Carlos Ivorra Castillo

# TOPOLOGÍA

*La topología conjuntista es una enfermedad de la que la humanidad no tardará en recuperarse.*

Henri Poincaré

# Índice General

# Introducción

Aunque es posible encontrar antecedentes de algunos conceptos topológicos incluso en la matemática griega, éstos empezaron a ganar terreno paulatinamente con el desarrollo del cálculo diferencial en el siglo XVII, y empezaron a cristalizar en lo que terminó siendo la aparición de la topología como disciplina matemática en el siglo XIX, durante el largo proceso de fundamentación del cálculo. Así, el primer uso registrado de la palabra "topología" se debe a Johann Benedict Listing en su tratado *Vorstudien zur Topologie,* de 1847, si bien Listing llevaba ya unos diez años empleando el término en su correspondencia. No obstante, los primeros trabajos que pueden considerarse de topología en el sentido moderno estricto del término datan ya de principios del siglo XX.

Los conceptos topológicos surgen de forma natural mezclados con otros conceptos algebraicos, geométricos y analíticos. Por ejemplo, Leibniz ya conocía la fórmula

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots = \frac{\pi}{4},$$

en la que está implícita la noción topológica de límite, o de convergencia de sucesiones, pero mezclada con operaciones aritméticas. Entre los conceptos topológicos más antiguos tenemos también el de "continuidad". Cuando, en el siglo XIX, los matemáticos tomaron conciencia de la necesidad de fundamentar con rigor el cálculo diferencial e integral, fueron introduciendo definiciones precisas de conceptos como "límite", "función continua", etc., y paulatinamente se dieron cuenta de que unos conceptos pensados inicialmente para describir objetos del espacio euclídeo (lo que en términos de la topología moderna serían los espacios $\mathbb{R}^n$), podían ser aplicados igualmente en contextos más abstractos. Así, igual que es posible hablar de la convergencia de una sucesión de puntos, es posible hablar exactamente en los mismos términos de la convergencia de una sucesión de funciones, de modo que la topología permite —entre otras muchas cosas— tratar a las funciones —y a muchos otros objetos matemáticos abstractos— de forma análoga a como se trata a los puntos del espacio euclídeo.

Uno de los trabajos precursores de la idea de considerar "espacios abstractos" fue la famosa memoria de Riemann de 1854, donde introdujo el concepto de superficie de Riemann abstracta. Fue el inicio de una línea de investigación en la que los matemáticos aprendieron a identificar aquellas propiedades de los objetos geométricos que son independientes de tamaño o incluso de su forma concreta, y que se conservan a través de deformaciones. La culminación de este proceso fue el *Analisis situs* de Poincaré (1895), que es uno de los tratados fundacionales de lo que hoy se conoce como topología algebraica. En él Poincaré introduce el concepto de "homeomorfismo", si bien le da el sentido de lo que modernamente se conoce como "difeomorfismo". Llevaría algunos años la destilación del concepto puramente topológico de homeomorfismo como transformación continua reversible. Éste aparece por primera vez en el libro *Topologie,* (1935) de Alexandroff y Hopf.

Entre las dos últimas fechas se sitúa la definición de lo que constituye el objeto de estudio de la topología en sentido moderno, es decir, del concepto de "espacio topológico", la estructura matemática en la que tiene sentido considerar los conceptos topológicos. En su tesis doctoral (de 1906), Fréchet introdujo la noción abstracta de "espacio métrico" junto con una noción de espacio topológico abstracto que era muy restrictiva en términos modernos, pues se basaba en el concepto de convergencia de sucesiones, por lo que estaba más cerca de los espacios métricos que de la noción general moderna de espacio topológico.

La definición de los espacios topológicos en sentido moderno se debe a Hausdorff (1914), que axiomatizaba ideas de Hilbert y Weyl, y estaba basada en el concepto de "entorno", si bien lo que Hausdorff llamó "espacio topológico" es lo que actualmente se conoce como "espacio de Hausdorff", una noción ligeramente más restrictiva que la que actualmente se adopta. El concepto actual de "espacio topológico" fue introducido por primera vez por Kuratowski (1922) en términos del concepto de "clausura", si bien actualmente se prefiere la definición en términos del concepto de "abierto". Las nociones de "conjunto abierto" y "conjunto cerrado" habían sido introducidas por Cantor en el contexto de los espacios euclídeos y fueron generalizadas por Hausdorff al contexto de la topología abstracta. La *Topologie* ya citada de Alexandroff y Hopf, basada en el trabajo de Kuratowski, llevó a cabo la unificación conceptual entre las dos grandes áreas en las que hasta entonces estaba dividida la topología: la topología conjuntista (que estudiaba los espacios más abstractos relacionados con el análisis funcional) y la topología algebraica (que estudiaba espacios más próximos a la geometría diferencial clásica desde un punto de vista puramente topológico).

Los párrafos precedentes pretenden ser un breve resumen de la tortuosa historia de la topología, en la que a menudo se encuentran muchos conceptos definidos de formas muy diversas, a veces equivalentes y más frecuentemente no equivalentes. Se trata de un largo proceso que tiene sus raíces en ideas geométricas muy intuitivas, pero que asciende hasta generar una de las disciplinas más abstractas de la matemática, que en sus vertientes de mayor abstracción es una auténtica "geometría puramente conjuntista", en la que cuesta reconocer su origen geométrico. Por ello, antes de pasar a introducir el concepto moderno de espacio topológico en el primer capítulo, dedicaremos unos párrafos a mostrar la conexión entre éste y la intuición geométrica subyacente, ahora ya sin ninguna pretensión de fidelidad histórica.

La idea principal que queremos transmitir aquí es que, aunque la definición moderna de "espacio topológico" toma como concepto fundamental el concepto de "conjunto abierto", sería más natural —aunque menos práctico— tomar como tal el concepto de "entorno". En otras palabras, vamos a tratar de explicar aquí cómo la noción de "entorno" explica la transición entre la intuición subyacente al concepto de "espacio topológico" y su definición moderna.

Puede decirse que el objeto de la topología es formalizar con rigor matemático las nociones de "convergencia", "continuidad", etc., pero, a corto plazo, la noción de espacio topológico, a partir de la cual se pueden definir todos los demás conceptos topológicos, se propone formalizar la noción geométrica intuitiva de "puntos de alrededor de".

Lo primero que debería hacer el lector es convencerse de que "alrededor de" es un concepto escurridizo. Por ejemplo, si el lector no se para a pensar mucho, verá completamente naturales las afirmaciones siguientes:

1. El intervalo $]-1, 1[$ contiene todos los números reales situados "alrededor de" 0.

2. El intervalo $]-1/1\,000, 1/1\,000[$ también contiene todos los números reales situados "alrededor de" 0.

3. El intervalo $[0, 1[$ no contiene todos los números reales situados "alrededor de" 0, porque deja fuera todos los números "de alrededor" situados a la izquierda.

4. El conjunto $\{0\}$ no contiene todos los números reales situados "alrededor de" 0. De hecho, los deja a todos fuera, salvo al propio 0.

En cambio, si el lector se para a pensar, tal vez se dé cuenta de que las afirmaciones anteriores no parecen ser del todo coherentes, pues, dado cualquier número real $\alpha \neq 0$, podemos tomar otro número real $\epsilon$ tal que $0 < \epsilon < |\alpha|$ y, por el mismo motivo que hemos considerado "intuitivamente razonables" las afirmaciones 1) y 2), podemos afirmar que el intervalo $]-\epsilon, \epsilon[$ contiene todos los números reales situados "alrededor de" 0, luego $\alpha$ no es uno de ellos. Y así, concluimos que ningún número real $\alpha \neq 0$ está "alrededor de " 0. A su vez, esto nos debería llevar a afirmar que $\{0\}$ contiene a todos los números reales situados "alrededor de" 0 (porque no hay ninguno más), cuando la afirmación "intuitivamente correcta" es 4, que dice justo lo contrario.

Si, pese a la paradoja, el lector mantiene su convicción de que sí tiene pleno sentido intuitivo sostener las cuatro afirmaciones precedentes, la conclusión que tenemos que asumir es que tiene que ser posible hablar con rigor de "los puntos de alrededor de un punto dado" sin necesidad de especificar qué puntos están y qué puntos no están alrededor de un punto dado. Sucede que, en efecto, esto es así, y la forma de lograrlo es a través del concepto topológico de "entorno". Una pseudodefinición de entorno sería:

> Un conjunto $E$ es un *entorno* de un punto $x$ si $E$ contiene a "todos los puntos de alrededor de" $x$.

Naturalmente, esto no sirve como definición matemática rigurosa porque el concepto de "puntos de alrededor", no sólo no lo tenemos definido, sino que es sospechoso de ser paradójico, pero nos sirve como transición para pasar a la definición siguiente, que sí que es completamente satisfactoria desde un punto de vista matemático:

> Un conjunto $E \subset \mathbb{R}$ es un *entorno* de un punto $x \in \mathbb{R}$ si existe un $\epsilon > 0$ tal que $]x-\epsilon, x+\epsilon[\; \subset E$.

Si consideramos "intuitivamente correcto" que todo intervalo $]x-\epsilon, x+\epsilon[$ contiene a "todos los puntos de alrededor de" $x$, entonces lo mismo tiene que valer para cualquier conjunto $E$ que contenga a un intervalo de esta forma, por lo que la definición que acabamos de dar, no sólo es matemáticamente rigurosa, sino que a la vez captura la noción intuitiva de "alrededor de". En particular, ahora podemos afirmar con rigor que el intervalo $[0, 1[$ o el conjunto $\{0\}$ no son entornos de 0.

Ahora bien, definir específicamente los entornos de un número real no nos ayuda en mucho. Nuestra intención es llegar a un concepto general de "entorno" que pueda ser aplicado en los contextos más diversos posibles. Pero entonces, lo que necesitamos no es una definición, sino más bien una axiomática. Necesitamos establecer qué propiedades debe tener algo para que podamos llamarlo "entorno" sabiendo que se comportará como cabe esperar que se comporte el concepto intuitivo de "entorno".

Esto nos lleva a una posible definición de "espacio topológico", que no es la que vamos a adoptar:

**Definicion** Un *espacio topológico* es un par $(X, \mathcal{E})$, donde $X$ es un conjunto y $\mathcal{E}$ es una función que a cada punto $x \in X$ le asigna una familia $\mathcal{E}_x$ de subconjuntos de $X$ (a los que llamaremos *entornos* de $x$) que cumple las propiedades siguientes:

**E1** $\mathcal{E}_x \neq \varnothing$ (todo punto de $X$ tiene al menos un entorno).

**E2** Si $E \in \mathcal{E}_x$, entonces $x \in E$ ($x$ pertenece a todos sus entornos).

**E3** Si $E \in \mathcal{E}_x$ y $E \subset F \subset X$, entonces $F \in \mathcal{E}_x$ (todo conjunto que contiene un entorno es un entorno).

**E4** Si $E, F \in \mathcal{E}_x$, entonces $E \cap F \in \mathcal{E}_x$ (la intersección de dos entornos es un entorno).

**E5** Si $E \in \mathcal{E}_x$, existe $E_0 \in \mathcal{E}_x$ tal que $E_0 \subset E$ y para todo $y \in E_0$ se cumple que $E_0 \in \mathcal{E}_y$ (todo entorno de $x$ contiene otro que es entorno de todos sus puntos).

**Ejercicio:** Probar que la definición particular de "entorno" que hemos dado para $\mathbb{R}$ cumple estos cinco axiomas, por lo que dota a $\mathbb{R}$ de estructura de espacio topológico.

Quizá el último axioma requiera una ilustración. El intervalo $E = [-1, 1]$ es un entorno de 0 según la definición que hemos dado para $\mathbb{R}$, pero no es cierto que sea entorno de todos sus puntos. Concretamente, no es un entorno ni de 1 ni de $-1$. Sin embargo, contiene al intervalo $E_0 = ]-1, 1[$, que también es un entorno de 0 pero, más aún, es entorno de todos sus puntos. En general, si $E$ es un entorno de un número real $x$, por definición existe un $\epsilon > 0$ tal que $E_0 = ]-\epsilon, \epsilon[ \subset E$, y entonces $E_0$ cumple el axioma **E5**.

**Definición** Un subconjunto $U$ de un espacio topológico $X$ es *abierto* si es entorno de todos sus puntos.

En estos términos, **E5** afirma que todo entorno de un punto contiene un entorno abierto.

**Ejercicio:** Probar que un subconjunto $E$ de un espacio topológico $X$ es entorno de un punto $x \in X$ si y sólo si existe un abierto $U$ tal que $x \in U \subset X$.

El último ejercicio muestra que, igual que hemos definido el concepto de "abierto" a partir del concepto de "entorno", también es posible definir el concepto de "entorno" a partir del concepto de "abierto", lo cual tiene sentido si previamente hemos introducido axiomáticamente los abiertos como hemos hecho con los entornos. Y sucede que esto, no sólo es posible, sino que es recomendable, porque una definición de espacio topológico a partir de unos axiomas para los conjuntos abiertos es formalmente mucho más simple y manejable, y el resultado es equivalente a la definición que hemos considerado aquí, en el sentido de que los abiertos de un espacio topológico definido en términos de entornos cumplen la definición de espacio topológico definido en términos de abiertos, y los entornos de un espacio topológico definido en términos de abiertos cumplen la definición de espacio topológico definido en términos de entornos.

Será en el capítulo 1 donde presentaremos la definición moderna de espacio topológico en términos de abiertos, pero ahora vamos a prolongar un poco esta discusión enfatizando que es la topología la que define la forma de un espacio topológico. Por ejemplo, $\mathbb{R}$ no es, en principio, más que un conjunto de puntos, y la estructura topológica que acabamos de introducir en él es la que refleja que es (o que queremos considerarlo como) una recta. Pero el concepto abstracto de espacio topológico nos da muchas otras alternativas. Vamos a discutir brevemente algunas de ellas.

**La topología trivial** Una estructura alternativa de espacio topológico en $\mathbb{R}$ se obtiene especificando que $\mathcal{E}_x = \{\mathbb{R}\}$, para todo punto $x \in \mathbb{R}$. De hecho, esto puede hacerse para cualquier conjunto en lugar de $\mathbb{R}$. Con ello estamos diciendo que todos los números reales están inevitablemente cualquiera de ellos. Hemos convertido a $\mathbb{R}$ en un único bloque topológicamente indivisible, sin partes diferenciadas. En esta estructura los únicos conjuntos abiertos son $\varnothing$ (que siempre es trivialmente abierto, de acuerdo con la definición que hemos dado) y el propio $\mathbb{R}$. ■

**La topología discreta** En el extremo opuesto, podemos definir como conjunto de entornos de cada número real $x$ el conjunto $\mathcal{E}_x = \{E \in \mathcal{P}\mathbb{R} \mid x \in E\}$, de modo que incluso $\{x\}$ es un entorno de $x$. De aquí se sigue que todo conjunto es entorno de todos sus puntos, es decir, que todos los subconjuntos de $\mathbb{R}$ son abiertos. Como en el caso precedente, esto tiene sentido igualmente en cualquier conjunto.

Como $\{x\}$ ya contiene a todos los puntos de alrededor de $x$, en este caso sí que es cierto que no hay puntos alrededor de $x$ aparte del propio $x$. Con esto hemos "hecho estallar" a $\mathbb{R}$ hasta convertirlo en una nube de puntos, aislados unos de otros, sin que ninguno tenga cerca a ningún otro. ■

**La recta de Sorgenfrey** Veamos ahora un ejemplo mucho más sutil, que muestra como, al haber axiomatizado la noción de "alrededor de" a través del concepto de entorno, tenemos una gran libertad para reinterpretar a voluntad este concepto —en origen intuitivo— de "alrededor de". Se llama *recta de Sorgenfrey* al espacio topológico que tiene como conjunto subyacente a $\mathbb{R}$, pero con el sistema de entornos definido mediante:

$$E \in \mathcal{E}_x \quad \text{si y sólo si existe un } \epsilon > 0 \text{ tal que } [x, x+\epsilon[\, \subset E.$$

**Ejercicio:** Comprobar que los entornos así definidos cumplen los cinco axiomas de espacio topológico.

Con esto hemos tomado la decisión (con la libertad que la definición de espacio topológico nos da para hacerlo) de considerar que los puntos situados "alrededor de" un número real son únicamente los situados a su derecha. Esto puede parecer insólito o arbitrario, pero es legítimo de acuerdo con la definición de espacio topológico, y podemos razonar intuitivamente con la recta de Sorgenfrey sin más que esforzarnos por no olvidar que "alrededor" significa ahora "alrededor por la derecha".

Por ejemplo, el intervalo $]0,1]$, no es abierto, porque contiene al 1, pero no a los puntos de su alrededor (a los de su derecha). En cambio, el intervalo $[0,1[$ sí que es abierto. No lo sería con la topología usual de $\mathbb{R}$, porque contiene al 0 y no a los puntos de su alrededor, pero en la topología de Sorgenfrey el intervalo sí que contiene a todos los puntos de alrededor de 0, porque sólo cuentan los de su derecha. ■

En definitiva, la idea que el lector tiene que asimilar a corto plazo es que un espacio topológico es una forma de especificar con rigor (y con un amplio margen de arbitrariedad) qué queremos decir cuando hablamos de "los puntos de alrededor de un punto" en un conjunto dado. Aunque los axiomas de entorno que hemos dado pueden parecer muy pobres, veremos que son suficientes para fundamentar una rica y potente teoría matemática.

**La estructura de este libro** Precisamente, la riqueza conceptual de la topología la convierte en una red de resultados fuertemente relacionados que no se presta a ser expuesta linealmente de forma natural, es decir, que todo intento de exponerla en un orden que un lector pueda seguir en su aprendizaje obliga, o bien a separar en el tiempo conceptos e ideas relacionadas que convendría tratar conjuntamente, o bien a que la estructura global de la exposición sea un tanto caótica, con saltos bruscos de una parte a otra, de forma que resulta difícil formarse una idea global de lo expuesto sobre cada parte específica. Los libros de topología general suelen buscar una solución de compromiso entre ambos extremos que resulte razonable, pero aquí hemos optado por una estrategia completamente distinta.

El libro está dividido en dos partes principales, la primera dedicada a la teoría general sobre espacios topológicos y uniformes, mientras que la segunda consta de varios capítulos dedicados a clases particulares de espacios (espacios métricos y normados, grupos topológicos, espacios vectoriales topológicos y espacios ordenados). Además, hemos reunido en un apéndice los numerosos ejemplos de espacios topológicos que usamos para ilustrar la teoría.

El orden de lectura lógico de la primera parte es el orden de lectura natural de cualquier libro, salvo en el caso de unas pocas secciones cuya lectura es necesario posponer. Por ejemplo, las secciones sobre espacios pseudocompactos y paracompactos están en el capítulo de compacidad por coherencia lógica, pero requieren resultados del capítulo sobre axiomas de separación, que es posterior. Aun así, pese a nuestro intento de agrupar los contenidos en capítulos temáticos, hemos considerado conveniente anticipar al primer capítulo los conceptos y resultados básicos sobre espacios de Hausdorff y regulares, que son desarrollados sistemáticamente en el capítulo 5.

En cambio, los contenidos de la segunda parte están pensados para ser leídos de forma intercalada con los de la primera parte a medida que van siendo necesarios o que resulta interesante tenerlos en cuenta. Para que el lector tenga claro el orden lógico de lectura en el que cada resultado se apoya únicamente en resultados demostrados previamente, cada vez que es necesario saltar a un punto de la segunda parte del libro, además de indicarse en el texto, en el margen de la hoja aparece el número de página al que hay que saltar. (En la versión en pdf los números funcionan como enlaces en los que se puede pinchar.)

Por ejemplo, el número que se muestra al final de este párrafo indica (falsamente en este ejemplo ilustrativo) que hay que saltar a la página 3, donde empieza el capítulo 1. 3

Cuando termina el texto del inciso, se indica igualmente con el número de página al que hay que saltar y además con una raya horizontal como ésta:

---

Así, desde cualquier punto de la primera parte puede iniciarse un ciclo de saltos por varios pasajes relacionados de la segunda parte que finalmente regresa al punto de partida para proseguir la lectura. Así el lector interesado en una exposición lineal tiene claramente indicado el orden de lectura, mientras que el lector interesado en hacerse una idea general de los resultados expuestos sobre un tema en concreto los encontrará agrupados de forma natural.

Similarmente, cada vez que es ilustrativo considerar un ejemplo de espacio topológico se remite al apéndice A, pero el lector debe tener presente que el criterio ha sido el que acabamos de decir: remitir a cada ejemplo cuando es interesante saber que existe dicho ejemplo, lo cual no significa que esté expuesta ya toda la teoría necesaria para entenderlo. Nos ha parecido más informativo anunciar la existencia del ejemplo en cuanto puede apreciarse su interés, en parte porque lo contrario sería ocultar temporalmente al lector una información ilustrativa sin ninguna necesidad, y en parte porque esto puede servir de motivación para los resultados que todavía es necesario estudiar para seguir el ejemplo.

Por otra parte, cabe señalar que el orden de exposición en la primera parte ha sido pensado con la intención de que pueda captarse lo más claramente posible las relaciones entre los distintos conceptos topológicos, y en particular cómo muchos resultados bien conocidos son casos particulares de otros mucho más generales y profundos cuyo grado de generalidad no es gratuito, sino que tiene interés entenderlos a ese nivel. Esto hace que, aunque en términos lógicos este libro no presupone ningún conocimiento previo de topología por parte del lector, lo cierto es que no está pensado para introducir en la topología a un lector que no esté familiarizado con ella, pues el orden de exposición elegido dista mucho de ser el más didáctico para tal fin, sino que está dirigido más bien a un lector ya familiarizado con la topología, al menos en el contexto de $\mathbb{R}^n$, y que quiera asimilar el "punto de vista topológico abstracto" y el interés de este punto de vista a la hora de aplicar la topología a contextos conjuntistas que distan mucho del contexto geométrico propio del cálculo diferencial de funciones de varias variables o de la geometría diferencial.

En cuanto a los requisitos de teoría de conjuntos que acabamos de mencionar, hemos organizado los capítulos de este libro para que puedan leerse paralelamente a los primeros capítulos de mi libro de *Teoría de Conjuntos,* al que haremos referencia como [TC]. La tabla siguiente muestra un orden de lectura alternado posible:

| Teoría de Conjuntos | Topología |
|---|---|
| **TC I**<br>Fundamentos | |
| **TC II**<br>El sistema numérico | **T I, II**<br>Espacios topológicos / uniformes |
| **TC III**<br>Ordinales | **T III**<br>Conexión |
| **TC IV**<br>Regularidad, elección | **T IV**<br>Compacidad |
| **TC V**<br>Cardinales | **T V**<br>Separación |
| **TC VI**<br>Cerrados no acotados | **T VI**<br>Espacios polacos |
| **TC VII**<br>Álgebras de Boole | **T VII**<br>Compactificaciones |
| **TC VIII**<br>Cardinales característicos | **T VIII**<br>Cardinales invariantes |

Así, los dos primeros capítulos de este libro sólo suponen conocidos los conceptos conjuntistas básicos y el sistema numérico, expuestos en los dos primeros capítulos de [TC]. A partir de ahí, cada capítulo de la primera parte puede leerse justo a continuación del correspondiente de [TC]. En algunos casos no hay conexión directa, sino que el orden es meramente circunstancial. Por ejemplo, no es que el capítulo de espacios polacos dependa para nada del capítulo sobre cerrados no acotados.

Dado que existen teorías de conjuntos interesantes que contradicen al axioma de elección (especialmente la que resulta de sustituirlo por el principio de elecciones dependientes más el axioma de determinación) hemos considerado conveniente marcar con **(AE)** los resultados que dependen del axioma de elección, e incluso con **(TU)** los que dependen únicamente del teorema de los ultrafiltros, que es un poco más débil, pero en todo momento aplicamos tácitamente el axioma de elección cuando se trata de consecuencias deducibles en realidad del principio de elecciones dependientes[1] (es decir, aplicaciones relacionadas esencialmente con elecciones numerables). El lector no interesado en estas sutilezas puede simplemente pasarlas por alto si así lo desea.

[1]El principio de elecciones dependientes se discute en el capítulo IV de [TC], mientras que el Teorema de los Ultrafiltros como axioma se discute en el capítulo X.

# Primera parte

# Espacios topológicos y uniformes

# Capítulo I

# Espacios topológicos

En este primer capítulo introduciremos el concepto de espacio topológico y definiremos los conceptos topológicos básicos, así como las operaciones más importantes que permiten construir unos espacios topológicos a partir de otros (subespacios, productos y cocientes), a la vez que ilustramos la teoría con ejemplos oportunos.

## 1.1 Topologías, bases y subbases

Tal y como advertíamos en la introducción, la definición moderna de espacio topológico toma como concepto fundamental (como concepto introducido axiomáticamente) el concepto de "abierto", de modo que un espacio topológico se define especificando cuáles son sus subconjuntos abiertos, y los demás conceptos topológicos se definen a partir de éste:

**Definición 1.1** Una *topología* en un conjunto $X$ es una familia $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}X$ que cumpla las propiedades siguientes:

1. $\varnothing$, $X \in \mathcal{T}$,
2. Si $\{A_i\}_{i\in I}$ es una familia de elementos de $\mathcal{T}$, entonces $\bigcup\limits_{i\in I} A_i \in \mathcal{T}$,
3. Si $A$, $B \in \mathcal{T}$, entonces $A \cap B \in \mathcal{T}$.

Un *espacio topológico* es un par $(X, \mathcal{T})$, donde $X$ es un conjunto y $\mathcal{T}$ es una topología en $X$. Los elementos de $\mathcal{T}$ se llaman *subconjuntos abiertos* de $X$.

Así pues, la definición de topología exige que $\varnothing$ y $X$ sean abiertos, que la unión de cualquier familia de abiertos sea abierta y que la intersección de dos abiertos sea abierta. Una simple inducción a partir de esta última propiedad nos da que la intersección de cualquier cantidad finita de abiertos es abierta.

Notemos que la propiedad 2) podría expresarse más concisamente como que si $\mathcal{F} \subset \mathcal{T}$, entonces $\bigcup \mathcal{F} \in \mathcal{T}$.

En la práctica escribiremos $X$ en lugar de $(X, \mathcal{T})$ y sobrentenderemos que $\mathcal{T}$ es la topología del espacio topológico $X$, teniendo en cuenta que $\mathcal{T}$ será una topología distinta en cada caso.

El primer concepto topológico que definimos a partir del de "abierto" es el de "entorno":

Si $C$, $U$ son subconjuntos de un espacio topológico $X$, se dice que $U$ es un *entorno* de $C$ si existe un abierto $A$ tal que $C \subset A \subset U$. Se dice que $U$ es entorno de un punto $x \in X$ si es un entorno de $\{x\}$. En particular, un entorno abierto de $x$ es simplemente un abierto que contenga a $x$.

Los entornos de los puntos en un espacio topológico determinan los abiertos:

**Teorema 1.2** *Si $X$ es un espacio topológico y $A \subset X$, entonces $A$ es abierto si y sólo si es entorno de todos sus puntos.*

Demostración: Si $A$ es abierto cumple trivialmente la definición de entorno para cada uno de sus puntos, mientras que si cumple la condición sobre entornos, entonces $A = \bigcup \mathcal{F}$, donde $\mathcal{F} = \{U \in \mathcal{T} \mid U \subset A\}$, luego $A$ es abierto porque la unión de abiertos es abierta. ■

Remitimos al lector a la introducción para la discusión sobre el trasfondo intuitivo de los conceptos que acabamos de introducir, que se resume en que "$E$ es un entorno de $x$" expresa la idea intuitiva de que $E$ contiene todos los puntos de "alrededor de" $x$, lo que a su vez se traduce en que un conjunto es abierto si y sólo si contiene a todos los puntos de alrededor de cualquiera de sus puntos.

**Ejercicio:** Probar que si $X$ es un espacio topológico y, para cada punto $x \in X$, llamamos $\mathcal{E}_x$ al conjunto de todos los entornos de $x$, entonces la función $\mathcal{E}$ cumple las condiciones **E1**–**E5** de la página xii, así como que si $X$ es un espacio topológico definido en términos de entornos, entonces el conjunto $\mathcal{T}$ de sus abiertos es una topología en el sentido definido aquí.

**Ejemplos** Dado un conjunto $X$, la *topología discreta* en $X$ es $\mathcal{T} = \mathcal{P}X$, y la *topología trivial* es $\mathcal{T} = \{\varnothing, X\}$.

Así, la topología discreta es la mayor topología que puede definirse en un conjunto, en la que todos sus subconjuntos son abiertos, mientras que la topología trivial es la menor topología posible, pues tiene únicamente los abiertos exigidos por la definición.

Se dice también que un espacio topológico es *discreto* o *trivial* si su topología es la discreta o la trivial, respectivamente.

Un punto $x$ de un espacio topológico $X$ es *aislado* si $\{x\}$ es abierto. Es claro que un espacio topológico es discreto si y sólo si todos sus puntos son aislados.

Intuitivamente, un punto $x$ es aislado si $\{x\}$ contiene a los puntos de alrededor de $x$ o, lo que es lo mismo, si $x$ no tiene ningún punto a su alrededor (salvo él mismo), si está "aislado" de los demás puntos del espacio.

Los conceptos de "espacio discreto" y "espacio trivial" son los mismos que hemos definido en la introducción en términos de entornos y, como ya señalamos allí, un espacio discreto representa una "nube de puntos" en la que cada punto está separado de los demás, mientras que en un espacio trivial todos los puntos forman un todo topológicamente inseparable.

**Bases** Para dar ejemplos más representativos de espacios topológicos conviene introducir el concepto de base de una topología:

**Definición 1.3** Una *base* de un espacio topológico $X$ es una familia de abiertos $\mathcal{B}$ (llamados *abiertos básicos*) tal que todo abierto de $X$ se expresa como unión de abiertos básicos.

Aquí hay que entender que $\varnothing = \bigcup \varnothing$ es siempre unión de "cero" abiertos básicos, luego no hace falta que $\varnothing$ sea él mismo un abierto básico. Notemos que una definición equivalente es que $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ es base de $X$ si para todo abierto $A \in \mathcal{T}$ y todo $x \in A$, existe un abierto básico $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subset A$.

En efecto, si se cumple esto y $A \in \mathcal{T}$, entonces $A = \bigcup \mathcal{F}$, donde

$$\mathcal{F} = \{B \in \mathcal{B} \mid B \subset A\}.$$

El interés de este concepto se debe a los dos teoremas siguientes:

**Teorema 1.4** *Si $\mathcal{B}$ es una base de un espacio topológico $X$, se cumplen las dos propiedades siguientes:*

1. $\bigcup \mathcal{B} = X$,
2. *Si $A, B \in \mathcal{B}$ y $x \in A \cap B$, existe un $C \in \mathcal{B}$ tal que $x \in C \subset A \cap B$.*

Demostración: Como $X$ es abierto, debe expresarse como unión de una familia $\mathcal{F} \subset \mathcal{B}$ de abiertos básicos, luego $X = \bigcup \mathcal{F} \subset \bigcup \mathcal{B} \subset X$ y tenemos la igualdad.

Si $x \in A \cap B$, donde $A$ y $B$ son abiertos, entonces $A \cap B$ es también abierto, luego existe un abierto básico $C$ que cumple lo pedido. ■

Lo interesante es que estas propiedades bastan para que una familia de conjuntos sea la base de una topología:

**Teorema 1.5** *Sea $X$ un conjunto y $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}X$ una familia de subconjuntos de $X$ que tenga las propiedades siguientes:*

1. $\bigcup \mathcal{B} = X$,
2. *Si $A, B \in \mathcal{B}$ y $x \in A \cap B$, existe un $C \in \mathcal{B}$ tal que $x \in C \subset A \cap B$.*

*Entonces existe una única topología en $X$ que tiene a $\mathcal{B}$ por base, y es la mínima (respecto de la inclusión) para la que los elementos de $\mathcal{B}$ son abiertos.*

Demostración: Definimos $\mathcal{T} = \{\bigcup \mathcal{F} \mid \mathcal{F} \subset \mathcal{B}\}$. La condición 1) afirma que $X \in \mathcal{T}$ y trivialmente $\varnothing = \bigcup \varnothing \in \mathcal{T}$.

Si $\mathcal{F} \subset \mathcal{T}$, para cada $A \in \mathcal{F}$ definimos $\mathcal{F}_A = \{B \in \mathcal{B} \mid B \subset A\}$, de modo que $A = \bigcup \mathcal{F}_A$. Sea $\mathcal{F}^* = \bigcup\limits_{A \in \mathcal{F}} \mathcal{F}_A \subset \mathcal{B}$. Claramente $\bigcup \mathcal{F} = \bigcup \mathcal{F}^* \in \mathcal{T}$.

Por último, si $A$, $B \in \mathcal{T}$, sea $\mathcal{F} = \{B \in \mathcal{B} \mid B \subset A \cap B\}$. Veamos que $A \cap B = \bigcup \mathcal{F}$. Una inclusión es inmediata. Para probar la otra tomamos $x \in A \cap B$ y, por la hipótesis 2) existe un $C \in \mathcal{B}$ tal que $x \in C \in \mathcal{F}$, luego $x \in \bigcup \mathcal{F}$.

La unicidad y la parte final son inmediatas: si $\mathcal{T}'$ es una topología en la que los elementos de $\mathcal{B}$ son abiertos, necesariamente $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$, luego $\mathcal{T}$ es la única topología de base $\mathcal{B}$. ■

Así pues, para definir una topología en un conjunto dado es suficiente con establecer una familia $\mathcal{B}$ en las condiciones del teorema anterior. Hay otro concepto relacionado que conviene introducir:

**Definición 1.6** Si $X$ es un espacio topológico y $x \in X$, una *base de entornos (abiertos)* de $x$ es una familia $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ de entornos (abiertos) de $x$ tal que, si $U$ es un entorno de $x$, existe un $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subset U$.

Si en un espacio topológico $X$ tenemos una familia $\{\mathcal{B}_x\}_{x \in X}$ de modo que cada $\mathcal{B}_x$ es una base de entornos abiertos de $x$, es claro que $\mathcal{B} = \bigcup\limits_{x \in X} \mathcal{B}_x$ es una base de $X$.

Recíprocamente, si $\mathcal{B}$ es una base, entonces $\mathcal{B}_x = \{A \in \mathcal{B} \mid x \in A\}$ es una base de entornos de $x$.

**Ejemplo: Espacios métricos** El lector puede leer en este punto el principio de la sección 9.1, donde se introducen los espacios métricos, que ilustran perfectamente todos los conceptos que hemos introducido hasta aquí y a su vez, desde allí puede pasar (cuando se indica) al principio del capítulo 2, donde se introduce la estructura de "espacio uniforme", intermedia entre las estructura de "espacio métrico" y "espacio topológico". 287

**Subbases** Presentamos ahora un concepto similar al de base que también es útil para definir topologías:

**Definición 1.7** Una *subbase* de un espacio topológico $X$ es una familia $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$ tal que la familia de las intersecciones finitas[1] de elementos de $\mathcal{S}$ es una base de $X$.

La diferencia respecto de las bases es que una familia de conjuntos no necesita cumplir ninguna condición para ser la subbase de una topología:

**Teorema 1.8** *Sea $X$ un conjunto y $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}X$ una familia de subconjuntos de $X$. Entonces existe una única topología en $X$ de la cual $\mathcal{S}$ es subbase, y es la mínima, respecto de la inclusión, para la que los elementos de $\mathcal{S}$ son abiertos.*

[1] Aquí convenimos en que, para familias de subconjuntos de $X$, se cumple $\bigcap \varnothing = X$.

DEMOSTRACIÓN: Sea $\mathcal{B} = \{\bigcap S \mid S \subset \mathcal{S} \land S \land S \text{ finito}\}$ y veamos que cumple las condiciones del teorema 1.5. Como $X = \bigcap \varnothing \in \mathcal{B}$, la primera se cumple trivialmente. Si $A$, $B \in \mathcal{B}$ y $x \in A \cap B$, entonces $A = \bigcap S$, $B = \bigcap T$, para ciertos conjuntos finitos $S$, $T \subset \mathcal{S}$. Pero entonces $A \cap B = \bigcap (S \cup T) \in \mathcal{S}$.

Por lo tanto, $\mathcal{B}$ es la base de una topología en $X$, la cual tiene obviamente a $\mathcal{S}$ por subbase. Si $\mathcal{T}'$ es una topología respecto a la que los elementos de $\mathcal{S}$ son abiertos, entonces también lo son los elementos de $\mathcal{B}$, luego todos los de $\mathcal{T}$, s decir, $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$, y esto nos da la unicidad. ■

**Ejemplo: La topología de orden** El lector puede leer en este punto el principio del capítulo 12, en el que dotamos de estructura de espacio topológico a todo conjunto ordenado. 445

En particular, en $\mathbb{R}$ tenemos la topología de orden y la topología inducida por la métrica usual, pero sucede que son la misma topología (y es por esto que hemos definido ambas como la "topología usual" de $\mathbb{R}$). Esto es consecuencia de que, claramente, las bolas abiertas en $\mathbb{R}$ son intervalos $B_\epsilon(x) = \,]x-\epsilon, x+\epsilon[$, luego todo abierto métrico es un abierto para la topología de orden y, recíprocamente, si $]a,b[$ es un abierto básico en $\mathbb{R}$ para la topología de orden y $x \in \,]a,b[$, tomamos $\epsilon = \min\{x-a, b-x\}$ y entonces es claro que

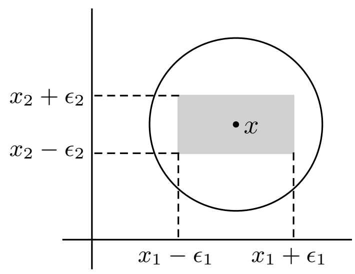
$$B_\epsilon(x) = \,]x-\epsilon, x+\epsilon[\, \subset \,]a,b[\,,$$

luego todos los abiertos de la topología de orden son abiertos métricos. ■

**Producto de espacios topológicos** Sin duda el lector sabrá que la distancia natural en $\mathbb{R}^2$ es la llamada distancia euclídea, dada por

$$d(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2},$$

que representa la longitud del segmento de extremos $x$ e $y$. Respecto de esta distancia, una bola abierta $B_\epsilon(x)$ es el círculo (abierto, es decir, sin su borde) de centro $x$ y radio $\epsilon$, que ciertamente contiene a todos los puntos "de alrededor" de $x$.




Sin embargo, si nuestro propósito es determinar con precisión cuándo un subconjunto de $\mathbb{R}^2$ contiene a "los puntos de alrededor" de un punto dado $x$, es indiferente considerar círculos o rectángulos de centro $x$, pues un rectángulo de centro $x$ como

$$]x_1-\epsilon_1, x_1+\epsilon_1[\,\times\,]x_2-\epsilon_2, x_2+\epsilon_2[$$

contiene a todos los puntos que están intuitivamente alrededor de $x$ exactamente igual que un círculo de centro $x$, y la ventaja es que al considerar rectángulos llegamos a un procedimiento que permite en general dotar de estructura topológica al producto $X \times Y$ de dos espacios topológicos, y que consiste en observar que los productos de abiertos $U \times V$ forman la base de una topología en $X \times Y$.

De hecho, esto es cierto incluso para productos de infinitos factores. Si $\{X_i\}_{i \in I}$ es una familia de espacios topológicos, podemos considerar su producto cartesiano $\prod\limits_{i \in I} X_i$. Para cada $i \in I$ tenemos la proyección $p_i : \prod\limits_{i \in I} X_i \longrightarrow X_i$.

**Ejercicio:** Probar que si $\{X_i\}_{i \in I}$ es una familia de espacios topológicos, la familia $\mathcal{B}$ de todos los conjuntos $\prod\limits_{i \in I} U_i$ tales que cada $U_i$ es abierto en $X_i$ es la base de una topología en $\prod\limits_{i \in I} X_i$.

Sin embargo, fue Tychonoff el que se dio cuenta de que la topología determinada en un producto tomando como abiertos básicos los productos de abiertos no se comporta adecuadamente cuando el producto es infinito. A él se debe, en cambio, la definición siguiente:

**Definición 1.9** Se llama *topología producto* en un producto cartesiano de espacios topológicos a la que tiene por subbase a los conjuntos de la forma $p_i^{-1}[A]$, donde $A$ es un abierto en $X_i$.

El teorema siguiente muestra que, en general, los abiertos básicos para la topología producto no son los productos de abiertos:

**Teorema 1.10** *Sea $\{X_i\}_{i \in I}$ una familia de espacios topológicos y sea $\{\mathcal{B}_i\}_{i \in I}$ una familia tal que $\mathcal{B}_i$ sea una base de $X_i$. Entonces una base de la topología producto la forman los productos $\prod\limits_{i \in I} B_i$ tales que existe $I_0 \subset I$ finito de modo que $B_i \in \mathcal{B}_i$ para todo $i \in I_0$ y $B_i = X_i$ para $i \in I \setminus I_0$.*

Demostración: Sea $\mathcal{T}$ la topología que tiene por subbase los conjuntos de la forma $p_i^{-1}[B]$, donde $B \in \mathcal{B}_i$. Estos abiertos son abiertos para la topología producto, luego todo abierto de $\mathcal{T}$ es abierto para la topología producto.

Recíprocamente, un abierto subbásico para la topología producto es de la forma $p_i^{-1}[A]$, donde $A$ es abierto en $X_i$, pero entonces $A$ se puede expresar como unión de conjuntos de $\mathcal{B}_i$, luego $p_i^{-1}[A]$ es unión de abiertos subbásicos de $\mathcal{T}$, luego todo abierto de la topología producto es abierto de $\mathcal{T}$. En definitiva, $\mathcal{T}$ es la topología producto.

Llamemos $\mathcal{B}$ a la familia de los conjuntos descritos en el enunciado. Todo elemento de $\mathcal{B}$ es de la forma $\bigcap\limits_{i \in I_0} p_i^{-1}[B_i]$, luego es un abierto básico de $\mathcal{T}$ (luego de la topología producto).

Si probamos que $\mathcal{B}$ es base de una topología, entonces todos los abiertos de esta topología serán abiertos para la topología producto y, como cada abierto subbásico de $\mathcal{T}$ está en $\mathcal{B}$, todo abierto de la topología producto será abierto para la topología de $\mathcal{B}$, y quedará demostrado que $\mathcal{B}$ es una base de la topología producto.

Ahora bien, la primera propiedad de 1.5 es inmediata y, si tenemos que $x \in U \cap V$, donde $U = \bigcap\limits_{i \in I_0} p_i^{-1}[B_i]$ y $V = \bigcap\limits_{i \in I_1} p_i^{-1}[B'_i]$, podemos cambiar $I_0$

e $I^* = I_1$ por $I_0 \cup I_1$ si definimos $B_i = X_i$ para $i \in I_1 \setminus I_0$ y $B_i' = X_i$ para $i \in I_0 \setminus I_1$. Entonces

$$U \cap V = \bigcap_{i\in I^*} p_i^{-1}[B_i] \cap \bigcap_{i\in I*} p_i^{-1}[B_i'] = \bigcap_{i\in I^*} (p_i^{-1}[B_i] \cap p_i^{-1}[B_i']) = \bigcap_{i\in I^*} p_i^{-1}[B_i \cap B_i']$$

y, como $x \in U \cap V$, tenemos que $p_i(x) \in B_i \cap B_i'$, luego existe $B_i'' \in \mathcal{B}_i$ tal que $p_i(x) \in B_i'' \subset B_i \cap B_i'$, luego

$$x \in \bigcap_{i\in I^*} p_i^{-1}[B_i''] \subset U \cap V.$$

Esto prueba que $\mathcal{B}$ es una base, y que por tanto lo es de la topología producto. ■

Notemos que en el caso de los productos finitos el teorema anterior afirma que una base de un producto $X_1 \times \cdots \times X_n$ está formada por los conjuntos de la forma $B_1 \times \cdots \times B_n$, donde cada $B_i$ está en una base prefijada de $X_i$.

**Nota** Es importante tener presente que los productos de abiertos son una base de la topología producto, pero eso no significa que sean los únicos abiertos. Por ejemplo, puede probarse (y un poco más adelante será inmediato) que un círculo sin su borde es abierto en la topología usual de $\mathbb{R}^2$, pero no es un producto de abiertos. Lo que sucede es que el círculo es unión de productos de abiertos. ■

**Definición 1.11** Se llama *producto de cajas* de una familia $\{X_i\}_{i\in I}$ de espacios topológicos al espacio $\prod\limits_{i\in I} X_i$ dotado de la topología que tiene por base a los productos $\prod\limits_{i\in I} U_i$, donde cada $U_i$ es abierto en $X_i$.

Salvo que indiquemos lo contrario, cuando hablemos de un producto $\prod\limits_{i\in I} X_i$ de espacios topológicos se sobreentenderá que consideramos en él la topología producto definida en 1.9 y no la topología de cajas. Cuando es necesario enfatizar la diferencia, al producto de espacios topológicos con la topología producto se le llama también *producto de Tychonoff.*

Hemos visto que el producto de Tychonoff coincide con el producto de cajas cuando el número de factores es finito, pero en el caso de productos infinitos el producto de Tychonoff tiene un comportamiento mucho más satisfactorio, y por ello el producto de cajas apenas se utiliza.

Se llama *topología usual* en $\mathbb{R}^n$ a la topología producto que resulta de considerar en $\mathbb{R}$ la topología usual.

En la sección 2.1 probamos que todo producto de espacios uniformes admite una uniformidad que induce la topología producto y a su vez en la sección 9.1 vemos que en el producto de un número finito de espacios métricos podemos definir una distancia que induce la topología (y la uniformidad) producto. 46

**Topología relativa** Todo subconjunto de un espacio topológico hereda de éste una topología:

**Teorema 1.12** *Si $X$ es un espacio topológico e $Y \subset X$, el conjunto*

$$\mathcal{T}_Y = \{A \cap Y \mid A \in \mathcal{T}\}$$

*es una topología en $Y$.*

Demostración: En primer lugar, $\varnothing = \varnothing \cap Y \in \mathcal{T}_Y$, $Y = X \cap Y \in \mathcal{T}_Y$. En segundo lugar, si $\mathcal{F} \subset \mathcal{T}_Y$, consideramos la familia de abiertos

$$\mathcal{F}^* = \{U \in \mathcal{T} \mid U \cap Y \in \mathcal{F}\}$$

y llamamos $A = \bigcup \mathcal{F}^* \in \mathcal{T}$. Es fácil ver que $A \cap Y = \bigcup \mathcal{F}$, con lo que $\bigcup F \in \mathcal{T}_Y$.

Por último, dados $U, V \in \mathcal{T}_Y$, existen $A, B \in \mathcal{T}$ tales que $U = A \cap Y$, $V = B \cap Y$, luego $U \cap V = (A \cap B) \cap Y \in \mathcal{T}_Y$. ■

**Definición 1.13** Si $X$ es un espacio topológico e $Y \subset X$, se llama *topología relativa* de $Y$ respecto de $X$ a la topología $\mathcal{T}_Y = \{A \cap Y \mid A \in \mathcal{T}\}$.

Observemos que si $\mathcal{B}$ es una base de $X$ y $\mathcal{S}$ es una subbase de $X$, entonces

$$\mathcal{B}_Y = \{B \cap Y \mid B \in \mathcal{B}\}, \qquad \mathcal{S}_Y = \{S \cap Y \mid S \in \mathcal{S}\}$$

son, respectivamente, una base y una subbase de la topología relativa.

En efecto, un abierto de la topología relativa es de la forma $A \cap Y$, donde $A = \bigcup \mathcal{F}$, con $\mathcal{F} \subset \mathcal{B}$, luego $\mathcal{F}^* = \{U \cap Y \mid U \in \mathcal{F}\} \subset \mathcal{B}_Y$ y $A \cap Y = \bigcup \mathcal{F}^*$. Esto prueba que $\mathcal{B}_Y$ es base de la topología relativa.

Similarmente, si $\mathcal{B}$ es la base inducida por $\mathcal{S}$, es fácil ver que $\mathcal{B}_Y$ (que ya hemos probado que es una base de la topología relativa) es la base inducida por $\mathcal{S}_Y$, luego $\mathcal{S}_Y$ es subbase de la topología relativa.

En lo sucesivo consideraremos a los subconjuntos de los espacios topológicos como espacios topológicos con la topología relativa. Esto es coherente, pues es fácil ver que si $X$ es un espacio topológico y tenemos subconjuntos $Z \subset Y \subset X$, entonces la topología relativa de $Z$ respecto de $X$ es la misma que la relativa respecto de $Y$ cuando en $Y$ consideramos la topología relativa respecto de $X$.

En los productos tenemos el resultado siguiente de coherencia:

**Teorema 1.14** *Sea $\{X_i\}_{i \in I}$ una familia de espacios topológicos y sea $\{Y_i\}_{i \in I}$ una familia de conjuntos, de modo que cada $Y_i \subset X_i$. Entonces $Y = \prod\limits_{i \in I} Y_i$ es un subconjunto de $X = \prod\limits_{i \in I} X_i$. Si consideramos a cada $Y_i$ como espacio topológico con la topología relativa, entonces la topología producto de $Y$ es la misma que la topología relativa respecto de $X$.*

DEMOSTRACIÓN: Un abierto básico para la topología relativa de $Y$ es

$$\prod_{i\in I} Y_i \cap \prod_{i\in I} A_i = \prod_{i\in I} (Y_i \cap A_i),$$

donde cada $A_i$ es abierto en $X_i$ y todos salvo una cantidad finita coinciden con $X_i$, pero es claro que el miembro derecho es un abierto básico para la topología producto de $Y$, y viceversa. Por lo tanto, ambas topologías coinciden. ■

El lector puede estudiar ahora los apartados sobre la topología relativa en las secciones 2.1 (espacios uniformes) 9.1 (espacios métricos) y 12 (topología de orden). 47

Por ejemplo, si no se indica lo contrario, consideraremos a $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$ con la topología que heredan desde $\mathbb{R}$ (que es tanto la topología métrica como la topología de orden). Claramente $\mathbb{Z}$ (y por lo tanto $\mathbb{N}$) es un espacio discreto, ya que, si $n \in \mathbb{Z}$, tenemos que $]n-1, n+1[\, \cap \mathbb{Z} = \{n\}$, luego todos los enteros son puntos aislados de $\mathbb{Z}$.

**Espacios de Hausdorff** Cuando Hausdorff introdujo el concepto de "espacio topológico" en términos de entornos, exigió una propiedad completamente natural, pero que en la definición general moderna se ha eliminado porque existen algunas topologías de interés que no la satisfacen. Vamos a introducir, de hecho, tres propiedades relacionadas:

**Definición 1.15** Se dice que un espacio topológico $X$ cumple la propiedad:

$\boldsymbol{T_0}$ si cuando $x$, $y$ son dos puntos distintos en $X$, existe un abierto que contiene sólo a uno de ellos.

$\boldsymbol{T_1}$ si cuando $x$, $y$ son dos puntos distintos en $X$, existe un abierto $U$ tal que $x \in U$, $y \notin U$.

$\boldsymbol{T_2}$ si cuando $u$, $v \in X$ son dos puntos distintos, existen abiertos disjuntos $U$, $V$ en $X$ tales que $u \in U$, $v \in V$.

La propiedad $T_2$ se llama también *propiedad de Hausdorff* y los espacios que la cumplen se llaman *espacios de Hausdorff.*

En otras palabras, un espacio es de Hausdorff si y sólo si puntos distintos tienen entornos disjuntos. Es inmediato que los espacios métricos y los espacios ordenados son espacios de Hausdorff.

En efecto, si $M$ es un espacio métrico y $u$, $v \in M$ son dos puntos distintos, basta considerar las bolas $B_{\epsilon/2}(u)$ y $B_{\epsilon/2}(v)$, donde $\epsilon = d(u, v) > 0$.

Si $X$ es un espacio ordenado, y $u < v$ son dos puntos de $X$, o bien existe $u < w < v$, en cuyo caso los abiertos $]-\infty, w[$ y $]w, +\infty[$ son entornos disjuntos de los puntos dados, o bien no existe tal $w$, en cuyo caso sirven $]-\infty, v[$ y $]u, +\infty[$.

Respecto a las otras dos propiedades, es inmediato que todo espacio $T_2$ es $T_1$ y que todo espacio $T_1$ es $T_0$.

Observemos que un espacio $X$ incumple la propiedad $T_0$ si y sólo si contiene dos puntos distintos $x$ e $y$ contenidos exactamente en los mismos entornos. Se dice entonces que son puntos *topológicamente indistinguibles,* pues cualquier propiedad topológica que cumpla uno la cumplirá también el otro.

Por ejemplo, en un espacio trivial, todos los puntos son topológicamente indistinguibles, por lo que si tiene más de un punto no cumple la propiedad $T_0$.

Un ejemplo menos drástico es el caso de un espacio pseudométrico $M$ que no sea metrizable. Si $x$, $y$ son dos puntos distintos tales que $d(x, y) = 0$, entonces son topológicamente indistinguibles, pues uno está en todas las bolas de centro el otro, por lo que ambos tienen los mismos entornos. Por lo tanto, los espacios pseudométricos que no son metrizables son ejemplos de espacios que no cumplen la propiedad $T_0$.

Por ejemplo, con la pseudométrica en $\mathbb{R}^2$ dada por $d(x, y) = |x_1 - y_1|$ sucede que todos los puntos de una misma recta vertical son topológicamente indistinguibles. Cada recta vertical forma un todo topológicamente inseparable.

La propiedad $T_1$ se entenderá mejor un poco más abajo, cuando introduzcamos el concepto de "cerrado", pues veremos que equivale a que los puntos del espacio sean cerrados.

De todos modos, un ejemplo muy sencillo de espacio $T_0$ que no es $T_1$ es el *espacio de Sierpiński* $S = \{0, 1\}$ con la topología $\mathcal{T} = \{\varnothing, \{1\}, \{0, 1\}\}$. Vemos que los dos puntos son topológicamente distinguibles, pero no existe ningún abierto que contenga a 0 y no a 1, por lo que falla la propiedad $T_1$.

**Teorema 1.16** *Todo subespacio de un espacio $T_i$ es $T_i$ (para $i = 0, 1, 2$).*

Demostración: Si $X$ es un espacio de Hausdorff, $Y \subset X$ y $u$, $v \in Y$ son dos puntos distintos, entonces existen abiertos disjuntos $U$, $V$ en $X$ tales que $u \in U$, $v \in V$, con lo que $U \cap Y$ y $V \cap Y$ son abiertos disjuntos en $Y$ que cumplen lo requerido. La prueba para las otras dos propiedades es similar. ■

**Teorema 1.17** *Si $\{X_i\}_{i \in I}$ es una familia de espacios topológicos de manera que*[2] $X = \prod\limits_{i \in I} X_i \neq \varnothing$, *entonces $X$ es un espacio $T_i$ (para $i = 0, 1, 2$) si y sólo si lo es cada $X_i$.*

Demostración: Veamos el caso de la propiedad de Hausdorff. Los otros dos casos son similares.

Si $X$ es un espacio de Hausdorff y $u_j$, $v_j \in X_j$ son dos puntos distintos, tomamos dos puntos $u$, $v \in X$ cuya coordenada $j$-esima sea precisamente $u_j$ y $v_j$, respectivamente.[3] Por hipótesis existen abiertos disjuntos $U$ y $V$ en $X$

[2] Admitiendo el axioma de elección, esto equivale a que todos los $X_i$ sean no vacíos, pero en muchas ocasiones es posible encontrar explícitamente elementos en un producto sin necesidad de usar el axioma de elección.

[3] Basta tomar $a \in X$ y llamar $u$ y $v$ al punto $a$ con su coordenada $j$-ésima modificada.

tales que $u \in U$, $v \in V$. Reduciéndolos, podemos suponer que son abiertos básicos, $U = \prod\limits_{i \in I} U_i$, $V = \prod\limits_{i \in I} V_i$, y es fácil ver que los abiertos $U_j$ y $V_j$ son disjuntos y $u_j \in U_j$, $v_j \in V_j$.

Recíprocamente, si cada factor es un espacio de Hausdorff y $u$, $v \in X$ son dos puntos distintos, entonces existe un índice $j \in I$ tal que $u_j \neq v_j$, con lo que existen abiertos disjuntos $U$ y $V$ en $X_j$ tales que $u_j \in U$, $v_j \in V$. Entonces $p_j^{-1}[U]$ y $p_j^{-1}[V]$ son abiertos disjuntos en $X$ tales que $u \in p_j^{-1}[U]$ y $v \in p_j^{-1}[V]$. ■

Ya hemos observado que todos los espacios métricos y todos los espacios ordenados son de Hausdorff. En la sección 2.1 estudiamos la situación para los espacios uniformes. 47

## 1.2 Algunos conceptos topológicos

Ya hemos visto cómo en un espacio topológico podemos definir algunos conceptos relacionados, como "entorno", "base", "subbase", "punto aislado", etc. Vamos a introducir algunos más.

**Conjuntos cerrados** Si $X$ es un espacio topológico, un conjunto $A \subset X$ es *cerrado* si $X \setminus A$ es abierto. Es inmediato comprobar que los conjuntos cerrados cumplen propiedades "duales" de las que cumplen los abiertos por definición de topología:

1. *$\varnothing$, $X$ son cerrados.*
2. *Si $\{A_i\}_{i \in I}$ es una familia de cerrados en $X$, entonces $\bigcap\limits_{i \in I} A_i$ es cerrado.*
3. *Si $A$, $B$ son subconjuntos cerrados de $X$, entonces $A \cup B$ es cerrado.*

Para discutir la interpretación intuitiva de este concepto conviene introducir antes algunos más. De momento observemos que si $Y \subset X$, entonces los cerrados de $Y$ (para la topología relativa) son los conjuntos de la forma $Y \cap C$, donde $C$ es cerrado en $X$.

En efecto, en principio son los conjuntos de la forma $Y \setminus (A \cap Y)$, donde $A$ es abierto en $X$, pero obviamente $Y \setminus (A \cap Y) = Y \cap (X \setminus A)$. ■

Ahora podemos dar la caracterización de los espacios $T_1$ que habíamos anticipado:

**Teorema 1.18** *Un espacio topológico cumple la propiedad $T_1$ si y sólo si sus puntos son cerrados.*

Demostración: Sea $X$ un espacio topológico. Cuando decimos que un punto $x \in X$ es cerrado hay que entender que nos referimos al conjunto $\{x\}$. En efecto, si $X$ es $T_1$ y $x \in X$, se cumple que $X \setminus \{x\}$ es abierto, pues si $y \in X \setminus \{x\}$

la propiedad $T_1$ implica que existe un abierto $U$ tal que $y \in U$ y $x \notin U$, es decir, tal que $y \in U \subset X \setminus \{x\}$, lo que significa que $X \setminus \{x\}$ es entorno de todos sus puntos, luego es abierto.

Recíprocamente, si todos los puntos de $X$ son cerrados y $x$, $y \in X$ son dos puntos distintos, entonces $U = X \setminus \{y\}$ es un abierto tal que $x \in U$, $y \notin U$, como requiere la propiedad $T_1$. ■

Notemos que en un espacio $T_1$ todos los subconjuntos finitos son cerrados, por lo que un espacio finito es $T_1$ si y sólo si es discreto (pues todos sus subconjuntos son cerrados, luego todos son abiertos).

Ya hemos visto el espacio de Sierpiński como ejemplo de espacio $T_0$ que no es $T_1$. Se trata de un caso particular de espacio con la *topología del punto particular* (ejemplo A.1). Un ejemplo de espacio $T_1$ que no es $T_2$ lo proporciona la topología cofinita (ejemplo A.3).

Hay una caracterización útil de los espacios de Hausdorff en términos de cerrados:

**Teorema 1.19** *Un espacio topológico $X$ es de Hausdorff si y sólo si la diagonal $\Delta = \{(x, x) \mid x \in X\}$ es cerrada en $X \times X$.*

Demostración: Si $X$ es de Hausdorff y $(x, y) \in (X \times X) \setminus \Delta$, entonces $x \neq y$, luego $x$ e $y$ pueden ser separados por abiertos disjuntos $U$ y $V$. Entonces $(x, y) \in U \times V \subset (X \times X) \setminus \Delta$, luego el complemento de la diagonal es entorno de todos sus puntos, es decir, es abierto, y la diagonal es cerrada.

Recíprocamente, si la diagonal es cerrada, dados dos puntos distintos $x$, $y \in X$, entonces $(x, y) \in (X \times X) \setminus \Delta$, que es un abierto, luego existe un abierto básico $(x, y) \in U \times V \subset (X \times X) \setminus \Delta$, donde $U$ y $V$ son abiertos, necesariamente disjuntos, con lo que separan a $x$ e $y$. ■

En el capítulo 12 probamos un par de resultados adicionales sobre cerrados en espacios ordenados. 448

**Interior y clausura** Si $X$ es un espacio topológico y $A \subset X$, se define el *interior* de $A$ como la unión de todos los abiertos contenidos en $A$. Lo representaremos por

$$\mathring{A} = \operatorname{int}(A) = \bigcup \{U \mid U \subset A,\ U \text{abierto}\}.$$

La *clausura* de $A$ es la intersección de todos los cerrados que contienen a $A$. La representaremos por

$$\overline{A} = \operatorname{cl}(A) = \bigcap \{C \mid A \subset C \subset X,\ C \text{ cerrado}\}.$$

Los puntos de $\mathring{A}$ se llaman *puntos interiores* de $A$, mientras que los puntos de $\overline{A}$ se llaman *puntos adherentes* de $A$.

Como la unión de abiertos es abierta y la intersección de cerrados es cerrada, resulta que el interior $\mathring{A}$ es abierto y la clausura $\overline{A}$ es cerrada. Además tenemos que $\mathring{A} \subset A \subset \overline{A}$ y, más aún, $\mathring{A}$ es el mayor abierto contenido en $A$ (en el sentido de que contiene a cualquier otro) y $\overline{A}$ es el menor cerrado que contiene a $A$ (en el sentido de que está contenido en cualquier otro).

