\vec{F} \cdot \vec{V} + \omega \cdot \vec{M}_O) dt,$$

entonces el trabajo total ejercido sobre el sólido es la suma de los trabajos realizados por las distintas fuerzas externas que actúan sobre él.

En particular, si sobre cada partícula de un sólido rígido actúa una fuerza conservativa F_i (aunque no sea toda la fuerza que actúa sobre ella), lo que significa que $\vec{F}_i = -\nabla V(\vec{r}_i)$, para cierta función potencial V , entonces sabemos [IC 5.23] que el trabajo realizado por F_i es igual a la variación de la energía potencial de la partícula:

$$\int_{t_0}^{t_1} \vec{F}_i^1 \cdot \vec{v}_i dt = -(V(\vec{r}_i(t_1)) - V(\vec{r}_i(t_0))).$$

Y claramente podemos definir la *energía potencial* del sólido rígido (en cada instante respecto de dichas fuerzas) como

$$V = \sum_i V(\vec{r}_i)$$

con lo que llegamos a que el trabajo realizado por las fuerzas conservativas F_i es

$$W_c = \int_{t_0}^{t_1} \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i dt = -(V(t_1) - V(t_0)) = -\Delta E_p,$$

que es la variación de la energía potencial del sólido rígido. Así, si llamamos W_{nc} al trabajo realizado por las fuerzas no conservativas y $E = E_c + E_p$ a la energía mecánica, se cumple que

$$\Delta E_c = W = W_c + W_{nc} = -\Delta E_p + W_{nc},$$

luego concluimos que $\Delta E = W_{nc}$, que es otra forma del principio de conservación de la energía:

La variación de la energía mecánica de un sólido rígido es igual al trabajo realizado por las fuerzas exteriores no conservativas.

Por ejemplo, si una de las fuerzas que actúan sobre el sólido es la gravedad, de modo que cada partícula tiene una energía potencial $V_i = m_i g z_i$, la energía potencial gravitatoria del sólido es

$$\sum_i m_i g z_i = M g R_z,$$

donde R_z es la coordenada z del centro de masas \vec{R} . Más en general, podemos tomar como energía potencial gravitatoria de un sólido rígido el valor Mgh , donde h es la altura del centro de masas respecto de cualquier origen prefijado.

Notemos que la diferencia de potencial en dos instantes de tiempo ya incluye toda la variación de energía cinética, tanto la de traslación como la de rotación. No obstante, conviene observar que un campo gravitatorio (uniforme) no produce ningún momento resultante:

$$\begin{aligned}\vec{M}_O &= \sum_i (\vec{r}_i - \vec{R}) \times (0, 0, -m_i g) = \sum_i m_i \vec{r}_i \times (0, 0, -g) - \vec{R} \times (0, 0, -Mg) = \\ &= M\vec{R} \times (0, 0, -g) - \vec{R} \times (0, 0, -Mg) = \vec{0}.\end{aligned}$$

A.3 Distribuciones continuas de materia

En la sección anterior hemos expuesto los resultados básicos de la dinámica del sólido rígido, pero en unos términos que no son adecuados para la mayor parte de las aplicaciones prácticas. Por ejemplo, imaginemos que queremos describir el movimiento de una bola de billar, o de una polea: ¿cuántas partículas consideramos que contienen?, ¿de qué masas?, ¿en qué posiciones consideramos que están situadas? Todas estas preguntas resultan irrelevantes en la práctica. Por ejemplo, hemos discutido la ley de la palanca considerando una barra formada por muchas partículas, pero eludiendo concretar cuántas, de qué masa, etc.

Vamos a ver ahora que no es necesario trabajar con sólidos formados por cantidades indeterminadas de partículas, sino que podemos suponer que, por ejemplo, una bola de billar es una esfera completamente llena de materia, sin que quede ningún hueco vacío en su interior, y que bajo este supuesto podemos razonar análogamente a como hemos hecho en la sección anterior sustituyendo las sumas finitas por integrales.

Si suponemos que la materia se distribuye uniformemente por ciertas regiones del espacio, ya no podemos hablar de cuánta masa hay en un determinado punto (la respuesta sería siempre 0), sino de cuánta masa hay en una determinada región del espacio. Esto significa que ya no tenemos unas masas m_i asociadas a ciertos puntos, sino una medida m que asigna una cantidad de masa $m(V)$ a cada conjunto $V \subset E$ (medible Lebesgue).

En realidad este planteamiento no contradice al de la sección precedente. Si consideramos que el espacio está ocupado por un número finito de partículas puntuales de masas m_i situadas en los puntos P_i , entonces la distribución de masas es

$$m = \sum_i m_i \delta_{P_i},$$

donde la medida δ_{P_i} es la delta de Dirac definida en el ejemplo tras la definición 6.15. Si μ es la medida de Lebesgue, en este caso tenemos que $m \perp \mu$.

Suponer, por el contrario, que los conjuntos de volumen nulo contienen masa nula equivale a que $m \ll \mu$. En tal caso podemos considerar la función de densidad:

$$\rho(x) = \frac{dm}{d\mu}(x) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{m(B_r(x))}{\mu(B_r(x))}$$

que a cada punto le asigna el límite de la masa que contiene una bola de centro x sobre el volumen de dicha bola cuando el radio r tiende a 0.

La idea es muy simple: si dividimos la masa de la Tierra entre su volumen obtenemos $5\,514 \text{ kg/m}^3$, pero esto sólo es la densidad media de la Tierra, y no podemos afirmar literalmente que cada metro cúbico del planeta contiene justamente $5\,514 \text{ kg}$ de masa. No es lo mismo un metro cúbico tomado de una mina de plomo que otro tomado en una caverna subterránea llena de metano. La definición de $\rho(x)$ expresa que para calcular la densidad en un punto hay que considerar el cociente masa/volumen en regiones pequeñas alrededor del punto y que el resultado será una aproximación mejor a la densidad en el punto cuanto menor sea el volumen de la región considerada. La unidad de densidad en el *Sistema Internacional* es el kg/m^3 .

La función de densidad ρ (que en general depende del tiempo, puesto que el movimiento cambia la distribución de la materia en el espacio) está definida casi por todas partes y determina la medida m , en virtud del teorema 6.33:

$$m(V) = \int_V \rho(x, y, z) \, dx dy dz.$$

En palabras: la masa contenida en una región V del espacio se puede calcular como la integral de la densidad respecto de la medida de Lebesgue (aquí $dx dy dz$ equivale a $d\mu$, donde μ es la medida de Lebesgue).

Más en general, según la observación tras el teorema 6.33, si f es una función integrable respecto de m , entonces $f\rho$ es integrable respecto de la medida de Lebesgue y

$$\int_V f \, dm = \int_V f\rho \, dx dy dz.$$

Ahora, cualquier función de densidad ρ determina en un instante dado un centro de masas, sin más que sustituir la fórmula

$$\vec{R} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i \quad \text{por} \quad \vec{R} = \frac{1}{m(V)} \int_V \vec{r} \, dm = \frac{1}{m(V)} \int_V \vec{r} \rho \, dx dy dz,$$

donde adoptamos el convenio de que la integral de una función vectorial es el vector formado por las integrales de sus componentes, es decir, que, llamando $M = m(V)$,

$$\vec{R} = \frac{1}{M} \left(\int_V x\rho(x, y, z) \, dx dy dz, \int_V y\rho(x, y, z) \, dx dy dz, \int_V z\rho(x, y, z) \, dx dy dz \right).$$

Más precisamente, el miembro derecho es la terna de coordenadas del vector de posición \vec{R} del centro de masas respecto de un sistema de referencia O de un sólido que en el punto de coordenadas (x, y, z) tiene densidad $\rho(x, y, z)$.

Observemos que, como en el caso de un sistema de partículas, el punto $O + \vec{R}$ determinado por la fórmula integral es independiente del sistema de referencia con cuyas coordenadas se calcula la integral. En efecto, si consideramos otro sistema de referencia, O' , la relación entre las coordenadas de los vectores de posición \vec{r} y \vec{r}' de un mismo punto será de la forma

$$(x, y, z) = (a_1, a_2, a_3) + (x', y', z')A,$$

donde (a_1, a_2, a_3) son las coordenadas del vector $\overrightarrow{OO'}$ respecto de O y A es la matriz (ortogonal, en particular de determinante 1) de cambio de base entre las bases de ambos sistemas de referencia. Consideramos la aplicación $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por la igualdad anterior y la usamos como cambio de variables, de modo que, llamando

$$\rho'(x', y', z') = \rho(f(x', y', z')),$$

que es la función que determina la densidad de un punto respecto de sus coordenadas en O' , tenemos que las coordenadas del centro de masas calculado respecto de O son

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{M} \int_{f^{-1}[V]} (a_1, a_2, a_3) + (x', y', z') A \rho(f(x', y', z')) dx' dy' dz' \\ &= (a_1, a_2, a_3) \frac{1}{M} \int_{f^{-1}[V]} \rho' dx' dy' dz' + A \frac{1}{M} \int_{f^{-1}[V]} (x', y', z') \rho' dx' dy' dz' \\ &= (a_1, a_2, a_3) + AX', \end{aligned}$$

donde X' es la terna de coordenadas del centro de masas calculado respecto del observador O' , y vemos así que X y X' se corresponden a través de las ecuaciones de cambio de sistema de referencia, luego son las coordenadas de un mismo punto del espacio.

Esto implica que, a la hora de calcular un centro de masas, podemos tomar el sistema de referencia que consideremos más adecuado. Por ejemplo, si un sólido ocupa una región V del espacio que es simétrica respecto de un plano, podemos tomar un sistema de referencia con origen O en el plano y de modo que éste sea el plano coordenado YZ . Así, tenemos que $(x, y, z) \in V$ si y sólo si $(-x, y, z) \in V$. Si suponemos además que la distribución de masa es simétrica, es decir, que $\rho(x, y, z) = \rho(-x, y, z)$ (lo cual sucede, por ejemplo, si la densidad es constante), el teorema de cambio de variables nos da que

$$\int_V y \rho(x, y, z) dx dy dz = \int_V y \rho(-x, y, z) (-1) dx dy dz = - \int_V y \rho(x, y, z) dx dy dz,$$

de donde concluimos que

$$\int_V y \rho(x, y, z) dx dy dz = 0, \quad \int_V z \rho(x, y, z) dx dy dz = 0.$$

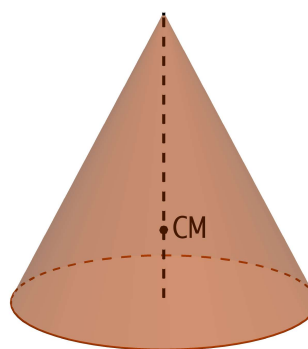
(la segunda igualdad se obtiene análogamente a como hemos obtenido la primera). Así, el centro de masas está situado sobre el plano de simetría.

Por ejemplo, ahora es inmediato que el centro de masas de una esfera con densidad constante (o con densidad radial, es decir, que la densidad en cada punto depende únicamente de su distancia al centro de la esfera) tiene su centro de masas en su centro geométrico, pues, respecto de un sistema de referencia con origen en dicho centro, ésta se conserva por las simetrías $(x, y, z) \mapsto (-x, y, z)$, $(x, y, z) \mapsto (x, -y, z)$, la primera justifica que el centro de masas es de la forma $\vec{R} = (a, 0, 0)$ y la segunda implica que $a = 0$.

El mismo razonamiento justifica que el centro de masas de un cilindro (de densidad constante) se encuentra en su centro geométrico, o que el centro de masas de cualquier sólido de revolución tiene que estar sobre su eje. Veamos ahora un ejemplo en el que las simetrías no bastan para localizar el centro de masas:

Ejemplo El centro de masas de un cono recto de altura h y densidad constante ρ tiene que estar sobre su eje, y el ejemplo tras el teorema de Fubini 4.68 muestra que está concretamente a una distancia $h/4$ de la base, donde h es la altura. En efecto, si el vértice del cono está en el origen de coordenadas y el eje del cono es el eje X , entonces la coordenada x del centro de masas es

$$R_x = \frac{1}{M} \int_V x \rho \, dx \, dy \, dz = \frac{1}{M} \frac{3}{4} \rho V h = \frac{3}{4} h,$$



luego el centro de masas dista $3h/4$ del vértice, luego $h/4$ de la base. ■

Ahora debemos preguntarnos qué relación tiene el centro de masas de una distribución continua de materia definido en términos de su función de densidad con el centro de masas de un sistema de partículas puntuales tal y como lo hemos definido en la sección anterior, más allá de la analogía de ambas definiciones. La respuesta nos la da el teorema siguiente:

Teorema A.1 Consideremos un sólido que ocupa una región (compacta) V del espacio con una distribución de materia determinada por una función de densidad ρ . Sean $f_j : V \rightarrow \mathbb{R}$, para $j = 1, \dots, r$, funciones continuas y $\epsilon > 0$. Entonces existe un sistema de partículas puntuales contenidas en V de modo que, para todo índice j ,

$$\left| \int_V f_j \, dm - \sum_i f_j(\vec{r}_i) m_i \right| < \epsilon.$$

DEMOSTRACIÓN: Llamemos

$$M = \int_V \rho \, dx \, dy \, dz$$

a la masa del sólido. Como las funciones continuas f_j son uniformemente continuas en el compacto V , existe un $\delta > 0$ tal que si $x, y \in V$ cumplen $\|x - y\| < \delta$, entonces $|f_j(x) - f_j(y)| < \epsilon/2M$.

Como la función de densidad ρ no puede tomar valores negativos, el teorema 4.44 nos da una sucesión de funciones simples $\{s_n\}_{n=0}^\infty$ que converge monótona y puntualmente a ρ . El teorema de la convergencia monótona implica que

$$\lim_n \int_V s_j \, dx \, dy \, dz = \int_V \rho \, dx \, dy \, dz = M.$$

Por otra parte, las sucesiones $\{s_n f_j\}_{n=0}^{\infty}$ convergen puntualmente a $f_j \rho$, y $|s_n f_j| \leq \rho |f_j|$, luego el teorema de la convergencia dominada implica que

$$\lim_n \int_V s_j \rho \, dx dy dz = \int_V f_j \rho \, dx dy dz.$$

Por consiguiente, podemos tomar un n suficientemente grande para que la función s_n , digamos $0 \leq s = \sum_i \rho_i \chi_{A_i} \leq \rho$, cumpla

$$M - \frac{\epsilon}{2} < \int_V s \, dx dy dz = \sum_i \rho_i m(A_i) \leq M,$$

$$\int_V f_j \rho \, dx dy dz - \int_V f_j s \, dx dy dz < \frac{\epsilon}{2}.$$

Podemos dividir el espacio E en una red de cubos de diámetro menor que δ y, descomponiendo cada conjunto A_i en unión de un número finito de intersecciones con dichos cubos, podemos suponer que cada A_i tiene diámetro menor que δ . Además podemos eliminar los A_i que cumplan $\mu(A_i) = 0$, pues ello no altera las desigualdades precedentes (los integrandos se modifican en un conjunto nulo).

Ahora formamos un sistema de partículas eligiendo puntos $\vec{r}_i \in A_i$ y considerando que en la posición \vec{r}_i hay una masa $m_i = \rho_i m(A_i)$. La masa M' de este sistema de partículas cumple

$$M - \frac{\epsilon}{2} < M' \leq M.$$

Además:

$$\begin{aligned} & \left| \int_V f_j \rho \, dx dy dz - \sum_i f_j(\vec{r}_i) m_i \right| \leq \left| \int_V f_j \rho \, dx dy dz - \int_V f_j s \, dx dy dz \right| + \\ & \left| \int_V f_j s \, dx dy dz - \sum_i m_i f_j(\vec{r}_i) \right| < \frac{\epsilon}{2} + \left| \sum_i \rho_i \int_{A_i} f_j \, dx dy dz - \sum_i \rho_i f_j(\vec{r}_i) m(A_i) \right| \\ & = \frac{\epsilon}{2} + \left| \sum_i \rho_i \int_{A_i} f_j \, dx dy dz - \sum_i \rho_i f_j(\vec{r}_i) \int_{A_i} dx dy dz \right| \leq \\ & \frac{\epsilon}{2} + \sum_i \rho_i \int_{A_i} |f_j(x, y, z) - f_j(\vec{r}_i)| \, dx dy dz < \frac{\epsilon}{2} + \sum_i \rho_i \int_{A_i} \frac{\epsilon}{2M} \, dx dy dz \leq \\ & \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2M} \sum_i \rho_i m(A_i) = \frac{\epsilon}{2} + \frac{M'}{M} \frac{\epsilon}{2} \leq \epsilon. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Así, aplicando el teorema anterior a la función $f_0(x, y, z) = 1$ obtenemos un sistema de partículas cuya masa M' es arbitrariamente próxima a la masa M

de la distribución continua de masa dada, y aplicándolo además a las funciones $f_1(x, y, z) = x$, $f_2(x, y, z) = y$, $f_3(x, y, z) = z$ podemos exigir también que

$$\left\| \int_V \vec{r} dm - \sum_i m_i \vec{r}_i \right\| < \epsilon,$$

luego, por la continuidad de los cocientes, podemos exigir que el centro de masas del sistema de partículas esté arbitrariamente próximo al centro de masas de la distribución continua. Por consiguiente, toda distribución continua de masa puede aproximarse tanto como se desee (en principio en lo que respecta a su masa total y a la posición del centro de masas, pero el teorema anterior se puede aplicar a cualquier otra magnitud que dependa continuamente de la posición de las partículas) por un sistema de partículas adecuado.

Nota: Distribuciones de materia bidimensionales o unidimensionales

Si queremos estudiar, por ejemplo, el movimiento de una lámina plana, digamos, en forma de cuadrado, puede ocurrir que su espesor sea despreciable, con lo que, en lugar de considerarla como un prisma de altura muy pequeña, puede ser más conveniente considerarla como un cuadrado plano, sin grosor. Estamos así en un caso intermedio entre las partículas puntuales, en las que toda la masa se supone concentrada en un punto, y las distribuciones tridimensionales, en las que las regiones de volumen nulo contienen una masa nula. En efecto, si consideramos una lámina plana con masa no nula M , por una parte tenemos una masa M que ocupa un volumen nulo, como en el caso de una partícula puntual, pero, por otra parte, la región ocupada por la masa tiene una geometría definida, de modo que podemos estudiar un posible movimiento de rotación de la lámina alrededor de un eje, cosa que no tendría sentido en el caso de una partícula puntual.

Si representamos una distribución de materia plana mediante un sistema de partículas, nada impide considerar que todas ellas están contenidas en un plano, pero si queremos describirla mediante una función de densidad, nos encontramos con que la medida m que a cada región del espacio le asigna la masa que contiene ya no es absolutamente continua respecto de la medida de Lebesgue tridimensional, por lo que, para determinar la masa integrando una función de densidad, es necesario suponer que ésta está definida únicamente en el plano que contiene la distribución de materia e integrar respecto de la medida de Lebesgue bidimensional. Esto nos lleva a expresiones análogas para la masa total:

$$M = \int_V \rho(x, y) dx dy,$$

y para el centro de masas:

$$\vec{R} = \frac{1}{M} \left(\int_V x \rho(x, y) dx dy, \int_V y \rho(x, y) dx dy \right),$$

que pueden aproximarse por sistemas de partículas adecuados exactamente igual que en el caso tridimensional.

En este caso, la función ρ es una función de *densidad superficial*, que se mide en kg/m^2 en lugar de en kg/m^3 . Por ejemplo, la densidad de una hoja de papel puede ser de $0.0007 \text{ kg}/\text{m}^2$ y sería raro verla expresada en kg/m^3 , pues ello obligaría a tener en cuenta el grosor del papel para hacer cálculos.

Ahora bien, la situación puede ser más complicada desde un punto de vista matemático, pues podemos considerar, por ejemplo, una corteza esférica V de grosor despreciable, que podemos representar como una superficie esférica de grosor nulo. En el caso de un sistema de partículas puntuales, nada impide tomarlas todas contenidas en una esfera, pero si queremos representar la distribución de materia mediante una función de densidad, ahora necesitamos que ésta esté definida sobre la superficie esférica y las integrales anteriores hay que entenderlas como integrales sobre una superficie curva respecto de la medida dada por el teorema 7.23.

Similarmente podemos considerar distribuciones de masa unidimensionales, como una barra o un aro de grosor despreciable, y en el caso continuo tenemos que considerar su *densidad lineal*. Por ejemplo, la densidad de un hilo de alambre puede ser de $0.05 \text{ kg}/\text{m}$, donde despreciamos la sección del hilo y tenemos en cuenta únicamente su longitud. Veamos un ejemplo:

El centro de masas de un triángulo Vamos a calcular el centro de masas de una lámina triangular T de densidad constante y grosor despreciable.

Consideramos un sistema de referencia con origen en uno de los vértices del triángulo y de modo que la altura correspondiente a dicho vértice esté sobre el eje x . Así los lados que salen del origen tendrán ecuaciones $y = nx$ e $y = mx$, donde podemos suponer que $m < n$ (ambos números pueden ser positivos o negativos). La masa es

$$M = \rho S = \rho \frac{(n-m)h^2}{2}.$$

La coordenada x del centro de masas será

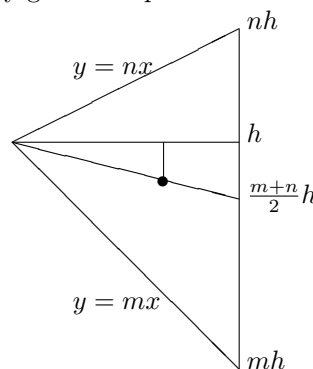
$$R_x = \frac{1}{M} \int_T x \rho \, dx \, dy = \frac{\rho}{M} \int_0^h \int_{mx}^{nx} x \, dy \, dx = \frac{\rho}{M} \int_0^h x [y]_{mx}^{nx} \, dx =$$

$$\frac{\rho}{M} \int_0^h (n-m)x^2 \, dx = \frac{\rho(n-m)}{M} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^h = \frac{\rho(n-m)h^3}{3M} = \frac{2}{3}h.$$

A su vez, la coordenada y será

$$R_y = \frac{1}{M} \int_V y \rho \, dx \, dy = \frac{\rho}{M} \int_0^h \int_{mx}^{nx} y \, dy \, dx = \frac{\rho}{M} \int_0^h \left[\frac{y^2}{2} \right]_{mx}^{nx} \, dx =$$

$$\frac{\rho}{M} \int_0^h \frac{(n^2 - m^2)x^2}{2} \, dx = \frac{\rho(m+n)(m-n)}{2M} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^h = \frac{\rho(m+n)(m-n)h^3}{6M}$$



$$= \frac{(m+n)h}{3}.$$

En total:

$$\vec{R} = \left(\frac{2}{3}h, \frac{(m+n)h}{3} \right).$$

Este resultado tiene una interpretación geométrica muy simple: si multiplicamos este vector por $3/2$ obtenemos $(h, (m+n)h/2)$, que es el punto medio del lado del triángulo opuesto al origen de coordenadas. Esto significa que el centro de masas está sobre la mediana del triángulo que pasa por el origen. Pero el vértice que hemos puesto en el origen de coordenadas es arbitrario, por lo que el centro de masas está sobre las tres medianas del triángulo, luego es precisamente su baricentro [IGE 4.7]. ■

A.4 El momento de inercia

En la sección A.2 hemos introducido el concepto de momento de inercia de un sólido rígido respecto de un eje prefijado y hemos visto que, respecto de un sistema de referencia con origen en un punto O del eje y $\vec{\omega}$ es un vector unitario en la dirección del eje, el momento de inercia viene dado por

$$I = \vec{\omega} \cdot I_O \cdot \vec{\omega}^t,$$

donde el producto se calcula con las coordenadas de $\vec{\omega}$ en el sistema de referencia fijado e I_O es una matriz simétrica (independiente de $\vec{\omega}$) cuyos coeficientes vienen dados por

$$I_{kl} = \sum_i m_i \left(\sum_{j=1}^3 x_{ij}^2 \delta_{kl} - x_{ik} x_{il} \right),$$

donde a su vez (x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}) son las coordenadas de cada partícula del sistema.

Si el sólido rígido está definido por una distribución continua de materia determinada por una función de densidad ρ en una región V del espacio, la versión continua del tensor de inercia es

$$I_{kl} = \int_V \left(\sum_{j=1}^3 x_j^2 \delta_{kl} - x_k x_l \right) dm. \quad (\text{A.7})$$

Hemos sustituido las posiciones (x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}) de las partículas por tres coordenadas (x_1, x_2, x_3) que varían en V y respecto a las cuales se lleva a cabo la integración. Explícitamente:

$$I_{xx} = \int_V (y^2 + z^2) \rho dx dy dz, \quad I_{yy} = \int_V (x^2 + z^2) \rho dx dy dz,$$

$$I_{zz} = \int_V (x^2 + y^2) \rho dx dy dz,$$

$$I_{xy} = I_{yx} = - \int_V xy\rho \, dx dy dz, \quad I_{xz} = I_{zx} = - \int_V xz\rho \, dx dy dz,$$

$$I_{yz} = I_{zy} = - \int_V yz\rho \, dx dy dz.$$

El momento de inercia del sólido respecto de un eje se define igualmente en este caso como $I = \vec{\omega} \cdot I_O \cdot \vec{\omega}^t$.