Más explícitamente, esto significa que si $U \subset A$ es un abierto, entonces $U \subset \mathring{A}$, y si $A \subset C$ es un cerrado, entonces $\overline{A} \subset C$. A su vez, esto implica que si $A \subset B \subset X$, entonces $\mathring{A} \subset \mathring{B}$ y $\overline{A} \subset \overline{B}$.

En efecto, tenemos que $\mathring{A} \subset A \subset B$ y, como el interior de $A$ es abierto, esto implica que $\mathring{A} \subset \mathring{B}$. El argumento para las clausuras es análogo.

También es inmediato que $A$ es abierto si y sólo si $A = \mathring{A}$, y que $A$ es cerrado si y sólo si $A = \overline{A}$.

**Ejercicio:** Probar que $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$, así como que $\overset{\circ}{\overbrace{A \cap B}} = \mathring{A} \cap \mathring{B}$.

Una relación fundamental entre interior y clausura es la siguiente:

**Teorema 1.20** *Si $A$ es un subconjunto de un espacio topológico $X$, entonces*

$$\overline{X \setminus A} = X \setminus \mathring{A}, \qquad \overset{\circ}{\overbrace{X \setminus A}} = X \setminus \overline{A}.$$

Demostración: En efecto, como $\mathring{A} \subset A$, también $X \setminus A \subset X \setminus \mathring{A}$ y, como el segundo conjunto es cerrado, de hecho $\overline{X \setminus A} \subset X \setminus \mathring{A}$. Por otra parte, como $X \setminus A \subset \overline{X \setminus A}$, también $X \setminus \overline{X \setminus A} \subset A$ y, como el primer conjunto es abierto, $X \setminus \overline{X \setminus A} \subset \mathring{A}$, luego $X \setminus \mathring{A} \subset \overline{X \setminus A}$, y tenemos la igualdad. La segunda relación se prueba análogamente. ■

La interpretación del interior y de la clausura se desprende de los hechos siguientes:

- *$x \in \mathring{A}$ si y sólo si $A$ es un entorno de $x$.*
- *$x \in \overline{A}$ si y sólo si todo entorno $U$ de $x$ cumple $U \cap A \neq \varnothing$.*

La primera afirmación es inmediata. En cuanto a la segunda, si $x \in \overline{A}$ y $U$ es un entorno de $x$, entonces existe un abierto $x \in G \subset U$. Si fuera $A \cap G = \varnothing$, entonces $A \subset X \setminus G$, luego $\overline{A} \subset X \setminus G$, luego $x \notin G$, contradicción. Recíprocamente, si todo entorno de $x$ corta a $A$, no puede ser que $x \in X \setminus \overline{A}$, pues este abierto sería un entorno de $x$ disjunto de $A$.

Así pues, los puntos interiores de $A$ son simplemente los puntos cuyo alrededor está contenido en $A$, mientras que un punto está en la clausura de $A$ si $x$ "está pegado" a $A$, en el sentido de que $A$ contiene puntos de alrededor de $x$ (sea cual sea el entorno de $x$ con el que determinamos lo que entendemos por "puntos de alrededor").

**Ejemplo** Consideremos $A = [0, 1[$ como subconjunto de $\mathbb{R}$ con la topología usual. Entonces $\mathring{A} = ]0, 1[$ y $\overline{A} = [0, 1]$, pues en el interior hay que excluir al 0, ya que $A$ no contiene a todos los puntos de su alrededor, y en la clausura hay que añadir al 1, ya que, aunque no está en $A$, "está pegado" a $A$, en el sentido de que cualquier entorno de 1 tiene que contener puntos de $A$. ■

Esta interpretación de la clausura es más evidente en el caso de los espacios métricos a través del concepto de distancia a un conjunto (véase el teorema 9.10, con la definición previa). 293

**Ejercicio:** Probar que si $A \subset B \subset X$, entonces las clausuras de $A$ en $B$ y en $X$ verifican la relación $\overline{A}^B = \overline{A}^X \cap B$. Mostrar un ejemplo en el que $\mathring{A}^X \cap B \subsetneq \mathring{A}^B$.

En espacios producto tenemos el teorema siguiente:

**Teorema 1.21** *Sea $\{X_i\}_{i\in I}$ una familia de espacios topológicos y sea $\{Y_i\}_{i\in I}$ una familia tal que cada $Y_i \subset X_i$. Entonces*

$$\overline{\prod_{i\in I} Y_i} = \prod_{i\in I} \overline{Y_i}.$$

*En particular, el producto de cerrados es cerrado.*

Demostración: Si llamamos $X$ al espacio producto, se cumple que

$$X \setminus p_i^{-1}[\overline{Y}_i] = p_i^{-1}[X_i \setminus \overline{Y}_i]$$

de donde $p_i^{-1}[\overline{Y_i}]$ es cerrado, y $\prod\limits_{i\in I} \overline{Y_i} = \bigcap\limits_{i\in I} p_i^{-1}[\overline{Y}_i]$ es cerrado por ser intersección de cerrados. Esto implica que $\overline{\prod\limits_{i\in I} Y_i} \subset \prod\limits_{i\in I} \overline{Y_i}$.

Recíprocamente, si $y \in \prod\limits_{i\in I} \overline{Y_i}$, vamos a probar que está en la clausura del producto viendo que todo entorno de $y$ corta al producto. Podemos tomar como entorno un abierto básico $U = \prod\limits_{i\in I} A_i$, donde cada $A_i$ es abierto en $X_i$ y existe un conjunto $I_0 \subset I$ finito tal que si $i \in I \setminus I_0$ entonces $A_i = X_i$. Para cada $i \in I_0$ tenemos que $y_i \in A_i \cap \overline{Y_i}$, luego existe $y_i' \in A_i \cap Y_i$. Definimos

$$y_i' = \begin{cases} y_i' & \text{si } i \in I_0, \\ y_i & \text{si } i \in I \setminus I_0, \end{cases}$$

Así $y' \in U \cap \prod\limits_{i\in I} Y_i \neq \varnothing$, luego $y$ es un punto adherente del producto y tenemos la igualdad requerida. ■

Notemos que en un producto finito se cumple que el producto de interiores es el interior del producto, y en particular que el producto de abiertos es abierto, pero esto ya no es cierto en un producto infinito, donde es fácil ver que el producto de infinitos abiertos $Y_i \subsetneq X_i$ tiene interior vacío.

Un subconjunto $D$ de un espacio topológico $X$ es *denso* en $X$ si $\overline{D} = X$. Equivalentemente, si $D$ corta a todo abierto no vacío de $X$.

Por ejemplo, se cumple que $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ son densos en $\mathbb{R}$. Esto se debe a que todo abierto no vacío contiene un intervalo abierto no vacío, y todo intervalo abierto no vacío contiene tanto números racionales como irracionales.

Más en general, es claro que en un espacio métrico $M$ un subconjunto $D$ es denso si todo punto de $M$ tiene puntos de $D$ a una distancia arbitrariamente pequeña. Sin embargo, en un espacio que no cumpla la propiedad $T_1$, como es el caso de la topología del punto particular (ejemplo A.1) puede suceder que un punto sea denso en todo el espacio.

He aquí una propiedad elemental que a menudo resulta útil:

**Teorema 1.22** *Si $X$ es un espacio topológico, $D \subset X$ es un subconjunto denso y $U \subset X$ es un abierto, entonces $\overline{U} = \overline{U \cap D}$.*

Demostración: Si $x \in \overline{U}$ y $W$ es un abierto tal que $x \in W$, entonces $W \cap U$ es un abierto no vacío, luego $W \cap U \cap D \neq \varnothing$, luego $x \in \overline{U \cap D}$. La inclusión opuesta es obvia. ■

En el contexto de los espacios ordenados el concepto de "conjunto denso" tiene una doble interpretación sobre la que el lector debe estar prevenido. Lo discutimos en el apartado sobre clausuras y conjuntos densos del capítulo 12. 449

**Espacios regulares** Introducimos ahora una propiedad más restrictiva que la propiedad de Hausdorff que, no obstante, cumplen casi todos los espacios topológicos de interés:

**Definición 1.23** Se dice que espacio topológico $X$ es *regular* o que cumple la propiedad $T_3$ si es $T_1$ y cuando $C \subset X$ es cerrado y $p \in X \setminus C$, existen abiertos disjuntos $U$ y $V$ tales que $p \in U$, $C \subset V$.

Al haber exigido que los puntos sean cerrados, es inmediato que todo espacio regular es de Hausdorff. Sin embargo, el ejemplo A.7 corresponde a un espacio de Hausdorff no regular. Veamos dos caracterizaciones de interés:

**Teorema 1.24** *Un espacio $X$ que cumpla el axioma $T_1$ es regular si y sólo si para todo $x \in X$ y todo entorno $V$ de $x$ existe otro entorno $U$ de $x$ tal que $x \in U \subset \overline{U} \subset V$. De hecho, basta con que esto se cumpla para todo entorno $V$ perteneciente a una subbase prefijada.*

Demostración: Si $X$ es regular, basta aplicar la regularidad al punto $x$ y al cerrado $X \setminus \mathring{V}$, pues así obtenemos abiertos disjuntos $x \in U$ y $X \setminus \mathring{V} \subset U^*$, con lo que $U \subset X \setminus U^*$, luego $\overline{U} \subset X \setminus U^* \subset \mathring{V} \subset V$.

Si no restringimos $V$ a una subbase, la implicación opuesta es igual de elemental. Con esta restricción, dados un punto $x \in X$ y un cerrado $C$ tal que $x \in X \setminus C$, tenemos que $X \setminus C$ es un entorno de $x$, luego existen abiertos subbásicos $V_1, \ldots, V_n$ tales que $x \in \bigcap\limits_{i=1}^{n} V_i \subset X \setminus C$. Por hipótesis, existen abiertos tales que $x \in U_i \subset \overline{U}_i \subset V_i$. Tomamos $U = \bigcap\limits_{i=1}^{n} U_i$, $V = X \setminus \bigcap\limits_{i=1}^{n} \overline{U}_i$, que son dos abiertos disjuntos, $x \in U$ y $C \subset X \setminus \bigcap\limits_{i=1}^{n} V_i \subset X \setminus \bigcap\limits_{i=1}^{n} \overline{U}_i = V$. ■

En particular:

**Teorema 1.25** *Un espacio topológico es regular si y sólo si es $T_1$ y todo punto tiene una base de entornos cerrados.*

Demostración: Si $X$ es un espacio $T_1$, $C \subset X$ es un cerrado, $x \in X \setminus C$ y $x$ tiene una base de entornos cerrados, entonces existe un entorno cerrado $C'$ de $x$ tal que $x \in C' \subset X \setminus C$, luego $U = \mathring{C}'$ y $V = X \setminus C'$ son abiertos disjuntos tales que $x \in U$, $C \subset V$. La implicación opuesta se sigue del teorema anterior. ■

La regularidad se conserva por las operaciones topológicas básicas:

**Teorema 1.26** *Todo subespacio de un espacio topológico regular es regular.*

Demostración: Sea $X$ un espacio regular e $Y \subset X$, ciertamente $Y$ es $T_1$ y, si $C \subset Y$ es cerrado y $x \in Y \setminus C$, entonces existe un cerrado $F \subset X$ tal que $C = Y \cap F$, luego existen abiertos $U$ y $V$ en $X$ que separan a $x$ y $F$, pero entonces $U \cap Y$, $V \cap Y$ son abiertos en $Y$ que separan a $x$ y $C$. ■

**Teorema 1.27** *Un producto no vacío de espacios regulares es regular si y sólo si lo es cada factor.*

Demostración: Como en la prueba del teorema 3.24, si $X = \prod\limits_{i \in I} X_i$ es un producto no vacío de espacios topológicos y es regular, entonces contiene subespacios homeomorfos a cada factor, luego todos ellos son regulares.

Recíprocamente, si cada factor es regular, hemos visto que el producto es $T_1$. Vamos a aplicar el teorema 1.24 considerando los abiertos subbásicos de la forma $p_i^{-1}[V]$, donde $V$ es abierto en $X_i$. Entonces, si $x \in p_i^{-1}[V]$, tenemos que $x_i \in V$, luego existe un abierto $U$ en $X_i$ tal que $x_i \in U \subset \overline{U} \subset V_i$, y entonces $x \in p_i^{-1}[U] \subset \overline{p_i^{-1}[U]} \subset p_i^{-1}[\overline{U}] \subset p_i^{-1}[V]$. ■

**Ejercicio:** Probar que todo espacio ordenado es regular.

En la sección 2.1 probamos algunos resultados sobre abiertos, cerrados, interiores y clausuras en espacios uniformes, y entre otras cosas probamos que todo espacio uniforme $T_0$ (en particular todo espacio métrico) es regular. 48

**Puntos frontera** Si $X$ es un espacio topológico y $A \subset X$, se define la *frontera* de $A$ como el conjunto
$$\partial A = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}.$$

La interpretación es clara: los puntos de la frontera de $A$ son los que tienen alrededor tanto puntos de $A$ como puntos de $X \setminus A$, es decir, los que están en "el borde" (o en la frontera) de $A$. Por el teorema 1.20:
$$\partial A = \overline{A} \cap (X \setminus \mathring{A}) = \overline{A} \setminus \mathring{A},$$
de modo que los puntos de la frontera de $A$ son los puntos que marcan la diferencia entre el interior y la clausura de un conjunto.

Es claro entonces que un conjunto es abierto si y sólo si no contiene puntos de su frontera, mientras que es cerrado si y sólo si contiene a todos los puntos de su frontera. En otras palabras, los abiertos son los conjuntos que no contienen a “su borde” y los cerrados los que sí que lo contienen.

Notemos que $\partial\mathbb{Q} = \mathbb{R}$, porque todo número real tiene cerca tanto números racionales como irracionales. Sin embargo, la frontera de un abierto no puede ser muy grande:

**Teorema 1.28** *Si $A$ es un abierto en un espacio topológico $X$, entonces $\partial A$ es un cerrado de interior vacío.*

DEMOSTRACIÓN: Usamos dos veces el teorema 1.20:

$$\mathring{\partial A} = \overbrace{\overline{A} \cap \overline{X \setminus A}}^{\circ} = \mathring{\overline{A}} \cap \overset{\circ}{\overline{X \setminus A}} = \mathring{\overline{A}} \cap \overbrace{X \setminus \mathring{A}}^{\circ} = \mathring{\overline{A}} \cap \overbrace{X \setminus A}^{\circ} = \mathring{\overline{A}} \cap (X \setminus \overline{A}) = \varnothing.$$

■

**Puntos de acumulación** La inclusión $A \subset \overline{A}$ se puede interpretar como que todo punto $x \in A$ tiene trivialmente algún punto de su alrededor en $A$, a saber, el propio $x$, pero a veces es relevante que un punto tenga puntos de alrededor en $A$ sin contarlo a él mismo. Esto nos lleva al concepto de punto de acumulación:

Si $A$ es un subconjunto de un espacio topológico $X$, un punto $x \in X$ es un *punto de acumulación* de $A$ si todo entorno $U$ de $x$ cumple $U \cap (A \setminus \{x\}) \neq \varnothing$. El conjunto de todos los puntos de acumulación de $A$ se llama *conjunto derivado* de $A$, y se representa por $A'$.

Equivalentemente, $x \in A'$ si y sólo si $x \in \overline{A \setminus \{x\}}$. Por otra parte, es fácil ver que $\overline{A} = A \cup A'$.

Si $x \in A \setminus A'$, entonces $x$ tiene un entorno $U$ tal que $U \cap (A \setminus \{x\}) = \varnothing$, luego $U \cap A = \{x\}$, lo cual significa que $\{x\}$ es abierto en $A$ respecto de la topología relativa. En otras palabras, $A \setminus A'$ es el conjunto de los puntos aislados de $A$.

Por consiguiente, $A \setminus A'$ es abierto en $A$ (porque es unión de puntos abiertos), luego $A' \cap A$ es cerrado en $A$. Notemos que $A' \cap A$ es simplemente el conjunto de los puntos de acumulación de $A$ respecto de la topología de $A$. En particular, si $X$ es un espacio topológico, tenemos que $X'$ es cerrado en $X$.

En un espacio que no sea de Hausdorff hay una sutileza en lo tocante a los puntos de acumulación:

Si $A$ es un subconjunto de un espacio topológico $X$, un punto $x \in X$ es un *punto de $\omega$-acumulación* si todo entorno $U$ de $x$ cumple que $U \cap A$ es infinito.

Evidentemente, todo punto de $\omega$-acumulación es un punto de acumulación, pero el recíproco sólo es válido en espacios $T_1$:

**Teorema 1.29** *Si $X$ es un espacio topológico $T_1$ y $A \subset X$, entonces un punto $x \in X$ es un punto de acumulación de $A$ si y sólo si es un punto de $\omega$-acumulación.*

Demostración: Supongamos que $x$ es un punto de acumulación de $A$ y sea $U$ un entorno de $x$. Entonces $x \in U \cap A$. Si la intersección fuera finita, digamos $U \cap A = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, con $x = x_0$, como los puntos son cerrados, tenemos que $F = \{x_1, \ldots, x_n\}$ es cerrado en $X$, luego $V = U \setminus F$ es un entorno (abierto) de $x$ tal que $V \cap A = \{x\}$, lo que contradice que $x$ sea un punto de acumulación de $A$. La implicación contraria se cumple siempre. ■

Por ejemplo, el teorema siguiente requiere la hipótesis que garantiza que los puntos de acumulación coinciden con los puntos de $\omega$-acumulación:

**Teorema 1.30** *Si $X$ es un espacio topológico cuyos puntos son cerrados (en particular, si es un espacio de Hausdorff) y $A \subset X$, entonces $A'' \subset A'$.*

Demostración: Si $x \in A''$ y $U$ es un entorno abierto de $x$, entonces existe $y \in U \cap A'$ y, como $U$ es un entorno de $y$, por el teorema anterior tenemos que $U \cap A$ es infinito, luego existe un $z \in U \cap A$ tal que $z \neq x$, luego $z \in U \cap (A \setminus \{x\})$, y esto prueba que $x \in A'$. ■

El ejemplo A.2 muestra un espacio topológico en el que hay puntos de acumulación que no son puntos de $\omega$-acumulación y en el que no se cumple la conclusión del teorema anterior.

**Convergencia de sucesiones** Una *sucesión* en un conjunto $X$ es simplemente una aplicación[4] $x : \mathbb{N} \longrightarrow X$, aunque habitualmente la representaremos con la notación $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ o $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$.

Una *subsucesión* de una sucesión dada es una sucesión de la forma $\{x_{n_k}\}_{k=0}^{\infty}$, donde $\{n_k\}_{k=0}^{\infty}$ es una sucesión de números naturales estrictamente creciente, es decir, tal que $n_k < n_{k+1}$ para todo $k$. Notemos que esto implica que $k \leq n_k$.

La noción de convergencia de sucesiones está en las raíces del cálculo infinitesimal. Su formulación topológica es la siguiente:

Diremos que una sucesión $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ en un espacio topológico $X$ *converge* a un *límite* $l \in X$ si para todo entorno $U$ de $l$ existe un número natural $n_0$ tal que si $n \geq n_0$ entonces $x_n \in U$.

Diremos que $x \in X$ es un *punto adherente* a $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ si para todo entorno $U$ de $x$ y todo número natural $n_0$ existe un $n \geq n_0$ tal que $x_n \in U$.

En general, cuando los términos de una sucesión cumplen una propiedad a partir de uno de ellos en adelante, se dice que la cumplen *finalmente*, mientras que si una sucesión tiene términos $x_n$ para $n$ arbitrariamente grande que cumplen una determinada propiedad, diremos que la sucesión cumple la propiedad *eventualmente*.

[4]En la práctica consideraremos también sucesiones de la forma $\{x_n\}_{n=k}^{\infty}$, es decir, sucesiones que sólo están definidas a partir de un número natural $k$. Estas sucesiones siempre se pueden convertir en sucesiones con dominio $\mathbb{N}$ sin más que definir $y_n = x_{n-k}$.

Así, en estos términos podemos decir que una sucesión converge a un punto si está finalmente contenida en cada entorno del punto, y que tiene a un punto por punto adherente si está eventualmente contenida en cada entorno del punto.

Es claro que para que una sucesión $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ converja a un límite $l$ basta con que cumpla la definición de convergencia para todo entorno de una base prefijada de entornos de $l$.

Por ejemplo, si en un espacio métrico consideramos los entornos básicos determinados por las bolas $B_\epsilon(l)$, la convergencia a $l$ equivale a que, para todo $\epsilon > 0$, todos los términos a partir de uno dado cumplen $d(x_n, l) < \epsilon$, es decir, que la sucesión se aproxima cada vez más al límite $l$.

Si una sucesión converge en un espacio de Hausdorff $X$, su límite es único, pues si convergiera a dos límites, éstos tendrían entornos disjuntos y la sucesión tendría que estar finalmente en dos conjuntos disjuntos, lo cual es imposible.

La hipótesis de Hausdorff es esencial, pues, por ejemplo, en un espacio trivial toda sucesión converge a la vez a todos los puntos del espacio. Incluso en un espacio $T_1$, como es cualquier conjunto infinito con la topología cofinita (ejemplo A.3) hay sucesiones que convergen a todos los puntos del espacio.

En espacios de Hausdorff representaremos por $\lim\limits_n x_n$ al límite de una sucesión convergente.

También es claro que si una sucesión converge a un límite $l$, lo mismo sucede con todas sus subsucesiones, así como que si tenemos espacios $Y \subset X$, la convergencia de una sucesión $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ contenida en $Y$ a un límite $y \in Y$ se cumple respecto de la topología de $X$ si y sólo si se cumple respecto de la topología de $Y$. (Aunque, naturalmente, una sucesión en $Y$ puede converger en $X$ a un límite que no esté en $Y$).

El teorema siguiente nos proporciona una primera muestra de por qué los productos de Tychonoff son preferibles a los productos de cajas, ya que la conclusión no es cierta para éstos (ejemplo A.23):

**Teorema 1.31** *Sea $X = \prod\limits_{i\in I} X_i$ un producto de espacios topológicos. Una sucesión $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ en $X$ converge a un punto $x \in X$ si y sólo si cada una de las sucesiones $\{x_{ni}\}_{n=0}^{\infty}$ converge a $x_i$.*

Demostración: Si converge la sucesión en el producto, fijado $i \in I$ y un entorno $U$ de $x_i$, tenemos que $p_i^{-1}[U]$ es un entorno de $x$, luego existe un número natural $m$ tal que para $n \geq m$ se cumple $x_n \in p_i^{-1}[U]$, luego $x_{ni} \in U$, luego $\{x_{ni}\}_{n=0}^{\infty}$ converge a $x_i$.

Recíprocamente, si todas las sucesiones de coordenadas convergen, dado un entorno $U$ de $x$, podemos suponer que es un abierto básico $U = \prod\limits_{i\in I} A_i$, donde cada $A_i$ es abierto en $X_i$ y existe $I_0 \subset I$ finito tal que si $i \in I \setminus I_0$ entonces $A_i = X_i$. Para cada $i \in I_0$, tenemos que $A_i$ es un entorno de $x_i$, luego existe un $m_i$ tal que si $n \geq m_i$, entonces $x_{ni} \in A_i$. Tomamos $m = \max\{m_i \mid i \in I_0\}$, con lo que si $n \geq m$, se cumple $x_{ni} \in A_i$ para todo $i \in I_0$, y trivialmente si $i \in I \setminus I_0$, luego $x_n \in U$, y esto prueba que la sucesión converge a $x$. ■

**Ejemplos** He aquí algunos ejemplos elementales de convergencia de sucesiones de números reales:

1. Se cumple que $\lim\limits_n \dfrac{1}{n} = 0$.

   Un entorno básico de 0 es de la forma $]-\epsilon, \epsilon[$, con $\epsilon > 0$. Por la propiedad arquimediana, existe un número natural $n_0 > 1/\epsilon$, luego, para todo número natural $n \geq n_0$, tenemos que $0 < 1/n < \epsilon$, luego la sucesión está finalmente en todo entorno de 0.

2. Si $0 < a < 1$ es un número real, entonces $\lim\limits_n a^n = 0$.

   Tenemos que $1/a > 1$, luego $1/a = 1 + \eta$, con $\eta > 0$. Una simple inducción demuestra la relación $1/a^n \geq 1 + n\eta$ (alternativamente, el lector puede demostrar la fórmula del binomio de Newton, de la cual se deduce inmediatamente este hecho). Con el mismo planteamiento del caso anterior, dado $0 < \epsilon < 1$, la propiedad arquimediana hace que exista un número natural $n_0 > \eta^{-1}(1/\epsilon - 1)$, de modo que si $n \geq n_0$ se cumple que $1/a^n \geq 1 + n\eta > 1/\epsilon$, luego $0 < a^n < \epsilon$ y tenemos la convergencia.

3. Si $a > 1$ es un número real, entonces $\lim\limits_n a_n = +\infty$.

   Aquí consideramos la sucesión en la recta ampliada $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, de modo que los entornos básicos de $+\infty$ son los intervalos $]x, +\infty]$, donde podemos suponer $x > 0$. Así, como $0 < 1/a < 1$, el apartado anterior prueba que la sucesión $1/a^n$ está finalmente en $]0, 1/x[$, luego $a^n$ está finalmente en $]x, +\infty]$.

Todos los conceptos que hemos introducido aquí tienen una caracterización en términos de convergencia de sucesiones válida para una clase de espacios algo más general que la de los espacios métricos, pero que es bastante restrictiva en el contexto de la topología conjuntista. Más adelante la estudiaremos con detalle, pero la anticipamos aquí:

**Definición 1.32** Diremos que un espacio topológico satisface el *primer axioma de numerabilidad* (1AN) si todo punto tiene una base de entornos numerable.

De momento nos bastará observar que todo espacio métrico es 1AN, pues las bolas $B_{1/n}(x)$, donde $n \geq 1$ es un número natural, forman una base de entornos de cada punto $x$. Por otra parte, el ejemplo A.17 muestra que un espacio puede ser numerable y no cumplir el primer axioma de numerabilidad.

Observemos que si $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una base (numerable) de entornos de un punto $x$ de un espacio topológico $X$ y llamamos $V_n = \bigcap\limits_{k\leq n} U_k$, entonces $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es también una base de entornos con la propiedad adicional de que es decreciente, es decir, que si $m \leq n$, entonces $U_n \subset U_m$. Por lo tanto, cuando tomemos una base numerable de entornos de un punto, siempre podemos pedir que sea decreciente.

**Teorema 1.33** *Sea $X$ un espacio topológico y sea $x \in X$ un punto con una base numerable de entornos. Entonces $x$ es un punto adherente de una sucesión $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ si y sólo si ésta tiene una subsucesión que converge a $x$.*

Demostración: Si $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ tiene una subsucesión convergente a $x$ es fácil ver que $x$ es un punto adherente, sin necesidad de la hipótesis de numerabilidad.Si $x$ es un punto adherente, sea $\{V_n\}_{n=0}^{\infty}$ una base decreciente de entornos de $x$. Para cada natural $n$ existe otro $n_k$ de manera que $a_{n_k} \in V_n$. Si construimos inductivamente la sucesión $n_k$ podemos exigir que sea creciente. De esta forma tenemos una subsucesión convergente a $x$. ■

**Teorema 1.34** *Sea $X$ un espacio topológico, sea $A \subset X$ y sea $x \in X$ un punto con una base numerable de entornos. Entonces:*

1. *$x$ es un punto adherente de $A$ si y sólo si existe una sucesión $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ convergente a $x$ contenida en $A$.*
2. *$x$ es un punto interior de $A$ si y sólo si toda sucesión $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ que converja a $x$ está finalmente en $A$.*
3. *$x$ es un punto de acumulación de $A$ si y sólo si existe una sucesión $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ convergente a $x$ contenida en $A \setminus \{x\}$.*

Demostración: 1) Sea $\{U_n\}_{n=0}^{\infty}$ una base decreciente de entornos abiertos de $x$. Si $x \in \overline{A}$, entonces $U_n \cap A \neq \varnothing$, luego podemos elegir un punto $x_n \in U_n \cap A$. Es inmediato que la sucesión $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ está contenida en $A$ y converge a $x$.

El recíproco es trivial: si existe la sucesión y $U$ es un entorno de $x$, entonces existe un $n$ tal que $x_n \in U \cap A \neq \varnothing$, luego $x$ es adherente a $A$.

2) Si $x$ no es un punto interior de $A$, entonces $x \in X \setminus \mathring{A} = \overline{X \setminus A}$, luego por 1) existe una sucesión en $X \setminus A$ que converge a $x$. El recíproco es consecuencia inmediata de la definición de convergencia.

La prueba de 3) es análoga a la de 1). ■

**Nota** Cada apartado del teorema anterior podría haberse dividido en dos partes, de las cuales sólo una requiere la hipótesis de numerabilidad (la parte que requiere probar la existencia de la sucesión). Por ejemplo, si existe una sucesión convergente a $x$ contenida en $A$, es cierto que $x \in \overline{A}$, sin hipótesis de numerabilidad. ■

Como consecuencia vemos que, si un espacio topológico $X$ cumple 1AN, un conjunto $A \subset X$ es cerrado cuando es imposible que el límite de una sucesión contenida en $A$ esté fuera de $A$, y $A$ es denso en $X$ si todo punto de $X$ es el límite de una sucesión contenida en $A$.

Antes de pasar al estudio del concepto de aplicación continua, al que dedicamos la sección siguiente, es conveniente que el lector se familiarice con los espacios normados en la sección 9.3. 309

## 1.3 Aplicaciones continuas

Aunque hasta ahora hemos relacionado la topología con la formalización del concepto de “puntos de alrededor”, en realidad, el concepto de espacio topológico está diseñado para dar un sentido preciso (en el contexto más general posible) de lo que se entiende por “aplicación continua”. La idea es que una aplicación $f : X \longrightarrow Y$ entre dos espacios topológicos es continua si cuando $x$ varía “de forma continua” en $X$, entonces $f(x)$ varía “de forma continua” en $Y$, es decir, sin saltos bruscos. En la definición abstracta difícilmente se reconoce esta idea:

**Definición 1.35** Una aplicación $f : X \longrightarrow Y$ entre dos espacios topológicos es *continua* si cuando $U$ es abierto en $Y$, entonces $f^{-1}[U]$ es abierto en $X$. Se dice que $f$ es un *homeomorfismo* si es biyectiva, continua y $f^{-1}$ también es continua.

Así, un homeomorfismo es una biyección con la propiedad de que $U$ es abierto en $Y$ si y sólo si $f^{-1}[U]$ es abierto en $X$, por lo que es evidente que dos espacios topológicos *homeomorfos* (es decir, tales que existe un homeomorfismo entre ellos) son indistinguibles topológicamente, en el sentido de que cumplen las mismas propiedades que dependan exclusivamente de su topología.

Pasemos a analizar la definición de continuidad. Una primera consecuencia obvia de la definición es que para que una función $f$ sea continua basta con que $f^{-1}[U]$ sea abierto cuando $U$ recorre una base o una subbase de $Y$ prefijada.

También conviene observar que la continuidad equivale a que para todo cerrado $C \subset Y$ se cumple que $f^{-1}[C]$ es cerrado en $X$.

En efecto, si $f$ es continua y $C \subset Y$ es cerrado, $f^{-1}[Y \setminus C] = X \setminus f^{-1}[C]$ es abierto, luego $f^{-1}[C]$ es cerrado. El recíproco es análogo.

Para comprender la idea subyacente a la noción de continuidad conviene expresarla de otro modo:

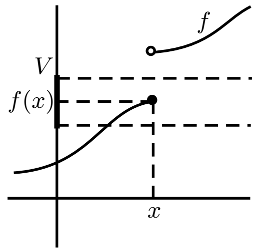
Diremos que una función $f : X \longrightarrow Y$ entre dos espacios topológicos es *continua en un punto* $x \in X$ si cuando $V$ es un entorno de $f(x)$, entonces $f^{-1}[V]$ es un entorno de $x$. Obviamente, basta con que esto se cumpla cuando $V$ recorre una base de entornos de $f(x)$.

**Teorema 1.36** *Una aplicación $f : X \longrightarrow Y$ entre dos espacios topológicos es continua si y sólo si lo es en cada punto de $X$.*

Demostración: Supongamos que $f$ es continua, sea $x \in X$ y sea $V$ un entorno de $f(x)$. Entonces existe un abierto $A$ en $Y$ tal que $f(x) \in A \subset V$, luego $x \in f^{-1}[A] \subset f^{-1}[V]$ y $f^{-1}[A]$ es abierto por definición de continuidad. Así pues, $f^{-1}[V]$ es un entorno de $x$.

Recíprocamente, si $f$ es continua en todos los puntos de $x$ y $V$ es un abierto en $Y$, tenemos que $f^{-1}[V]$ es abierto en $X$, pues si $x \in f^{-1}[V]$, entonces $V$ es un entorno de $f(x)$, luego $f^{-1}[V]$ es un entorno de $x$. ■

Así, si $f$ no es continua en un punto $x$, esto significa que, fijado un entorno $V$ de $f(x)$, siempre podemos encontrar puntos en cualquier entorno de $x$ cuya imagen está fuera de $V$. Esto expresa que $f$ tiene una discontinuidad en $x$, en el sentido de que hay puntos arbitrariamente cercanos a $x$ (en la figura los que están a su derecha) cuya imagen no está cerca de $f(x)$. La función $f$ separa de $x$ algunos de los puntos de su alrededor.




Veamos algunas propiedades elementales de la continuidad:

1. *Si $f : X \longrightarrow Y$, $g : Y \longrightarrow Z$ son aplicaciones entre espacios topológicos, $f$ es continua en $x \in X$ y $g$ es continua en $f(x)$, entonces $f \circ g$ es continua en $x$. En particular, la composición de aplicaciones continuas es continua.*

   En efecto, si $U$ es un entorno de $g(f(x))$, entonces $g^{-1}[U]$ es un entorno de $f(x)$ y $f^{-1}[g^{-1}[U]]$ es un entorno de $x$.

2. *Toda función constante $f : X \longrightarrow Y$ es continua.*

   Basta observar que si $A$ es abierto en $Y$, entonces $f^{-1}[A]$ es $\varnothing$ o $X$, luego es abierto.

3. *Si $X \subset Y$ son espacios topológicos, la inclusión $i : X \longrightarrow Y$ es continua.*

   En efecto, si $U \subset Y$ es abierto, entonces $i^{-1}[U] = U \cap X$ es abierto en $X$ por definición de topología relativa.

   Ahora probamos que la continuidad no depende del espacio final de la aplicación:

4. *Si $Y \subset Z$, una aplicación $f : X \longrightarrow Y$ es continua en un punto $x \in X$ si y sólo si lo es como aplicación $f : X \longrightarrow Z$.*

   Si $f : X \longrightarrow Y$ es continua en $x$ y llamamos $i : Y \longrightarrow Z$, entonces $f \circ i$ es continua en $x$, pero $f \circ i$ es simplemente $f : X \longrightarrow Z$. Recíprocamente, si ésta es continua en $x$ y $U$ es un entorno de $f(x)$ en $Y$, será de la forma $U = V \cap Y$, para cierto entorno $V$ de $f(x)$ en $Z$, y entonces $f^{-1}[U] = f^{-1}[V]$ es un entorno de $x$.

5. *Si $x \in X \subset Y$ y $f : Y \longrightarrow Z$ es continua en $x$, entonces $f|_X : X \longrightarrow Z$ es continua en $x$.*

   En efecto, si $U$ es un entorno de $f(x)$, se cumple que $f^{-1}[U] \subset Y$ es un entorno de $x$, luego $(f|_X)^{-1}[U] = f^{-1}[U] \cap X$ es un entorno de $x$ en $X$.

   La propiedad siguiente expresa que la continuidad es una propiedad local, es decir, que el hecho de que una función sea o no continua en un punto sólo depende de su restricción a un entorno del punto:

6. *Si $x \in U \subset Y$, donde $U$ es abierto y $f : Y \longrightarrow Z$, entonces $f$ es continua en $x$ si y sólo si lo es $f|_U$.*

Si $V$ es un entorno de $f(x)$, entonces $f^{-1}[V]$ es un entorno de $x$ en $Y$ si y sólo si $f^{-1}[V] \cap U = (f|_U)^{-1}[V]$ es un entorno de $x$ en $U$ (porque todo abierto en $U$ lo es en $Y$).

7. *Si $\{X_i\}_{i\in I}$ es una familia de espacios topológicos, entonces las proyecciones $p_i : \prod\limits_{i\in I} X_i \longrightarrow X_i$ son continuas.*

   Si $U$ es abierto en $X_i$, entonces $p_i^{-1}[U]$ es abierto en el producto por la propia definición de la topología producto. Ahora es claro que la topología producto es la menor topología que hace continuas a las proyecciones.

8. *Una aplicación $f : X \longrightarrow \prod\limits_{i\in I} X_i$ es continua si y sólo si lo son sus funciones coordenadas $f_i = f \circ p_i$.*

   Si $f$ es continua, también lo son las $f_i$ porque son composiciones de dos funciones continuas. Si las $f_i$ son continuas, para probar que lo es $f$ basta probar que la antiimagen de un abierto subbásico del producto es abierta, pero un abierto subbásico es de la forma $p_i^{-1}[U]$, donde $U$ es abierto en $X_i$, luego $f^{-1}[p_i^{-1}[U]] = f_i^{-1}[U]$ es abierto en $X$.

9. Si $\{f_i\}_{i\in I}$ una familia de aplicaciones continuas $f_i : X_i \longrightarrow Y_i$ entre espacios topológicos, entonces la aplicación $f = \prod\limits_{i\in I} f_i : \prod\limits_{i\in I} X_i \longrightarrow \prod\limits_{i\in I} Y_i$ dada por $f(x) = \{f_i(x_i)\}_{i\in I}$ es continua.

   Basta observar que $f \circ p_i^Y = p_i^X \circ f_i$, luego la composición es continua, luego $f$ también, por la propiedad precedente.

El criterio siguiente es útil para probar la continuidad de una función definida por partes:

10. Si $f : X \longrightarrow Y$ es una función entre espacios topológicos y $X = \bigcup\limits_{i=1}^{n} C_i$ es una unión finita de cerrados, entonces $f$ es continua en $X$ si y sólo si lo es cada $f|_{C_i}$.

    Si $f$ es continua, hemos probado que también lo es cada $f|_{C_i}$. Si las restricciones son continuas y $C \subset Y$ es cerrado, entonces $f|_{C_j}^{-1}[C] = f^{-1}[C] \cap C_j$ es cerrado en $C_j$, luego en $X$ y $f^{-1}[C]$ es unión finita de cerrados, luego es cerrado.

    Veamos finalmente la caracterización de la continuidad en términos de convergencia de sucesiones:

11. *Sea $f : X \longrightarrow Y$ una aplicación entre espacios topológicos, sea $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ una sucesión en $X$ que converja a un punto $x \in X$. Si $f$ es continua en $x$, entonces $\{f(x_n)\}_{n=0}^{\infty}$ converge a $f(x)$.*

    En efecto, si $U$ es un entorno de $f(x)$, entonces $f^{-1}[U]$ es un entorno de $x$, luego existe un $n_0$ tal que si $n \geq n_0$, se cumple que $x_n \in f^{-1}[U]$, luego $f(x_n) \in U$, lo cual prueba que $\{f(x_n)\}_{n=0}^{\infty}$ converge a $f(x)$.

12. *Sea $f : X \longrightarrow Y$ una aplicación entre espacios topológicos y sea $x \in X$ un punto con una base numerable de entornos. Entonces, $f$ es continua en $x$ si y sólo si para toda sucesión $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ en $X$ que converja a $x$ la sucesión $\{f(x_n)\}_{n=0}^\infty$ converge a $f(x)$.*

    El apartado anterior nos da una implicación. Fijemos una base decreciente $\{U_n\}_{n=0}^\infty$ de entornos de $x$. Si $f$ no es continua en $x$, existe un entorno $V$ de $f(x)$ tal que $f^{-1}[V]$ no es un entorno de $x$, luego $U_n \not\subset f^{-1}[V]$, luego podemos tomar $x_n \in U_n \setminus f^{-1}[V]$.

    Que la base de entornos sea decreciente implica que $x_m \in U_n$ para todo $m \geq n$, luego la sucesión $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ converge a $x$, pero $f(x_n) \in Y \setminus V$, luego $\{f(x_n)\}_{n=0}^\infty$ no converge a $f(x)$.

Algunos resultados sobre continuidad requieren la hipótesis de que los espacios involucrados sean de Hausdorff:

**Teorema 1.37** *Si $f, g : X \longrightarrow Y$ son funciones continuas entre espacios topológicos e $Y$ es un espacio de Hausdorff, entonces el conjunto*

$$\{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$$

*es cerrado en $X$. En particular, si $f$ y $g$ coinciden en un conjunto denso, entonces $f = g$.*

Demostración: Llamemos $A$ al conjunto del enunciado. La aplicación $h : X \longrightarrow Y \times Y$ dada por $h(x) = (f(x), g(x))$ es continua, porque lo son sus funciones coordenadas, y por 1.19 la diagonal $\Delta \subset Y \times Y$ es cerrada. Basta observar que $A = h^{-1}[\Delta]$.

Si existe $D \subset X$ denso tal que $f|_D = g|_D$, entonces $D \subset A$, de modo que $X = \overline{D} \subset \overline{A} = A \subset X$, lo que significa que $f = g$. ■

**Teorema 1.38** *Si $f : X \longrightarrow Y$ es una aplicación continua en un espacio de Hausdorff $Y$ entonces $f$ es cerrada*[5] *como subconjunto de $X \times Y$.*

Demostración: Si $(x, y) \in (X \times Y) \setminus f$, es decir, si $y \neq f(x)$, existen abiertos disjuntos $U$, $V$ en $Y$ tales que $f(x) \in U$, $y \in V$, y por continuidad $f^{-1}[U]$ es abierto en $X$. Entonces $f^{-1}[U] \times V$ es un abierto en $X \times Y$ tal que $(x, y) \in f^{-1}[U] \times V \subset (X \times Y) \setminus f$. ■

Antes de seguir estudiando la continuidad, conviene comparar el concepto de continuidad que estamos analizando con el concepto de continuidad uniforme, definible en espacios métricos (sección 9.1) y, más en general, en espacios uniformes (sección 2.1). 294

En ocasiones son útiles las caracterizaciones siguientes, más técnicas, de la continuidad:

[5]Esto se suele expresar diciendo que la gráfica de $f$ es cerrada, aunque técnicamente la gráfica de $f$ es la propia $f$.

**Teorema 1.39** *Si $f : X \longrightarrow Y$ es una aplicación entre dos espacios topológicos, las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

1. *$f$ es continua.*
2. *Para todo $A \subset X$, se cumple $f[\overline{A}] \subset \overline{f[A]}$.*
3. *Para todo $B \subset Y$, se cumple $\overline{f^{-1}[B]} \subset f^{-1}[\overline{B}]$.*
4. *Para todo $B \subset Y$, se cumple $f^{-1}[\mathring{B}] \subset \overbrace{f^{-1}[B]}^{\circ}$.*

Demostración: 1) $\Rightarrow$ 2) Si $f$ es continua, $f^{-1}[\overline{f[A]}]$ es cerrado y contiene a $A$, luego $\overline{A} \subset f^{-1}[\overline{f[A]}]$, luego $f[\overline{A}] \subset \overline{f[A]}$.

2) $\Rightarrow$ 3) Aplicamos 2) a $A = f^{-1}[B]$, con lo que $f[\overline{f^{-1}[B]}] \subset \overline{f[f^{-1}[B]]} \subset \overline{B}$, de donde $\overline{f^{-1}[B]} \subset f^{-1}[\overline{B}]$.

3) $\Rightarrow$ 4) Aplicamos 3) a $Y \setminus B$, con lo que $\overline{f^{-1}[Y \setminus B]} \subset f^{-1}[\overline{Y \setminus B}]$. Usando el teorema 1.20:

$$f^{-1}[\mathring{B}] = f^{-1}[Y \setminus \overline{Y \setminus B}] = X \setminus f^{-1}[\overline{Y \setminus B}] \subset X \setminus \overline{f^{-1}[Y \setminus B]}$$
$$= X \setminus \overline{X \setminus f^{-1}[B]} = \overbrace{f^{-1}[B]}^{\circ}.$$

4) $\Rightarrow$ 1) Si $U$ es abierto en $Y$, tenemos que $f^{-1}[U] \subset \overbrace{f^{-1}[U]}^{\circ} \subset f^{-1}[U]$, luego $f^{-1}[U]$ es abierto. ■

Conviene observar que en general las inclusiones del teorema anterior no son igualdades. Para comprender la situación conviene introducir los conceptos siguientes:

**Definición 1.40** Una aplicación $f : X \longrightarrow Y$ entre dos espacios topológicos es *abierta* (resp. *cerrada*) si cuando $A \subset X$ es abierto (resp. cerrado) se cumple que $f[A]$ es abierto (resp. cerrado) en $Y$.

**Ejercicio:** Probar que una igualdad en la propiedad 2) del teorema anterior equivale a que $f$, además de continua, sea cerrada, mientras que una igualdad en 3) o en 4) equivale a que $f$ sea abierta.

Hemos visto que, para una aplicación $f$ dada, es equivalente que las antiimágenes de los abiertos sean abiertas o que las antiimágenes de los cerrados sean cerradas (ambas propiedades equivalen a la continuidad). Sin embargo, incluso para una aplicación continua, que sea abierta no implica que sea cerrada, o viceversa. No obstante, es claro que una biyección es abierta si y sólo si es cerrada. En particular, una biyección continua es un homeomorfismo si y sólo si es abierta o cerrada (y en tal caso es ambas cosas).

Una observación obvia es que una función $f : X \longrightarrow Y$ es continua siempre que $X$ es un espacio discreto o $Y$ es un espacio trivial. Más en general, notemos que una aplicación $f$ es siempre continua en los puntos aislados de su dominio, pues si $U$ es un entorno de $f(x)$, entonces $f^{-1}[U]$ es entorno de $x$, ya que $\{x\}$ es abierto.

Por lo tanto, una biyección $f : X \longrightarrow Y$ entre un espacio topológico discreto $X$ y un espacio cualquiera $Y$ es siempre continua, pero no es un homeomorfismo —luego no es ni abierta ni cerrada— a menos que $Y$ también sea discreto (pues si fuera un homeomorfismo, $Y$ tendría que ser homeomorfo a $X$).

Enseguida pondremos ejemplos de aplicaciones abiertas que no son cerradas y viceversa, pero antes conviene ver ejemplos más destacados de funciones continuas. El lector puede ver los más relevantes en la sección 9.3, desde donde puede empezar a familiarizarse con los grupos topológicos en la sección 10.1 y a continuación con los espacios vectoriales topológicos en la sección 11.1. En el capítulo 12 se incluyen algunos resultados adicionales sobre continuidad en espacios ordenados. 315

Ahora ya podemos poner ejemplos cómodamente de aplicaciones abiertas y cerradas. Por ejemplo, una aplicación constante $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es cerrada, pero no es abierta, mientras que las proyecciones en un producto son abiertas (lo probamos en el teorema siguiente), pero en general no son cerradas. Por ejemplo, la aplicación $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = xy$ es continua y $\{1\}$ es cerrado en $\mathbb{R}$, luego $C = f^{-1}[\{1\}]$ es cerrado en $\mathbb{R}^2$, pero su proyección en la primera componente es $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, que no es cerrado.

**Teorema 1.41** *Las proyecciones $p_i : \prod\limits_{i\in I} X_i \longrightarrow X_i$ son aplicaciones abiertas.*

Demostración: Si $U = \prod\limits_{i\in I} U_i$ es un abierto básico, entonces $p_i[U] = U_i$ es abierto en $X_i$, y si $G = \bigcup\limits_{j\in J} U_j$ es una unión de abiertos básicos, entonces $p_i[G] = \bigcup\limits_{j\in J} p_i[U_j]$ también es abierto. ■

El argumento que acabamos de emplear muestra en general que, para que una aplicación sea abierta, basta con que las imágenes de los abiertos de una base sean abiertos.

A menudo nos resultará útil el teorema siguiente:

**Teorema 1.42** *Sea $\{X_i\}_{i\in I}$ una familia de espacios topológicos de manera que $\prod\limits_{i\in I} X_i \neq \varnothing$. Entonces el producto contiene subespacios homeomorfos a cada $X_i$.*

Demostración: Tomamos $a \in \prod\limits_{i\in I} X_i$ y definimos $\iota_j : X_j \longrightarrow \prod\limits_{i\in I} X_i$ mediante:

$$\iota_j(u)_i = \begin{cases} u & \text{si } j = i, \\ a_i & \text{si } j \neq i. \end{cases}$$

Se cumple que $\iota_j$ es continua porque lo es compuesta con todas las proyecciones (las composiciones son constantes o la identidad), y $\iota_j : X_j \longrightarrow \iota_j[X_j]$ tiene por inversa a la restricción de la proyección $i$-esima, luego la inversa también es continua. Por lo tanto, $\iota_j[X_j]$ es un subespacio de $X$ homeomorfo a $X_j$. Notemos que si los $X_i$ son espacios $T_1$, entonces $\iota_j[X_j]$ es cerrado en el producto. ■

En este punto el lector puede pasar a la sección 2.2, donde, entre otras cosas, vemos un criterio para que un espacio uniforme sea metrizable. 52

## 1.4 Identificaciones

Hay tres técnicas fundamentales para construir nuevos espacios topológicos a partir de otros dados, de las cuales ya hemos visto dos: formar productos y pasar a subespacios. La tercera consiste en definir una relación de equivalencia y considerar el conjunto cociente. La topología natural en un conjunto cociente es la que presentamos a continuación:

**Definición 1.43** Si $R$ es una relación de equivalencia en un espacio topológico $X$, sea $p : X \longrightarrow X/R$ la proyección en el conjunto cociente. Definimos la *topología cociente* en $X/R$ como la topología respecto de la cual un conjunto $U \subset X/R$ es abierto si y sólo si $p^{-1}[U]$ es abierto en $X$.

Es fácil ver que se trata realmente de una topología, y claramente es la menor topología respecto de la cual la proyección $p$ es continua.

En las condiciones anteriores, es claro que $C \subset X/R$ es cerrado si y sólo si $p^{-1}[C]$ es cerrado en $X$. Otra consecuencia inmediata de la definición es que una aplicación $f : X/R \longrightarrow Y$ en un espacio topológico $Y$ es continua si y sólo si lo es la composición $p \circ f : X \longrightarrow Y$.

Más en general, si $f : X \longrightarrow Y$ es una aplicación continua y suprayectiva entre espacios topológicos, podemos considerar en $X$ la relación dada por

$$u \, R_f \, v \leftrightarrow f(u) = f(v),$$

cuyas clases de equivalencia son las fibras de $f$, es decir, los conjuntos de la forma $f^{-1}[\{y\}]$, con $y \in Y$. Es claro entonces que $f$ induce una biyección $\bar{f}$ que hace conmutativo el diagrama siguiente:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "p"'] & Y \\ & X/R_f \arrow[u, "\bar{f}"'] \end{tikzcd}$$

Por la observación precedente, $\bar{f}$ es continua respecto de la topología cociente. Diremos que $f$ es una *identificación* (o que la topología de $Y$ es la *topología cociente* determinada por $f$) si $\bar{f}$ es un homeomorfismo.

Es claro que toda proyección en un cociente es una identificación. El teorema siguiente proporciona dos caracterizaciones en las que no intervienen cocientes:

**Teorema 1.44** *Si $f : X \longrightarrow Y$ es una aplicación continua y suprayectiva entre espacios topológicos, las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

1. *$f$ es una identificación.*
2. *Para todo $U \subset Y$, se cumple que $f^{-1}[U]$ es abierto en $X$ si y sólo si $U$ es abierto en $Y$.*
3. *Para todo $C \subset Y$, se cumple que $f^{-1}[C]$ es cerrado en $X$ si y sólo si $C$ es cerrado en $Y$.*

Demostración: 1) $\Rightarrow$ 2) Si $f$ es una identificación, con la notación previa al enunciado, $U \subset Y$ es abierto en $Y$ si y sólo si $\bar{f}^{-1}[U]$ es abierto en $X/R_f$, si y sólo si $p^{-1}[\bar{f}^{-1}[U]] = f^{-1}[U]$ es abierto en $X$.

2) $\Leftrightarrow$ 3) es inmediata.

2 $\Rightarrow$ 1) Tenemos que $\bar{f}$ es biyectiva y continua. Basta ver que es abierta, pero si $U \subset X/R_f$ es abierto, entonces $p^{-1}[U]$ es abierto en $X$ y es fácil ver que $f^{-1}[f[p^{-1}[U]]] = p^{-1}[U]$. En efecto, si $u \in f^{-1}[f[p^{-1}[U]]]$, entonces existe un punto $v \in p^{-1}[U]$ tal que $f(u) = f(v)$, pero entonces tenemos que $u\, R_f\, v$, luego $p(u) = p(v) \in U$, luego $u \in p^{-1}[U]$. La otra inclusión es inmediata. Por 2) tenemos que $f[p^{-1}[U]] = \bar{f}[U]$ es abierto en $Y$, luego $\bar{f}$ es abierta. ■

A partir de aquí es inmediato comprobar que la composición de identificaciones es una identificación. Más aún:

**Teorema 1.45** *Si $f : X \longrightarrow Y$ y $g : Y \longrightarrow Z$ son aplicaciones continuas entre espacios topológicos y $f \circ g$ es una identificación, también lo es $g$.*

En cambio, $f$ no tiene por qué ser una identificación, aunque sea suprayectiva. Basta pensar en el caso en que $g$ es constante y $Z$ se reduce a un punto.

Un caso particular del teorema anterior es que si $f : X \longrightarrow Y$ y $A \subset X$ cumple que $f|_A : A \longrightarrow Y$ es una identificación, entonces $f$ también lo es, pues $f|_A = i \circ f$, donde $i : A \longrightarrow X$ es la inclusión.

Otra consecuencia del teorema 1.44 es que las identificaciones engloban a todas las aplicaciones continuas suprayectivas abiertas o cerradas.

**Teorema 1.46** *Toda aplicación continua suprayectiva abierta o cerrada es una identificación.*

Basta tener en cuenta que $f[f^{-1}[U]] = U$.

Sin embargo, una identificación no es necesariamente abierta ni cerrada:

**Ejemplo** La aplicación $f : [0, 2] \cup ]3, 5] \longrightarrow [0, 3]$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x \leq 2, \\ x - 2 & \text{si } 3 < x \leq 5, \end{cases}$$

es una identificación, pero no es abierta ni cerrada.

En efecto, no es abierta porque $[0, 2]$ es un abierto cuya imagen no es abierta, y no es cerrada porque $]3, 5]$ es un cerrado cuya imagen no es cerrada. En cambio es una identificación, pues si llamamos $X = [0, 2] \cup ]3, 5]$, podemos definir $g : [0, 3] \longrightarrow X/R_f$ mediante

$$g(t) = \begin{cases} [t] & \text{si } 0 \leq t \leq 1.5, \\ [t + 2] & \text{si } 1.5 \leq t \leq 3. \end{cases}$$

Se trata de una aplicación continua por la propiedad 10 de la página 26, y claramente $\bar{f} \circ g$ y $g \circ \bar{f}$ son la identidad, luego $\bar{f}^{-1} = g$ es continua y $\bar{f}$ es un homeomorfismo. ■

Hemos visto que todo subespacio y todo producto de espacios de Hausdorff es un espacio de Hausdorff. Sin embargo, no es fácil dar condiciones (operativas) necesarias y suficientes para que un espacio topológico cociente sea de Hausdorff. He aquí una condición necesaria:

**Teorema 1.47** *Si $R$ es una relación de equivalencia en un espacio topológico $X$ y $X/R$ es un espacio de Hausdorff, entonces $R$ es un subconjunto cerrado del producto $X \times X$.*

Demostración: Si $(x, y) \in (X \times X) \setminus R$, entonces $[x]$, $[y]$ son dos puntos distintos en $X/R$, luego tienen entornos abiertos disjuntos $[x] \in U_0$, $[y] \in U_1$. Sea $V_i = p^{-1}[U_i]$, donde $p$ es la proyección en el cociente. Se cumple entonces que $(x, y) \in V_0 \times V_1 \subset (X \times X) \setminus R$, luego este conjunto es abierto y $R$ es cerrado. ■

El ejemplo A.5 muestra que esta condición no es suficiente. Una condición que sí que es suficiente, pero no necesaria, es ésta otra:

**Teorema 1.48** *Sea $R$ una relación de equivalencia en un espacio topológico $X$ que sea cerrada como subconjunto de $X \times X$. Si se cumple que la proyección $p : X \longrightarrow X/R$ es abierta, el cociente $X/R$ es un espacio de Hausdorff.*

Demostración: Dados dos puntos distintos $[x_1], [x_2] \in X/R$, tenemos que $(x_1, x_2) \in (X \times X) \setminus R$, luego existen abiertos $U_1, U_2 \subset X$ de manera que $(x_1, x_2) \in U_1 \times U_2 \subset (X \times X) \setminus R$. Como $p$ es abierta, $p[U_1]$ y $p[U_2]$ son entornos de $[x_1]$, $[x_2]$, y son disjuntos, pues si $[x] \in p[U_1] \cap p[U_2]$, tenemos que existen $y_i \in U_i$ tales que $y_1 \, R \, x \, R \, y_2$, luego $(y_1, y_2) \in (U_1 \times U_2) \cap R$. ■

El ejemplo precedente al teorema 1.47 muestra que no es necesario que $p$ sea abierta (ni cerrada) para que un espacio cociente sea de Hausdorff.

El lector puede leer ahora el apartado sobre cocientes de grupos y espacios vectoriales topológicos de la sección 10.4. 348

## 1.5 Convergencia de filtros

Presentamos ahora una alternativa a las sucesiones para los espacios que no cumplen el primer axioma de numerabilidad. Si reflexionamos sobre la razón que hace necesaria la hipótesis de numerabilidad al tratar con sucesiones, veremos que se debe a que muchos argumentos requieren garantizar la presencia de un punto de una sucesión (o la presencia final de toda la sucesión) en un entorno arbitrario de un punto, y si la cantidad de entornos es no numerable puede ocurrir que una sucesión no tenga términos suficientes para estar en todos los entornos a la vez. Es el caso del espacio Fortissimo (ejemplo A.16), que contiene un subconjunto $D$ y un punto $\infty \in \overline{D}$ tal que no existe ninguna sucesión en $D$ que converja a $\infty$. Así, en este espacio no se cumple el primer apartado del teorema 1.34. ■

Para evitar este problema podemos razonar como sigue: que una sucesión $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ converja a un punto $x$ significa que el conjunto $\mathcal{B}$ formado por todas las "colas" $B_m = \{x_n \mid n \geq m\}$ de la sucesión constituye un conjunto de aproximaciones a $x$ cada vez mejores. Que las "colas" $B_m$ sean numerables y que el conjunto $\mathcal{B}$ de todas ellas forme una sucesión ordenada por la inclusión son hechos prescindibles, y al prescindir de ellos llegamos a las nociones de "base de filtro" y de "convergencia de bases de filtro" (introducidas por Cartan en 1937):

**Definición 1.49** Una *base de filtro* en un conjunto no vacío $X$ es una familia $\mathcal{B}$ de subconjuntos de $X$ tal que:

1. $\varnothing \notin \mathcal{B}$,
2. Si $A, B \in \mathcal{B}$ existe un $C \in \mathcal{B}$ tal que $C \subset A \cap B$.

Así cada sucesión $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ en un conjunto $X$ determina una base de filtro

$$\mathcal{B} = \{\{x_n \mid n \geq m\} \mid m \in \mathbb{N}\}.$$

Diremos que una base de filtro $\mathcal{B}$ en un espacio topológico $X$ *converge* a un punto $x \in X$ (o que $x$ es un *límite* de $\mathcal{B}$) si todo entorno de $x$ contiene un elemento de $\mathcal{B}$.

Así es inmediato que una sucesión converge a un punto si y sólo si lo hace su base de filtro asociada. En general, que una base de filtro $\mathcal{B}$ converja a un punto $x$ se interpreta como que cada elemento de $\mathcal{B}$ es un nivel de aproximación a $x$, en el sentido de que contiene una selección de aproximaciones a $x$ "suficientemente buenas". La propiedad 2) se interpreta entonces como que cada par de niveles de aproximación a $x$ contiene siempre un tercer nivel de aproximaciones mejores que las de los niveles dados.

**Ejemplo** Continuando con el ejemplo precedente, hemos visto que no existen sucesiones en $D$ convergentes a $\infty$, pero, claramente, el conjunto $\mathcal{B}$ formado por todos los subconjuntos de $D$ de complementario numerable es una base de filtro en $D$ convergente a $\infty$. Enseguida veremos que esto no es casual, sino que la convergencia de bases de filtro satisface en espacios arbitrarios teoremas análogos a los que satisfacen las sucesiones en espacios 1AN.

Para tratar con la convergencia de bases de filtro resulta útil introducir la noción de filtro propiamente dicho:

**Definición 1.50** Sea $X$ un conjunto no vacío. Un *filtro* en $X$ es una familia $F$ de subconjuntos de $X$ tal que:

1. $\varnothing \notin F$ y $X \in F$.
2. Si $A, B \in F$ entonces $A \cap B \in F$
3. Si $A \in F$ y $A \subset B \subset X$, entonces $B \in F$.

La conexión con las bases de filtros es la siguiente: si $\mathcal{B}$ es una base de filtro en un conjunto $X$, entonces el conjunto formado por todos los $A \subset X$ para los que existe un $B \in \mathcal{B}$ con $B \subset A$ es claramente un filtro en $X$, el menor filtro en $X$ que contiene a $\mathcal{B}$, al que llamaremos *filtro generado* por $\mathcal{B}$. Por otra parte es claro que todo filtro es una base de filtro (que se genera a sí misma), luego todo lo que digamos para bases de filtro vale en particular para filtros.

La convergencia de filtros es conceptualmente más simple, pues claramente un filtro $F$ converge a un punto $x$ si y sólo si contiene a todos los entornos de $x$.

Sin embargo, en general necesitamos tratar con bases de filtro porque, claramente, si $A \subset X$, una base de filtro en $A$ es también una base de filtro en $X$, pero un filtro en $A$ ya no es un filtro en $X$ (aunque sigue siendo una base de filtro en $X$).

Al igual que sucede con las sucesiones, la propiedad de Hausdorff implica la unicidad de los límites:

**Teorema 1.51** *En un espacio de Hausdorff $X$ toda base de filtro $\mathcal{B}$ tiene a lo sumo un límite, y si existe lo representaremos por* $\lim \mathcal{B}$.

DEMOSTRACIÓN: Si $\mathcal{B}$ converge a $x$ e $y$, sean $U$ y $V$ entornos disjuntos de $x$ e $y$. Por definición de convergencia ambos deberían pertenecer al filtro $F$ generado por $\mathcal{B}$, luego su intersección también, lo que contradice la definición de filtro. ■

Veamos ahora que, tal y como hemos anunciado, las bases de filtro sustituyen satisfactoriamente a las sucesiones sin requerir la hipótesis de numerabilidad. El resultado fundamental es:

**Teorema 1.52** *Sea $X$ un espacio topológico, $A \subset X$ y $x \in X$. Entonces $x \in \overline{A}$ si y sólo si existe una base de filtro $\mathcal{B}$ en $A$ convergente a $x$. En particular, $A$ es cerrado si y sólo si toda base de filtro en $A$ convergente (en $X$) tiene su límite en $A$.*

DEMOSTRACIÓN: Si $x \in \overline{A}$, entonces $\mathcal{B} = \{U \cap A \mid U \text{ es un entorno de } x\}$ es una base de filtro que cumple lo pedido. Recíprocamente, si existe tal base de filtro $\mathcal{B}$, es obvio que todo entorno de $x$ contiene un elemento de $\mathcal{B}$, y por tanto corta a $A$, o sea, $x \in \overline{A}$. ■

Igualmente se prueba:

**Teorema 1.53** *Sea $X$ un espacio topológico, $A \subset X$ y $x \in X$. Entonces $x \in A'$ si y sólo si existe una base de filtro $\mathcal{B}$ en $A \setminus \{x\}$ convergente a $x$ en $X$.*

Para caracterizar la continuidad en términos de bases de filtro hemos de definir qué entendemos por imagen de una base por una aplicación:

**Definición 1.54** Sea $f : X \longrightarrow Y$ una aplicación entre conjuntos y $F$ un filtro en $X$. Llamaremos $f[F] = \{A \subset Y \mid f^{-1}[A] \in F\}$, que es un filtro en $Y$.

Si $\mathcal{B}$ es una base de filtro en $X$ podemos definir $f[\mathcal{B}]$ como la imagen del filtro que genera. Ante esta definición, el teorema siguiente puede enunciarse indistintamente en términos de filtros o de bases de filtro:

**Teorema 1.55** *Sea $f : X \longrightarrow Y$ una aplicación entre espacios topológicos. Entonces $f$ es continua en un punto $x \in X$ si y sólo si para todo filtro $F$ en $X$ convergente a $x$, el filtro $f[F]$ converge a $f(x)$.*

DEMOSTRACIÓN: Si $f$ es continua en $x$, sea $U$ un entorno de $f(x)$. Entonces $f^{-1}[U]$ es un entorno de $x$, por lo que $f^{-1}[U] \in F$ y así $U \in f[F]$, luego $f[F]$ contiene a todos los entornos de $f(x)$, es decir, converge a $f(x)$.

Si se cumple la condición de convergencia, sea $U$ un entorno de $f(x)$ y supongamos que $f^{-1}[U]$ no fuera entorno de $x$. Entonces la familia $F$ de todos los entornos de $x$ es un filtro en $X$ que converge a $x$, mientras que $f[F]$ no converge a $f(x)$, ya que no contiene a $U$, en contradicción con lo supuesto. Por tanto $f$ es continua en $x$. ■

Nos falta definir los conceptos análogos en filtros a los de subsucesión y punto adherente de una sucesión. Si queremos expresar que $x$ es un punto adherente de una sucesión $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ en términos de su base de filtro asociada, tendremos que exigir que todo conjunto $B_n = \{x_m \mid m \geq n\}$ corte a todo entorno de $X$. En general:

**Definición 1.56** Diremos que un punto $x$ en un espacio topológico $X$ es un *punto adherente* de una base de filtro $\mathcal{B}$ en $X$ si todo entorno de $x$ corta a todo elemento de $\mathcal{B}$. Equivalentemente, si $x \in \bigcap\limits_{A \in \mathcal{B}} \overline{A}$.

Es claro que todo punto límite de una base de filtro es un punto adherente.

Si $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}_2$ son bases de filtro, diremos que $\mathcal{B}_2$ es un *refinamiento* de $\mathcal{B}_1$. Es fácil ver que en estas condiciones todo punto límite de $\mathcal{B}_1$ lo es de $\mathcal{B}_2$ y todo punto adherente de $\mathcal{B}_2$ lo es de $\mathcal{B}_1$. Al igual que sucede con los límites, los puntos adherentes de una base de filtro son los mismos que los del filtro que genera.

**Teorema 1.57** *Un punto $x$ en un espacio topológico $X$ es un punto adherente de una base de filtro $\mathcal{B}$ si y sólo si $\mathcal{B}$ tiene un refinamiento convergente a $x$.*

DEMOSTRACIÓN: Si $x$ es un punto adherente basta tomar $\mathcal{B}'$ como la familia de todos los conjuntos $Y \subset X$ tales que existe un entorno $U$ de $x$ y un $A \in \mathcal{B}$ de modo que $U \cap A \subset Y$. El recíproco es obvio, pues un punto límite de un refinamiento de $\mathcal{B}$ es también un punto adherente del refinamiento, luego también de $\mathcal{B}$. ■

Veamos ahora el análogo al teorema 1.31. Puede enunciarse equivalentemente en términos de bases de filtro.

**Teorema 1.58** *Sea $\{X_i\}_{i\in I}$ una familia de espacios topológicos. Un filtro $F$ converge en $\prod\limits_{i\in I} X_i$ a un punto $x$ si y sólo si cada $p_i[F]$ converge a $x_i$, donde $p_i$ es la proyección del producto en $X_i$.*

Demostración: Si $F$ converge a $x$, cada $p_i[F]$ converge a $x_i$ porque las proyecciones son continuas. Si cada $p_i[F]$ converge, dado un entorno básico $\prod\limits_{i\in I} G_i$ de $x$, sean $i_1, \ldots, i_n$ los índices del soporte. Cada $G_{i_j}$ es un entorno de $x_{i_j}$, luego $G_{i_j} \in p_i[F]$ y $p_i^{-1}[G_{i_j}] \in F$, de donde $\prod\limits_{i\in I} G_i = p_i^{-1}[G_{i_j}] \in F$. En consecuencia $F$ converge a $x$. ■

Veamos una aplicación de la convergencia de filtros:

**Teorema 1.59** *Sea $f : X \longrightarrow Y$ una aplicación entre espacios topológicos, donde $Y$ es regular, y sea $D \subset X$ un subespacio denso de $X$ tal que $f|_D$ es continua. Supongamos que si $x \in X$ y $\mathcal{B}_x = \{U \cap D \mid U$ es un entorno de $x$ en $X\}$, entonces $f[\mathcal{B}_x]$ converge a $f(x)$. Entonces $f$ es continua.*

Demostración: Sea $x \in X$ y sea $V'$ un entorno cerrado de $f(x)$ en $Y$ (vamos a usar que, como $Y$ es regular, los entornos cerrados de $f(x)$ son una base de entornos de $f(x)$, por 1.24). Por hipótesis $f|_D^{-1}[V']$ es un entorno de $x$ en $D$, es decir, que existe un entorno abierto $V$ de $x$ en $X$ tal que $f[V \cap D] \subset V'$. Vamos a probar que $f[V] \subset \overline{f[V \cap D]} \subset V'$, con lo que $f^{-1}[V']$ será un entorno de $x$ y esto probará la continuidad de $f$ en $x$.

Si $z \in V$, tenemos que $f[\mathcal{B}_z]$ converge a $f(z)$, luego $W$ es un entorno de $f(z)$, se cumple que $W \in f[\mathcal{B}_z]$, luego $f^{-1}[W] \cap D$ contiene un elemento de $\mathcal{B}_z$, luego $V \cap D \cap f^{-1}[W] \neq \varnothing$, luego $f[V \cap D] \cap W \neq \varnothing$, luego $f(z) \in \overline{f[V \cap D]}$. ■

**Nota** En el teorema anterior $\mathcal{B}_x$ es una base de filtro en $D$ convergente a $x$, luego también converge a $x$ el filtro que genera en $D$. Por lo tanto, una hipótesis alternativa consiste en suponer que, para todo filtro $F$ en $D$ que converge a $x$, se cumple que $f[F]$ converge a $f(x)$. ■

El ejemplo A.10 muestra que la hipótesis de regularidad no puede suprimirse.

Para terminar introducimos un concepto que a menudo resulta práctico para tratar con bases de filtro:

**Definición 1.60** Una *subbase de filtro* en un conjunto $X$ es una familia $\mathcal{S}$ de subconjuntos de $X$ tal que la intersección de cualquier subfamilia finita es no vacía.

Es inmediato que si $\mathcal{S}$ es una subbase de filtro en $X$, entonces el conjunto $\mathcal{B}$ de las intersecciones finitas de elementos de $\mathcal{S}$ es una base de filtro en $X$, por lo que podemos hablar de convergencia de una subbase de filtro entendida como la convergencia de la base de filtro que genera.

El lector puede abordar ahora la sección 2.3 sobre completitud en espacios uniformes.

## 1.6 Espacios de Baire

Hay una clase muy amplia de espacios topológicos en los que es posible distinguir entre conjuntos "grandes" y "pequeños", de modo que toda unión numerable de conjuntos "pequeños" siga siendo "pequeña". Esto da lugar a una técnica de demostración según la cual, tras haber despreciado una cantidad numerable de conjuntos "pequeños" de puntos, tenemos garantizado que todavía nos queda una cantidad "grande" de puntos con los que trabajar.

La idea básica es que es razonable considerar que un abierto denso en un espacio topológico es un conjunto "muy grande". En efecto, al ser denso, está distribuido por todo el espacio, y al ser abierto, en cualquier entorno de cada punto, no sólo hay puntos del conjunto, sino que hay un abierto entero contenido en el conjunto. En realidad, por estas mismas razones, cualquier conjunto que contenga un abierto denso (sin ser él mismo abierto) merece ser tenido por "muy grande".

Un conjunto serà "muy pequeño" si su complementario es "muy grande". Claramente, el complementario de un abierto denso es un cerrado de interior vacío, por lo que un conjunto "muy pequeño" será un conjunto contenido en un cerrado de interior vacío.

**Definición 1.61** Un subconjunto $A$ de un espacio topológico $X$ es *diseminado* si cumple $\mathring{\overline{A}} = \varnothing$. Diremos que $A$ es *de primera categoría* si es unión numerable de conjuntos diseminados. En caso contrario se dice que $A$ es *de segunda categoría.*

Así, $A$ es diseminado si y sólo si está contenido en un cerrado de interior vacío (en principio $\overline{A}$, según la definición, pero si $A \subset C$, donde $C$ es cualquier cerrado de interior vacío, claramente $\mathring{\overline{A}} \subset \mathring{C} = \varnothing$).

A su vez, un conjunto es de primera categoría si está contenido en una unión numerable de cerrados de interior vacío. En efecto, si $A = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} A_n$, donde cada $A_n$ es diseminado, entonces $A \subset \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} \overline{A}_n$, que es una unión numerable de cerrados de interior vacío, y si $A \subset \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} C_n$, donde cada $C_n$ es un cerrado de interior vacío, entonces $A = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} (A \cap C_n)$, donde cada $A \cap C_n$ es diseminado, pues $\overline{A \cap C_n} \subset C_n$.

Por lo tanto, los conjuntos diseminados se corresponden con la idea de "conjunto muy pequeño" que hemos discutido antes de la definición, y los conjuntos de primera categoría son simplemente "pequeños", pues no son necesariamente diseminados, pero son todo lo pequeños que pueden ser para asegurar que una unión numerable de conjuntos "pequeños" siga siendo "pequeña".

Más concretamente, el teorema siguiente recoge el argumento que hemos dado para considerar "muy pequeños" a los conjuntos diseminados, pues afirma que el complementario de un conjunto diseminado es "muy grande" en el sentido de que todo abierto no vacío contiene un abierto contenido en dicho complementario:

**Teorema 1.62** *Un subconjunto $A$ de un espacio topológico $X$ es diseminado si y sólo si todo abierto no vacío $U$ en $X$ contiene un abierto no vacío $U'$ tal que $U' \cap A = \varnothing$.*

DEMOSTRACIÓN: Si $A$ es diseminado y $U$ es un abierto no vacío, entonces $\overline{A}$ tiene interior vacío, luego $X \setminus \overline{A}$ es un abierto denso, luego $U' = (X \setminus \overline{A}) \cap U$ es un abierto no vacío tal que $U' \cap A = \varnothing$.

Recíprocamente, si $A$ tiene esta propiedad, entonces $X \setminus \overline{A}$ es denso, pues, dado cualquier abierto no vacío $U$, existe un abierto no vacío $U' \subset U$ tal que $U' \cap A = \varnothing$, luego $U' \cap \overline{A} = \varnothing$, luego $U' \subset U \cap (X \setminus \overline{A}) \neq \varnothing$. Por lo tanto, tenemos que $\mathring{\overline{A}} = \varnothing$. ■

Si $X$ es un espacio topológico, llamaremos $I_c(X)$ (o simplemente $I_c$ cuando $X$ pueda sobreentenderse) al conjunto de todos los subconjuntos de $X$ de primera categoría. Casi podemos demostrar que $I_c$ cumple las propiedades siguientes:

1. $\varnothing \in I_c$, $X \notin I_c$.
2. Si $A \subset B \subset X$ y $B \in I_c$, entonces $A \in I_c$.
3. Si $\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una familia de conjuntos de $I_c$, entonces $\bigcup\limits_{n=0}^{\infty} A_n \in I_c$.

La propiedad 1) afirma que $\varnothing$ es "pequeño" y que $X$ es "grande". La propiedad 2) afirma que todo subconjunto de un conjunto "pequeño" es "pequeño", mientras que 3) afirma que toda unión numerable de conjuntos "pequeños" es "pequeña".

Todos estos hechos se demuestran trivialmente a partir de las definiciones excepto uno, a saber, que $X \notin I_c$. Esto no es necesariamente cierto, como muestra el caso $X = \mathbb{Q}$. Cada punto $\{q\}$ es un cerrado de interior vacío, luego es de primera categoría y, como $\mathbb{Q}$ es numerable, resulta que $\mathbb{Q} \in I_c$. La distinción entre conjuntos de primera y segunda categoría no sirve de nada cuando el espacio total resulta ser de primera categoría, como es el caso de $\mathbb{Q}$. En la práctica conviene exigir algo más fuerte que $X \notin I_c$:

**Teorema 1.63** *En un espacio topológico, las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

1. *Toda intersección numerable de abiertos densos es densa.*
2. *Toda unión numerable de cerrados de interior vacío tiene interior vacío.*
3. *Todo conjunto de primera categoría tiene interior vacío.*
4. *Todo abierto no vacío es de segunda categoría.*

DEMOSTRACIÓN: 1) $\Leftrightarrow$ 2) Si $\{C_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una familia de cerrados de interior vacío en un espacio $X$, entonces $\{X \setminus C_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una familia de abiertos densos, luego por hipótesis $\bigcap\limits_{n=0}^{\infty} (X \setminus C_n)$ es un conjunto denso, luego su complementario, $\bigcup\limits_{n=0}^{\infty} C_n$, tiene interior vacío. La implicación opuesta se prueba análogamente.

2) $\Rightarrow$ 3) Todo conjunto de primera categoría está contenido en una unión numerable de cerrados de interior vacío, luego tiene interior vacío.

3) $\Rightarrow$ 4) Obvio.

4) $\Rightarrow$ 2) Una unión numerable de cerrados de interior vacío es de primera categoría. Si tuviera interior no vacío, dicho interior sería un abierto de primera categoría. ■

**Definición 1.64** Un *espacio de Baire* es un espacio topológico que cumpla cualquiera de las propiedades del teorema anterior.

El nombre se debe a que Baire demostró en 1889 que $\mathbb{R}$ es un espacio de Baire. El teorema siguiente lo probó Hausdorff en 1914:

**Teorema 1.65 (de Baire)** *Todo espacio métrico completo es un espacio de Baire.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $X$ un espacio métrico completo y sea $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ una familia de abiertos densos en $X$. Vamos a probar que su intersección es densa. Para ello fijamos un abierto no vacío $U_0$. Como $D_1$ es denso, $U_0 \cap D_1$ es un abierto no vacío, luego podemos tomar un punto $x \in U_0 \cap D_1$ y una bola abierta $U_1 = B_{\epsilon_1}(x) \subset \overline{B_{\epsilon_1}(x)} \subset U_0 \cap D_1$ con $\epsilon_1 < 1$.

Similarmente, $U_1 \cap D_2$ es un abierto no vacío, luego podemos tomar un punto $x \in U_1 \cap D_2$ y una bola abierta $U_2 = B_{\epsilon_1}(x) \subset \overline{B_{\epsilon_2}(x)} \subset U_1 \cap D_2$ y $\epsilon_2 < 1/2$.

De este modo construimos una sucesión $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ de bolas abiertas de radio $\epsilon_n < 1/n$ tal que $\overline{U}_n \subset U_{n-1} \cap D_n$,

$$U_0 \supset \overline{U}_1 \supset \overline{U}_2 \supset \cdots$$

Entonces $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \overline{U}_n \subset U_0 \cap \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} D_n$. Si tomamos un punto $x_n \in U_n$, la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es claramente de Cauchy, y su límite está en la intersección de las clausuras, luego $U_0 \cap \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} D_n \neq \varnothing$ y la intersección es densa. ■

Más adelante veremos que la clase de los espacios de Baire es mucho más amplia que la de los espacios métricos completos. La recta de Sorgenfrey (ejemplo A.25) es un caso de espacio de Baire que no es metrizable.

Para poner algunos ejemplos de espacios de Baire conviene probar lo siguiente:

**Teorema 1.66** *Si $Y \subset X$ y $A \subset Y$ es un conjunto diseminado (resp. de primera categoría) en $Y$, también lo es en $X$. Recíprocamente, si $Y$ es abierto o denso en $X$ y $A$ es diseminado (resp. de primera categoría) en $X$, también lo es en $Y$.*

DEMOSTRACIÓN: Si $A$ es diseminado en $Y$, vamos a aplicar el teorema 1.62 para probar que también lo es en $X$. Si $U \subset X$ es un abierto no vacío y $U \cap Y = \varnothing$, entonces ya tenemos $U \cap A = \varnothing$. Si $U \cap Y \neq \varnothing$, existe $V' \subset U \cap Y$ abierto no vacío en $Y$ tal que $V' \cap A = \varnothing$, luego existe un abierto $U'$ en $X$ tal que $V' = U' \cap Y$, con lo que $U' \cap A = U' \cap Y \cap A = V' \cap A = \varnothing$.

Supongamos ahora que $Y$ es abierto en $X$ y que $A$ es diseminado en $X$. Si $V$ es un abierto no vacío en $Y$, también es abierto en $X$, luego existe $V' \subset V$ abierto no vacío tal que $V' \cap A = \varnothing$, y esto prueba que $A$ es diseminado en $Y$.

Ahora supongamos que $Y$ es denso en $X$ y de nuevo que $A$ es diseminado en $X$. Si $V$ es un abierto no vacío en $Y$, existe $U$ abierto en $X$ tal que $V = U \cap Y$. Tomamos un abierto $U' \subset U$ no vacío tal que $U' \cap A = \varnothing$, con lo que $V' = U' \cap A$ es un abierto no vacío en $Y$ (porque $Y$ es denso) tal que $V' \cap A = Y \cap V \cap A = \varnothing$.

El resultado para conjuntos diseminados implica inmediatamente el correspondiente a conjuntos de primera categoría. ■

Como primera aplicación:

**Teorema 1.67** *Todo $G_\delta$ denso y todo abierto en un espacio de Baire es un espacio de Baire.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $X$ un espacio de Baire e $Y \subset X$. Si $Y$ es abierto, todo abierto no vacío en $Y$ es un abierto no vacío en $X$, luego es de segunda categoría en $X$ y, por el teorema anterior, también es de segunda categoría en $Y$, luego $Y$ es un espacio de Baire.

Supongamos ahora que $Y$ es un $G_\delta$ denso en $X$. Digamos que $Y = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} V_n$, donde cada $V_n$ es un abierto denso. A su vez, sea $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ una familia de abiertos densos en $Y$ y sea $U_n = Y \cap W_n$, donde $W_n$ es abierto en $X$. Entonces $V_n \cap W_n$ es denso en $X$, pues si $U$ es un abierto no vacío, $U \cap V_n$ es un abierto no vacío, luego $U \cap V_n \cap Y$ es un abierto no vacío en $Y$, luego $U \cap V_n \cap U_n \neq \varnothing$, luego $U \cap V_n \cap W_n \neq \varnothing$. Por consiguiente, $D = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} (V_n \cap W_n)$ es denso en $X$.

Sea $U$ un abierto no vacío en $Y$ y sea $U = V \cap Y$, donde $V$ es abierto en $X$. Entonces

$$\varnothing \neq V \cap D = V \cap Y \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} W_n = U \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n,$$

luego $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} U_n$ es denso en $Y$. ■

Por ejemplo, esto muestra que $\mathbb{Q}$ no es un $G_\delta$ en $\mathbb{R}$, ya que en tal caso sería un $G_\delta$ denso y sería un espacio de Baire, cuando ya hemos visto que no lo es.

Notemos que la definición de espacio de Baire no sólo exige que el espacio sea de segunda categoría, sino que lo sean todos sus abiertos no vacíos.

**Ejemplo** El espacio $X = (\mathbb{R} \times \{0\}) \cup (\mathbb{Q} \times \{1\}) \subset \mathbb{R}^2$ es de segunda categoría, pero no es un espacio de Baire.

En efecto, no es un espacio de Baire porque $\mathbb{Q} \times \{1\}$ es abierto en $X$, luego si fuera de Baire también lo sería $\mathbb{Q} \times \{1\}$ y también $\mathbb{Q}$. Pero $X$ es de segunda categoría, pues si fuera de primera categoría también lo sería $\mathbb{R} \times \{0\}$, luego éste sería también de primera categoría en sí mismo (por 1.66), lo cual es absurdo, porque $\mathbb{R}$ es un espacio de Baire. ■

**Teorema 1.68** *Todo espacio topológico que contiene un subespacio de Baire denso es de Baire.*

Demostración: Sea $X$ un espacio topológico y $D \subset X$ un subconjunto denso de Baire. Si $X$ no es de Baire, contiene un abierto no vacío $U$ de primera categoría. Entonces $U \cap D$ es un abierto no vacío en $D$ y es de primera categoría, porque lo es en $X$ (teorema 1.66). Por lo tanto, $D$ tampoco es un espacio de Baire. ■

El ejemplo A.35 muestra que el producto de dos espacios de Baire no es necesariamente un espacio de Baire. Para subespacios tenemos lo siguiente:

**Ejemplo** Veamos un ejemplo de subespacio cerrado de un espacio de Baire que no es un espacio de Baire. Basta tomar $X = \mathbb{R}^2 \setminus ((\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \times \{0\})$. Como contiene a $\mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R} \times \{0\})$ como abierto denso, es un espacio de Baire. Sin embargo, $C = \mathbb{Q} \times \{0\}$ es cerrado en $X$ y no es un espacio de Baire, porque es homeomorfo a $\mathbb{Q}$. ■

Hemos usado en varias ocasiones que $\mathbb{Q}$ no es un espacio de Baire, esencialmente porque es numerable y esto hace que sea de primera categoría, pero no es cierto que todo espacio numerable sea de primera categoría. De hecho, todo espacio discreto es un espacio de Baire, pues es completamente metrizable (o también se ve directamente a partir de la definición, pues el único subespacio diseminado o de primera categoría es el conjunto vacío). Lo que sí que es cierto es que un espacio numerable $T_1$ sin puntos aislados es de primera categoría (porque cada punto es diseminado).

En general, los puntos aislados son un tanto "patolológicos" en lo tocante a la categoría, pues son siempre de segunda categoría.

**El teorema de Baire y el principio de elecciones dependientes** La prueba de teorema de Baire 1.65 muestra un uso típico del principio de elecciones dependientes ED (véase la sección 4.3 de [TC]), pues consiste en elegir una sucesión numerable de bolas abiertas $U_n$ de modo que cada elección depende de la anterior. Más precisamente, para ajustarlo a la formulación de ED, tenemos que considerar el conjunto $A$ de todas las sucesiones finitas $\{U_n\}_{n<k}$, donde cada $U_n$ es una bola abierta en $X$ de radio menor que $1/n$ y $\overline{U}_n \subset U_{n-1} \cap D_n$.

En $A$ consideramos la relación $R$ dada por $\{U'_n\}_{n<k+1}\, R\, \{U_n\}_{n<k}$ si y sólo si $U'_n = U_n$ para $n < k$. Entonces ED nos proporciona una sucesión infinita en las condiciones requeridas.

Es interesante observar que el teorema de Baire es, de hecho, equivalente a ED, es decir, que si suponemos el teorema 1.65 podemos demostrar ED.

En efecto, Sea $A \neq \varnothing$ un conjunto arbitrario y sea $R$ una relación en $A$ tal que $\bigwedge a \in A \bigvee b \in A\ b\, R\, a$. Consideramos el conjunto $X = A^{\mathbb{N}}$ de todas las sucesiones en $A$ con la distancia dada por

$$d(f,g) = \begin{cases} 0 & \text{si } f = g, \\ 1/n & \text{si } n = \min\{i \in \mathbb{N} \mid f(i) \neq g(i)\}. \end{cases}$$

Es inmediato comprobar que $X$ es un espacio métrico completo con esta distancia. La completitud[6] se debe a que si $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en $X$, entonces cada sucesión $\{f_n(i)\}_{n=0}^{\infty}$ es finalmente constante, por lo que podemos definir $f(i)$ como el valor común $f_n(i)$ para todo $n$ suficientemente grande, y se comprueba inmediatamente que $f$ es el límite de la sucesión dada.

Ahora consideramos los abiertos densos

$$U_n = \{g \in X \mid \bigvee m \in \mathbb{N}(n < m \wedge g(m)\, R\, g(n))\}.$$

Por el teorema de Baire la intersección $\bigcap\limits_n U_n$ es densa, luego en particular no es vacía, y si $g$ está en la intersección, podemos definir $k_0 = 0$ y $k_{n+1}$ como el mínimo natural $> k_n$ tal que $g(k_{n+1})\, R\, g(k_n)$. Entonces, la función $f : \mathbb{N} \longrightarrow A$ dada por $f(n) = g(k_n)$ cumple $\bigwedge n \in \mathbb{N}\ f(n+1)\, \mathbb{R}\, f(n)$, como requiere ED. ■



[6]Aquí hay que entender que, en el enunciado del teorema de Baire, la completitud de un espacio métrico se entiende definida directamente en términos de sucesiones de Cauchy y no de filtros.

# Capítulo II

# Espacios uniformes

En un espacio topológico tenemos definido el concepto de "entorno" de un punto, cuya interpretación intuitiva es que un entorno de un punto $x$ contiene todos los puntos "suficientemente próximos" a $x$. Cuando menor es el entorno, más cercanos a $x$ son los puntos que contiene. En un espacio métrico, la distancia cuantifica esta "cercanía", pero esta cuantificación es irrelevante en muchas ocasiones, donde la noción topológica de "entorno" es más que suficiente. De entre las cosas "topológicamente interesantes" que podemos hacer en un espacio métrico sin que sean "puramente topológicas" destacamos la siguiente:

Si $M$ es un espacio métrico y $\epsilon > 0$, podemos considerar el conjunto

$$V_\epsilon = \{(x, y) \in M \times M \mid d(x, y) < \epsilon\}.$$

Este conjunto contiene todos los pares de puntos que se encuentran "uniformemente próximos" en el sentido de que dos pares en $V_\epsilon$, digamos $(x, y)$ y $(x', y')$, pueden estar muy alejados entre sí, pero el grado de proximidad entre $x$ e $y$ es de la misma magnitud (no superior a $\epsilon$) que el grado de proximidad que hay entre $x'$ e $y'$.

Si $M$ fuera un mero espacio topológico no podríamos definir nada parecido a esto. Dados dos puntos $x$, $x'$, podemos tomar un entorno $U_x$ de $x$ todo lo pequeño que queramos, y otro $U_{x'}$ de $x'$ todo lo pequeño que queramos, pero no tenemos forma de expresar que si $y \in U_x$ e $y' \in U_y$ entonces la "proximidad" de $y$ a $x$ es "del mismo orden" que la "proximidad" de $y'$ a $x'$, no tenemos forma de comparar la magnitud de los entornos $U_x$ y $U_{x'}$.

Hay muchos conceptos definibles en espacios métricos que en realidad no dependen de la presencia de una métrica, sino únicamente del hecho de que ésta permite comparar las magnitudes de entornos de puntos distintos. Si axiomatizamos este hecho obtenemos una estructura más restrictiva que la de espacio topológico pero mucho más general que la de espacio métrico, y es la que vamos a estudiar en este capítulo.

## 2.1 Uniformidades

El concepto de uniformidad axiomatiza las propiedades de los conjuntos $V_\epsilon$ que acabamos de definir en el contexto de los espacios métricos:

**Definición 2.1** Una *banda* en un conjunto $X$ es un conjunto $V \subset X \times X$ que cumpla las dos propiedades siguientes:

1. Para todo punto $x \in X$ se cumple $(x, x) \in V$.
2. Para todo par de puntos $u$, $v \in X$ se cumple que $(u, v) \in V$ si y sólo si $(v, u) \in V$.

Llamaremos $\mathcal{D}_X$ al conjunto de todas las bandas en $X$.

La menor banda en un conjunto $X$ es obviamente la *diagonal*

$$\Delta = \{(x, x) \mid x \in X\}.$$

La propiedad 1) afirma que $\Delta$ está contenida en todas las bandas. La propiedad 2) es una condición de simetría que podríamos suprimir, pero que simplifica la teoría.

Vamos a definir los espacios uniformes como conjuntos en los que se ha seleccionado una cierta familia de bandas. Para establecer las propiedades mínimas que ha de cumplir un sistema de bandas para que sea aceptable conviene introducir más notación. Vamos a imitar formalmente el lenguaje de los espacios métricos:

**Definición 2.2** Sea $X$ un conjunto, $V$ una banda en $X$ y $x$, $y \in X$. Diremos que la *distancia* de $x$ a $y$ es menor que $V$, y lo representaremos $d(x, y) < V$, si $(x, y) \in V$. Si $A$, $B \subset X \times X$, llamaremos

$$A + B = \{(x, z) \mid \text{existe } y \in X \text{ tal que } (x, y) \in A \text{ y } (y, z) \in B\}.$$

En general para cada número natural $n$ llamaremos $nA = A + \overset{n}{\cdots} + A$. Claramente $(m + n)A = mA + nA$.

Los hechos siguientes son inmediatos:

1. $d(x, x) < V$.
2. $d(x, y) < V$ si y sólo si $d(y, x) < V$.
3. Si $d(x, y) < V$ y $d(y, z) < W$ entonces $d(x, z) < V + W$.

Vemos así que las bandas en un conjunto arbitrario se comportan como los números reales positivos en un espacio métrico, y la suma de bandas que hemos definido se comporta como la suma de números reales.

Diremos que un subconjunto $A \subset X$ tiene *diámetro menor que* $V$ (y lo representaremos por $d(A) < V$) si para todo $x$, $y \in A$ se cumple que $d(x, y) < V$, es decir, si $A \times A \subset V$.

**Definición 2.3** Una *uniformidad* en un conjunto $X$ es un conjunto $\mathcal{U} \subset \mathcal{D}_X$ tal que

1. Si $V \in \mathcal{U}$ y $V \subset W \in \mathcal{D}_X$ entonces $W \in \mathcal{U}$.
2. Si $V$, $W \in \mathcal{U}$ entonces $V \cap W \in \mathcal{U}$.
3. Si $V \in \mathcal{U}$ existe un $W \in \mathcal{U}$ tal que $2W \subset V$.

   Diremos que la uniformidad es *de Hausdorff* si además cumple:

4. $\bigcap \mathcal{U} = \Delta$.

Un *espacio uniforme* es un par $(X, \mathcal{U})$, donde $\mathcal{U}$ es una uniformidad en el conjunto $X$. En la práctica omitiremos toda mención explícita a la uniformidad si no hay confusión. Cuando hablemos de una banda en un espacio uniforme se entenderá que no nos referimos a una banda arbitraria, sino a una banda de su uniformidad.

Notemos que, por la condición 3) aplicada varias veces, si $V$ es una banda de una uniformidad $\mathcal{U}$, para todo número natural $n$ existe un $W \in \mathcal{U}$ tal que $nW \subset V$.

Veamos ahora que toda uniformidad determina una topología. Para ello conviene introducir algunas definiciones adicionales:

**Definición 2.4** Sea $V$ una banda en un conjunto $X$. Llamaremos *bola* de centro $x$ y radio $V$ al conjunto

$$B_V(x) = \{y \in X \mid d(x, y) < V\}.$$

Obviamente $d\big(B_V(x)\big) < 2V$.

**Teorema 2.5** *Todo espacio uniforme $X$ es un espacio topológico tomando como abiertos los conjuntos $G \subset X$ tales que para todo $x \in G$ existe un $V \in \mathcal{U}$ tal que $B_V(x) \subset G$.*

Demostración: Es obvio que $\varnothing$ y $X$ son abiertos, así como que la unión de abiertos es abierta. Respecto a la intersección, sean $G$ y $H$ dos abiertos y $x \in G \cap H$. Por definición de abierto existen bandas $V$ y $W$ de la uniformidad tales que $B_V(x) \subset G$ y $B_W(x) \subset H$, luego $B_{V\cap W}(x) \subset G \cap H$, lo que prueba que $G \cap H$ es abierto. ■

En lo sucesivo consideraremos siempre a los espacios uniformes como espacios topológicos con la topología dada por el teorema anterior.

Un espacio topológico es *uniformizable* si existe una uniformidad que induce su topología.

Por ejemplo, a continuación probamos que los espacios triviales y discretos son uniformizables:

**Ejemplos: La uniformidad trivial y la discreta** Si $X$ es un conjunto arbitrario, es claro que $\mathcal{U} = \{X \times X\}$ es una uniformidad en $X$, a la que llamaremos *uniformidad trivial.* Se trata de una uniformidad con una única banda $V = X \times X$, para la cual $B_V(x) = X$, por lo que la topología que induce en $X$ es la topología trivial.

En el extremo opuesto tenemos la *uniformidad discreta* $\mathcal{U} = \mathcal{D}_X$, que contiene en particular la banda $\Delta$, respecto de la cual $B_\Delta(x) = \{x\}$, por lo que la topología que induce es la discreta. ■

Más interesante es que toda pseudométrica en un conjunto induce una uniformidad. Para probarlo conviene introducir antes el concepto de base de una uniformidad:

**Definición 2.6** Una *base* de un espacio uniforme $X$ es un conjunto $\mathcal{B} \subset \mathcal{U}$ tal que todo $V \in \mathcal{U}$ contiene un $W \in \mathcal{B}$.

El teorema siguiente es inmediato:

**Teorema 2.7** *Si $\mathcal{B}$ es una base de un espacio uniforme $X$ entonces se cumple:*

1. *Si $V$, $W \in \mathcal{B}$ entonces existe un $Z \in \mathcal{B}$ tal que $Z \subset V \cap W$.*
2. *Si $V \in \mathcal{B}$ entonces existe un $W \in \mathcal{B}$ tal que $2W \subset V$.*

*Recíprocamente, cualquier conjunto de bandas $\mathcal{B}$ que cumpla tales condiciones define una única uniformidad*

$$\mathcal{U} = \{A \in \mathcal{D}_X \mid \textit{existe } V \in \mathcal{B} \textit{ tal que } V \subset A\}$$

*de la cual es base. La uniformidad es de Hausdorff si y sólo si $\bigcap \mathcal{B} = \Delta$.*

En este punto el lector puede regresar a la sección 9.1, donde introducimos la uniformidad definida por una métrica. 291

---

**Productos de espacios uniformes** Veamos ahora que un producto de espacios uniformes admite una estructura natural de espacio uniforme:

**Teorema 2.8** *Sean $\{X_i\}_{i\in I}$ espacios uniformes y $\mathcal{B}$ la familia de todos los conjuntos de la forma*

$$\Big\{(x, y) \in \prod_{i\in I} X_i \times \prod_{i\in I} X_i \;\Big|\; d(x_i, y_i) < V_i \textit{ para todo } i \in J\Big\},$$

*donde $J \subset I$ es un conjunto finito y cada $V_i$ es una banda en $X_i$. Entonces $\mathcal{B}$ es base de una uniformidad en $\prod\limits_{i\in I} X_i$ que induce la topología producto.*

Demostración: Comprobar que $\mathcal{B}$ es una base para una uniformidad no presenta ninguna dificultad. Si $x \in \prod_{i\in I} X_i$, una base de entornos de $x$ para la topología inducida por la uniformidad producto son las bolas de centro $x$ y radio las bandas básicas de la uniformidad producto. Cada una de estas bolas es de la forma $\prod_{i\in I} G_i$, donde $G_i = X_i$ salvo en un número finito de casos, en los cuales $G_i = B_{V_i}(x_i)$, para ciertas bandas $V_i$ de $X_i$. Como estas bolas son bases de entornos de las coordenadas de $x$ en cada factor, es fácil ver que las bolas del producto son una base de entornos de $x$ para la topología producto, luego ésta coincide con la topología de la uniformidad. ■

En la sección 9.1 probamos que el producto de un número finito de uniformidades metrizables es metrizable. 292

---

**Subespacios uniformes** Veamos ahora que todo subconjunto de un espacio uniforme hereda una uniformidad de forma natural:

**Teorema 2.9** *Sea $X$ un espacio uniforme y $Y$ un subconjunto de $X$. Entonces el conjunto $\mathcal{U}_Y = \{V \cap (Y \times Y) \mid V \in \mathcal{U}\}$ es una uniformidad en $Y$ tal que la topología inducida por $\mathcal{U}_Y$ en $Y$ es la inducida por la topología de $X$.*

Demostración: Comprobar que $\mathcal{U}_Y$ es una uniformidad no ofrece ninguna dificultad. Es inmediato comprobar que una bola de $\mathcal{U}_Y$ es la intersección con $Y$ de una bola de $\mathcal{U}$, por lo que los entornos básicos de un punto de $Y$ para la topología de $\mathcal{U}_Y$ son una base de entornos para la topología inducida por $X$, de donde ambas coinciden. ■

Es claro que si $Z \subset Y \subset X$ son espacios uniformes, la uniformidad que $X$ induce en $Z$ es la misma que la inducida por $Y$ cuando en $Y$ consideramos la uniformidad inducida desde $X$.

**Ejercicio:** Enunciar y demostrar un resultado análogo al teorema 1.14 para espacios uniformes.
293

---

**La propiedad de Hausdorff** Ya hemos observado que un espacio pseudométrico que no sea metrizable es un ejemplo de espacio uniforme que no cumple la propiedad $T_0$. Sin embargo, la presencia de puntos topológicamente indistinguibles es lo único que puede hacer que un espacio uniforme no sea de Hausdorff:

**Teorema 2.10** *Un espacio uniforme es $T_0$ si y sólo si su uniformidad es de Hausdorff en el sentido de la definición* 2.3, *y en tal caso es un espacio de Hausdorff en el sentido topológico.*

Demostración: Supongamos que un espacio uniforme $X$ cumple $T_0$ y consideremos puntos $x \neq y$ en $X$. Entonces existe un entorno de uno de los dos puntos que no contiene al otro. Pongamos que se trata de un entorno de $x$. Dicho entorno contendrá una bola $B_V(x)$, con $V \in \mathcal{U}$, de modo que $y \notin B_V(x)$. Esto significa que $(x, y) \notin V$, luego $(x, y) \notin \bigcap \mathcal{U}$. Esto prueba que $\bigcap \mathcal{U} = \Delta$.

Supongamos ahora que $\bigcap \mathcal{U} = \Delta$ y veamos que $X$ es un espacio de Hausdorff. Dados dos puntos $x \neq y$ en $X$, existe $V \in \mathcal{U}$ tal que $(x, y) \notin V$. Sea $W$ otra banda en $X$ tal que $2W \subset V$. Entonces $B_W(x)$ y $B_W(y)$ son entornos disjuntos de $x$ e $y$, pues si existiera un punto $z$ en la intersección, sería $d(x, z) < W$, $d(y, z) < W$, luego $d(x, y) < W + W \subset V$, contradicción. ■ 13

---

**Interiores y clausuras** Vamos a probar un resultado técnico del que deduciremos varias consecuencias de interés:

**Teorema 2.11** *Si $X$ es un espacio uniforme, $A \subset X \times X$ y $V$ es una banda en $X$, entonces el conjunto $V + A + V$ es un entorno de $A$ y*

$$\overline{A} = \bigcap_{V \in \mathcal{U}} (V + A + V).$$

DEMOSTRACIÓN: Si $(x, y) \in V + A + V$, esto significa que existen $p, q \in X$ tales que $(x, p) \in V$, $(p, q) \in A$, $(q, y) \in V$, pero esto a su vez equivale a que $(x, y) \in B_V(p) \times B_V(q)$. Por lo tanto,

$$A \subset \bigcup_{(p,q) \in A} (B_V(p) \times B_V(q)) \subset V + A + V,$$

y, como cada $B_V(p) \times B_V(q)$ es un entorno de $(p, q)$, tenemos que $A$ está contenido en el interior de la unión.

Por otra parte, $(x, y) \in V + A + V$ equivale también a que existe un punto $(p, q) \in A \cap (B_V(x) \times B_V(y)) \neq \varnothing$, pero, al variar $V$, el producto $B_V(x) \times B_V(y)$ recorre una base de entornos de $(x, y)$, luego $(x, y)$ está en la intersección del enunciado si y sólo si todos sus entornos cortan a $A$, es decir, si y sólo si está en $\overline{A}$. ■

A partir de aquí podemos obtener una expresión para la clausura de un subconjunto de $X$. Para ello conviene introducir la notación siguiente:

**Definición 2.12** Si $X$ es un espacio uniforme, $A \subset X$ y $V$ es una banda en $X$, definimos el *entorno uniforme* de $A$ determinado por $V$ como

$$V[A] = \bigcup_{a \in A} B_V(a),$$

es decir, el conjunto que resulta de cubrir $A$ con bolas de radio $V$ con centro en sus puntos.

**Teorema 2.13** *Si $X$ es un espacio uniforme, $A \subset X$ y $V$ es una banda en $X$, entonces $V[A]$ es un entorno de $A$ y*

$$\overline{A} = \bigcap_{V \in \mathcal{U}} V[A].$$

Demostración: Si $V$ es una banda en $X$, es fácil ver que

$$V + (A \times A) + V = V[A] \times V[A].$$

Usando 1.21 y el teorema anterior aplicado a $A \times A$, vemos que

$$\overline{A} \times \overline{A} = \overline{A \times A} = \bigcap_{V \in \mathcal{U}} (V[A] \times V[A]),$$

y usando que $x \in \overline{A}$ equivale a que $(x, x) \in \overline{A} \times \overline{A}$ obtenemos la igualdad del enunciado. ■

De aquí deducimos un hecho notable:

**Teorema 2.14** *Si $X$ es un espacio uniforme, los interiores (resp. las clausuras) en $X \times X$ de las bandas de $X$ son una base de su uniformidad. En particular, las bandas abiertas (resp. cerradas) forman una base de su uniformidad.*

Demostración: Si $V$ es una banda en $X$, existe otra banda $W$ tal que $3W \subset V$, y el teorema 2.11 aplicado a $A = V = W$ nos da que $3W$ es un entorno de $W$, luego $W \subset \mathring{V}$, luego $\mathring{V}$ es una banda de $V$. A partir de aquí es inmediato que los interiores de las bandas forman una base.

Por otra parte, el teorema anterior nos da que $\overline{W} \subset 3W \subset V$, luego toda banda contiene a la clausura de otra, y así las clausuras forman también una base. ■

Así pues, al tomar bandas de un espacio uniforme no perdemos generalidad si las tomamos abiertas. Por ejemplo, más arriba hemos señalado que las bolas definidas por una banda no tienen por qué ser abiertas, pero es fácil ver que si una banda $V$ es abierta (resp. cerrada), entonces las bolas $B_V(x)$ son abiertas (resp. cerradas).

En efecto, basta tener en cuenta que la aplicación $i : X \longrightarrow X \times X$ dada por $y \mapsto (x, y)$ es continua, y que $B_V(x) = i^{-1}[V]$.

A su vez, si $A \subset X$ es un conjunto arbitrario, el entorno $V[A]$ es abierto, pues es unión de bolas abiertas. En cambio, aunque $V$ sea cerrada, esto no implica necesariamente que $V[A]$ sea cerrado. Veamos algunas aplicaciones:

**Teorema 2.15** *Todo espacio uniforme $T_0$ es $T_3$.*

Demostración: Por el teorema 2.10 un espacio uniforme $T_0$ es $T_2$, en particular $T_1$, y todo punto $x$ tiene una base de entornos cerrados, pues basta considerar la base de entornos formada por las bolas $B_V(x)$, donde $V$ recorre las bandas cerradas. ■

**Teorema 2.16** *Si $X$ es un espacio uniforme y $D \subset X$ es un subespacio denso, entonces las clausuras de las bandas de $D$ son una base de la uniformidad de $X$.*

Demostración: Si $V$ es una banda en $D$, existe una banda abierta $V'$ en $X$ tal que $V' \cap (D \times D) \subset V$, luego, usando 1.22,

$$V' \subset \overline{V}' = \overline{V' \cap (D \times D)} \subset \overline{V},$$

por lo que las clausuras de las bandas de $D$ son bandas de $X$. Recíprocamente, si $V'$ es una banda en $X$, existe otra banda cerrada $W \subset V'$, y $V = W \cap (D \times D)$ es una banda en $D$ tal que $\overline{V} = \overline{W \cap (D \times S)} \subset W \subset V'$. ■

**Teorema 2.17** *Sea $X$ un conjunto en el que hay definidas dos uniformidades $\mathcal{U}_1$, $\mathcal{U}_2$ que inducen topologías $\mathcal{T}_2 \subset \mathcal{T}_1$. Sea $D \subset X_1$ un subconjunto denso tal que $\mathcal{U}_{1D} \subset \mathcal{U}_{2D}$. Entonces $\mathcal{U}_1 \subset \mathcal{U}_2$.*

Demostración: Sea $V \in \mathcal{U}_1$ una banda cerrada (vamos a usar que, según el teorema 2.14, las bandas cerradas son una base de $\mathcal{U}_1$). Entonces tenemos que $V \cap (D \times D) \in \mathcal{U}_{1D} \subset \mathcal{U}_{2D}$, luego, por 2.14, existe una banda abierta $W \in \mathcal{U}_2$ tal que $W \cap (D \times D) \subset V \cap (D \times D)$.

En principio, $W$ es abierta en $X_2 \times X_2$, es decir, respecto de la topología $\mathcal{T}_2$ inducida por $\mathcal{U}_2$, pero por hipótesis también lo es en $X_1 \times X_1$, y $V$ es cerrada también en $X_1 \times X_1$, luego, como $D \times D$ es denso en $X_1 \times X_1$, el teorema 1.22 nos da que

$$W \subset \overline{W} = \overline{W \cap (D \times D)} \subset \overline{V} = V,$$

luego $V \in \mathcal{U}_2$. ■

En particular, si dos uniformidades inducen la misma topología y coinciden en un subespacio denso, necesariamente son iguales.

Terminamos con un resultado elemental sobre clausuras que necesitaremos más adelante:

**Teorema 2.18** *Sea $A$ un subconjunto de un espacio uniforme $X$ y $V$ una banda en $X$ tal que $d(A) < V$. Entonces $d(\overline{A}) < 3V$.*

Demostración: Si $x$, $y \in \overline{A}$, entonces $A \cap B_V(x) \neq \varnothing$ y $A \cap B_V(y) \neq \varnothing$. Sean $u$, $v \in A$ tales que $d(x,u) < V$ y $d(y,v) < V$. Como $d(A) < V$, también $d(u,v) < V$, luego en total $d(x,y) < 3V$. ■ 18

---

**Continuidad uniforme** La continuidad uniforme en espacios métricos es un concepto métrico y no topológico, pues exige comparar grados de proximidad a puntos distintos, cosa que la topología no determina, pero en realidad es un concepto uniforme. De hecho, la estructura de espacio uniforme (introducida por Weil en 1938) está pensada precisamente para capturar el concepto de "continuidad uniforme" en espacios no necesariamente metrizables.

En efecto, observemos que la definición de continuidad uniforme de una aplicación entre espacios métricos equivale a que, para todo $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $V_\delta \subset (f \times f)^{-1}[V_\epsilon]$, lo cual nos lleva inmediatamente a la definición general:

**Definición 2.19** Sean $X$, $Y$ espacios uniformes. Una aplicación $f : X \longrightarrow Y$ es *uniformemente continua* si para toda banda $V$ de $Y$ existe una banda $U$ en $X$ tal que para todo $x$, $y \in X$ tales que $d(x, y) < U$ se cumple $d(f(x), f(y)) < V$ o, equivalentemente, si $(f \times f)^{-1}[V] \in \mathcal{U}_X$.

Una aplicación $f : X \longrightarrow Y$ es un *homeomorfismo uniforme* si es biyectiva y tanto $f$ como $f^{-1}$ son uniformemente continuas. En tal caso tenemos una biyección entre las uniformidades que respeta las operaciones conjuntistas y, por consiguiente, los espacios son indistinguibles. Si existe un homeomorfismo uniforme entre dos espacios $X$ e $Y$ diremos que son *uniformemente homeomorfos*.

Así, un homeomorfismo uniforme hace corresponder biunívocamente las bandas de los dos espacios que relaciona, por lo que conservan todas las propiedades definibles a partir de una uniformidad. En otras palabras, si los conceptos y resultados topológicos son los que se conservan por homeomorfismos, los conceptos y resultados uniformes son los que se conservan por homeomorfismos uniformes.

Veamos ahora algunos hechos elementales sobre aplicaciones uniformemente continuas. Notemos que una aplicación es uniformemente continua si podemos aproximar (uniformemente) sus imágenes sin más que aproximar los puntos en una misma cantidad válida para todos ellos.

1. *Toda aplicación uniformemente continua es continua. En particular un homeomorfismo uniforme es un homeomorfismo.*

   En efecto, sea $f : X \longrightarrow Y$ una aplicación uniformemente continua y $G$ un abierto en $Y$. Si $x \in f^{-1}(G)$, tenemos que $f(x) \in G$, luego existe una banda $V$ en $Y$ tal que $B_V(f(x)) \subset G$. Tomemos $U = (f \times f)^{-1}(G)$, que es una banda en $X$ que cumple además $B_V(x) \subset f^{-1}(G)$, pues si $y \in B_V(x)$ entonces $d(x, y) < U$, luego $d(f(x), f(y)) < V$ y así $f(y) \in B_V(f(x)) \subset G$, $y \in f^{-1}(G)$. En consecuencia $f^{-1}(G)$ es abierto y $f$ es continua.

2. *La composición de aplicaciones uniformemente continuas es uniformemente continua.*

3. *Toda aplicación constante es uniformemente continua.*

4. *Si $X$ es un espacio uniforme e $Y \subset X$, la inclusión $i : Y \longrightarrow X$ es uniformemente continua.*

   En efecto, las bandas de $\mathcal{U}_Y$ son precisamente las antiimágenes por $i \times i$ de las bandas de $\mathcal{U}$.

   Notemos que, como consecuencia de este hecho, la restricción a un subespacio de una aplicación uniformemente continua es uniformemente continua, ya que resulta de componer la aplicación con la inclusión.

5. *Si $f : X \longrightarrow Y$ es uniformemente continua e $Y$ es subespacio de $Z$, también $f : X \longrightarrow Z$ es uniformenente continua y viceversa.*

6. *Las proyecciones* $p_i : \prod\limits_{i\in I} X_i \longrightarrow X_i$ *en un producto de espacios uniformes son uniformemente continuas.*

   En efecto, las antiimágenes de las bandas de los factores por las proyecciones son bandas básicas, luego las proyecciones son uniformemente continuas.

7. Una aplicación $f : X \longrightarrow \prod\limits_{i\in I} X_i$ es uniformemente continua si y sólo si lo son sus funciones coordenadas $f_i = f \circ p_i$.

8. Si $\{f_i\}_{i\in I}$ es una familia de aplicaciones $f_i : X_i \longrightarrow Y_i$ uniformemente continuas entre espacios uniformes, entonces $f = \prod\limits_{i\in I} f_i : \prod\limits_{i\in I} X_i \longrightarrow \prod\limits_{i\in I} Y_i$ dada por $f(x) = \{f_i(x_i)\}_{i\in I}$ es uniformemente continua. 28

---

## 2.2 Pseudométricas uniformes

Hasta ahora hemos visto que muchos resultados sobre espacios métricos pueden enunciarse, más en general, para espacios pseudométricos, pero no hemos visto el interés de esta generalización. Ahora vamos a ponerlo de manifiesto, porque vamos a probar que toda uniformidad puede ser descrita en términos de pseudométricas, y esta descripción aproxima el tratamiento de los espacios uniformes al de los espacios métricos. Concretamente, las pseudométricas ligadas a un espacio uniforme son las pseudométricas uniformemente continuas:

**Definición 2.20** Si $X$ es un espacio uniforme, llamaremos *pseudométricas uniformes* de $X$ a las pseudométricas $\rho : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ que son uniformemente continuas.

Las pseudométricas uniformes admiten una caracterización más simple que la definición general de aplicación uniformemente continua:

**Teorema 2.21** *Una pseudométrica $\rho : X\times X \longrightarrow \mathbb{R}$ en un espacio uniforme $X$ es uniforme si y sólo si para todo $\epsilon > 0$ existe una banda $V$ en $X$ tal que si $d(x, y) < V$ entonces $\rho(x, y) < \epsilon$.*

Demostración: Recordemos que, según el teorema 9.2, toda pseudométrica satisface la desigualdad

$$|\rho(x, y) - \rho(x', y')| \leq \rho(x, x') + \rho(y, y').$$

Si $\rho$ cumple la condición del enunciado, dado $\epsilon > 0$, existe una banda $V$ en $X$ tal que si $d(x, y) < V$, entonces $\rho(x, y) < \epsilon/2$, por lo que si $d(x, x') < V$ y $d(x', y') < V$, en virtud de la desigualdad anterior, $|\rho(x, y) - \rho(x', y')| < \epsilon$, y esto prueba que $\rho$ es uniformemente continua.

Recíprocamente, si una pseudométrica $\rho$ es uniformemente continua, para cada $\epsilon > 0$ existe una banda $V$ en $X$ tal que si $d(x,x') < V$ y $d(y,y') < V$, entonces $|\rho(x,y) - \rho(x',y')| < \epsilon$. Entonces, si $d(x,y) < V$, tomamos $x' = y' = y$ y se cumple $d(x,x') < V$, $d(y,y') < V$, luego $\rho(x,y) < \epsilon$. ■

**Ejemplo** Obviamente, toda pseudométrica uniforme es continua, pero el recíproco no es cierto. Existen pseudométricas continuas que no son uniformemente continuas. Basta considerar $\rho : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $\rho(x,y) = |x^2 - y^2|$. Claramente es continua, pero no es uniforme para la uniformidad usual de $\mathbb{R}$ (la inducida por la métrica). Si lo fuera, dado $\epsilon = 1$, existiría un $\delta > 0$ tal que si $d(x,y) < V_\delta$ entonces $\rho(x,y) < 1$, pero esto equivale a que si $|x-y| < \delta$, entonces $|x+y||x-y| < 1$. En particular, tomando $y = x + \delta/2$, tendría que cumplirse $|2x + \delta/2|\delta/2 < 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$, lo cual es obviamente falso. ■

Según anunciábamos, toda uniformidad puede definirse especificando una familia de pseudométricas. En primer lugar especificamos en qué sentido unas pseudométricas determinan una uniformidad:

**Teorema 2.22** *Sea $X$ un conjunto y $\mathcal{P}$ una familia de pseudométricas en $X$. Entonces los conjuntos*

$$V(F,\epsilon) = \{(x,y) \in X \times X \mid \rho(x,y) < \epsilon \text{ para todo } \rho \in F\},$$

*donde $F$ recorre los subconjuntos finitos de $\mathcal{P}$ y $\epsilon > 0$, forman la base de una uniformidad en $X$ respecto de la cual todas las pseudométricas de $\mathcal{P}$ son uniformes. Dicha uniformidad es de Hausdorff si y sólo si para cada par de puntos $x \neq y$ en $X$ existe $\rho \in \mathcal{P}$ tal que $\rho(x,y) > 0$.*

Demostración: Es obvio que los conjuntos $V(F,\epsilon)$ son bandas en $X$, así como que

$$V(F_1 \cup F_2, \min\{\epsilon_1, \epsilon_2\}) \subset V(F_1,\epsilon_1) \cap V(F_2,\epsilon_2).$$

Además, $2V(F,\epsilon/2) \subset V(F,\epsilon)$, luego en efecto las bandas indicadas son la base de una uniformidad $\mathcal{U}$ en $X$, respecto a la cual son obviamente uniformes. Además,

$$\bigcap \mathcal{U} = \{(x,y) \in X \times X \mid \rho(x,y) = 0 \text{ para todo } \rho \in \mathcal{P}\}.$$

La uniformidad será de Hausdorff si y sólo si esta intersección es la diagonal $\Delta$, lo cual equivale claramente a la condición indicada en el enunciado. ■

**Definición 2.23** Si $\mathcal{P}$ es una familia de pseudométricas en un conjunto $X$, llamaremos *uniformidad generada por* $\mathcal{P}$ a la uniformidad dada por el teorema anterior, que claramente es la menor uniformidad respecto de la cual las pseudométricas de $\mathcal{P}$ son uniformes.

Vamos a probar que toda uniformidad está generada por sus pseudométricas uniformes. Para ello tenemos que construir pseudométricas uniformes y la construcción es un tanto técnica. El resultado central es el teorema siguiente:

**Teorema 2.24** *Sea $X$ un espacio uniforme y $\{V_n\}_{n=0}^{\infty}$ una sucesión de bandas de $X$ de manera que $V_0 = X \times X$ y $3V_{n+1} \subset V_n$. Entonces existe una pseudométrica $\rho$ en $X$ tal que para todo $n \geq 1$ se cumple*

$$\{(x, y) \in X \times X \mid \rho(x, y) < 1/2^n\} \subset V_n \subset \{(x, y) \in X \times X \mid \rho(x, y) \leq 1/2^n\}.$$

*En particular $\rho$ es una pseudométrica uniforme.*

Demostración: Dado un par $(x, y) \in X \times X$ consideramos todas las sucesiones finitas $x_0, \ldots, x_k$ de puntos de $X$ tales que $x_0 = x$, $x_k = y$. Definimos $\rho(x, y)$ como el ínfimo de las cantidades $1/2^{i_1} + \cdots + 1/2^{i_k}$ tales que $(x_{j-1}, x_j) \in V_{i_j}$.

Es claro que $\rho$ es una pseudométrica. Observemos que, como $(x, x) \in V_i$ para todo $i$, resulta que $\rho(x, x) \leq 1/2^i$ para todo $i$, con lo que $\rho(x, x) = 0$. Por otra parte $\rho(x, z)$ es menor o igual que el ínfimo de las cantidades citadas antes restringidas a sucesiones con un punto $y$ entre sus términos, y esta cantidad es precisamente $\rho(x, y) + \rho(y, z)$.

Se cumple que $V_n \subset \{(x, y) \in X \times X \mid \rho(x, y) \leq 1/2^n\}$, ya que si $(x, y) \in V_n$, entonces $x_0 = x$, $x_1 = y$ es una de las sucesiones consideradas cuya cantidad asociada es $1/2^n$.

Falta demostrar que si $\rho(x, y) < 1/2^i$ entonces $(x, y) \in V_i$. Para ello probaremos que para toda sucesión $x_0, \ldots, x_k$ tal que

$$(x_{j-1}, x_j) \in V_{i_j} \quad \text{y} \quad 1/2^{i_1} + \cdots + 1/2^{i_k} < 1/2^i$$

se cumple que $(x_0, x_k) \in V_i$. Haremos la prueba por inducción sobre $k$.

Si $k = 1$ tenemos $1/2^{i_1} < 1/2^i$, luego $i < i_1$ y por tanto $(x_0, x_1) \in V_{i_1} \subset V_i$.

Si $m > 1$ y la propiedad se cumple para todo $k < m$, tomemos una sucesión $x_0, \ldots, x_m$ tal que $(x_{j-1}, x_j) \in V_{i_j}$ y

$$1/2^{i_1} + \cdots + 1/2^{i_m} < 1/2^i. \tag{2.1}$$

O bien $1/2^{i_1} < 1/2^{i+1}$ o bien $1/2^{i_m} < 1/2^{i+1}$, pues en otro caso la suma excedería de $1/2^i$. Por simetría podemos suponer que se da la primera desigualdad.