Aplicando el teorema A.1 a los seis integrandos concluimos que, dada una distribución continua de masa, siempre es posible construir un sistema de partículas cuyo centro de masas y cuyas componentes del tensor de inercia en un punto prefijado (y a su vez su momento de inercia respecto de cualquier eje) difieran en una cantidad ϵ arbitrariamente pequeña.

El teorema siguiente muestra que, en la práctica, sólo necesitamos conocer el tensor de inercia de un sólido rígido respecto de su centro de masas:

Teorema A.2 (Teorema de Steiner) *El momento de inercia de un sólido rígido de masa M respecto de un eje arbitrario viene dado por*

$$I = I' + Ml^2,$$

donde I' es el momento de inercia respecto del eje paralelo que pasa por el centro de masas y l es la distancia entre ambos ejes.

DEMOSTRACIÓN:⁴ Sea O un punto del eje y O' el centro de masas, y fijemos sistemas de referencia con origen en ambos puntos y la misma base de \vec{E} (de modo que los ejes coordenados son paralelos). Entonces, las coordenadas \vec{r} y \vec{r}' de un mismo punto respecto de ambos sistemas de referencia se relacionan en la forma

$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}',$$

donde \vec{R} es el vector de coordenadas (respecto de O) del centro de masas, es decir, el vector de coordenadas del punto O' . Las componentes del tensor de inercia I'_O son:

$$I'_{kl} = \int_{V'} \left(\sum_{j=1}^3 x_j'^2 \delta_{kl} - x'_k x'_l \right) dm = \int_{V'} (\vec{r}' \cdot \vec{r}' \delta_{kl} - x'_k x'_l) dm =$$

$$\int_V (\vec{r} - \vec{R}) \cdot (\vec{r} - \vec{R}) \delta_{kl} dm - \int_V (x_k - R_k)(x_l - R_l) dm =$$

$$\int_V ((\vec{r} \cdot \vec{r}) \delta_{kl} - x_k x_l) dm + \int_V (\vec{R} \cdot \vec{R} - 2\vec{R} \cdot \vec{r}) \delta_{kl} dm + \int_V (R_k x_l + R_l x_k - R_k R_l) dm$$

$$= I_{kl} + M(\vec{R} \cdot \vec{R} - 2\vec{R} \cdot \vec{R}) \delta_{kl} + M(R_k R_l + R_l R_k - R_k R_l),$$

⁴Vamos a ver la prueba para una distribución continua de materia, si bien el caso de un sistema de partículas puntuales es completamente análogo.

donde hemos usado que, por definición del centro de masas,

$$\int_V \vec{r} dm = M\vec{R}.$$

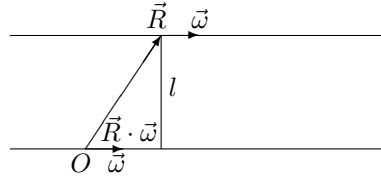
Así pues,

$$I_{kl} - I'_{kl} = M(\vec{R} \cdot \vec{R} \delta_{kl} - R_k R_l).$$

Por lo tanto, si $\vec{\omega}$ es un vector unitario en la dirección de los dos ejes paralelos del enunciado, la diferencia de los momentos de inercia es

$$\begin{aligned} I - I' &= \vec{\omega} \cdot I \cdot \vec{\omega}^t - \vec{\omega} \cdot I' \cdot \vec{\omega}^t = \sum_{kl} I_{kl} \omega_k \omega_l - \sum_{kl} I'_{kl} \omega_k \omega_l = \\ &= M\vec{R} \cdot \vec{R} \sum_{kl} \delta_{kl} \omega_k \omega_l - M \sum_{kl} R_k R_l \omega_k \omega_l = M(\vec{R} \cdot \vec{R})(\vec{\omega} \cdot \vec{\omega}) - M(\vec{R} \cdot \vec{\omega})(\vec{R} \cdot \vec{\omega}) \\ &= M(\|\vec{R}\|^2 - (\vec{R} \cdot \vec{\omega})^2) = Ml^2, \end{aligned}$$

donde hemos usado que $\vec{\omega}$ es un vector unitario, así como la relación que muestra la figura:



■

Ahora vamos a aplicar un resultado no trivial del álgebra lineal [Al 6.54], y es que toda forma bilineal tiene matriz diagonal respecto de cierta base ortonormal. Esto se traduce en que, dado un punto O , es posible fijar un sistema de referencia (ortonormal) respecto del cual la matriz I_O sea diagonal, es decir, que de modo que $I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = 0$.

Los ejes que pasan por el centro de masa determinados por la base que hace que el tensor de inercia sea diagonal se llaman *ejes principales* del sólido rígido.

Los momentos de inercia I_{xx}, I_{yy}, I_{zz} son los valores propios de la matriz I_O , y los vectores propios correspondientes determinan los ejes principales. Si los valores propios son distintos dos a dos, entonces los ejes principales están unívocamente determinados, pues los tres subespacios de vectores propios tienen dimensión 1 y son únicos, pero si dos de ellos coinciden, por ejemplo $I_{xx} = I_{yy}$, entonces el subespacio de vectores propios correspondiente a dicho valor propio tiene dimensión 2, con lo que sólo está determinado el eje principal correspondiente al subespacio de vectores propios de I_{zz} , mientras que cualquier par de ejes ortogonales a éste son ejes principales. Por último, si los tres momentos de inercia coinciden, cualquier sistema de ejes coordenados es un sistema de ejes principales.

Los ejes principales se reconocen fácilmente en los sólidos que tienen tres planos de simetría:

Teorema A.3 Si, respecto a un sistema de referencia prefijado, un sólido rígido V cumple que $(x, y, z) \in V$ si y sólo si $(-x, y, z) \in V$ y su función de densidad cumple $\rho(x, y, z) = \rho(-x, y, z)$, entonces $I_{yz} = 0$. Por lo tanto, si el sólido es simétrico (en forma y densidad) respecto de los tres planos coordenados, los ejes de coordenadas son sus ejes principales.

DEMOSTRACIÓN: Basta aplicar el teorema de cambio de variables a la transformación $(x, y, z) \mapsto (-x, y, z)$, cuyo determinante jacobiano vale -1 , con lo que

$$I_{yz} = - \int_V yz\rho(x, y, z) dx dy dz = \int_V yz\rho(-x, y, z) dx dy dz = -I_{yz},$$

luego $I_{yz} = 0$. Si el sólido es simétrico respecto de los tres planos coordenados, también $I_{xy} = I_{xz} = 0$, luego I_O es diagonal y el sistema de referencia tiene por ejes los ejes principales del sólido. ■

La esfera Vamos a calcular el tensor de inercia de una corona esférica de densidad uniforme y radios $0 < r_1 < r_2$ respecto de su centro de masas, que por simetría es su centro geométrico. Como la figura es simétrica respecto de cualquier plano que pase por el origen de coordenadas, $I_{xx} = I_{yy} = I_{zz}$, luego basta calcular uno de estos tres momentos.

Por ejemplo, usando coordenadas esféricas y usando la primitiva (C.1) calculada en [IC], vemos que

$$\begin{aligned} I_{zz} &= \int_V (x^2 + y^2)\rho dx dy dz = \rho \int_{r_1}^{r_2} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^2 \sin^2 \theta r^2 \sin \theta d\phi d\theta dr = \\ &= 2\pi\rho \int_{r_1}^{r_2} r^4 dr \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = 2\pi\rho \frac{r_2^5 - r_1^5}{5} \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Por otro lado, la masa del sólido será

$$M = \rho \frac{3}{4}\pi(r_2^3 - r_1^3),$$

luego

$$I_{xx} = I_{yy} = I_{zz} = \frac{2}{5}M \frac{r_2^5 - r_1^5}{r_2^3 - r_1^3}.$$

En particular, para $r_1 = 0$, $r_2 = r$ obtenemos la expresión del momento de inercia de una esfera maciza de radio r :

$$I_{xx} = I_{yy} = I_{zz} = \frac{2}{5}M r^2.$$

Volviendo al caso general, podemos expresar

$$I_{xx} = I_{yy} = I_{zz} = \frac{2}{5}M \frac{r_2^4 + r_2^3 r_1 + r_2^2 r_1^2 + r_2 r_1^3 + r_1^4}{r_2^2 + r_2 r_1 + r_1^2},$$

y esta expresión muestra que si el espesor de la corona es muy fino, de modo que ambos radios se parecen a un mismo radio r , entonces los momentos de inercia tienden a

$$I_{xx} = I_{yy} = I_{zz} = \frac{2}{5}M \frac{5r^4}{3r^2} = \frac{2}{3}Mr^2,$$

que son, pues, los momentos de inercia de una esfera hueca homogénea. ■

Elipsoides En el apartado sobre coordenadas esféricas, al final de la sección 6.5 casi hemos calculado uno de los momentos de inercia del elipsoide (homogéneo) determinado por la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1.$$

Notemos que la simetría respecto a los planos coordenados implica que los ejes de coordenadas son los ejes principales. Hemos visto que

$$I_{zz} = \rho \int_V (x^2 + y^2) dx dy dz = \frac{4abc\rho\pi}{15}(a^2 + b^2).$$

Si comparamos con el volumen del elipsoide, que nos da su masa:

$$M = \rho \frac{4}{3}\pi abc,$$

concluimos que

$$I_{zz} = \frac{1}{5}M(a^2 + b^2).$$

Por simetría tiene que ser

$$I_{xx} = \frac{1}{5}M(b^2 + c^2), \quad I_{yy} = \frac{1}{5}M(a^2 + c^2).$$

Haciendo $a = b = c = r$ obtenemos de nuevo los valores que hemos calculado para una esfera maciza. En el caso de un elipsoide de revolución, por ejemplo, con $a = b = r$, $c = h$, las expresiones se reducen a

$$I_{xx} = I_{yy} = \frac{1}{5}M(r^2 + h^2), \quad I_{zz} = \frac{2}{5}Mr^2. \quad \blacksquare$$

Ejemplo: El tensor de inercia de la Tierra Vamos a aplicar los cálculos del ejemplo precedente al caso de la Tierra. Su masa es $M = 5.9736 \times 10^{24}$ kg y su radio $r = 6.371 \times 10^6$ m. Por lo tanto, las componentes diagonales de su tensor de inercia valen

$$I_{xx} = I_{yy} = I_{zz} = 9.69865 \times 10^{37} \text{ kg}\cdot\text{m}^2.$$

Ahora bien, aquí hemos supuesto que la Tierra es esférica. En realidad está achatada por los polos, y sus radios ecuatorial y polar son, respectivamente

$$r_e = 6.3781 \times 10^6 \text{ m}, \quad r_p = 6.35675 \times 10^6 \text{ m}.$$

Si la consideramos un elipsoide de revolución, las componentes del tensor de inercia serán

$$I_{xx} = I_{yy} = 9.6878 \times 10^{37} \text{ kg}\cdot\text{m}^2, \quad I_{zz} = 9.7203 \times 10^{37} \text{ kg}\cdot\text{m}^2.$$

Para estos cálculos hemos supuesto que la densidad de la Tierra es constante. Vamos a suponer ahora un núcleo esférico de radio $r_n = 3.5 \times 10^6$ m y densidad $d_n = 10\,000 \text{ kg/m}^3$. Esto deja para el *manto* (la capa que rodea al núcleo)⁵ una densidad $d_m = 4\,622.83 \text{ kg/m}^3$. Podemos calcular I_{11} (e igualmente I_{33}) como el valor correspondiente a un elipsoide del tamaño de la Tierra y densidad d_m , menos el valor correspondiente a una esfera del tamaño del núcleo y densidad d_m más el valor correspondiente al núcleo. Así se obtiene:

$$I_{xx} = I_{yy} = 8.59494 \times 10^{37} \text{ kg}\cdot\text{m}^2, \quad I_{zz} = 8.62217 \times 10^{37} \text{ kg}\cdot\text{m}^2. \quad (\text{A.8})$$

Por otra parte, observemos que

$$\frac{I_{zz} - I_{xx}}{I_{zz}} = \frac{(r+h)/2}{r} \frac{r-h}{r} = \frac{r_m}{r_e} \epsilon, \quad (\text{A.9})$$

donde r_m es la media de los radios y ϵ es el achatamiento de la Tierra. La ventaja de esta fórmula es que depende de magnitudes relativamente fáciles de medir con precisión. Para la Tierra (considerada como elipsoide homogéneo), $\epsilon = 0.00335$ y el cociente de momentos de inercia es prácticamente el mismo. ■

Cilindros Consideremos ahora el caso de un tubo cilíndrico homogéneo formado por los puntos que cumplen

$$0 < r_1^2 \leq x^2 + y^2 \leq r_2^2, \quad -\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2}.$$

Claramente los planos coordenados son planos de simetría del cilindro, luego los ejes coordenados son ejes principales, y además $I_{xx} = I_{yy}$ (pues cualquier plano vertical que pase por el origen de coordenadas es un plano de simetría). Para calcular los momentos de inercia usamos coordenadas cilíndricas:

$$I_{zz} = \int_{r_1}^{r_2} \int_0^{2\pi} \int_{-h/2}^{h/2} r^3 \rho \, dr d\theta dz = 2\pi h \rho \left[\frac{r^4}{4} \right]_{r_1}^{r_2} = \frac{1}{2} \pi h \rho (r_2^4 - r_1^4)$$

y, por otro lado, teniendo en cuenta la fórmula del volumen de un cilindro:

$$M = \rho h \pi (r_2^2 - r_1^2),$$

luego

$$I_{zz} = \frac{1}{2} M (r_1^2 + r_2^2).$$

⁵En realidad la Tierra tiene una corteza externa menos densa que el manto, pero es tan fina que a estos efectos podemos despreciarla.

Por otra parte,

$$\begin{aligned}
 I_{xx} = I_{yy} &= \int_{r_1}^{r_2} \int_0^{2\pi} \int_{-h/2}^{h/2} (r^2 \operatorname{sen}^2 \theta + z^2) r \rho \, dr d\theta dz = \\
 &= \rho h \int_{r_1}^{r_2} r^3 \, dr \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 \theta \, d\theta + \rho 2\pi \int_{r_1}^{r_2} r \, dr \int_{-h/2}^{h/2} z^2 \, dz = \\
 &= \frac{1}{4} \rho h \pi (r_2^4 - r_1^4) + \rho \pi (r_2^2 - r_1^2) \frac{2}{3} (h/2)^3 = \frac{1}{12} \rho \pi h (r_2^2 - r_1^2) (3(r_1^2 + r_2^2) + h^2) = \\
 &= \frac{1}{12} M (3(r_1^2 + r_2^2) + h^2).
 \end{aligned}$$

Haciendo $r_1 = 0$, $r_2 = r$ obtenemos el caso de un cilindro macizo (véase la tabla A.1), mientras que haciendo $r_1 = r_2 = r$ obtenemos el caso de un cilindro hueco. Haciendo $h = 0$ en ambos casos tenemos los momentos de inercia de un disco y de un aro, respectivamente (véase la tabla). Por otro lado, haciendo $r = 0$ y $h = L$ obtenemos el momento de inercia de una varilla. ■

El cono Para terminar calcularemos el tensor de inercia del cono recto de ecuación

$$x^2 + y^2 \leq (mz)^2, \quad 0 \leq z \leq h.$$

Notemos que el origen del sistema de referencia está en el vértice del cono, no en su centro de masas. Usamos también coordenadas cilíndricas:

$$\begin{aligned}
 I_{zz} &= \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^{mz} r^3 \rho \, dr d\theta dz = \frac{1}{2} \pi \rho \int_0^h m^4 z^4 \, dz = \\
 &= \frac{1}{2} \pi \rho m^4 \frac{h^5}{5} = \frac{1}{10} \rho \pi R^4 h,
 \end{aligned}$$

donde $R = mh$ es el radio de la base del cono. Por otro lado

$$M = \rho \frac{1}{3} \pi R^2 h,$$

luego

$$I_{zz} = \frac{3}{10} MR^2.$$

Similarmente,

$$\begin{aligned}
 I_{xx} &= \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^{mz} (r^2 \operatorname{sen}^2 \theta + z^2) r \rho \, dr d\theta dz = \\
 &= \int_0^h \int_0^{2\pi} \frac{m^4 z^4}{4} \operatorname{sen}^2 \theta \rho \, d\theta dz + \int_0^h \int_0^{2\pi} \frac{m^2 z^4}{2} \rho \, d\theta dz = \\
 &= \frac{1}{4} \rho m^4 \pi \frac{h^5}{5} + \frac{1}{2} \rho m^2 2\pi \frac{h^5}{5} = \frac{1}{20} \rho \pi R^4 h + \frac{1}{5} \rho \pi R^2 h^3 = \frac{3}{20} MR^2 + \frac{3}{5} Mh^2.
 \end{aligned}$$

Tabla A.1: Momentos de inercia respecto al centro de masas

	I_{xx}	I_{yy}	I_{zz}
Esfera maciza	$\frac{2}{5}Mr^2$	$\frac{2}{5}Mr^2$	$\frac{2}{5}Mr^2$
Esfera hueca	$\frac{2}{3}Mr^2$	$\frac{2}{3}Mr^2$	$\frac{2}{3}Mr^2$
Elipsoide	$\frac{1}{5}M(b^2 + c^2)$	$\frac{1}{5}M(a^2 + c^2)$	$\frac{1}{5}M(a^2 + b^2)$
Cilindro macizo	$\frac{1}{12}M(3r^2 + h^2)$	$\frac{1}{12}M(3r^2 + h^2)$	$\frac{1}{2}Mr^2$
Cilindro hueco	$\frac{1}{12}M(6r^2 + h^2)$	$\frac{1}{12}M(6r^2 + h^2)$	Mr^2
Disco	$\frac{1}{4}Mr^2$	$\frac{1}{4}Mr^2$	$\frac{1}{2}Mr^2$
Aro	$\frac{1}{2}Mr^2$	$\frac{1}{2}Mr^2$	Mr^2
Varilla	$\frac{1}{12}ML^2$	$\frac{1}{12}ML^2$	0
Cono	$\frac{3}{20}M(R^2 + \frac{1}{4}h^2)$	$\frac{3}{20}M(R^2 + \frac{1}{4}h^2)$	$\frac{3}{10}MR^2$

Teniendo en cuenta que el centro de masas está a una distancia $l = 3h/4$ del vértice (véase el ejemplo de la página 529), el teorema de Steiner nos da que, respecto de un eje que pase por el centro de masas:

$$I_{xx} = \frac{3}{20}MR^2 + \frac{3}{5}Mh^2 - \frac{9}{16}Mh^2 = \frac{3}{20}M(R^2 + \frac{1}{4}h^2). \quad \blacksquare$$

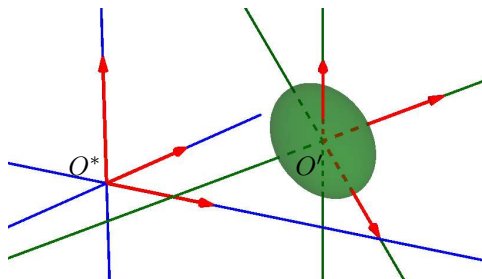
A.5 Dinámica del sólido rígido

Si tenemos un objeto físico sólido, con una forma perfectamente definida e invariable, podemos tomar un sistema de referencia O' respecto del cual todos sus puntos se encuentren en reposo. Su distribución de masa vendrá determinada por una cierta función de densidad que respecto de O' será constante. Ésta determina a su vez el centro de masas y, trasladando el sistema de referencia, podemos exigir que el origen O' sea precisamente el centro de masas.

Más aún, tenemos definida la forma bilineal simétrica $I_{O'}$ que determina los momentos de inercia respecto del punto O' y, cambiando la base del sistema de referencia O' , podemos exigir que sus ejes coordenados sean ejes principales del sólido rígido, con lo que la matriz $I = I_{O'}$ es diagonal.

El sistema de referencia O' no tiene por qué ser inercial, sino que, si fijamos un sistema de referencia inercial arbitrario O^* , el punto O' tendrá una posición \vec{R} dependiente del tiempo y, si su velocidad \vec{V} no es constante, entonces O' no será un sistema de referencia inercial. La posición en cada instante del sólido está determinada (respecto del observador inercial O^*) si conocemos el sistema de referencia O' (la posición de su origen y su base o, alternativamente,

el vector de posición \vec{R} de O' respecto de O y la matriz de cambio de base entre las bases de los dos sistemas de referencia) y la función de densidad ρ respecto de O' . Cada terna (x', y', z') de coordenadas respecto de O' tal que $\rho(x', y', z') > 0$ determina unívocamente la posición de un punto del sólido. Dicha terna no depende del tiempo, pero el punto que determina tendrá unas coordenadas (x, y, z) respecto de O^* que, en general, sí que dependerán del tiempo, y que describen el movimiento (de uno de los puntos) del sólido rígido.



Podemos considerar un sistema de referencia intermedio O con origen también en el centro de masas, pero con la misma base que la de O^* . Según hemos visto en la sección A.1, los sistemas de referencia O y O' determinan un vector $\vec{\omega}$ que determina la velocidad respecto de O^* de cada punto que está en reposo respecto de O' (en particular de cada punto del sólido rígido) mediante la fórmula (A.3):

$$\vec{v} = \vec{V} + \vec{\omega} \times (\vec{r} - \vec{R}),$$

donde \vec{R} y \vec{V} son la posición y la velocidad del centro de masas respecto de O^* .

Así pues, cada punto de un sólido rígido tiene definida una velocidad respecto de cualquier sistema de referencia inercial, determinada por los vectores \vec{V} y $\vec{\omega}$. Como es habitual, llamamos

$$\vec{A} = \frac{d\vec{V}}{dt}, \quad \vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}.$$

Podemos definir el momento de un sólido rígido como

$$\vec{P} = \int_V \vec{v} dm,$$

y así tenemos que

$$\begin{aligned} \vec{P} &= \int_V (\vec{V} + \vec{\omega} \times (\vec{r} - \vec{R})) dm = \vec{V} \int_V dm + \vec{\omega} \times \left(\int_V \vec{r} dm - \vec{R} \int_V dm \right) = \\ &= M\vec{V} + \vec{\omega}(M\vec{R} - \vec{R}M) = M\vec{V}. \end{aligned}$$

Así pues, tenemos demostrada la fórmula $\vec{P} = M\vec{V}$ análoga a la que se cumple para sistemas de partículas. Similarmente, podemos definir el momento angular de un sólido rígido como

$$\vec{L} = \int_V \vec{r} \times \vec{v} dm,$$

y un cálculo totalmente análogo al que hemos hecho en el caso de los sistemas de partículas (cambiando sumas por integrales) nos lleva a las fórmulas

$$\vec{L} = \vec{R} \times \vec{P} + \vec{\omega} \cdot I, \quad E_c = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}I_{\vec{\omega}}\omega^2 = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}\vec{\omega} \cdot I \cdot \vec{\omega}.$$

Sin embargo, ninguna de estas fórmulas nos permite predecir el movimiento de un sólido rígido. Del mismo modo que la dinámica de una partícula está determinada esencialmente por la segunda ley de Newton: $\vec{F} = m\vec{a}$, la dinámica de un sólido rígido está determinada por sus dos leyes análogas:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} = M\vec{A}, \quad \vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{R} \times \vec{F} + \vec{\alpha} \cdot I + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \cdot I). \quad (\text{A.10})$$

En la sección A.2 hemos deducido estas leyes a partir de las leyes de la dinámica de los sistemas de partículas cuando consideramos los sólidos rígidos como sistemas de partículas, pero un intento de deducirlas para el caso de sólidos continuos se encuentra con dificultades no triviales.⁶

Para empezar, tenemos que precisar qué entendemos por \vec{F} y \vec{M} . Cuando consideramos a un sólido rígido como un sistema finito de partículas, podemos definir \vec{F} como la suma de las fuerzas externas que actúan sobre él, pero esta definición no es viable en el caso continuo. Debemos resistirnos a tomar como definición $\vec{F} = M\vec{A}$, pues con ello vaciaríamos de contenido físico a la fórmula. El contenido de la segunda ley de Newton es que las interacciones entre objetos pueden describirse en términos de una magnitud llamada fuerza, y que conocida la fuerza que actúa sobre un objeto podemos calcular su aceleración con la fórmula $\vec{F} = m\vec{a}$, pero queremos que \vec{F} contenga información que podemos conocer *a priori* (a partir de la situación de las masas, cargas eléctricas, etc.) para predecir la aceleración \vec{a} , y no nos sirve una definición de \vec{F} que dependa de la aceleración \vec{A} que supuestamente \vec{F} tiene que determinar.