Sea entonces $n$ el mayor natural menor que $m$ tal que

$$1/2^{i_1} + \cdots + 1/2^{i_n} < 1/2^i. \tag{2.2}$$

Si $n < m - 1$ se cumple que $1/2^{i_1} + \cdots + 1/2^{i_{n+1}} \geq 1/2^{i+1}$ y por (2.1), ha de ser

$$1/2^{i_{n+1}} + \cdots + 1/2^{i_m} < 1/2^{i+1}. \tag{2.3}$$

Aplicando la hipótesis de inducción a (2.2) y (2.3) resulta que $(x_0, x_n) \in V_{i+1}$ y $(x_{n+1}, x_m) \in V_{i+1}$. Además, como $1/2^{i_{n+1}} < 1/2^i$ , resulta que $i + 1 \leq i_{n+1}$, de donde $(x_n, x_{n+1}) \in V_{i_{n+1}} \subset V_{i+1}$, luego $(x_0, x_m) \in 3V_{i+1} \subset V_i$.

Si $n = m - 1$ por hipótesis de inducción tenemos $(x_0, x_{m-1}) \in V_{i+1}$, y como $1/2^{i_m} < 1/2^i$, también $(x_{m-1}, x_m) \in V_{i_m} \subset V_{i+1}$, luego $(x_0, x_m) \in 2V_{i+1} \subset V_i$.

■

Para muchas de las aplicaciones basta el siguiente caso particular del teorema que acabamos de probar.

**Teorema 2.25** *Sea $X$ un espacio uniforme y $V$ una banda en $X$. Existe una pseudométrica uniforme $\rho$ tal que $\{(x,y) \in X \times X \mid \rho(x,y) < 1\} \subset V$.*

Demostración: Sea $V_0 = X \times X$, $V_1 = V$ y completemos una sucesión $\{V_n\}_n$ en las hipótesis del teorema anterior. Obtenemos así una pseudométrica $\rho_0$ de manera que $\rho = 2\rho_0$ cumple lo pedido. ■

Como consecuencia:

**Teorema 2.26** *Toda uniformidad en un conjunto $X$ está generada por sus pseudométricas uniformes.*

Demostración: Es claro que las bandas de la uniformidad generada por las pseudométricas uniformes de $X$ (es decir, las consideradas 2.22) son bandas de la uniformidad dada en $X$. Recíprocamente, por el teorema 2.25, toda banda de la uniformidad de $X$ contiene una banda $V(\{\rho\}, 1)$ de la uniformidad generada por las pseudométricas uniformes de $X$, luego es una banda de dicha uniformidad. ■

Ahora podemos dar una condición necesaria y suficiente muy sencilla para que una uniformidad sea *metrizable,* es decir, para que sea la uniformidad generada por una métrica. Un poco más en general, podemos determinar cuándo es *pseudometrizable,* es decir, cuándo la uniformidad está generada por una única pseudométrica.

**Teorema 2.27** *Un espacio (de Hausdorff) uniforme es pseudometrizable (metrizable) si y sólo si su uniformidad tiene una base numerable.*

Demostración: Si la uniformidad de un espacio uniforme $X$ está generada por la pseudométrica $\rho$, entonces tiene por base a $\{V(\{\rho\}, 1/n)\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Supongamos ahora que $X$ es un espacio uniforme con una base numerable $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$. Sea $V_0 = X \times X$ y, si tenemos definida la banda $V_n$, tomemos una banda $V_{n+1}$ de la uniformidad tal que $3V_{n+1} \subset V_n$ y $V_{n+1} \subset U_n$. Entonces la pseudométrica $\rho$ en 2.24 genera claramente la uniformidad de $X$.

Si $X$ es un espacio de Hausdorff, entonces $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} V_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} U_n = \Delta$, de donde se sigue que $\rho$ es una métrica, pues si $\rho(x,y) = 0$, entonces $(x,y) \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} V_n = \Delta$, luego $x = y$. ■

Notemos que si $\rho$ es una pseudométrica uniforme en un espacio uniforme $X$, esto significa por definición que las bandas

$$\{(x,y) \in X \times X \mid \rho(x,y) < \epsilon\}$$

pertenecen a la uniformidad de $X$, y el teorema 2.25 prueba que (al variar $\rho$) son una base de la uniformidad (incluso si fijamos $\epsilon = 1$). Por otra parte, es claro que si $\rho$ es una pseudométrica uniforme en $X$ también lo es $2\rho$, por lo que las bandas

$$\{(x, y) \in X \times X \mid \rho(x, y) \leq 1\}$$

también forman una base.

En la sección 10.3 estudiamos las pseudométricas que definen las uniformidades de los grupos y espacios vectoriales topológicos. 345.

## 2.3 Completitud

La completitud de $\mathbb{R}$ (como espacio ordenado) tiene una caracterización en términos de convergencia de sucesiones que depende de su estructura de espacio métrico, pero no de su estructura de conjunto ordenado, lo que hace que sea aplicable a otros espacios métricos y, más en general, a espacios uniformes arbitrarios, lo cual tiene muchas consecuencias.

La idea básica es que un análisis detallado del conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales muestra que tiene infinitos "huecos" que hemos puesto de manifiesto en forma de subconjuntos no vacíos acotados superiormente que no tienen supremo. Sin embargo, otra forma de poner en evidencia la presencia de "huecos" en $\mathbb{Q}$ es a través del concepto de sucesión de Cauchy. Su definición para sucesiones de números racionales se generaliza inmediatamente al caso sucesiones en espacios métricos arbitrarios:

> Una sucesión $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ en un espacio métrico $M$ es *de Cauchy* si para todo $\epsilon > 0$ existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $m, n \geq n_0$, entonces $d(x_m, x_n) < \epsilon$.

Así, una sucesión es de Cauchy si sus términos se aproximan entre sí cada vez más, pero la definición no hace referencia a ningún posible límite. Por ejemplo, es fácil ver que toda sucesión de números racionales convergente a un número irracional es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{Q}$ que no converge en $\mathbb{Q}$, y la presencia de sucesiones de Cauchy no convergentes en un espacio métrico resulta ser una forma alternativa de señalar "huecos" en el espacio que no depende de ninguna relación de orden.

Antes de desarrollar esta idea conviene observar que el concepto de sucesión de Cauchy puede definirse en realidad en cualquier espacio uniforme:

**Definición 2.28** Una sucesión $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ en un espacio uniforme $X$ es *de Cauchy* si para toda banda $V$ en $X$ existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $m, n \geq n_0$, entonces $d(x_m, x_n) < V$.

Es obvio que basta con que la definición la cumplan las bandas de una base de la uniformidad, y a su vez esto muestra que en el caso de un espacio métrico la definición equivale a la que habíamos dado previamente.

Ahora bien, para trabajar con espacios uniformes arbitrarios, el concepto de "sucesión de Cauchy" se queda corto, y debe ser sustituido por el de "base de filtro de Cauchy":

Una base de filtro $\mathcal{B}$ en un espacio uniforme $X$ es *de Cauchy* si para toda banda $V$ en $X$ existe un $A \in \mathcal{B}$ tal que $d(A) < V$.

Es inmediato que una sucesión $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ en un espacio uniforme $X$ es de Cauchy si y sólo si lo es su base de filtro asociada, es decir, la base de filtro $\mathcal{B} = \{\{x_n \mid n \geq m\} \mid m \in \mathbb{N}\}$ formada por sus "colas". Esto hace que el teorema siguiente se cumpla en particular para sucesiones de Cauchy:

**Teorema 2.29** *Sea $X$ un espacio uniforme. Entonces*

1. *Toda base de filtro convergente en $X$ es de Cauchy.*
2. *Toda base de filtro de Cauchy con un punto adherente es convergente.*
3. *Si $f : X \longrightarrow Y$ es una aplicación uniformemente continua en un espacio uniforme $Y$ y $\mathcal{B}$ es una base de filtro de Cauchy en $X$, entonces $f[\mathcal{B}]$ es un filtro de Cauchy en $Y$.*

Demostración: 1) Supongamos que una base de filtro $\mathcal{B}$ converge al punto $x$. Dada una banda $V$ en $X$, existe otra $W$ tal que $2W \subset V$ y por hipótesis existe un $B \in \mathcal{B}$ tal que $B \subset B_W(x)$, luego $d(B) < V$.

2) Supongamos ahora que $\mathcal{B}$ es de Cauchy y que $x$ es un punto adherente. Sea $A$ un entorno de $x$. Existe una bola $B_V(x) \subset A$. Tomemos $2W \subset V$. Como $\mathcal{B}$ es de Cauchy, existe un conjunto $B \in \mathcal{B}$ tal que $d(B) < W$. Como $x$ es adherente a $\mathcal{B}$, se cumple que $x \in \overline{B}$, luego existe un $y \in B \cap B_W(x)$, y de aquí que $B \subset B_V(x) \subset A$, pues si $z \in B$ entonces

$$d(z, x) < d(z, y) + d(y, x) < W + W \subset V.$$

Esto prueba que $\mathcal{B}$ converge a $x$.

3) Sea $V$ es una banda en $Y$. Como $f$ es uniformemente continua tenemos que $W = (f^{-1} \times f^{-1})(V)$ es una banda en $X$, luego existe un $A \in \mathcal{B}$ tal que $d(A) < W$. Entonces $f(A) \in f[\mathcal{B}]$, pues $A \subset f^{-1}[f[A]]$, y claramente $d(f[A]) < V$. Esto prueba que $f[\mathcal{B}]$ es un filtro de Cauchy. ■

Notemos que la propiedad 2) para sucesiones de Cauchy afirma que si una sucesión de Cauchy tiene una subsucesión convergente, entonces la sucesión converge al mismo límite. Es ilustrativo dar una prueba directa de este hecho.

Así pues, toda sucesión / base de filtro convergente es de Cauchy y basta con que una sucesión / base de filtro de Cauchy tenga un punto adherente para que converja a él. La idea subyacente es que las sucesiones / bases de filtro de Cauchy "deberían" coincidir con las convergentes, de modo que la presencia de una sucesión / base de filtro de Cauchy no convergente delata la existencia de un "hueco" en el espacio correspondiente, pues muestra que existen puntos que se aproximan arbitrariamente entre sí sin aproximarse a ningún punto en particular. Esto nos lleva a las definiciones siguientes:

**Definición 2.30** Un espacio uniforme es *completo* si en él todo filtro de Cauchy es convergente, y es *sucesionalmente completo* si en él toda sucesión de Cauchy es convergente. Los $\mathbb{K}$-espacios normados completos se llaman *espacios de Banach*, los espacios prehilbertianos completos se llaman *espacios de Hilbert.*

Notemos que una base de filtro es de Cauchy si y sólo si lo es el filtro que genera, por lo que en un espacio uniforme completo toda base de filtro de Cauchy es convergente.

Es inmediato que todo espacio uniforme completo es sucesionalmente completo, y en espacios métricos se cumple el recíproco. Lo probamos en la sección 9.2 junto con otros resultados básicos, como la completitud de $\mathbb{R}$. 300

Veamos ahora que la completitud se conserva por productos:

**Teorema 2.31** *Un producto no vacío de espacios uniformes es completo si y sólo si lo son todos los factores.*

Demostración: Sea $X = \prod\limits_{i \in I} X_i$ un producto de espacios completos y llamemos $p_i : X \longrightarrow X_i$ a la proyección $i$-ésima. Si $F$ es un filtro de Cauchy en $X$, entonces cada $p_i[F]$ es un filtro de Cauchy en $X_i$, luego converge a un punto $x_i$ y, por tanto, $F$ converge al punto $x = (x_i)_{i \in I}$. Así pues, $X$ es completo.

Recíprocamente, si $X$ es completo y $x_0 \in X$, dado un filtro de Cauchy $F_0$ en un factor $X_{i_0}$, consideramos el filtro $F$ en $X$ que tiene por base los conjuntos de la forma

$$A^* = A_{i_0} \times \prod_{i \in I \setminus \{i_0\}} \{x_{0i}\}.$$

Es fácil ver que $F$ es un filtro de Cauchy en $X$, luego converge a un punto $x \in X$, y de aquí se sigue que $F_0$ converge a $x_{i_0}$. ■

Por otra parte, la completitud la heredan los subespacios cerrados:

**Teorema 2.32** *Sea $X$ un espacio uniforme. Entonces*

1. *Si $X$ es completo e $Y \subset X$ es cerrado entonces $Y$ es completo.*

2. *Si $Y \subset X$ es completo y $X$ es de Hausdorff, entonces $Y$ es cerrado en $X$.*

Demostración: 1) Si $F$ es un filtro de Cauchy en $Y$, es claro que $F$ es una base de filtro de Cauchy en $X$, luego converge a un punto que, al ser $Y$ cerrado, está en $Y$. Por lo tanto $F$ converge en $Y$.

2) Sea $x \in \overline{Y}$. Entonces existe una base de filtro en $Y$ convergente a $x$. Por 2.29 es de Cauchy y, por ser $Y$ completo, converge en $Y$, es decir, $x \in Y$. ■

He aquí algunos ejemplos de interés en torno a la completitud:

1. El primero es un ejemplo de que la propiedad de Hausdorff es necesaria en el segundo apartado del teorema anterior. Sea $X$ un espacio uniforme arbitrario, sea $J$ un conjunto no vacío, sea $j_0 \in J$ y consideremos en $X^* = X \times J$ la uniformidad que tiene por base a las bandas

$$V^* = \{((x,i),(y,j)) \in X^* \times X^* \mid (x,y) \in V\}.$$

Es inmediato que estas bandas son ciertamente la base de una uniformidad en $X^*$, y la aplicación $i : X \longrightarrow X^*$ dada por $i(x) = (x, j_0)$ es un homeomorfismo uniforme en su imagen, pues

$$V^* \cap (i[X] \times i[X]) = \{((x,j_0),(y,j_0)) \mid (x,y) \in V\} = (i \times i)[V].$$

Así $i[X]$ es un subespacio completo de $X^*$ (y será completo o de Hausdorff si $X$ lo es), pero no es cerrado en $X^*$. De hecho, es denso, pues un abierto básico en $X^*$ es $B_{V^*}((x,j))$ y se cumple que $(x,j_0) \in i[X] \cap B_{V^*}((x,j))$.

2. El ejemplo A.52 muestra un espacio vectorial topológico sucesionalmente completo que no es completo.

3. Es muy importante tener presente que la completitud es una propiedad uniforme, no topológica, es decir, que depende de la uniformidad considerada en un espacio uniforme dado y no sólo de la topología que ésta induce.

   Así, $\mathbb{R}$ y $]0,1[$ son espacios topológicos homeomorfos (por ejemplo, por [TC 2.51]), pero $\mathbb{R}$ es completo con la distancia usual y $]0,1[$ no lo es (porque no es cerrado en $\mathbb{R}$).

   Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow\, ]0,1[$ es una semejanza (y en particular un homeomorfismo), la distancia en $\mathbb{R}$ dada por $d(x,y) = |f(x) - f(y)|$ es equivalente a la usual, pero $\mathbb{R}$ no es completo con ella, pues la sucesión $\{n\}_{n=0}^{\infty}$ es de Cauchy (porque lo es su imagen en $]0,1[$) y no es convergente (porque no lo es su imagen, que converge a 1, luego no converge en $]0,1[$).

4. Otro ejemplo sobre el mismo asunto: Es inmediato que todo espacio uniforme discreto es completo, pues es metrizable y si $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy, finalmente debe cumplir $d(x_m, x_n) < \Delta$, es decir, $x_m = x_n$, por lo que la sucesión es finalmente constante y, por consiguiente, convergente.

   Ahora bien, esto hay que entenderlo debidamente: el conjunto

$$A = \{1/n \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$$

   no es completo, pues no es cerrado en $\mathbb{R}$ o, explícitamente, porque $\{1/n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy no convergente en $A$, pero es claramente un espacio métrico discreto.

   Esto no contradice a la primera afirmación que hemos hecho en este ejemplo, porque $A$ es un espacio métrico discreto como espacio topológico, pero no como espacio uniforme. La uniformidad de $A$ no es discreta. No hay ninguna banda $V$ en $\mathbb{R}$ tal que $V \cap (A \times A) = \Delta$. Si la hubiera, podríamos tomarla de la forma $V_\epsilon$ y eso significaría que $d(x, y) \geq \epsilon$ siempre que $x \neq y$ son puntos de $A$, lo cual es falso. La uniformidad de $A$ es una uniformidad distinta de la discreta que induce la topología discreta.

5. Es evidente que si dos espacios son uniformemente homeomorfos y uno es completo, el otro también lo es. Sin embargo, el ejemplo siguiente muestra que una imagen uniformemente continua de un espacio métrico completo no tiene por qué ser completa:

   Consideremos $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\}$, que es un espacio métrico completo (por ejemplo, con la distancia $d_\infty$), porque es cerrado en $\mathbb{R}^2$. Sea $p : C \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ la proyección en la primera coordenada. Tenemos que $p$ es continua y suprayectiva y, como cumple:

   $$d(p(x, y), p(x', y')) = |x - x'| \leq d_\infty((x, y), (x', y')),$$

   evidentemente es uniformemente continua. Pero $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ no es completo, pues no es cerrado en $\mathbb{R}$.

Una consecuencia notable de la completitud de $\mathbb{R}$ es que las series infinitas absolutamente convergentes son convergentes. Éste es un resultado clásico que se usa constantemente en el análisis matemático, pero también es muy útil en la topología general a la hora de construir aplicaciones continuas y otros objetos topológicos. En la sección 9.4 presentamos una versión general de este hecho junto con algunas aplicaciones. 323

**Compleción de un espacio uniforme** Vamos a probar que todo espacio uniforme se puede sumergir uniformemente como subespacio denso en un espacio uniforme completo. Para ello conviene introducir el concepto de filtro de Cauchy minimal:

**Definición 2.33** Si $X$ es un espacio uniforme, un filtro de Cauchy $F$ en $X$ es *minimal* si no contiene estrictamente a ningún otro filtro de Cauchy.

**Teorema 2.34** *Si $X$ es un espacio uniforme, cada filtro de Cauchy $F$ en $X$ contiene un único filtro de Cauchy minimal $F_0$. Si $\mathcal{B}$ es una base de $F$ y $\mathcal{B}^*$ es una base de la uniformidad de $X$, entonces una base de $F_0$ la forman los conjuntos $V[A]$, para cada $V \in \mathcal{B}^*$ y cada $A \in \mathcal{B}$.*

Demostración: Si $V$, $V' \in \mathcal{B}^*$ y $A$, $A' \in \mathcal{B}$, entonces existen $V'' \in \mathcal{B}^*$ y $A'' \in \mathcal{B}$ tales que $V'' \subset V \cap V'$, $A'' \subset A \cap A'$, con lo que $V''[A''] \subset V[A] \cap V'[A']$. Esto prueba que los conjuntos $V(A)$ son ciertamente la base de un filtro $F_0$ en $X$. Además, como $A \subset V[A]$, tenemos que $V[A] \in F$, luego $F_0 \subset F$.

Además, si $W$ es una banda en $X$, podemos tomar otra $V \in \mathcal{B}^*$ tal que $3V \subset W$, así como un $A \in \mathcal{B}$ tal que $d(A) < V$. Entonces $d(V(A)) < 3V \subset W$, pues si $y$, $y' \in V[A]$, existen $x$, $x' \in A$ tales que $(y, x) \in V$, $(x, x') \in V$, $(x', y') \in V$, luego $(y, y') \in 3V$. Esto prueba que $F_0$ es un filtro de Cauchy.

Finalmente, supongamos que $F_1 \subset F$ es otro filtro de Cauchy. Si $A \in \mathcal{B}$ y $V \in \mathcal{B}^*$, podemos tomar $A' \in F_1$ tal que $d(A') < V$. Como $A' \in F$, existe $x \in A \cap A'$, y entonces $A' \subset V[A]$, pues si $y \in A'$ entonces $(x, y) \in V$. Por lo tanto $V(A) \in F_1$, luego $F_0 \subset F_1$. ■

Como consecuencia:

**Teorema 2.35** *Todo filtro de Cauchy minimal en un espacio uniforme tiene una base formada por conjuntos abiertos.*

Demostración: Sea $F$ un filtro de Cauchy minimal en un espacio uniforme $X$. Entonces $F$ coincide con el filtro $F_0$ descrito en el teorema anterior, donde, en virtud del teorema 2.25, podemos tomar como base $\mathcal{B}^*$ el conjunto de las bandas abiertas en $X$, de modo que los conjuntos $V[A]$ son abiertos y forman una base de $F$. ■

De aquí podemos deducir un resultado que usaremos en varias ocasiones: si $D$ es un subespacio denso de un espacio uniforme $X$, para que $X$ sea completo, es decir, para que todos los filtros de Cauchy en $X$ converjan, es suficiente con que lo hagan los filtros de Cauchy en $D$:

**Teorema 2.36** *Sea $X$ un espacio uniforme y $D \subset X$ un subespacio denso tal que todo filtro de Cauchy en $D$ converge en $X$. Entonces $X$ es completo.*

Demostración: Sea $F$ un filtro de Cauchy en $X$ y sea $F_0 \subset F$ el filtro de Cauchy minimal que contiene. Como $F_0$ tiene una base formada por abiertos, resulta que $\{A \cap D \mid A \in F_0\}$ es un filtro de Cauchy en $D$, luego converge a un cierto $x \in X$, luego también $F_0$ converge a $x$, y lo mismo vale para $F$. ■

El teorema siguiente pone de manifiesto el interés de los filtros de Cauchy minimales, pues de él se desprende que si un espacio uniforme $X$ es un subconjunto denso de otro espacio uniforme completo $\overline{X}$, entonces los puntos de $\overline{X}$ están en correspondencia biunívoca con los filtros de Cauchy minimales de $X$.

**Teorema 2.37** *Sea $Y$ un espacio uniforme y $X \subset Y$. Si $x \in \overline{X}$, el conjunto $F_x = \{U \cap X \mid U \text{ es un entorno de } x \text{ en } Y\}$ es el único filtro de Cauchy minimal en $X$ que converge a $x$.*

Demostración: Es inmediato que $F_x$ es un filtro en $X$ y es de Cauchy porque, de hecho, converge a $x$ (todo entorno de $x$ está en el filtro que $F_x$ genera en $Y$). Es minimal, pues si $F_0 \subset F_x$ es un filtro de Cauchy, entonces $x \in \bigcap\limits_{A \in F_x} \overline{A} \subset \bigcap\limits_{A \in F_0} \overline{A}$, luego $x$ es un punto adherente de $F_0$, luego $F_0$ converge a $x$, y esto implica que $F_x \subset F_0$ (si $U$ es un entorno de $x$, existe $A \in F_0$ tal que $A \subset U$, luego $A \subset U \cap X$, luego $U \cap X \in F_0$, luego $F_x \subset F_0$). Así pues, $F_x$ es minimal.

Por el mismo argumento, si $F_0$ es cualquier filtro de Cauchy en $X$ que converge a $x$ tenemos que $F_x \subset F_0$, luego si $F_0$ es minimal tiene que ser $F_x$. ■

**Definición 2.38** Si $X$ es un espacio uniforme, llamamos $\hat{X}$ al conjunto de todos los filtros de Cauchy minimales de $X$. Para cada banda $V$ en $X$, definimos $\tilde{V}$ como el conjunto de todos los pares $(F_1, F_2) \in \hat{X} \times \hat{X}$ tales que existe $A \in F_1 \cap F_2$ tal que $d(A) < V$.

Definimos $i : X \longrightarrow \hat{X}$ como la aplicación que a cada $x \in X$ le asigna el filtro formado por todos sus entornos (que es un filtro de Cauchy minimal convergente a $x$ en virtud del teorema anterior, aplicado a $X = Y$). Vamos a probar que las bandas $\tilde{V}$ forman una base de una uniformidad de Hausdorff en $\hat{X}$. Más aún:

**Teorema 2.39** *Si $X$ es un espacio uniforme, los conjuntos $\tilde{V}$ que acabamos de definir, donde $V$ recorre las bandas de $X$, son la base de una uniformidad de Hausdorff completa en $\hat{X}$, de modo que $i : X \longrightarrow \hat{X}$ es uniformemente continua e $i[X]$ es denso en $\hat{X}$. Si $X$ es de Hausdorff, entonces $i : X \longrightarrow i[X]$ es un homeomorfismo uniforme.*

*Si $f : X \longrightarrow Y$ es cualquier aplicación uniformemente continua de $X$ en un espacio uniforme de Hausdorff completo $Y$, existe una única aplicación uniformemente continua $g : \hat{X} \longrightarrow Y$ que hace conmutativo el diagrama siguiente:*

$$\begin{tikzcd}
\hat{X} \arrow[r, "g"] & Y \\
X \arrow[u, "i"] \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

Demostración: Si $V$ es una banda en $X$ y $F \in \hat{X}$, existe $A \in F = F \cap F$ tal que $d(A) < V$, y esto implica que $(F, F) \in \tilde{V}$. Por otra parte, es evidente que $(F_1, F_2) \in \tilde{V}$ si y sólo si $(F_2, F_1) \in \tilde{V}$, luego $\tilde{V}$ es una banda en $\hat{X}$.

Vamos a probar que estas bandas cumplen las condiciones del teorema 2.7:

Si $V$ y $V'$ son bandas en $X$, se cumple que $\widetilde{V \cap V'} \subset \tilde{V} \cap \tilde{V}'$, pues si $(F_1, F_2) \in \widetilde{V \cap V'}$, existe un $A \in F_1 \cap F_2$ tal que $d(A) < V \cap V'$, lo que implica que $(F_1, F_2) \in \tilde{V} \cap \tilde{V}'$.

Si $V$ es una banda en $X$, tomamos otra banda $W$ tal que $2W \subset V$. Entonces, $2\tilde{W} \subset \tilde{V}$, pues si $(F_1, F_2)$, $(F_2, F_3) \in \tilde{W}$, existen $A \in F_1 \cap F_2$, $B \in F_2 \cap F_3$ tales que $d(A) < W$, $d(B) < W$, y entonces $A \cup B \in F_1 \cap F_3$ y $d(A \cup B) < 2W \subset V$, (pues existe $u \in A \cap B$ y si $x, y \in A \cup B$, entonces $(x, u) \in W$, $(u, y) \in W$) luego $(F_1, F_3) \in \tilde{V}$.

Así pues, las bandas $\tilde{V}$ generan ciertamente una uniformidad en $\hat{X}$, que es de Hausdorff, pues si $(F_1, F_2) \in \bigcap\limits_{V} \tilde{V}$, los conjuntos de la forma $A_1 \cup A_2$, con $A_1 \in F_1$, $A_2 \in F_2$ forman la base de un filtro $F_3$ en $X$, pues

$$(A_1 \cup A_2) \cap (B_1 \cup B_2) = (A_1 \cap (B_1 \cup B_2)) \cup (A_2 \cap (B_1 \cup B_2)),$$

y el primer conjunto está en $F_1$ y el segundo en $F_2$. Claramente $F_3 \subset F_1 \cap F_2$ y es de Cauchy, pues, para toda banda $V$, existe un $A \in F_1 \cap F_2$ tal que $d(A) < V$ y $A = A \cup A \in F_3$. Por la minimalidad de $F_1$ y $F_2$, tiene que ser $F_1 = F_3 = F_2$.

Veamos ahora que $i$ es uniformemente continua. Más aún, vamos a probar que si $V$ es una banda en $X$, entonces

$$(i \times i)^{-1}[\tilde{V}] \subset V \subset (i \times i)^{-1}[\widetilde{3V}].$$

La segunda inclusión implica la continuidad uniforme de $i$, pues si $V$ es una banda en $X$ y $3W \subset V$, entonces $W \subset (i \times i)^{-1}[\tilde{V}]$, luego $(i \times i)^{-1}[\tilde{V}]$ es una banda en $X$.

Si $(x, y) \in (i \times i)^{-1}[\tilde{V}]$, existe $A \in i(x) \cap i(y)$ tal que $d(A) < V$, pero $x$, $y \in A$, luego $(x, y) \in V$.

Si $(x, y) \in V$, entonces $A = B_V(x) \cup B_V(y) \in i(x) \cap i(y)$ y $d(A) < 3V$, luego $(i(x), i(y)) \in \widetilde{3V}$.

Observemos ahora que

$$\{(x, y) \in X \times X \mid i(x) = i(y)\} = \bigcap_V V,$$

por lo que $i$ es inyectiva si y sólo si $X$ es un espacio de Hausdorff.

En efecto, $i(x) = i(y)$ si y sólo si $x$ e $y$ tienen los mismos entornos en $X$, es decir, si y sólo si, para toda banda $V$ en $X$, se cumple que $y \in B_V(x)$, $x \in B_V(y)$, lo cual equivale a que $(x, y) \in V$.

Además, si $X$ es un espacio de Hausdorff, la relación $(i \times i)^{-1}[\tilde{V}] \subset V$ implica que $i^{-1}$ es uniformemente continua, pues $(i^{-1} \times i^{-1})^{-1}[V] = (i \times i)[V]$, luego $\tilde{V} \cap (i[X] \times i[X]) \subset (i \times i)[V] = (i^{-1} \times i^{-1})^{-1}[V]$.

Observemos ahora que si $F \in \hat{X}$ y $V$ es una banda en $X$, entonces, por el teorema 2.35 tenemos que el filtro $F$ tiene una base formada por conjuntos abiertos, luego contiene abiertos de diámetro menor que $V$. Si $A \in F$ es la unión de los interiores de los elementos de $F$ de diámetro menor que $V$, se cumple que $i[X] \cap B_{\tilde{V}}(F) = i[A]$.

En efecto, si $i(x) \in B_{\tilde{V}}(F)$, esto significa que $(i(x), F) \in \tilde{V}$, lo que a su vez equivale a que existe $U \in F$ que es un entorno de $x$ y $d(F) < V$, pero entonces $x \in \mathring{U} \subset A$, luego $x \in i[A]$. Recíprocamente, si $x \in A$, existe $U \in F$ tal que $x \in \mathring{U}$ y $d(U) < V$, luego $U \in i(x)$ y a de aquí que $(i(x), F) \in \tilde{V}$, luego $i(x) \in i[X] \cap B_{\tilde{V}}(F)$.

En particular $i[X] \cap B_{\tilde{V}}(F) \neq \varnothing$, lo cual prueba que $i[X]$ es denso en $\hat{X}$. Más aún, tenemos que $i[F] = \{i[A] \mid A \in F\} \subset i[X]$ es una base de filtro en $\hat{X}$ tal que todas las bolas $B_{\tilde{V}}(F)$ están en el filtro que genera en $\hat{X}$, por lo que $i[F]$ converge a $F$.

Veamos ahora que $\hat{X}$ es completo. Por el teorema 2.36 basta probar que todo filtro de Cauchy $\mathcal{F}$ en $i[X]$ converge en $\hat{X}$. Veamos que $i^{-1}[\mathcal{F}] = \{i^{-1}[A] \mid A \in \mathcal{F}\}$ es un filtro de Cauchy en $X$.

En efecto, obviamente es un filtro y, si $V$ es una banda en $X$, existe un $A \in \mathcal{F}$ tal que $d(A) < \tilde{V}$ y entonces $d(i^{-1}[A]) < V$, pues si $x$, $y \in i^{-1}[A]$, tenemos que $(i(x), i(y)) \in V$, luego $(x, y) \in (i \times i)^{-1}[\tilde{V}] \subset V$, según hemos probado más arriba.

Sea $F \subset i^{-1}[\mathcal{F}]$ un filtro de Cauchy minimal. Entonces $i[F] \subset i[i^{-1}[\mathcal{F}]] = \mathcal{F}$, y sabemos que $i[F]$ converge a $F$, luego $\mathcal{F}$ también converge a $F$, por la propia definición de convergencia.

Sólo falta probar la última parte del enunciado. Para ello consideramos una aplicación $f : X \longrightarrow Y$ uniformemente continua, donde $Y$ es un espacio uniforme de Hausdorff. Veamos en primer lugar que existe una única aplicación uniformemente continua $g_0 : i[X] \longrightarrow Y$ que hace conmutativo el diagrama análogo al del enunciado.

Recordemos que $i(x)$ es el filtro de todos los entornos de $x$, que converge a $x$. Como $f$ es continua, el filtro $f(i(x))$ converge a $f(x)$, y el límite es único porque $Y$ es un espacio de Hausdorff. Por lo tanto, podemos definir $g_0$ mediante $g_0(i(x)) = \operatorname{lím} f(i(x)) = f(x)$, con lo que $i \circ g_0 = f$. Obviamente $g_0$ es la única aplicación que cumple esto. Vamos a probar que es uniformemente continua.

Sea $V$ una banda en $Y$. Como $f$ es uniformemente continua, existe una banda $V_0$ en $X$ tal que $V_0 \subset (f \times f)^{-1}[V]$. Hemos probado que $(i \times i)^{-1}[\tilde{V}_0] \subset V_0$, luego $(i \times i)^{-1}[\tilde{V}_0] \subset (f \times f)^{-1}[V]$, de donde $\tilde{V}_0 \cap (i[X] \times i[X]) \subset (g_0 \times g_0)^{-1}[V]$.

Ahora, $g_0$ se extiende a una aplicación uniformemente continua $g : \hat{X} \longrightarrow Y$ en virtud del teorema siguiente, que completa la prueba del teorema. ■

**Teorema 2.40** *Sean $X$ e $Y$ espacios uniformes, donde $Y$ es completo, y sea $D$ un subespacio denso de $X$. Entonces toda aplicación uniformemente continua $f : D \longrightarrow Y$ se extiende a una aplicación uniformemente continua $\hat{f} : X \longrightarrow Y$.*

Demostración: Para cada $x \in X$ el conjunto

$$\{B_V(x) \cap D \mid V \text{ es una banda de } X\}$$

es una base de filtro de Cauchy en $D$. Si $F_x$ es el filtro que genera en $D$, entonces el teorema 2.29 nos da que $f[F_x]$ es un filtro de Cauchy en $Y$, que por completitud es convergente. Si $Y$ es un espacio de Hausdorff, su límite es único y lo llamamos $\hat{f}(x)$. En caso contrario tomamos como $\hat{f}(x)$ cualquier límite[1] de $f[F_x]$, salvo si $x \in D$, en cuyo caso, por la continuidad de $f$, sabemos que $f[F_x]$ converge a $f(x)$, por lo que tomamos concretamente $\hat{f}(x) = f(x)$. En cualquier caso se cumple que $f[F_x]$ converge a $\hat{f}(x)$. Tenemos así definida una aplicación $\hat{f} : X \longrightarrow Y$.

Notemos que $\hat{f}$ extiende a $f$, pues si $x \in D$, entonces $F_x$ converge a $x$, luego por continuidad $f(F_x)$ converge a $f(x)$, luego $\hat{f}(x) = f(x)$. Veamos que $\hat{f}$ es uniformemente continua.

Sea $W$ una banda en $Y$ y tomemos otra banda $V$ tal que $6V \subset W$. Sea $U$ una banda en $X$ (abierta en $X \times X$) tal que si $a, a' \in D$ cumplen $d(a, a') < 2U$, entonces $d(f(a), f(a')) < V$. Basta ver que $U \subset (\hat{f}^{-1} \times \hat{f}^{-1})(W)$.

[1] Este paso hace que la prueba requiere AE únicamente en el caso en que el espacio $Y$ no sea de Hausdorff.

Tomemos $x_1$ y $x_2 \in X$ tales que $d(x_1, x_2) < U$. Como $D$ es denso en $X$, existe un punto $d \in D \cap B_U(x_1) \cap B_U(x_2)$ (notemos que las bolas son abiertas por serlo $U$).

Tenemos que $d \in B_U(x_i) \cap D$, luego

$$f(d) \in f[B_U(x_i) \cap D] \quad \text{y} \quad d(f[B_U(x_i) \cap D]) < V. \tag{2.4}$$

Por otra parte, como $f[B_U(x_i) \cap D] \in f(F_{x_i})$ y $F_{x_i}$ converge a $\hat{f}(x_i)$, tenemos que $\hat{f}(x_i) \in \overline{f[B_U(x_i) \cap D]}$. Por el teorema 2.18,

$$d(\overline{f(B_U(x_i) \cap D)}) < 3V. \tag{2.5}$$

Por (2.4) y (2.5) concluimos que $d(\hat{f}(x_1), \hat{f}(x_2)) < 6V \subset W$. ■

**Definición 2.41** Una *compleción* de un espacio uniforme $X$ es un par $(X^*, i)$, donde $i : X \longrightarrow X^*$ es un homeomorfismo uniforme entre $X$ y un subespacio $i[X]$ denso en $X^*$. En tal caso podemos identificar a $X$ con su imagen por $i$, con lo que $X$ es denso en $X^*$.

Hemos demostrado que todo espacio uniforme de Hausdorff $X$ tiene una compleción $\hat{X}$, y el teorema siguiente muestra que es única salvo homeomorfismo uniforme:

**Teorema 2.42** *Sean $X$ e $Y$ espacios uniformes de Hausdorff, $A$ y $B$ subconjuntos densos de $X$ e $Y$ respectivamente y $f : A \longrightarrow B$ un homeomorfismo uniforme. Entonces $f$ se extiende a un único homeomorfismo uniforme $\hat{f} : X \longrightarrow Y$.*

Demostración: Sean $\hat{f} : X \longrightarrow Y$ y $\widehat{f^{-1}} : Y \longrightarrow X$ extensiones uniformemente continuas de $f$ y $f^{-1}$, que existen por el teorema anterior. Entonces $\widehat{f^{-1}} \circ \hat{f}$ deja fijos a los puntos de $A$, y como $A$ es denso en $X$, ha de ser la identidad en $X$. Igualmente $\hat{f} \circ \widehat{f^{-1}}$ es la identidad en $Y$, luego $\hat{f}$ es un homeomorfismo uniforme y $\widehat{f^{-1}} = \hat{f}^{-1}$. ■

**Nota** Conviene destacar que en la prueba del teorema 2.39 hemos visto que si $X$ es un espacio uniforme, cada punto $F \in \hat{X}$ es el único filtro de Cauchy minimal en $X$ que (a través de la identificación de $X$ con $i[X]$) converge a $F$. ■

Si $X$ no es un espacio de Hausdorff, el espacio $\hat{X}$ que hemos construido no es una compleción de $X$ porque $i$ no es un homeomorfismo uniforme en su imagen (ni siquiera es un homeomorfismo, pues si lo fuera $X$ sería de Hausdorff, ya que $\hat{X}$ lo es). Pese a ello, a $\hat{X}$ se le llama en este caso la *compleción de Hausdorff* del espacio uniforme $X$.

Veamos, no obstante, que una modificación de la construcción de $\hat{X}$ prueba que todo espacio uniforme admite una compleción:

**Teorema 2.43** *Si $X$ es un espacio uniforme, el conjunto $\tilde{X}$ de todos los filtros de Cauchy en $X$ es un espacio uniforme completo con la uniformidad determinada por las bandas*

$$\tilde{V} = \{(F_1, F_2) \in \tilde{X} \mid \textit{existe } A \in F_1 \cap F_2 \textit{ tal que } d(A) < V\},$$

*donde $V$ recorre las bandas de $X$. Además, la aplicación $i : X \longrightarrow \tilde{X}$ dada por $i(x) = \{A \in \mathcal{P}X \mid x \in A\}$ es un homeomorfismo uniforme de $X$ en un subespacio denso de $\tilde{X}$.*

Demostración: Las bandas indicadas son la base de una uniformidad en $\tilde{X}$ por el mismo argumento empleado en la prueba del teorema 2.39, en el cual no hemos usado que los filtros que forman $\hat{X}$ sean minimales. Como $\{x\} \in i(x)$, se cumple que $\{x\} = \bigcap i(x)$, luego $i$ es inyectiva.

Se cumple que $i[X]$ es denso en $\tilde{X}$, pues si $F \in \tilde{X}$ y $V$ es una banda en $X$, entonces existe un $A \in F$ tal que $d(A) < V$. Tomamos $a \in A$, con lo que $A \in F \cap i(a)$, luego $i(a) \in B_{\tilde{V}}(F) \cap i[X] \neq \varnothing$.

Si $V$ es una banda en $X$, vamos a probar que $V \subset (i \times i)^{-1}[\tilde{V}]$, lo que implica que $i$ es uniformemente continua. En efecto, si $(x, y) \in V$, entonces $\{x, y\} \in i(x) \cap i(y)$ y $d(\{x, y\}) < V$, luego $(i(x), i(y)) \in \tilde{V}$.

Ahora probamos que $i$ es un homeomorfismo uniforme en su imagen. Para ello basta probar que $\tilde{V} \cap (i[X] \times i[X]) \subset (i^{-1} \times i^{-1})^{-1}[V]$.

En efecto, si $(i(x), i(y)) \in \tilde{V}$, existe $A \in i(x) \cap i(y)$ tal que $d(A) < V$, luego $x, y \in A$, luego $(x, y) \in V$, y esto equivale a que $(i(x), i(y)) \in (i^{-1} \times i^{-1})^{-1}[V]$.

Sólo falta probar que $\tilde{X}$ es completo. Por el teorema 2.36 basta probar que todo filtro de Cauchy $\mathcal{F}$ en $i[X]$ converge en $\tilde{X}$. Se cumple que $F = i^{-1}[\mathcal{F}]$ es un filtro de Cauchy en $X$, pues $i^{-1}$ es uniformemente continua. Por lo tanto, $F \in \tilde{X}$ y se cumple que $\tilde{F}$ converge a $F$. En efecto, basta ver que $F$ es un punto adherente de $\mathcal{F}$. Tomamos $A \in \mathcal{F}$, de modo que $i^{-1}[A] \in F$. Sea $V$ una banda en $X$, de modo que existe $B \in F$ tal que $d(B) < V$. Si $x \in i^{-1}[A] \cap B$, se cumple que $i(x) \in A \cap B_{\tilde{V}}(F)$, pues $B \in i(x) \cap F$. Por lo tanto tenemos que $F \in \bigcap\limits_{A \in F} \overline{A}$. ■

Sin embargo, las compleciones de los espacios uniformes que no son de Hausdorff no son únicas. Basta considerar el ejemplo 1 tras el teorema 2.32, con el que, a partir de una compleción $\tilde{X}$ de un espacio uniforme $X$, podemos construir otra $\tilde{X}^*$ de cardinal arbitrariamente grande. En efecto, el teorema 2.36 implica que si $\tilde{X}$ es completo, también lo es $\tilde{X}^*$, pues todo filtro de Cauchy en $\tilde{X}$ converge en $\tilde{X}$, luego también en $\tilde{X}^*$.

**Teorema 2.44** *Si $X$ es un espacio uniforme de Hausdorff, toda pseudométrica uniforme en $X$ se extiende a una única pseudométrica uniforme en $\hat{X}$. Si una familia $\mathcal{F}$ de pseudométricas uniformes genera la uniformidad de $X$, la familia $\hat{\mathcal{F}}$ de sus extensiones genera la uniformidad de $\hat{X}$.*

Demostración: Según el teorema 2.40, tenemos que toda pseudométrica uniforme $\rho : X \times X \longrightarrow [0, +\infty[$ se extiende a una aplicación uniformemente continua $\hat{\rho} : \hat{X} \times \hat{X} \longrightarrow [0, +\infty[$. Si probamos que es una pseudométrica, será de hecho una pseudométrica uniforme.

Ahora bien, es claro que la diagonal de $\hat{X}$ es $\overline{\Delta}$, donde $\Delta$ es la diagonal de $X$, de donde se sigue que $\hat{\rho}(x, x) = 0$ para todo $x \in \hat{X}$.

La aplicación $f : X \times X \times X \longrightarrow [0, +\infty[$ dada por

$$f(x, y, z) = \rho(x, y) + \rho(y, z) - \rho(x, z)$$

es uniformemente continua, y su extensión $\hat{f} : \hat{X} \times \hat{X} \times \hat{X} \longrightarrow [0, +\infty[$ coincide en $X \times X \times X$ con $\hat{\rho}(x, y) + \hat{\rho}(y, z) - \hat{\rho}(x, z)$, luego ambas aplicaciones son iguales, y esto prueba que $\hat{\rho}(x, z) \leq \hat{\rho}(x, y) + \hat{\rho}(y, z)$, para todo $x$, $y$, $z \in \hat{X}$. Igualmente se prueba que $\rho(x, y) = \rho(y, x)$.

Si $\mathcal{F}$ es una familia de pseudométricas que inducen la uniformidad de $X$ y $\mathcal{F}$ es la familia de sus extensiones a $\hat{X}$, sea $\mathcal{U}_{\hat{\mathcal{F}}}$ la uniformidad en $\hat{X}$ definida por $\mathcal{F}$ y sea $\hat{\mathcal{U}}$ la uniformidad de $\hat{X}$. Como las pseudométricas de $\mathcal{F}$ son uniformes, tenemos que $\mathcal{U}_{\hat{\mathcal{F}}} \subset \hat{\mathcal{U}}$, luego la identidad $(\hat{X}, \hat{\mathcal{U}}) \longrightarrow (\hat{X}, \mathcal{U}_{\hat{\mathcal{F}}})$ es uniformemente continua. Además ambas uniformidades coinciden en $X$, que es denso respecto de $\hat{\mathcal{U}}$, luego el teorema 2.17 nos da que $\hat{\mathcal{U}} = \mathcal{U}_{\hat{\mathcal{F}}}$. ■

En particular:

**Teorema 2.45** *La compleción de un espacio métrico es un espacio métrico. Más explícitamente, si $X$ es un espacio métrico, la distancia $d$ en $X$ se extiende a una única distancia $\hat{d} : \hat{X} \times \hat{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ que induce la uniformidad de $\hat{X}$.*

En las secciones 10.5 y 11.2 estudiamos las compleciones de los grupos y espacios vectoriales topológicos. 350

## 2.4 Convergencia uniforme

Si $X$ es un conjunto arbitrario e $Y$ es un espacio topológico, en el conjunto $Y^X$ de todas las aplicaciones $f : X \longrightarrow Y$ tenemos definida la topología producto, que en este contexto se llama de *topología de la convergencia puntual.*

El nombre se debe a que si consideramos una sucesión de funciones $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ en $Y^X$, el teorema 1.31 se traduce en que[2] $\lim\limits_n f_n = f$ si y sólo si para todo $x \in X$ se cumple que $\lim\limits_n f_n(x) = f(x)$.

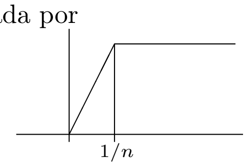
En otras palabras, una sucesión de funciones con valores en $Y$ converge puntualmente a una función $f$ si y sólo si en cada punto $x \in X$ converge a $f(x)$.

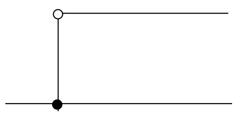
Puede parecer concepto muy natural de convergencia de funciones, pero no es muy satisfactorio desde un punto de vista topológico, como muestra el ejemplo siguiente:

[2]Por simplicidad, podemos suponer que los espacios son de Hausdorff para que los límites sean únicos, pero esto no es esencial en la discusión.

**Ejemplo** Para cada $n \geq 1$ sea $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función dada por

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ nx & \text{si } 0 \leq x \leq 1/n \\ 1 & \text{si } 1/n \leq x \end{cases}$$



Si $x \leq 0$ entonces $f_n(x)$ es constante igual a 0 y si $x > 1$ entonces $f_n(x)$ es finalmente constante igual a 1, luego esta sucesión funcional converge puntualmente a la función $f$ que muestra la figura de la izquierda. Tenemos así una sucesión de funciones continuas cuyo límite puntual no es continuo. ■

Equivalentemente, el ejemplo anterior muestra que si $X$ es también un espacio topológico, el espacio $C(X, Y)$ de las funciones continuas de $X$ en $Y$ no es necesariamente cerrado en $Y^X$ respecto de la topología de la convergencia puntual. Por lo tanto, si definimos una función como límite puntual de una sucesión de funciones continuas, no tenemos garantizado que la función definida sea continua.

Esto se debe a que el hecho de que una función sea límite puntual de una sucesión de funciones aporta muy poca información. La razón es que los entornos de la topología puntual son muy grandes. En efecto, en el caso de $\mathbb{R}^\mathbb{R}$ es claro que un entorno básico de una función $f$ es un conjunto de la forma

$$\big\{g \in \mathbb{R}^\mathbb{R} \bigm| |g(x_i) - f(x_i)| < \epsilon,\ i = 1, \ldots, n\big\},$$

donde $\epsilon > 0$ y $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$.

Por consiguiente, si una sucesión funcional tiende a $f$, lo máximo que podemos garantizar tomando un índice grande es que los términos de la sucesión se parecerán a $f$ en un número finito de puntos, pero dos funciones pueden parecerse en un número finito de puntos y ser muy diferentes entre sí. Es mucho más natural considerar que dos funciones están próximas cuando distan menos de un $\epsilon$ en todos los puntos a la vez.

Esto nos lleva a la definición siguiente:

**Definición 2.46** Si $X$ es un conjunto e $Y$ es un espacio uniforme, definimos la *uniformidad de la convergencia uniforme* en $Y^X$ como la uniformidad que tiene por base a las bandas

$$\tilde{V} = \{(f, g) \in Y^X \mid \text{para todo } x \in X\ (f(x), g(x)) \in V\},$$

donde $V$ recorre las bandas de $Y$. Usaremos la notación $\mathcal{F}_u(X, Y)$ para referirnos al espacio $Y^X$ con la uniformidad de la convergencia uniforme.

Es inmediato comprobar que estas bandas son ciertamente la base de una uniformidad en $Y^X$, que es de Hausdorff si y sólo si lo es la uniformidad de $Y$. Observemos que si $V$ varía en una base de la uniformidad de $Y$, las bandas $\tilde{V}$ son también una base de la uniformidad de la convergencia uniforme. La topología inducida por esta uniformidad se llama *topología de la convergencia uniforme* en $Y^X$.

En particular, si $Y$ es un espacio pseudométrico, una base de la uniformidad de la convergencia uniforme la forman las bandas

$$\tilde{V}_\epsilon = \{(f, g) \in Y^X \mid \text{para todo } x \in X \ d(f(x), g(x)) < \epsilon\}.$$

Para cada $\epsilon > 0$. Es claro que si sustituimos la pseudométrica $d$ por mín$\{d, 1\}$ las bandas $W_\epsilon$ para $0 < \epsilon < 1$ no se ven alteradas, por lo que podemos suponer que la distancia $d$ está acotada por 1. En tal caso, podemos definir una pseudométrica $\bar{d} : Y^X \times Y^X \longrightarrow \mathbb{R}$ mediante

$$\bar{d}(f, g) = \sup_{x \in X} d(f(x), g(x))$$

que será una métrica si $d$ lo es, y las bandas $\tilde{V}_\epsilon$ no son sino las bandas básicas $V_\epsilon$ de la uniformidad definida por $\bar{d}$. Por lo tanto:

**Teorema 2.47** *Si $X$ es un conjunto e $Y$ es un espacio métrico, el espacio uniforme $\mathcal{F}_u(X, Y)$ es metrizable.*

De este modo, para la convergencia uniforme, una bola $B_\epsilon(f)$ contiene únicamente a las funciones $g$ tales que $|f(x) - g(x)| < \epsilon$ para todo punto $x \in X$, es decir, que dos funciones están próximas respecto de la topología de la convergencia uniforme si y sólo si distan menos de un $\epsilon$ en todos los puntos de $X$, tal y como queríamos que sucediera.

Veamos ahora que, al contrario de lo que sucede con la convergencia puntual, el límite uniforme de funciones continuas sí que es necesariamente una función continua:

**Teorema 2.48** *Sea $X$ un espacio topológico e $Y$ un espacio uniforme. El conjunto de las funciones $f : X \longrightarrow Y$ que son continuas en un punto $x_0 \in X$ es cerrado en $\mathcal{F}_u(X, Y)$. Por consiguiente, $C(X, Y)$ es cerrado en $\mathcal{F}_u(X, Y)$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $C_{x_0} \subset \mathcal{F}(X, Y)$ el conjunto indicado en el enunciado y tomemos $f \in \overline{C}$. Un entorno básico de $f(x_0)$ es de la forma $B_{V_0}(f(x_0))$, donde $V_0$ es una banda en $Y$. Sea $V$ otra banda tal que $3V \subset V_0$ y sea $g \in B_{\tilde{V}}(f) \cap C_{x_0}$. Como $g$ es continua en $x_0$, tenemos que $U = g^{-1}[B_V(f(x_0))]$ es un entorno de $x_0$ en $X$. Vamos a probar que $U \subset f^{-1}[B_{V_0}(f(x_0))]$, y así $f$ será continua en $x_0$.

Si $x \in U$, entonces $(g(x), g(x_0)) \in V$ y, como $(f, g) \in \tilde{V}$, también tenemos que $(f(x), g(x)), (g(x_0), f(x_0)) \in V$, luego $(f(x), f(x_0)) \in 3V \subset V_0$, luego concluimos que $f(x) \in B_{V_0}(f(x_0))$. La última afirmación del enunciado se sigue de que $C(X, Y) = \bigcap\limits_{x_0 \in X} C_{x_0}$ es intersección de cerrados. ■

**Nota** Es obvio que la uniformidad de la convergencia uniforme en $Y^X$ depende de la uniformidad de $Y$, pero conviene observar que, en general, la topología de la convergencia uniforme en $Y^X$ también depende de la uniformidad de $Y$, y no sólo de su topología, sino que dos uniformidades en $Y$ que induzcan la misma topología pueden dar lugar a distintas topologías de convergencia uniforme.

Por ejemplo, consideremos $X = Y = ]0, +\infty[$, con la topología usual, que es tanto la topología inducida por la uniformidad natural en $\mathbb{R}$ (la uniformidad aditiva) como la topología inducida por la uniformidad de $Y$ como grupo topológico con el producto usual de números reales (la uniformidad multiplicativa). Sin embargo, la topología de la convergencia uniforme en $Y^X$ respecto de ambas uniformidades es distinta. Para comprobarlo consideramos la sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ dada por $f_n(x) = x + 1/n$ y la función $f(x) = x$. Como $|f_n(x) - f(x)| = 1/n$ es inmediato que $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente a $f$ respecto de la uniformidad aditiva. En cambio, si $0 < x < 1/n$,

$$\left|\frac{f_n(x)}{f(x)} - 1\right| = \frac{1}{nx} > 1,$$

luego $(f_n, f) \notin \tilde{V}_1$ o, equivalentemente, $f_n \notin B_{\tilde{V}_1}(f)$, por lo que $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ no converge uniformemente a $f$ respecto de la topología inducida por la uniformidad multiplicativa. Además, todas las funciones consideradas son continuas, luego de hecho la convergencia uniforme aditiva y multiplicativa corresponden a topologías distintas en $C(X, Y)$. ■

Cabe señalar que la topología de la convergencia uniforme también tiene sus inconvenientes. Consideremos el caso en el que $Y$ es un espacio métrico y sea $\mathcal{F}_u^*(X, Y)$ el conjunto de todas las funciones acotadas $f : X \longrightarrow Y$. Observemos que es abierto en $\mathcal{F}_u(X, Y)$, pues si $f$ es acotada, cualquier función $g \in B_{\tilde{V}_1}(f)$ lo es también, ya que esto significa que $d(f(x), g(x)) < 1$ para todo $x \in X$, luego

$$d(g(x), g(y)) \leq d(g(x), f(x)) + d(f(x), f(y)) + d(f(y), g(y)) < 2 + d(f[X]),$$

luego $d(g[X]) \leq 2 + d(f[X])$ y así $g \in \mathcal{F}^*(X, Y)$.

Pero un razonamiento análogo prueba que $\mathcal{F}_u^*(X, Y)$ es cerrado, pues si $f$ es una función no acotada, cualquier función en $B_{\tilde{V}_1}(f)$ será no acotada.

De aquí se sigue que si $Y$ es un espacio vectorial topológico, entonces $Y^X$ es un espacio vectorial topológico con la topología de la convergencia puntual (porque el producto de espacios vectoriales topológicos es un espacio vectorial topológico), pero $\mathcal{F}_u(X, Y)$ no es un espacio vectorial topológico con las operaciones definidas puntualmente ni siquiera si $Y$ es un espacio normado. Más precisamente, si $Y$ es un espacio normado el producto por escalares

$$K \times \mathcal{F}_u(X, Y) \longrightarrow \mathcal{F}_u(X, Y)$$

no puede ser continuo. En efecto, si $\alpha \in K$ cumple $|\alpha| < 1$ y $f \in \mathcal{F}_u(X, Y)$ es una función no acotada, la sucesión $\{(\alpha^n, f)\}_{n=0}^{\infty}$ converge a $(0, f)$, luego, si el producto por escalares fuera continuo, la sucesión $\{\alpha^n f\}_{n=0}^{\infty}$ debería converger a $0f = 0$, pero no converge a 0 porque las funciones $\alpha^n f$ son todas no acotadas, luego la sucesión no entra en $\mathcal{F}_u^*(X, Y)$, que es un entorno de la función 0.

Más aún, si $X$ es un espacio topológico tal que en $C(X,Y)$ existen funciones no acotadas, entonces $C(X,Y)$ tampoco es un espacio vectorial topológico, por el mismo argumento.

El único problema es la presencia de funciones no acotadas, ya que el espacio $\mathcal{F}_u^*(X,Y)$ es un espacio normado:

**Teorema 2.49** *Si $Y$ es un espacio normado y $X$ es un conjunto arbitrario, el espacio vectorial $\mathcal{F}_u^*(X,Y)$ de las funciones acotadas $f : X \longrightarrow Y$ (con las operaciones definidas puntualmente) es un espacio normado con la norma $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in X} \|f(x)\|$.*

DEMOSTRACIÓN: Es fácil comprobar que $\|\ \|_\infty$ es una norma en $\mathcal{F}_u^*(X,Y)$ y la distancia que induce es precisamente la distancia

$$d(f,g) = \sup_{x\in X} \|f(x) - g(x)\|,$$

que ya hemos visto que induce la topología uniformidad de $\mathcal{F}_u^*(X,Y)$. ■

Para estudiar con más detalle la convergencia uniforme conviene trabajar en un contexto más general:

**Definición 2.50** Sea $X$ un conjunto, sea $\Sigma \subset \mathcal{P}X$ y sea $Y$ un espacio uniforme. Definimos la *uniformidad de la convergencia uniforme en los conjuntos de* $\Sigma$ como la uniformidad en $Y^X$ que tiene por base a las intersecciones finitas de bandas de la forma

$$\tilde{V}_A = \{(f,g) \in Y^X \times Y^X \mid \text{para todo } x \in A\ (f(x), g(x)) \in V\},$$

para cada $A \in \Sigma$ y cada banda $V$ en $Y$. La topología inducida se llama *topología de la convergencia uniforme en los conjuntos de* $\Sigma$.

Usaremos la notación $\mathcal{F}_\Sigma(X,Y)$ para representar el espacio $Y^X$ con la uniformidad de la convergencia uniforme en los conjuntos de $\Sigma$.

Así pues, para que dos funciones estén próximas respecto a la uniformidad que acabamos de definir sólo pedimos que se parezcan uniformemente en todos los puntos de un número finito de elementos de $\Sigma$.

Notemos que podemos considerar únicamente (intersecciones finitas de) bandas $W(A;V)$ con $V$ en una base de la uniformidad de $Y$.

Observemos también que si $\Sigma$ tiene la propiedad de que para cada $A, B \in \Sigma$ existe $C \in \Sigma$ tal que $A \cup B \subset C$, las bandas $\tilde{V}_A$ forman ya una base de la uniformidad, sin necesidad de tomar intersecciones finitas.

Esto no es ninguna restricción, pues si llamamos $\Sigma'$ al conjunto de uniones finitas de elementos de $\Sigma$ es fácil ver que $\Sigma$ y $\Sigma'$ definen la misma uniformidad. Lo mismo sucede si llamamos $\Sigma'$ al conjunto de los subconjuntos de las uniones finitas de elementos de $\Sigma$. La uniformidad definida por $\Sigma'$ sigue siendo la misma, por lo que no perdemos generalidad si suponemos que todo subconjunto de un elemento de $\Sigma$ está en $\Sigma$.

En el caso $\Sigma = \{X\}$ obtenemos la uniformidad de la convergencia uniforme.

En el extremo opuesto, si tomamos como $\Sigma$ el conjunto de los conjuntos $\{x\}$, con $x \in X$ (o, equivalentemente, la familia de todos los subconjuntos finitos de $X$) obtenemos una unformidad que, independientemente de la uniformidad de $Y$, induce en $Y^X$ la topología de la convergencia puntual.

En efecto, una base de entornos de una función $f$ está formada por las bolas

$$B_{\tilde{V}_A}(f) = \{g \in Y^X \mid \text{para todo } a \in A\ (f(a), g(a)) \in V\} = \prod_{x \in X} U_x,$$

donde $U_x = B_V(f(x))$ si $x \in A$ y $U_x = Y$ en caso contrario, y estos abiertos forman también una base de entornos de $f$ en la topología producto.

Veamos algunas propiedades elementales:

1. *Si $A \in \Sigma$, la restricción $\mathcal{F}_\Sigma(X, Y) \longrightarrow \mathcal{F}_u(A, Y)$ es uniformemente continua.*

   Basta observar que la antiimagen de una banda $\tilde{V}$ en $\mathcal{F}_u(A, Y)$ no es sino la banda $\tilde{V}_A$ en $\mathcal{F}_\Sigma(X, Y)$.

2. *Si $x \in \bigcup \Sigma$, la evaluación $v_x : \mathcal{F}_\Sigma(X, Y) \longrightarrow Y$ dada por $v_x(f) = f(x)$ es uniformemente continua.*

   Esto es un caso particular de la propiedad anterior, pues podemos suponer que $\{x\} \in \Sigma$.