Así pues, ahora tenemos que postular que la acción que otros objetos ejercen sobre un sólido rígido puede plasmarse en una *densidad de fuerza* \vec{f} (que se medirá en N/m³), de modo que la fuerza que experimenta la porción del sólido contenida en una determinada región del espacio A viene dada por

$$\vec{F} = \int_A \vec{f} dx dy dz.$$

Por ejemplo, consideremos el caso de la fuerza gravitatoria en las proximidades de la superficie terrestre, que sobre partículas puntuales (respecto de un sistema de referencia con el tercer eje vertical) viene dada por

$$\vec{F} = (0, 0, -mg).$$

Para el caso de un sólido rígido, que tiene masa 0 en cada punto, pero masa no nula en global, tenemos que postular una función de densidad de fuerza

$$\vec{f} = (0, 0, -\rho g),$$

⁶Tradicionalmente, los físicos han “justificado” estas fórmulas mediante razonamientos infinitesimales sin rigor matemático, o bien por la mera analogía con el caso de los sistemas de partículas, cambiando sumas por integrales sin más justificación.

de modo que la fuerza gravitatoria se ejerce sobre una región A es

$$\vec{F} = \int_A (0, 0, -\rho g) dx dy dz = \vec{F} = \int_A (0, 0, -g) dm = (0, 0, -Mg),$$

donde M es la masa contenida en A .

Ahora no podemos decir que una fuerza se aplica en un punto en concreto, pero igualmente podemos definir el momento de fuerza (respecto al origen de coordenadas) como

$$\vec{M} = \int_V (\vec{r} \times \vec{f}) dx dy dz.$$

Por ejemplo, para la fuerza gravitatoria tenemos

$$\vec{M} = \int_V (\vec{r} \times (0, 0, -\rho g)) dx dy dz = \int_V \vec{r} dm \times (0, 0, -g) = \vec{R} \times (0, 0, -g).$$

Ahora bien, tenemos que distinguir entre *fuerzas de largo alcance*, como la gravitación, que afectan a todos los puntos de un sólido rígido, y *fuerzas de corto alcance*, que sólo afectan a puntos de su superficie. En el segundo caso tenemos que considerar funciones de densidad \vec{f} en N/m^2 o N/m según si se extienden por una superficie o por una curva, o incluso en N si sólo actúan sobre un punto.

Por ejemplo, si una esfera rueda por un plano, la fuerza de rozamiento actuará únicamente sobre el punto de contacto entre la esfera y el plano, y vendrá dada por un vector \vec{F} en N , que a su vez determinará un momento $\vec{r} \times \vec{F}$, donde \vec{r} es la posición del punto de contacto, pero si en vez de una esfera es un cilindro, el rozamiento actúa sobre el segmento de contacto, luego vendrá dada por una función de densidad lineal \vec{f} en N/m . En cualquier caso, a partir de la fuerza o de la función de densidad de fuerza podemos calcular la fuerza total \vec{F} que actúa sobre el sólido (integrando en su caso la función de densidad) y el momento \vec{M} (integrando $\vec{r} \times \vec{f}$).

Así pues, lo que afirman las leyes fundamentales de la dinámica del sólido rígido es que la acción de otros cuerpos sobre un sólido rígido (la gravitación, las fuerzas eléctricas, los rozamientos, etc.) pueden plasmarse *a priori* (es decir, sin presuponer nada sobre el movimiento del sólido) en fuerzas o densidades de fuerzas que determinan una fuerza total \vec{F} y un momento total \vec{M} de modo que se cumple

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt}, \quad \vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}.$$

Admitiendo esto, las demás igualdades en (A.10) pueden demostrarse sin más que calcar los argumentos que hemos empleado para sistemas de partículas (cambiando sumas por integrales). A su vez, de aquí podemos demostrar que

$$\frac{dE_c}{dt} = \vec{V} \cdot \vec{F} + \vec{\omega} \cdot \vec{M}_O.$$

Observemos que si una fuerza \vec{F} (aunque no sea la fuerza total que actúa sobre el sólido) viene dada por una función de densidad \vec{f} que actúa sobre una región A (que puede ser todo el sólido, o una superficie, o una curva), entonces

$$\begin{aligned}\vec{V} \cdot \vec{F} + \vec{\omega} \cdot \vec{M}_O &= \int_A (\vec{f} \cdot \vec{V} + \vec{\omega} \cdot (\vec{r} \times \vec{f})) d\mu = \int_A (\vec{f} \cdot \vec{V} + \vec{f} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r})) d\mu = \\ &= \int_A \vec{f} \cdot (\vec{V} + \vec{\omega} \times \vec{r}) d\mu = \int_A \vec{f} \cdot \vec{v} d\mu,\end{aligned}$$

donde μ es la medida en A que determina el volumen, el área o la longitud de cada subconjunto medible y \vec{v} es la velocidad del punto del sólido situado en una posición dada en un instante dado. En particular, si la fuerza \vec{F} se aplica en un único punto de posición \vec{r} , entonces

$$\vec{V} \cdot \vec{F} + \vec{\omega} \cdot \vec{M}_O = \vec{F} \cdot \vec{v}.$$

Esto nos lleva a definir el trabajo realizado por una fuerza en un intervalo de tiempo como

$$W = \int_{t_0}^{t_1} (\vec{V} \cdot \vec{F} + \vec{\omega} \cdot \vec{M}_O) dt = \int_{t_0}^{t_1} \int_A \vec{f} \cdot \vec{v} d\mu,$$

y así se cumple que el trabajo realizado por la fuerza total es la variación de energía cinética del sólido.

En el caso de la fuerza gravitatoria tenemos que

$$\begin{aligned}W &= \int_{t_0}^{t_1} \int_V (0, 0, -\rho g) \cdot \vec{v} dx dy dz = (0, 0, -g) \cdot \int_{t_0}^{t_1} \int_V \vec{v} dm = \\ &= (0, 0, -g) \cdot \int_{t_0}^{t_1} M \vec{V} dt = (0, 0, -g \Delta h),\end{aligned}$$

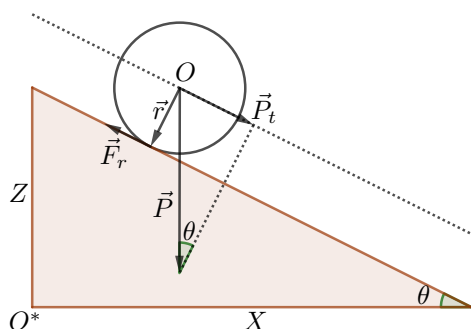
donde Δh es la variación de la altura del centro de masas respecto de cualquier origen de alturas prefijado, por lo que podemos definir la *energía potencial* (gravitatoria) de un sólido rígido como

$$E_p = Mgh,$$

y así el trabajo realizado por la fuerza gravitatoria es $W = -\Delta E_p$, luego la variación de la *energía mecánica* $E = E_c + E_p$ del sólido es $\Delta E = W_{nc}$ y así tenemos el principio de conservación de la energía:

La variación de la energía mecánica de un sólido rígido en un intervalo de tiempo es igual al trabajo realizado por las fuerzas distintas de la gravedad.

Planos inclinados Como primera aplicación, para ilustrar la teoría que acabamos de exponer, vamos a estudiar el movimiento de un objeto que cae rodando por un plano inclinado. Consideraremos simultáneamente cuatro casos, según que la forma del objeto sea la de una esfera maciza, una esfera hueca, un cilindro macizo o un cilindro hueco. En cualquier caso, una sección transversal de la situación es la que muestra la figura siguiente:



Consideramos el sistema de referencia inercial O^* con el eje Z vertical y el eje X en la dirección del movimiento. Observemos que, para respetar la regla de la mano derecha, el eje Y debe tener el semieje positivo “detrás de la página” y el semieje negativo “delante”. La velocidad angular es de la forma $\vec{\omega} = (0, \omega, 0)$, donde $\omega > 0$, pues así el sentido de giro es horario.

Las fórmulas (A.10) se reducen a:

$$\vec{F} = M\vec{A}, \quad \vec{M}_O = \vec{\alpha} \cdot I = (0, I_{yy}\alpha, 0),$$

porque en este contexto $\vec{\omega} \cdot I = (0, I_{yy}\omega, 0) = I_{yy}\vec{\omega}$, por lo que $\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \cdot I) = \vec{0}$. Notemos que, según la tabla A.1, el momento de inercia es $I_{yy} = kMR^2$, donde la constante k depende de la forma geométrica del móvil:

	Esfera maciza	Esfera hueca	Cilindro macizo	Cilindro hueco
k	$2/5 = 0.4$	$2/3 = 0.666$	$1/2 = 0.5$	1

Para aplicar estas fórmulas necesitamos determinar las fuerzas que actúan sobre el móvil y sus momentos respecto del centro de masas. Estas fuerzas son el peso \vec{P} debido a la gravedad, la fuerza \vec{N} de reacción del plano (que no está representada en la figura, pero que se ejerce en el punto de contacto y es perpendicular al plano) y la fuerza de rozamiento \vec{F}_r que el plano inclinado ejerce sobre el móvil en el punto de contacto en el caso de una esfera, o a lo largo del segmento de contacto si se trata de un cilindro. Puesto que el centro de masas tiene que moverse paralelamente al plano inclinado, si descomponemos el peso $\vec{P} = \vec{P}_n + \vec{P}_t$ en su componente normal al plano y su componente tangencial, tiene que ser (respecto del sistema de referencia inercial O^*):

$$\vec{F} = \vec{N} + \vec{P}_n + \vec{P}_t + \vec{F}_r = M\vec{A},$$

de donde se sigue que $\vec{N} = -\vec{P}_n$ y $\vec{P}_t + \vec{F}_r = M\vec{A}$.

Por otro lado, la fuerza gravitatoria no ejerce ningún momento respecto del centro de masas:

$$\begin{aligned}\vec{M}_O &= \int_V ((\vec{r} - \vec{R}) \times (0, 0, -\rho g)) dx dy dz = \int_V (\vec{r} - \vec{R}) dm \times (0, 0, -g) = \\ &= (M\vec{R} - \vec{R}M)\vec{R} \times (0, 0, -g) = \vec{0}.\end{aligned}$$

La fuerza \vec{N} tampoco genera momento, pues $\vec{r} \times \vec{N} = \vec{0}$, luego el único momento es el de la fuerza de rozamiento. En el caso de la esfera es

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}_r = (-R \operatorname{sen} \theta, 0, -R \operatorname{cos} \theta) \times F_r (-\operatorname{cos} \theta, 0, \operatorname{sen} \theta) = (0, RF_r, 0).$$

Para un cilindro la densidad de fuerza será $\vec{f} = f(y)(-\operatorname{cos} \theta, 0, \operatorname{sen} \theta)$, para $-h/2 \leq y \leq h/2$, donde h es la altura del cilindro, luego

$$\begin{aligned}\vec{M} &= \int_{-h/2}^{h/2} (-R \operatorname{sen} \theta, y, -R \operatorname{cos} \theta) \times f(y)(-\operatorname{cos} \theta, 0, \operatorname{sen} \theta) dy = \\ &= \int_{-h/2}^{h/2} (y \operatorname{sen} \theta, R, y \operatorname{cos} \theta) f(y) dy = (0, RF_r, 0),\end{aligned}$$

donde hemos usado que, por simetría, tiene que ser $f(y) = f(-y)$, luego la integral de la tercera componente es

$$\int_{-h/2}^{h/2} y f(y) dy = \int_{h/2}^{-h/2} -u f(-u) (-du) = - \int_{-h/2}^{h/2} u f(u) du,$$

por lo que la integral tiene que ser nula.

Así pues, la única fuerza responsable del giro de la esfera o el cilindro es el rozamiento. Si no hubiera el menor rozamiento, la esfera o el cilindro caería resbalando, sin girar.

En realidad, aunque haya rozamiento, eso no impide que un cuerpo que rueda pueda a la vez deslizarse. Por ejemplo, las ruedas de un coche pueden girar lentamente sobre una pista de hielo (o incluso estar paradas, o girando hacia atrás) y, pese a ello, el coche puede avanzar rápidamente patinando. Aquí vamos a suponer que no se da el caso, es decir, que el rozamiento es suficiente como para que el cuerpo descienda sin patinar. Explícitamente, eso significa que cada vez que la esfera o el cilindro avanza s metros en la dirección del plano inclinado, gira exactamente s/R radianes, donde R es el radio de la esfera/cilindro, de modo que los puntos que tocan el suelo al principio y al final del giro forman un arco de longitud s . Derivando, esto significa que la velocidad V con la que avanza el centro de masas y la velocidad angular ω con la que gira el objeto guardan la relación $\omega = V/R$ y, volviendo a derivar, $\alpha = A/R$.

Así pues, la condición de no deslizamiento que estamos imponiendo se traduce en que si sabemos a qué velocidad gira el cuerpo, sabemos a qué velocidad desciende sobre el plano, y viceversa.

En conclusión, la versión angular de la segunda ley de Newton se convierte en

$$(0, RF_r, 0) = (0, kMR^2\alpha, 0),$$

de donde

$$RF_r = kMR^2\alpha = kMRA,$$

luego $F_r = kMA = kF = k(P_t - F_r)$, lo que nos determina el módulo de la fuerza de rozamiento:

$$F_r = \frac{k}{1+k}P_t.$$

Vectorialmente:

$$\vec{F}_r = -\frac{k}{1+k}\vec{P}_t,$$

luego la fuerza total es

$$\vec{F} = \vec{P}_t + \vec{F}_r = \frac{1}{1+k}\vec{P}_t.$$

Con esto ya podemos determinar el movimiento del centro de masas. La fuerza total es:

$$\vec{F} = \frac{1}{1+k}Mg \text{ sen } \theta = M\vec{A},$$

luego la aceleración es

$$A = \frac{1}{1+k}g \text{ sen } \theta,$$

luego el espacio recorrido (sobre la trayectoria) partiendo del reposo es

$$s = \frac{1}{2} \frac{1}{1+k}g \text{ sen } \theta t^2.$$

En particular, el tiempo que tarda en recorrer una distancia L es

$$T = \sqrt{\frac{2L(1+k)}{g \text{ sen } \theta}}.$$

Vemos que el tiempo no depende ni de la masa del cuerpo ni de su tamaño (no depende de R), pero sí que depende de la forma geométrica del cuerpo, representada en la constante k .

Observemos que si hacemos $k = 0$ en la expresión que hemos obtenido para \vec{F} , ésta se reduce a \vec{P}_t , que es la fuerza que consideraríamos si tratáramos al cuerpo como una partícula puntual que desciende sin rozamiento. Por lo tanto,

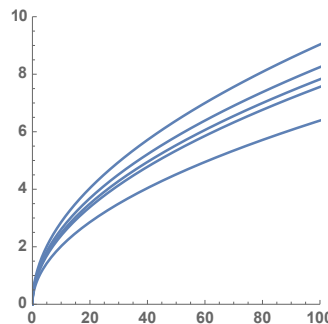
$$T_0 = \sqrt{\frac{2L}{g \text{ sen } \theta}}$$

es el tiempo que tarda en descender por el plano un objeto que no gira si no tenemos en cuenta el rozamiento (por ejemplo, un cubo de hielo). Es la expresión que obtuvimos en [IC] (ecuación (4.2), sólo que allí está expresada equivalentemente en términos de la altura $h = L \text{ sen } \theta$). Lo que hemos obtenido ahora es

que, si el cuerpo es una esfera o un cilindro que cae girando sin deslizarse, el tiempo que tarda es mayor:

$$T = T_0\sqrt{1+k}.$$

Si hacemos una carrera entre los cuatro objetos que hemos considerado y un quinto que descienda por el plano sin girar y sin rozamiento —por ejemplo un cubito de hielo— para el cual valen todos los cálculos precedentes con $k = 0$, vemos que llegará antes el que tenga un menor valor de k . La gráfica muestra el tiempo que tarda cada una en recorrer 100 m sobre un plano inclinado 30° . El primer cuerpo en llegar es el cubito de hielo (en 6.38 s), seguido de la esfera maciza (7.56 s), luego el cilindro macizo (7.82 s), luego la esfera hueca (7.82 s) y por último el cilindro hueco (9.03 s). La idea es que la rotación “roba” más energía cinética al centro de masas cuanto mayor es el momento de inercia del móvil.



Es esencial tener esto en cuenta, por ejemplo, si pretendemos medir la intensidad del campo gravitatorio terrestre midiendo el tiempo que tarda una bola en recorrer un plano inclinado. Por ejemplo, si calculamos g a partir del valor de 7.56 s sin tener en cuenta la rotación de la bola, es decir, el factor $1+k = 1.4$, obtendríamos $g = 7$ en lugar de $g = 9.8$.

Alternativamente, podríamos haber calculado los tiempos de descenso mediante el principio de conservación de la energía. Para ello tenemos que observar un hecho muy peculiar:

En un movimiento de rotación sin deslizamiento, la fuerza de rozamiento no produce trabajo.

En efecto, el trabajo ejercido por la fuerza de rozamiento es

$$\int_{t_0}^{t_1} \vec{F}_r \times \vec{v} dt$$

si ésta se ejerce sobre un único punto, o bien

$$W = \int_{t_0}^{t_1} \int_A \vec{f} \cdot \vec{v} d\mu$$

cuando la zona de contacto es un segmento, como en el caso del cilindro, pero en ambos casos \vec{v} es la velocidad de los puntos de contacto, y sucede que los puntos de una circunferencia que gira sin deslizamiento describen cicloides y tocan el suelo con velocidad nula, es decir, que en las integrales anteriores se cumple siempre $\vec{v} = \vec{0}$. En efecto, la velocidad es $\vec{v} = \vec{V} + \vec{\omega} \times \vec{r}$, y ambos sumandos tienen el mismo módulo $V = \omega R$, pero sentidos opuestos.

Como consecuencia, si un cuerpo cae por un plano inclinado rodando sin deslizamiento, su energía mecánica se conserva (ya que la única fuerza presente distinta de la gravitatoria no ejerce ningún trabajo) y esto permite calcular la posición del centro de masas a partir de la ecuación

$$E = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}kMR^2\frac{V^2}{R^2} + MgR_z = Mgh,$$

de donde

$$\frac{1}{2}(1+k)V^2 = f(H - R_z) = g s \operatorname{sen} \theta,$$

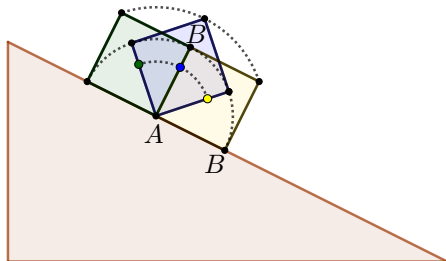
y basta resolver la ecuación diferencial

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\frac{2g \operatorname{sen} \theta}{1+k}} \sqrt{s}, \quad s(0) = 0,$$

que nos da la misma solución que ya hemos encontrado.

Que la fuerza de rozamiento no produzca ningún trabajo significa que simplemente hace que parte de la energía potencial del móvil no se transforme en energía cinética de traslación, sino en energía cinética de rotación, pero sin disipar energía. Esto es una conclusión un tanto “peculiar”, porque hemos “demostrado” que lanzamos una bola por una pista horizontal en la Luna, de modo que ruede sin deslizamiento (donde no hay una atmósfera que pueda frenarla por rozamiento), la bola nunca se detendrá, por larga o rugosa que sea la pista. Naturalmente, esto es falso, y la razón por la que hemos sido capaces de “demostrarlo” es que el marco teórico que hemos desarrollado para describir los sólidos rígidos no permite contemplar la complejidad del contacto entre dos superficies.

Para entender la situación puede ser ilustrativo comparar el caso de un cilindro hueco y su aproximación por el sistema de partículas que consta de 8 masas puntuales dispuestas en los vértices de un prisma de bases cuadradas. Si los cuadrados tienen el mismo radio que el cilindro y asignamos a cada partícula la octava parte de la masa del cilindro, tenemos un sistema de partículas con la misma masa, el mismo centro de masas y el mismo momento de inercia $I = MR^2$ respecto del eje de giro que el cilindro. Sin embargo, su movimiento va a ser muy distinto, lo que muestra a su vez por qué no es fácil deducir que las leyes fundamentales que valen para sistemas de partículas tienen que valer también para sólidos continuos.



Si no hay deslizamiento, el prisma girará alrededor de la partícula A y su opuesta en la cara paralela, y la partícula B describirá un arco de circunferencia hasta que chocará contra el plano y perderá su energía cinética, que se disipará como se disipa la de cualquier móvil que cae y choca contra el suelo, el centro de masas oscilará alejándose y acercándose al plano inclinado (lo que muestra que, en este caso, la reacción del plano inclinado no se limita a compensar el peso, sino que empuja hacia arriba al centro de masas). Vemos así que el sistema de partículas pierde energía con el “traqueteo”, un traqueteo que se reduce si sustituimos las bases cuadradas del prisma por polígonos con mayor número de lados y desaparece cuando consideramos circunferencias perfectas.

Esto no significa que no podamos incorporar la disipación de energía por rozamiento en el caso de un sólido continuo, pero para ello tendríamos que tener en cuenta que no es —no puede ser— perfectamente rígido, sino que tanto él como el plano inclinado se deforman imperceptiblemente a medida que avanza. La superficie del cilindro se aplasta ligeramente cuando toca el suelo y recupera su forma cuando se aleja de él, aunque la variación es inapreciable, como lo es la vibración que se produce cuando chocan dos sólidos. Dos sólidos perfectamente rígidos no harían ruido al chocar, porque no vibrarían. Y ese proceso de abombamiento y recuperación disipa energía en forma de calor, y aun así, esto no es más que una descripción simplificada de lo que sucede cuando dos sólidos entran en contacto.

Para terminar nuestro análisis, vamos a discutir en qué condiciones cabe esperar que la caída se produzca sin deslizamiento, como hemos supuesto.

En general, el rozamiento entre dos superficies en contacto puede ser de dos tipos: dinámico y estático, según si las superficies en contacto están en movimiento relativo o están en reposo. En el caso del movimiento sin deslizamiento el rozamiento es estático, y la forma usual de cuantificar las fuerzas de rozamiento estático consiste en considerar que son “las necesarias” siempre y cuando dicha necesidad no sobrepase un umbral proporcional a la fuerza normal que mantiene en contacto ambas superficies. La constante de proporcionalidad se llama *coeficiente de rozamiento estático* y depende de las características físicas de las superficies (de su rugosidad, etc.).

En el caso que nos ocupa, la fuerza normal entre el móvil y el plano inclinado es $P_n = Mg \cos \theta$, luego la máxima fuerza de rozamiento estático que podemos tener es $\mu_e Mg \cos \theta$, donde μ_e es el coeficiente de rozamiento. Por lo tanto, para que pueda darse el movimiento sin deslizamiento es necesario que

$$\frac{k}{1+k} Mg \sin \theta \leq \mu_e Mg \cos \theta,$$

lo que equivale a que

$$\frac{k}{1+k} \tan \theta \leq \mu_e.$$

Por ejemplo, para una esfera maciza ($k = 2/5$) es

$$\tan \theta \leq \frac{7}{2} \mu_e.$$

Por ejemplo, si la bola y el suelo son de madera, un valor razonable es $\mu_e = 0.5$, luego la caída será sin deslizamiento mientras $\theta \leq \arctan(7 \cdot 0.5/2) = 60.3^\circ$.

El caso opuesto es más sencillo. Si hay deslizamiento, la fuerza de rozamiento dinámico es también proporcional a la fuerza (normal) de contacto, pero con un factor de proporcionalidad μ_d que en general es menor. Por ejemplo, para la madera puede ser $\mu_d = 0.3$. Así, la fuerza de rozamiento es

$$F_r = \mu_d Mg \cos \theta$$

y la fuerza total será $F = Mg(\sin \theta - \mu_d \cos \theta)$, de la que obtenemos la aceleración del centro de masas. Por otro lado, el momento de la fuerza de rozamiento será $\vec{M} = \mu_d Mg \cos \theta R$, de donde $\vec{M} = I\alpha$ nos da

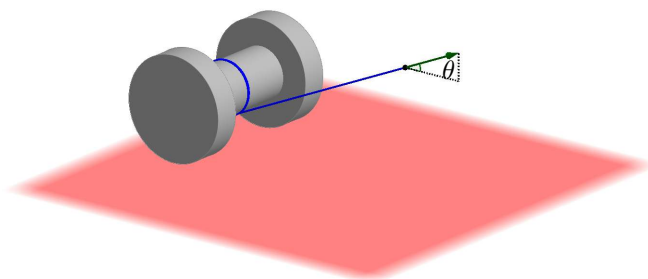
$$\mu_d Mg \cos \theta r = kMR^2\alpha,$$

luego la aceleración angular será

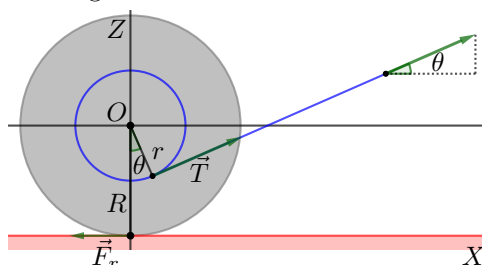
$$\alpha = \frac{\mu_d g \cos \theta}{kR},$$

de donde se obtiene la velocidad angular en cada instante, que no guarda relación con la velocidad del centro de masas. En este caso la velocidad en los puntos de contacto no es nula, por lo que la fuerza de rozamiento disipa energía. ■

Movimiento de un carrito Resolvemos ahora el problema planteado en la introducción sobre el movimiento de un carrito: ¿Hacia dónde se moverá el carrito si tiramos del hilo?



Suponemos que el coeficiente de rozamiento es suficientemente alto como para que el movimiento se produzca sin deslizamiento. Fijamos un sistema de referencia inercial con origen en el centro de masas del carrito.



Las fuerzas que actúan sobre el carrito son:

- La tensión \vec{T} del hilo, que se aplica en el punto $\vec{r} = (r \sin \theta, 0, -r \cos \theta)$ y genera un momento

$$\vec{r} \times \vec{T} = (r \sin \theta, 0, -r \cos \theta) \times (T \cos \theta, 0, T \sin \theta) = (0, -rT, 0).$$

- El peso \vec{P} y la reacción normal del suelo \vec{N} , de modo que

$$\vec{P} + \vec{N} + \vec{T}_n = \vec{0},$$

donde \vec{T}_n es la componente normal de la tensión. En efecto, las tres fuerzas tienen que cancelarse, pues el centro de masas no va a desplazarse verticalmente. Además ni \vec{P} y \vec{N} generan momentos, por lo que no necesitamos tenerlas en cuenta.

- La fuerza de rozamiento, que se aplica a lo largo de los dos segmentos donde los cilindros laterales tocan el suelo, pero cuya resultante será de la forma $\vec{F}_r = (F_r, 0, 0)$, donde, en principio, F_r puede ser positivo o negativo (en la figura está representado el caso en que $F_r < 0$). El momento que genera será

$$\vec{R} \times \vec{F}_r = (0, 0, -R) \times (F_r, 0, 0) = (0, -RF_r, 0).$$

La versión lineal de la segunda ley de Newton es:

$$T \cos \theta + F_r = MA,$$

mientras que la versión angular es

$$-rT - RF_r = I\alpha = \frac{IA}{R},$$

donde hemos impuesto la condición de que no haya deslizamiento: $\alpha = A/R$. El momento de inercia I es la suma de los momentos de inercia de los tres cilindros, pero su expresión explícita no simplifica las fórmulas, así que no la incluimos. Despejando F_r en la primera ecuación y sustituyendo en la segunda queda:

$$-rT - R(MA - T \cos \theta) = IA/R,$$

de donde

$$A = \frac{T}{M(1 + \frac{I}{MR^2})} \left(\cos \theta - \frac{r}{R} \right).$$

Definimos el ángulo crítico $\theta_c = \arccos(r/R)$, de modo que:

- Si $\theta = \theta_c$, entonces $A = 0$, por lo que el carrito permanece en reposo sea cual sea la fuerza T (luego matizaremos esto).
- Si $\theta > \theta_c$, entonces $\cos \theta < r/R$, por lo que $A < 0$ y el carrito se mueve hacia la izquierda y el hilo se desenrolla.

- Si $\theta < \theta_c$, entonces $\cos \theta > r/R$ y $A > 0$, por lo que el carrito se mueve hacia la derecha y el hilo se enrolla.

Para calcular la fuerza de rozamiento llamamos $k = I/MR^2$, de modo que

$$F_r = MA - T \cos \theta = \frac{T}{(1+k)} \left(\cos \theta - \frac{r}{R} \right) - T \cos \theta = -\frac{T}{1+k} \left(k \cos \theta + \frac{r}{R} \right).$$

Vemos así que \vec{F}_r apunta siempre hacia la izquierda. Cuando el carrito se mueve hacia la izquierda, evita que deslice, y cuando se mueve hacia la derecha es la fuerza que lo hace girar superando a \vec{T} , (pues \vec{T} lo haría girar en sentido contrario).

La fuerza normal que el carrito ejerce sobre el suelo es $Mg - T \sin \theta$, luego el máximo valor que puede alcanzar la fuerza de rozamiento que evita el deslizamiento es

$$\frac{T}{1+k} \left(k \cos \theta + \frac{r}{R} \right) \leq \mu_e (Mg - T \sin \theta),$$

que equivale a

$$T \leq \frac{\mu_e Mg(1+k)}{k \cos \theta + \mu_e(1+k) \sin \theta + \frac{r}{R}}.$$

Esto es especialmente relevante cuando $\theta = \theta_c$, y entonces la condición equivale a

$$T \leq \frac{\mu_e Mg}{\frac{r}{R} + \mu_e \sin \theta_c}.$$

Si T sobrepasa el valor máximo, el carrito empezará a moverse hacia la izquierda, desenrollando hilo, porque la fuerza de rozamiento se reducirá a

$$F_r = -\mu_d (Mg - T \sin \theta_c),$$

pero las ecuaciones que igualan las componentes horizontales de las fuerzas y los momentos son:

$$\mu_d (Mg - T \sin \theta_c) = Tr/R, \quad R\mu_d (Mg - T \sin \theta_c) = rT,$$

y vemos que son equivalentes, luego haciendo

$$T = \frac{\mu_d MgR}{r + \mu_d R \sin \theta_c}$$

se consigue que la aceleración angular también sea 0, con lo que el carrito puede desplazarse hacia la derecha sin girar. ■

Las ecuaciones de Euler En los ejemplos precedentes la rotación del sólido rígido era trivial (una rotación alrededor de un eje fijo con aceleración angular constante), y lo que realmente nos interesaba era conocer la aceleración del centro de masas. Sin embargo, en muchos casos la rotación de un sólido rígido puede ser más compleja, incluso en ausencia de fuerzas externas.

Vamos a considerar las ecuaciones fundamentales (A.10) en el sistema de referencia (no necesariamente inercial) O , en el cual $\vec{F} = \vec{0}$ (contando las fuerzas de inercia), de modo que la primera ecuación se vuelve trivial (el centro de masas está en reposo) y la segunda se reduce a

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\alpha} \cdot I + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \cdot I).$$

Si además tenemos en cuenta que hemos elegido los ejes coordenados del sistema de referencia O' de modo que la matriz del tensor de inercia sea diagonal, entonces las coordenadas de $\vec{\omega} \cdot I$ son simplemente $(I_1\omega_1, I_2\omega_2, I_3\omega_3)$, de donde se sigue inmediatamente que

$$\begin{aligned} M_1 &= I_1\alpha_1 + (I_3 - I_2)\omega_2\omega_3, \\ M_2 &= I_2\alpha_2 + (I_1 - I_3)\omega_1\omega_3, \\ M_3 &= I_3\alpha_3 + (I_2 - I_1)\omega_1\omega_2. \end{aligned}$$

Estas ecuaciones reciben el nombre de *ecuaciones de Euler*, y determinan la rotación del sólido rígido.

Ejercicio: Deducir de las ecuaciones de Euler que si un sólido rígido gira alrededor de un eje con velocidad angular constante y sobre él no actúan fuerzas exteriores, entonces el eje de giro es necesariamente uno de sus ejes principales.

Ángulos de Euler Antes de extraer conclusiones de las ecuaciones de Euler vamos a exponer la forma más adecuada de relacionar los sistemas de referencia O y O' . Llamemos $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ a los vectores de la base de O y $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ a los de O' . Supongamos en principio que \vec{e}_3 y \vec{u}_3 no están sobre la misma recta, de modo que los planos XY y $X'Y'$ se cortan en una recta, que recibe el nombre de *línea de nodos* (véase la figura). Llamamos α al ángulo que \vec{u}_1 forma con la línea de nodos (hay dos elecciones para α en el rango de 0 a 2π).

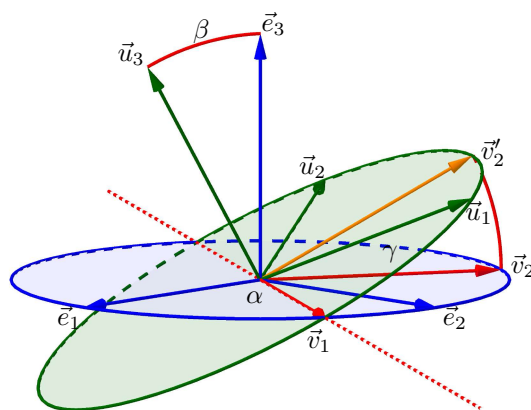
El sistema de referencia que resulta de girar los ejes de O un ángulo α alrededor del eje Z tiene base $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ con \vec{v}_1 apuntando en la dirección de la línea de nodos. Las coordenadas respecto de O de un punto que en el nuevo sistema de referencia tienen coordenadas (x'', y'', z'') se calculan mediante la relación

$$(x, y, z) = (x'', y'', z'') \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

El vector \vec{v}_1 es ortogonal tanto a \vec{e}_3 como a \vec{u}_3 , luego, si llamamos β al ángulo que forman estos dos vectores (que estamos suponiendo distinto de 0 o π), un

giro de ángulo β respecto del eje determinado por \vec{v}_1 transforma el sistema de referencia en otro de base $\vec{v}_1, \vec{v}'_2, \vec{u}_3$. El cambio de coordenadas es

$$(x'', y'', z'') = (x''', y''', z''') \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta & \text{sen } \beta \\ 0 & -\text{sen } \beta & \cos \beta \end{pmatrix}.$$



Por último, si llamamos γ al ángulo que \vec{u}_1 forma con la línea de nodos, un giro de ángulo γ transforma el sistema de referencia al que hemos llegado en O' , y el cambio de coordenadas es

$$(x''', y''', z''') = (x', y', z') \begin{pmatrix} \cos \gamma & \text{sen } \gamma & 0 \\ -\text{sen } \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Recapitulando, O se puede transformar en O' mediante tres giros de ángulos α, β, γ , donde α es el ángulo entre el eje X (de O) y la línea de nodos, β es el ángulo entre los ejes Z y Z' y γ el ángulo entre X' y la línea de nodos. Estos tres ángulos se conocen como los *ángulos de Euler* de O y O' . Si los dos sistemas de referencia tienen el mismo eje Z , entonces $\beta = 0$ y $\alpha + \gamma$ es el ángulo que forman \vec{u}_1 y \vec{v}'_1 , pero cualquier terna de la forma $(\alpha, 0, \gamma)$ en la que $\alpha + \gamma$ tome un mismo valor determina un mismo sistema de referencia O' .

Si llamamos A, B y C a las tres matrices de cambio de coordenadas anteriores, entonces $T = CBA$ es la matriz de cambio de coordenadas de O' a O , cuyas filas son las coordenadas respecto de O de los vectores $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ de la base de O' . Un cálculo rutinario nos da la matriz.

$$T = \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \gamma - \text{sen } \alpha \cos \beta \text{sen } \gamma & \text{sen } \alpha \cos \gamma + \cos \alpha \cos \beta \text{sen } \gamma & \text{sen } \beta \text{sen } \gamma \\ -\cos \alpha \text{sen } \gamma - \text{sen } \alpha \cos \beta \cos \gamma & -\text{sen } \alpha \text{sen } \gamma + \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma & \text{sen } \beta \cos \gamma \\ \text{sen } \alpha \text{sen } \beta & -\cos \alpha \text{sen } \beta & \cos \beta \end{pmatrix}.$$

Tenemos entonces que la rotación del sólido rígido está determinada respecto de O por tres funciones $\alpha(t), \beta(t), \gamma(t)$. Vamos a calcular la velocidad angular

$\vec{\omega}$ de O' respecto de O . Para ello observamos que las ecuaciones (A.1) equivalen a que

$$M = \frac{dT}{dt} T^t = \begin{pmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Derivar T sería muy laborioso, pero una alternativa es la siguiente:

$$\begin{aligned} M &= \frac{dT}{dt} T^t = \left(\frac{dC}{dt} BA + C \frac{dB}{dt} A + CB \frac{dA}{dt} \right) A^t B^t C^t \\ &= \frac{dC}{dt} C^t + C \frac{dB}{dt} B^t C^t + CB \frac{dA}{dt} A^t B^t C^t, \end{aligned}$$

donde hemos usado que las matrices A , B , C son ortogonales, por lo que sus traspuestas son sus inversas. Ahora, la matriz

$$\frac{dA}{dt} A^t = \begin{pmatrix} 0 & \alpha' & 0 \\ -\alpha' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

es especialmente simple, al igual que las correspondientes para B y C , lo que permite calcular fácilmente la matriz M y concluir que

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \alpha' \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \gamma + \beta' \cos \gamma, \\ \omega_2 &= \alpha' \operatorname{sen} \beta \cos \gamma - \beta' \operatorname{sen} \gamma, \\ \omega_3 &= \alpha' \cos \beta + \gamma', \end{aligned} \tag{A.11}$$

(donde las primas indican derivación respecto de t).

Vemos entonces que si el sólido se mueve manteniendo α y β constantes, entonces \vec{u}_3 (la última fila de la matriz T) permanece constante, luego el eje Z' permanece inmóvil respecto de O , y $\vec{\omega} = (0, 0, \gamma')$, lo que significa que el sólido está girando alrededor del eje Z' con velocidad angular γ' . En particular, un incremento en el ángulo γ se traduce en un giro del sólido de $\Delta\gamma$ radianes alrededor del eje Z' .

Si, por el contrario, el sólido se mueve manteniendo β y γ constantes, entonces

$$\vec{\omega} = \alpha' (\operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \gamma, \operatorname{sen} \beta \cos \gamma, \cos \beta),$$

luego el sólido está girando con velocidad angular α' alrededor de un eje cuyas coordenadas respecto de O' no son sino $(0, 0, 1)T^t$, por lo que se trata⁷ del eje Z . En particular, un incremento en el ángulo α se traduce en un giro del sólido de $\Delta\alpha$ radianes alrededor del eje Z .

En suma, a través de los ángulos de Euler, el movimiento del sólido respecto de O puede describirse como la superposición de tres movimientos:

- Un movimiento de *rotación (intrínseca)* alrededor de un eje (el eje Z') con velocidad angular γ' .

⁷Téngase en cuenta que $T^t = T^{-1}$ es la matriz de cambio de coordenadas de O a O' .

- Un movimiento de *precesión*, por el que el eje de giro gira a su vez alrededor de un eje (el eje Z) con velocidad angular α' .
- Un movimiento de *nutación*, por el que el eje de rotación se acerca o se aleja del eje de precesión con velocidad angular β' .

Notemos que estos tres movimientos conmutan entre sí: el efecto de aplicar al sólido una rotación $\Delta\gamma$, una precesión $\Delta\alpha$ y una nutación $\Delta\beta$ es el mismo⁸ independientemente del orden en que se haga.

Ejemplo: Movimiento libre de fuerzas exteriores Vamos a estudiar el movimiento de un sólido rígido con simetría axial sobre el que no actúa ninguna fuerza exterior. Esto hace que el centro de masas permanezca en reposo, por lo que si consideramos sistemas de referencia O y O' en las condiciones de la sección anterior con origen en el centro de masas, el observador O será inercial. Más aún, como el momento angular \vec{L} será constante, podemos suponer que el eje Z tiene la dirección (y el sentido) de \vec{L} . Sabemos además que el tensor de inercia tiene dos componentes iguales y no perdemos generalidad si suponemos que son $I_1 = I_2$, es decir, que Z' es el eje de simetría del sólido. Las ecuaciones de Euler son:

$$\begin{aligned} I_1\alpha_1 &= (I_1 - I_3)\omega_2\omega_3, \\ I_1\alpha_2 &= (I_3 - I_1)\omega_1\omega_3, \\ I_3\alpha_3 &= 0. \end{aligned}$$

La tercera ecuación nos da que $\alpha_3 = 0$, luego ω_3 es constante. Vamos a tratar aparte los siguientes casos particulares:

- $I_1 = I_3$.
- $\omega_3 = 0$.
- $\omega_1 = \omega_2 = 0$.

En los tres casos se cumple que $\vec{\alpha} = \vec{0}$, luego $\vec{\omega}$ es constante, lo cual equivale a que el sólido está en reposo (si $\vec{\omega} = \vec{0}$) o está girando alrededor del eje determinado por $\vec{\omega}$ con velocidad angular constante. Notemos además que dicho eje será principal, en el caso a) porque todos lo son, en el caso b) por ser perpendicular al eje Z' y en el caso c) por ser el eje Z' .

A partir de aquí supondremos que no estamos en ninguno de los tres casos anteriores. Más aún, podemos suponer que $\omega_3 > 0$ sin más que invertir en caso necesario el sentido del eje Z' (e intercambiar los ejes X' e Y' para conservar la orientación).

Si llamamos $\Omega = \omega_3(I_3 - I_1)/I_1$, tenemos que

$$\frac{d\omega_1}{dt} = -\Omega\omega_2, \quad \frac{d\omega_2}{dt} = \Omega\omega_1. \quad (\text{A.12})$$

⁸Notemos que esto no equivale a que las matrices A , B y C conmuten, lo cual es falso.

Derivando la primera ecuación y sustituyendo en la segunda queda

$$\frac{d^2\omega_1}{dt^2} = \Omega \frac{d\omega_2}{dt} = -\Omega^2\omega_1.$$

La solución de esta ecuación diferencial es

$$\omega_1 = A \cos(\Omega t + \phi), \quad \omega_2 = A \sin(\Omega t + \phi), \quad (\text{A.13})$$

donde $A \neq 0$ porque hemos descartado el caso c). Así pues, respecto de O' , el vector $\vec{\omega}$ recorre un cono alrededor del eje Z' con velocidad angular constante Ω sin variar su módulo. Por otra parte, las coordenadas de \vec{L} respecto de O' son:

$$\vec{L} = (I_1 A \cos(\Omega t + \phi), I_1 A \sin(\Omega t + \phi), I_3 \omega_3).$$

Esto significa que \vec{L} recorre otro cono alrededor del eje Z' , alineado radialmente con $\vec{\omega}$, luego también con velocidad angular Ω .

Puesto que \vec{L} marca la dirección del eje Z , en particular tenemos que éste forma un ángulo constante con el eje Z' , lo que, en términos de los ángulos de Euler equivale a que β es constante, luego el sólido se mueve sin nutación. Si llamamos $\omega_r = \gamma'$ y $\omega_p = \alpha'$ a las velocidades de rotación y precesión, respectivamente, las expresiones (A.11) se reducen a:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \omega_r \sin \alpha \sin \beta, \\ \omega_2 &= \omega_r \cos \alpha \sin \beta, \\ \omega_3 &= \omega_r \cos \beta + \omega_p. \end{aligned}$$

Vemos así que ha de ser $\beta \neq 0$, o de lo contrario estaríamos en el caso c) que ya hemos tratado aparte. En particular: $\omega^2 = \omega_r^2 + \omega_p^2$. Comparando con (A.13) queda $A = \omega_r \sin \beta$, luego ω_r es constante, y la tercera de las ecuaciones anteriores implica que ω_p también es constante. Más aún, comparando con (A.12) vemos que $\omega_p = -\Omega$. De la definición de Ω obtenemos que

$$\omega_p = -\frac{I_3 - I_1}{I_1}(\omega_r \cos \beta + \omega_p),$$

lo que nos da la relación entre las velocidades de precesión y de rotación:

$$\omega_p = \left(\frac{I_1 - I_3}{I_3} \cos \beta \right) \omega_r. \quad (\text{A.14})$$

Equivalentemente, la relación entre los periodos de rotación y precesión es:

$$T_r = \left(\frac{|I_1 - I_3|}{I_3} \cos \beta \right) T_p.$$

El caso de la Tierra Se sabe que el ángulo β que forman el eje de rotación y el eje de precesión de la Tierra es muy pequeño, inferior a 0.2 segundos sexagesimales, por lo que, en la fórmula anterior $\cos \beta > 0.99999999999953$. Uniendo esto a los valores (A.8) de I_1 e I_3 que hemos calculado para la Tierra, la fórmula anterior nos da que

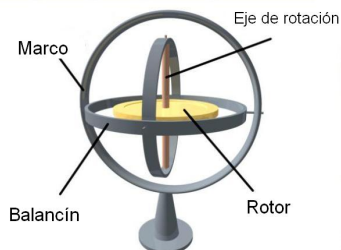
$$T_p = 316.62 T_r$$

Naturalmente, $T_r = 1$ día, luego, en teoría, el eje de rotación de la Tierra debería girar alrededor del eje de la esfera celeste completando una vuelta cada 316 días. Este movimiento fue predicho por Newton, y en 1765 Euler calculó un periodo de 305 días. Sin embargo, no fue hasta 1881 cuando el astrónomo Seth Carlo Chandler logró detectarlo, por lo que hoy se conoce como *bamboleo de Chandler*. En realidad es muy irregular y tiene un periodo de 433 días. La diferencia con el valor predicho la explicó Simon Newcomb teniendo en cuenta que la Tierra no es rígida, sino que tiene un núcleo fluido y una capa líquida formada por los océanos. Durante muchos años no se dispuso de ninguna explicación de por qué este bamboleo no terminaba amortiguándose (los cálculos predecían que debía desaparecer en unos 68 años), pero en 2001 se obtuvo por primera vez una explicación de cómo varios procesos geológicos pueden realimentar continuamente el bamboleo.

Por otra parte, la atracción gravitatoria del Sol y la Luna le produce otro efecto de precesión de periodo mucho mayor, conocido como precesión de los equinoccios, así como un movimiento de nutación. ■

A.6 Movimiento giroscópico

En la sección [IC 6.6] estudiamos con detalle el movimiento de un péndulo esférico, considerado como una partícula puntual obligada a mantenerse a una distancia constante de un punto fijo. Aquí vamos a estudiar una situación más general. En el sentido más amplio de la palabra, un *giroscopio* es cualquier sólido con un eje de simetría que gira sobre su eje manteniendo fijo uno de sus puntos (es decir, que sobre un punto del eje se ejerce la fuerza estrictamente necesaria \vec{F} para que dicho punto permanezca en reposo). Por ejemplo, una peonza que gira sobre un suelo lo suficientemente rugoso como para impedir que el punto de contacto se mueva es un giroscopio. La figura siguiente muestra un giroscopio típico de laboratorio, y consta de un rotor enmarcado en un mecanismo de suspensión que le permite girar libremente manteniendo fijo su centro:



Los giroscopios se han usado durante mucho tiempo para guiar o estabilizar aviones, misiles, etc., aunque ahora el sistema GPS de posicionamiento por satélites resulta más eficiente.

Vamos a estudiar el movimiento de un giroscopio bajo la acción de la gravedad. Por comodidad hablaremos de una peonza, si bien hay que tener presente que todo cuanto digamos vale para giroscopios arbitrarios, y que incluso algunas de las posibilidades que nos van a aparecer serían imposibles para una peonza “normal”. (Por ejemplo, una posibilidad es que la “peonza” gire colgada del techo.) También conviene tener presente que, en principio, vamos a permitir, pero no exigir, que el giroscopio gire. Un giroscopio que no gira es esencialmente un péndulo esférico. La única diferencia estriba en que el giroscopio es un sólido rígido, mientras que el péndulo esférico lo hemos estudiado bajo el supuesto de que era una partícula puntual. No obstante, veremos que esta diferencia es irrelevante y que un giroscopio que no gira se comporta de forma totalmente análoga a un péndulo esférico con su partícula situada en la posición del centro de masas. Sin embargo, vamos a ver que la rotación del giroscopio amplía considerablemente sus posibilidades de movimiento.

Tomaremos sistemas de referencia O y O' centrados el punto fijo (no necesariamente el centro de masas), de modo que O es un sistema de referencia inercial. Supondremos que el eje Z' es el eje de simetría de la peonza. En particular contendrá a su centro de masas, digamos en la posición $\vec{R}' = (0, 0, l)$. El eje Z de O lo tomamos vertical, en el sentido de que el peso que actúa sobre cada partícula tiene para O coordenadas $\vec{P}_i = (0, 0, -m_i g)$.

Ya hemos visto que el peso resultante es $\vec{P} = (0, 0, -Mg)$. Como la fuerza \vec{F} que fija el punto O se aplica en el origen de coordenadas, el momento que genera es nulo, luego el momento total que actúa sobre la peonza es

$$\vec{M} = \vec{R} \times \vec{P}.$$

Multiplicando \vec{P} por la matriz T^t de cambio de coordenadas obtenemos las coordenadas del peso respecto de O' , que son

$$\vec{P} = -Mg(\text{sen } \beta \text{ sen } \gamma, \text{sen } \beta \text{ cos } \gamma, \text{cos } \beta).$$

Por lo tanto, las coordenadas del momento respecto a O' son

$$\vec{M} = (0, 0, l) \times \vec{P} = Mgl(\text{sen } \beta \text{ cos } \gamma, -\text{sen } \beta \text{ sen } \gamma, 0).$$

De aquí obtenemos las ecuaciones de Euler:

$$\begin{aligned} I_1 \omega'_1 &= Mgl \text{sen } \beta \text{ cos } \gamma + (I_1 - I_3) \omega_2 \omega_3, \\ I_1 \omega'_2 &= -Mgl \text{sen } \beta \text{ sen } \gamma + (I_3 - I_1) \omega_1 \omega_3, \\ I_3 \omega'_3 &= 0. \end{aligned}$$

En este punto podemos descartar dos casos triviales: si $\text{sen } \beta = 0$ en todo instante o si $l = 0$ (es decir, si O es el centro de masas). En ambos casos el peso

no ejerce ningún momento sobre la peonza y sus posibilidades de movimiento son las mismas que nos aparecían en la sección anterior, donde suponíamos que las fuerzas exteriores eran nulas.

El primer caso corresponde al caso trivial en el que $\omega_1 = \omega_2 = 0$, con lo que la peonza se mantiene en reposo (en equilibrio inestable) sobre su punto de apoyo, o bien está girando sobre su eje de simetría con velocidad angular constante (o está colgada del techo, girando o no, si $\beta = \pi$).