3. *Una base de filtro $\mathcal{B}$ en $\mathcal{F}_\Sigma(X, Y)$ converge a $f \in \mathcal{F}_\Sigma(X, Y)$ si y sólo si las imágenes $\mathcal{B}_A$ de $\mathcal{B}$ por las restricciones $g \mapsto g|_A$ convergen a la restricción $f|_A$ en $\mathcal{F}_u(A, Y)$, para cada $A \in \Sigma$.*

   Una implicación se debe a que las funciones $g \mapsto g|_A$ son continuas. Si los filtros $\mathcal{B}_A$ convergen y $\tilde{V}_A$ es una banda básica en $\mathcal{F}_\Sigma(X, Y)$ (aquí suponemos —sin pérdida de generalidad— que $\Sigma$ es cerrado para uniones finitas), entonces $B_{\tilde{V}}(f|_A)$ es un entorno de $f|_A$ en $\mathcal{F}_u(A, Y)$, luego $B_{W_A}(f|_A) \in \mathcal{B}_A$, de donde $B_{\tilde{V}_A}(f)$ está en el filtro generado por $\mathcal{B}$.

   En la práctica, en lugar de decir que $\mathcal{B}_A$ converge uniformemente (o puntualmente) a $f|_A$ diremos simplemente que $\mathcal{B}$ converge uniformemente (o puntualmente) a $f$ en $A$.

4. *Una base de filtro $\mathcal{B}$ en $\mathcal{F}_\Sigma(X, Y)$ converge puntualmente a $f \in \mathcal{F}_\Sigma(X, Y)$ si y sólo si los filtros $v_x[\mathcal{B}]$ convergen a $f(x)$ en $Y$, para cada $x \in X$.*

   Esto es esencialmente un caso particular de la propiedad precedente, pues podemos identificar $\mathcal{F}_u(\{x\}, Y) = Y$ y entonces $g \mapsto g|_{\{x\}}$ se identifica con $v_x$.

5. *Si $Y$ es un espacio de Hausdorff y $\bigcup \Sigma = X$, entonces $\mathcal{F}_\Sigma(X,Y)$ también es un espacio de Hausdorff.*

   En efecto, si un par $(f,g)$ está en todas las bandas de la uniformidad, dado $x \in X$, existe un $A \in \Sigma$ tal que $x \in A$, y entonces $(f,g) \in \tilde{V}_A$, para todo banda $V$ de $Y$, luego $(f(x),g(x)) \in V$ y, como $Y$ es de Hausdorff, $f(x) = g(x)$, luego $f = g$.

Vamos a probar que si $Y$ es un espacio uniforme completo, entonces los espacios $\mathcal{F}_\Sigma(X,Y)$ son completos. Para ello probamos primero lo siguiente:

**Teorema 2.51** *Si $X$ es un conjunto, $\Sigma$ es una familia de subconjuntos de $X$ e $Y$ es un espacio uniforme, un filtro $F$ en $\mathcal{F}_\Sigma(X,Y)$ converge a una función $f$ si y sólo si es de Cauchy y converge puntualmente a $f$ en $\bigcup \Sigma$.*

Demostración: Si $F$ converge, entonces es de Cauchy y, como las evaluaciones $v_x(f) = f(x)$ (con $x \in \bigcup \Sigma$) son continuas, los filtros $v_x[F]$ convergen en $Y$ a $f(x)$, lo cual equivale a que $F$ converja puntualmente a $f$ en $\bigcup \Sigma$.

Recíprocamente, Un entorno básico de $f$ (suponiendo que $\Sigma$ es cerrado para uniones finitas) es de la forma $B_{\tilde{V}_A}(f)$, donde $V$ es una banda en $Y$ que podemos tomar cerrada. Sea $C \in F$ tal que $d(C) < \tilde{V}_A$. Si $g, g_0 \in C$ y $a \in A$, tenemos que $(g(a), g_0(a)) \in V$, luego $g(a) \in B_V(g_0(a))$, luego $v_a[C] \subset \overline{B_V}(g_0(a))$. Pero $v_a[C] \in v_a[F]$, y este filtro converge a $f(a)$, luego $f(a) \in \overline{v_a[C]} \subset B_V(g_0(a))$. Equivalentemente, $(g_0(a), f(a)) \in V$, para todo $g_0 \in C$ y todo $a \in A$. Esto prueba que $(g_0, f) \in \tilde{V}_A$, para todo $g_0 \in C$, luego $C \subset B_{\tilde{V}_A}(f)$ y así $B_{\tilde{V}_A}(f) \in F$. Por lo tanto, $F$ converge a $f$. ■

Como consecuencia:

**Teorema 2.52** *Si $X$ es un conjunto, $\Sigma$ es una familia de subconjuntos de $X$ e $Y$ es un espacio uniforme completo, entonces $\mathcal{F}_\Sigma(X,Y)$ es completo.*

Demostración: Sea $F$ un filtro de Cauchy en $\mathcal{F}_\Sigma(X,Y)$. Si $x \in \bigcup \Sigma$, la evaluación $v_x$ es uniformemente continua, luego $v_x[F]$ es un filtro de Cauchy en $Y$, luego es convergente. Sea $f(x) \in Y$ un punto límite[3] de $v_x[F]$. Para los puntos $x \in X \setminus v_x[F]$ tomamos como $f(x)$ cualquier punto de $Y$. Así tenemos definida una función $f \in Y^X$ tal que $F$ converge puntualmente a $f$ en $\bigcup \Sigma$. El teorema anterior implica que $F$ converge a $f$ en $\mathcal{F}_\Sigma(X,Y)$. ■

En particular, como hemos probado que $C(X,Y)$ es cerrado en $\mathcal{F}_u(X,Y)$, tenemos el teorema siguiente:

**Teorema 2.53** *Si $X$ es un espacio topológico e $Y$ es un espacio uniforme completo, entonces el espacio $C(X,Y)$ de todas las funciones continuas de $X$ en $Y$ es completo con la uniformidad de la convergencia uniforme.*

[3]La prueba sólo usa el axioma de elección si $Y$ no es un espacio de Hausdorff, pues en otro caso $f(x)$ está unívocamente determinado.

También hemos probado que $\mathcal{F}_u^*(X,Y)$ es cerrado en $\mathcal{F}(X,Y)$, por lo que si $Y$ es un espacio uniforme completo, también lo es $\mathcal{F}_u^*(X,Y)$, y también el espacio $C^*(X,Y)$ de las funciones continuas acotadas de $X$ en $Y$, pues es la intersección de dos cerrados $C^*(X,Y) = C(X,Y) \cap \mathcal{F}_u^*(X,Y)$.

Por otra parte, hemos mostrado que $\mathcal{F}(X,Y)$ no es necesariamente un espacio vectorial topológico aunque $Y$ sea un espacio normado, y el problema lo presentaba la continuidad del producto por escalares. Ahora vamos a ver que la suma definida puntualmente siempre es continua:

**Teorema 2.54** *Si $X$ es un conjunto arbitrario, $\Sigma$ es una familia de subconjuntos de $X$ e $Y$ es un grupo topológico abeliano, entonces $\mathcal{F}_\Sigma(X,Y)$ es un grupo topológico con la suma definida puntualmente. Si $X$ es un espacio topológico, lo mismo vale en particular para $C(X,Y)$.*

Demostración: Sea $U_0$ un entorno de 0 equilibrado en $Y$ y $A \in \Sigma$, de modo que $(\tilde{V}_{U_0})_A$ es una banda básica de $\mathcal{F}_\Sigma(X,Y)$. Sea $U$ otro entorno de 0 equilibrado tal que $U+U \subset U_0$. Veamos que $d(f,g) < (\tilde{V}_U)_A$ y $d(f',g') < (\tilde{V}_U)_A$ implica que $d(f+g, f'+g') < (\tilde{V}_{U_0})_A$, pues esto significa que la suma es uniformemente continua. En efecto, si $a \in A$, entonces

$$f(a) + g(a) - f'(a) - g'(a) = f(a) - f'(a) + g(a) - g'(a) \in U + U \subset U_0,$$

luego $((f+g)(a), (f'+g')(a)) \in VU_0$, luego $(f+g, f'+g') \in (\tilde{V}_{U_0})_A$.

La aplicación $f \mapsto -f$ también es continua, pues es inmediato que si se cumple $d(f,g) < (\tilde{V}_U)_A$, también $d(-f,-g) < (\tilde{V}_U)_A$.

Más aún, vamos a probar que la uniformidad de $\mathcal{F}_\Sigma(X,Y)$ coincide con la uniformidad derivada de la estructura de grupo.

En efecto, si $U$ es un entorno equilibrado de 0 en $Y$, una banda básica de $Y$ es $V_U$, y así una banda básica en $\mathcal{F}_\Sigma(X,Y)$ es una intersección finita de bandas

$$(\tilde{V}_U)_A = \{(f,g) \in Y^X \times Y^X \mid \text{para todo } x \in A \ f(x) - g(x) \in U\},$$

con $A \in \Sigma$. Por lo tanto, un entorno básico (equilibrado) de la función constante 0 en $\mathcal{F}_\Sigma(X,Y)$ es una intersección finita de entornos

$$V(A;U) = \{f \in \mathcal{F}_\Sigma(X,Y) \mid f[A] \subset U\}$$

y la banda determinada por este entorno de 0 en la uniformidad asociada a la estructura de grupo es

$$\{(f,g) \in Y^X \times Y^X \mid f - g \in V(A;U)\} = (\tilde{V}_U)_A.$$

Por lo tanto, las dos uniformidades comparten una base, luego son iguales. ■

En la sección 11.3 estudiamos cuándo un subespacio de $\mathcal{F}_\Sigma(X,V)$ adquiere estructura de espacio vectorial topológico si $V$ es un espacio vectorial topológico.
397

Terminamos probando un un resultado importante sobre convergencia de series funcionales.

**Definición 2.55** Si $K$ es un cuerpo métrico completo, diremos que una serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ en $K^X$ es *absoluta y uniformemente* convergente si la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |f_n|$ es uniformenente convergente en $\mathbb{R}^X$, donde $|f_n|(x) = |f_n(x)|$.

Notemos que en tal caso la serie es uniformemente convergente en $K^X$. En efecto, basta probar que es uniformemente de Cauchy. Como la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |f_n|$ es uniformemente de Cauchy, dado $0 < \epsilon < 1$, existe $N_0$ tal que si $N_0 \leq N_1 \leq N_2$, la distancia entre las sumas parciales correspondentes a $N_1$ y $N_2$ es $< \epsilon$, es decir,

$$\sup\{\sum_{n=N_1}^{N_2} |f_n(x)| \mid x \in X\} < \epsilon.$$

Si consideramos en $K$ la distancia acotada $\min\{|x-y|, 1\}$ y en $K^X$ la distancia inducida por ésta, las sumas parciales de la serie sin valores absolutos cumplen

$$\begin{aligned} d(S_{N_1}, S_{N_2}) &= \sup\{\min\{\Big|\sum_{n=N_1}^{N_2} f_n(x)\Big|, 1\} \mid x \in X\} \\ &\leq \sup\{\sum_{n=N_1}^{N_2} |f_n(x)| \mid x \in X\} < \epsilon, \end{aligned}$$

luego la serie dada es uniformemente de Cauchy. ■

**Teorema 2.56 (Criterio de Mayoración de Weierstrass)** *Sea $K$ un cuerpo métrico completo, $X$ un conjunto y sea $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ una serie funcional en $K^X$. Sea $\{M_n\}_{n=0}^{\infty}$ una sucesión en $[0, +\infty[$ tal que para todo natural $n$ y todo $x \in X$ se cumpla $|f_n(x)| \leq M_n$. Si la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} M_n$ es convergente, entonces la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ es absoluta y uniformemente convergente en $X$.*

Demostración: La serie $M_n$ es de Cauchy, luego dado $\epsilon > 0$ existe un $n_0$ tal que si $n_0 \leq m \leq p$, entonces $\sum\limits_{n=m}^{p} M_n < \epsilon$. Así, para todo $x \in X$,

$$\Big|\sum_{n=m}^{p} |f_n(x)|\Big| = \sum_{n=m}^{p} |f_n(x)| \leq \sum_{n=m}^{p} M_n < \epsilon.$$

Esto significa que la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |f_n|$ es de Cauchy en $C(X, K)$, luego (uniformemente) convergente, luego $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ es absoluta y uniformemente convergente. ■

En particular, si $X$ es un espacio topológico y todas las funciones $f_n$ son continuas, también lo son las sumas parciales $\sum\limits_{n=0}^{N} f_n$ y, como el límite uniforme de funciones continuas es una función continua, también es continua la función $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n : X \longrightarrow Y$. Esto hace del criterio de Weierstrass una herramienta muy potente para construir funciones continuas con características deseadas.

# Capítulo III

# Conexión

La definición de topología establece que, en un espacio topológico $X$, los conjuntos $\varnothing$ y $X$ son a la vez abiertos y cerrados, pero en general no tienen por qué ser los únicos subconjuntos con esta propiedad. Por ejemplo, en un espacio discreto todos los subconjuntos son abiertos y cerrados. Un ejemplo menos drástico es $X = [0,1] \cup [2,3]$, con la topología usual. Es inmediato que $U = [0,1]$ y $V = [2,3]$ son cerrados disjuntos y, por consiguiente, también abiertos, pues uno es el complementario del otro. Esto expresa el hecho de que el espacio $X$ está formado por dos "piezas" independientes, y esto también es cierto para el espacio $Y = [0,1[\, \cup\, ]1,2]$, aunque en este caso las "piezas" estén más próximas. En este capítulo estudiaremos la posibilidad de descomponer espacios topológicos en "piezas separadas" mediante abiertos cerrados.

## 3.1 Espacios conexos

**Definición 3.1** Un espacio topológico $X$ es *disconexo* si existen subconjuntos abiertos $U$ y $V$ en $X$ tales que $X = U \cup V$, $U \cap V = \varnothing$ y $U \neq \varnothing \neq V$. En caso contrario se dice que $X$ es *conexo.*

Notemos que si $X = U \cup V$ es una descomposición en abiertos disjuntos no vacíos, entonces $U$ y $V$ son a la vez abiertos y cerrados. Por otra parte, si un espacio se descompone en unión de dos cerrados disjuntos no vacíos, dichos cerrados son también abiertos (pues uno es el complementario del otro), luego el espacio es también disconexo.

Es claro entonces que un espacio $X$ es conexo si y sólo si los únicos abiertos cerrados son $\varnothing$ y $X$, ya que cualquier otro abierto cerrado $U$ contradice la definición de conexión sin más que tomar $V = X \setminus U$.

Un resultado fundamental sobre conexión es que $\mathbb{R}$ es un espacio topológico conexo. Los teoremas 12.12 y 12.13 prueban algo más general. Para el caso de $\mathbb{R}$ afirman que los únicos subespacios conexos de $\mathbb{R}$ son los intervalos. 454

Este hecho, enlazado con una propiedad elemental de los espacios conexos, tiene consecuencias muy notables:

**Teorema 3.2** *Las imágenes continuas de los espacios conexos son conexas.*

Demostración: Si $f : X \longrightarrow Y$ es una aplicación continua y suprayectiva pero $Y$ no es conexo, entonces $X$ tampoco puede serlo, pues si $A$ es una abierto cerrado no vacío en $Y$ y distinto de $Y$, entonces $f^{-1}[A]$ cumple lo mismo en $X$. ■

**Teorema 3.3 (Teorema de los valores intermedios)** *Si $X$ es un espacio conexo, $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es una aplicación continua, $x$, $y$ son puntos de $X$ y $f(x) < \alpha < f(y)$, entonces existe un punto $z \in X$ tal que $f(z) = \alpha$.*

Demostración: Por el teorema anterior $f[X]$ es un conexo, luego un intervalo. Como $f(x)$ y $f(y)$ están en $f[X]$, también $\alpha \in f[X]$. ■

El lector puede pasar ahora a la última sección de este capítulo, donde usamos el teorema anterior para construir la exponenciación de números reales. 88

En general, un subespacio de un espacio conexo no tiene por qué ser conexo, pero se cumple lo siguiente:

**Teorema 3.4** *Sea $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia de subespacios conexos de un espacio $X$ tal que $\bigcap\limits_{i\in I} A_i \neq \varnothing$. Entonces $\bigcup\limits_{i\in I} A_i$ es conexo.*

Demostración: Supongamos que $\bigcup\limits_{i\in I} A_i = U \cup V$, donde $U$ y $V$ son abiertos disjuntos. Entonces para un $i$ cualquiera se tendrá que $A_i = (U \cap A_i) \cup (V \cap A_i)$, pero $U \cap A_i$, $V \cap A_i$ son abiertos disjuntos en $A_i$, luego uno de ellos es vacío, y así $A_i \subset U$ o bien $A_i \subset V$.

Pero si $A_i \subset U$, entonces $U$ contiene a $\bigcap\limits_{i\in I} A_i$, luego $U$ corta a todos los $A_i$ y por conexión los contiene a todos. Así $\bigcup\limits_{i\in I} A_i = U$, y $V = \varnothing$. Igualmente, si $A_i \subset V$ se deduce que $U$ es vacío. ■

**Definición 3.5** Si $X$ es un espacio topológico y $x \in X$, llamaremos *componente conexa* de $x$ en $X$ a la unión $C(x)$ de todos los subespacios conexos de $X$ que contienen a $x$.

Como $\{x\}$ es trivialmente conexo, siempre hay al menos un subespacio conexo de $X$ que contiene a $x$, y la unión $C(x)$ de todos ellos es conexa por el teorema anterior. Además, si $x$, $y \in X$ son dos puntos distintos, o bien $C(x) = C(y)$, o bien $C(x) \cap C(y) = \varnothing$, pues si existe $z \in C(x) \cap C(y)$, el teorema anterior nos da que $C(x) \cup C(y)$ es conexo, luego $C(x) \cup C(y) \subset C(x) \cap C(y)$ (pues la unión es un subespacio conexo que contiene tanto a $x$ como a $y$), y esto implica que $C(x) = C(y)$.

Así pues, las componentes conexas de los puntos de $X$ forman una partición de $X$ en conjuntos conexos disjuntos dos a dos. Los tres son abiertos y cerrados en $X$.

Por ejemplo, el espacio $X = [0, 1] \cup [2, 3[ \cup ]3, 4[$ tiene tres componentes conexas, que son los tres intervalos que aparecen en su definición.

El teorema siguiente implica que las componentes conexas son siempre cerradas:

**Teorema 3.6** *Si $A$ es un subespacio conexo de un espacio $X$, entonces $\overline{A}$ es conexo.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que $\overline{A} = U \cup V$, donde $U$ y $V$ son abiertos disjuntos en $\overline{A}$. Entonces $A = (U \cap A) \cup (V \cap A)$, y $U \cap A$, $V \cap A$ son abiertos disjuntos en $A$. Por conexión uno es vacío, luego $A \subset U$ o bien $A \subset V$. Digamos $A \subset U \subset \overline{A}$. Pero $U$ es cerrado en $\overline{A}$, luego $\overline{A} \subset \overline{U} = U$, es decir, $U = \overline{A}$ y $V = \varnothing$. Esto prueba que $\overline{A}$ es conexo. ■

Si un espacio tiene un número finito de componentes conexas, el teorema anterior prueba que son abiertas y cerradas, pero en general las componentes conexas no tienen por qué ser abiertas. Por ejemplo, las componentes conexas de $\mathbb{Q}$ se reducen a sus puntos (porque todo subespacio conexo de $\mathbb{Q}$ es un intervalo en $\mathbb{R}$, luego tiene que ser un punto, porque cualquier otro intervalo contendría números irracionales), luego son cerradas y no abiertas.

**Teorema 3.7** *Un producto no vacío de una familia de espacios topológicos es conexo si y sólo si todos los factores lo son.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $\{X_i\}_{i\in I}$ una familia de espacios topológicos. Si $\prod\limits_{i\in I} X_i$ es conexo y no vacío, como las proyecciones $p_i : \prod\limits_{i\in I} X_i \longrightarrow X_i$ son continuas y suprayectivas, el teorema 3.2 nos da que cada $X_i$ también lo es.

Veamos ahora que el producto $X \times Y$ de dos espacios conexos es conexo. Fiamos un punto $(x_0, y_0) \in X \times Y$. Dado cualquier otro punto $(x, y)$, tenemos que $X \times \{y_0\}$ y $\{x\} \times Y$ son espacios conexos, pues son homeomorfos a $X$ y a $Y$, respectivamente, luego $(X \times \{y_0\}) \cup (\{x\} \times Y)$ también es conexo por el teorema 3.4, ya que $(x, y_0) \in (X \times \{y_0\}) \cap (\{x\} \times Y)$, y la unión contiene tanto a $(x_0, y_0)$ como a $(x, y)$. Por consiguiente, $(x, y) \in C((x_0, y_0))$ y, como $(x, y)$ es arbitrario, de hecho $C((x_0, y_0)) = X \times Y$, luego es conexo.

Esto implica que el producto de cualquier cantidad finita de espacios topológicos conexos es conexo. En el caso general, fijemos un punto $a \in \prod\limits_{i\in I} X_i$ (si el producto fuera vacío sería trivialmente conexo) y sea $F$ el conjunto de todos los subconjuntos finitos de $I$. Para cada $J \in F$, sea $C_J = \prod\limits_{i\in I} A_i$, donde

$$A_i = \begin{cases} X_i & \text{si } i \in J, \\ \{a_i\} & \text{si } i \in I \setminus J. \end{cases}$$

Es claro que $C_J$ es homeomorfo a $\prod\limits_{i\in J} X_j$, luego es conexo por el caso finito ya probado. Como $a \in \bigcap\limits_{J\in F} C_J$, el teorema 3.4 nos da que $C = \bigcup\limits_{J\in F} C_J$ es conexo, pero $C$ es denso en $\prod\limits_{i\in I} X_i$, pues todo abierto básico no vacío del producto es de la forma $U = \prod_{i\in I} U_i$, donde cada $U_i$ es un abierto no vacío en $X_i$ y existe un $J \in F$ tal que $U_i = X_i$ si $i \in I \setminus J$, luego, tomando $x_i \in X_i$ para $i \in J$ y $x_i = a_i$ para $i \in I \setminus J$, obtenemos un punto $x \in U \cap C$. El teorema 3.6 nos permite concluir que el producto es conexo. ■

## 3.2 Espacios localmente conexos

El espacio $X = [0,1] \cup [2,3[ \cup ]3,4[$ que hemos considerado antes no es conexo, pero sí que es localmente conexo en el sentido siguiente:

**Definición 3.8** Un espacio topológico es *localmente conexo* si todo punto tiene una base de entornos conexos.

En la definición no exigimos que la base de entornos esté formada por abiertos, pero el teorema siguiente muestra que podemos exigirlo sin alterar el concepto:

**Teorema 3.9** *Un espacio topológico es localmente conexo si y sólo si las componentes conexas de sus abiertos son abiertas (luego también cerradas).*

DEMOSTRACIÓN: Si $X$ es localmente conexo, $U$ es un abierto en $X$, $C$ es una componente conexa de $U$ y $x \in C$, como $x$ tiene una base de entornos conexos, existe un subconjunto conexo $Y \subset X$ tal que $x \in \mathring{Y} \subset Y \subset U$, pero entonces $x \in \mathring{Y} \subset Y \subset C$, porque $C$ contiene a todo subespacio conexo de $U$ que contenga a $x$. Así pues, $x \in \mathring{C}$ y $C$ es abierto.

Recíprocamente, si las componentes conexas de los abiertos de $X$ son abiertas, dado cualquier punto $x \in X$ y cualquier entorno $W$ de $x$, éste contiene un abierto $x \in U \subset W$, luego $x \in C \subset U \subset W$, donde $C$ es una componente conexa de $U$, que es abierta, luego los entornos abiertos conexos de $x$ son una base de entornos conexos de $x$.

Por último observamos que si las componentes conexas son abiertas, también son cerradas, pues el complementario de una de ellas es la unión de las restantes, luego es abierto. ■

Tal y como indicábamos, de este teorema se sigue que un espacio topológico es conexo si y sólo si los abiertos conexos forman una base y, por consiguiente, si y sólo si todo punto tiene una base de entornos abiertos conexos.

Del teorema se desprende también que todo abierto en un espacio localmente conexo es localmente conexo. En cambio, un cerrado no tiene por qué serlo. Basta pensar en $\{1/n \mid n \geq 1\} \cup \{0\}$, que es cerrado en $\mathbb{R}$.

Claramente $\mathbb{R}$ es conexo y localmente conexo, $[0,1] \cup [2,3]$ es localmente conexo, pero no conexo, mientras que $\mathbb{Q}$ no es ni conexo ni localmente conexo. Menos obvio es que un espacio topológico puede ser conexo y no localmente conexo. Es el caso del *espacio escoba* (ejemplo A.20), que ilustra también que la imagen continua de un espacio localmente conexo no es necesariamente localmente conexa.

La concatenación de infinitas escobas (ejemplo A.21) es también conexa y no localmente conexa, pero además contiene un punto que tiene una base de entornos conexos, pero no una base de entornos abiertos conexos. Esto contrasta con el hecho de que si un espacio es localmente conexo (es decir, si todo punto tiene una base de entornos conexos) entonces, tal y como hemos probado, todo punto tiene una base de entornos abiertos conexos.

Acabamos de señalar que las imágenes continuas de espacios localmente conexos no son necesariamente localmente conexas. Sin embargo:

**Teorema 3.10** *Si $f : X \longrightarrow Y$ es una identificación y $X$ es localmente conexo, también lo es $Y$.*

Demostración: Basta probar que si $U \subset Y$ es un abierto y $C \subset U$ es una de sus componentes conexas, entonces $C$ es abierta. Para ello a su vez basta con que $f^{-1}[C]$ sea abierto. Si $x \in f^{-1}[C] \subset f^{-1}[U]$, como $X$ es localmente conexo, existe un abierto conexo $x \in V \subset f^{-1}[U]$. Entonces $f(x) \in f[V] \subset U$ es conexo y, como $C$ es una componente conexa de $U$, tiene que ser $f[V] \subset C$, luego $x \in V \subset f^{-1}[C]$, luego $f^{-1}[C]$ es abierto. ■

**Teorema 3.11** *Un producto no vacío de espacios topológicos es localmente conexo si y sólo si todos los factores son localmente conexos y todos salvo a lo sumo un número finito de ellos son conexos.*

Demostración: Es claro que el producto de un número finito de espacios localmente conexos es localmente conexo (los productos de abiertos conexos forman una base de abiertos conexos en el producto). Por otro lado, un producto arbitrario de espacios conexos localmente conexos es conexo y localmente conexo. Basta observar que los abiertos básicos con factores conexos son una base de abiertos conexos del producto. Por lo tanto, un producto en las condiciones del enunciado es un producto de dos espacios localmente conexos, luego es localmente conexo.

Recíprocamente, si un producto $\prod\limits_{i\in I} X_i$ es localmente conexo y no vacío, como las proyecciones son abiertas y suprayectivas, son identificaciones, luego cada factor es localmente conexo. Si hubiera infinitos factores disconexos el producto no tendría abiertos conexos no vacíos, pues si $G$ es cualquier abierto no vacío, contendrá un abierto básico de la forma $\prod\limits_{i\in I} U_i$, donde $U_i = X_i$ salvo en un número finito de casos. Si $i_0 \in I$ es cualquier índice tal que $U_{i_0} = X_i$ y $X_i$ es disconexo, entonces, una descomposición $X_i = U \cup V$ en abiertos disjuntos no vacíos da lugar a una descomposición $G = (G \cap p_{i_0}^{-1}[U]) \cup (G \cap p_{i_0}^{-1}[V])$ de $G$ en unión de dos abiertos disjuntos no vacíos. ■

## 3.3 Espacios arcoconexos

Hay una propiedad más fuerte que la conexión y que en muchas ocasiones es más fácil de comprobar:

**Definición 3.12** Si $X$ es un espacio topológico, un *arco* de extremos $x$, $y \in X$ es una aplicación continua $f : [0,1] \longrightarrow X$ tal que $f(0) = x$ y $f(1) = y$.

Se dice que $X$ es *arcoconexo* si para todo par de puntos $x$, $y \in X$, existe un arco en $X$ de extremos $x$, $y$.

Como el espacio $[0,1]$ es conexo, las imágenes de los arcos son conjuntos conexos, luego si dos puntos de $X$ pueden conectarse por un arco, ambos están en la misma componente conexa, luego todo espacio arcoconexo es conexo. El recíproco no es cierto. Por ejemplo, el espacio $[0,1]^2$, con la topología inducida por el orden lexicográfico (ejemplo A.27) es conexo y localmente conexo, pero no es arcoconexo.

Los espacios arcoconexos comparten muchas propiedades con los conexos:

**Teorema 3.13** *Las imágenes continuas de los espacios arcoconexos son arcoconexas.*

Demostración: Sea $f : X \longrightarrow Y$ una aplicación continua y suprayectiva, sean $u, v \in Y$ dos puntos cualesquiera, sean $p, q \in X$ tales que $f(p) = u$, $f(q) = v$ y sea $g : [0,1] \longrightarrow X$ un arco tal que $g(0) = p$ y $g(1) = q$, Entonces $g \circ f$ es un arcon en $Y$ que une $u$ con $v$. ■

**Teorema 3.14** *Sea $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia de subespacios arcoconexos de un espacio $X$ tal que $\bigcap\limits_{i\in I} A_i \neq \varnothing$. Entonces $\bigcup\limits_{i\in I} A_i$ es arcoconexo.*

Demostración: Sea $x \in \bigcap\limits_{i\in I} A_i$ y sean $u, v \in \bigcup\limits_{i\in I} A_i$, digamos $u \in A_{i_0}$, $v \in A_{i_1}$ y sean $f_j : [0,1] \longrightarrow A_{i_j}$ arcos tales que $f_0(0) = u$, $f_0(1) = x = f_1(0)$, $f_1(1) = v$. Entonces

$$f(t) = \begin{cases} f(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq 1/2, \\ g(2(t-1/2)) & \text{si } 1/2 \leq t \leq 1, \end{cases}$$

es un arco en $A_{i_0} \cup A_{i_1}$ que une $u$ con $v$. ■

**Definición 3.15** Si $X$ es un espacio topológico y $x \in X$, llamaremos *componente arcoconexa* de $x$ en $X$ a la unión $C_{\mathrm{ar}}(x)$ de todos los subespacios arcoconexos de $X$ que contienen a $x$.

Así, el mismo razonamiento que hemos aplicado a las componentes conexas prueba que $C_{\mathrm{ar}}(x)$ es el mayor subespacio arcoconexo de $X$ que contiene a $x$, y que las componentes arcoconexas de dos puntos son iguales o disjuntas. También es evidente que $C_{\mathrm{ar}}(x) \subset C(x)$. En cambio, no es cierto en general que las componentes arconconexas sean cerradas, porque no es cierto que la clausura de un subespacio arcoconexo sea necesariamente arcoconexa. Un ejemplo lo proporciona el llamado "seno del topólogo" (en el ejemplo A.19 presentamos una variante equivalente), que no es arcoconexo, pero tiene un subespacio denso arcoconexo.

**Teorema 3.16 (AE)** *El producto de una familia de espacios topológicos arcoconexos no vacíos es arcoconexo si y sólo si todos los factores lo son.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $\{X_i\}_{i\in I}$ una familia de espacios topológicos no vacíos. Si $\prod\limits_{i\in I} X_i$ es arcoconexo, como las proyecciones $p_i : \prod\limits_{i\in I} X_i \longrightarrow X_i$ son continuas y suprayectivas, el teorema 3.13 nos da que cada $X_i$ también lo es.

Recíprocamente, si $u, v \in \prod\limits_{i\in I} X_i$, elegimos arcos $f_i : [0, 1] \longrightarrow X_i$ tales que $f_i(0) = u_i$, $f_i(1) = v_i$, y así la función $f : [0, 1] \longrightarrow \prod\limits_{i\in I} X_i$ dada por $f(t) = (f_i(t))$ es un arco que une $u$ con $v$. ■

## 3.4 Espacios localmente arcoconexos

El concepto análogo a la conexión local es la arcoconexión local:

**Definición 3.17** Un espacio topológico es *localmente arcoconexo* si todo punto tiene una base de entornos arcoconexos.

Obviamente, todo espacio localmente arcoconexo es localmente conexo. El teorema siguiente se demuestra exactamente igual que el teorema 3.9:

**Teorema 3.18** *Un espacio topológico es localmente arcoconexo si y sólo si las componentes arcoconexas de sus abiertos son abiertas (luego también cerradas).*

En particular, un espacio topológico es localmente arcoconexo si y sólo si tiene una base formada por abiertos arcoconexos, o si todo punto tiene una base de entornos abiertos arcoconexos. Las únicas relaciones que podemos probar entre los cuatro conceptos de conexión y arcoconexión local y global son el hecho de que todo espacio (localmente) (arco)conexo es (localmente) conexo junto con la dada por el teorema siguiente:

**Teorema 3.19** *Todo espacio topológico conexo y localmente arcoconexo es arcoconexo.*

DEMOSTRACIÓN: Basta considerar una componente arcoconexa cualquiera del espacio, que será abierta y cerrada, luego por conexión tiene que ser todo el espacio. ■

Los ejemplos siguientes muestran que no hay más relaciones:

1. El "seno del topólogo" (o la variante $\overline{X}$ estudiada en el ejemplo A.19) es un ejemplo de espacio conexo (por ser la clausura de un espacio arcoconexo) que no es arcoconexo ni locamente conexo.

2. El espacio $[0, 1]^2$ con el orden lexicográfico es conexo y localmente conexo, pero no es arcoconexo luego tampoco puede ser localmente arcoconexo, por el teorema anterior.

3. El espacio "escoba" (ejemplo A.20) es arcoconexo, pero no es localmente conexo.

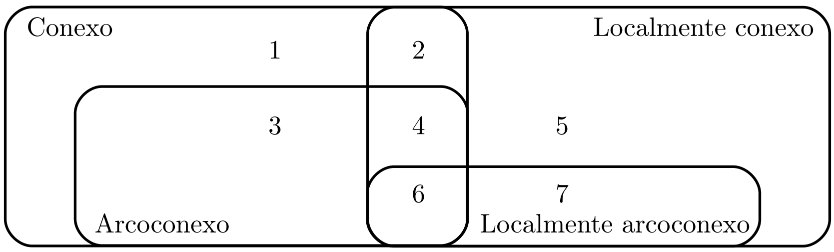
4. La *circunferencia larga* (ejemplo[1] A.29) es un espacio arcoconexo y localmente conexo, pero no localmente arcoconexo.

5. El espacio $[0,1]^2 \times \{0,1\}$, donde en $[0,1]^2$ consideramos la topología derivada del orden lexicográfico, consiste en dos subespacios abiertos y cerrados homeomorfos a $[0,1]^2$, luego sigue siendo localmente conexo y sigue sin ser localmente arcoconexo, pero además no es conexo.

6. Claramente $\mathbb{R}$ cumple las cuatro propiedades de conexión que estamos considerando.

7. El espacio $[0,1] \cup [2,3]$ es localmente arcoconexo, pero no es conexo.

8. Es claro que $\mathbb{Q}$ no cumple ninguna de las cuatro propiedades de conexión. La componente conexa de cada punto se reduce al propio punto, luego lo mismo sucede con las componentes arcoconexas.




El teorema siguiente se demuestra igual que 3.10:

**Teorema 3.20** *Si $f : X \longrightarrow Y$ es una identificación y $X$ es localmente arcoconexo, también lo es $Y$.*

Pero el espacio escoba proporciona también un ejemplo de que una imagen continua de un espacio localmente arcoconexo no tiene por qué ser siquiera localmente conexa.

La prueba del teorema siguiente es análoga a la del teorema 3.11:

**Teorema 3.21** *Un producto no vacío de espacios topológicos es localmente arcoconexo si y sólo si todos los factores son localmente arcoconexos y todos salvo a lo sumo un número finito de ellos son conexos.*

[1] Este ejemplo es una modificación del ejemplo previo (la *recta larga*, ejemplo A.28) y supone conocido que existen ordinales no numerables, el menor de los cuales recibe el nombre de $\omega_1$. Esto lo probaremos en [TC 5.9], pero el argumento no requiere nada más allá del capítulo III de [TC]. En efecto, basta considerar el conjunto $A \subset \mathcal{P}(\omega \times \omega)$ de todos los buenos órdenes en $\omega$ y la aplicación $f : A \longrightarrow \Omega$ dada por $f(R) = \operatorname{ord}(\omega, R)$. Todo ordinal $\alpha \in \Omega \setminus f[A]$ es no numerable.

## 3.5 Espacios totalmente disconexos

**Definición 3.22** Un espacio topológico es *totalmente disconexo* si sus únicos subespacios conexos no vacíos son los puntos. Equivalentemente, si sus componentes conexas son los puntos.

Por ejemplo, ya hemos observado que $\mathbb{Q}$ es totalmente disconexo. En realidad cumple algo más fuerte, como veremos enseguida.

Si $X$ es un espacio topológico, la *cuasicomponente* de un punto $x$ es la intersección $Q(x)$ de todos los abiertos cerrados que contienen a $x$.

Un espacio topológico es *cerodimensional* si es no vacío, sus puntos son cerrados y tiene una base formada por abiertos cerrados.

**Teorema 3.23** *Si $X$ es un espacio topológico y $x \in X$:*

1. *Las cuasicomponentes de $X$ son una partición de $X$ en cerrados disjuntos dos a dos.*
2. *$C(x) \subset Q(x)$.*
3. *Si $X$ es cerodimensional, entonces sus cuasicomponentes se reducen a los puntos, luego es totalmente disconexo.*

DEMOSTRACIÓN: 1) Dados $x$, $y \in X$, o bien ambos están contenidos en los mismos abiertos cerrados, en cuyo caso $Q(x) = Q(y)$, o bien existe un abierto cerrado $C$ tal que $x \in C$, $y \in X \setminus C$, en cuyo caso $Q(x) \subset C$, $Q(y) \subset X \setminus C$.

2) Si $C$ es un abierto cerrado en $X$ que contiene a $x$, entonces $C(x) \cap C$ es un abierto cerrado no vacío en $C(x)$, que es conexo, luego $C(x) \cap C = C(x)$, luego $C(x) \subset C$ y, por consiguiente, $C(x) \subset Q(x)$.

3) Si $p$, $q \in X$ son puntos distintos, como $\{p\}$ es cerrado, $X \setminus \{p\}$ es abierto, luego existe un abierto cerrado $U$ tal que $q \in U \subset X \setminus \{p\}$, luego $p \in X \setminus U$, luego $Q(p) \subset X \setminus U$, luego s$q \notin Q(p)$, luego $Q(p) = \{p\}$. ■

Según decíamos, el espacio $\mathbb{Q}$ es, de hecho, cerodimensional, pues los conjuntos $]a, b[ \cap \mathbb{Q}$, donde $a < b$ son números irracionales forman una base de abiertos cerrados en $\mathbb{Q}$. De hecho, el teorema 12.15 prueba que todo espacio ordenado totalmente disconexo es cerodimensional. 455

El ejemplo A.64 es un espacio en el que las cuasicomponentes se reducen a los puntos, pero que no es cerodimensional. Por otra parte, el ejemplo A.22 es un espacio en el que las componentes conexas no coinciden con las cuasicomponentes.

Obviamente, todo subespacio (no vacío) de un espacio totalmente disconexo (cerodimensional) es totalmente disconexo (cerodimensional).

**Teorema 3.24** *Un producto no vacío de espacios topológicos es totalmente disconexo (resp. cerodimensional) si y sólo si lo es cada factor.*

Demostración: Sea $\{X_i\}_{i\in I}$ una familia de espacios topológicos. Si el producto es no vacío, por el teorema 1.42 tiene subespacios homeomorfos a cada factor, luego si es totalmente disconexo o cerodimensional, lo mismo vale para todos los factores.

Si los factores son totalmente disconexos y $C$ es un subconjunto conexo no vacío en el producto, entonces las proyecciones $p_i[C]$ son conexas no vacías, luego se reducen a un punto, luego $C$ también se reduce a un punto.

Supongamos finalmente que los factores son cerodimensionales. Si tomamos un punto $x \in \prod\limits_{i\in I} X_i$, entonces $\{x\} = \prod\limits_{i\in I}\{x_i\}$ es un producto de cerrados, luego es cerrado.

También es claro que los abiertos básicos del producto formados a partir de una base de abiertos cerrados de cada factor son una base de abiertos cerrados en el producto. ■

En este punto el lector puede abordar el apartado sobre conexión en grupos topológicos de la sección 10.1 y la sección 11.4 sobre convexidad en espacios vectoriales topológicos. 358

## 3.6 Espacios extremadamente disconexos

En 1929, Alexandroff y Urysohn preguntaron si existe un espacio compacto infinito que no contenga ninguna sucesión convergente no trivial (es decir, no finalmente constante). La respuesta la proporcionaron independientemente Tychonoff (en 1935) y Čech (en 1937). Ambos encontraron el mismo ejemplo, aunque su presentación fue muy diferente. Čech desarrolló en general el concepto que hoy se conoce como la compactificación de Stone-Čech de un espacio completamente regular, y demostró que $\beta\omega$ (la compactificación de Stone-Čech de un espacio discreto numerable) no tiene sucesiones convergentes no triviales. El mismo año, Stone publicó también una construcción general diferente de la compactificación de Stone-Čech. Este concepto lo estudiaremos en el capítulo 7, pero aquí podemos presentar la propiedad de desconexión que hace que $\beta\omega$ no tenga subsucesiones convergentes no triviales.

**Definición 3.25** Un espacio topológico de Hausdorff es *extremadamente disconexo* si las clausuras de sus abiertos son abiertas. Equivalentemente:

**Teorema 3.26** *Un espacio topológico de Hausdorff es extremadamente disconexo si y sólo si abiertos disjuntos tienen clausuras disjuntas.*

Demostración: Sea $X$ un espacio de Hausdorff con la propiedad indicada. Si $U$ es abierto, los abiertos $U$ y $X\setminus\overline{U}$ son abiertos disjuntos, y la intersección de sus clausuras es $\overline{U}\cap(X\setminus\mathring{\overline{U}}) = \varnothing$, lo que equivale a que $\overline{U}\subset\mathring{\overline{U}}$, es decir, a que $\overline{U}$ sea abierto. El recíproco se prueba sin dificultad. ■

Obviamente todo espacio discreto es extremadamente disconexo, pero todos los ejemplos de espacios extremadamente disconexos no discretos que vamos a citar están relacionados con la compactificación de Stone-Čech, así que dependen de los resultados del capítulo 7.

**Teorema 3.27** *Todo espacio extremadamente disconexo es totalmente disconexo.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $X$ un espacio extremadamente disconexo y sean $p$, $q \in X$ dos puntos distintos. Por definición, $X$ es un espacio de Hausdorff, luego podemos tomar abiertos disjuntos $p \in U$, $q \in V$. Entonces $\overline{U}$ es un abierto-cerrado disjunto de $V$, luego $p \in \overline{U}$, $q \notin \overline{U}$, de donde se sigue que $q$ no pertenece a la componente conexa de $p$, luego ésta se reduce a $\{p\}$. ■

En la prueba del teorema anterior es esencial el hecho de que hayamos exigido la propiedad de Hausdorff en la definición de espacio extremadamente disconexo. De no haberlo hecho, nos encontraríamos con que si $X$ es un conjunto infinito con la topología cofinita (ejemplo A.3), entonces $X$ es un espacio $T_1$ conexo y —con la definición relajada— sería también extremadamente disconexo, ya que la clausura de cualquier abierto no vacío es todo $X$, luego es abierta.

Por otra parte, el ejemplo A.15 es un caso de espacio extremadamente disconexo que no es ni regular ni cerodimensional. Sin embargo, un espacio extremadamente disconexo regular es cerodimensional. Posponemos la prueba porque en 5.69 demostraremos algo más fuerte.

En el ejemplo A.36 se muestra que el producto de espacios extremadamente disconexos no tiene por qué ser extremadamente disconexo[2] y que un subespacio cerrado de un espacio extremadamente disconexo no tiene por qué ser extremadamente disconexo. No obstante, los abiertos sí que heredan la desconexión extrema:

**Teorema 3.28** *Todo subespacio abierto o denso en un espacio extremadamente disconexo es extremadamente disconexo.*

DEMOSTRACIÓN: Si $X$ es extremadamente disconexo y $U \subset X$ es abierto, entonces todo abierto $V \subset U$ es abierto en $X$, luego la clausura $\overline{V}$ en $X$ es abierta, y la clausura en $U$ es $\overline{V} \cap U$, que también es abierta en $U$.

Si $D \subset X$, un abierto en $D$ es de la forma $V = U \cap D$, donde $U$ es un abierto en $X$. El teorema 1.22 nos da que $\overline{V} = \overline{U}$ es abierta, luego la clausura de $V$ en $D$, que es $\overline{V} \cap D$, es abierta en $D$. ■

**Teorema 3.29** *Si $X$ es extremadamente disconexo y $f : X \longrightarrow Y$ es una aplicación continua, abierta, entonces $f[X]$ es extremadamente disconexo.*

DEMOSTRACIÓN: Podemos suponer que $f$ es suprayectiva. Si $U$ es abierto en $Y$, el hecho de que $f$ sea continua y abierta implica que $f^{-1}[\overline{U}] = \overline{f^{-1}[U]}$ y este conjunto es abierto porque $X$ es extremadamente disconexo, luego la clausura $\overline{U} = f[f^{-1}[\overline{U}]]$ también es abierta. ■

Finalmente probamos la propiedad de los espacios extremadamente disconexos a la que hacíamos referencia al principio de esta sección:

[2] Véase también el teorema 8.34.

**Teorema 3.30** *Un espacio compacto de Hausdorff extremadamente disconexo no contiene sucesiones convergentes no triviales (es decir, no finalmente constantes).*

Sea $X$ un espacio compacto extremadamente disconexo y sea $S \subset X$ un subconjunto infinito numerable. Basta probar que existe un abierto-cerrado $C \subset X$ tal que $S \cap C$ y $S \setminus C$ son ambos infinitos, pues entonces es imposible que $S$ tenga un único punto de acumulación, luego no puede ser el conjunto de términos de una sucesión convergente no finalmente constante.

Por el teorema 5.4 tenemos que $S$ contiene un subespacio infinito discreto, luego no perdemos generalidad si suponemos que el propio $S$ es discreto Si $S = \{x_n \mid n \in \omega\}$, esto significa que cada $x_n$ tiene un entorno $U_n$ abierto cerrado tal que $S \cap U_n = \{x_n\}$. Llamando $V_n = U_n \setminus \bigcup\limits_{m<n} U_m$, se cumple igualmente que $S \cap V_n = \{x_n\}$, pero además los abiertos cerrados $V_n$ son disjuntos dos a dos. Para $i = 0, 1$, sea $C_i = \bigcup\{V_{2m+i} \mid m \in \omega\}$, de modo que $C_0$ y $C_1$ son abiertos disjuntos, luego $\overline{C}_0$ y $\overline{C}_1$ son abiertos-cerrados disjuntos cada uno de los cuales contiene infinitos puntos de $S$, luego $\overline{C}_0$ cumple lo requerido. ■ 151

## 3.7 Apéndice: Exponenciación de números reales

El teorema de los valores intermedios implica que todo número real positivo tiene una raíz $n$-sima:

**Teorema 3.31** *Para cada número natural $n \geq 1$ y cada número real $\alpha \geq 0$ existe un único número real $\beta \geq 0$ tal que $\beta^n = \alpha$.*

Demostración: Si $\alpha = 0$ o $\alpha = 1$ la conclusión es inmediata, así que podemos suponer que $\alpha > 0$ y $\alpha \neq 1$, así como que $n \geq 2$. Sea $f : [0, +\infty[ \longrightarrow \mathbb{R}$ la función dada por $f(x) = x^n - \alpha$. Sabemos que es continua y $f(0) = -\alpha < 0$. Si $\alpha < 1$, entonces $f(1) = 1-\alpha > 0$. Si $\alpha > 1$, entonces $\alpha^n > \alpha$, luego $f(\alpha) > 0$. En cualquier caso $f$ toma valores positivos y negativos, luego por el teorema anterior existe un $\beta \in [0, +\infty[$ tal que $f(\beta) = 0$, es decir, tal que $\beta^n = \alpha$. La unicidad se debe a que si $0 < \beta_1 < \beta_2$, entonces $\beta_1^n < \beta_2^n$. ■

**Definición 3.32** Si $\alpha \geq 0$, el único número real $\beta \geq 0$ que cumple $\beta^n = \alpha$ se llama *raíz n-sima* de $\alpha$, y se representa por $\sqrt[n]{\alpha}$.

La función $[0, +\infty[ \longrightarrow [0, +\infty[$ dada por $x \mapsto x^n$ es biyectiva y creciente, luego se trata de una semejanza, y lo mismo vale para su inversa, que es la función $\sqrt[n]{x}$, luego ésta también es una semejanza y, por consiguiente, es un homeomorfismo. La unicidad hace que $\sqrt[n]{\alpha^m} = (\sqrt[n]{\alpha})^m$, para todo número entero $m$.

**Teorema 3.33** *Si $a > 0$ es un número real, entonces $\lim\limits_n \sqrt[n]{a} = 1$.*

Demostración: Si $a = 1$ tenemos que $\sqrt[n]{a} = 1$, por lo que la conclusión es trivial. Si $a > 1$ se cumple que $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{1} = 1$. Dado $\epsilon > 0$, puesto que $1+n\epsilon \leq (1+\epsilon)^n$, para todo $n$ suficientemente grande se cumple que $a < (1+\epsilon)^n$, luego $1 < \sqrt[n]{a} < 1 + \epsilon$, luego tenemos la conclusión.

Si $0 < a < 1$, dado $\epsilon > 0$, en la página 1.2 hemos probado que $\lim\limits_n (1-\epsilon)^n = 0$, luego para todo $n$ suficientemente grande se cumple que $(1 - \epsilon)^n < a$, luego $1 - \epsilon < \sqrt[n]{a} < 1$ y llegamos a la misma conclusión. ■

Observemos ahora que si $a > 1$, $p$, $r$ son números enteros y $q$, $s$ son números naturales no nulos tales que $p/q < r/s$, entonces $qr - ps > 0$, luego $a^{qr-ps} > 1$, luego $a^{ps} < a^{qr}$, luego $a^p < \sqrt[s]{a^{qr}} = (\sqrt[s]{a^r})^q$, luego $(\sqrt[q]{a})^p = \sqrt[q]{a^p} < \sqrt[s]{a^r}$. Si $0 < a < 1$ llegamos análogamente a que $\sqrt[s]{a^r} < (\sqrt[q]{a})^p$. Esto justifica la definición siguiente:

**Definición 3.34** Si $a > 0$ es un número real y $r = p/q$ es un número racional, llamaremos $a^r = \sqrt[q]{a^p}$.

Hemos probado que la definición no depende de la representación de $r$ como fracción, así como que la función $a^{(\ )} : \mathbb{Q} \longrightarrow ]0, +\infty[$ es monótona creciente si $a > 1$ y monótona decreciente si $a < 1$ (y es constante si $a = 1$).

Es fácil ver que $a^{r+s} = a^r a^s$, así como que $(a^r)^s = a^{rs}$.

Veamos ahora que, si $a \neq 1$, esta aplicación es densa, es decir, que, dados números reales $0 < u < v$, existe un número racional $r > 0$ tal que $u < a^r < v$. Supongamos en primer lugar que $a > 1$.

Si $1 < u < v$, por el teorema anterior existe un número natural $q > 0$ tal que $\sqrt[q]{a} - 1 < (v - u)/u$, $1 < \sqrt[q]{a} < u$. Como $\sqrt[q]{a} > 1$, se cumple que $u \leq (\sqrt[q]{a})^k$ para todo $k$ suficientemente grande, luego podemos tomar el máximo número natural $k \geq 1$ tal que $(\sqrt[q]{a})^k \leq u < v$. Entonces

$$a^{(k+1)/q} - a^{k/q} = a^{k/q}(a^{1/q} - 1) \leq u(\sqrt[q]{a} - 1) < v - u,$$

luego $u < a^{(k+1)/q} < a^{k/q} + v - u < v$.

Si $u \leq 1$ pero $v > 1$, basta aplicar la parte ya probada con $u \leq 1 < u' < v$. Por lo tanto, podemos suponer que $0 < u < v < 1 < a$, pero entonces $1 < 1/v < 1/u$, y por la parte ya probada existe un $r$ tal que $1/v < a^r < 1/u$, y así $u < 1/a^r = a^{-r} < v$.

Finalmente, si $0 < a < 1$, tenemos que $1/a < 1$, luego existe un $r$ tal que $1/v < (1/a)^r < 1/u$, de donde $u < a^{-r} < v$.

El teorema siguiente es ahora consecuencia directa del teorema [TC 2.43]:

**Teorema 3.35** *Para cada número real $a > 0$, existe una única función exponencial $a^{(\ )} : \mathbb{R} \longrightarrow ]0, +\infty[$ que es una semejanza y que cumple $a^r = \sqrt[q]{a^p}$ para todo número racional $r = p/q$.*

De hecho, la exponencial de base $a$ es la única función continua de $\mathbb{R}$ en $]0, +\infty[$ que cumple $a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p}$, pues, en general, si dos funciones continuas

$f, g : \mathbb{R}^n \longrightarrow X$ coinciden en $\mathbb{Q}^n$, entonces son iguales. En efecto, dado un punto $a \in \mathbb{R}^n$, como $\mathbb{Q}^n$ es denso en $\mathbb{R}^n$, podemos encontrar una sucesión $\{q_k\}_{k=0}^{\infty}$ en $\mathbb{Q}^n$ convergente a $x$, y entonces

$$f(x) = \lim_k f(q_k) = \lim_k g(q_k) = g(x).$$

Más aún, esto hace que las propiedades algebraicas de la exponenciación con exponentes racionales valgan también para exponentes reales:

**Teorema 3.36** *Si $a$, $b > 0$ y $\alpha$, $\beta$ son números reales, se cumple:*

1. $a^{\alpha+\beta} = a^\alpha a^\beta$.
2. $a^{\alpha\beta} = (a^\alpha)^\beta$.
3. $(ab)^\alpha = a^\alpha b^\beta$.
4. *Si $\alpha < \beta$, entonces $a^\alpha < a^\beta$ si $a > 1$ y $a^\beta < a^\alpha$ si $0 < a < 1$.*

Demostración: Por ejemplo, para probar la primera tomamos una sucesión $\{(p_n, q_n)\}_{n=0}^{\infty}$ en $\mathbb{Q}^2$ que converja a $(\alpha, \beta)$ y usamos que

$$a^{\alpha+\beta} = \lim_n a^{p_n+q_n} = \lim_n a^{p_n} a^{q_n} = a^\alpha a^\beta.$$

Las demás propiedades se prueban análogamente, excepto la última, que ya la tenemos demostrada. ■ 78

# Capítulo IV

# Compacidad

La compacidad es el más abstracto de los conceptos topológicos básicos y a la vez el más potente. Su gestación puede rastrearse en múltiples resultados topológicos previos. Entre los más antiguos se encuentra el teorema de Bolzano (1817), según el cual toda sucesión acotada de números reales tiene una subsucesión convergente. La relevancia de este hecho pasó inadvertida durante casi 50 años, hasta que fue redescubierta por Weierstrass. Por otro lado, en 1870, Heine había demostrado que toda función continua definida en un intervalo acotado es uniformemente continua, y en la prueba había usado un lema previo según el cual de todo cubrimiento numerable por intervalos abiertos de un intervalo cerrado es posible extraer un subcubrimiento finito. Borel se dio cuenta de la importancia de este hecho en 1895, que fue generalizado por Cousin y Lebesgue en 1895 y 1904, respectivamente, y Fréchet introdujo en 1906 el concepto de "espacio compacto" para referirse a un espacio con dicha propiedad sobre los cubrimientos numerables. Finalmente, fueron Alexandroff y Urysohn quienes formularon la definición moderna de compacidad (aunque llamaron "espacios bicompactos" a los que la satisfacen, reservando el término "compacto" para lo que hoy se conoce como "compacidad sucesional"). En 1929 demostraron que las demás versiones de la compacidad eran equivalentes a su definición general en determinadas clases de espacios topológicos.

## 4.1 Espacios compactos

La definición moderna de compacidad es esencialmente una condición de finitud, en el sentido de que los espacios que la cumplen presentan muchas características en común con los espacios finitos sin limitar por ello el tamaño que puede tener el espacio.

**Definición 4.1** Sea $X$ un espacio topológico. Un *cubrimiento abierto* de $X$ es una familia $\mathcal{C}$ de abiertos de $X$ tal que $X = \bigcup \mathcal{C}$. Un *subcubrimiento* de un cubrimiento $\mathcal{C}$ es un cubrimiento contenido en $\mathcal{C}$.

Un espacio topológico $K$ es *compacto*[1] si de todo cubrimiento abierto de $K$ se puede extraer un subcubrimiento finito.

Es obvio que si $X$ es un espacio finito, de todo cubrimiento abierto se puede extraer un subcubrimiento finito. Basta tomar un abierto que contenga a cada uno de los puntos del espacio. Así pues, todo espacio topológico finito es compacto.

Observemos que si $\mathcal{B}$ es una base de un espacio topológico $K$, se cumple que $K$ es compacto si y sólo si todo cubrimiento de $K$ por abiertos básicos admite un subcubrimiento finito. En efecto, si $\mathcal{C}$ es un cubrimiento arbitrario, consideramos el conjunto $\mathcal{C}_0$ de los abiertos básicos contenidos en algún abierto de $\mathcal{C}$, que es también un cubrimiento abierto de $K$, pues para cada $x \in K$ existe un $U \in \mathcal{C}$ tal que $x \in U$, y entonces existe un $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subset U$, luego $x \in B \in \mathcal{C}_0$. Por hipótesis $\mathcal{C}_0$ admite un subcubrimiento finito $\{B_1, \ldots, B_n\}$ y para cada $j = 1, \ldots, n$ existe un $U_j \in \mathcal{C}$ tal que $B_j \subset U_j$, con lo que $\{U_1, \ldots, U_n\}$ es un subcubrimiento finito del cubrimiento dado.

La compacidad puede caracterizarse en términos de cerrados en lugar de abiertos:

Una familia $\mathcal{F}$ de subconjuntos de un conjunto $X$ tiene la *propiedad de la intersección finita* si para todo $F \subset \mathcal{F}$ finito se cumple que $\bigcap F \neq \varnothing$.

**Teorema 4.2** *Un espacio topológico $K$ es compacto si y sólo si toda familia de cerrados de $K$ con la propiedad de la intersección finita tiene intersección no vacía.*

DEMOSTRACIÓN: A cada familia $\mathcal{F}$ de cerrados de $K$ le corresponde la familia de abiertos $\mathcal{F}' = \{K \setminus A \mid A \in \mathcal{F}\}$. La condición $\bigcap \mathcal{F} \neq \varnothing$ equivale a que $\mathcal{F}'$ no sea un cubrimiento abierto, mientras que la propiedad de la intersección finita equivale a que $\mathcal{F}'$ no admita subcubrimientos finitos, luego la condición del enunciado equivale a que toda familia de abiertos que no contenga cubrimientos finitos no es un cubrimiento, es decir, a la compacidad de $K$. ■

Veremos más adelante que un espacio métrico es compacto si y sólo si toda sucesión tiene una subsucesión convergente. Esto no es cierto en general, pero el teorema anterior es en esencia la versión correspondiente para la convergencia de filtros:

**Teorema 4.3** *Un espacio topológico es compacto si y sólo si todo filtro en él tiene un punto adherente.*

DEMOSTRACIÓN: Si $K$ es un espacio compacto y $F$ es un filtro en $K$, entonces la familia $\{\overline{A} \mid A \in F\}$ tiene la propiedad de la intersección finita, luego existe $x \in \bigcap\limits_{A \in F} \overline{A}$, y $x$ es un punto adherente de $F$.

[1] No es raro que se exija la propiedad de Hausdorff en la definición de compacidad. Aquí no lo hacemos.

Si los filtros tienen puntos adherentes y $\mathcal{F}$ es una familia de cerrados con la propiedad de la intersección finita, entonces $\mathcal{F}$ es una subbase de filtro, que está contenida en un filtro $F$, y si $x$ es un punto adherente de $F$, tenemos que $x \in \bigcap\limits_{A\in\mathcal{F}} A \neq \varnothing$, luego $X$ es compacto. ■

Hay muchos espacios que no son compactos pero tienen subespacios compactos. Por ello resulta útil caracterizar la compacidad de un subespacio en términos de la topología de todo el espacio y no de la topología relativa. Concretamente:

**Teorema 4.4** *Sea $X$ un espacio topológico y $K$ un subespacio de $X$. Entonces $K$ es compacto si y sólo si para toda familia $\mathcal{C}$ de abiertos (básicos) de $X$ tal que $K \subset \bigcup \mathcal{C}$ se puede extraer una subfamilia finita que cumpla lo mismo.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que $K$ es compacto. Entonces el conjunto $\{U \cap K \mid U \in \mathcal{C}\}$ es claramente un cubrimiento abierto de $K$, del que podemos extraer un subcubrimiento finito de modo que $K = (U_1 \cap K) \cup \cdots \cup (U_n \cap K)$, luego $K \subset U_1 \cup \cdots \cup U_n$.

Recíprocamente, si $K$ cumple esta propiedad y $\mathcal{C}$ es un cubrimiento abierto de $K$, entonces para cada $U \in \mathcal{C}$ consideramos

$$U^* = \bigcup\{B \subset X \mid B \text{ abierto} \wedge B \cap K = U\},$$

de modo que $U^*$ es abierto en $X$ y $U^* \cap K = U$. Sea $\mathcal{C}^* = \{U^* \mid U \in \mathcal{C}\}$. Entonces $K = \bigcup \mathcal{C} \subset \bigcup \mathcal{C}^*$, luego por hipótesis existe un subcubrimiento finito tal que $K \subset U_1^* \cup \cdots \cup U_n^*$, luego $K = (U_1^* \cap K) \cup \cdots \cup (U_n^* \cap K) = U_1 \cup \cdots \cup U_n$. Así pues, $K$ es compacto. ■

Si la unión de una familia de abiertos de un espacio $X$ contiene a un subespacio $K$, diremos que forma un *cubrimiento abierto* de $K$ en $X$. Así pues, un subespacio $K$ de $X$ es compacto si y sólo si de todo cubrimiento abierto de $K$ en $X$ puede extraerse un subcubrimiento finito (en $X$ también). Aquí estamos considerando la topología de $X$, pero deberemos tener siempre presente que la compacidad es una propiedad absoluta, es decir, que depende exclusivamente de la topología del propio espacio $K$.