El segundo caso no puede darse en una peonza, pues no puede tener su centro de masas en su punto de apoyo con el suelo. Según lo visto en la sección anterior, un giroscopio sostenido por su centro de masas mantendrá su eje con una inclinación constante β (no hay nutación) y su movimiento será la superposición entre un movimiento de rotación y otro de precesión, de modo que las velocidades angulares respectivas y el ángulo entre los ejes de rotación y precesión satisfacen la ecuación⁹ (A.14).

Descartados estos casos, vemos que la tercera ecuación de Euler nos da que la tercera coordenada respecto de O' del momento angular, es decir,

$$L'_3 = I_3\omega_3 = I_3(\alpha' \cos \beta + \gamma')$$

es constante. Esto es una consecuencia inmediata de que la tercera componente respecto de O' del momento del peso es nula, lo cual a su vez se debe a que el vector de posición \vec{R} del centro de masas respecto de O' es vertical, luego el momento angular ha de ser horizontal.

Ahora bien, del mismo modo podemos observar que, como \vec{P} tiene dirección vertical respecto de O , el momento \vec{M} también es horizontal para O , luego también $M_3 = 0$ y la tercera coordenada L_3 de \vec{L} respecto de O también ha de ser constante. Para calcularla multiplicamos las coordenadas de \vec{L} respecto de O' , que son $(I_1\omega_1, I_1\omega_2, I_3\omega_3)$, por la matriz T de cambio de coordenadas. El resultado es

$$L_3 = I_1\omega_1 \sin \beta \sin \gamma + I_1\omega_2 \sin \beta \cos \gamma + I_3\omega_3 \cos \beta.$$

Sustituyendo las expresiones de ω_1 y ω_2 dadas por (A.11) obtenemos que

$$L_3 = I_1\alpha' \sin^2 \beta + L'_3 \cos \beta \tag{A.15}$$

es constante.

Un tercer invariante es la energía total de la peonza (cinética más potencial). En efecto, la variación de la energía total de la peonza es igual al trabajo que realizan sobre ella las fuerzas exteriores distintas del peso, pero la única fuerza en cuestión es la fuerza \vec{F} que fija el punto O , que no realiza ningún trabajo porque el punto sobre el que se aplica está inmóvil.

La energía potencial es MgZ , donde Z es la tercera componente (respecto de O) del vector de posición del centro de masas. Esta componente se obtiene

⁹Notemos que el ángulo β de la ecuación (A.14) es el ángulo entre el eje de rotación y el de precesión, mientras que aquí es el ángulo entre el eje de rotación y la vertical.

multiplicando $(0, 0, l)$ por la matriz T , y es $l \cos \beta$. En definitiva, la energía potencial de la peonza es $V = Mgl \cos \beta$ y

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}(I_1\omega_1^2 + I_1\omega_2^2 + I_3\omega_3^2) + Mgl \cos \beta \\ &= \frac{1}{2}(I_1\alpha'^2 \sin^2 \beta + I_1\beta'^2 + L_3'^2/I_3) + Mgl \cos \beta \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

es constante. La última expresión se obtiene aplicando las ecuaciones (A.11). Despejando α' en (A.15) y sustituyendo en la expresión anterior obtenemos

$$E = \frac{I_1}{2}\beta'^2 + \frac{(L_3 - L_3' \cos \beta)^2}{2I_1 \sin^2 \beta} + \frac{L_3'^2}{2I_3} + Mgl \cos \beta.$$

Llamando $E' = E - L_3'^2/2I_3$ y $u = \cos \beta$ llegamos a la ecuación diferencial

$$u'^2 = \frac{2}{I_1}(E' - Mglu)(1 - u^2) - \frac{(L_3 - L_3'u)^2}{I_1^2}. \quad (\text{A.17})$$

En principio hemos llegado a esta ecuación bajo el supuesto de que $\sin \beta \neq 0$ (en un tiempo dado t), pero es fácil ver que también es válida en los instantes en los que $\sin \beta = 0$, pues entonces sus dos miembros se anulan.¹⁰

El polinomio $f(u)$ Llamaremos $f(u)$ al miembro derecho de (A.17), es decir:

$$f(u) = \frac{2}{I_1}(E' - Mglu)(1 - u^2) - \frac{(L_3 - L_3'u)^2}{I_1^2}.$$

Se trata de un polinomio cúbico cuyo coeficiente director es $2Mgl/I_1 > 0$, por lo que tiende a $\pm\infty$ cuando u tiende a $\pm\infty$ respectivamente. Además

$$f(\pm 1) = -\frac{(L_3 - L_3'u)^2}{I_1^2} \leq 0$$

y como, para $u = \cos \beta$ ha de ser $f(u) = u'^2 \geq 0$, el polinomio ha de ser no negativo al menos en un punto del intervalo $[-1, 1]$. Si llamamos $u_1 \leq u_2 \leq u_3$ a sus raíces, estas condiciones implican¹¹ que

$$-1 \leq u_1 \leq u_2 \leq 1 \leq u_3.$$

En particular, la única posibilidad para que $u_2 = u_3$ es que $u_2 = u_3 = 1$.

¹⁰En este punto es evidente la analogía con la teoría del péndulo esférico: las ecuaciones (A.15) y (A.17) se particularizan a [IC (6.19)] y [IC (6.21)], respectivamente, haciendo $L_3' = 0$.

¹¹Sin embargo, al contrario de lo que sucede en un péndulo esférico, ya no es cierto que $f(1) = 0$ si y sólo si $f(-1) = 0$, por lo que pueden darse nuevas posibilidades, como que $f(u)$ tenga una raíz triple (necesariamente en $u_1 = u_2 = u_3 = 1$).

La trayectoria del eje Para describir el movimiento de la peonza es útil considerar la trayectoria que sigue el punto de corte de su eje de simetría con la esfera unitaria centrada en O , en otras palabras, la trayectoria del punto que para O' tiene coordenadas $(0, 0, 1)$. La posición para O es

$$\vec{r} = (\text{sen } \alpha \text{ sen } \beta, -\text{cos } \alpha \text{ sen } \beta, \text{cos } \beta).$$

Su velocidad es

$$\vec{v} = (\alpha' \text{cos } \alpha \text{sen } \beta + \beta' \text{sen } \alpha \text{cos } \beta, \alpha' \text{sen } \alpha \text{sen } \beta - \beta' \text{cos } \alpha \text{cos } \beta, -\beta' \text{sen } \beta),$$

cuyo módulo es $v = \sqrt{\alpha'^2 \text{sen}^2 \beta + \beta'^2}$.

Ausencia de nutación Vamos a estudiar ahora en qué condiciones puede suceder que $\beta' = 0$, es decir, que el movimiento se produzca sin nutación. La invarianza de L_3 implica que α' es constante y entonces la invarianza de L'_3 implica que γ' también lo es. Las ecuaciones (A.11) se reducen a

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \alpha' \text{sen } \beta \text{sen } \gamma, \\ \omega_2 &= \alpha' \text{sen } \beta \text{cos } \gamma, \\ \omega_3 &= \alpha' \text{cos } \beta + \gamma'. \end{aligned}$$

Al sustituir en las ecuaciones de Euler obtenemos que

$$\begin{aligned} I_1 \gamma' \alpha' \text{sen } \beta \text{cos } \gamma &= Mgl \text{sen } \beta \text{cos } \gamma + (I_1 - I_3) \alpha' \text{sen } \beta \text{cos } \gamma \omega_3, \\ -I_1 \gamma' \alpha' \text{sen } \beta \text{sen } \gamma &= -Mgl \text{sen } \beta \text{sen } \gamma + (I_3 - I_1) \alpha' \text{sen } \beta \text{sen } \gamma \omega_3. \end{aligned}$$

Simplificando:

$$\begin{aligned} I_1 \gamma' \alpha' &= Mgl + (I_1 - I_3) \alpha' \omega_3, \\ -I_1 \gamma' \alpha' &= -Mgl + (I_3 - I_1) \alpha' \omega_3. \end{aligned}$$

Vemos, pues que se reducen a una única condición:

$$I_1 \gamma' \alpha' = Mgl + I_1 \alpha'^2 \text{cos } \beta + I_1 \alpha' \gamma' - \alpha' L'_3,$$

que a su vez se simplifica hasta

$$I_1 \text{cos } \beta \alpha'^2 - L'_3 \alpha' + Mgl = 0 \quad (\text{A.18})$$

o, equivalentemente,

$$(I_1 - I_3) \text{cos } \beta \alpha'^2 - I_3 \gamma' \alpha' + Mgl = 0. \quad (\text{A.19})$$

Así, si $I_1 = I_3$ o $\text{cos } \beta = 0$, el movimiento sin nutación requiere unas velocidades de rotación y precesión constantes no nulas que guarden la proporción

$$\alpha' \gamma' = \frac{Mgl}{I_3}.$$

En otro caso, la ecuación (A.19) tiene grado dos en α' , luego para que la peonza pueda moverse sin nutación es necesario que su discriminante no sea negativo, es decir, que¹²

$$\gamma'^2 \geq \frac{4(I_1 - I_3)Mgl \cos \beta}{I_3^2}.$$

Así pues, la ausencia de nutación requiere que la rotación sea suficientemente rápida y, para cada velocidad de rotación γ' , hay dos velocidades posibles de precesión sin nutación, dadas por

$$\alpha' = \frac{I_3 \gamma' \pm \sqrt{I_3^2 \gamma'^2 - 4(I_1 - I_3)Mgl \cos \beta}}{2(I_1 - I_3) \cos \beta}$$

Expresando la ecuación anterior en la forma

$$\alpha' = \frac{I_3 \gamma'}{2(I_1 - I_3) \cos \beta} \pm \frac{I_3 \gamma'}{2(I_1 - I_3) \cos \beta} \sqrt{1 - \frac{4(I_1 - I_3)Mgl \cos \beta}{I_3^2 \gamma'^2}}$$

vemos que si γ' es mucho mayor que la velocidad mínima necesaria, entonces la velocidad rápida de precesión sin nutación es aproximadamente

$$\alpha'_r = \frac{I_3 \gamma'}{(I_1 - I_3) \cos \beta}.$$

La velocidad lenta de precesión sin nutación ha de cumplir que

$$\alpha'_r \alpha'_l = \frac{Mgl}{(I_1 - I_3) \cos \beta},$$

pues las dos velocidades son las raíces de la ecuación (A.19), con lo que la velocidad lenta será aproximadamente

$$\alpha'_l = \frac{Mgl}{I_3 \gamma'}.$$

Raíces dobles de $f(u)$ Hemos visto que la condición necesaria y suficiente para que el ángulo β permanezca constante es que se cumpla la ecuación (A.18). Además, $u = \cos \beta$ cumplirá la ecuación $f(u) = 0$. Vamos a ver que, siempre que $u \neq \pm 1$, la condición (A.18) es equivalente a que u sea una raíz doble del polinomio $f(u)$. Por simplificar escribiremos $f(u)$ en la forma

$$f(u) = (p - qu)(1 - u^2) - (r - su)^2.$$

Si u es una raíz doble de $f(u)$, entonces también anula a su derivada:

$$f'(u) = -q(1 - u^2) - 2u(p - qu) + 2s(r - su) = 0.$$

¹²Una peonza “normal” cumple que $I_1 > I_3 > 0$, por lo que la condición es trivial si $\cos \beta \leq 0$, sin embargo, a diferencia de lo que le sucede a un péndulo circular, una peonza puede mantenerse en equilibrio con su eje en un ángulo que cumpla $\cos \beta > 0$ a condición de que gire con velocidad suficiente.

Despejamos $p - qu$ en la primera ecuación y sustituimos en la segunda:

$$-\frac{q}{2} - u \frac{(r - su)^2}{(1 - u^2)^2} + 2s(r - su) = 0.$$

Ahora observamos que, por la definición de L_3 ,

$$r - su = \frac{L_3}{I_1} - \frac{L'_3}{I_1}u = \alpha'(1 - u^2),$$

con lo que nos queda

$$-\frac{q}{2} - u\alpha'^2 + s\alpha' = 0.$$

Sustituyendo q y s por sus valores llegamos a (A.18). Invirtiendo el razonamiento tenemos la implicación contraria, es decir, que si se cumple (A.18) y $f(u) = 0$, entonces también $f'(u) = 0$.

En el razonamiento anterior hemos supuesto que $u \neq \pm 1$, pues ya hemos tratado aparte estos casos. De todos modos, conviene observar que cuando $u = \pm 1$ en todo instante t , entonces u es raíz doble de $f(u)$. En efecto, de (A.15) deducimos que $L_3 = \pm L'_3$, y de (A.16) que $E' = \pm Mgl$, con lo que

$$f(u) = \frac{2E'}{I_1}(\pm 1 - u)(1 - u^2) - \frac{L_3^2}{I_1^2}(\pm 1 - u)^2,$$

y $u = \pm 1$ es ciertamente una raíz doble.

En cuanto al recíproco, si $f(u)$ tiene una raíz doble en -1 , es claro que toma valores negativos en todo el intervalo $] -1, 1[$, luego u sólo puede tomar el valor -1 (aunque fuera $f(1) = 0$, no sería una raíz doble, luego u no podría ser constante igual a 1). Sin embargo, luego veremos que aunque $f(u)$ tenga una raíz doble en 1, el valor de u no tiene por qué ser constante.

Ahora podemos probar con el mismo argumento empleado para el péndulo esférico que el eje de la peonza ha de oscilar entre los valores u_1 y u_2 salvo a lo sumo en el caso de que $u_1 < u_2 = 1 = u_3$, pues entonces puede mantenerse en equilibrio vertical o bien puede —según veremos— ascender hasta la posición de equilibrio a lo largo de un tiempo infinito. Recordemos el argumento:

Por una parte, $u(t)$ no puede salirse del intervalo $[u_1, u_2]$, pues el único valor en $[-1, 1]$ donde $f(u)$ podría ser no negativo fuera de dicho intervalo sería $u = 1$, pero, si estuviera fuera del intervalo, $f(u)$ no podría tener una raíz doble en él, luego $u(t)$ no podría ser constante igual a 1. Por otra parte, si $u'(t) > 0$ en un instante dado, entonces $u(t)$ tiene que aumentar hasta que u' se anule, lo cual sucederá al llegar a u_2 y, como u no puede permanecer constante a u_2 (salvo en el caso excepcional $u_2 = 1 = u_3$), tendrá que descender hasta llegar a u_1 , desde donde tendrá que volver a ascender, y así sucesivamente.

Nutación periódica Consideramos ahora el caso en que el polinomio $f(u)$ tiene tres raíces simples $-1 \leq u_1 < u_2 < u_3$, de modo que

$$f(u) = \frac{2Mgl}{I_1}(u - u_1)(u_2 - u)(u_3 - u).$$

En el intervalo de tiempo $[0, T/2]$ en que el eje va desde u_1 hasta u_2 la función $u(t)$ es creciente, luego podemos considerar su inversa $t(u)$, que cumplirá que

$$\frac{dt}{du} = \frac{1}{\sqrt{f(u)}}.$$

Por consiguiente, si $u = u(t)$,

$$t = \int_{u_1}^u \frac{dt}{\sqrt{f(u)}} = \sqrt{\frac{I_1}{2Mgl}} \int_{u_1}^u \frac{du}{\sqrt{(u-u_1)(u_2-u)(u_3-u)}}.$$

Salvo la constante inicial, esta integral es la misma que aparece en [IC (6.23)], por lo que desde aquí llegamos a la misma expresión [IC (6.24)]:

$$\cos \beta = u = u_1 + (u_2 - u_1) \operatorname{sn}^2(pt | k^2), \quad (\text{A.20})$$

donde ahora

$$p = \sqrt{\frac{Mgl(u_3 - u_1)}{2I_1}}, \quad k = \sqrt{\frac{u_2 - u_1}{u_3 - u_1}}.$$

Tenemos así determinada la nutación de la peonza. Como sn^2 tiene periodo $2K$, el periodo de la nutación es

$$T = \frac{2K}{p} = \sqrt{\frac{8I_1}{Mgl(u_3 - u_1)}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \phi}}.$$

Las velocidades de precesión y rotación vienen dadas por

$$\alpha' = \frac{L_3 - L'_3 u}{I_1(1 - u^2)}, \quad \gamma' = \frac{L'_3}{I_3} - \frac{(L_3 - L'_3 u)u}{I_1(1 - u^2)}. \quad (\text{A.21})$$

Nutación acotada Consideremos ahora el caso en que las raíces del polinomio $f(u)$ cumplen $-1 < u_1 < u_2 < 1 \leq u_3$. Sabemos que u oscila en el intervalo $[u_1, u_2]$, por lo que el ángulo de nutación β oscila en un intervalo $[\beta_{\min}, \beta_{\max}]$, con $-\pi/2 < \beta_{\min} < \beta_{\max} < \pi/2$.

El movimiento de nutación se puede combinar con el de precesión de tres formas distintas:

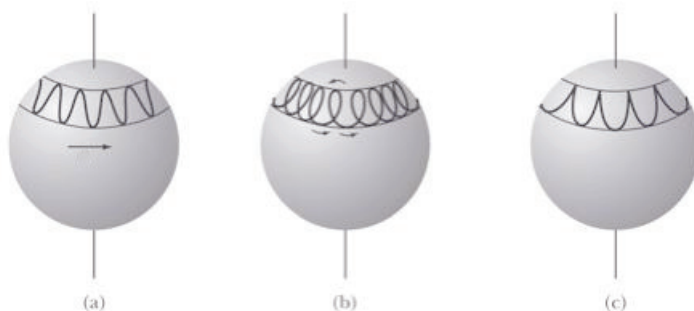
- a) Si $L_3 - L'_3 u$ tiene signo constante, es decir,¹³ si $L'_3 = 0$ o L_3/L'_3 no está en el rango de variación de u , entonces la precesión del eje de simetría de la peonza avanza siempre en el mismo sentido sin detenerse en ningún momento. El corte del eje con una esfera sigue una trayectoria como la que muestra el caso (a) de la figura siguiente.

¹³Notemos que $L_3 \neq -L'_3$ porque en caso contrario sería $u_1 = -1$. En particular no puede ser $L_3 = L'_3 = 0$. Éste es el único caso que puede cumplir un péndulo esférico. Los dos siguientes son específicos del movimiento giroscópico.

- b) Si $u_0 = L_3/L'_3$ está en el interior del intervalo de variación de u , entonces la velocidad de precesión cambia de sentido y el resultado es el que muestra el caso (b) de la figura siguiente.
- c) Si $u_0 = L_3/L'_3$ es uno de los extremos del intervalo de variación de u , entonces es necesario que se trate del extremo superior, pues el hecho de que $f(u_0) = 0$ implica que $E' - Mglu_0 = 0$, y entonces

$$f'(u_0) = -\frac{2Mglu_0}{I_1}(1 - u_0^2) < 0,$$

luego u_0 es el extremo superior y corresponde al ángulo de nutación β_{\min} . Se trata de un caso similar al anterior, salvo por que la velocidad de precesión se anula cada vez que el eje llega a su altura máxima, lo que se traduce en que su trayectoria forma picos, como en el caso (c) de la figura siguiente.



En la descripción de los tres casos anteriores hemos afirmado dos cosas que no son obvias: una es que, ciertamente, en el tercer caso la trayectoria del eje Z' cortado con una esfera forma “picos”, mientras que en el primer caso no los hay. La justificación es la siguiente:

Hemos calculado antes la velocidad de la trayectoria que determina el eje sobre la esfera unitaria de centro O , cuyo módulo es $v = \sqrt{\alpha'^2 \sin^2 \beta + \beta'^2}$. En el primer caso no se anula nunca porque $\alpha' \neq 0 \neq \sin \beta$. Por lo tanto, en el primer caso la trayectoria tiene un vector tangente $\tau = \vec{v}/v$ continuo en todo instante, lo que se interpreta como que no tiene “picos”.

En el tercer caso v se anula únicamente cuando $\beta = \beta_{\max}$, ya que entonces $\beta' = \alpha' = 0$, luego la trayectoria sólo puede tener picos en sus puntos de altura máxima. Vamos a ver que los tiene realmente. Sabemos que

$$\alpha' = \frac{u_0 - u}{L'_3 I_1 (1 - u^2)}$$

y que u_0 es raíz simple de $f(u)$, luego $f(u) = (u - u_0)g(u)$, con $g(u_0) \neq 0$. Por consiguiente

$$\lim_{u \rightarrow u_0} \frac{\alpha'^2}{\beta'^2} = \lim_{u \rightarrow u_0} \frac{u_0 - u}{L_3^2 I_1^2 (1 - u^2) g(u)} = 0.$$

Por lo tanto, si t_0 es un instante en el que la peonza alcanza su altura máxima, resulta que

$$v(t) = |\beta'| \sqrt{(\alpha'^2/\beta'^2) \operatorname{sen}^2 \beta + 1} = |\beta'| h(t), \quad \text{donde} \quad \lim_{t \rightarrow t_0} h(t) = 1.$$

Por consiguiente, según la expresión de \vec{v} obtenida en la página 563,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{|\beta'|}{\beta'} \vec{r} &= \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\vec{v}}{\beta' h(t)} = \\ &= \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{1}{h(t)} \left(\frac{\alpha'}{\beta'} \cos \alpha \operatorname{sen} \beta + \operatorname{sen} \alpha \cos \beta, \frac{\alpha'}{\beta'} \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta - \cos \alpha \cos \beta, -\operatorname{sen} \beta \right) \\ &= (\operatorname{sen} \alpha \cos \beta, -\cos \alpha \cos \beta, -\operatorname{sen} \beta). \end{aligned}$$

Es fácil ver que este vector está en el plano determinado por \vec{r} y el eje Z y es ortogonal a \vec{r} , es decir, que es tangente a la esfera unitaria y apunta en la dirección de un meridiano. Ahora bien, como β' cambia de signo en t_0 , la función $|\beta'|/\beta'$ es discontinua en t_0 , donde pasa de -1 a 1 o viceversa. Por consiguiente, la trayectoria del eje llega a su punto máximo con tangente apuntando hacia arriba y sale con tangente apuntando hacia abajo, y ese cambio brusco del sentido de la tangente se refleja en un pico.

Mucho más delicada es una cuestión concerniente al segundo caso, y es que, puesto que el movimiento de cambia de sentido, no es evidente que globalmente suponga un avance, sino que el eje de la peonza podría estar oscilando adelante y atrás sin dar la vuelta al eje Z . Vamos a ver que eso es imposible.

De la fórmula (A.20) se deduce que $u(T/2-t) = u(T/2+t)$ para todo tiempo t . El incremento del ángulo α cuando el eje de la peonza sube desde β_{\max} hasta β_{\min} es

$$\Delta_1 \alpha = \int_0^{T/2} \alpha'(t) dt = \int_0^{T/2} \alpha'(u(t)) dt,$$

mientras que el incremento de α cuando la peonza baja de β_{\min} a β_{\max} es

$$\begin{aligned} \Delta_2 \alpha &= \int_{T/2}^T \alpha'(u(t)) dt = \int_0^{T/2} \alpha'(u(T/2+t)) dt = \int_0^{T/2} \alpha'(u(T/2-t)) dt \\ &= - \int_{T/1}^0 \alpha'(u(t)) dt = \Delta_1 \alpha. \end{aligned}$$

Así pues, el avance de la precesión mientras la peonza sube es el mismo que mientras baja. Sólo hemos de probar que este avance no es nulo. Probaremos un poco más, a saber, que tiene el mismo signo que $\alpha'(T/2) \neq 0$. (Recordemos que α' se anula cuando u toma el valor $u_0 = L_3/L'_3$, y esto sucede en un tiempo estrictamente comprendido entre 0 y $T/2$, por lo que $u_1 < u_0 < u_2 < 1 \leq u_3$.) El cambio de variable $u = u(t)$ nos da que

$$\Delta \alpha = - \int_{u_2}^{u_1} \alpha'(u) \frac{du}{\sqrt{f(u)}} = \int_{u_1}^{u_2} \frac{L_3 - L'_3 u}{I_1(1-u^2)} \frac{du}{\sqrt{f(u)}} = \frac{L'_3}{I_1} \int_{u_1}^{u_2} \frac{u_0 - u}{1-u^2} \frac{du}{\sqrt{f(u)}}.$$

Si $L'_3 > 0$, entonces $\alpha'(u_1) > \alpha'(u_2)$ y, como α' cambia de signo, ha de ser $\alpha'(u_1) > 0 > \alpha'(u_2)$. Recíprocamente, si $L'_3 < 0$ ha de ser $\alpha'(u_1) < 0$. Por consiguiente, todo se reduce a demostrar que la última integral es positiva. Más aún, sacando de la integral el coeficiente director de $f(u)$ (que es positivo), basta probar que

$$I = \int_{u_1}^{u_2} \frac{u_0 - u}{1 - u^2} \frac{du}{\sqrt{(u - u_1)(u_2 - u)(u_3 - u)}} > 0. \quad (\text{A.22})$$

Vamos a ver que esto es cierto siempre que $-1 < u_1 < u_0 < u_2 < 1 \leq u_3$ así como que

$$\frac{1 - u_0}{1 + u_0} = \sqrt{\frac{(1 - u_1)(1 - u_2)(u_3 - 1)}{(u_1 + 1)(u_2 + 1)(u_3 + 1)}}. \quad (\text{A.23})$$

Esta relación se cumple en nuestro caso porque el radicando es $f(1)/f(-1)$, y $f(u)$ es el miembro derecho de (A.17), por lo que dicho cociente es igual a

$$\frac{(L_3 - L'_3)^2}{(L_3 + L'_3)^2} = \left(\frac{1 - u_0}{1 + u_0}\right)^2.$$

Para estudiar la integral descomponemos

$$\frac{u_0 - u}{1 - u^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1 + u_0}{1 + u} - \frac{1 - u_0}{1 - u} \right).$$

Consecuentemente, la integral I de (A.22) se descompone como

$$2I = \int_{u_1}^{u_2} \frac{1 + u_0}{1 + u} \frac{du}{\sqrt{(u - u_1)(u_2 - u)(u_3 - u)}} \\ - \int_{u_1}^{u_2} \frac{1 - u_0}{1 - u} \frac{du}{\sqrt{(u - u_1)(u_2 - u)(u_3 - u)}}.$$

Ahora usamos que

$$\frac{1}{\sqrt{u_3 + 1}} < \frac{1}{\sqrt{u_3 - u}} < \frac{1}{\sqrt{u_3 - 1}},$$

con lo que

$$2I > \frac{1 + u_0}{\sqrt{u_3 + 1}} \int_{u_1}^{u_2} \frac{du}{(1 + u)\sqrt{(u - u_1)(u_2 - u)}} \\ - \frac{1 - u_0}{\sqrt{u_3 - 1}} \int_{u_1}^{u_2} \frac{du}{(1 - u)\sqrt{(u - u_1)(u_2 - u)}}$$

$$= \frac{1+u_0}{\sqrt{(1+u_1)(1+u_2)(1+u_3)}} \int_{u_1}^{u_2} \frac{\sqrt{(1+u_1)(1+u_2)} du}{(1+u)\sqrt{(u-u_1)(u_2-u)}} \\ - \frac{1-u_0}{\sqrt{(1-u_1)(1-u_2)(u_3-1)}} \int_{u_1}^{u_2} \frac{\sqrt{(1-u_1)(1-u_2)} du}{(1-u)\sqrt{(u-u_1)(u_2-u)}}.$$

Ahora bien, en [IC (6.28)] hemos visto que las dos últimas integrales valen π , luego en total tenemos que

$$2I > \pi \left(\frac{1+u_0}{\sqrt{(1+u_1)(1+u_2)(1+u_3)}} - \frac{1-u_0}{\sqrt{(1-u_1)(1-u_2)(u_3-1)}} \right) = 0$$

por (A.23).