Los teoremas siguientes muestran la anunciada similitud entre los espacios compactos y los espacios finitos. Por lo pronto, todo espacio finito es cerrado en un espacio de Hausdorff. El análogo con compactos es el siguiente:

**Teorema 4.5** *Se cumplen las propiedades siguientes:*

1. *Si $X$ es un espacio de Hausdorff y $K \subset X$ es compacto, entonces $K$ es cerrado en $X$.*

2. *Si $K$ es un compacto y $C \subset K$ es un cerrado, entonces $C$ es compacto.*

DEMOSTRACIÓN: 1) Veamos que $X \setminus K$ es abierto. Para ello tomamos $x \in X \setminus K$ y vamos a probar que $X \setminus K$ es entorno de $x$. Sea $\mathcal{C}$ la familia de todos los abiertos $V$ en $X$ tales que existe un abierto $U$ en $X$ tal que $U \cap V = \varnothing$ y $x \in U$.

Tenemos que $\mathcal{C}$ es un cubrimiento abierto de $K$, pues si $v \in K$ existen abiertos disjuntos $U$, $V$ en $X$ que separan a $x$ y $v$, lo que implica que $v \in V \in \mathcal{C}$. Como $K$ es compacto, $\mathcal{C}$ admite un subcubrimiento finito $\{V_1, \ldots, V_n\}$, de modo que $K \subset V_1 \cup \cdots \cup V_n$. Para cada $i$, existe un abierto $U_i$ tal que $x \in U_i$ y $U_i \cap V_i = \varnothing$. Pero entonces $x \in \bigcap\limits_{i=1}^{n} U_i \subset X \setminus K$, luego $K$ es cerrado.

2) Si $\{A_i\}_{i\in I}$ es un cubrimiento abierto de $C$, entonces $\{A_i\}_{i\in I} \cup \{K \setminus C\}$ es un cubrimiento abierto de $K$, luego existe un subcubrimiento finito

$$K = A_{i_1} \cup \cdots \cup A_{i_n} \cup (K \setminus C).$$

Claramente entonces $C \subset A_{i_1} \cup \cdots \cup A_{i_n}$, luego $C$ es compacto. ■

Así pues, en un espacio de Hausdorff compacto, los subespacios compactos son exactamente los cerrados, pero en ausencia de la propiedad de Hausdorff es posible incluso que todos los subespacios sean compactos, como sucede en el caso de la topología cofinita (ejemplo A.3).

Los espacios ordenados compactos están perfectamente caracterizados por el teorema 12.17, mientras que 12.18 caracteriza los subespacios compactos de un espacio ordenado completo. 457

En particular tenemos que los subespacios compactos de $\mathbb{R}$ son los cerrados acotados. Notemos que 12.18 es la generalización de que en un conjunto totalmente ordenado todo subconjunto finito tiene máximo y mínimo.

**Ejemplo** Es fácil ver que el conjunto $C = \{1/n \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\} \cup \{0\}$ es un subespacio compacto de $\mathbb{R}$ (el espacio de Hausdorff infinito compacto más sencillo posible). No es difícil probar que es cerrado y acotado, pero resulta incluso más sencillo comprobar directamente la definición de compacidad, pues, dado un cubrimiento abierto de $C$, un abierto que contenga a $\{0\}$ debe contener a todos los demás puntos salvo a lo sumo a un número finito de ellos, luego basta un número finito de abiertos más para cubrir todo el espacio. ■

Si $f : A \longrightarrow B$ y $A$ es finito, entonces $f[A]$ también es finito. La versión topológica es:

**Teorema 4.6** *Si $f : K \longrightarrow X$ es una aplicación continua, $K$ es compacto, entonces $f[K]$ es compacto.*

Demostración: Si $\{U_i\}_{i\in I}$ es un cubrimiento abierto de $f[K]$ en $X$, entonces $\{f^{-1}[U_i]\}_{i\in I}$ es un cubrimiento abierto de $K$, luego admite un subcubrimiento finito $\{f^{-1}[U_{i_k}]\}_{k=1}^{n}$, pero entonces es claro que $\{U_{i_k}\}_{k=1}^{n}$ es un subcubrimiento finito del cubrimiento dado. ■

Como consecuencia:

**Teorema 4.7** *Toda aplicación continua $f : X \longrightarrow Y$ de un espacio compacto $X$ en un espacio de Hausdorff $Y$ es cerrada. Si $f$ es biyectiva es un homeomorfismo.*

Una aplicación de un conjunto finito en un conjunto totalmente ordenado alcanza un valor máximo y un valor mínimo. Igualmente:

**Teorema 4.8** *Si $f : K \longrightarrow X$ es una aplicación continua de un compacto $K$ en un conjunto totalmente ordenado, entonces $f$ toma un valor máximo y un valor mínimo.*

Demostración: Tenemos que $f[K]$ es compacto en $X$, luego tiene máximo y mínimo por el teorema 12.18. ■

Como consecuencia inmediata obtenemos una clase destacada de espacios de Banach:

**Teorema 4.9** *Si $K$ es un espacio compacto, el espacio $C(K, \mathbb{K})$ de todas las funciones continuas en $K$ con valores en $\mathbb{K}$ es un espacio de Banach con la norma $\|f\| = \max\{|f(x)| \mid x \in K\}$, cuya topología asociada es la topología de la convergencia uniforme.*

Demostración: Se trata de la norma considerada en el teorema 2.49, que ya hemos visto que induce la uniformidad de la convergencia uniforme. El teorema 2.53 nos da la completitud. ■

Veamos ahora que la propiedad de Hausdorff se aplica a cualquier par de subespacios compactos:

**Teorema 4.10** *Si $X$ es un espacio de Hausdorff y $C_1$, $C_2$ son dos subespacios compactos disjuntos en $X$, existen abiertos disjuntos $U_1$ y $U_2$ tales que $C_i \subset U_i$.*

Demostración: Supongamos primero que $C_1 = \{x\}$. Para cada punto $y \in C_2$, por la propiedad de Hausdorff, existen abiertos disjuntos $U_y$, $V_y$ tales que $x \in U_y$, $y \in V_y$. Así, $\{V_y\}_{y \in Y}$ es un cubrimiento abierto de $C_2$, que es compacto, luego existe un subcubrimiento finito $V_{y_1}, \ldots, V_{y_b}$. Basta tomar $U = U_{y_1} \cap \cdots \cap U_{y_n}$, $V = V_{y_1} \cup \cdots \cup V_{y_n}$.

En el caso general repetimos el argumento, pero ahora tomando abiertos disjuntos $U_y$, $V_y$ tales que $C_1 \subset U_y$, $y \in V_y$ (que existen por la parte ya probada aplicada a $C_1$ e $y \in C_2$). ■

Veamos una aplicación, para lo cual demostramos primero una variante del teorema 4.4:

**Teorema 4.11** *Sea $U$ abierto en un espacio topológico $X$ y sea $\{F_i\}_{i \in I}$ una familia de cerrados en $X$ al menos uno de los cuales sea compacto y tal que $\bigcap\limits_{i \in I} F_i \subset U$. Entonces existe $I_0 \subset I$ finito tal que $\bigcap\limits_{i \in I_0} F_i \subset U$.*

Demostración: Sea $F_{i_0}$ compacto. Cambiando $X$ por $F_{i_0}$ y, consecuentemente, $U$ por $U \cap F_{i_0}$ (abierto en $F_{i_0}$) y cada $F_i$ por $F_i \cap F_{i_0}$, podemos suponer que $X$ es compacto. Los abiertos $X \setminus F_i$ forman un cubrimiento del cerrado (luego compacto) $X \setminus U$, por lo que existe un subcubrimiento finito, es decir, $X \setminus U \subset \bigcup\limits_{i \in I_0} (X \setminus F_i)$, y así $I_0$ cumple lo requerido. ■

**Teorema 4.12** *En un espacio de Hausdorff compacto, las componentes conexas coinciden con las cuasicomponentes.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $K$ un espacio compacto. Por el teorema 3.23, toda componente conexa de $K$ está contenida en una cuasicomponente, luego basta probar que las cuasicomponentes son conexas. Supongamos que $Q = Q(x)$ es una cuasicomponente de $K$ disconexa, de modo que $Q = U_1 \cup U_2$, donde los $U_i$ son abiertos disjuntos en $Q$, luego también cerrados disjuntos y, como $Q$ es cerrado en $K$, tenemos que $U_1$ y $U_2$ son cerrados disjuntos en $K$.

Por el teorema 4.10 existen abiertos disjuntos $V_1$, $V_2$ tales que $U_i \subset V_i$. Así $Q \subset V_1 \cup V_2$, pero $Q$ es la intersección de todos los abiertos cerrados de $K$ que contienen a $x$, luego por el teorema anterior existe un número finito de abiertos cerrados, digamos $W_1, \ldots, W_n$ tales que $x \in Q \subset W = W_1 \cap \cdots \cap W_n \subset V_1 \cup V_2$. Pero entonces, el propio $W$ es un abierto cerrado.

Si, por ejemplo, $x \in U_1$, entonces $x \in W \cap V_1$, que es abierto cerrado en $K$, pues

$$\overline{W \cap V_1} \subset W \cap \overline{V}_1 \subset W \cap (V_1 \cup V_2) \cap \overline{V}_1 = W \cap V_1,$$

ya que $V_2 \cap \overline{V}_1 = \varnothing$. Por consiguiente, $Q \subset W \cap V_1$, luego $U_2 \subset V_1 \cap V_2 = \varnothing$.

■

Ya hemos visto que la compacidad se conserva al pasar a subespacios cerrados y al tomar imágenes continuas. Ahora vamos a probar que todo producto de espacios compactos es compacto. La prueba se apoya en algunos resultados generales elementales sobre ultrafiltros.

Recordemos [TC 4.30], que un *ultrafiltro* en un conjunto $X$ es un filtro tal que todo $A \subset X$ cumple $A \in U$ o bien $X \setminus A \in U$.

**Teorema 4.13** *Si $U$ es un ultrafiltro en un espacio topológico $X$ y $x$ es un punto adherente de $U$, entonces $U$ converge a $x$.*

DEMOSTRACIÓN: Si $A$ es un entorno de $x$ pero $A \notin U$, entonces $X \setminus A \in U$, luego $x \in \overline{X \setminus A} = X \setminus \mathring{A}$, pero esto contradice que $A$ sea un entorno de $x$. ■

Esto nos da una caracterización de la compacidad en términos de convergencia de ultrafiltros:[2]

**Teorema 4.14 (TU)** *Un espacio topológico es compacto si y sólo si en él todo ultrafiltro es convergente.*

DEMOSTRACIÓN: Si $X$ es compacto, por el teorema 4.3 todo ultrafiltro tiene un punto adherente, y por el teorema anterior converge a él. Recíprocamente, si $F$ es un filtro en $X$, por el teorema de los ultrafiltros está contenido en un ultrafiltro $U$, y si $U$ converge a $x$, entonces es un punto adherente de $U$, y trivialmente también lo es de $F$. Por consiguiente, $K$ es compacto por 4.3. ■

[2] El teorema siguiente usa el axioma de elección, pero conviene observar que sólo lo hace a través del teorema de los ultrafiltros (TU) [TC 4.32]

Finalmente observemos que si $f : X \longrightarrow Y$ es una aplicación suprayectiva entre dos conjuntos y $U$ es un ultrafiltro en $X$, el filtro

$$f[U] = \{A \subset Y \mid f^{-1}[A] \in U\}$$

es claramente un ultrafiltro.

**Teorema 4.15 (Tychonoff) (AE)** *Todo producto de espacios compactos es compacto.*

DEMOSTRACIÓN: Basta probar que todo ultrafiltro $U$ en $X$ converge. Para ello consideramos las proyecciones $p_i[U]$, que son ultrafiltros en cada $X_i$, luego convergen. Elijamos un $x_i \in X_i$ tal que $p_i[U]$ converja a $x_i$. Entonces $U$ converge a $x$. ■

**Nota** En la prueba del teorema anterior hemos usado AE en dos ocasiones: primero al elegir un $x_i$ al que converja cada ultrafiltro $p_i[X]$ y luego al aplicar la caracterización de los compactos en términos de ultrafiltros. Ahora bien, si los espacios $X_i$ son de Hausdorff, entonces cada $p_i[U]$ tiene un único límite, luego podemos suprimir el primer uso de AE, y el segundo requiere únicamente el teorema de los ultrafiltros, luego tenemos que (TU) implica que el producto de espacios de Hausdorff compactos es compacto.

Por otra parte, el hecho de que el producto de espacios compactos (no necesariamente de Hausdorff) es compacto es una forma equivalente del axioma de elección. En efecto, ya hemos visto que AE implica que el producto de espacios compactos es compacto y, admitiendo esto, tomemos una familia $\{X_i\}_{i\in I}$ de conjuntos no vacíos y vamos a probar que $\prod\limits_{i\in I} X_i \neq \varnothing$, lo que, por la observación tras el teorema [TC 4.27], equivale al axioma de elección.

Sea $p$ cualquier conjunto que no esté en $\bigcup\limits_{i\in I} X_i$ y sea $Y_i = X_i \cup \{p\}$. Consideramos a cada $Y_i$ como espacio topológico con la topología que tiene por cerrados a $Y_i$, $X_i$ y los conjuntos finitos. Se comprueba sin dificultad que realmente es una topología (no de Hausdorff si $X_i$ es infinito). Además $Y_i$ es un espacio compacto, pues, dado un cubrimiento abierto $\mathcal{C}$ de $Y_i$, tomamos un punto $x \in X_i$ y un abierto $U \in \mathcal{C}$ tal que $x \in U$, pero entonces $U$ contiene todos los puntos de $Y_i$ salvo a lo sumo un número finito de ellos, luego tomando un abierto de $\mathcal{C}$ para cada uno de los puntos de $Y_i \setminus U$ obtenemos un subcubrimiento finito.

Por lo tanto, tenemos que $Y = \prod\limits_{i\in I} Y_i$ es compacto. Para cada $i \in I$, sea

$$Z_i = \{f \in Y \mid f(i) \in X_i\}.$$

Se trata de un cerrado, pues $Y \setminus Z_i = \bigcup\limits_{i\in I} p_i^{-1}[\{p\}]$ y $\{p\}$ es abierto en $Y_i$. Además, la familia $\{Z_i \mid i \in I\}$ tiene la propiedad de la intersección finita, pues si $I_0 \subset I$ es finito, podemos tomar $s \in \prod\limits_{i\in I_0} X_i$ (porque los conjuntos finitos siempre tienen funciones de elección) y extenderlo a $Y$ mediante $s(i) = p$ para $i \in I \setminus I_0$, con lo que obtenemos un $s \in \bigcap\limits_{i\in I_0} Z_i$. Por la compacidad existe $f \in \bigcap\limits_{i\in I} Z_i$, con lo que $f \in \prod\limits_{i\in I} X_i \neq \varnothing$. ■

Sin embargo, hay muchos casos particulares del teorema de Tychonoff que no requieren el axioma de elección y otros que sólo requieren formas débiles del mismo. Vamos a dar una prueba alternativa más complicada, pero que muestra claramente en qué medida es necesario el axioma de elección. El teorema de Tychonoff es consecuencia inmediata del teorema siguiente:

**Teorema 4.16** *Sea $\{X_i\}_{i\in I}$ una familia de espacios topológicos compactos. Supongamos que $I$ admite un buen orden y que, si $I$ es infinito, existe una función de elección sobre el conjunto de todos los cerrados en todos los espacios $X_i$. Entonces el producto $X = \prod\limits_{i\in I} X_i$ es compacto.*

Demostración: No perdemos generalidad si sustituimos $I$ por un ordinal $\alpha$. Podemos suponer que $X \neq \varnothing$, pues si no la conclusión es trivial.

Sea $\mathbb{P} = \bigcup\limits_{\beta\leq\alpha} \prod\limits_{i\in\beta} X_i$, considerado como conjunto parcialmente ordenado por la inclusión. Definimos la *altura* de un $p \in \mathbb{P}$ como $\operatorname{alt} p = \mathcal{D}p$, es decir, el único ordinal $\beta \leq \alpha$ tal que $p \in X^\beta$. Así, los elementos de $X$ son los elementos de $\mathbb{P}$ de altura $\alpha$.

Para cada $p \in \mathbb{P}$ llamaremos $M(p) = \{x \in X \mid p \subset x\}$. Notemos que $M(p) \neq \varnothing$, pues, como estamos suponiendo que $X$ no es vacío, podemos tomar $x \in X$ y, si $\operatorname{alt} p = \beta$, basta considerar $p' = p \cup (x|_{\lambda\setminus\beta}) \in M(p)$.

Fijemos un cubrimiento abierto $\mathcal{C}$ de $X$. No perdemos generalidad si suponemos que sus elementos son abiertos básicos del producto.

Sea $A$ el conjunto de todos los $p \in \mathbb{P}$ tales que $M(p)$ no está contenido en ninguna unión finita de abiertos de $\mathcal{C}$. Basta probar que $A = \varnothing$, pues entonces $X = M(\varnothing)$ está contenido en una unión finita de abiertos de $\mathcal{C}$. Suponemos, pues, que $A \neq \varnothing$. Notemos que si $p \in A$ y $q \subset p$ entonces $M(p) \subset M(q)$, luego $q \in A$.

Llamaremos $A^\beta = A \cap X^\beta$, el conjunto de los elementos de $A$ de altura $\beta$. Veamos que si $\beta < \alpha$ y $s \in A^\beta$, entonces $C(s) = \{t(\beta) \mid t \in A \land s \subsetneq t\}$ es cerrado en $X_\beta$. Para ello tomamos un $a \in X_\beta \setminus C(s)$ y vamos a encontrar un abierto $a \in U \subset X_\beta \setminus C(s)$.

Sea $t = s \cup \{(\beta, a)\} \in X^{\beta+1}$. Como $t$ no puede justificar que $a \in C(s)$, necesariamente $t \notin A$, luego $M(t) \subset \bigcup G$, para cierto $G \subset \mathcal{C}$ finito. Reduciendo $G$ si es preciso podemos suponer que todo $V \in G$ corta a $M(t)$.

Cada $V \in G$ es un abierto básico, de la forma $\bigcap\limits_{\delta\in J_V} p_\delta^{-1}[W_{V\delta}]$, donde $J_V \subset \alpha$ es finito y $W_{V\delta}$ es abierto en $X_\delta$. Podemos suponer que $\beta \in J_V$ añadiendo si es preciso $W_{V\beta} = X_\beta$. Como $V \cap M(t) \neq \varnothing$, existe un $x \in V$ tal que $x|_{\beta+1} = t$, luego $a = x(\beta) \in W_{V\beta}$. Sea $U = \bigcap\limits_{V\in G} W_{V\beta}$, que es un entorno abierto de $a$.

Veamos que $\{x \in X \mid s \subset x \land x(\beta) \in U\} \subset \bigcup G$.

En efecto, si $x \in X$ cumple que $s \subset x \land x(\beta) \in U$, sea $y \in X$ la aplicación que coincide con $x$ salvo por que $y(\beta) = a$. Entonces $t \subset y$, luego $y \in M(t)$, luego existe un $V \in G$ tal que $y \in V = \bigcap\limits_{\delta \in J_V} p_\delta^{-1}[W_{V\delta}]$. Como $x(\beta) \in U \subset W_{V\beta}$, es claro entonces que $x \in V$, luego $x \in \bigcup G$. Por consiguiente $U \subset X_\beta \setminus C(s)$, como había que probar.

Veamos ahora que $C(s) \neq \varnothing$. En caso contrario, el paso anterior prueba que la familia de todos los abiertos $U$ en $X_i$ tales que $\{x \in X \mid s \subset x \land x(\beta) \in U\}$ está contenido en una unión finita de elementos de $\mathcal{C}$ es un cubrimiento abierto de $X_\beta$ (pues hemos probado que cubre a $X_\beta \setminus C(s)$). Por la compacidad de $X_\beta$ podríamos extraer un subcubrimiento finito $X_\beta = \bigcup\limits_{k<n} U_k$, pero entonces

$$M(s) = \bigcup_{k<n} \{x \in X \mid s \subset x \land x(\beta) \in U_k\}$$

estaría contenido en una unión finita de elementos de $\mathcal{C}$, en contra de que $s \in A$.

En particular tenemos que si $s \in A$ tiene altura $\beta < \alpha$, entonces existe un $t \in A$ tal que $s \subsetneq t$. Si $\alpha$ es finito, esto basta para concluir que existe un $p \in A$ de altura $\alpha$ (pues podemos considerar la máxima altura de un elemento de $A$ y acabamos de probar que no puede ser menor que $\alpha$), pero esto es absurdo, porque entonces $p \in X$ y $M(p) = \{p\}$ no debería estar contenido en una unión finita de elementos de $\mathcal{C}$, y esto contradice que $\mathcal{C}$ sea un cubrimiento de $X$. Así pues, si $\alpha$ es finito tenemos que $A = \varnothing$ y $X$ es compacto.

A partir de aquí suponemos que $\alpha$ es un ordinal infinito y por hipótesis contamos con una función de elección $e$ que a cada cerrado $C \neq \varnothing$ de cada $X_i$ le asigna un elemento $e(C) \in C$. Vamos a definir recurrentemente una sucesión $\{s_\delta\}_{\delta \leq \alpha}$ de modo que $s_\delta \in A^\delta$ y $\bigwedge \delta \epsilon (\delta \leq \epsilon < \alpha \rightarrow s_\delta \subset s_\epsilon)$.

Tomamos $s_0 = \varnothing$. Si $\delta < \alpha$, definimos $s_{\delta+1} \in A^{\delta+1}$ como el único elemento que cumple $s_\delta \subset s_{\delta+1} \land s_{\delta+1}(\delta) = e(C(s_\delta))$. Por último, si $\lambda < \alpha$, definimos $s_\lambda = \bigcup\limits_{\delta<\lambda} s_\delta$ y veamos que $s_\lambda \in A^\lambda$. En principio tenemos que $s_\lambda \in X^\lambda$, pero falta probar que $s_\lambda \in A$. En caso contrario, existe $G \subset \mathcal{C}$ finito tal que $M(s_\lambda) \subset \bigcup G$. Podemos suponer que todo $V \in G$ corta a $M(s_\lambda)$.

Como antes, cada $V \in G$ es de la forma $\bigcap\limits_{\delta \in J_V} p_\delta^{-1}[W_{V\delta}]$, donde $J_V \subset \alpha$ es finito y $W_{V\delta}$ es abierto en $X_\delta$. Sea $J = \bigcup\limits_{V \in G} J_V$, que es un subconjunto finito de $\alpha$. Sea $\beta < \lambda$ una cota superior de $J \cap \lambda$. Vamos a ver que $M(s_\beta) \subset \bigcup G$, en contradicción con que $s_\beta \in A$. En efecto, observemos en primer lugar que, para todo $V \in G$, como existe un $y \in V \cap M(s_\lambda)$, para cada $\delta \in J_V \cap \lambda$ tenemos que $s_\lambda(\delta) = y(\delta) \in W_{V\delta}$.

Si $x \in M(s_\beta)$, sea $y = s_\lambda \cup x|_{\alpha \setminus \lambda}$. Entonces $y \in M(s_\lambda)$, luego existe un $V \in G$ tal que $y \in V = \bigcap\limits_{\delta \in J_V} p_\delta^{-1}[W_{V\delta}]$, pero entonces $x \in V$, porque $x$ e $y$ sólo se distinguen bajo $\lambda$ y $x(\delta) \in W_{V\delta}$ para todo $\delta \in J_V \cap \lambda$. Esto nos da que $M(s_\beta) \subset \bigcup G$, como había que probar.

Con esto concluimos que $s_\lambda \in A^\lambda$, luego tenemos definida la sucesión $\{s_\delta\}_{\delta \leq \alpha}$, y en particular $s_\alpha$, que es un elemento de $A$ de altura $\alpha$, lo que nos lleva a la misma contradicción que el caso en que $\alpha$ era finito. ■

Así pues, no se necesita AE para demostrar que el producto de una familia finita de espacios topológicos compactos es compacto, ni tampoco para el caso en que $I$ admite un buen orden y cada $X_i$ es un subespacio compacto de $\mathbb{R}$. En efecto, en tal caso, en virtud de 12.18, podemos definir una función de elección sobre los cerrados de los espacios $X_i$ sin más que tomar $e(C) = \min C$, luego es aplicable el teorema anterior. En particular, podemos afirmar sin AE la compacidad de los espacios $[0,1]^\alpha$ o $2^\alpha$, para cualquier ordinal $\alpha$.

Por último, para probar que el producto de una familia numerable de compactos es compacto sólo necesitamos el principio ED de elecciones dependientes. Esto no se sigue del teorema anterior, sino de una ligera modificación de la parte final de la demostración. En este caso podemos tomar $\alpha = \omega$ y basta observar que no necesitamos la función de elección $e$ para construir la sucesión $\{s_n\}_{n\in\omega}$, sino que basta considerar en $A$ la relación dada por

$$t\,R\,s \leftrightarrow s \subset t \land \operatorname{alt} t = \operatorname{alt} s + 1.$$

Como $C(s) \neq \varnothing$, tenemos que $\bigwedge s \in A \bigvee t \in A\ t\,R\,s$, y ED es aplicable. A partir de ahí se define $s_\omega = \bigcup\limits_{n\in\omega} s_n$ y el argumento de la prueba vale sin cambio alguno para concluir que $s_\omega \in A$, lo que nos lleva a a contradicción.

Aplicando el teorema 4.6 a las proyecciones de un producto obtenemos trivialmente el recíproco del teorema de Tychonoff:

**Teorema 4.17 (AE)** *Un producto de espacios topológicos no vacíos es compacto si y sólo si lo son todos sus factores.*

En particular, si $X$ e $Y$ son espacios de Hausdorff compactos, la proyección $X \times Y \longrightarrow Y$ es cerrada, por el teorema 4.7. Vamos a probar que, de hecho, basta con que lo sea $X$ y que, de hecho, esto caracteriza a la compacidad de $X$:

**Teorema 4.18 (Kuratowski)** *Un espacio $X$ es compacto si y sólo si para todo espacio topológico $Y$ la proyección $p : X \times Y \longrightarrow Y$ es cerrada.*

Demostración: Supongamos que $X$ es compacto y sea $F \subset X \times Y$ cerrado. Supongamos que $y \in Y \setminus p[F]$. Entonces, para cada $x \in X$, tenemos que $(x, y) \notin F$, luego existen abiertos tales que $(x, y) \in U_x \times V_x \subset (X \times Y) \setminus F$. Como los abiertos $U_x$ cubren $X$, por compacidad podemos extraer un subcubrimiento finito, digamos $U_{x_1}, \ldots U_{x_n}$. Sea $V = V_{x_1} \cap \cdots \cap V_{x_n}$, que es un entorno de $y$ tal que $V \cap p[F] = \varnothing$. En efecto, si existe $v \in V \cap p[F]$, entonces existe un $u \in X$ tal que $(u, v) \in F$, pero existe un $i$ tal que $u \in U_{x_i}$, y entonces $v \in V_{x_i}$, luego $(u, v) \in (U_{x_i} \times V_{x_i}) \cap F$, contradicción. Por lo tanto, $p[F]$ es cerrado en $Y$.

Supongamos ahora que $X$ cumple la propiedad indicada y sea $\{F_i\}_{i\in I}$ una familia de cerrados en $X$ con la propiedad de la intersección finita pero con intersección vacía. Sea $Y = X \cup \{\infty\}$ donde $\infty$ es cualquier punto que no esté en $X$. Consideramos en $Y$ la topología que tiene por abiertos a todos los subconjuntos de $X$ y a todos los subconjuntos de $Y$ que contengan a $\infty$ y a una intersección finita de la familia dada. Notemos que $\{\infty\}$ no es abierto en $Y$, luego $\overline{X} = Y$.

Sea $F = \overline{\{(x,x) \mid x \in X\}} \subset X \times Y$. Por hipótesis, si $p : X \times Y \longrightarrow Y$ es la proyección, tenemos que $p[F]$ es cerrado en $Y$. Pero $X \subset p[F]$ y $\overline{X} = Y$, luego $p[F] = Y$. Por lo tanto, existe un $x_0 \in X$ tal que $(x_0, \infty) \in F$. Entonces, si $U$ es un entorno de $x_0$ y $i \in I$, tenemos que $U \times (\{\infty\} \cup F_i)$ es un entorno de $(x_0, \infty)$, luego corta a $\{(x,x) \mid x \in X\}$, luego $U \cap F_i \neq \varnothing$, luego $x_0 \in \overline{F}_i = F_i$ para todo $i \in I$, en contra de la hipótesis de que la intersección era vacía. ■

Veamos una aplicación:

**Teorema 4.19** *Sea $f : X \longrightarrow Y$ una aplicación entre espacios topológicos donde $Y$ es de Hausdorff y compacto. Entonces $f$ es continua si y sólo si es cerrada como subconjunto de $X \times Y$.*

Demostración: Llamemos $G = \{(x, f(x)) \mid x \in X\}$ a la gráfica de $f$ (que conjuntistamente es la propia $f$, pero así expresamos que la vemos como subconjunto de $X \times Y$). Si $f$ es continua, entonces $G$ es cerrada por 1.38. Recíprocamente, si la gráfica $G$ es cerrada y $A \subset Y$ es cerrado, consideramos

$$\tilde{A} = (X \times A) \cap G,$$

que es cerrado en $X \times Y$. Por el teorema anterior, la proyección $\pi : X \times Y \longrightarrow X$ es cerrada, luego $\pi[\tilde{A}] = f^{-1}[A]$ es cerrado en $X$, luego $f$ es continua. ■

**Ejemplo** La función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 1/x & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

es discontinua, pero su gráfica es cerrada. ■

## 4.2 Espacios localmente compactos

Vamos a introducir un concepto de "espacio localmente compacto" análogo al de "espacio localmente conexo" que estudiamos en el capítulo anterior. Empecemos probando el teorema siguiente:

**Teorema 4.20** *Si $X$ es un espacio de Hausdorff, las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

1. *Todo punto de $X$ tiene un entorno compacto.*
2. *Todo punto de $X$ tiene una base de entornos compactos.*

Demostración: Obviamente 2) $\Rightarrow$ 1). Supongamos 1) y vamos a probar que, para cada $x \in X$, los entornos compactos de $x$ forman una base de entornos. Fijemos un entorno compacto $K$ de $x$ y sea $U$ un entorno abierto arbitrario. Veamos que $U$ contiene un entorno compacto de $x$. Cambiando $U$ por $U \cap \mathring{K}$ podemos suponer que $U \subset K$. Ahora bien, aplicando el teorema 4.10 a los cerrados $\{x\}$ y $K \setminus U$ de $K$, obtenemos abiertos en $K$, digamos $U_1$, $U_2$, tales que son disjuntos y $x \in U_1$, $K \setminus U \subset U_2$, pero entonces $x \in U_1 \subset \overline{U}_1 \subset K \setminus U_2 \subset U$.

Como $U_1$ es abierto en $K$ y éste es un entorno de $x$ en $X$, es claro que $U_1$ es un entorno de $x$ en $X$ y $\overline{U}_1$ es un entorno compacto de $x$ (es compacto porque es cerrado en $K$) contenido en $U$. ■

Los espacios de Hausdorff que cumplen cualquiera de las dos propiedades del teorema anterior se llaman localmente compactos, pero no existe consenso sobre cómo definir la compacidad local en espacios no de Hausdorff. Siguiendo la analogía con la conexión local, nosotros adoptaremos el convenio siguiente:

**Definición 4.21** Un espacio topológico es *localmente compacto* si todo punto tiene una base de entornos compactos. Diremos que es *localmente compacto en sentido débil* si todo punto tiene un entorno compacto.

Según acabamos de señalar, un espacio de Hausdorff es localmente compacto en sentido débil si y sólo si es localmente compacto. Veamos algunos ejemplos elementales:

1. Todo espacio de Hausdorff compacto es localmente compacto (pues todo punto tiene al propio espacio como entorno compacto).

2. $\mathbb{R}$ es un espacio localmente compacto no compacto (todo punto $x$ tiene un entorno compacto $[x-1, x+1]$ o también una base de entornos compactos $[x-\epsilon, x+\epsilon]$).

3. Cualquier espacio discreto es localmente compacto, pero no es compacto si es infinito.

4. $\mathbb{Q}$ es un ejemplo de espacio de Hausdorff que no es localmente compacto.

   En efecto, si fuera localmente compacto, todo punto estaría contenido en un entorno compacto, el cual sería un compacto $K$ de interior no vacío. Sin embargo, todos los subespacios compactos $K$ de $\mathbb{Q}$ tienen interior vacío. Lo contrario significaría que existe un intervalo $]a,b[\cap\mathbb{Q} \subset K$, para ciertos números racionales $a < b$, pero entonces, como $K$ es cerrado en $\mathbb{Q}$, también $[a,b] \cap \mathbb{Q} = \overline{]a,b[\cap\mathbb{Q}} \subset K$, luego $[a,b] \cap \mathbb{Q}$ sería compacto (por ser cerrado en un compacto), pero entonces tendría que ser cerrado en $\mathbb{R}$, y claramente no lo es.

5. Igualmente se prueba que los subespacios compactos de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tienen también interior vacío, por lo que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tampoco es localmente compacto.

Para espacios no de Hausdorff, es claro que la compacidad local implica la compacidad local en sentido débil, pero el recíproco no es cierto. Para mostrar un ejemplo vamos a realizar una construcción general:

**Definición 4.22** Sea $X$ un espacio topológico y tomemos cualquier conjunto $\infty \notin X$. Definimos la *compactificación por un punto* de $X$ como el espacio $X^\infty = X \cup \{\infty\}$ con la topología

$$\mathcal{T}^\infty = \mathcal{T} \cup \{(X \setminus K) \cup \{\infty\} \mid K \text{ es cerrado compacto en } X\},$$

donde $\mathcal{T}$ es la topología de $X$.

Observemos que $\mathcal{T}^\infty$ es realmente una topología en $X^\infty$. En primer lugar es claro que contiene a $X^\infty = (X \setminus \varnothing) \cup \{\infty\}$ y a $\varnothing \in \mathcal{T}$. La unión de elementos de $\mathcal{T}^\infty$ está en $\mathcal{T}^\infty$ porque la intersección arbitraria de compactos en $X$ cerrados es compacta y cerrada (es compacta por ser cerrada en cualquiera de los compactos que forman la intersección).

Finalmente, la intersección de dos elementos de $\mathcal{T}^\infty$ de la forma $(X \setminus K) \cup \{\infty\}$ está en $\mathcal{T}^\infty$ porque la unión de dos cerrados compactos en $X$ es cerrada y compacta, mientras que la intersección de un elemento de esta forma con un abierto $U \subset X$ es $U \setminus K$, que es abierto en $X$, luego está en $\mathcal{T}^\infty$.

Cuando $X^\infty$ es un espacio de Hausdorff, se llama *compactificación de Alexandroff* de $X$.

El teorema siguiente muestra entre otras cosas que un espacio topológico admite una compactificación de Alexandroff si y sólo si es de Hausdorff y localmente compacto.

**Teorema 4.23** *Si $X$ es un espacio topológico, entonces:*

1. *$X$ es abierto en $X^\infty$ y la topología relativa en $X$ es la topología dada.*
2. *$X^\infty$ es un espacio topológico compacto.*
3. *$X$ es cerrado en $X^\infty$ si y sólo si $X$ es compacto.*
4. *$X^\infty$ es un espacio de Hausdorff si y sólo si $X$ es de Hausdorff y localmente compacto.*

Demostración: 1) Por la propia definición de la topología de $X^\infty$, todo abierto de $X$ (en particular el propio $X$) es abierto en $X^\infty$). Por lo tanto, los abiertos de $X$ en la topología relativa son simplemente los abiertos de $X^\infty$ contenidos en $X$, que son claramente los abiertos de $X$.

2) Si $\mathcal{U}$ es un cubrimiento abierto de $X^\infty$, existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $\infty \in U$, con lo que existe $K \subset X$ cerrado y compacto tal que $(X \setminus K) \cup \{\infty\} \subset U$. El compacto $K$ puede cubrirse por un número finito de abiertos de $\mathcal{U}$ que, junto con $U$, forman un subcubrimiento finito de $\mathcal{U}$.

3) Si $X$ es compacto, entonces $\{\infty\} = (X \setminus X) \cup \{\infty\}$ es abierto en $X^\infty$, luego $X$ es cerrado. Si $X$ es cerrado, entonces es compacto, porque todo cerrado en un compacto es compacto.

4) Si $X^\infty$ es un espacio de Hausdorff, también lo es todo subespacio, en particular $X$. Además, si $x \in X$, existen abiertos disjuntos $U$ y $V$ tales que

$x \in U$, $\infty \in V$, luego existe un compacto $K \subset X$ tal que $(X \setminus K) \cup \{\infty\} \subset V$. Entonces $U \subset K$, luego $K$ es un entorno compacto de $x$. Como $X$ es un espacio de Hausdorff, esto implica que es localmente compacto.

Supongamos ahora que $X$ es de Hausdorff y localmente compacto. Entonces dos puntos distintos en $X$ están contenidos en abiertos disjuntos en $X$, que también serán abiertos en $X^\infty$. Por otra parte, todo $x \in X$ tiene un entorno compacto $K \subset X$, que será cerrado, porque $X$ es un espacio de Hausdorff, luego existe un abierto $x \in U \subset K$ y además $V = (X \setminus K) \cup \{\infty\}$ es un abierto en $X^\infty$ disjunto de $U$ tal que $\infty \in V$. Esto prueba que $X^\infty$ es un espacio de Hausdorff. ■

Ahora es fácil concluir (véase el ejemplo A.6) que $\mathbb{Q}^\infty$ es un espacio localmente compacto en sentido débil que no es localmente compacto.

En los espacios de Hausdorff la compacidad local tiene otras caracterizaciones útiles. Para enunciarlas conviene introducir este concepto:

**Definición 4.24** Si $X$ es un espacio topológico, un subespacio $Y \subset X$ es *relativamente compacto* si su clausura $\overline{Y}$ (en $X$) es compacta.

**Teorema 4.25** *En un espacio de Hausdorff $X$, las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

1. *$X$ es localmente compacto.*
2. *Todo punto de $X$ tiene un entorno abierto relativamente compacto.*
3. *Todo punto de $X$ tiene una base de entornos abiertos relativamente compactos.*

Demostración: Claramente 3) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 1). Veamos que 1) $\Rightarrow$ 3). Si $X$ es localmente compacto, $x \in X$ y $U$ es un entorno de $x$, existe un entorno compacto (en particular cerrado) $x \in V \subset U$. Entonces $\mathring{V} \subset U$ es un entorno abierto de $x$ relativamente compacto, pues su clausura es compacta al estar contenida en $V$. Por lo tanto, $x$ tiene una base de entornos relativamente compactos. ■

En espacios de Hausdorff, la compacidad local la heredan los subespacios abiertos y los cerrados. De hecho, la heredan las combinaciones de ambos en el sentido siguiente:

**Teorema 4.26** *Un subespacio de un espacio de Hausdorff localmente compacto es localmente compacto si y sólo si es la intersección de un abierto y un cerrado.*

Demostración: Sea $X$ un espacio de Hausdorff localmente compacto. Es obvio que todo abierto $Y$ en $X$ es localmente compacto, pues todo punto $x \in Y$ tiene un entorno compacto $x \in K \subset Y$, luego $K$ es también un entorno compacto de $x$ en $Y$.

Si $Y$ es cerrado, también es localmente compacto, pues todo punto $x \in Y$ tiene un entorno compacto $K$ en $X$, luego $K \cap Y$ es un entorno compacto en $Y$.

Por lo tanto, si $Y = U \cap C$, donde $U$ es abierto y $C$ es cerrado, tenemos que $C$ es localmente compacto por ser cerrado en $X$ e $Y$ es localmente compacto por ser abierto en $C$.

Supongamos ahora que $Y \subset X$ es localmente compacto. Tomamos $C = \overline{Y}$, que es cerrado en $X$, y vamos a probar que $Y$ es abierto en $C$, con lo que será de la forma $Y = U \cap C$, para cierto abierto $U$ en $X$.

Equivalentemente, basta probar que todo subespacio denso y localmente compacto $Y$ de un espacio de Hausdorff $X$ es abierto. Todo punto $y \in Y$ tiene un entorno abierto $U$ en $Y$ relativamente compacto en $Y$, es decir, tal que su clausura en $Y$, que es $\overline{U} \cap Y$, es compacta, luego cerrada en $X$. Como $U \subset \overline{U} \cap Y$, tenemos que $\overline{U} \subset \overline{U} \cap Y \subset Y$. Como $U$ es abierto en $Y$, existe un abierto $V$ en $X$ tal que $U = V \cap Y$. Entonces, usando el teorema 1.22,

$$y \in V \subset \overline{V} = \overline{V \cap Y} = \overline{U} \subset Y.$$

Por lo tanto $Y$ es un entorno de $y$, luego es abierto. ■

Por otra parte, el teorema 4.23 nos da que un espacio de Hausdorff $X$ es localmente compacto si y sólo si es homeomorfo a un abierto en un espacio de Hausdorff compacto. Sin embargo, por ese mismo teorema, cualquier espacio topológico es homeomorfo a un abierto en un espacio compacto.

Notemos que el teorema anterior nos da una prueba inmediata de que $\mathbb{Q}$ no es localmente compacto, pues si lo fuera tendría que ser abierto en $\mathbb{R}$.

Al contrario de lo que sucede con la compacidad, no toda imagen continua de un espacio localmente compacto es localmente compacta (basta pensar en que todo espacio discreto es localmente compacto, y toda aplicación de un espacio discreto en cualquier otro espacio es continua). No obstante, se cumple lo siguiente:

**Teorema 4.27** *Si $f : X \longrightarrow Y$ es una aplicación continua, abierta y suprayectiva entre espacios topológicos y $X$ es localmente compacto (en sentido débil) entonces $Y$ también lo es.*

Demostración: Si $x \in X$ y $f(x) \in U \subset Y$ con $U$ abierto, entonces $f^{-1}[U]$ es un entorno de $x$, luego existe un entorno compacto de $x$ tal que $x \in K \subset f^{-1}[U]$. El hecho de que $f$ sea abierta implica que $f[K] \subset U$ es un entorno de $x$, y es compacto, luego $Y$ es localmente compacto. Si $X$ sólo es localmente compacto en sentido débil, en lugar de tomar $U$, tomamos cualquier entorno compacto de $x$ y razonamos igualmente. ■

Sin embargo, el ejemplo A.24 muestra que una imagen continua y cerrada de un espacio de Hausdorff localmente compacto no tiene por qué ser localmente compacta.

El ejemplo A.22 muestra también que, al contrario de lo que sucede en los espacios compactos, en un espacio localmente compacto las componentes conexas pueden diferir de las cuasicomponentes.

Respecto a productos, tenemos el teorema siguiente:

**Teorema 4.28 (AE)** *Un producto de espacios topológicos no vacíos es localmente compacto (en sentido débil) si y sólo si todos ellos son localmente compactos (en sentido débil) y todos salvo un número finito de ellos son compactos.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $X = \prod\limits_{i\in I} X_i$ un producto de espacios topológicos no vacíos. Supongamos que todos son localmente compactos y que existe $I_0 \subset I$ finito tal que $X_i$ es compacto cuando $i \in I \setminus I_0$. Entonces, dado $x \in X$ y un abierto básico $x \in \prod\limits_{i\in I} U_i$, donde $U_i = X_i$ salvo si $i \in I_1$, para cierto conjunto $I_1 \subset I$ finito, para cada $i \in I_0 \cup I_1$ tomamos un entorno compacto $x_i \in V_i \subset U_i$ y $V_i = X_i$ en otro caso. Así $x \in \prod\limits_{i\in I} V_i \subset U$ y, por el teorema de Tychonoff, el producto es un entorno compacto de $x$.

Si los $X_i$ son localmente compactos en sentido débil, dado $x \in X$, para cada $i \in I_0$ tomamos un entorno compacto $x_i \in V_i \subset X_i$ y llamamos $V_i = X_i$ para $i \in I \setminus I_0$. Entonces $\prod\limits_{i\in I} V_i$ es un entorno compacto de $x$, lo que prueba que $X$ es localmente compacto en sentido débil.

Recíprocamente, si $X$ es localmente compacto (en sentido débil), como las proyecciones son abiertas, el teorema anterior nos da que todos los factores son localmente compactos (en sentido débil). Por otra parte, un punto cualquiera de $X$ tiene un entorno compacto $K \subset X$, el cual contiene un abierto básico $U = \prod\limits_{i\in I} U_i \subset K$. Existe un conjunto finito $I_0 \subset I$ tal que si $i \in I \setminus I_0$ entonces $U_i = X_i$, luego $X_i \subset p_i[U] \subset p_i[K]$, luego $X_i = p_i[K]$ es compacto para todo $i \in I \setminus I_0$. ■

**Nota** El teorema anterior utiliza el axioma de elección sólo en la aplicación del teorema de Tychonoff, luego puede probarse sin necesidad del axioma de elección en los mismos casos que éste. ■

**Teorema 4.29** *Un espacio de Hausdorff localmente compacto no vacío es cerodimensional si y sólo si es totalmente disconexo.*

DEMOSTRACIÓN: En general, todo espacio cerodimensional es totalmente disconexo. Tenemos que probar la implicación opuesta. Sea $X$ un espacio de Hausdorff localmente compacto, no vacío y totalmente disconexo. Tomamos un punto $x \in X$ y un entorno $V$ de $x$, que por 4.25 podemos suponer relativamente compacto. Como $x$ no pertenece a ningún subconjunto conexo de $X$ distinto de $\{x\}$, lo mismo vale en $\overline{V}$, luego la componente conexa de $x$ en $\overline{V}$ es $\{x\}$. Por el teorema 4.12, coincide con su cuasicomponente, es decir, con la intersección de todos los abiertos cerrados de $\overline{V}$ que contienen a $x$. Por el teorema 4.11 existe un número finito de tales abiertos cerrados de modo que

$$x \in U = C_1 \cap \cdots \cap C_n \subset V.$$

Entonces $U$ es cerrado en $X$ por serlo en $\overline{V}$, y es abierto en $X$ por serlo en $V$. Por lo tanto, los abiertos cerrados de $X$ forman una base. ■

Los espacios localmente compactos tienen una propiedad en común con los espacios 1AN que conviene destacar:

**Definición 4.30** Un espacio topológico $X$ *está generado por sus subespacios compactos* si un conjunto $A \subset X$ es abierto si y sólo si para todo compacto $K \subset X$ se cumple que $A \cap K$ es abierto en $K$.

**Teorema 4.31** *Todo espacio* 1AN *y todo espacio localmente compacto está generado por sus subespacios compactos.*

DEMOSTRACIÓN: Si $X$ es localmente compacto y $A \cap K$ es abierto en $K$ para todo compacto $K \subset X$, todo $x \in A$ tiene un entorno abierto $U$ con clausura compacta, pero entonces $A \cap \overline{U}$ es abierto en $\overline{U}$, luego $A \cap U$ es abierto en $U$, luego en $X$, y así $A$ es entorno de $x$.

Supongamos ahora que $X$ es 1AN. Si $x \in \overline{X \setminus A}$, existe una sucesión $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ en $X \setminus A$ que converge a $x$. Entonces $K = \{x_n \mid n \in \omega\} \cup \{x\}$ es un compacto y $A \cap K$ es abierto en $K$, y la sucesión está en $K \setminus (A \cap K)$, que es cerrado en $K$, luego $x \in K \setminus (A \cap K)$, es decir, que $x \in X \setminus A$, luego $X \setminus A$ es cerrado y $A$ es abierto. ■

La propiedad más relevante de estos espacios es la siguiente:

**Teorema 4.32** *Si un espacio $X$ está generado por sus subespacios compactos, una aplicación $f : X \longrightarrow Y$ en un espacio topológico $Y$ es continua si y sólo si para todo compacto $K \subset X$ se cumple que $f|_K : K \longrightarrow Y$ es continua.*

DEMOSTRACIÓN: Si $U$ es abierto en $Y$, para cada compacto $K \subset X$ tenemos que $f^{-1}[U] \cap K = (f|_K)^{-1}[U]$ es abierto en $K$, luego $f^{-1}[U]$ es abierto en $X$ y $f$ es continua. ■

## 4.3 Formas débiles de compacidad

**Compacidad numerable** Según hemos señalado en la introducción a este capítulo, la noción de compacidad introducida por Fréchet es la que actualmente se conoce como compacidad numerable:

**Definición 4.33** Un espacio topológico es *numerablemente compacto* si todo cubrimiento abierto numerable de $X$ admite un subcubrimiento finito.

La demostración de 4.2 se adapta trivialmente para probar:

**Teorema 4.34** *Un espacio topológico $X$ es numerablemente compacto si y sólo si toda familia numerable de cerrados con la propiedad de la intersección finita tiene intersección no vacía.*

Los espacios numerablemente compactos tienen una caracterización muy simple:

**Teorema 4.35** *Si $X$ es un espacio topológico, las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

1. *$X$ es numerablemente compacto.*
2. *Todo subconjunto infinito de $X$ tiene un punto de $\omega$-acumulación.*
3. *Todo subconjunto infinito numerable de $X$ tiene un punto de $\omega$-acumulación.*

Demostración: Supongamos que $A \subset X$ es un subconjunto infinito sin puntos de $\omega$-acumulación. Lo mismo vale para todos sus subconjuntos, luego podemos suponer que $A = \{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ es numerable. Entonces los cerrados $F_n = \overline{\{x_i \mid i \geq n\}}$ tienen la propiedad de la intersección finita, luego existe un punto $x \in \bigcap\limits_{n=0}^{\infty} F_n$, pero entonces $x$ es un punto de $\omega$-acumulación de $A$, pues todo entorno de $x$ contiene puntos $x_i$ con $i$ arbitrariamente grande, luego contiene infinitos puntos de $A$.

Recíprocamente, si $X$ no es numerablemente compacto, por el teorema anterior existe una familia numerable $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ de cerrados con la propiedad de la intersección finita, pero con intersección vacía. Cambiando $F_n$ por la intersección de los $n$ primeros, podemos suponer que la sucesión es decreciente. Elegimos un punto $x_n \in F_n$, y entonces el conjunto $A = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ es infinito, pues en otro caso un mismo punto estaría en infinitos $F_n$ y por consiguiente estaría en la intersección de todos. Además no tiene puntos de $\omega$-acumulación, pues, para todo $x \in X$, existe un $n$ tal que $x \in U = X \setminus F_n$, luego $U \cap A \subset \{x_0, \ldots, x_{n-1}\}$ es finito. ■

Recordemos que, según el teorema 1.29, los puntos de $\omega$-acumulación coinciden con los puntos de acumulación en espacios en los que los puntos son cerrados (en particular en espacios de Hausdorff). El mismo ejemplo A.2 que hemos usado para distinguir los puntos de acumulación de los puntos de $\omega$-acumulación nos muestra que un espacio puede cumplir que todos sus subconjuntos infinitos tienen puntos de acumulación sin ser numerablemente compacto.

Por otra parte, ahora es fácil mostrar un ejemplo de espacio numerablemente compacto que no es compacto. Basta considerar el menor ordinal no numerable[3] $\omega_1$ con la topología de orden (ejemplo A.30).

Los espacios numerablemente compactos conservan algunas de las propiedades de los espacios compactos, que se demuestran de forma totalmente análoga. El teorema 4.34 es un ejemplo de ello. Otros dos son los siguientes, que se prueban igual que la parte análoga de 4.5 y 4.6, respectivamente:

**Teorema 4.36** *Todo cerrado en un espacio numerablemente compacto es numerablemente compacto.*

**Teorema 4.37** *Si $f : X \longrightarrow Y$ es una aplicación continua entre dos espacios topológicos y $X$ es numerablemente compacto, entonces $f[X]$ también lo es.*

[3]Véase la nota al pie de la página 84.

No es cierto, en cambio, que todo subespacio numerablemente compacto tenga que ser cerrado, según se observa también en el ejemplo A.30. Tampoco es cierto que el producto de espacios numerablemente compactos sea numerablemente compacto (ejemplo A.38). No obstante, el producto de un espacio compacto por un espacio numerablemente compacto es numerablemente compacto. Probamos algo más general:

**Teorema 4.38** *Si $f : X \longrightarrow Y$ es una aplicación continua, cerrada, con fibras numerablemente compactas e $Y$ es numerablemente compacto, entonces $X$ también lo es.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $\{U_n\}_{n=0}^{\infty}$ un cubrimiento numerable de $X$. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que es cerrado para uniones finitas. Para cada $y \in Y$, la fibra $f^{-1}[\{y\}]$ es numerablemente compacta, luego puede cubrirse por un número finito de abiertos $U_n$, pero como suponemos que el cubrimiento es cerrado para uniones finitas, existe un $n_y$ tal que $f^{-1}[\{y\}] \subset U_{n_y}$.

Como $f$ es cerrada, los conjuntos $V_n = Y \setminus f[X \setminus U_n]$ son abiertos, y forman un cubrimiento abierto de $Y$, pues $y \in V_{n_y}$. Además $f^{-1}[V_n] \subset U_n$. Como $Y$ es numerablemente compacto, podemos tomar un subcubrimiento finito $V_{n_1}, \ldots, V_{n_k}$, y los $U_{n_i}$ forman un subcubrimiento finito del cubrimiento dado. ■

**Teorema 4.39** *Si $X$ es un espacio compacto e $Y$ es numerablemente compacto, entonces $X \times Y$ es numerablemente compacto.*

DEMOSTRACIÓN: La proyección $p : X \times Y \longrightarrow Y$ es cerrada por 4.18 y sus fibras son homeomorfas a $X$, luego son compactas. El teorema anterior nos da la conclusión. ■

**Espacios de Lindelöf** Cuando Alexandroff y Urysohn introdujeron el concepto general de compacidad, introdujeron también el concepto de espacio de Lindelöf,[4] que lo relaciona con el de compacidad numerable:

**Definición 4.40** Un espacio topológico es un *espacio de Lindelöf* si todo cubrimiento abierto tiene un subcubrimiento numerable. Un espacio topológico es *hereditariamente de Lindelöf* si todos sus subespacios son de Lindelöf.

El teorema siguiente es inmediato:

**Teorema 4.41** *Un espacio topológico es compacto si y sólo si es numerablemente compacto y de Lindelöf.*

Sucede que la propiedad de Lindelöf es mucho menos restrictiva que la compacidad numerable. Por ejemplo, es inmediato que todo espacio numerable es hereditariamente de Lindelöf y, más aún:

[4] Le dieron dicho nombre porque Lindelöf había probado previamente que $\mathbb{R}^n$ cumple la propiedad del teorema 4.48.

**Teorema 4.42** *Si un espacio topológico tiene una base numerable, entonces es hereditariamente de Lindelöf.*

DEMOSTRACIÓN: Es inmediato que si un espacio $X$ tiene una base numerable, todos sus subespacios la tienen, así que basta probar que todo espacio $X$ con una base numerable $\mathcal{B}$ es de Lindelöf. Ahora bien, si $\mathcal{U}$ es un cubrimiento abierto de $X$, el conjunto $\mathcal{V}$ formado por todos los abiertos básicos contenidos en un abierto de $\mathcal{U}$ es un cubrimiento numerable de $X$, y basta tomar un abierto en $\mathcal{U}$ que contenga a cada abierto de $\mathcal{V}$ para tener un subcubrimiento numerable de $\mathcal{U}$. ■

Así pues, $\mathbb{R}^n$ y todos sus subespacios vectoriales son de Lindelöf, luego un subespacio de $\mathbb{R}^n$ es numerablemente compacto si y sólo si es compacto. Esto se traduce en una propiedad adicional que los espacios numerablemente compactos comparten con los compactos:

**Teorema 4.43** *Si $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es una aplicación continua en un espacio numerablemente compacto $X$, entonces $f$ toma un valor máximo y un valor mínimo.*

DEMOSTRACIÓN: Basta tener en cuenta que $f[X]$ es numerablemente compacto por el teorema 4.37, luego es compacto por la observación precedente, y basta aplicar el teorema 12.18. ■

El teorema 4.42 tiene un recíproco en el caso de los espacios métricos:

**Teorema 4.44** *Todo espacio métrico de Lindelöf tiene una base numerable.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $X$ un espacio métrico de Lindelöf. Para cada $n \geq 1$, las bolas abiertas de radio $1/n$ forman un cubrimiento abierto de $X$, luego podemos extraer un subcubrimiento numerable. Sea $\mathcal{B}$ la unión de un subcubrimiento para cada $n$. Así $\mathcal{B}$ es una familia numerable de abiertos de $X$ tal que todo punto de $X$ está contenido en un elemento de $\mathcal{B}$ de diámetro arbitrariamente pequeño. Esto implica que es una base, pues si $x \in U \subset X$, donde $U$ es abierto, basta tomar $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B$ y $d(B) < d(x, X \setminus U)$. Entonces $x \in B \subset U$. ■

Como sucede con la compacidad numerable, las demostraciones de las propiedades básicas de los espacios compactos pueden adaptarse ligeramente para demostrar propiedades análogas de los espacios de Lindelöf:

**Teorema 4.45** *Un espacio topológico $X$ es de Lindelöf si y sólo si toda familia de cerrados en $X$ con la propiedad de la intersección numerable (es decir, que la intersección de cualquier subfamilia numerable sea no vacía) tiene intersección no vacía.*

**Teorema 4.46** *Si $f : X \longrightarrow Y$ es una aplicación continua y $X$ es un espacio de Lindelöf, entonces $f[X]$ también lo es.*

**Teorema 4.47** *Si $X$ es un espacio de Lindelöf e $Y \subset X$ es cerrado, entonces $Y$ es un espacio de Lindelöf.*

Sin embargo, no es cierto que un subespacio de Lindelöf tenga que ser necesariamente cerrado. Cualquier espacio hereditariamente de Lindelöf lo desmiente. He aquí una caracterización útil de los espacios hereditariamente de Lindelöf:

**Teorema 4.48** *Un espacio topológico $X$ es hereditariamente de Lindelöf si y sólo si para toda familia $\mathcal{U}$ de abiertos de $X$ existe una subfamilia numerable $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ tal que $\bigcup \mathcal{V} = \bigcup \mathcal{U}$.*

DEMOSTRACIÓN: Si $X$ es hereditariamente de Lindelöf y $\mathcal{U}$ es una familia de abiertos en $X$, llamamos $A = \bigcup \mathcal{U}$, que es un subespacio abierto de $X$ y $\mathcal{U}$ es un cubrimiento abierto de $A$. Si $A$ es de Lindelöf, tiene un subcubrimiento numerable $\mathcal{V}$, que claramente es una subfamilia numerable de $\mathcal{U}$ que cumple lo requerido.

Recíprocamente, si $X$ tiene la propiedad indicada, $A \subset X$ es un subespacio arbitrario y $\mathcal{U}_0$ es un cubrimiento abierto de $A$, para cada $U_0 \in \mathcal{U}_0$ podemos considerar la unión $U$ de todos los abiertos en $X$ tales que $U \cap A = U_0$. Llamamos $\mathcal{U}$ a la familia formada por todos estos abiertos de $X$ y sea $\mathcal{V}$ una subfamilia numerable con la misma unión. Entonces los abiertos $V \cap A$, con $V \in \mathcal{V}$ forman un subcubrimiento numerable de $\mathcal{U}_0$. ∎

Observemos que en la prueba del teorema anterior, aunque hemos supuesto que $X$ era hereditariamente de Lindelöf, sólo hemos usado que todos los subespacios abiertos de $X$ son de Líndelöf, luego tenemos la equivalencia siguiente:

**Teorema 4.49** *Un espacio topológico es hereditariamente de Lindelöf si y sólo si todos sus subespacios abiertos son de Lindelöf.*

La recta de Sorgenfrey (ejemplo A.25) es un ejemplo de espacio hereditariamente de Lindelöf que no tiene una base numerable.

Otra clase de espacios de Lindelöf son los $\sigma$-compactos:

**Definición 4.50** Un espacio topológico es $\sigma$-compacto si es unión numerable de subespacios compactos.

Es claro que todo espacio $\sigma$-compacto $X$ es de Lindelöf, pues si $X = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} K_n$, donde cada $K_n$ es compacto y tenemos un cubrimiento abierto de $X$, cada $K_n$ está cubierto por un número finito de abiertos del cubrimiento, luego $X$ está cubierto por una cantidad numerable de ellos.