Equilibrio de una peonza Vamos a considerar el caso particular en el que mantenemos fijo el eje de rotación de la peonza con una inclinación β_0 girando con velocidad angular constante γ'_0 y en un momento dado liberamos el eje (con lo que $\alpha'_0 = \beta'_0 = 0$). Entonces

$$L'_3 = I_3 \gamma'_0, \quad L_3 = I_3 \gamma'_0 \cos \beta_0, \quad E' = Mgl \cos \beta_0.$$

Llamamos $u_2 = \cos \beta_0$, con lo que

$$f(u) = \frac{2Mgl}{I_1}(u_2 - u)(1 - u^2) - \frac{L_3'^2}{I_1^2}(u_2 - u)^2.$$

Vemos así que u_2 es una de las raíces de $f(u)$, y las otras dos son las raíces de la ecuación

$$\frac{2Mgl}{I_1}(1 - u^2) - \frac{L_3'^2}{I_1^2}(u_2 - u) = 0.$$

Nos interesa la menor de ellas, que es

$$u_1 = \frac{L_3'^2 - \sqrt{L_3'^4 - 8MglI_1L_3'^2u_2 + (4MglI_1)^2}}{4MglI_1}.$$

Observamos que si γ'_0 (o, equivalentemente, L_3') tiende a 0 entonces u_1 tiende a -1 , es decir, la peonza caerá más cuanto más lentamente gire. Por otra parte,

$$u_2 - u_1 = \frac{2MglI_1(1 - u_1)^2}{L_3'^2}.$$

Como el numerador está acotado, vemos que cuando γ'_0 tiende a ∞ se cumple que u_1 tiende a u_2 . Así pues, la caída de la peonza se puede hacer tan pequeña como se quiera aumentando la velocidad inicial de rotación.

Veamos qué sucede si u_2 tiende a 1. En otras palabras: tenemos una peonza girando sobre su eje vertical y una pequeña fuerza la saca mínimamente de su posición de equilibrio. Las otras dos raíces de la ecuación son

$$\frac{L_3'^2 \pm (L_3'^2 - 4MglI_1)}{4MglI_1}.$$

Una de ellas es $u = 1$ y la otra

$$u = \frac{I_3'^2}{2MglI_1} - 1. \quad (\text{A.24})$$

Aquí se dan dos casos posibles: si esta segunda raíz es ≥ 1 , es decir, si

$$\gamma'^2 \geq \frac{4MglI_1}{I_3'^2}, \quad (\text{A.25})$$

entonces se trata de u_3 y lo que tenemos es que $u_1 = 1$. Más precisamente: si se cumple esta condición, cuando u_2 tiende a 1 se cumple que u_1 también tiende a 1, luego si la peonza es desviada ligeramente de su posición de equilibrio y su velocidad de rotación es suficientemente grande, pasará a moverse con nutación casi inapreciable y apenas caerá. Por el contrario, si la velocidad de rotación es pequeña, la raíz dada por (A.24) es u_1 y la peonza caerá hasta una altura que se corresponderá aproximadamente con dicho valor de u .

Así, si una peonza está girando con su eje en vertical y su velocidad angular cumple (A.25) se dice que está en *equilibrio estable*, en el sentido de que una pequeña perturbación sólo producirá una pequeña oscilación en su eje, mientras que si se cumple la desigualdad opuesta se encuentra en *equilibrio inestable*, pues una pequeña perturbación modificará sensiblemente el movimiento del eje.¹⁴

Estos casos tienen su interpretación en términos de las raíces del polinomio $f(u)$: Lo que acabamos de ver es que si la peonza está girando en equilibrio con el eje en vertical entonces $f(u)$ tiene una raíz doble en $u = 1$ y la tercera raíz es (A.24). La condición de equilibrio estable equivale a que las raíces sean $1 = u_1 = u_2 \leq u_3$, mientras que el equilibrio inestable se corresponde con $u_1 < u_2 = u_3 = 1$.

Elevación asintótica Observemos que si $f(u)$ tiene raíces $1 = u_1 = u_2 \leq u_3$, entonces es negativo en todo el intervalo $[-1, 1[$, por lo que el único movimiento posible para la peonza es el de rotación en equilibrio estable. Sin embargo, cuando las raíces son $-1 \leq u_1 < 1 = u_2 = u_3$, en principio el ángulo β de la peonza puede tomar valores en el intervalo $[u_1, 1]$. En este apartado supondremos además que $u_1 > -1$. Vamos a ver que si el eje de la peonza se encuentra en posición vertical en un instante dado, entonces es que permanece en vertical, y la peonza está girando en equilibrio inestable. La razón es que —como vamos a demostrar— si el eje se encuentra inclinado en un instante dado, nunca llega a situarse en posición vertical.

En efecto, si la velocidad inicial β' es positiva, el eje de la peonza descenderá hasta llegar al ángulo determinado por u_1 y desde ahí volverá a subir, puesto

¹⁴En realidad, si γ'^2 es inferior pero muy parecido al miembro derecho de (A.25), se puede decir que el equilibrio también es estable, pues u_1 será parecido a 1 y la nutación también será pequeña. No obstante, el valor de γ' dado por (A.25) es crítico porque, si la velocidad de rotación va descendiendo (por ejemplo, por rozamiento), esto no afectará al equilibrio de la peonza mientras permanezca por encima de dicho valor, mientras que en cuanto lo traspase la nutación se irá haciendo cada vez más acusada.

que no puede ir más abajo ni puede permanecer en u_1 (porque u_1 no es raíz doble de $f(u)$). Sin embargo, el tiempo que requeriría para llegar hasta $u_2 = 1$ desde la posición u viene dado por la integral divergente

$$T = \int_u^1 \frac{du}{\sqrt{f(u)}} = k \int_u^1 \frac{du}{(1-u)\sqrt{u-u_1}}.$$

Como $f(1) = 1$, tenemos que $L_3 = L'_3$, pero no pueden ser ambos nulos o también tendríamos $f(-1) = 0$. Que la raíz sea doble implica que $E' = Mgl$. Así pues, las derivadas de los ángulos de Euler son

$$\begin{aligned} \beta'^2 &= \frac{f(u)}{1-u^2} = \frac{2Mgl}{I_1}(1-u) - \frac{L_3'^2(1-u)}{I_1^2(1+u)}, \\ \alpha' &= \frac{L_3'(1-u)}{I_1(1-u^2)} = \frac{L_3'}{I_1(1+u)}, \quad \gamma' = \frac{L_3'}{I_3} - \frac{L_3'u}{I_1(1+u)}. \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

En particular vemos que la precesión no cambia de sentido. La trayectoria del eje sobre la esfera unitaria es una espiral que lo va aproximando cada vez más al polo norte sin llegar a alcanzarlo nunca. La velocidad de nutación tiende a 0 y $\alpha' + \gamma'$ tiende a ω_3 . Por supuesto, llega un momento en el que el eje de la peonza está prácticamente en posición vertical y en reposo, con lo que (en teoría) una peonza puede enderezarse hasta girar en equilibrio inestable. (En la práctica, la más mínima perturbación la sacaría de este equilibrio y volvería a caer.)

Notemos que las condiciones para que se dé este caso son

$$L_3 = L'_3 \neq 0, \quad E' = Mgl, \quad L_3'^2 < 4MglI_1,$$

junto con que el eje de la peonza se encuentre en un instante en posición oblicua. Las dos primeras condiciones equivalen a que 1 sea raíz doble de $f(u)$ y que $f(-1) \neq 0$, y la tercera a que se trate de la raíz $u_2 = u_3$.

Nutación no acotada superiormente Consideramos ahora el caso en que $f(u)$ tiene a $u_2 = 1$ como raíz simple. (El caso en que $u_3 = 1$ es una raíz simple lo hemos contemplado ya en el apartado de nutación acotada, y $u_1 = 1$ nunca puede ser una raíz simple.) Supondremos también que $u_1 > -1$, con lo que tendremos cubiertos todos los casos en los que $f(1) = 0$ excepto aquellos en los que también $f(-1) = 0$. En este caso las tres raíces son simples, luego la nutación se produce en el intervalo $[u_1, 1]$ según la ecuación (A.20). La peculiaridad de este caso es que, aunque el eje llega a $u = 1$ con $u' = 0$, no es cierto que $\beta' = 0$. En efecto, en el instante en que el eje está en posición vertical la ecuación (A.16) se reduce a $E' = I_1\beta_1'^2 + Mgl$, donde β_1' es el valor de β' en dicho instante, y ha de ser $\beta_1' \neq 0$ porque si $E' = Mgl$ entonces $f(u)$ tendría una raíz doble en $u = 1$. Esto significa que la nutación no cambia de sentido cuando el eje llega a la posición vertical, sino que éste sigue avanzando para “caer” por el meridiano opuesto.

Notemos que el ángulo de precesión α no está definido cuando $\beta = 0$ y, por definición, se incrementa en π radianes cuando pasa por la posición vertical. Así, en el instante en que β llega a 0 la derivada pasa de tomar el valor $\beta_1' < 0$

a tomar el valor $-\beta'_1 > 0$, por lo que la gráfica de $\beta(t)$ tiene un “pico” en este instante, si bien esto sólo se debe a los convenios que definen los ángulos de Euler. En realidad, la trayectoria que describe el eje sobre la esfera unitaria de centro O es regular (sin “picos”), pues su velocidad $v = \sqrt{\alpha'^2 \sin^2 \beta + \beta'^2}$ no se anula nunca. Las velocidades de precesión y rotación vienen dadas por las fórmulas (A.26).

Nutación no acotada inferiormente Supongamos ahora que $f(-1) = 0$. Si -1 es una raíz doble, entonces se trata del único valor de u para el que $f(u)$ no es negativo, luego la peonza permanece “colgada del techo” con su eje en posición vertical y girando con cualquier velocidad angular constante arbitraria $\gamma' - \alpha'$.

Para el resto de este apartado supondremos que las raíces de $f(u)$ cumplen $-1 = u_1 < u_2 < 1 \leq u_3$. La condición $f(-1) = 0$ nos da que $L_3 = -L'_3$. Si ambos son nulos (lo cual equivale a que $u_3 = 1$), las fórmulas (A.21) nos dan que $\alpha' = \gamma' = 0$, y (A.16) se reduce a

$$E = \frac{1}{2}I_1\beta'^2 + Mgl \cos \beta,$$

que es la ecuación análoga a la obtenida al principio de la sección [IC 6.5] para el péndulo simple (la única diferencia es que aparece el momento de inercia I_1 en lugar de la masa y que el coseno está cambiado de signo porque ahora el origen de ángulos está arriba en lugar de abajo). Concluimos que la “peonza” oscila como un péndulo simple, y que el hecho de que ahora la consideremos un sólido rígido en lugar de una partícula puntual sujeta por una varilla de masa despreciable se traduce en que hay que cambiar la longitud l del péndulo por $l' = Ml/I_1$, lo que nos da la ecuación

$$E = \frac{1}{2}I_1\beta'^2 + I_1gl' \cos \beta,$$

totalmente análoga a la obtenida en [IC].

Cuando $u_3 > 1$ tenemos un movimiento pendular determinado por las ecuaciones (A.20) y (A.21), que se simplifican a

$$\alpha' = -\frac{L'_3}{I_1(1-u)}, \quad \gamma' = \frac{L'_3}{I_3} + \frac{L'_3 u}{I_1(1-u)}.$$

En particular vemos que el sentido de la precesión es constante. Aquí hay que tener en cuenta precisiones análogas a las que hemos hecho en el caso de la nutación no acotada superiormente, sobre que la velocidad β' no es nula cuando el péndulo llega al punto más bajo y que el eje no retrocede al llegar a dicho punto, sino que avanza para subir por el meridiano opuesto siguiendo una trayectoria derivable.

El péndulo vertical Terminamos con un caso especial de posible movimiento pendular de una peonza, el que se da cuando las raíces del polinomio $f(u)$ cumplen $-1 = u_1 < u_2 = 1 \leq u_3$. Como -1 es raíz simple, u no puede ser constantemente -1 , y entonces, como $f(\pm 1) = 0$ implica que $L_3 = L'_3 = 0$, ha de ser¹⁵ $\alpha' = \gamma' = 0$. La variación de β viene determinada por (A.16):

$$E' = \frac{I_1}{2}\beta'^2 + Mgl \cos \beta,$$

donde $E' \geq Mgl$ (porque u puede tomar valores tan próximos a 1 como se quiera) y se da la igualdad si y sólo si 1 es raíz doble de $f(u)$. Cuando $E' > Mgl$ estamos dentro del caso del apartado anterior, concretamente en el correspondiente al movimiento de péndulo simple, con la única peculiaridad de que el movimiento pendular llega a su punto más alto con velocidad no nula, por lo que no retrocede, sino que describe una trayectoria circular cuya velocidad angular aumenta cuando la peonza baja y disminuye cuando sube, pero que es no nula en el punto más alto. Concretamente, el tiempo que tarda la peonza en subir desde el punto más bajo es

$$\frac{T}{2} = \sqrt{\frac{I_1}{2}} \int_0^\pi \frac{d\beta}{\sqrt{E' - Mgl \cos \beta}}.$$

Cuando $E' = Mgl$ la velocidad tiende a cero a medida que la peonza sube y la integral es divergente, por lo que el tiempo que tarda en subir es infinito. Esto significa que la peonza tiende a quedarse plantada en equilibrio inestable.

¹⁵Puede ocurrir que la peonza permanezca en equilibrio inestable con $u = 1$, y entonces sólo podemos afirmar que $\alpha' + \gamma' = 0$, pero esto es tanto como decir que no hay rotación.

Apéndice B

Gravitación

Sabemos que el campo gravitatorio generado por una partícula puntual de masa M situada en un punto y viene dado por

$$\vec{E}(x) = -\frac{GM}{\|x - y\|^3} (x - y), \quad (\text{B.1})$$

donde hay que entender que un cuerpo de masa m situado en la posición x experimentará una fuerza gravitatoria $\vec{F}(x) = m\vec{E}(x)$. Además, dicho campo gravitatorio puede expresarse en la forma

$$\vec{E} = -\nabla V,$$

donde

$$V(x) = -\frac{GM}{\|x - y\|} \quad (\text{B.2})$$

es el potencial gravitatorio determinado por la partícula considerada. (Véanse las observaciones previas a la definición [IC 5.23].)

Los modelos de masas puntuales son válidos para estudiar, por ejemplo, el movimiento de los planetas, pero no sirven en otros contextos, como a la hora de describir la interacción entre la Tierra y los objetos próximos a ella. En tal caso debemos tener en cuenta la forma geométrica del espacio que ocupan las masas.

Tal y como explicamos en la sección A.3, una alternativa es considerar que la distribución de la materia en el espacio está determinada por una función de densidad ρ , de modo que la masa contenida en un volumen Ω vendrá dada por

$$M = \int_{\Omega} \rho \, dv.$$

Para calcular una aproximación de la intensidad del campo gravitatorio generado por la distribución de masas ρ en un punto x podemos dividir el espacio en regiones pequeñas de volumen $\rho \, dv$, calcular la intensidad correspondiente a

esta masa y sumar las fuerzas así obtenidas. Con ello estamos calculando una aproximación de la integral

$$\vec{E}(x) = -G \int_{\Omega} \frac{\rho(y)}{\|x-y\|^3} (x-y) dv(y), \quad (\text{B.3})$$

donde Ω es un volumen que contiene a toda la masa que influye (el dominio de ρ). Ésta debe ser la expresión exacta de la citada intensidad del campo. Un razonamiento similar con los potenciales nos lleva a que el potencial gravitatorio en el punto x debe ser

$$V(x) = -G \int_{\Omega} \frac{\rho(y)}{\|x-y\|} dv(y). \quad (\text{B.4})$$

No obstante, todo esto nos plantea varios problemas. En primer lugar hemos de justificar que las integrales existen, pues si $x \in V$ el integrando tiende a infinito en x . Por otra parte no es evidente que estas funciones cumplan $E = -\nabla V$, que es la relación que debe darse para que V sea una función potencial de E . Esto es parte de lo que demuestra el teorema 8.14.

B.1 El campo gravitatorio de una esfera

Consideremos de nuevo el campo gravitatorio (B.1) generado por una partícula puntual de masa M situada en una posición $y \in \mathbb{R}^3$, que está determinado por la función de potencial (B.2), de modo que $\vec{E} = -\nabla V$. Un cálculo elemental muestra que

$$\Delta V = \operatorname{div} \nabla V = -\operatorname{div} \vec{E} = 0$$

en todos los puntos de $\mathbb{R}^3 \setminus \{y\}$, donde el campo está definido. Por el teorema de la divergencia, esto se traduce en que si $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ es un abierto acotado con frontera de clase C^1 tal que $y \notin \bar{\Omega}$, el flujo de \vec{E} a través de $\partial\Omega$ es nulo.

Sin embargo, la condición de que $y \notin \bar{\Omega}$ es esencial, pues si¹ $y \in \Omega$ podemos tomar una bola abierta $B_r(y)$ cuya clausura esté contenida en Ω , y así el abierto $\Omega_r = \Omega \setminus \bar{B}_r(y)$ tiene también frontera de clase C^1 , a saber $\partial\Omega_r = \partial\Omega \cup \partial B_r(y)$. El teorema de la divergencia implica de nuevo que el flujo de \vec{E} a través de $\partial\Omega_r$ es nulo, es decir:

$$0 = \int_{\partial\Omega_r} \vec{E} \cdot \vec{n} d\sigma = \int_{\partial\Omega} \vec{E} \cdot \vec{n} d\sigma - \int_{\partial B_r(y)} \vec{E} \cdot \vec{n} d\sigma,$$

donde el signo negativo se debe a que, para calcular el flujo en Ω_r , debemos considerar en cada punto de la frontera el vector normal que apunta hacia afuera de Ω_r , pero para los puntos de $\partial B_r(y)$ dicho vector normal es el que apunta hacia adentro de la esfera, así que hemos puesto un signo negativo al flujo a cambio de que, en la segunda integral, el vector \vec{n} represente el vector normal que apunta hacia afuera de la esfera, como es habitual.

¹Notemos que si y está en $\partial\Omega$ el flujo no está definido.

Así pues, el flujo de \vec{E} a través de Ω es el mismo que a través de $\partial B_r(y)$. Pero el campo \vec{E} es normal a $\partial B_r(y)$, luego el flujo es

$$\Phi = \int_{\partial B_r(y)} \|\vec{E}\| d\sigma = -\frac{GM}{r^2} \int_{\partial B_r(y)} d\sigma = -\frac{GM}{r^2} 4\pi r^2 = -4\pi GM.$$

En resumen: el flujo de \vec{E} a través de cualquier superficie que encierre a y es siempre igual a $-4\pi GM$.

Resulta orientador pensar en el campo gravitatorio generado por una masa puntual M como si fuera el campo de velocidades de un fluido de densidad constante (por ejemplo, $\rho = 1$, de modo que es indistinto hablar de masa que de volumen). El hecho de que el flujo a través de las superficies cerradas que contienen a y sea $-4\pi GM$ se interpreta como que tales superficies “se tragan” una cantidad de fluido proporcional a M . No podemos decir con propiedad que y sea un sumidero en el sentido que dimos a este término, pues sobre él no está definido el campo, pero esto más bien debe llevarnos a pensar que dicha definición de sumidero es demasiado particular, y que debemos admitir como tales a los puntos alrededor de los cuales desaparece fluido en el sentido que acabamos de ver. Por otra parte, donde no hay masa la divergencia del campo es nula y, efectivamente, no se crea ni se destruye fluido (el flujo en toda superficie cerrada es nulo).

Si el lector se pregunta qué interés puede tener calcular el flujo de un fluido inexistente, sería interesante que intentara calcular, por ejemplo, el campo gravitatorio generado por una esfera con densidad constante o, más en general, el campo gravitatorio generado por un objeto con simetría esférica (puede ser una esfera o una corona esférica, y su densidad no necesita ser constante, sino que basta con que tenga simetría esférica, es decir, que dependa únicamente de la distancia al centro de la esfera).

En principio, la respuesta es que el campo viene dado por la fórmula (B.3), donde V es el espacio ocupado por el objeto, pero es evidente que el campo tiene que tener simetría esférica, es decir, que si tomamos el origen de coordenadas en el centro de simetría, el campo tiene que ser de la forma

$$\vec{E}(x) = -K(\|x\|) \frac{x}{\|x\|}, \quad (\text{B.5})$$

para cierta función $K(r)$. Lo que proponemos al lector es que calcule explícitamente la función $K(r)$ que nos da la intensidad del campo gravitatorio a una distancia r del centro de la esfera, o la corona esférica. Se puede calcular a partir de (B.3), pero el cálculo es bastante farragoso. En cambio, la solución se obtiene fácilmente calculando el flujo del campo gravitatorio a partir del teorema 8.14.

En efecto, observemos que el campo (B.3) se corresponde con el valor de $-\nabla V$ dado por el teorema 8.14 si hacemos $f = -\rho G$, luego el teorema nos da que el potencial gravitatorio cumple

$$\Delta V = -\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi G\rho.$$

Aplicando el teorema de la divergencia, obtenemos un importante teorema de Gauss:

El flujo del campo gravitatorio a través de una superficie cerrada que encierra una masa M es igual a $-4\pi GM$.

En el caso de un objeto con simetría esférica, si tomamos una bola abierta Ω de centro 0 y radio r que contenga completamente al objeto, el flujo de B.5 es claramente

$$-4\pi r^2 K(r) = -4\pi GM,$$

por lo que

$$K(r) = \frac{GM}{r^2}.$$

Así pues:

El campo gravitatorio generado por un objeto con simetría esférica en puntos exteriores a él coincide con el generado por una partícula puntual de la misma masa situada en el centro de simetría.

Consideremos, más concretamente, el caso de una corona esférica de radios $R_0 < R_1$. Entonces, si aplicamos el teorema de la divergencia a la esfera Ω de centro 0 y radio $r < R_0$ tenemos que, como ρ se anula en Ω , el flujo es nulo, es decir, $-4\pi r^2 K(r) = 0$, luego $K(r) = 0$. En resumen:

El campo gravitatorio generado por una corona esférica con densidad radial es nulo en los puntos de su cavidad interior.

Es decir, que si en el centro de la Tierra hubiera una burbuja vacía, los cuerpos situados en ella flotarían en la ingravidez. No sólo en el centro exacto de la Tierra, sino en toda la burbuja.