Es el caso de $\mathbb{R}$ que es unión numerable de subespacios compactos $[-m, m]$, luego es $\sigma$-compacto, por lo que es de Lindelöf, como ya habíamos razonado por otro camino. De hecho, $\mathbb{R}$ es localmente compacto y sucede que la propiedad de Lindelöf y la $\sigma$-compacidad coinciden en los espacios locamente compactos:

**Teorema 4.51** *Un espacio localmente compacto es de Lindelöf si y sólo si es $\sigma$-compacto.*

Demostración: Si $X$ es localmente compacto y de Lindelöf, los interiores de los subespacios compactos forman un cubrimiento de $X$, del cual podemos extraer un subcubrimiento numerable, que a su vez da lugar a un cubrimiento numerable por compactos. Por lo tanto $X$ es $\sigma$-compacto. ■

Por otro lado, la recta de Sorgenfrey $S$ es un espacio de Lindelöf que no es $\sigma$-compacto. El mismo ejemplo ilustra una diferencia entre los espacios $\sigma$-compactos y los espacios de Lindelöf, y es que el producto de dos espacios de Lindelöf no es necesariamente de Lindelöf (en el ejemplo A.26 probamos que $S \times S$ no es de Lindelöf), mientras que el producto finito de espacios $\sigma$-compactos sí que es $\sigma$-compacto (y en particular de Lindelöf). La prueba del teorema siguiente no ofrece ninguna dificultad:

**Teorema 4.52** *Se cumple:*

1. *Toda imagen continua de un espacio $\sigma$-compacto es $\sigma$-compacta.*
2. *Todo subespacio cerrado de un espacio $\sigma$-compacto es $\sigma$-compacto.*
3. *Todo producto finito de espacios $\sigma$-compactos es $\sigma$-compacto.*

Sin embargo, un producto numerable $X = \prod\limits_{i=0}^{\infty} X_i$ de espacios $\sigma$-compactos no compactos no puede ser $\sigma$-compacto.

En efecto, si $\{K_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una familia de compactos en $X$, como $p[K_i]$ es compacto en $X_i$, existe un punto $x_i \in X_i \setminus p[K_i]$, y estos puntos forman un punto $x \in X$ tal que $p_i(x) \notin p[K_i]$, luego $x \in X \setminus \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} K_n$.

Afinando un poco podemos probar:

**Teorema 4.53** *El producto de un espacio de Lindelöf por un espacio compacto es un espacio de Lindelöf.*

Demostración: Sea $L$ un espacio de Lindelöf y $K$ un espacio compacto. Consideremos un cubrimiento abierto $\mathcal{U}$ de $L \times K$. No perdemos generalidad si suponemos que está formado por abiertos básicos de la forma $\{U_i \times V_i\}_{i \in I}$. Para cada $x \in L$ tenemos que $\{x\} \times K$ es compacto, pues es homeomorfo a $K$, luego puede cubrirse por un número finito de abiertos de $\mathcal{U}$, digamos los correspondientes a un conjunto finito de índices $I_x \subset I$. Sea $U_x = \bigcup\limits_{i \in I_x} U_i$, que es un abierto en $L$ que contiene a $x$. Estos abiertos forman un cubrimiento de $L$, luego podemos tomar $J \subset L$ numerable tal que $L = \bigcup\limits_{x \in J} U_x$. El conjunto $I_0 = \bigcup\limits_{x \in J} I_x$ es numerable, y vamos a probar que los abiertos con índice en $I_0$ forman un subcubrimiento numerable del cubrimiento dado.

En efecto, si $(a, b) \in L \times K$, existe un $x \in I_0$ tal que $a \in U_x$, Por su parte, $(x, b)$ está en uno de los abiertos $U_i \times V_i$, con $i \in I_x \subset I_0$, pero entonces $a \in U_i$ (porque $a \in U_x$) y $b \in V_i$, luego $(a, b) \in U_i \times V_i$. ■

**Espacios sucesionalmente compactos** Veamos ahora otro de los conceptos asociados a la compacidad a partir de los cuales se desarrolló la noción moderna:

**Definición 4.54** Un espacio topológico es *sucesionalmente compacto* si en él toda sucesión tiene una subsucesión convergente.

Este concepto está estrechamente relacionado a la compacidad numerable:

**Teorema 4.55** *Todo espacio topológico sucesionalmente compacto es numerablemente compacto.*

DEMOSTRACIÓN: Basta aplicar el teorema 4.35. Si $X$ es sucesionalmente compacto y $A \subset X$ es un conjunto infinito numerable, tomamos una biyección $x : \mathbb{N} \longrightarrow A$, que no es sino una sucesión $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ que no pasa dos veces por el mismo punto. Por hipótesis tiene una subsucesión $\{x_{n_k}\}_{k=0}^{\infty}$ convergente a un punto $x \in X$, que es obviamente un punto de acumulación de $A$, pues todo entorno contiene infinitos términos de la subsucesión, luego corta a $A$ en infinitos puntos. ■

**Teorema 4.56** *Un espacio topológico que cumpla el primer axioma de numerabilidad es sucesionalmente compacto si y sólo si es numerablemente compacto.*

DEMOSTRACIÓN: Una implicación nos la da el teorema anterior. Supongamos que $X$ es un espacio topológico numerablemente compacto que cumpla el primer axioma de numerabilidad y sea $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ una sucesión en $X$. Si el conjunto $A = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ es finito entonces tiene que haber infinitos términos de la sucesión iguales entre sí, y éstos determinan una subsucesión convergente. Si $A$ es infinito, entonces por hipótesis tiene un punto de acumulación $x \in X$. Fijamos una base numerable $\{U_k\}_{k=0}^{\infty}$ de entornos de $x$, que podemos tomar decreciente. Tomamos $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_{n_0} \in U_0$ y, supuestos definidos $n_0 < \cdots < n_k$ de modo que $x_{n_i} \in U_i$, como $U_{k+1} \cap A$ contiene infinitos términos de la sucesión, podemos tomar $n_{k+1} > n_k$ tal que $x_{n_{k+1}} \in U_{k+1}$. De este modo hemos construido una subsucesión de la sucesión dada convergente a $x$. ■

En el ejemplo A.30 mostramos que $\omega_1$ es un ejemplo de espacio sucesionalmente compacto que no es compacto, mientras que en el ejemplo A.40 mostramos un ejemplo compacto (luego numerablemente compacto) que no es sucesionalmente compacto. Sin embargo, en la sección 9.1 probamos (teorema 9.15) que un espacio métrico es compacto si y sólo si es numerablemente compacto si y sólo si es sucesionalmente compacto. 296

Los espacios sucesionalmente compactos cumplen los teoremas habituales sobre subespacios e imágenes continuas:

**Teorema 4.57** *Todo cerrado en un espacio sucesionalmente compacto es sucesionalmente compacto.*

**Teorema 4.58** *Si $f : X \longrightarrow Y$ es una aplicación continua entre dos espacios topológicos y $X$ es sucesionalmente compacto, $f[X]$ también lo es.*

En cambio, su comportamiento respecto a productos es mejor que la de los espacios numerablemente compactos:

**Teorema 4.59** *El producto de una cantidad numerable de espacios sucesionalmente compactos es sucesionalmente compacto.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $X = \prod_{k=0}^{\infty} X_k$ un producto de espacios sucesionalmente compactos y sea $\{x^k\}_{k=0}^{\infty}$ una sucesión en $X$. Por hipótesis la sucesión $\{x_0^k\}_{k=0}^{\infty}$ tiene una subsucesión convergente a un punto $x_0 \in X_0$, digamos $\{x_0^{u(0,k)}\}_{k=0}^{\infty}$. A su vez, la sucesión $\{x_1^{u(0,k)}\}_{k=0}^{\infty}$ tiene una subsucesión convergente a un punto $x_1 \in X_1$, digamos $\{x_1^{u(1,k)}\}_{k=0}^{\infty}$.

Procediendo de este modo obtenemos subsucesiones $\{x_m^{u(m,k)}\}_{k=0}^{\infty}$ convergentes a puntos $x_m \in X_m$. Así formamos un punto $x \in X$ y vamos a ver que la subsucesión $\{x^{u(k,k)}\}_{k=0}^{\infty}$ converge a $x$. Para ello basta observar que $\{x_n^{u(k,k)}\}_{k=n}^{\infty}$ es una subsucesión de $\{x_n^{u(n,k)}\}_{k=n}^{\infty}$, luego sigue convergiendo a $x_n$. ■

El ejemplo A.40 muestra que un producto arbitrario de espacios homeomorfos a $\{0, 1\}$ (por lo tanto sucesionalmente compactos y compactos) no es necesariamente sucesionalmente compacto.

Terminamos esta sección con una serie de ejemplos sobre las principales clases de compacidad que hemos considerado:

1. El espacio “Fortissimo” (ejemplo A.16) es un ejemplo de espacio de Lindelöf que no es $\sigma$-compacto ni hereditariamente de Lindelöf.

2. La recta de Sorgenfrey (ejemplo A.25) o también $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, son ejemplos de espacios hereditariamente de Lindelöf que no son $\sigma$-compactos.

3. Si $I$ es cualquier conjunto de cardinal mayor o igual que el de $\mathbb{R}$, el producto $2^I \times \omega$ es $\sigma$-compacto, no compacto y no hereditariamente de Lindelöf. (Esto se sigue fácilmente del ejemplo 5.)

4. $\mathbb{R}$ es un ejemplo de espacio hereditariamente de Lindelöf, $\sigma$-compacto, no compacto.

5. Si $I$ es cualquier conjunto[5] de cardinal mayor o igual que el de $\mathbb{R}$, el espacio $2^I$ (ejemplo A.40) es compacto, pero no hereditariamente de Lindelöf ni sucesionalmente compacto.

6. El espacio $[0, \omega_1]$ (ejemplo A.31) es compacto y sucesionalmente compacto, pero no es hereditariamente de Lindelöf.

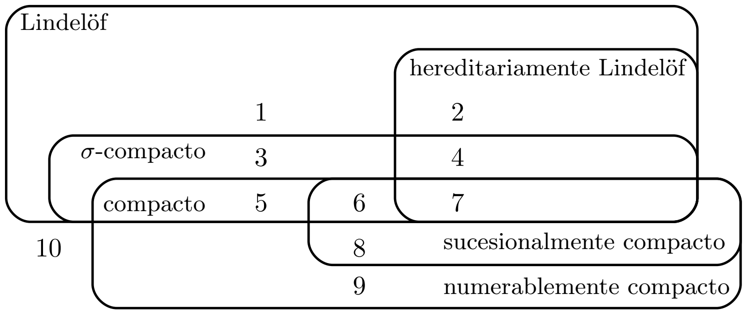
[5]En el ejemplo A.40 tomamos concretamente como $I$ el conjunto de todas las sucesiones estrictamente crecientes de números naturales, que no es difícil probar que coincide con el cardinal de $\mathbb{R}$, aunque como ejemplo nos basta con tomar dicho conjunto en particular. Por otra parte, es fácil ver que el hecho de que este espacio cumpla las propiedades indicadas implica que las cumple cualquier otro con un conjunto $I$ de cardinal mayor.

7. Claramente $[0,1]$ es un espacio compacto, sucesionalmente compacto y hereditariamente de Lindelöf.

8. El espacio $[0,\omega_1[$ (ejemplo A.30) es sucesionalmente compacto, pero no compacto.

9. Si $I$ es un conjunto de cardinal mayor o igual que el de $\mathbb{R}$, el espacio producto $[0,\omega_1[\times 2^I$ es numerablemente compacto (por el teorema 4.39), pero no compacto ni sucesionalmente compacto (porque ambas propiedades se conservan por imágenes continuas).

10. Cualquier espacio discreto no numerable es un ejemplo de espacio que no es de Lindelöf ni numerablemente compacto.




El esquema oculta un teorema, y es que todo espacio (numerablemente) compacto hereditariamente de Lindelöf es sucesionalmente compacto.[6] Esto lo demostraremos en 8.45. En la sección 4.6 introduciremos otra forma débil de compacidad conocida como pseudocompacidad.

## 4.4 Compacidad en espacios uniformes

Uno de los resultados clásicos situado en las raíces de la topología uniforme es el teorema de Heine, según el cual toda función continua en un intervalo $[a,b]$ es uniformemente continua. Esto es consecuencia de un hecho mucho más general:

**Teorema 4.60** *Si $K$ es un espacio de Hausdorff compacto, existe una única uniformidad en $X$ que induce su topología, y tiene por base a todas las bandas abiertas en $K\times K$.*

Demostración: El hecho de que todo espacio de Hausdorff compacto admite una uniformidad será inmediato más adelante (teorema 5.60). Aquí probaremos únicamente la unicidad, que es lo único que usaremos en este capítulo.

Supongamos que $\mathcal{U}$ es cualquier uniformidad que induce la topología de $K$ y veamos que tiene por base al conjunto de todas las bandas abiertas en $K\times K$.

[6]Ponemos "numerablemente" entre paréntesis porque todo espacio de Lindelöf numerablemente compacto es compacto.

Sea $W$ una banda abierta en $K \times K$. El teorema 2.14 nos da que el conjunto $\mathcal{B} \subset \mathcal{U}$ de las bandas cerradas de $\mathcal{U}$ es una base de $\mathcal{U}$, luego la propiedad de Hausdorff implica que $\bigcap \mathcal{B} = \Delta \subset W$. Como $\Delta$ es compacto, el teorema 4.11 implica que existe un número finito $V_1, \ldots, V_n$ de bandas cerradas de $\mathcal{U}$ tales que $V_1 \cap \cdots \cap V_n \subset W$, luego $W \in \mathcal{U}$. Por otra parte, 2.14 nos da también que las bandas abiertas de $\mathcal{U}$ (que ahora sabemos que son todas las bandas abiertas en $K \times K$) son una base de $\mathcal{U}$. ■

Por consiguiente:

**Teorema 4.61** *Si $f : X \longrightarrow Y$ es una aplicación continua entre espacios uniformes y $X$ es un espacio de Hausdorff compacto, entonces $f$ es uniformemente continua.*

DEMOSTRACIÓN: Es claro que para comprobar la continuidad uniforme basta ver que si $U$ es una banda abierta de $Y$, entonces $(f \times f)^{-1}[U]$ es una banda de $X$. Ahora bien, por la continuidad de $f$ tenemos que $(f \times f)^{-1}[U]$ es una banda abierta en $X \times X$, pero el teorema 4.60 nos da que todas las bandas abiertas en $X \times X$ son bandas de $X$. ■

**Espacios totalmente acotados** Según el teorema 12.18, los subconjuntos compactos de $\mathbb{R}$ son los cerrados y acotados (respecto de la distancia usual). Usando el teorema de Tychonoff es fácil probar que lo mismo vale para $\mathbb{R}^n$ (con la acotación respecto a cualquier norma, ya que todas son equivalentes). Sin embargo, veremos que esto ya no es cierto para espacios normados de dimensión infinita. En efecto, si un espacio normado sobre $\mathbb{R}$ cumple que sus subespacios cerrados y acotados son compactos, en particular las bolas cerradas serán compactas, luego el espacio será localmente compacto, pero probaremos (teorema 11.59) que los únicos $\mathbb{R}$-espacios normados localmente compactos son los de dimensión finita.

En 11.8 definimos una noción de "acotación lineal" en espacios vectoriales topológicos que, en el caso de espacios normados, coincide con la acotación respecto de la norma, luego no es cierto que todo conjunto cerrado y linealmente acotado en un espacio vectorial topológico sea compacto, pues de ahí deduciríamos nuevamente que todo $\mathbb{R}$-espacio normado es de dimensión finita.

Ahora vamos a introducir una noción de "acotación total" que tiene sentido en cualquier espacio uniforme, que en el caso de los espacios vectoriales topológicos es más restrictiva que la acotación lineal y respecto a la cual sí que es posible dar una caracterización de la compacidad a la que conocemos para $\mathbb{R}$.

**Definición 4.62** Un espacio uniforme $X$ es *totalmente acotado* si para toda banda $V$ de $X$ existe un subconjunto finito $A \subset X$ tal que $X = V[A]$.

Es claro que en la definición basta considerar bandas básicas, en particular bandas abiertas. En espacios métricos la acotación total equivale a que el espacio puede expresarse como unión de un número finito de bolas abiertas de un radio arbitrario prefijado.

**Teorema 4.63 (TU)** *Un espacio uniforme $X$ es compacto si y sólo si es totalmente acotado y completo.*

DEMOSTRACIÓN: Si $X$ es compacto todo filtro de Cauchy tiene un punto adherente y por tanto converge, lo que prueba que $X$ es completo. También es totalmente acotado pues, dada una banda abierta $V$, el cubrimiento $X = V[X]$ tiene un subcubrimiento finito $X = V[A]$.

Supongamos que $X$ es totalmente acotado y completo. Tomemos un ultrafiltro $F$ en $X$ y veamos que converge. Como $X$ es completo, basta ver que $F$ es de Cauchy. Dada una banda $V$ en $X$, sea $W$ una banda tal que $2W \subset V$. Como $X$ es totalmente acotado, existe un conjunto finito $A \subset X$ tal que $X = W[A]$. Puesto que $X \in F$, alguna bola $B_W(a)$ ha de pertenecer a $F$. Como $d(B_W(a)) < 2W < V$, esto prueba que $F$ es de Cauchy. ■

En particular, un subespacio de un espacio uniforme de Hausdorff completo es compacto si y sólo si es cerrado y totalmente acotado, pues los subespacios de un espacio uniforme de Hausdorff completo son cerrados si y sólo si son completos. He aquí las principales propiedades de los espacios totalmente acotados:

**Teorema 4.64** *Se verifica:*

1. *Si $f : X \longrightarrow Y$ es uniformemente continua y $X$ es totalmente acotado, entonces $f[X]$ es totalmente acotado.*

2. *Si $X$ es un espacio totalmente acotado e $Y \subset X$, entonces $Y$ es totalmente acotado.*

3. *Si $Y$ es un subespacio totalmente acotado de un espacio uniforme $X$, entonces $\overline{Y}$ es totalmente acotado.*

4. *Un producto de espacios uniformes es totalmente acotado si y sólo si lo es cada factor.*

DEMOSTRACIÓN: 1) Sea $V$ una banda en $f[X]$. Sea $W = (f \times f)^{-1}(V)$, que es una banda en $X$. Entonces existe un conjunto finito $A \subset X$ tal que $X = W[A]$, luego $f[X] = V[f[A]]$.

2) Sea $V = W \cap (Y \times Y)$ una banda en $Y$, donde $W$ es una banda en $X$, y consideremos otra banda en $X$ tal que $2U \subset W$. Existe un conjunto finito $A$ tal que $X = V[A]$. Sea $H$ el conjunto de los puntos $a \in A$ tales que existe un $b \in Y$ de modo que $d(a, b) < U$. Sea $B$ un conjunto finito formado por uno de estos $b$ para cada punto de $H$.

Si $y \in Y$ existe un $a \in A$ tal que $d(a, y) < U$, luego $a \in H$, luego existe un $b \in B$ tal que $d(a, b) < U$, de donde $d(b, y) < W$, y por tanto $y \in B_V(b)$, es decir, $Y = V[B]$. Esto prueba que $Y$ es totalmente acotado.

3) Supongamos que $Y$ es totalmente acotado. Sea $V$ una banda en $\overline{Y}$ y $W$ otra banda tal que $2W \subset V$. Sea $U = W \cap (Y \times Y)$. Existe un subconjunto finito $A \subset Y$ tal que $Y = \bigcup\limits_{a \in A} B_U(a)$. Si $x \in \overline{Y}$, entonces existe un $y \in B_W(x) \cap Y$.

A su vez existirá un $a \in A$ tal que $d(a,y) < U$ y por tanto $d(a,y) < W$. Como $d(y,x) < W$ concluimos que $d(x,a) < V$. Esto prueba que $\overline{Y} = V[A]$.

4) Si el producto es totalmente acotado, cada factor lo es también por el apartado 1). Sea $X = \prod\limits_{i \in I} X_i$ un producto de espacios totalmente acotados y

$$V = \{(x,y) \in X \times X \mid d(x_i, y_i) < V_i \text{ para } i \in J\}$$

una banda en $X$, donde $J \subset I$ es un conjunto finito y cada $V_i$ es una banda en $X_i$. Para cada $i \in J$ sea $A_i \subset X_i$ un conjunto finito tal que $X_i = V_i[A_i]$. Para índices fuera de $J$ sea $A_i = \{a_i\}$, donde $a_i$ es un punto arbitrario de $X_i$.

Sea $A = \bigcup\limits_{i \in J} p_i^{-1}[A_i]$. Claramente $A$ es un conjunto finito (sus puntos son los que tienen las coordenadas de $I \setminus J$ iguales a $a_i$ y las coordenadas de $J$ en el correspondiente $A_i$). Si $x \in X$, para cada $i \in J$ sea $a_i \in A_i$ tal que $d(x_i, a_i) < V_i$. Sea $a$ el punto de coordenadas $a_i$. Claramente $d(x,a) < V$, luego $X = V[A]$. ■

De los teoremas anteriores se desprende que en los espacios completos la compacidad relativa equivale a la acotación total, pues un espacio relativamente compacto está contenido en su clausura, que es compacta, luego totalmente acotada, y un espacio totalmente acotado tiene clausura totalmente acotada y completa, luego compacta. Una variante de este argumento nos da el teorema siguiente:

**Teorema 4.65 (TU)** *Un espacio uniforme de Hausdorff es totalmente acotado si y sólo si su compleción es compacta.*

Demostración: Si $X$ es totalmente acotado, entonces $\hat{X}$ también lo es, por el apartado 3) del teorema anterior, luego $\hat{X}$ es totalmente acotado y completo, luego es compacto.

Recíprocamente, si $\hat{X}$ es compacto, entonces es totalmente acotado, y $X$ también lo es por el apartado 2) del teorema anterior (y aquí usamos que $X$ es de Hausdorff, pues en caso contrario $X$ no es un subespacio de $\hat{X}$). ■

**Nota** Un espacio uniforme de Hausdorff se dice *precompacto* si su compleción es compacta. Hemos probado que, en un espacio de Hausdorff, la precompacidad equivale a la acotación total, pero en ausencia del axioma de elección estos conceptos no son equivalentes. ■

Otra caracterización útil de la acotación total es la siguiente:

**Teorema 4.66** *Un espacio uniforme es totalmente acotado si y sólo si sus únicos subconjuntos uniformemente discretos son los finitos.*

Demostración: La condición es necesaria, pues un subconjunto infinito uniformemente discreto (es decir, cuya uniformidad sea la discreta) no es totalmente acotado. Recíprocamente, si $X$ es un espacio uniforme que no es totalmente acotado, entonces existe una banda $V$ en $X$ tal que $X \neq V[A]$, para todo subconjunto finito $A$ de $X$.

Esto nos permite construir recurrentemente una sucesión $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ de puntos de $X$ de modo que $a_{n+1} \in X \setminus X[\{a_0, \ldots, a_n\}]$, y así $A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ es un subconjunto infinito de $X$ tal que $V \cap (A \times A) = \Delta$, luego $A$ es uniformemente discreto. ■

En particular un espacio uniforme es totalmente acotado si y sólo si todos sus subespacios numerables lo son, y todo espacio uniforme sucesionalmente compacto es totalmente acotado.

La secciones 10.7 y 11.5 contienen algunas aplicaciones de la compacidad y la compacidad sucesional a los grupos y espacios vectoriales topológicos. 359

## 4.5 Compacidad en espacios de funciones

**Convergencia casi uniforme** En la sección 2.4 hemos definido una familia de uniformidades en el conjunto $Y^X$ de funciones definidas en un conjunto $X$ con valores en un espacio uniforme $Y$. Más concretamente, si $\Sigma$ es una familia de subconjuntos de $Y$, hemos definido $\mathcal{F}_\Sigma(X,Y)$ como el conjunto $Y^X$ dotado de la uniformidad de la convergencia uniforme en los conjuntos de $\Sigma$, aunque sólo hemos considerado dos casos concretos, a saber, la convergencia puntual y la convergencia uniforme. Introducimos ahora una tercera entre ambas:

**Definición 4.67** Si $X$ es un espacio topológico e $Y$ es un espacio uniforme, llamaremos *uniformidad de la convergencia uniforme en compactos* o *convergencia casi uniforme* a la uniformidad definida en $Y^X$ según 2.50 por la familia $\Sigma$ de todos los subconjuntos compactos de $X$. Representaremos por $\mathcal{F}_c(X,Y)$ al conjunto $Y^X$ con dicha uniformidad.

Usaremos las notaciones $C_p(X,Y)$, $C_c(X,Y)$ y $C_u(X,Y)$ para referirnos al conjunto $C(X,Y)$ de todas las funciones continuas de $X$ en $Y$ con la uniformidad heredada de la uniformidad de la convergencia puntual, uniforme en compactos o uniforme, respectivamente, en $Y^X$.

Observemos que si $X$ es compacto, entonces $\mathcal{F}_c(X,Y) = \mathcal{F}_u(X,Y)$, mientras que si $X$ es discreto entonces $\mathcal{F}_c(X,Y) = \mathcal{F}_p(X,Y)$ (es decir, la convergencia uniforme en compactos coincide con la convergencia puntual). También es inmediato que todo filtro en $Y^X$ que converja uniformemente converge casi uniformemente, así como que todo filtro que converja casi uniformemente converge puntualmente. El teorema 2.52 implica que si $Y$ es un espacio uniforme completo, entonces $\mathcal{F}_c(X,Y)$ también lo es.

Hemos visto que en general $C(X,Y)$ no es cerrado en $Y^X$ respecto de la convergencia puntual, pero sí respecto de la uniforme. Para la convergencia casi uniforme tenemos el resultado siguiente:

**Teorema 4.68** *Si $X$ es un espacio topológico generado por sus subespacios compactos, entonces $C_c(X,Y)$ es cerrado en $\mathcal{F}_c(X,Y)$. Por consiguiente, si $Y$ es completo, también lo es $C_c(X,Y)$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $F$ un filtro en $C_c(X,Y)$ convergente a $f \in \mathcal{F}_c(X,Y)$ y sea $K \subset X$ compacto. Entonces, la imagen $F_K$ de $F$ por la aplicación $g \mapsto g|_K$ converge uniformemente a $f|_K$, luego tenemos que $f|_K \in \overline{C_u(K,Y)} = C_u(K,Y)$, es decir, que $f|_K$ es continua. Por 4.32 concluimos que $f$ es continua. ■

Si $Y$ es un espacio vectorial topológico, $f : X \longrightarrow Y$ es una aplicación continua y $K \subset X$ es compacto, entonces $f[K]$ es compacto, luego es totalmente acotado (teorema 4.63) luego acotado (teorema 11.60). Esto nos permite aplicar el teorema 11.21 para concluir lo siguiente:

**Teorema 4.69** *Si $X$ es un espacio topológico e $Y$ es un espacio vectorial topológico, entonces $C_c(X,Y)$ es un espacio vectorial topológico con las operaciones definidas puntualmente. Si $Y$ es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial localmente convexo, también lo es $C_c(X,Y)$.*

La última afirmación se sigue de la observación precedente al teorema 11.43.

El teorema 2.47 implica que $C_u(X,Y)$ es metrizable cuando $Y$ lo es. Para el caso de la convergencia casi uniforme necesitamos una hipótesis adicional:

**Teorema 4.70** *Sea $X$ un espacio topológico tal que existe una sucesión $\{K_n\}_{n=0}^{\infty}$ de subespacios compactos de $X$ tal que todo subespacio compacto de $X$ está contenido en uno de ellos y sea $Y$ un espacio métrico. Entonces $C_c(X,Y)$ es metrizable.*

DEMOSTRACIÓN: En las condiciones del enunciado, las bandas $(V_{1/m})_{K_n}$ forman una base numerable de la uniformidad, por lo que ésta es metrizable, por el teorema 2.27. ■

Notemos que el teorema anterior se aplica en particular cuando $X$ es localmente compacto y $\sigma$-compacto.

**La topología compacto-abierto** El teorema siguiente muestra que la topología de la convergencia casi uniforme en $C_c(X,Y)$ no depende de la uniformidad de $Y$, sino únicamente de su topología:

**Teorema 4.71** *Si $X$ es un espacio topológico e $Y$ es un espacio uniforme, la topología de la convergencia casi uniforme en $C_c(X,Y)$ tiene por subbase a los conjuntos*

$$T(K;U) = \{f \in C_c(X,Y) \mid f[K] \subset U\},$$

*donde $K$ recorre los subespacios compactos de $X$ y $U$ los abiertos de $Y$.*

DEMOSTRACIÓN: Veamos en primer lugar que los conjuntos $T(K;U)$ son abiertos. Si $f \in T(K;U)$, entonces $f[K] \subset U$. Vamos a probar que existe una banda $V$ en $Y$ tal que $V[f[K]] \subset U$.

Para ello observamos que el conjunto de todas las bolas $B_V(f(x))$ tales que $x \in K$, $V$ es una banda abierta en $Y$ y $B_{2V}(f(x)) \subset U$ es un cubrimiento abierto de $f[K]$, luego existe un subcubrimiento finito

$$f[K] \subset B_{V_1}(f(x_1)) \cup \cdots \cup B_{V_n}(f(x_n)) \subset U.$$

Llamamos $V = V_1 \cap \cdots \cap V_n$, y así $V[f[K]] \subset U$, pues si $y \in V[f[K]]$, existe un $x \in K$ tal que $(y, f(x)) \in V$, luego existe un $i$ tal que $(f(x), f(x_i)) \in V_i$, luego $(y, f(x)) \in 2V_i$, luego $y \in B_{2V_i}(f(x)) \subset U$.

De aquí se sigue que $f \in B_{\tilde{V}_K}(f) \subset T(K; U)$, pues si $g \in B_{\tilde{V}_K}(f)$, para cada $x \in K$ se cumple que $(f(x), g(x)) \in V$, luego $g(x) \in B_V(f(x)) \subset V[f[K]] \subset U$, luego $g[K] \subset U$. Esto prueba que $T(K; U)$ es abierto.

Falta probar que si $f \in C_p(X, Y)$, existen compactos $K_i$ en $X$ y abiertos $U_i$ en $Y$ tales que $f \in \bigcap\limits_{i=1}^{n} T(K_i; U_i) \subset B_{\tilde{V}_K}(f)$.

Tomemos una banda cerrada $W$ tal que $3W \subset V$. Los interiores de las bolas $B_W(f(x))$, con $x \in K$, cubren $f[K]$, luego podemos extraer un subcubrimiento finito $f[K] \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} B_W(f(x_i))$. Los conjuntos $K_i = K \cap f^{-1}[B_W(f(x_i))]$ son cerrados en $K$, luego son compactos, mientras que $U_i = \mathring{B}_{2W}(f(x_i))$ son abiertos. Veamos que cumplen lo requerido.

Ciertamente $f[K_i] \subset B_W(f(x_i)) \subset U_i$, pues si $y \in B_W(f(x_i))$, entonces se cumple que $y \in B_W(y) \subset B_{2W}(f(x_i))$, pues si tenemos $z \in B_W(y)$, entonces $(z, y) \in W, (y, f(x_i)) \in W$, luego $(z, f(x_i)) \in 2W$.

Por lo tanto $f \in \bigcap\limits_{i=1}^{n} T(K_i; U_i)$. Además, si $g \in \bigcap\limits_{i=1}^{n} T(K_i; U_i)$ y $x \in K$, entonces existe un $i$ tal que $f(x) \in B_W(f(x_i))$, con lo que $x \in K_i$, luego $g(x) \in U_i$, luego $g(x) \in B_{2W}(f(x_i))$, y también $f(x) \in B_W(f(x_i))$. En total tenemos que $(f(x), f(x_i)) \in W$, $(f(x_i), g(x)) \in 2W$, luego $(f(x), g(x)) \in 3W \subset V$, y así $(f, g) \in \tilde{V}_K$, es decir, $g \in B_{\tilde{V}_K}(f)$. ■

**Definición 4.72** Si $X$ e $Y$ son dos espacios topológicos, se llama *topología compacto-abierto* en $C(X, Y)$ a la topología que tiene por subbase a los conjuntos

$$T(K; U) = \{f \in C_c(X, Y) \mid f[K] \subset U\},$$

donde $K \subset X$ es compacto y $U \subset Y$ es abierto.

El teorema anterior puede enunciarse diciendo que, si $Y$ es un espacio uniforme, la topología de la convergencia casi uniforme en $C(X, Y)$ coincide con la topología compacto-abierto, con lo que en particular no depende de la uniformidad de $Y$.

Si $X$ e $Y$ son espacios topológicos arbitrarios, usaremos igualmente la notación $C_p(X, Y)$ y $C_c(X, Y)$ para representar el conjunto $C(X, Y)$ de las funciones continuas de $X$ en $Y$ dotado de la topología de la convergencia puntual o compacto-abierto, respectivamente. Notemos, en cambio, que $C_u(X, Y)$ no tiene sentido si $Y$ no es un espacio uniforme.

**Ejercicio:** Probar que la topología de la convergencia puntual en $C(X, Y)$ tiene por subbase los conjuntos $T(K, U)$, donde $K \subset X$ es finito y $U \subset Y$ es abierto.

Veamos ahora que las operaciones naturales entre funciones y puntos son continuas bajo hipótesis adecuadas:

**Teorema 4.73** *Si $X$ es un espacio de Hausdorff localmente compacto e $Y$ es un espacio topológico, la aplicación $v : C_c(X,Y)\times X \longrightarrow Y$ dada por $(f,x)\mapsto f(x)$ es continua.*

DEMOSTRACIÓN: Tomamos $(f_0,x_0)\in C_c(X,Y)\times X$ y un abierto $U$ en $Y$ tal que $f_0(x_0)\in U$. Entonces $f^{-1}[U]$ es un entorno de $x_0$, luego existe un entorno compacto $x_0\in K\subset f^{-1}[U]$, y entonces $(f_0,x_0)\in T(K;U)\times K\subset v^{-1}[U]$, luego $v$ es continua en $(f_0,x_0)$. ■

**Teorema 4.74** *Si $X$, $Y$, $Z$ son espacios topológicos e $Y$ es de Hausdorff y localmente compacto, la composición $\phi : C_c(X,Y)\times C_c(Y,Z)\longrightarrow C_c(X,Z)$ es continua.*

DEMOSTRACIÓN: Consideremos un par $(f_0,g_0)\in C_c(X,Y)\times C_c(Y,Z)$ de modo que $f_0\circ g_0\in T(K;U)$, para cierto $K\subset X$ compacto y $U\subset Z$ abierto. Entonces $f_0[K]\subset g_0^{-1}[U]$. Como $Y$ es localmente compacto, cada punto de $f_0^{-1}[K]$ tiene un entorno compacto contenido en $g_0^{-1}[U]$, y tomando un subcubrimiento finito podemos formar un compacto $K'$ tal que $f_0[K]\subset \mathring{K}'\subset K'\subset g_0^{-1}[U]$. Ahora basta observar que

$$(f_0,g_0)\in T(K;\mathring{K}')\times T(K';U)\subset \phi^{-1}[T(K;U)].$$

Por lo tanto la composición es continua en $(f_0,g_0)$. ■

Para el último teorema vamos a necesitar un resultado técnico:

**Teorema 4.75** *Sean $X$ e $Y$ espacios de Hausdorff, sea $\mathcal{S}$ una subbase de $Y$ y sea $\mathcal{K}$ una familia de subconjuntos compactos de $K$ tal que si $K\subset U\subset X$ con $K$ compacto y $U$ abierto, existen $K_1,\ldots,K_n\in\mathcal{K}$ tales que $K\subset K_1\cup\cdots\cup K_n\subset U$. Entonces los conjuntos $T(K;U)$, donde $K\in\mathcal{K}$ y $U\in\mathcal{S}$, forman una subbase de $C_c(X,Y)$.*

DEMOSTRACIÓN: Basta probar que si $K\subset X$ es compacto, $U\subset Y$ es abierto y $f\in T(K;U)$, entonces

$$f\in\bigcap_{i=1}^n T(K_i;U_i)\subset T(K;U),$$

con $K_i\in\mathcal{K}$ y $U_i\in\mathcal{S}$.

Observemos en primer lugar que basta probar esto en el supuesto de que $\mathcal{S}$ es una base de $Y$. En efecto, admitiendo que en tal caso se cumple la relación anterior, lo aplicamos a la base $\mathcal{B}$ formada por las intersecciones finitas de elementos de $\mathcal{S}$, y así obtenemos la conclusión salvo por el hecho de que $U_i\in\mathcal{B}$ en lugar de $U_i\in\mathcal{S}$, es decir, que $U_i=\bigcap_{j=1}^{n_i}U_i^j$, con $U_j^i\in\mathcal{S}$, pero entonces basta observar que $T(K_i;U_i)=\bigcap_{j=1}^{n_i}T(K_i;U_i^j)$ y concluimos igualmente.

Para cada $x\in K$, tenemos que $f(x)\in U$, luego existe un abierto básico $U_x\in\mathcal{S}$ tal que $f(x)\in U_x\subset U$. Podemos extraer un subcubrimiento finito

$f[K] \subset U_1 \cup \cdots \cup U_n \subset U$, con cada $U_i \in \mathcal{S}$. Para cada $x \in K$, existe un $i$ tal que $x \in f^{-1}[U_i]$ y, como $K$ es localmente compacto, existe un entorno compacto $K_x$ de $x$ en $K$ tal que $x \in K_x \subset f^{-1}[U_i]$. Los interiores en $K$ de los $K_x$ forman un cubrimiento de $K$, luego podemos extraer un subcubrimiento finito

$$K = K_1 \cup \cdots \cup K_n,$$

donde cada $K_j$ es compacto y está contenido en un $f^{-1}[U_{i_j}]$. Por la hipótesis sobre $\mathcal{K}$, podemos susitituir cada $K_i$ por una unión finita de elementos de $\mathcal{K}$ o, equivalentemente, podemos suponer que $K_i \in \mathcal{K}$.

Así, $f[K_j] \subset U_{i_j} \subset U$ y así $f \in \bigcap\limits_{j=1}^{n} T(K_j; U_{i_j})$ y si $g \in \bigcap\limits_{j=1}^{n} T(K_j; U_{i_j})$ tenemos que $g[K] \subset \bigcup\limits_{j=1}^{n} U_{i_j} \subset U$, luego $g \in Y(K;U)$. ■

**Teorema 4.76** *Si $X$, $Y$, $Z$ son espacios de Hausdorff, la aplicación*

$$\Phi : C_c(X \times Y, Z) \longrightarrow C_c(X, C_c(Y, Z))$$

*dada por $\Phi(f)(x)(y) = f(x, y)$ es un homeomorfismo en su imagen y, si $Y$ es localmente compacto, es suprayectiva y, por consiguiente, un homeomorfismo.*

Demostración: Es obvio que $\Phi(f)(x) : Y \longrightarrow Z$ es una función continua, pero tenemos que probar que $\Phi(f) : X \longrightarrow C_c(Y, Z)$ es continua. Para ello basta con que la antiimagen $V$ de un abierto subbásico $T(K;U)$ (donde $K \subset Y$ es compacto y $U \subset Z$ es abierto) sea abierta en $X$.

Sea $x_0 \in V$. Para cada $y \in K$, tenemos que $f(x_0, y) \in U$. Como $f$ es continua existen abiertos $V_y \subset X$, $W_y \subset y$ tales que $(x_0, y) \in V_y \times W_y \subset f^{-1}[U]$. Como $K$ es compacto, existe un subcubrimiento finito $K \subset W_{y_1} \cup \cdots \cup W_{y_n}$. Sea $V' = V_{y_1} \cap \cdots \cap V_{y_n}$, que es un entorno de $x_0$. Así, si $x \in V'$ e $y \in K$, tenemos que $f(x, y) \in U$, pues existe un $i$ tal que $y \in W_{y_i}$, luego $(x, y) \in V_{y_i} \times W_{y_i}$, luego $f(x, y) \in U$. Esto prueba que $\Phi(x) \in T(K;U)$, luego $x_0 \in V' \subset V$ y así $V$ es abierto. Con esto queda probado que $\Phi$ está bien definida.

Los abiertos $T(K;U)$, con $K \subset Y$ compacto y $U \subset Z$ abierto forman una subbase de $C_c(Y, Z)$, luego por el teorema anterior los abiertos $T(K'; T(K;U))$, con $K' \subset X$ compacto, forman una subbase de $C_c(X, C_c(Y, Z))$, luego para probar que $\Phi$ es continua basta ver que las antiimágenes de estos abiertos subbásicos son abiertas. Ahora bien, es inmediato comprobar que

$$\Phi^{-1}[T(K'; T(K;U))] = T(K' \times K; U),$$

con lo que, en efecto, $\Phi$ es continua. También es obvio que es inyectiva. Para probar que es un homeomorfismo en su imagen observamos que la igualdad precedente implica a su vez que

$$\Phi(T(K' \times K; U)) = T(K'; T(K;U)) \cap \Phi[C_c(X \times Y, Z)],$$

luego $\Phi(T(K' \times K; U))$ es abierto en $\Phi[C_c(X \times Y, Z)]$ y basta probar que los abiertos $T(K' \times K; U)$ forman una subbase de $C_c(X \times Y; U)$, pero esto es consecuencia del teorema anterior, porque la familia $\mathcal{K}$ formada por los compactos de la forma $K' \times K$ cumple la hipótesis requerida.

En efecto, si $(x, y) \in K_0 \subset U \subset X \times Y$, con $K_0$ compacto, entonces existe un abierto básico $(x, y) \in U_1 \times U_2 \subset U$, luego $x \in p_1[K_0] \cap U_1$, $y \in p_2[K_0] \cap U_2$ y, como las proyecciones son compactas, luego localmente compactas, existen entornos compactos $x \in K_x' \subset U_1$, $y \in K_y \subset U_2$, luego

$$(x, y) \in K_x' \times K_y \subset U_1 \times U_2 \subset U.$$

Los abiertos $\mathring{K}_x' \times \mathring{K}_y$ forman un cubrimiento abierto de $K$, luego extrayendo un subcubrimiento finito, tenemos $K \subset K_1' \times K_2 \cup \cdots \cup K_n' \times K_n \subset U$.

Supongamos ahora que $Y$ es localmente compacto y veamos que $\Phi$ es suprayectiva. Observemos que $\Phi$ se extiende a una biyección $\Phi : Z^{X \times Y} \longrightarrow (Z^Y)^X$, con lo que toda $h \in C_c(X, C_c(Y, Z))$ es de la forma $h = \Phi(f)$, para una única $f \in Z^{X \times Y}$. Sólo tenemos que probar que $f$ es continua.

Para ello tomamos un punto $(x_0, y_0) \in X \times Y$ y un abierto $U$ en $Z$ tal que $f(x_0, y_0) \in U$. Como $\Phi(f)(x_0) \in C_c(Y, Z)$ e $Y$ es localmente compacto, existe un entorno compacto $K \subset Y$ de $y_0$ tal que $f[\{x_0\} \times K] \subset U$. Entonces $T(K; U)$ es abierto en $C_c(Y, Z)$, luego $V = \Phi(f)^{-1}[T(K; U)]$ es abierto en $X$ y $f[V \times K] \subset U$, luego $f$ es continua. ■

**El teorema de Ascoli** Finalmente vamos a caracterizar la compacidad en los espacios $C_c(X, Y)$ a través del concepto de equicontinuidad:

**Definición 4.77** Sea $X$ un espacio topológico y sea $Y$ un espacio uniforme. Un conjunto $H \subset \mathcal{F}(X, Y)$ es *equicontinuo* en un punto $x_0 \in X$ si para toda banda $V$ en $Y$ existe un entorno $U$ de $x_0$ en $X$ tal que para todo $x \in U$ y todo $f \in H$ se cumple que $d(f(x), f(x_0)) < V$. Se dice que $H$ es *equicontinuo* si lo es en todos los puntos de $X$.

Es inmediato que si $H$ es equicontinuo en $x_0$ entonces todas las funciones de $H$ son continuas en $x_0$. Lo que aporta la equicontinuidad es que el mismo entorno $U$ de $x_0$ satisface la definición de continuidad para todas las funciones de $H$. Como $f(x_0)$ varía al variar $f$, no podemos fijar un entorno de $f(x_0)$ en $Y$, sino que necesitamos que $Y$ sea un espacio uniforme para fijar una banda independiente de $f(x_0)$.

Es inmediato que todo subconjunto finito de $C(X, Y)$ es equicontinuo, así como que todo subconjunto de un conjunto equicontinuo es equicontinuo.

**Teorema 4.78** *Sea $X$ un espacio topológico, sea $Y$ un espacio uniforme y sea $H \subset \mathcal{F}(X, Y)$ un subconjunto equicontinuo. Entonces, la clausura de $H$ respecto de la topología de la convergencia puntual es equicontinua.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $x_0 \in X$ y sea $V$ una banda en $Y$, que podemos tomar cerrada en $Y \times Y$. Por hipótesis existe un entorno $U$ de $x_0$ tal que para todo $x \in U$ y todo $f \in H$ se cumple que $d(f(x), f(x_0)) < V$. Ahora bien, el conjunto

$$\mathcal{C} = \{f \in \mathcal{F}(X, Y) \mid d(f(x), f(x_0)) < V \text{ para todo } x \in U\}$$

es cerrado en $\mathcal{F}_p(X,Y) = Y^X$, pues la aplicación $\phi_x : Y^X \longrightarrow Y \times Y$ dada por $\phi_x(f) = (f(x), f(x_0))$ es continua y $\mathcal{C} = \bigcap\limits_{x \in U} \phi_x^{-1}[V]$.

Como $H \subset \mathcal{C}$, también $\overline{H} \subset \mathcal{C}$, lo que significa que $\overline{H}$ es equicontinuo en $x_0$. ■

**Teorema 4.79** *Sea $X$ un espacio topológico, sea $Y$ un espacio uniforme y sea $H \subset C(X,Y)$ un conjunto equicontinuo. Entonces, la uniformidad inducida en $H$ por la uniformidad de la convergencia casi uniforme coincide con la inducida por la uniformidad de la convergencia puntual.*

DEMOSTRACIÓN: Vamos a probar algo ligeramente más fuerte: si $D \subset X$ es un conjunto denso, la uniformidad inducida en $H$ por la uniformidad de la convergencia casi uniforme coincide con la inducida por la uniformidad de la convergencia puntual en $D$, es decir, por la inducida por la familia $\Sigma$ de los subconjuntos finitos de $D$. Más explícitamente, si $A \subset D$ es finito y $W$ es una banda en $Y$, una banda básica para la convergencia puntual en $D$ es una intersección finita de bandas de la forma

$$\tilde{W}_A = \{(f,g) \in H \times H \mid \text{para todo } x \in D \ d(f(x), g(x)) < W\}.$$

Puesto que $D$ es compacto, estas bandas son también bandas para la uniformidad de la convergencia casi uniforme en $H$. Tenemos que probar que toda banda para la convergencia casi uniforme contiene una banda de este tipo.

Más precisamente, basta probar que si $V$ es una banda en $Y$ y $K \subset X$ es compacto, existe una banda $W$ en $Y$ y un conjunto $A \subset D$ finito tales que $\tilde{W}_A \subset \tilde{V}_K$.

Tomemos una banda $W$ tal que $5W \subset V$. Cada punto $x \in X$ tiene un entorno $U_x$ tal que si $x' \in U_x$ y $f \in H$, entonces $d(f(x), f(x')) < W$. Por lo tanto, podemos cubrir el compacto $K$ con un número finito de abiertos $U_1, \ldots, U_n$ tales que si $x'$, $x'' \in U_i$ y $f \in H$, entonces $d(f(x'), f(x'')) < 2W$. Fijemos puntos $a_i \in D \cap U_i$ y sea $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Así, si $(f,g) \in \tilde{W}_A$ y $x \in K$, tenemos que existe un índice $i$ tal que $x \in U_i$, con lo que

$$d(f(x), f(a_i)) < 2W, \quad d(f(x), g(a_i)) < W, \quad d(g(a_i), g(x)) < 2W,$$

luego $d(f(x), g(x)) < 5W \subset V$. ■

Finalmente podemos caracterizar los subespacios compactos de $C_c(X,Y)$:

**Teorema 4.80 (Ascoli) (TU)** *Sea $X$ un espacio de Hausdorff generado por sus subespacios compactos e $Y$ un espacio uniforme de Hausdorff. Entonces un conjunto $H \subset C_c(X,Y)$ es relativamente compacto si y sólo si:*

1. *Para cada compacto $K \subset X$, el espacio $H_K$ de las restricciones a $K$ de las funciones de $H$ es equicontinuo.*

2. *Para cada $x \in X$, el conjunto $H(x) = \{f(x) \mid f \in H\}$ es relativamente compacto en $Y$.*

DEMOSTRACIÓN: Veamos que las condiciones son necesarias. Como la aplicación $v_x : C_c(X,Y) \longrightarrow Y$ dada por $v_x(f) = f(x)$ es continua, $v_x[\overline{H}]$ es compacto y $H(x) = v_x[H] \subset v_x(\overline{H})$, luego $H(x)$ es relativamente compacto.

Si $K \subset X$ es compacto, la restricción $C_c(X,Y) \longrightarrow C_u(K,Y)$ es continua, luego $\overline{H}_K$ es compacto en $C_u(K,Y)$. Vamos a probar que $\overline{H}_K$ es equicontinuo, con lo que también lo será $H_K$.

Sea $x \in K$ y sea $V$ una banda en $Y$. Sea $W$ otra banda tal que $2W \subset V$. Como $K$ es regular, para cada función $f \in \overline{H}$ existe un entorno $U_f$ de $x$ tal que $f[\overline{U}_f] \subset B_W(f(x))$. De acuerdo con 4.71, el conjunto $T(\overline{U}_f; B_W(f(x)))$ es un entorno de $f$ en $C_u(K,Y)$, luego podemos cubrir el compacto $\overline{H}$ por un número finito de estos entornos, digamos $T(\overline{U}_{f_i}; B_W(f_i(x)))$, para $i = 1, \ldots, n$. Sea $U = U_{f_1} \cap \cdots \cap U_{f_n}$. Así, si $f \in \overline{H}$, existe un $i$ tal que

$$f[U] \subset f[\overline{U}_{f_i}] \subset B_W(f_i(x))),$$

y para cada $u \in U$ tenemos que $d(f(u), f_i(x)) < W$, $d(f_i(x), f(x)) < W$, luego $d(f(u), f(x)) < 2W \subset V$. Esto prueba la equicontinuidad de $\overline{H}$.

Veamos ahora que las condiciones son suficientes. Llamemos $\tilde{H}$ a la clausura de $H$ en $\mathcal{F}_p(X,Y)$ (es decir, respecto de la convergencia puntual), mientras que $\overline{H}$ será su clausura respecto de la convergencia casi uniforme.

Si $K \subset X$ es compacto, como la aplicación $f \mapsto f|_K$ es continua para la convergencia puntual, tenemos que $(\tilde{H})_K \subset \widetilde{H_K}$ y $\widetilde{H_K}$ es equicontinuo por 4.78, luego $(\tilde{H})_K$ también lo es.

En particular, vemos que $(\tilde{H})_K \subset C(K,Y)$. Como $X$ está generado por sus subespacios compactos, esto implica que $\tilde{H} \subset C(X,Y)$. Por 4.79 sabemos que la topología de la convergencia uniforme en $(\tilde{H})_K$ coincide con la topología de la convergencia puntual. Veamos que lo mismo vale para $\tilde{H}$.

En efecto, de acuerdo con 4.71 (y aquí usamos que $\tilde{H} \subset C(X,Y)$, un abierto subbásico de $\tilde{H}$ para la topología de la convergencia casi uniforme es de la forma

$$T(K;U) = \{f \in \tilde{H} \mid f[K] \subset U\},$$

con $K \subset X$ compacto y $U \subset Y$ abierto, que es la antiimagen por $f \mapsto f|_K$ de

$$\{f \in (\tilde{H})_K \mid f[K] \subset U\},$$

que es abierto en $(\tilde{H})_K$ para la convergencia compacto-abierto (la convergencia uniforme), luego también para la convergencia puntual, luego $T(K;U)$ es abierto para la topología de la convergencia puntual.

Como las topologías de la convergencia puntual y casi uniforme coinciden en $\tilde{H}$ y $\overline{H} \subset \tilde{H}$, de hecho tenemos que $\overline{H} = \tilde{H}$. En particular, $\overline{H}$ es cerrado para la convergencia puntual.

Finalmente observamos que $H \subset \prod\limits_{x \in X} \overline{H(x)}$, y el producto es compacto, luego contiene $\overline{H}$, luego concluimos que $\overline{H}$ es compacto. ■

**Notas** En las condiciones del teorema anterior, $H$ será compacto si exigimos además que sea cerrado en $C_c(X, Y)$, pero en la prueba hemos visto que, si se cumplen las dos condiciones del enunciado, la clausura de $H$ respecto a la topología de la convergencia casi uniforme coincide con la clausura respecto de la topología puntual, luego, en realidad, para que $H$ sea compacto basta exigir que sea cerrado respecto de la convergencia puntual.

Es claro que una condición suficiente para que se cumpla la condición 1 del enunciado es que $H$ sea equicontinuo, y si $X$ es localmente compacto la condición también es necesaria, es decir, que 1 puede reemplazarse por la equicontinuidad de $H$.

Si $Y = \mathbb{R}^n$, la condición 2 equivale a que los conjuntos $H(x)$ estén acotados (respecto a cualquier norma). Esto se expresa diciendo que $H$ está puntualmente acotado. ■

Al final de la sección 11.4 estudiamos la equicontinuidad en espacios de aplicaciones lineales, y en la sección 11.6 aplicamos dichos resultados al estudio de la dualidad en espacios vectoriales topológicos. 414

## 4.6 Espacios pseudocompactos

Presentamos a continuación lo que en realidad es una forma débil de compacidad, pero cuyo estudio hemos pospuesto porque requiere los axiomas de separación presentados en el capítulo 5.

**Definición 4.81** Un espacio topológico $X$ es *pseudocompacto* si es completamente regular y toda función continua $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ está acotada o, equivalentemente, si $C(X) = C^*(X)$.

El teorema 4.43 afirma que todo espacio numerablemente compacto es pseudocompacto. Por otra parte:

**Teorema 4.82** *Todo espacio normal pseudocompacto es numerablemente compacto.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que $X$ es normal y pseudocompacto, pero que no es numerablemente compacto. Por el teorema 4.35, existe un conjunto numerable $A \subset X$ sin puntos de acumulación. En particular, $A$ es cerrado y discreto, luego cualquier biyección $f : A \longrightarrow \mathbb{N}$ es continua y, por el teorema de Tietze 5.40 tenemos que $f$ se extiende a una función continua (y no acotada) $\bar{f} : X \longrightarrow \mathbb{R}$. ■

El espacio de Mrowka $\Psi$ (ejemplo A.43) es pseudocompacto, pero no numerablemente compacto. De la propia definición de pseudocompacidad se sigue inmediatamente que las imágenes continuas de espacios pseudocompactos son pseudocompactas:

**Teorema 4.83** *Si $f : X \longrightarrow Y$ es continua y $X$ es pseudocompacto, entonces $f[X]$ también lo es.*

En particular, si $X$ es pseudocompacto y $f \in C(X)$, entonces $f[X]$ es un subespacio pseudocompacto de $\mathbb{R}$, luego es numerablemente compacto (porque es normal) y, de hecho compacto (porque tiene una base numerable, luego es de Lindelöf). Esto implica que $f[X]$ es cerrado y acotado, luego $f$ alcanza un valor máximo y un valor mínimo en $X$.

La pseudocompacidad puede caracterizarse en términos de cubrimientos:

Una familia de subconjuntos de un espacio topológico es *localmente finita* si cada punto tiene un entorno que corta a lo sumo a un número finito de elementos de la familia.

**Teorema 4.84** *Sea $X$ un espacio topológico completamente regular. Las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

1. *$X$ es pseudocompacto.*
2. *Toda familia localmente finita de abiertos en $X$ es finita.*
3. *Todo cubrimiento abierto de $X$ localmente finito es finito.*
4. *Todo cubrimiento abierto de $X$ localmente finito tiene un subcubrimiento finito.*

Demostración: 1) $\Rightarrow$ 2) Si $\{U_i\}_{i=0}^{\infty}$ es una familia infinita localmente finita de abiertos de $X$, podemos suponer que son no vacíos (pues en caso contrario sólo tenemos que quitar un elemento). Tomemos un punto $x_i \in U_i$ y consideremos funciones continuas $f_i : X \longrightarrow [0,1]$ tales que $f_i(x_i) = i$, $f_i[X \setminus U_i] = \{0\}$. La finitud local implica que podemos definir $f(x) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} f_i(x)$, pues en cada punto $x$ hay sólo una cantidad finita de sumandos no nulos. Por esto mismo, $f \in C(X)$, pero no está acotada.

Las implicaciones siguientes son todas triviales menos 4) $\Rightarrow$ 1). Si $f \in C(X)$, entonces $\{f^{-1}[\,]i-1, i+2[\,]\}_{i\in\mathbb{Z}}$ es un cubrimiento abierto localmente finito y la existencia de un subcubrimiento finito implica que $f$ está acotada. ■

**Teorema 4.85** *Sea $X$ un espacio topológico completamente regular. Las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

1. *$X$ es pseudocompacto.*
2. *Si $\{U_i\}_{i=0}^{\infty}$ es una familia decreciente de abiertos, $\bigcap\limits_{i=0}^{\infty} \overline{U}_i \neq \varnothing$.*
3. *Si $\{U_i\}_{i=0}^{\infty}$ es una familia numerable de abiertos con la propiedad de la intersección finita, $\bigcap\limits_{i=0}^{\infty} \overline{U}_i \neq \varnothing$.*

Demostración: 1) $\Rightarrow$ 2) Si la familia $\{U_i\}_{i=0}^{\infty}$ es finita (es decir, si todos los términos son iguales a partir de uno dado), la conclusión es inmediata. En caso contrario, por el teorema anterior la familia no puede ser localmente finita, luego existe un punto $x \in X$ tal que todos sus entornos cortan a infinitos abiertos de la familia, luego de hecho a todos, luego $x$ está en la intersección de las clausuras.

2) $\Rightarrow$ 3) Basta aplicar 2) a la sucesión $\{\bigcap\limits_{j=0}^{i} U_j\}_{i=0}^{\infty}$.

3) $\Rightarrow$ 1) Si $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función no acotada, entonces los abiertos $U_i = \{x \in X \mid |f(x)| > i\}$ tienen la propiedad de la intersección finita, pero la intersección de sus clausuras es vacía. ■

Como consecuencia (compárese con la prueba de 1.65):

**Teorema 4.86** *Todo espacio completamente regular pseudocompacto es un espacio de Baire.*

Demostración: Sea $X$ un espacio completamente regular pseudocompacto y sea $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ una familia de abiertos densos en $X$. Vamos a probar que su intersección es densa. Para ello fijamos un abierto no vacío $U_0$. Como $D_1$ es denso, $U_0 \cap D_1$ es un abierto no vacío, luego, por la regularidad de $X$, podemos tomar un punto $x \in U_0 \cap D_1$ y un abierto $U_1 \subset \overline{U}_1 \subset U_0 \cap D_1$.

Similarmente, $U_1 \cap D_2$ es un abierto no vacío, luego podemos tomar un punto $x \in U_1 \cap D_2$ y un abierto $U_2 \subset \overline{U}_2 \subset U_1 \cap D_2$.

Así construimos una sucesión $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ de abiertos tal que $\overline{U}_n \subset U_{n-1} \cap D_n$,

$$U_0 \supset \overline{U}_1 \supset \overline{U}_2 \supset \cdots$$

Por el teorema anterior, $\varnothing \neq \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \overline{U}_n \subset U_0 \cap \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} D_n$, luego la intersección es densa. ■

No es cierto que todo subespacio cerrado de un espacio pseudocompacto sea pseudocompacto. De hecho:

**Teorema 4.87** *Si $X$ es un espacio completamente regular y todos sus subespacios cerrados son pseudocompactos, entonces $X$ es numerablemente compacto.*

Demostración: Por el teorema 4.35, basta probar que si $A \subset X$ es numerable, entonces tiene un punto de acumulación. En caso contrario es cerrado y discreto. Por hipótesis $A$ es pseudocompacto, pero eso es imposible, pues sus puntos son un cubrimiento abierto infinito localmente finito. ■

En particular, todo espacio compacto, o sucesionalmente compacto, o numerablemente compacto, es un espacio de Baire. En realidad, la prueba anterior vale igualmente para concluir que todo espacio localmente compacto es un espacio de Baire (basta exigir que $\overline{U}_1$ sea compacto para concluir igualmente que la intersección final es no vacía). No obstante, en el capítulo 7 obtendremos este hecho como consecuencia de un teorema más general (teorema 7.88).

En este punto el lector puede pasar al capítulo 7 o bien continuar con la sección siguiente, que no será necesaria en el resto del libro. 207

## 4.7 Espacios paracompactos

El concepto de paracompacidad fue introducido por Dieudonné en 1944 como una generalización de la compacidad, pero en 1948 Stone sorprendió a los topólogos probando que también generaliza a la metrizabilidad. Pronto se vio que resultaba ser la hipótesis de trabajo más natural en varias áreas de la topología, del análisis matemático y de la geometría diferencial. En esta sección usamos el axioma de elección sin mención explícita.

**Definición 4.88** Sea $X$ un espacio topológico. Un cubrimiento abierto de $X$ es *localmente finito* si cada punto de $X$ está contenido tan sólo en un número finito de abiertos del cubrimiento. Un cubrimiento abierto $\mathcal{V}$ es un *refinamiento* de otro $\mathcal{U}$ si todo abierto de $\mathcal{V}$ está contenido en uno de $\mathcal{U}$.

Un espacio topológico $X$ es *paracompacto* si todo cubrimiento abierto de $X$ admite un refinamiento abierto localmente finito.

Es inmediato que la clase de los espacios paracompactos incluye a la de los espacios compactos y, por el teorema 9.16, también a la de los espacios métricos.

**Nota** En la definición de paracompacidad es fundamental que hablamos de refinamientos y no de subcubrimientos. Por ejemplo, es inmediato que todo espacio discreto es paracompacto, pues el cubrimiento formado por los puntos es localmente finito y refina a cualquier otro cubrimiento, pero el cubrimiento $\{n\}_{n\in\omega}$ de $\omega$ no admite subcubrimientos localmente finitos.