Si consideramos ahora una esfera maciza de radio R con densidad radial y $0 < r < R$, el flujo a través de la esfera de radio r es

$$-4\pi r^2 K(r) = - \int_{B_r} 4\pi G \rho \, dv = -4\pi G \rho \frac{4}{3}\pi r^3 = -4\pi G M r^3 / R^3,$$

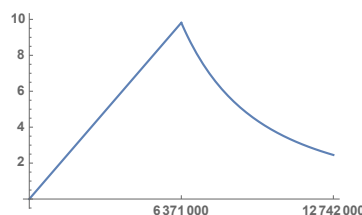
luego

$$K(r) = \frac{GM}{R^3} r,$$

por lo que si caváramos un túnel hasta el centro de la Tierra, la intensidad de la gravedad no tendería a infinito, sino que decrecería linealmente hasta 0 . Equivalentemente, el campo gravitatorio generado por una esfera maciza de densidad constante es

$$\vec{E}(x) = \begin{cases} -\frac{GM}{R^3} x & \text{si } \|x\| < r, \\ -\frac{GM}{\|x\|^3} x & \text{si } \|x\| \geq r. \end{cases}$$

La gráfica muestra la intensidad del campo gravitatorio terrestre en función de la distancia al centro de la Tierra (supuesto que la densidad de la Tierra es constante).



Ejercicio Si un pozo atravesara la Tierra pasando por su centro y arrojáramos en él una piedra, ¿cómo se movería ésta?

B.2 El campo gravitatorio de un esferoide

En esta sección usaremos los polinomios de Legendre definidos en 9.12 para obtener expresiones más operativas para el potencial gravitatorio generado por una distribución continua de masa con simetría axial. Para ello fijamos un radio $R > 0$ y consideraremos la bola cerrada B_R de centro $\vec{0}$ y radio R , así como su complementario $C_R = \mathbb{R}^3 \setminus B_R$. Entonces, el potencial gravitatorio en el punto \vec{r} determinado por una distribución de masas con función de densidad ρ puede expresarse como

$$V(\vec{r}) = -G \int_{B_R} \frac{\rho(\vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} dv' - G \int_{C_R} \frac{\rho(\vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} dv',$$

donde dv' representa el elemento de volumen de \mathbb{R}^3 (es decir, la medida de Lebesgue) y el apóstrofo indica que la integral es sobre \vec{r}' , mientras que \vec{r} es un parámetro.

Para calcular estas integrales calcularemos previamente las funciones de potencial

$$V_1(\vec{r}) = -G \int_{B_R} \frac{\rho(\vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} dv'$$

para puntos \vec{r} cuyo módulo sea $r > R$ y

$$V_2(\vec{r}) = -G \int_{C_R} \frac{\rho(\vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} dv'$$

para puntos \vec{r} cuyo módulo sea $r < R$. Luego comprobaremos que las expresiones que obtendremos serán válidas también para puntos \vec{r} con módulo $r = R$.

La clave son las fórmulas (9.6) y (9.7) que, combinadas con la definición 9.12, nos dan que en el integrando de V_1 podemos desarrollar:

$$\|\vec{r} - \vec{r}'\|^{-1} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \alpha) (r'/r)^n, \tag{B.6}$$

donde α es el ángulo que forman los vectores \vec{r} y \vec{r}' , y en el integrando de V_2

$$\|\vec{r} - \vec{r}'\|^{-1} = \frac{1}{r'} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \alpha) (r/r')^n.$$

Como, por el teorema 9.18, se cumple que $|P_n(\cos \alpha)| \leq 1$, suponiendo además que la densidad está acotada por una constante C , tenemos que, para V_1 ,

$$|\rho(\vec{r}')P_n(\cos \alpha)(r'/r)^n| \leq C(R/r)^n \quad \text{con } R/r < 1,$$

y para V_2

$$|\rho(\vec{r}')P_n(\cos \alpha)(r/r')^n| \leq C(r/R)^n \quad \text{con } r/R < 1.$$

En ambos casos, el criterio de mayoración de Weierstrass nos asegura que las series respectivas convergen uniformemente en \vec{r}' , por lo que podemos intercambiarlas con las integrales:

$$V_1(\vec{r}) = -\frac{G}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{B_R} \rho(\vec{r}')P_n(\cos \alpha)(r'/r)^n dv', \quad (\text{B.7})$$

$$V_2(\vec{r}) = -G \sum_{n=0}^{\infty} \int_{C_R} \frac{1}{r'} \rho(\vec{r}')P_n(\cos \alpha)(r/r')^n dv'.$$

Ahora consideramos coordenadas esféricas:

$$\vec{r} = (r \operatorname{sen} \theta \cos \phi, r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi, r \cos \theta)$$

y tomamos el sistema de referencia de modo que el eje Z sea el eje de simetría de la distribución de masas, de modo que la densidad $\rho(r', \theta')$ no depende del ángulo ϕ' . Notemos que el elemento de volumen es

$$dv' = r'^2 \operatorname{sen} \theta' d\phi' d\theta' dr'.$$

Así

$$\begin{aligned} V_1(r, \theta) &= -\frac{G}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \rho(r', \theta')P_n(\cos \alpha)(r'/r)^n r'^2 \operatorname{sen} \theta' d\phi' d\theta' dr' \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{G}{r^{n+1}} \int_0^R r'^{n+2} \int_0^\pi \rho(r', \theta') \operatorname{sen} \theta' \int_0^{2\pi} P_n(\cos \alpha) d\phi' d\theta' dr', \\ V_2(r, \theta) &= -\sum_{n=0}^{\infty} G r^n \int_R^{+\infty} r'^{1-n} \int_0^\pi \rho(r', \theta') \operatorname{sen} \theta' \int_0^{2\pi} P_n(\cos \alpha) d\phi' d\theta' dr'. \end{aligned}$$

Ahora observamos que $\cos \alpha = (\vec{r}/r) \cdot (\vec{r}'/r')$, por lo que podemos aplicar el teorema de adición 9.46:

$$P_n(\cos \alpha) = \frac{4\pi}{2n+1} \sum_{m=-n}^n Y_n^m(\theta, \phi) Y_n^m(\theta', \phi').$$

Y teniendo en cuenta la expresión explícita (9.17) para los armónicos esféricos de dimensión 2 así como que $\int_0^{2\pi} e^{im\phi'} d\phi' = 0$ salvo si $m = 0$, resulta que

$$\int_0^{2\pi} P_n(\cos \alpha) d\phi' = 2\pi P_n(\cos \theta) P_n(\cos \theta').$$

Así pues:

$$V_1(r, \theta) = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2\pi G}{r^{n+1}} \int_0^R r'^{n+2} \int_0^\pi \rho(r', \theta') \operatorname{sen} \beta' P_n(\cos \theta) P_n(\cos \theta') d\theta' dr',$$

$$V_2(r, \theta) = - \sum_{n=0}^{\infty} 2\pi G r^n \int_R^{+\infty} r'^{1-n} \int_0^\pi \rho(r', \theta') \operatorname{sen} \beta' P_n(\cos \theta) P_n(\cos \theta') d\beta' dr'.$$

Equivalentemente:

$$V_1(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} V_{-n-1} \frac{P_n(\cos \theta)}{r^{n+1}}, \quad V_2(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} V_n r^n P_n(\cos \theta), \quad (\text{B.8})$$

donde

$$\begin{aligned} V_{-n-1} &= -2\pi G \int_0^R r'^{n+2} \int_0^\pi \rho(r', \theta') \operatorname{sen} \theta' P_n(\cos \theta') d\theta' dr' \\ &= -2\pi G \int_0^R r'^{n+2} \int_{-1}^1 \rho(r', x) P_n(x) dx dr' = -\frac{4\pi G}{2n+1} \int_0^R \rho_n(r') r'^{n+2} dr', \\ V_n &= -2\pi G \int_R^{+\infty} r'^{1-n} \int_0^\pi \rho(r', \theta') \operatorname{sen} \theta' P_n(\cos \theta') d\theta' dr' \\ &= -2\pi G \int_R^{+\infty} r'^{1-n} \int_{-1}^1 \rho(r', x) P_n(x) dx dr' = -\frac{4\pi G}{2n+1} \int_R^{+\infty} \rho_n(r') r'^{1-n} dr', \end{aligned}$$

donde a su vez, según el teorema 9.20, los coeficientes

$$\rho_n(r') = \left(n + \frac{1}{2} \right) \int_{-1}^1 \rho(r', x) P_n(x) dx$$

son los que aparecen en el desarrollo en serie de Fourier-Legendre

$$\rho(r', \theta') = \sum_{n=0}^{\infty} \rho_n(r') P_n(\cos \theta').$$

En principio tenemos que las series (B.8) convergen respectivamente para $r > R$ y $r < R$. Ahora vamos a ver que también lo hacen para $r = R$, y que la suma es, respectivamente, $V_1(r, \theta)$ y $V_2(r, \theta)$. Para ello hacemos los cambios de variable respectivos $1/r = t/R$ y $r = Rt$, con lo que obtenemos las series de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{V_{-n-1} P_n(\cos \theta)}{R^{n+1}} t^{n+1}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} V_n R^n P_n(\cos \theta) t^n \quad (\text{B.9})$$

que convergen para $t < 1$ y hemos de probar que también lo hacen para $t = 1$. Para ello observamos que, por (9.9), existe una constante K tal que

$$|\rho_n(r')| \leq K \sqrt{n},$$

luego

$$|V_{-n-1}| \leq \frac{K'}{\sqrt{n}} \int_0^R r'^{n+2} dr' = \frac{K'R^{n+3}}{\sqrt{n}(n+3)},$$

$$|V_n| \leq \frac{K'}{\sqrt{n}} \int_R^{+\infty} r'^{1-n} dr' = \frac{K'}{\sqrt{n}(n-2)R^{n-2}},$$

luego los coeficientes a_n de las series (B.9) están acotados en módulo por

$$\frac{K''R^2}{n\sqrt{n}}.$$

Por [ITAn 4.9] tenemos que ambas series convergen en $t = 1$, y el teorema de Abel [ITAn 3.21] implica que su suma en $t = 1$ es precisamente $V_1(r, \theta)$ y $V_2(r, \theta)$, respectivamente. Por lo tanto, para calcular $V(r, \theta)$, podemos descomponer la integral en dos partes tomando precisamente $R = r$, y así hemos demostrado el teorema siguiente:

Teorema B.1 *El potencial gravitatorio generado por un cuerpo con simetría axial (es decir, por una distribución de masa cuya función de densidad $\rho(r, \cos \theta)$ no depende de ϕ en coordenadas esféricas) viene dado por*

$$V(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} V_n(r) P_n(\cos \theta), \quad (\text{B.10})$$

donde

$$V_n(r) = -\frac{4\pi G}{2n+1} \left(\frac{1}{r^{n+1}} \int_0^r \rho_n(r') r'^{n+2} dr' + r^n \int_r^{+\infty} \rho_n(r') r'^{1-n} dr' \right), \quad (\text{B.11})$$

con

$$\rho_n(r') = \left(n + \frac{1}{2} \right) \int_{-1}^1 \rho(r', x) P_n(x) dx. \quad (\text{B.12})$$

Más aún, hemos probado que $|V_n(r)| \leq Kr^2 n^{-3/2}$.

Si la simetría del cuerpo no es sólo axial, sino que es radial, es decir, si la densidad no depende más que de la coordenada esférica r , la ortogonalidad de los polinomios de Legendre implica que $\rho_n = 0$ para $n > 1$, mientras que $\rho_0 = \rho$. Por lo tanto, $V_n = 0$ para todo $n > 0$ y

$$V(r) = V_0(r) = -4\pi G \left(\frac{1}{r} \int_0^r \rho(r') r'^2 dr' + \int_r^{+\infty} \rho(r') r' dr' \right).$$

De aquí podemos deducir (por un camino más complicado) los resultados que habíamos obtenido en la sección anterior para el campo gravitatorio de una esfera. Concretamente, si consideramos una corona esférica comprendida entre los radios R_0 y R , en un punto interior de la corona tenemos que

$$V(r) = -4\pi G \int_{R_0}^R \rho(r') r' dr',$$

con lo que el potencial es constante y, por consiguiente, el campo gravitatorio es $\vec{E} = -\nabla V = \vec{0}$.

En cambio, en un punto exterior

$$V(r) = -\frac{4\pi G}{r} \int_{R_0}^R \rho(r') r'^2 dr'.$$

Pero la masa de la corona es

$$M = \int_{\mathbb{R}^3} \rho dx dy dz = \int_{R_0}^R \int_0^\pi \int_{-\pi}^\pi \rho r^2 \sin \theta' d\phi' d\theta' dr' = 4\pi \int_{R_0}^R \rho r^2 dr',$$

luego

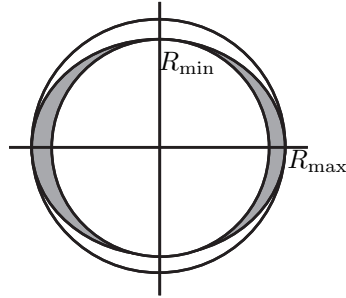
$$V(r) = -\frac{GM}{r},$$

que es el mismo potencial que genera una partícula puntual de masa M situada en el centro de la corona.

Consideramos ahora el caso de un esferoide, es decir, una distribución de masa que contenga una esfera de centro $\vec{0}$ y radio R_{\min} y que esté contenida en una esfera de centro $\vec{0}$ y radio R_{\max} , de modo que el achatamiento

$$\epsilon = \frac{R_{\max} - R_{\min}}{R_{\max}}$$

sea pequeño. Esto será aplicable al caso de la Tierra, cuyo achatamiento es $\epsilon = 0.0033528$.



Para puntos con $r \geq R_{\max}$ la expresión de $V_n(r)$ se simplifica hasta

$$V_n(r) = -\frac{4\pi G}{2n+1} \frac{1}{r^{n+1}} \int_0^{R_{\max}} \rho_n(r') r'^{n+2} dr'. \quad (\text{B.13})$$

En particular,

$$\begin{aligned} V_0(r) &= -\frac{G}{r} \int_0^{R_{\max}} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \rho(r', \cos \theta') r'^2 \sin \theta' d\phi' d\theta' dr' \\ &= -\frac{G}{r} \int_{r \leq R_{\max}} \rho(\vec{r}') d\vec{r}' = -\frac{GM}{r}, \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

donde M es la masa total del esferoide.

En principio, hemos obtenido esta expresión para puntos con $r \geq R_{\max}$, pero vamos a ver que para puntos que cumplan $R_{\min} \leq r \leq R_{\max}$ se cumple que (B.14) es una aproximación razonable de $V_0(r)$. En efecto, el mismo cálculo sin más que cambiar R_{\max} por r nos da que el primer sumando de (B.11) es igual a $-GM_r/r$, donde M_r es la masa contenida en la esfera de radio r . Un cálculo análogo nos da que el segundo término es

$$-G \int_{E_r} \frac{1}{r'} dm \approx -\frac{G}{r} \int_{E_r} dm = -\frac{Gm_r}{r}$$

donde E_r es el exterior de la esfera de radio r y m_r es la masa contenida en E_r . Por consiguiente,

$$V_0(r) \approx -\frac{GM}{r},$$

donde M es la masa total del esferoide. Más concretamente,

$$\begin{aligned} \left| V_0(r) - \left(-\frac{GM}{r} \right) \right| &= G \int_{E_r} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'} \right) dm = \frac{G}{r} \int_{E_r} \frac{r' - r}{r'} dm \\ &\leq \frac{GM_0}{r} \frac{R_{\max} - R_{\min}}{R_{\min}}, \end{aligned}$$

donde M_0 es la masa comprendida entre las esferas de radios R_{\min} y R_{\max} .

Así pues, el error relativo de la aproximación, con respecto al valor aproximado $-GM/r$, cumple

$$e \leq \frac{M_0}{M} \frac{R_{\max} - R_{\min}}{R_{\min}} = \frac{M_0}{M} \frac{\epsilon}{1 - \epsilon},$$

que para el caso de la Tierra² es del orden de $6 \cdot 10^{-6}$.

Así pues, podemos considerar a (B.14) como una buena aproximación de $V_0(r)$ para todos los puntos exteriores al elipsoide.

Ahora conviene observar que si nuestro esferoide es simplemente una esfera de radio R con densidad radial (es decir, de modo que $\rho(r, \theta)$ no depende de θ), hemos visto que $\rho_n(r') = 0$ para $n > 0$, por lo que $V(r, \theta) = V_0(r) = -GM/r$, para todo $r \geq R$.

Puesto que la Tierra es casi indistinguible de una esfera (y la simplificación de considerar su densidad radial es razonable) cabe esperar que los términos posteriores de (B.10) sean correcciones mínimas de V_0 casi inapreciables. Por ello es conveniente expresarlos todos en términos de V_0 . Considerando de nuevo puntos con $r \geq R_{\max}$, a partir de (B.13) obtenemos que

$$V_n(r) = -\frac{GM}{r} \frac{4\pi}{(2n+1)M} \frac{1}{r^n} \int_0^{R_{\max}} \rho_n(r') r'^{n+2} dr',$$

²Usamos los datos $R_{\max} = 6378100$ m, $R_{\min} = 6356800$ m, $M = 5.97219 \cdot 10^{24}$ kg. La densidad media de la Tierra es de 5514 kg/m³, pero la densidad media de la litosfera es $d = 3000$ kg/m³ y, aproximando la forma de la Tierra por un elipsoide de revolución, podemos calcular $M_0 = \frac{3}{4}\pi R_{\min}^2 (R_{\max} - R_{\min})d$, con lo que tenemos una cifra por exceso, ya que no tenemos en cuenta que buena parte del volumen considerado está ocupado por agua, cuya densidad es menor.

luego

$$V(r, \theta) = -\frac{GM}{r} \left(1 - \sum_{n=1}^{\infty} J_n \left(\frac{R_{\max}}{r} \right)^n P_n(\cos \theta) \right), \quad (\text{B.15})$$

donde las constantes

$$J_n = \frac{-4\pi}{MR_{\max}^n (2n+1)} \int_0^{R_{\max}} \rho_n(r') r'^{n+2} dr' = -\frac{1}{MR_{\max}^n} \int_{\mathbb{R}^3} r'^n P_n(\cos \theta') dm$$

se llaman *momentos de orden n* de la distribución de masas dada. Notemos que no tienen unidades. Además, puesto que la serie (B.15) ha de converger para $r = R_{\max}$ y $\theta = 0$, la sucesión de los momentos de orden n determina una serie convergente y, en particular, tiende a 0.

Observemos que

$$J_1 = -\frac{1}{MR_{\max}} \int_{\mathbb{R}^3} r' \cos \theta' dm = -\frac{1}{MR_{\max}} \int_{\mathbb{R}^3} z dm = 0$$

si tomamos el sistema de referencia con origen en el centro de masas del esferoide.

Así pues, la corrección de mayor magnitud del potencial gravitatorio de un esferoide respecto del correspondiente a una esfera viene determinada por el momento J_2 , el cual admite una expresión sencilla:

$$\begin{aligned} J_2 &= -\frac{1}{MR_{\max}^2} \int_{\mathbb{R}^3} r'^2 P_2(\cos \theta') dm = -\frac{1}{2MR_{\max}^2} \int_{\mathbb{R}^3} r'^2 (3 \cos^2 \theta' - 1) dm \\ &= -\frac{1}{2MR_{\max}^2} \int_{\mathbb{R}^3} (3z^2 - x^2 - y^2 - z^2) dm = \\ &= -\frac{1}{2MR_{\max}^2} \int_{\mathbb{R}^3} ((z^2 + x^2) + (z^2 + y^2) - 2(x^2 + y^2)) dm \\ &= -\frac{1}{2MR_{\max}^2} (I_{yy} + I_{xx} - 2I_{zz}), \end{aligned}$$

donde I_{xx} , I_{yy} , I_{zz} son las componentes diagonales del tensor de inercia de la distribución de masas (véase la sección A.4). La simetría axial respecto al eje Z que estamos suponiendo implica que los dos primeros son iguales, luego, llamando I_1 e I_3 a los dos distintos, concluimos que

$$J_2 = \frac{I_3 - I_1}{MR_{\max}^2}.$$

Ésta es la llamada *fórmula de MacCullagh*.

Usando las estimaciones (A.8) de las componentes del tensor de inercia de la Tierra obtenidas en la página 538, la fórmula anterior proporciona el valor $J_2 = 1120.8084 \cdot 10^{-6}$. El valor actualmente aceptado es

$$J_2 = 1082.635 \cdot 10^{-6},$$

con lo que el error que hemos cometido no llega al 3.6%.

Así pues, una aproximación al potencial de un esferoide para puntos con $r \geq R_{\max}$ viene dada por

$$V \approx -\frac{GM}{r} \left(1 - \frac{J_2}{2} \left(\frac{R_{\max}}{r} \right)^2 (3 \cos^2 \theta - 1) \right) \quad (\text{B.16})$$

o, usando la fórmula de MacCullagh,

$$V \approx -\frac{GM}{r} + \frac{G(I_3 - I_1)}{2r^3} (3 \cos^2 \theta - 1). \quad (\text{B.17})$$

Veamos de nuevo que esta aproximación sigue siendo razonable para puntos con $R_{\min} \leq r \leq R_{\max}$, y en particular sobre la superficie del esferoide. Para ello observamos que, por el mismo cálculo que nos ha llevado a la fórmula de MacCullagh, el primer término de (B.11) para $n = 2$ es

$$\frac{G(I_3^r - I_1^r)}{r^3},$$

donde I_3^r e I_1^r son los momentos de inercia de la masa situada en el interior de la esfera de radio r . Vamos a probar que el segundo término es aproximadamente igual a esta misma expresión, pero con los momentos de inercia de la masa situada en el exterior de la esfera. Como los momentos de inercia son aditivos, el valor total de $V_2(r)$ será (aproximadamente) el que aparece en (B.17). En efecto, el segundo término es

$$\begin{aligned} -Gr^2 \int_{E_r} \frac{P_2(\cos \theta)}{r'^3} dm &= -\frac{G}{r^3} \int_{E_r} \left(\frac{r}{r'} \right)^5 \frac{3z'^2 - r'^2}{2} dm \\ &\approx -\frac{G}{r^3} \int_{E_r} \frac{2z'^2 - x'^2 - y'^2}{2} dm = \frac{G(I_3^0 - I_1^0)}{r^3}, \end{aligned}$$

como queríamos probar. El error de la aproximación es

$$\begin{aligned} \left| V_1(r) - \frac{G(I_3 - I_1)}{r^3} \right| &\leq Gr^2 \int_{E_r} |P_2(\cos \theta)| \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r'^3} \right) dm \\ &\leq Gr^2 M_0 \left(\frac{1}{R_{\min}^3} - \frac{1}{R_{\max}^3} \right), \end{aligned}$$

luego el error relativo es

$$e \leq \frac{M_0 R_{\max}^5}{I_3 - I_1} \left(\frac{1}{R_{\min}^3} - \frac{1}{R_{\max}^3} \right) = \frac{M_0 R_{\max}^3}{M J_2} \left(\frac{1}{R_{\min}^3} - \frac{1}{R_{\max}^3} \right),$$

que para el caso de la Tierra es inferior al 1.7%.

De este modo, la fórmula (B.16) nos da un modelo teórico para la variación del campo gravitatorio sobre la superficie terrestre en función de la latitud. En realidad dicha fórmula no es aceptable porque, puestos a tener en cuenta las

variaciones mínimas debidas a la latitud, hay otro efecto de magnitud similar que no podemos despreciar, y es la fuerza centrífuga debida a la rotación terrestre, que también depende de la latitud y debilita el efecto de la gravedad.

Concretamente, la fuerza centrífuga que actúa sobre una partícula de masa unitaria que se mueva con la Tierra viene dada por

$$\vec{E} = \omega^2(x, y, 0),$$

donde ω es la velocidad angular de la Tierra, y esta expresión corresponde a un campo de fuerzas conservativo, pues deriva del potencial

$$V_c = -\frac{1}{2}\omega^2(x^2 + y^2) = -\frac{1}{2}\omega^2 r^2 \sin^2 \theta,$$

Añadiendo este potencial al dado por (B.16) obtenemos la expresión

$$V(r, \theta) \approx -\frac{1}{2}\omega^2 r^2 \sin^2 \theta - \frac{GM}{r} + \frac{GMJ_2 R_{\max}^2}{2r^3}(3 \cos^2 \theta - 1). \quad (\text{B.18})$$

Ahora sí que tenemos un modelo teórico razonable de la dependencia de la gravedad terrestre respecto de la latitud. Observemos que hemos llegado a esta expresión partiendo de la hipótesis de que la Tierra tiene forma aproximadamente esférica, pero no exactamente esférica, y sin suponer ninguna forma geométrica concreta. Recíprocamente, a partir de aproximaciones de este tipo para el potencial gravitatorio (con la corrección centrífuga) nos permiten extraer conclusiones sobre la forma de la Tierra.

En efecto, es fácil probar que en un planeta fluido en equilibrio todos los puntos de su superficie tienen el mismo potencial gravitatorio (corregido con la fuerza centrífuga si el fluido está en rotación). Incorporando el potencial de la fuerza centrífuga al del campo gravitatorio podemos considerar un sistema de referencia que gire con el fluido, de modo que éste esté en reposo, y entonces es aplicable la ecuación fundamental de la hidrostática (sección 8.2), que en este caso adopta la forma

$$\nabla p = -\rho \nabla V.$$

Si la densidad ρ es constante, esto implica que $p = -\rho V + p_0$, para cierta constante p_0 . Así pues, la presión es la misma en dos puntos si y sólo si tienen el mismo potencial. Como la presión en la superficie tiene que ser 0, resulta que todos los puntos de la superficie tienen el mismo potencial.

En realidad podemos llegar a la misma conclusión sin suponer que la densidad del planeta es constante. Para ello, dados dos puntos \vec{r}_0 y \vec{r}_1 de su superficie, consideramos un arco (derivable) $\phi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ contenido en dicha superficie y tal que $\phi(0) = \vec{r}_0$, $\phi(1) = \vec{r}_1$. Tenemos entonces que $p(\phi(t)) = 0$, luego, derivando:

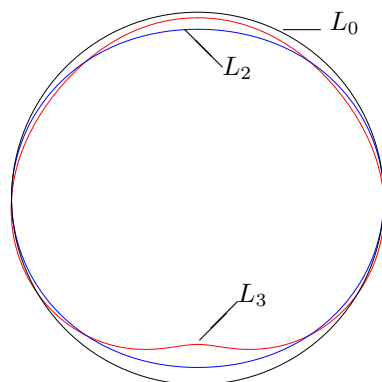
$$\nabla p(\phi(t)) \cdot \frac{d\phi}{dt} = 0,$$

pero entonces, por la ecuación fundamental, también

$$\nabla V(\phi(t)) \cdot \frac{d\phi}{dt} = 0,$$

lo que equivale a que la derivada de $V(\phi(t))$ sea idénticamente nula, luego $V(\vec{r}_0) = V(\vec{r}_1)$.

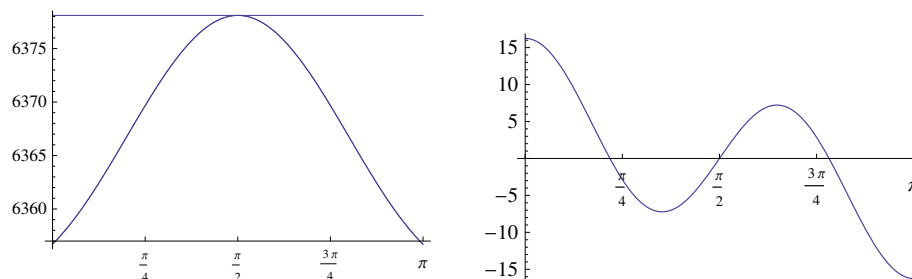
La Tierra no es fluida, pero lo cierto es que su forma se corresponde con gran fidelidad a la forma de una superficie equipotencial respecto de (B.18), lo cual indica que en su día fue líquida. Más aún, la aproximación mejora si añadimos a (B.18) el término correspondiente al sumando siguiente de (B.15). La figura siguiente ilustra el efecto de considerar dicho término adicional:



La curva L_0 es una circunferencia, que podemos considerar que representa la sección de la Tierra si ésta fuera esférica de radio igual al radio ecuatorial que realmente tiene el planeta. La curva L_2 representa los puntos en los que (B.18) toma el valor $V(R_{\max}, \pi/2)$, es decir, los puntos en los que el potencial es el mismo que en el ecuador, salvo por el hecho de que el valor real de J_2 se ha multiplicado por 50 para que el achatamiento resulte apreciable. Vemos que corresponde a una silueta ovalada, aunque técnicamente no es una elipse. La curva L_3 es la que resulta de incorporar a (B.18) el término de orden 3 presente en (B.15), aunque en la figura el valor real de J_3 ha sido multiplicado por 20 000 para que su efecto resulte apreciable. El valor real, deducido de medidas precisas de la “silueta terrestre” realizadas mediante satélites artificiales, es

$$J_3 = -2.531 \cdot 10^{-6}.$$

Vemos que al exagerar el valor de J_3 obtenemos una figura en forma de pera, aunque en realidad el efecto de J_3 es prácticamente despreciable. Para hacernos una idea de su relevancia real podemos considerar las gráficas siguientes:



La de la izquierda muestra el radio en km en función del ángulo θ . La recta superior es el radio constante correspondiente al modelo esférico con el radio ecuatorial de la Tierra. La otra curva corresponde tanto al modelo que resulta de incorporar sólo J_2 como el que resulta de incorporar J_3 , pues la diferencia entre ambos no es apreciable a esa escala. En la gráfica de la derecha vemos la diferencia en metros entre ambos modelos. Vemos que la “forma de pera” se traduce en que el radio en el polo Norte tendría que ser apenas 16.3 m mayor que el que prevé el modelo de orden 2, mientras que en el polo Sur es unos 16.3 m menor. En realidad, el mayor hundimiento de “la pera” en el hemisferio Sur (y el mayor abultamiento en el hemisferio Norte) es del orden de 7.25 m.

B.3 La precesión de los perihelios

En la sección [IC 4.3] estudiamos el movimiento de un planeta bajo la gravedad del Sol, sin tener en cuenta el efecto de la atracción gravitatoria debida a la presencia de los planetas restantes del sistema solar. Determinar las trayectorias de tres cuerpos sometidos a la atracción gravitatoria mutua es el llamado *problema de los tres cuerpos*, y no admite una solución cerrada mediante fórmulas explícitas que no involucren series de potencias. Aquí vamos a mostrar un análisis aproximado del efecto que tienen los demás planetas sobre la trayectoria de uno de ellos. La idea es no tener en cuenta la fuerza que cada planeta ejerce sobre uno dado en cada instante en concreto (que sería una función muy complicada, ya que los planetas se acercan y se alejan unos de otros de una forma muy compleja, dado que orbitan a velocidades distintas), sino que estudiaremos cómo afecta a un planeta la fuerza media que los demás ejercen sobre él, y dicha fuerza media la calcularemos distribuyendo uniformemente la masa de cada planeta a lo largo de su órbita, es decir, sustituyendo cada planeta por un anillo de su misma masa, que supondremos circular de radio igual al radio medio de la órbita real del planeta.

Para ello necesitamos calcular el potencial que genera un anillo. No podemos deducirlo directamente a partir de los cálculos de la subsección anterior porque allí considerábamos distribuciones tridimensionales de materia, mientras que aquí partimos de una distribución unidimensional. (En la práctica, esto simplifica considerablemente el razonamiento.) Concretamente, tenemos un anillo de radio R , centrado en el origen de coordenadas, que podemos parametrizar en la forma

$$\vec{r}'(\phi') = (R \cos \phi', R \sin \phi', 0),$$

de modo que su elemento de longitud es $dl = R d\phi'$ y su elemento de masa es $dm = RD d\phi'$, donde D es su densidad. La masa del anillo es $M = 2\pi RD$. Equivalentemente:

$$dm = \frac{M}{2\pi} d\phi'.$$

El potencial que genera el anillo viene dado por

$$V(\vec{r}) = -G \int_0^{2\pi} \frac{dm}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} = -\frac{GM}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\phi'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|}.$$

Para puntos \vec{r} con $r > R$ o $r < R$, podemos desarrollar, respectivamente:

$$\|\vec{r} - \vec{r}'\|^{-1} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \alpha) (R/r)^n, \quad \|\vec{r} - \vec{r}'\|^{-1} = \frac{1}{R} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \alpha) (r/R)^n,$$

donde α es el ángulo que forman \vec{r} y \vec{r}' . Los mismos razonamientos empleados en la sección anterior prueban que podemos intercambiar el sumatorio y la integral, así como que

$$\int_0^{2\pi} P_n(\cos \alpha) d\phi' = 2\pi P_n(\cos \theta) P_n(\cos \theta') = 2\pi P_n(0) P_n(\cos \theta),$$

luego

$$V(\vec{r}) = -\frac{GM}{2\pi r} \sum_{n=0}^{\infty} (R/r)^n \int_0^{2\pi} P_n(\cos \alpha) d\phi' = -\frac{GM}{r} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(0) P_n(\cos \theta) (R/r)^n$$

para $r > R$ y

$$V(\vec{r}) = -\frac{GM}{R} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(0) P_n(\cos \theta) (r/R)^n$$

para $r < R$. Como sólo nos va a interesar el potencial en puntos situados en el mismo plano del anillo (es decir, puntos con $\theta = \pi/2$), las fórmulas se simplifican a

$$V(r) = \begin{cases} -\frac{GM}{R} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(0)^2 (R/r)^{n+1} & \text{si } r > R, \\ -\frac{GM}{R} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(0)^2 (r/R)^n & \text{si } R < r. \end{cases}$$

Numeremos ahora los planetas del sistema solar, de forma que Mercurio es el planeta 1 y Neptuno es el planeta 8. Sea M_i la masa del planeta i y sea R_i el radio de su órbita, que supondremos circular. Sea además M_0 la masa del Sol. Entonces, el potencial que generan el Sol y todos los planetas distintos de i -ésimo es

$$V_i(r) = -\frac{GM_0}{r} - G \sum_{j<i} \frac{M_j}{R_j} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(0)^2 \left(\frac{R_j}{r}\right)^{n+1} - G \sum_{j>i} \frac{M_j}{R_j} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(0)^2 \left(\frac{r}{R_j}\right)^n.$$

El campo gravitatorio (fuerza por unidad de masa) al que está sometido el i -ésimo planeta es, pues,

$$\vec{E}_i(r) = -\nabla V_i = -\frac{dV_i}{dr} \frac{1}{r} \vec{r},$$

donde

$$E_i(r) = -\frac{dV_i}{dr} = -\frac{GM_0}{r^2} - \frac{G}{r^2} \sum_{j<i} M_j \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) P_n(0)^2 \left(\frac{R_j}{r}\right)^n + \frac{G}{r^2} \sum_{j>i} M_j \frac{r}{R_j} \sum_{n=1}^{\infty} n P_n(0)^2 \left(\frac{r}{R_j}\right)^n. \quad (\text{B.19})$$

Vemos así que el planeta i -ésimo está sometido a una fuerza central dirigida hacia el Sol que no es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia, sino bastante más sofisticada. A partir de aquí vamos a hacer algunas consideraciones generales sobre fuerzas centrales. El mismo razonamiento empleado en la sección [IC 4.3] para llegar a las ecuaciones (4.5) nos da en general que

$$r'' - r\omega^2 = E(r).$$

Pero, como la fuerza es central, al igual que en dicha sección se concluye que la cantidad de movimiento angular $L = mr^2\omega$ tiene que ser constante, y lo mismo vale para $h = r^2\omega$. Por lo tanto, la ecuación anterior equivale a

$$r'' - \frac{h^2}{r^3} = E(r).$$

Supongamos que un planeta que sigue una órbita aproximadamente elíptica con pequeña excentricidad, con lo que también es aproximadamente circular, y consideremos un instante de tiempo en el que $r'' = 0$. (Tal instante ha de existir o, de lo contrario, la distancia del planeta al Sol aumentaría o disminuiría constantemente y la órbita no podría ser cerrada.) Si llamamos r_0 al radio correspondiente a dicho instante, tenemos que

$$-\frac{h^2}{r_0^3} = E(r_0). \quad (\text{B.20})$$

Llamemos $\delta = r - r_0$. Por hipótesis, δ toma en todo momento valores cercanos a 0. La ecuación del movimiento puede expresarse en la forma

$$\delta'' - \frac{h^2}{(r_0 + \delta)^3} = E(r_0 + \delta).$$

Aproximamos ambos miembros por los respectivos polinomios de Taylor de grado 1 alrededor de $\delta = 0$:

$$\delta'' - \frac{h^2}{r_0^3} \left(1 - 3\frac{\delta}{r_0}\right) = E(r_0) + E'(r_0)\delta.$$

Usando (B.20):

$$\delta'' = \left(\frac{3E(r_0)}{r_0} + E'(r_0)\right)\delta = 0.$$

Si la constante

$$K = \frac{3E(r_0)}{r_0} + E'(r_0)$$

es negativa, entonces las soluciones de la ecuación diferencial precedente son de la forma

$$\delta = \epsilon \operatorname{sen}(\sqrt{-K}t + t_0)$$

y permanecen acotadas. Por el contrario, si $K > 0$, las soluciones son de la forma $Ae^{\sqrt{K}t} + Be^{-\sqrt{K}t}$ y tienden a infinito. Así pues, para que la fuerza central dada

dé lugar a una órbita aproximadamente circular de radio r_0 es necesario que cumpla la condición

$$E'(r_0) < -\frac{3E(r_0)}{r_0}.$$

Si esto sucede, la distancia al Sol (aproximadamente) oscila periódicamente con periodo

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{-K}} = \frac{2\pi}{\sqrt{-3E(r_0)/r_0 - E'(r_0)}}.$$

Para oscilaciones pequeñas de r , las variaciones de $\omega = \theta'$ serán también pequeñas (porque h ha de ser constante), luego

$$\theta' \approx \frac{h}{r_0^2} = \sqrt{-\frac{E(r_0)}{r_0}},$$

donde hemos usado nuevamente (B.20).

Concluimos que el ángulo que recorre el planeta desde un perihelio hasta otro perihelio es aproximadamente

$$\Delta\theta = T\theta' = 2\pi \left(3 + \frac{E'(r_0)}{E(r_0)} r_0 \right)^{-1/2}. \quad (\text{B.21})$$

Si la órbita fuera exactamente elíptica, este incremento debería ser $\Delta\theta = 2\pi$, pero no tiene por qué ser así. Para una órbita aproximadamente elíptica la diferencia $\Delta\theta - 2\pi$ será pequeña y representa una *precesión* del perihelio de cada planeta, de modo que cada nuevo perihelio se alcanza un poco después de que el planeta haya dado una vuelta completa alrededor del Sol (después y no antes porque, como veremos, el resultado es positivo). Vamos a estimar este ángulo de precesión. Para ello sólo necesitamos añadir un cálculo más a los que ya habíamos realizado, a saber:

$$rE'_i(r) = \frac{2GM_0}{r^2} + \frac{G}{r^2} \sum_{j<i} M_j \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)P_n(0)^2 \left(\frac{R_j}{r} \right)^n \\ + \frac{G}{r^2} \sum_{j>i} M_j \frac{r}{R_j} \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)P_n(0)^2 \left(\frac{r}{R_j} \right)^n.$$

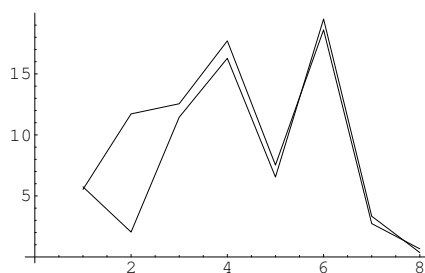
Con esta fórmula y (B.19) ya podemos calcular (B.21) (para $r_0 = R_i$) y finalmente el ángulo de precesión $\alpha_i = \Delta\theta_i - 2\pi$ (truncando las series de potencias en un cierto n). A efectos de cálculo, observemos que la expresión (B.21) no se altera si expresamos todas las masas en relación a la masa del Sol ($M_0 = 1$) y todos los radios en unidades astronómicas ($R_3 = 1$). El resultado estará en radianes. Conviene pasarlo a segundos de arco y, para comparar el resultado de cada planeta, conviene dividirlo entre la duración de su año respectivo en años terrestres. Así tenemos la precesión del perihelio por año.

La tabla siguiente (en la fila marcada como P_{14}) contiene la precesión del perihelio en segundos de arco/año calculada truncando las series en $n = 14$ (lo

que supone sumar siete términos, pues $P_n(0) = 0$ cuando n es impar). La última fila contiene la precesión observada.

	Mercurio	Venus	Tierra	Marte	Júpiter	Saturno	Urano	Nepturo
e	0.206	0.007	0.017	0.093	0.048	0.0541	0.047	0.009
R	0.387	0.723	1	1.523	5.203	9.537	19.191	30.07
T	0.241	0.615	1	1.881	11.859	29.457	84.323	164.79
P_{14}	5.53	11.72	12.55	17.71	7.53	18.61	2.73	0.66
P_{obs}	5.75	2.04	11.45	16.28	6.55	19.5	3.34	0.36

La gráfica siguiente compara los resultados calculados con los observados. Vemos que es bastante aproximada salvo en el caso de Venus, para el que la discrepancia es enorme. Las discrepancias entre los resultados teóricos y los observados se deben principalmente a las numerosas aproximaciones que hemos hecho (la sustitución de los planetas por anillos —que además hemos considerado circulares y no elípticos— y la aproximación de primer orden de la variación δ del radio medio r_0). La discrepancia en el caso de Venus se atribuye a la mínima excentricidad de su órbita, que la vuelve muy sensible a las perturbaciones.



El astrónomo francés Urban Leverrier realizó cálculos más precisos y en 1859 anunció que con ellos podía dar cuenta de los valores observados para la precesión del perihelio de todos los planetas del sistema solar excepto Mercurio, para el que el valor observado excedía en $43''$ /año del valor teórico esperado. La única explicación que pudo proponer fue la existencia de un planeta desconocido entre Mercurio y el Sol, planeta cuya existencia terminó siendo descartada. La explicación última de esa discrepancia hay que buscarla en la teoría de la relatividad, que introduce una corrección a la teoría newtoniana que resulta ser despreciable para todos los planetas del sistema solar excepto para Mercurio.

Índice de Materias

- abierta (aplicación), 69
- abierto, 47
 - básico, 49
- absolutamente
 - convergente (serie), 90
 - continua (medida), 263
- aceleración geodésica, 328
- acotado, 60
- Alexandroff (compactificación de), 104
- álgebra de conjuntos, 160
- anillo, 467
- anillo (de conjuntos), 144
- arco, 109
- arcos equivalentes, 458
- argumento, 214
- arquimediano (anillo ordenado), 5

- Banach (espacio de), 114
- Barrow (regla de), 186
- base, 49
 - de entornos, 49
 - ortonormal, 125
- Bessel (desigualdad de), 124
- Borel (álgebra, medida), 170

- canónica (sucesión), 441
- Cantor
 - aplicación de, 75
 - conjunto de, 38
- carta, 283
- Cauchy
 - desigualdades de, 387
 - producto de, 91
 - sucesión de, 19
- celda, 142
- cero, 472
- cerrado, 55

- Christoffel (símbolos de), 327
- cilindro, 290
- clase monótona, 161
- clausura, 56
- compacto, 98
- compleción, 26, 167
- completo
 - conjunto ordenado, 3
 - espacio métrico, 20
- componente
 - arco-conexa, 111
 - conexa, 109
- condicionalmente convergente, 91
- conexo, 107
- conforme (aplicación), 308
- conjugados (números), 255
- cono, 290
- contenido, 142
- continuidad, 62
 - ecuación de, 367
- contractiva (aplicación), 230
- convergencia, 15
 - de funciones, 76
 - de sucesiones, 85
 - uniforme, 128
- convergencia casi uniforme, 460
- convexo (conjunto), 110
- coordenadas, 284
 - cilíndricas, 279
 - esféricas, 277
- coseno, 211
- cubrimiento, 98, 99
- cuerpo métrico, 12
- curvatura
 - geodésica, 328
 - media, 337
 - normal, 332

- denso, 23, 58
- derivada, 199
 - covariante, 326
 - direccional, 216
 - parcial, 218, 301
- difeomorfismo, 296
- diferenciabilidad, 215
- diferenciable, 296
- diferencial, 216, 298
- Dirac (delta de), 260
- dirección principal, 335
- Dirichlet (problema de), 384
- disco de convergencia, 135
- discreta (métrica, topología), 48
- diseminado (conjunto), 138
- distancia, 13, 45
- divergencia, 352

- ecuación
 - de ondas, xxi
- ecuación funcional (de la función dseta), 502
- elemento de longitud, 304
- entorno, 47
 - básico, 49
- entorno reducido, 470
- esfera, 289
- espacio
 - arco-conexo, 109
 - compacto, 98
 - conexo, 107
 - de Hilbert, 119
 - discreto, 48
 - localmente conexo, 110
 - métrico, 13, 45
 - completo, 20
 - medida, 160
 - normado, 44
 - precompacto, 114
 - prehilbertiano, 118
 - σ -compacto, 248
 - tangente, 293
 - topológico, 47
 - vectorial topológico, 66
- estereográfica (proyección), 72
- Euler
 - ángulos de, 555
 - ecuaciones de, 554
- Euler-Cauchy (ecuación de), 243
- extremo, 227

- figura elemental, 143, 188
- flujo, 241, 349
- fórmula
 - de Hurwitz, 500
- Fourier (serie de), 404
- Fourier-Legendre (serie de), 417
- frontera, 56
- fuerza
 - interna/externa, 512
- función
 - dseta de Hurwitz, 493
 - dseta de Hurwitz, 497
- geodésica, 329
- giroscopio, 559
- gráfica, 69
- gradiente, 218
- Green (fórmulas de), 375

- armónica (función), 244, 436
- armónico
 - esférico, 438
 - polinomio, 437
- Hausdorff (espacio de), 59
- Hilbert (espacio de), 119
- Hölder (desigualdad de), 255
- homeomorfismo, 68
- homogénea (función), 433

- indeterminación, 84
- ínfimo, 2
- integrable Lebesgue (función), 183
- integral de Lebesgue, 183
- interior, 56
- intersección finita (propiedad), 98
- intervalo, 1
- isometría, 306
- isomorfismo topológico, 71
- isoperimétrica (desigualdad), 410

- acobiana, 218

- límite, 76
 - de una sucesión, 15
 - superior, 134
- Laplace (ecuación de), 381
- Laplace (relación de), 418
- Laplace (serie de), 442
- Laplace-Beltrami (operador de), 435
- laplaciano, 244
- Legendre
 - ecuación de, 422
 - funciones asociadas de, 430
 - funciones de, 426
 - polinomio de, 446
 - polinomios de, 413
- línea de nodos, 554
- Lipschitz, 65
- localmente compacto (espacio), 103

- mínimo, 227
- máximo, 227
- MacCullagh (fórmula de), 585
- medible (aplicación), 175
- medida, 158
 - completa, 161
 - de Jordan, 149
 - de Lebesgue, 169, 313, 317
 - exterior, 162
 - de Lebesgue, 169
 - finita, 160
 - finitamente aditiva, 146
 - producto, 190
 - regular, 247
 - σ -finita, 160
 - signada, 260
 - unitaria, 160
- meromorfa, 475
- Minkowski (desigualdad de), 256
- Möbius (cinta de), 292
- momento
 - angular, 516
- momentos de una distribución de masas, 585
- mutuamente singulares (medidas), 263

- norma, 44
 - supremo, 131

- nutación, 557
- orden
 - de una singularidad, 471
- ortogonalidad, 119

- Parseval (identidad de), 126, 404
- parte entera, 6
- partición
 - de Hahn, 267
 - de la unidad, 106
- Poisson
 - ecuación de, 376
 - núcleo de, 384
- polo, 472
- potencial newtoniano, 377
- precesión, 557
- precompacto, 114
- prehilbertiano, 118
- primer axioma de numerabilidad, 86
- primera categoría, 139
- principio del máximo, 383
- producto
 - de variedades, 292
 - escalar, 118
- punto
 - adherente, 87
 - aislado, 58
 - de acumulación, 58
 - de Lebesgue, 271

- radio de convergencia, 135
- rectángulo medible, 188
- regla de la cadena, 224
- regular (medida), 247
- residuo, 476
- resto de Taylor, 205
- Riemann-Lebesgue (lema de), 405
- Rodrigues (fórmula de), 414
 - generalizada, 449
- rotación intrínseca, 556

- segmento, 110
- segunda categoría, 139
- seno, 211
- serie
 - de Fourier, 404

- de Fourier-Legendre, 417
- de Laurent, 467
- de potencias, 134
- de Taylor, 204
- singularidad
 - aislada, 465
 - esencial, 474
 - evitable, 471
- sólido rígido, 512
- soporte, 105
- subbase, 51
- subcubrimiento, 98
- sucesión
 - acotada, 17
 - de Cauchy, 19
 - monótona, 14
- sumidero, 368
- superficie de revolución, 289
- supremo, 2
- tangente, 199
- Taylor (polinomio), 203
- tensor
 - de inercia, 520
 - métrico, 303
- Teorema
 - de adición de armónicos esféricos, 443
 - de Baire, 138, 139
 - de cambio de variables, 275
 - de Casorati-Weierstrass, 474
 - de clasificación de singularidades, 475
 - de Euler, 434
 - de Fubini, 194
 - de Green, 362
 - de Hahn, 267
 - de la convergencia dominada, 184
 - de la convergencia monótona, 181
 - de la divergencia, 352
 - de la función compuesta, 224
 - de la función implícita, 287
 - de la función inversa, 235
 - de Lebesgue-Radon-Nikodým, 265
 - de Liouville, 388
 - de los residuos, 476
 - de los valores intermedios, 112
 - de Lusin, 254
 - de Meusnier, 333
 - de Riesz, 248, 268
 - de Riesz-Fischer, 405
 - de Schwarz, 229
 - de Stone-Weierstrass, 132
 - de Taylor, 206
 - de Tychonoff, 101
 - de Weierstrass, 464
 - del valor medio de Gauss, 376
 - egregium de Gauss, 342
- topología, 47
 - euclídea, 48, 71
 - producto, 52
 - relativa, 54
 - usual, 48
- umbilical (punto), 335
- Urysohn (lema), 105
- valor absoluto, 12
- variación total, 261
- variedad, 283
 - tangente, 293
- Viviani (bóveda de), xiv