Por el contrario, es fácil ver que un espacio topológico $X$ es compacto si y sólo si todo cubrimiento abierto admite un refinamiento finito. Más aún, el grado de Lindelöf $L(X)$ es el menor cardinal $\kappa$ tal que todo cubrimiento abierto de $X$ admite un refinamiento de cardinal $\kappa$. ■

Conviene observar este hecho elemental:

**Teorema 4.89** *Si $\{A_i\}_{i\in I}$ es una familia localmente finita de subconjuntos de un espacio topológico $X$, entonces $\overline{\bigcup\limits_{i\in I} A_i} = \bigcup\limits_{i\in I} \overline{A}_i$.*

DEMOSTRACIÓN: Una inclusión es obvia. Si $x \in \overline{\bigcup\limits_{i\in I} A_i}$, tomamos un entorno abierto $U$ de $x$ tal que $I_0 = \{i \in I \mid A_i \cap U \neq \varnothing\}$ sea finito. Entonces $x \notin \overline{\bigcup\limits_{i\in I\setminus I_0} A_i}$, pero

$$x \in \overline{\bigcup_{i\in I} A_i} = \overline{\bigcup_{i\in I_0} A_i} \cup \overline{\bigcup_{i\in I\setminus I_0} A_i},$$

luego $x \in \overline{\bigcup\limits_{i\in I_0} A_i} = \bigcup\limits_{i\in I_0} \overline{A}_i \subset \bigcup\limits_{i\in I} \overline{A}_i$. ■

**Teorema 4.90** *Todo espacio de Hausdorff paracompacto es normal.*

Demostración: Veamos en primer lugar que si $A = \{x\}$ y $B$ es un cerrado disjunto con $A$, existen abiertos disjuntos $U_1$ y $U_2$ tales que $A \subset U_1$, $B \subset U_2$.

Por la propiedad de Hausdorff, para cada $y \in B$ existen abiertos disjuntos $U_1^y$, $U_2^y$ tales que $A \subset U_1^y$, $y \in U_2^y$. Entonces $\{U_2^y \mid y \in B\} \cup \{X \setminus B\}$ es un cubrimiento abierto de $X$, luego tiene un refinamiento localmente finito $\mathcal{U}$. Llamamos $\mathcal{U}_0$ al conjunto de los abiertos de $\mathcal{U}$ que cortan a $B$.

Si $W \in \mathcal{U}_0$, entonces $W$ está contenido en un $U_2^y \subset X \setminus U_1^y$, luego $\overline{W} \subset X \setminus U_1^y$, luego $\overline{W} \cap A = \varnothing$, luego $A \subset U_1 = X \setminus \bigcup\limits_{W \in \mathcal{U}_0} \overline{W}$. Por otro lado, es obvio que $B \subset U_2 = \bigcup \mathcal{U}_0$ y que $U_1 \cap U_2 = \varnothing$. Basta probar que $U_1$ es abierto.

En efecto, cada $x \in U_1$ tiene un entorno abierto $G$ que corta a lo sumo a un número finito de abiertos de $\mathcal{U}_0$, digamos $W_1, \ldots, W_n$, pero entonces tenemos que $x \in G \cap \bigcap\limits_{i=1}^{n} (X \setminus \overline{W}_i) \subset U_1$, luego $U_1$ es entorno de todos sus puntos.

Ahora que sabemos que es posible separar puntos de cerrados repetimos el argumento con dos cerrados disjuntos $A$ y $B$ y tomando abiertos disjuntos $U_1^y$, $U_2^y$ tales que $A \subset U_1^y$, $y \in Y_2^y$. Así obtenemos abiertos disjuntos $U_1$ y $U_2$ que separan $A$ y $B$. ■

Puesto que no todo espacio de Hausdorff compacto es hereditariamente normal, tampoco es cierto que todo espacio de Hausdorff paracompacto sea hereditariamente normal. Sin embargo, podemos probar un poco más:

**Teorema 4.91** *Todo espacio de Hausdorff paracompacto es colectivamente normal.*

Demostración: Sea $X$ un espacio de Hausdorff paracompacto y sea $\{A_i\}_{i \in I}$ una familia discreta de subconjuntos cerrados de $X$ disjuntos dos a dos, es decir, tal que la unión de cualquier subfamilia sea cerrada. Entonces cada punto $x \in X$ tiene un entorno abierto $U_x$ que corta a lo sumo a uno de los conjuntos $A_i$. En efecto, si $x \in A_i$, entonces, basta tomar $U_x = X \setminus \bigcup\limits_{i' \neq i} A_{i'}$ y, si $x \notin A_i$ para todo índice $i$, basta tomar como $U_x$ el complementario de toda la unión.

Más aún, como $X$ es regular (por el teorema anterior), podemos suponer que $\overline{U}_x$ corta a lo sumo a un $A_i$ (sin más que cambiar cada $U_x$ por un abierto $x \in U_x' \subset \overline{U}_x' \subset U_x$).

Así tenemos un cubrimiento abierto $\mathcal{U}$ de $X$ formado por abiertos cuyas clausuras cortan a lo sumo a un $A_i$ cada una. Pasando a un refinamiento abierto, podemos suponer que es localmente finito. Para cada $i \in I$, sea

$$U_i = X \setminus \bigcup \{\overline{U} \mid U \in \mathcal{U} \land \overline{U} \cap A_i = \varnothing\}.$$

Así $A_i \subset U_i$, y basta probar que los abiertos $U_i$ son disjuntos dos a dos. Ahora bien, si $U \in \mathcal{U}$, tenemos que $\overline{U}$ corta a lo sumo a un $A_i$, luego $\overline{U}$ corta a lo sumo a un $U_i$, luego $U$ corta a lo sumo a un $U_i$. Si $x \in U_i \cap U_j$, entonces existiría un $U \in \mathcal{U}$ tal que $x \in U$, y $U$ cortaría a $U_i$ y a $U_j$, contradicción. ■

La definición de paracompacidad admite algunas variantes en el caso de espacios regulares:

**Teorema 4.92** *Si $X$ es un espacio topológico regular, las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

1. *$X$ es paracompacto.*
2. *Todo cubrimiento abierto de $X$ admite un refinamiento abierto $\sigma$-localmente finito.*
3. *Todo cubrimiento abierto de $X$ admite un refinamiento (no necesariamente abierto) localmente finito.*
4. *Todo cubrimiento abierto de $X$ admite un refinamiento cerrado localmente finito.*

DEMOSTRACIÓN: 1) $\Rightarrow$ 2) es inmediato. Para probar 2) $\Rightarrow$ 3) basta ver que todo cubrimiento abierto $\sigma$-localmente finito admite un refinamiento localmente finito. En efecto, supongamos que $\mathcal{U} = \bigcup\limits_{n\in\omega} \mathcal{U}_n$, donde cada $\mathcal{U}_n$ es localmente finito. Para cada $U \in \mathcal{U}_n$, sea $U_n^* = U \setminus \bigcup\limits_{m<n} \bigcup \mathcal{U}_m$. La familia formada por todos los conjuntos $U_n^*$ es un cubrimiento de $X$, pues para cada $x \in X$ podemos considerar el mínimo $n$ tal que existe $U \in \mathcal{U}_n$ tal que $x \in U$, y entonces $x \in U_n^*$. También es claro que se trata de un refinamiento de $\mathcal{U}$, luego sólo tenemos que probar que es una familia localmente finita.

Nuevamente, si $x \in X$, tomamos el mínimo $m$ tal que existe $U_0 \in \mathcal{U}_m$ tal que $x \in U_0$. Así $U_0$ es un entorno de $x$ disjunto de todos los conjuntos $U_n^*$ con $m < n$ y $U \in \mathcal{U}_n$. Por otra parte, si $n \leq m$, como $\mathcal{U}_n$ es localmente finita, restringiendo $U_0$ podemos exigir que $U_0$ sólo corte a un número finito de abiertos de cada $\mathcal{U}_n$, con lo que $U_0$ corta sólo a un número finito de conjuntos $U_n^*$.

3) $\Rightarrow$ 4) Sea $\mathcal{U}$ un cubrimiento abierto de $X$. Para cada $x \in X$ existe un $U \in \mathcal{U}$ tal que $x \in U$ y, por la regularidad, existe un abierto $V$ tal que $x \in V \subset \overline{V} \subset U$. Así obtenemos un cubrimiento $\mathcal{V}$ tal que $\{\overline{V} \mid V \in \mathcal{V}\}$ refina al cubrimiento $\mathcal{U}$. Sea $\mathcal{W}$ un refinamiento de $\mathcal{V}$ localmente finito. Para cada $W \in \mathcal{W}$, sea $W^* \in \mathcal{U}$ tal que $\overline{W} \subset W^*$ y, para cada $U \in \mathcal{U}$, sea

$$F_U = \bigcup\{\overline{W} \mid W \in \mathcal{W} \land W^* = U\}.$$

Es inmediato que si $\mathcal{W}$ es localmente finito, lo mismo vale para la familia de las clausuras de los conjuntos de $\mathcal{W}$, luego por 4.89 tenemos que los conjuntos $F_U$ forman un cubrimiento cerrado que claramente refina a $\mathcal{U}$. Falta probar que es localmente finito. Ahora bien, todo punto en $X$ tiene un entorno que corta a un número finito de conjuntos de $\mathcal{W}$, luego también a un número finito de clausuras de conjuntos de $\mathcal{W}$, luego también a un número finito de cerrados $F_U$.

4) $\Rightarrow$ 1) Sea $\mathcal{U}$ un cubrimiento abierto de $X$. Sea $\mathcal{V}$ un refinamiento cerrado localmente finito. Para cada $x \in X$ sea $G_x$ un entorno abierto que corte a un número finito de elementos de $\mathcal{V}$. Sea $\mathcal{W}$ un refinamiento cerrado localmente finito del cubrimiento abierto $\{G_x\}_{x\in X}$. Para cada $V \in \mathcal{V}$, sea

$$V^* = X \setminus \bigcup\{W \in \mathcal{W} \mid W \cap V = \varnothing\}.$$

Por 4.89 tenemos que cada $V^*$ es abierto. Además $V \subset V^*$, pues si $x \in V \setminus V^*$ existiría un $W \in \mathcal{W}$ tal que $x \in W$ y $W \cap V = \varnothing$, pero esto es absurdo porque $x \in W \cap V$.

Más aún, si $W \in \mathcal{W}$, tenemos que $V^* \cap W \neq \varnothing$ si y sólo si $V \cap W \neq \varnothing$. En efecto, si $V \cap W = \varnothing$, tenemos que $V^* \cap W = \varnothing$ por la propia definición de $V^*$, y la otra implicación se debe a que $W \cap V \subset V \subset V^*$.

Para cada $V \in \mathcal{V}$, existe un $\hat{V} \in \mathcal{U}$ tal que $V \subset \hat{V}$. Llamamos $\tilde{V} = V^* \cap \hat{V}$. Claramente $\tilde{V}$ es abierto y $V \subset \tilde{V}$, luego los abiertos $\tilde{V}$ forman un refinamiento abierto de $\mathcal{U}$. Basta probar que es localmente finito. Ahora bien, todo punto $x \in X$ tiene un entorno que corta a un número finito de elementos de $\mathcal{W}$, y cada elemento de $\mathcal{W}$ está contenido en un abierto $G_x$, luego corta a un número finito de elementos de $\mathcal{V}$, luego también a un número finito de abiertos $V^*$ y por lo tanto a un número finito de abiertos $\tilde{V}$. ■

Como toda familia numerable es trivialmente $\sigma$-localmente finita, todo espacio de Lindelöf cumple la condición 2) del teorema anterior. Por consiguiente:

**Teorema 4.93** *Todo espacio de Lindelöf regular es paracompacto.*

El teorema siguiente generaliza el hecho de que todo espacio de Lindelöf numerablemente compacto es compacto:

**Teorema 4.94** *Todo espacio paracompacto numerablemente compacto es compacto.*

Demostración: Basta probar que todo cubrimiento abierto admite un refinamiento abierto finito. Puesto que todo cubrimiento abierto admite un refinamiento localmente finito, basta probar que, en un espacio numerablemente compacto $X$, toda familia localmente finita $\{A_n\}_{n\in\omega}$ de conjuntos no vacíos es finita.

En caso contrario, por el teorema 4.89, los conjuntos $F_m = \bigcup\limits_{n=m}^{\infty} \overline{A}_n$ son cerrados, y forman una familia con la propiedad de la intersección finita, pero su intersección es vacía, pues un punto en la intersección tiene que estar en infinitos conjuntos $\overline{A}_n$, luego cualquier entorno abierto corta a infinitos $A_n$, contradicción. Esto a su vez contradice la compacidad numerable. ■

Por ejemplo, el ordinal $\omega_1$ con la topología de orden es numerablemente compacto, pero no compacto, luego es un ejemplo de espacio topológico (un espacio ordenado, de hecho) no paracompacto.

Por otra parte, la recta de Sorgenfrey $S$ es de Lindelöf, luego es paracompacta, mientras que el plano de Sorgenfrey $S \times S$ no es normal, luego no es paracompacto, y esto prueba que el producto de espacios paracompactos no es necesariamente paracompacto.

De la definición de paracompacidad se sigue fácilmente que todo subespacio cerrado de un espacio paracompacto es paracompacto, pero podemos probar un poco más:

**Teorema 4.95** *Todo subespacio $F_\sigma$ de un espacio paracompacto es paracompacto.*

Demostración: Sea $X$ un espacio paracompacto y $M = \bigcup\limits_{n\in\omega} F_n$ un subespacio tal que cada $F_n$ es cerrado en $X$. Sea $\mathcal{U}$ un cubrimiento abierto de $M$ y, para cada $U \in \mathcal{U}$, sea $U^*$ abierto en $X$ tal que $U^* \cap M = U$. Para cada $n \in \omega$, los abiertos $U^*$ junto con $X \setminus F_n$ forman un cubrimiento abierto de $X$, luego podemos tomar un refinamiento abierto localmente finito $\mathcal{U}_n$. Sea $\mathcal{V}_n = \{U \cap M \mid U \in \mathcal{U}_n,\ U \cap F_n \neq \varnothing\}$. Claramente, $\bigcup\limits_{n\in\omega} \mathcal{V}_n$ es un cubrimiento abierto de $M$ que refina a $\mathcal{U}$ y es $\sigma$-localmente finito, luego $M$ es paracompacto por el teorema 4.92. ■

A la hora de trabajar con subcubrimientos, a veces es útil saber que la definición de paracompacidad equivale a otras aparentementemente más fuertes. Para precisar esto necesitamos algunas definiciones:

**Definición 4.96** Si $\mathcal{U}$ es una familia de subconjuntos de un conjunto $X$, para cada $A \subset X$, definimos la *estrella* de $A$ como el conjunto

$$A^*_{\mathcal{U}} = \bigcup\{U \in \mathcal{U} \mid U \cap A \neq \varnothing\}.$$

Si $\mathcal{U}$ es un cubrimiento de $X$, diremos que otro cubrimiento $\mathcal{V}$ es un *refinamiento baricéntrico* de $\mathcal{U}$ si para todo $x \in X$ existe un $U \in \mathcal{U}$ tal que $\{x\}^*_{\mathcal{V}} \subset U$.

Diremos que un cubrimiento $\mathcal{V}$ es un *refinamiento estelar* de $\mathcal{U}$ si para cada $V \in \mathcal{V}$ existe un $U \in \mathcal{U}$ tal que $V^*_{\mathcal{V}} \subset U$.

Claramente, todo refinamiento estelar es un refinamiento baricéntrico, y todo refinamiento baricéntrico es un refinamiento.

Si definimos $\mathcal{V}^* = \{V^*_{\mathcal{V}} \mid V \in \mathcal{V}\}$, entonces $\mathcal{V}$ es un refinamiento estelar de $\mathcal{U}$ si y sólo si $\mathcal{V}^*$ es un refinamiento de $\mathcal{U}$.

Por último, recordemos que antes del teorema 9.16 definimos una familia discreta de subconjuntos de un espacio topológico como una familia tal que cada punto tiene un entorno que corta a lo sumo a un conjunto de la familia, y una familia $\sigma$-discreta como una unión numerable de familias discretas.

**Teorema 4.97** *Si $X$ es un espacio de Hausdorff, las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

1. *$X$ es paracompacto.*
2. *Todo cubrimiento abierto de $X$ admite un refinamiento abierto baricéntrico.*
3. *Todo cubrimiento abierto de $X$ admite un refinamiento abierto estelar.*
4. *$X$ es regular y todo cubrimiento abierto de $X$ admite un refinamiento abierto $\sigma$-discreto.*

Demostración: 1) $\Rightarrow$ 2) Sea $\mathcal{U}$ un cubrimiento abierto de $X$. Por 4.92 admite un refinamiento cerrado $\mathcal{U}'$ localmente finito. Para cada $F \in \mathcal{U}'$, elegimos $\hat{F} \in \mathcal{U}$ tal que $F \subset \hat{F}$. Si $x \in X$, el conjunto $\mathcal{F}_x = \{F \in \mathcal{F} \mid x \in F\}$ es finito, luego el conjunto

$$V_x = \bigcap_{F \in \mathcal{F}_x} \hat{F} \cap (X \setminus \bigcup_{F \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{F}_x} F)$$

es abierto, donde usamos que la unión es cerrada por el teorema 4.89. Como $x \in V_x$, tenemos que $\mathcal{V} = \{V_x \mid x \in X\}$ es un cubrimiento abierto de $X$. Vamos a probar que es un refinamiento baricéntrico de $\mathcal{U}$. Para ello observamos que si $x_0 \in X$ y $F \in \mathcal{F}_{x_0}$, entonces, si $x_0 \in V_x$ tenemos que $F \in \mathcal{F}_x$, pues en caso contrario $x_0 \in X \setminus \bigcup\limits_{F \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{F}_x} F \subset X \setminus F$, luego $V_x \subset \hat{F}$, luego $\{x_0\}^*_{\mathcal{V}} \subset \hat{F}$.

2) $\Rightarrow$ 3) Sea $\mathcal{U}$ un cubrimiento abierto de $X$, sea $\mathcal{V}$ un refinamiento abierto baricéntrico y sea $\mathcal{V}'$ un refinamiento abierto baricéntrico de $\mathcal{V}$. Basta ver que $\mathcal{V}'$ es un refinamiento abierto estelar de $\mathcal{U}$.

Tomamos $V'' \in \mathcal{V}''$. Para cada $x \in V''$ elegimos $V_x \in \mathcal{V}$ tal que $\{x\}^*_{\mathcal{V}''} \subset V_x$. Entonces

$$V''^*_{\mathcal{V}''} = \bigcup_{x \in V''} \{x\}^*_{\mathcal{V}''} \subset \bigcup_{x \in V''} V_x.$$

Fijemos $x_0 \in V''$. Entonces, si $x \in V''$, se cumple que $x_0 \in \{x\}^*_{\mathcal{V}''} \subset V_x$, luego $V_x \subset \{x_0\}^*_{\mathcal{V}}$. Por consiguiente,

$$\bigcup_{x \in V''} V_x \subset \{x_0\}^*_{\mathcal{V}}.$$

Ahora tomamos $U \in \mathcal{U}$ tal que $\{x_0\}^*_{\mathcal{V}} \subset U$, con lo que $V''^*_{\mathcal{V}''} \subset U$.

3) $\Rightarrow$ 4) Veamos en primer lugar que $X$ es regular. Para ello consideramos un cerrado $F \subset X$ y un punto $x \in X \setminus F$. Entonces $\{X \setminus F, X \setminus \{x\}\}$ es un cubrimiento abierto de $X$, luego admite un refinamiento abierto estelar $\mathcal{V}$. Sea $V \in \mathcal{V}$ tal que $x \in V$. Entonces $x \in V \subset V^*_{\mathcal{V}} \subset X \setminus F$, luego $\overline{V} \cap F = \varnothing$, pues si $y \in \overline{V} \cap F$, existe $V' \in \mathcal{V}$ tal que $y \in V'$, luego $V' \cap V \neq \varnothing$, luego $V' \subset V^*_{\mathcal{V}} \subset X \setminus F$, contradicción. Así pues, $V$ y $X \setminus \overline{V}$ separan a $x$ y $F$.

Sea $\mathcal{U}$ un cubrimiento abierto de $X$. Sea $\mathcal{U}_0 = \mathcal{U}$ y, para cada natural $n$, sea $\mathcal{U}_{n+1}$ un refinamiento abierto estelar de $\mathcal{U}_n$. Para cada $U \in \mathcal{U}$ y cada $n \geq 1$ sea $U_n$ el abierto formado por los puntos $x \in X$ tales que $x$ tiene un entorno $V$ tal que $V^*_{\mathcal{U}_n} \subset U$. Notemos que en particular $U_n \subset U$.

Notemos que $\{U_n \mid U \in \mathcal{U}\}$ es un refinamiento abierto de $\mathcal{U}$, pues $U_n \subset U$ y si $x \in X$, existe $V \in \mathcal{U}_n$ tal que $x \in V$ y a su vez (como $n > 0$) existe un $U \in \mathcal{U}$ tal que $x \in V \subset V^*_{\mathcal{U}_n} \subset U$, luego $x \in U_n$.

Observemos ahora que si $x \in U_n$, $y \in X \setminus U_{n+1}$, entonces no existe ningún $V \in \mathcal{U}_{n+1}$ tal que $x$, $y \in V$.

En efecto, si $V \in \mathcal{U}_{n+1}$, existe un $W \in \mathcal{U}_n$ tal que $V^*_{\mathcal{U}_{n+1}} \subset W$. Si $x \in V$, entonces, como $x \in X$, por la definición de estrella y por la definición de $U_n$, tenemos que $W \subset \{x\}^*_{\mathcal{U}_n} \subset U$, luego $V^*_{\mathcal{U}_{n+1}} \subset U$, luego $V \subset U_{n+1}$, por definición de $U_{n+1}$, luego no puede haber un $y \in V \setminus U_{n+1}$, Fijemos un buen orden en $\mathcal{U}$ y, para cada $U \in \mathcal{U}$, sea

$$\hat{U}_n = U_n \setminus \overline{\bigcup_{U'<U} U'_{n+1}}.$$

La familia $\{\hat{U}_n\}_{U\in\mathcal{U}}$ es discreta, pues si $a \in X$, existe un $V \in \mathcal{U}_{n+1}$ tal que $a \in V$. Si $V$ cortara a dos abiertos distintos $\hat{U}_n$ y $\hat{U}'_n$, digamos que $x \in V \cap \hat{U}'_n$, $y \in V \cap \hat{U}_n$, podemos suponer que $U' < U$, con lo que $\hat{U}_n \subset X \setminus U'_{n+1}$, luego $x \in U'_n$, $y \in X \setminus U'_{n+1}$, luego $x, y \in V \in \mathcal{U}_{n+1}$ contradice lo que hemos probado antes.

Obviamente $\hat{U}_n$ está contenido en $U_n \subset U$, luego si probamos que la familia $\{\hat{U}_n \mid U \in \mathcal{U},\ n \in \omega \setminus \{0\}\}$ es un cubrimiento de $X$, tendremos que es un refinamiento $\sigma$-discreto de $\mathcal{U}$.

Dado $x \in X$, hemos visto que, para cada $n \geq 1$, existe un $U$ tal que $x \in U_n$, luego podemos tomar el mínimo $U \in \mathcal{U}$ tal que $x \in U_n$, para cierto $n \geq 1$. Entonces

$$\{x\}^*_{\mathcal{U}_{n+2}} \cap \bigcup_{U'<U} U'_{n+1} = \varnothing,$$

pues si $y$ está en la intersección, entonces existe un $U'' \in \mathcal{U}_{n+2}$ tal que $x, y \in U''$ y existe un $U' < U$ tal que $y \in U'_{n+1}$, pero $x \notin U'_{n+2}$, por la minimalidad de $U$, luego, según hemos probado antes, $x$, $y$ no pueden pertenecer a un mismo elemento de $\mathcal{U}_{n+2}$ y tenemos una contradicción.

Como $\{x\}^*_{\mathcal{U}_{n+1}}$ es un entorno de $x$, tenemos que $x \notin \overline{\bigcup_{U'<U} U'_{n+1}}$, es decir, que $x \in \hat{U}_n$.

4) $\Rightarrow$ 1) Puesto que toda familia $\sigma$-discreta es $\sigma$-localmente finita, basta aplicar el teorema 4.92. ■

Como aplicación generalizamos un hecho que ya conocemos para espacios compactos:

**Teorema 4.98** *Todo espacio de Hausdorff paracompacto es completamente uniformizable.*

Demostración: Sea $X$ un espacio de Hausdorff paracompacto y sea $\mathcal{B}$ el conjunto de todas las bandas abiertas de $X \times X$. Vamos a probar que $\mathcal{B}$ es la base de una uniformidad en $X$. Para ello basta probar que si $V \in \mathcal{B}$, existe un $W \in \mathcal{B}$ tal que $2W \subset V$.

Dado $V \in \mathcal{B}$, sea $\mathcal{U}$ el conjunto de todos los abiertos $U \neq \varnothing$ en $X$ tales que $U \times U \subset V$. Claramente es un cubrimiento abierto de $X$, luego podemos tomar un refinamiento abierto baricéntrico $\mathcal{V}$. Sea $W = \bigcup_{V\in\mathcal{V}} (V \times V) \in \mathcal{B}$.

Si $(x, z) \in 2W$, existe un $y \in X$ tal que $(x, y)$, $(y, z) \in W$. Entonces existen $V_1, V_2 \in \mathcal{V}$ tales que $x, y \in V_1$, $y, z \in V_2$. Como $y \in V_1 \cap V_2$, existe un $U \in \mathcal{U}$ tal que $V_1 \cup V_2 \subset \{y\}^*_{\mathcal{V}} \subset U$, luego $(x, z) \in U \times U \subset V$. Esto prueba que $2W \subset V$.

Veamos ahora que la uniformidad determinada por $\mathcal{B}$ es completa. Sea $\mathcal{F}$ un filtro que no converja y vamos a ver que no es de Cauchy. Consideremos

$\mathcal{U} = \{X \setminus \overline{F} \mid F \in \mathcal{F}\}$. Se trata de un cubrimiento abierto de $X$, pues si $x \in X$ no estuviera en ningún abierto de $\mathcal{U}$, esto significaría que $x \in \bigcap\limits_{F \in \mathcal{F}} \overline{F}$, es decir, que $x$ es un punto adherente de $\mathcal{F}$. Si el filtro fuera de Cauchy, convergería a $x$.

Sea $\mathcal{V}$ un refinamiento abierto baricéntrico de $\mathcal{U}$ y sea $U = \bigcup\limits_{V \in \mathcal{V}} (V \times V) \in \mathcal{B}$.

Si $\mathcal{F}$ fuera un filtro de Cauchy, existiría $F \in \mathcal{F}$ tal que $F \times F \subset U$. Dado $x \in F$, para cada $y \in F$ se cumple que $(x, y) \in U$, luego existe un $V \in \mathcal{V}$ tal que $x$, $y \in V$, luego $y \in \{x\}^*_{\mathcal{V}}$, Con esto hemos probado que $F \subset \{x\}^*_{\mathcal{V}} \subset X \setminus \overline{F}_0$, para cierto $F_0 \in \mathcal{F}$, luego $F \cap F_0 = \varnothing$, contradicción.

Sólo falta probar que la topología inducida por la uniformidad determinada por $\mathcal{B}$ es la topología de $X$. Como las bandas de $\mathcal{B}$ son abiertas en $X \times X$, es claro que los abiertos de la topología de la uniformidad son abiertos en $X$. Sea ahora $V$ un abierto en $X$ no vacío y sea $x \in V$. Como $X$ es regular, existe un abierto $U$ tal que $x \in U \subset \overline{U} \subset V$. Asi $\{V, X \setminus \overline{U}\}$ es un cubrimiento abierto de $X$, luego $W = (V \times V) \cup ((X \setminus \overline{U}) \times (X \setminus \overline{U})) \in \mathcal{B}$ y $x \in B_W(x) = V$, luego $V$ es abierto para la topología de la uniformidad. ■

Veamos ahora otra caracterización muy importante de la paracompacidad, en términos de particiones de la unidad.

**Definición 4.99** Si $X$ es un espacio topológico, el *soporte* de una función continua $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es la clausura del conjunto de puntos donde $f$ no se anula.

Una *partición de la unidad* en $X$ es una familia $\{f_i\}_{i \in I}$ de funciones continuas $f_i : X \longrightarrow [0, 1]$ tales que cada punto $x \in X$ sólo hay un conjunto finito de índices $i \in I$ tales que $f_i(x) \neq 0$, y además $\sum\limits_i f_i(x) = 1$.

Una partición de la unidad es *localmente finita* si cada punto $x \in X$ tiene un entorno $U$ tal que sólo hay un conjunto finito de índices $i \in I$ tales que $f_i|_U \neq 0$.

Una partición de la unidad está *subordinada* a un cubrimiento abierto $\mathcal{U}$ si cada soporte $\operatorname{sop} f_i$ está contenido en un abierto de $\mathcal{U}$.

**Teorema 4.100** *Si $X$ es un espacio de Hausdorff, las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

1. *$X$ es paracompacto.*
2. *Todo cubrimiento abierto de $X$ tiene una partición de la unidad localmente finita subordinada.*
3. *Todo cubrimiento abierto de $X$ tiene una partición de la unidad subordinada.*

DEMOSTRACIÓN: 1) $\Rightarrow$ 2) Dado un cubrimiento abierto de $X$, tomamos un refinamiento $\mathcal{U} = \{U_i \mid i \in I\}$ localmente finito y por el teorema 4.92 éste tiene a su vez un refinamiento cerrado localmente finito, digamos[7] $\{F_i \mid i \in I\}$.

[7]En la prueba del teorema 4.92 se ve que podemos tomar el mismo conjunto de índices.

El lema de Urysohn nos da funciones continuas $g_i : X \longrightarrow I$ tales que $g_i|_{X\setminus U_i} = 0$ y $g_i|_{F_i} = 1$. Así $\operatorname{sop} g_i \subset U_i$, luego está contenido en un abierto del cubrimiento original y, como $\mathcal{U}$ es localmente finito, todo punto tiene un entorno que corta a un número finito de soportes. Esto hace que esté bien definida la suma $g(x) = \sum\limits_{i\in I} g_i(x)$, que es una función continua, ya que en un entorno de cada punto es suma de un número finito de funciones continuas, y no se anula en ningún punto, porque no hay sumandos negativos y siempre hay uno que vale 1 (pues todo punto está en un $F_i$). Es claro entonces que las funciones $f_i = g_i/g$ forman una partición de la unidad localmente finita subordinada al cubrimiento dado.

2) $\Rightarrow$ 3) es inmediato.

3) $\Rightarrow$ 1) Sea $\mathcal{U}$ un cubrimiento abierto de $X$ y sea $\{f_i\}_{i\in I}$ una partición de la unidad subordinada. Observemos que si $g : X \longrightarrow [0, 1]$ es una función continua y $x_0 \in X$ cumple $g(x_0) > 0$, existe un entorno $U_0$ de $x_0$ y un conjunto finito $I_0 \subset I$ tal que $f_i(x) < g(x)$ para todo $x \in U_0$ y todo $i \in I \setminus I_0$. En efecto, podemos tomar $I_0$ tal que

$$1 - \sum_{i\in I_0} f_i(x_0) = 0 < g(x_0)$$

y $U_0 = \{x \in X \mid 1 - \sum\limits_{i\in I_0} f_i(x) < g(x)\}$.

Para cada $x \in X$ existe un $i_x \in I$ tal que $f_{i_x}(x) > 0$. Por la observación precedente, existe un entorno abierto $U_0$ de $x$ y un conjunto finito $I_0 \subset I$ de modo que $f_i(u) < f_{i_x}(u)$ para todo $i \in I \setminus I_0$ y todo $u \in U_0$. Por consiguiente, para todo $u \in U_0$

$$\sup_{i\in I} f_i(u) = \sup_{i\in I\setminus I_0} f_i(u)$$

lo que implica que la función $f(x) = \sup\limits_{i\in I} f_i(u)$ es continua en $X$, ya que lo es en un entorno de cada punto.

Más concretamente, tenemos que $f : X \longrightarrow ]0, 1]$, por lo que los conjuntos

$$V_i = \{x \in X \mid f_i(x) > \frac{1}{2} f(x)\} \subset \operatorname{sop} f_i$$

forman un cubrimiento abierto de $X$ subordinado a $\mathcal{U}$. Si $x \in X$, la observación inicial nos da un abierto $U_0$ y un conjunto finito de índices $I_0 \subset I$ de modo que $f_i(x) < f(x)/2$ para todo $x \in U_0$ y todo $i \in I \setminus I_0$. Esto implica que $U_0 \cap V_i = \varnothing$ para todo $i \in I \setminus I_0$, luego $\{V_i\}_{i\in I}$ es un refinamiento de $\mathcal{U}$ localmente finito. ■

**Nota** En la prueba del teorema anterior se ve que si el cubrimiento de partida es localmente finito, $\mathcal{U} = \{U_i \mid i \in I\}$, entonces la partición de la unidad se puede tomar con el mismo conjunto de índices, $\{f_i\}_{i\in I}$, de modo que $\operatorname{sop} f_i \subset U_i$. ■

# Capítulo V

# Axiomas de separación

En los capítulos anteriores hemos podido comprobar cómo la modesta definición de "topología" sirve de soporte a la definición de una rica gama de conceptos topológicos. Sin embargo, muchos resultados requieren suponer que los espacios topológicos involucrados cumplen propiedades más fuertes que las que prescribe la pura definición de espacio topológico, como la compacidad, o la compacidad local, etc.

En este capítulo estudiamos una jerarquía de propiedades adicionales que podemos añadir a la definición de espacio topológico y que se conocen como "axiomas de separación". En realidad ya hemos considerado cuatro de ellos, los que hemos llamado $T_0$, $T_1$, $T_2$ y $T_3$, y hemos podido constatar la relevancia de los tres primeros. Aquí introduciremos otros axiomas de separación más potentes.

## 5.1 Espacios de Hausdorff y regulares

Repetimos aquí las definiciones 1.15 y 1.23 en la que hemos introducido los primeros axiomas de separación:

**Definición 5.1** Se dice que un espacio topológico $X$ cumple la propiedad:[1]

$\boldsymbol{T_0}$ si cuando $x$, $y$ son dos puntos distintos en $X$, existe un abierto que contiene sólo a uno de ellos.

$\boldsymbol{T_1}$ si cuando $x$, $y$ son dos puntos distintos en $X$, existe un abierto $U$ tal que $x \in U$, $y \notin U$.

$\boldsymbol{T_2}$ si cuando $u$, $v \in X$ son dos puntos distintos, existen abiertos disjuntos $U$, $V$ en $X$ tales que $u \in U$, $v \in V$.

$\boldsymbol{T_3}$ si es $T_1$ y cuando $C \subset X$ es cerrado y $p \in X \setminus C$, existen abiertos disjuntos $U$ y $V$ tales que $p \in U$, $C \subset V$.

[1] La $T$ es por el alemán *Trennung* (separación).

La propiedad $T_0$ (resp. $T_2$ se llama también *propiedad de Kolmogorov* (resp. *de Hausdorff*) y los espacios que la cumplen se llaman *espacios de Kolmogorov* (resp. *espacios de Hausdorff*.) Los espacios que cumplen la propiedad $T_3$ se llaman también *espacios regulares.*

La propiedad $T_0$ equivale a que no haya puntos topológicamente indistinguibles, la propiedad $T_1$ equivale a que los puntos sean cerrados, y es fácil ver que la propiedad $T_2$ equivale a que las sucesiones y filtros convergentes tengan límites únicos. La propiedad $T_3$ equivale a que todo punto tenga una base de entornos cerrados (teorema 1.25).

**Ejercicio:** Si $X$ es un espacio topológico, la relación en $X$ dada por $x\,R\,y$ si y sólo si $x$ e $y$ son topológicamente indistinguibles (sin excluir que sean el mismo punto) es una relación de equivalencia, y el cociente $X/R$ tiene la propiedad $T_0$.

Es inmediato que todo espacio $T_3$ es $T_2$, todo espacio $T_2$ es $T_1$ y todo espacio $T_1$ es $T_0$. En cambio, hemos visto ejemplos de espacios que no son $T_0$ (por ejemplo, un espacio pseudométrico no metrizable), espacios que son $T_0$ y no $T_1$ (la topología del punto particular, ejemplo A.1), espacios que son $T_1$ y no $T_2$ (la topología cofinita, ejemplo A.3) y espacios que son $T_2$ y no $T_3$ (ejemplo A.7).

Por otra parte, los teoremas 1.16, 1.17, 1.26 y 1.27 se resumen en que todo subespacio y todo producto de espacios $T_i$ es $T_i$ para $i = 0, 1, 2, 3$.

Respecto a cocientes, el teorema siguiente es inmediato a partir del teorema 1.44:

**Teorema 5.2** *Si $f : X \longrightarrow Y$ es una identificación entre espacios topológicos, entonces $Y$ cumple la propiedad $T_1$ si y sólo si las fibras $f^{-1}[\{y\}]$, con $y \in Y$ son cerradas en $X$.*

También hemos demostrado el teorema 1.48 que nos da una condición suficiente para que un espacio cociente con proyección abierta sea de Hausdorff. El teorema 5.27, más abajo, nos dará una condición suficiente para que un cociente con proyección cerrada sea un espacio de Hausdorff.

La mayor parte de los espacios topológicos de interés son regulares. Por ejemplo, el teorema 2.10 prueba que todo espacio uniforme $T_0$ es regular. En particular esto se aplica a los espacios métricos. Todo espacio de Hausdorff localmente compacto es regular, pues cada punto tiene una base de entornos compactos, luego cerrados. En particular todo espacio compacto es regular. No es difícil probar que los espacios ordenados también son regulares, pero en la sección siguiente será inmediato. Otro caso elemental es el siguiente:

**Teorema 5.3** *Todo espacio cerodimensional es regular.*

Demostración: Si $X$ es cerodimensional, por definición es $T_1$, y si $C \subset X$ es cerrado y $x \in X \setminus C$, existe un abierto cerrado $U$ en $X$ tal que $x \in U \subset X \setminus C$, luego $U$ y $X \setminus U$ son abiertos que separan a $x$ de $C$. ■

En varias ocasiones necesitaremos este hecho sencillo:

**Teorema 5.4** *Todo espacio de Hausdorff infinito contiene un subespacio infinito discreto.*

DEMOSTRACIÓN: Si $X$ es un espacio de Hausdorff infinito, existe un abierto infinito $U_1 \subset X$ y un punto $x_0 \in X \setminus \overline{U}_1$. En efecto, si $X$ es discreto es trivial, y en caso contrario tomamos un punto no aislado $y \in X$, otro punto $x_0 \neq y$ y abiertos disjuntos $y \in U_1$, $x_0 \in V$. Repitiendo el proceso, tomamos un abierto infinito $U_2 \subset U_1$ y un punto $x_1 \in U_1 \setminus \overline{U}_2$. De este modo obtenemos un subespacio discreto $D = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, pues, llamando $U_0 = X$, se cumple que $D \cap (U_n \setminus \overline{U}_{n+1}) = \{x_n\}$. ■

**Ejemplo** Si $X$ es un conjunto infinito con la topología cofinita, entonces $X$ es $T_1$, pero no contiene subespacios infinitos discretos, pues la topología de cada subespacio es también la topología cofinita, por lo que sólo es discreto si es finito. ■

La regularidad permite probar una versión fuerte de la propiedad de Hausdorff:

**Teorema 5.5** *Si $X$ es un espacio topológico regular y $D \subset X$ es un subconjunto numerable discreto, entonces existe una familia $\{U_d\}_{d\in D}$ de abiertos disjuntos dos a dos tal que $d \in U_d$.*

DEMOSTRACIÓN: Pongamos que $D = \{d_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Que $D_n$ sea discreto significa que existen abiertos $V_n$ tales que $V_n \cap D = \{d_n\}$. Por la regularidad (teorema 1.24) existen abiertos $d_n \in W_n \subset \overline{W}_n \subset V_n$. Así, los abiertos dados por $U_n = W_n \setminus \bigcup\limits_{m<n} \overline{W}_m$ cumplen lo requerido. ■

Sin embargo, no podemos probar algo similar para conjuntos discretos de cardinal arbitrario. En su lugar, tenemos una nueva propiedad de separación:

**Definición 5.6** Un espacio topológico $X$ es *colectivamente de Hausdorff* si para todo subconjunto cerrado discreto $D \subset X$ existe una familia $\{U_d\}_{d\in D}$ de abiertos de $X$ disjuntos dos a dos tales que $d \in U_d$.

Notemos que el hecho de que $D$ sea discreto es una condición necesaria para que pueda existir una familia de abiertos que separe los puntos de $D$ según la definición que acabamos de dar. Sin embargo, la exigencia de que $D$ sea cerrado no es imprescindible:

**Teorema 5.7** *Si $X$ es un espacio topológico, las condiciones siguientes son equivalentes:*

1. *Todo subespacio de $X$ es colectivamente de Hausdorff.*
2. *Todo abierto en $X$ es colectivamente de Hausdorff.*
3. *Para todo subconjunto discreto $D \subset X$ existe una familia $\{U_d\}_{d\in D}$ de abiertos de $X$ disjuntos dos a dos tales que $d \in U_d$.*

DEMOSTRACIÓN: Obviamente 1) $\Rightarrow$ 2). Veamos que 2) $\Rightarrow$ 3). Sea $A$ el conjunto de los puntos de acumulación de $D$. Claramente es cerrado y, como $D$ es discreto, $D \subset X \setminus A$. Más aún, $D$ es cerrado en $X \setminus A$. Como $X \setminus A$ es colectivamente de Hausdorff, existe una familia $\{U_d\}_{d\in D}$ de abiertos de $X \setminus A$ (luego de $X$) disjuntos dos a dos de modo que $d \in U_d$.

La implicación 3) $\Rightarrow$ 1) es trivial, pues si $Y \subset X$ es un subespacio arbitrario y $D \subset Y$ es un subespacio discreto cerrado en $Y$, por 3) existe una familia $\{U_d\}_{d\in D}$ de abiertos en $X$ disjuntos dos a dos tales que $d \in U_d$, luego los abiertos $U_d \cap Y$ prueban que $Y$ es colectivamente de Hausdorff. ■

**Definición 5.8** Los espacios que cumplen las condiciones del teorema anterior se llaman espacios *hereditariamente colectivamente de Hausdorff.*

En la sección 5.2 probaremos que los espacios métricos y los espacios ordenados son hereditariamente colectivamente de Hausdorff.

El teorema 5.5 implica que si en un espacio topológico regular todos los subespacios cerrados discretos son numerables, entonces es colectivamente de Hausdorff, y si todos los subespacios discretos son numerables, entonces es hereditariamente colectivamente de Hausdorff.[2]

Obviamente todo espacio hereditariamente colectivamente de Hausdorff es colectivamente de Hausdorff, y todo espacio colectivamente de Hausdorff es de Hausdorff. El plano de Sorgenfrey $S \times S$ (ejemplo A.26) es un caso de espacio de Hausdorff que no es colectivamente de Hausdorff.

Más adelante será inmediato[3] que $S \times S$ puede sumergirse en un espacio de Hausdorff compacto $K$. Pero todo espacio de Hausdorff compacto es trivialmente colectivamente de Hausdorff, ya que sus subespacios cerrados discretos son compactos discretos, luego finitos. Por lo tanto, dicho $K$ es un ejemplo de espacio colectivamente de Hausdorff que no es hereditariamente colectivamente de Hausdorff.[4]

Un espacio colectivamente de Hausdorff es obviamente de Hausdorff, pero el ejemplo[5] A.8 muestra que incluso un espacio hereditariamente colectivamente de Hausdorff no es necesariamente regular. Por otra parte, el plano de Sorgenfrey (ejemplo A.26) es un caso de espacio regular que no es colectivamente de Hausdorff. No obstante:

**Teorema 5.9** *Todo espacio colectivamente de Hausdorff que cumpla el primer axioma de numerabilidad es regular.*

[2] En términos de los cardinales invariantes que introduciremos en 8.18, las hipótesis equivalen a que $e(X) = \aleph_0$ y a que $eh(X) = \aleph_0$, respectivamente, y ambas se dan si $X$ tiene una base numerable.

[3] Esto se debe a que $S \times S$ es completamente regular, y todo espacio completamente regular es compactificable.

[4] Un ejemplo menos trivial se obtiene considerando una unión disjunta $K \cup X$, donde $X$ es cualquier espacio colectivamente de Hausdorff.

[5] Este ejemplo requiere que el lector esté familiarizado con los conjuntos cerrados no acotados en ordinales, que se estudian en [TC VI].

Demostración: Sea $X$ un espacio colectivamente de Hausdorff 1AN y supongamos que existen un cerrado $C \subset X$ y un punto $x_0 \in X \setminus C$ de modo que $x_0$ y $C$ no puedan separarse por abiertos. Sea $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ una base de entornos abiertos de $x_0$, que podemos tomar decreciente. Para cada $n$, se cumple que $\overline{U}_n \cap C \neq \varnothing$, pues de lo contrario $U_n$ y $X \setminus \overline{U}_n$ separarían a $x_0$ y a $C$. Tomemos $x_n \in \overline{U}_n \cap C$ y consideremos el conjunto $D = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Se cumple que $D$ es cerrado, pues si $x \in \overline{D} \setminus D$, como $X$ es un espacio de Hausdorff, $x_0$ y $x$ tienen entornos disjuntos, digamos $x_0 \in U_n$, $x \in V$, pero entonces $V \cap \overline{U}_n = \varnothing$, luego $V \cap D$ es finito y, reduciendo $V$, obtenemos un entorno de $x$ que no corta a $D$, contradicción.

Además $D$ es discreto, pues por el mismo argumento, todo $x_n$ con $n \geq 1$ tiene un entorno tal que $V \cap D = \{x_n\}$ y $(X \setminus C) \cap D = \{x_0\}$. Como $X$ es colectivamente de Hausdorff, debería existir una familia de abiertos $\{V_n\}_{n=0}^{\infty}$ disjuntos dos a dos que separen a los puntos de $D$, pero entonces existe un $n \geq 1$ tal que $U_n \subset V_0$, luego $x_n \in \overline{V}_0 \cap V_n$, luego $V_0 \cap V_n \neq \varnothing$, contradicción. ■

## 5.2 Espacios normales

Quizá el lector haya pensado que, en lugar de haber definido el concepto de espacio regular, lo natural hubiera sido definir el concepto siguiente:

**Definición 5.10** Se dice que un espacio topológico $X$ es *normal,* o que cumple el *axioma* $T_4$, si es $T_1$ y cuando $C_1$, $C_2 \subset X$ son cerrados disjuntos, existen abiertos disjuntos $U_1$ y $U_2$ tales que $C_i \subset U_i$.

En otras palabras, un espacio es normal si sus puntos son cerrados y dos cerrados disjuntos cualesquiera pueden separarse por abiertos. Así, la regularidad es el caso particular de la normalidad que resulta de reducir uno de los cerrados a un punto, por lo que todo espacio normal es regular.

Existe una versión análoga al teorema 1.24 para espacios normales:

**Teorema 5.11** *Un espacio $X$ que cumpla el axioma $T_1$ es normal si y sólo si cuando $C \subset U$ son un cerrado y un abierto, respectivamente, existe otro abierto $V$ tal que $C \subset V \subset \overline{V} \subset U$.*

Demostración: Si $X$ es normal, aplicamos la definición a los cerrados disjuntos $C$ y $X \setminus U$, con lo que existen abiertos disjuntos $V$ y $W$ tales que $C \subset U$ y $X \setminus U \subset W$, pero entonces $V \subset X \setminus W \subset U$, luego $\overline{V} \subset X \setminus W \subset U$.

Si $X$ cumple la condición del enunciado y $C_1$, $C_2$ son cerrados disjuntos, $C_1 \subset X \setminus C_2$, luego existe un abierto $V$ tal que $C_1 \subset V \subset \overline{V} \subset X \setminus C_2$. Entonces, los abiertos $U_1 = V$ y $U_2 = X \setminus \overline{V}$ separan a los cerrados dados. ■

El teorema 4.10 admite este enunciado alternativo:

**Teorema 5.12** *Todo espacio de Hausdorff compacto es normal.*

Si aumentamos "Hausdorff" hasta "regular" podemos rebajar "compacto" hasta "Lindelöf":

**Teorema 5.13** *Todo espacio de Lindelöf regular es normal.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $X$ un espacio de Lindelöf regular y sean $A$ y $B$ dos cerrados disjuntos en $X$. Por el teorema 4.47 ambos son espacios de Lindelöf. Por 1.24, para cada $a \in A$ existe un abierto tal que $a \in U_a \subset \overline{U}_a \subset X \setminus B$. Extrayendo un subcubrimiento numerable del subrimiento $\{U_a\}_{a \in A}$ podemos cubrir $A \subset \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} U_n$, de modo que $\overline{U}_n \cap B = \varnothing$. Igualmente podemos cubrir $B \subset \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} V_n$ con $\overline{V}_n \cap A = \varnothing$.

Sea $G_i = U_i \setminus \bigcup\limits_{n \leq i} \overline{V}_n$, $H_i = V_i \setminus \bigcup\limits_{n \leq i} \overline{U}_n$. Claramente, son abiertos tales que $G_i \cap V_n = \varnothing = H_i \cap U_n$ para $n \leq i$, luego $G_i \cap H_j = \varnothing$, para todo par de índices $i$, $j$. Además

$$A \subset U = \bigcup_{i=0}^{\infty} G_i, \qquad B \subset V = \bigcup_{i=0}^{\infty} H_i,$$

con $U \cap V = \varnothing$. ■

El ejemplo A.14 muestra un espacio de Hausdorff de Lindelöf no regular.

La razón por la que conviene haber estudiado aparte la regularidad es porque ésta se conserva mucho mejor que la normalidad, ya que, como veremos, no es cierto en general que todo subespacio o todo producto de espacios normales sea normal. Por ejemplo, de 5.12 deducimos:

**Teorema 5.14** *Todo espacio de Hausdorff localmente compacto es regular.*

DEMOSTRACIÓN: Si $X$ es un espacio de Hausdorff localmente compacto, entonces es un subespacio de su compactificación de Alexandroff $X^\infty$, que por el teorema 4.23 es un espacio de Hausdorff compacto, luego normal y, en particular, regular, luego $X$ es regular. ■

Pero no podemos afinar más y concluir que todo espacio de Hausdorff localmente compacto es normal, porque no es cierto en general que todo subespacio abierto de un espacio normal sea normal.

Por ejemplo, la placa perforada de Tychonov (ejemplo A.34) es un caso de espacio localmente compacto cerodimensional que no es normal, pero que es un subespacio abierto de un espacio compacto (luego normal). No obstante, la normalidad es hereditaria por cerrados:

**Teorema 5.15** *Todo subespacio cerrado de un espacio normal es normal.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $X$ un espacio normal, sea $Y \subset X$ cerrado y consideremos dos cerrados disjuntos $C_1$, $C_2 \subset Y$. Como también son cerrados en $X$ están separados por abiertos en $X$, luego también por abiertos en $Y$. ■

En cambio, ya hemos visto que la normalidad no se conserva por abiertos. Sobre los subespacios abiertos de los espacios normales podemos probar lo siguiente:

**Teorema 5.16** *Si $X$ es un espacio topológico $T_1$, las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

1. *Todo subespacio de $X$ es normal.*
2. *Todo subespacio abierto de $X$ es normal.*
3. *Si $A$, $B \subset X$ cumplen $\overline{A} \cap B = A \cap \overline{B} = 0$, entonces existen abiertos disjuntos $U$ y $V$ en $X$ tales que $A \subset U$, $B \subset V$.*

DEMOSTRACIÓN: Obviamente 1) $\Rightarrow$ 2). Veamos que 2) $\Rightarrow$ 3). Puesto que $Y = X \setminus (\overline{A} \cap \overline{B})$ es un subespacio abierto de $X$, tenemos que es normal, y claramente $A$, $B \subset Y$. Además, las clausuras de $A$ y $B$ en $Y$ son disjuntas, luego por la normalidad, dichas clausuras (y, en particular, $A$ y $B$) están separadas por abiertos (en $Y$, luego también en $X$).

Veamos ahora que 3) $\Rightarrow$ 1). Sea $Y \subset X$ un subespacio arbitrario y consideremos dos subespacios $A$, $B \subset Y$ cerrados disjuntos en $Y$. Es claro entonces que $A$ y $B$ cumplen en $X$ la hipótesis de 3), luego están separados por abiertos en $X$, luego también en $Y$. ■

**Definición 5.17** Se dice que un espacio topológico $X$ es *hereditariamente normal,* o que cumple el *axioma* $T_5$, si es $T_1$ y, cuando dos subconjuntos $A$, $B \subset X$ cumplen $\overline{A} \cap B = A \cap \overline{B} = 0$, existen abiertos disjuntos $U$ y $V$ en $X$ tales que $A \subset U$, $B \subset V$.

El teorema anterior implica que todo espacio $T_5$ es $T_4$.

Cuando dos conjuntos cumplen la condición $\overline{A} \cap B = A \cap \overline{B} = \varnothing$, se dice que están *separados,* así que la normalidad hereditaria equivale a que todo par de conjuntos separados puede ser separado por abiertos.

La placa de Tychonoff (ejemplo A.34) es un caso de espacio compacto que es normal, pero no hereditariamente normal. Pronto veremos que los espacios métricos y los espacios ordenados son hereditariamente normales, pero en realidad cumplen propiedades más fuertes que vamos a introducir a continuación:

Un espacio topológico $X$ es *colectivamente normal* si es $T_1$ y cuando $\{F_i\}_{i\in I}$ es una familia discreta de subconjuntos cerrados de $X$ disjuntos dos a dos (donde *discreta* significa que la unión de cualquier subfamilia es cerrada) existe una familia $\{U_i\}_{i\in I}$ de abiertos disjuntos dos a dos tales que $F_i \subset U_i$.

Se cumple el análogo al teorema 5.5:

**Teorema 5.18** *Si $X$ es un espacio normal y $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una familia numerable y discreta de subconjuntos cerrados de $X$ disjuntos dos a dos, existe una familia $\{U_n\}_{n=0}^{\infty}$ de abiertos disjuntos dos a dos de modo que $F_n \subset U_n$.*

Demostración: Sea $V_n = X \setminus \bigcup\limits_{m\neq n} F_n$, que por hipótesis es un abierto que contiene únicamente a $F_n$. Por la normalidad de $X$, podemos tomar abiertos $F_n \subset W_n \subset \overline{W}_n \subset V_n$, y basta definir $U_n = W_n \setminus \bigcup\limits_{m<n} \overline{W}_m$. ■

Por lo tanto, si en un espacio topológico normal todos los subespacios cerrados discretos son numerables, entonces es colectivamente normal (porque tomando un punto de cada elemento de una familia discreta de cerrados disjuntos dos a dos obtenemos un cerrado discreto del mismo cardinal).

Obviamente, todo espacio colectivamente normal es normal y colectivamente de Hausdorff. Por otra parte, el ejemplo A.44 es un caso de espacio hereditariamente normal que no es colectivamente de Hausdorff, mientras que A.45 es un espacio normal y colectivamente de Hausdorff que no es colectivamente normal.

También tenemos un teorema análogo a 5.7 y a 5.16:

**Teorema 5.19** *Si $X$ es un espacio topológico $T_1$, las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

1. *Todo subespacio de $X$ es colectivamente normal.*
2. *Todo subespacio abierto de $X$ es colectivamente normal.*
3. *Si $\{A_i\}_{i\in I}$ es una familia de subconjuntos de $X$ tal que $A_i \cap \overline{\bigcup\limits_{j\neq i} A_j} = \varnothing$, existe una familia $\{U_i\}_{i\in I}$ de abiertos en $X$ disjuntos dos a dos tales que $A_i \subset U_i$.*

Demostración: 1) $\Rightarrow$ 2) es trivial. Supongamos 2) y consideremos una familia $\{A_i\}_{i\in I}$ en las condiciones de 3). Sea $C$ el conjunto de los puntos $x \in X$ tales que todo entorno de $x$ corta al menos a dos conjuntos $A_i$.

Se cumple que $C$ es cerrado en $X$, pues si $x \in \overline{C}$ y $U$ es un entorno de $x$, entonces existe $y \in U \cap C$, luego $U$ corta al menos a dos conjuntos $A_i$, luego también $x \in C$.

Cada $A_i \subset X \setminus C$, pues por hipótesis todo $x \in A_i$ tiene un entorno que no corta a ningún otro $A_j$. Sea $F_i$ la clausura de $A_i$ en $X \setminus C$. Los conjuntos $F_i$ son cerrados (en $X \setminus C$) disjuntos dos a dos, pues si $x \in F_i \cap F_j$, entonces un entorno de $x$ en $X$ corta a $A_i$ y a $A_j$, luego $x \in C$, contradicción.

Más aún, si $J \subset I$, la unión $\bigcup\limits_{i\in J} B_i$ es cerrada en $X \setminus C$, pues si $x \in \overline{\bigcup\limits_{i\in J} B_i}$ y $U$ es un entorno de $x$, existe un $i \in J$ tal que $U \cap B_i \neq \varnothing$, de donde $U \cap A_i \neq \varnothing$, pero por definición de $C$ tenemos que $U$ sólo puede cortar a un $A_i$, luego todos los entornos de $x$ cortan a ese mismo $A_i$, luego $x \in B_i$, luego $x \in \bigcup\limits_{i\in J} B_i$.

Por hipótesis $X \setminus C$ es colectivamente normal, luego existen abiertos $U_i$ en $X \setminus C$ (luego en $X$) disjuntos dos a dos tales que $A_i \subset B_i \subset U_i$.

3) $\Rightarrow$ 1) Sea $Y \subset X$ un subespacio arbitrario y sea $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia discreta de cerrados en $Y$ disjuntos dos a dos. Los conjuntos $A_i$ no son necesariamente cerrados en $X$, pero cumplen la hipótesis de 3), pues si $x \in A_i \cap \overline{\bigcup\limits_{j\neq i} A_j}$,

en particular $x \in A_i \subset Y$, pero entonces $x$ está en la clausura de $\bigcup_{j\neq i} A_j$ en $Y$, que es un conjunto cerrado en $Y$ (porque la familia es discreta), luego $x \in \bigcup_{j\neq i} A_j$, en contradicción con que los conjuntos $A_i$ son disjuntos dos a dos.

Por lo tanto, existe una familia $\{U_i\}_{i\in I}$ de abiertos en $X$ disjuntos dos a dos tales que $A_i \subset U_i$, y entonces $\{U_i \cap Y\}_{i\in I}$ cumplen la definición de espacio colectivamente normal en $Y$. ■

**Definición 5.20** Los espacios $T_1$ que cumplen las propiedades del teorema anterior se llaman *hereditariamente colectivamente normales.*

Las familias que cumplen la propiedad 3) del teorema anterior se dice que son *familias de conjuntos separados,* de modo que un espacio es hereditariamente colectivamente normal si toda familia de conjuntos separados puede ser separada por abiertos.

Obviamente, todo espacio hereditariamente colectivamente normal es hereditariamente normal y heredidariamente colectivamente de Hausdorff.

Finalmente, introducimos una variante más de la normalidad que nos ayudará a identificar muchos espacios hereditariamente colectivamente normales:

Si $A$ y $B$ son cerrados disjuntos en un espacio normal $X$, el teorema 5.11 aplicado a $C = A$ y $U = X \setminus B$ nos da que existe un abierto, que podemos llamar $G(A, B)$, tal que $A \subset G(A, B)$ y $B \subset X \setminus \overline{G(A, B)}$. Vamos a introducir un último concepto relacionado con la normalidad consistente en imponer una condición de monotonía a la función $G$:

**Definición 5.21** Un espacio topológico $X$ es *monótonamente normal* si es $T_1$ y existe una función $G$ que a cada par $(A, B)$ de cerrados disjuntos en $X$ le asigna un abierto $G(A, B)$ de modo que

1. $A \subset G(A, B)$, $B \subset X \setminus \overline{G(A, B)}$.
2. Si $(A, B)$ y $(A', B')$ son dos pares de cerrados disjuntos y $A \subset A'$, $B' \subset B$, entonces $G(A, B) \subset G(A', B')$.

Se dice que $G$ es un *operador monótono de normalidad* en $X$.

Notemos que si un espacio es monótonamente normal, admite un operador monótono de normalidad que cumpla además que $G(A, B) \cap G(B, A) = \varnothing$.

En efecto, si $G_0$ es cualquier operador monótono de normalidad, basta definir

$$G(A, B) = G_0(A, B) \setminus \overline{G_0(B, A)}.$$

Existen varias definiciones equivalentes del concepto de espacio monótonamente normal. La que hemos dado es la original y la que entronca de forma más natural con la definición de normalidad, pero en la práctica vamos a usar únicamente la caracterización dada por el teorema siguiente, que el lector puede tomar como definición si así lo prefiere.

**Teorema 5.22** *Un espacio topológico $X$ que cumpla la propiedad $T_1$ es monótonamente normal si y sólo si existe una función $H$ que a cada par $(p, U)$, donde $U$ es un abierto en $X$ y $p \in U$, le asigna un abierto $H(p, U)$ que cumple las propiedades siguientes:*

1. $p \in H(p, U) \subset U$.

2. *Si* $H(p, U) \cap H(q, V) \neq \varnothing$, *entonces* $p \in V$ *o bien* $q \in U$.

Demostración: Supongamos que $X$ es monótonamente normal y sea $G$ un operador monótono de normalidad en $X$ que cumpla además la condición $G(A, B) \cap G(B, A) = \varnothing$, según la observación precedente al teorema.

Definimos $H(p, U) = G(\{p\}, X \setminus U)$. Así $p \in H(p, U)$ y $X \setminus U \subset X \setminus \overline{H(p, U)}$, luego $H(p, U) \subset \overline{H(p, U)} \subset U$. Además, si $p \notin V$ y $q \notin U$, entonces

$$H(p, U) \cap H(q, V) = G(\{p\}, X \setminus U) \cap G(\{q\}, X \setminus V)$$

$$\subset G(\{p\}, \{q\}) \cap G(\{q\}, \{p\}) = \varnothing.$$

Recíprocamente, si existe una función $H$ en las condiciones del enunciado, definimos

$$G(A, B) = \bigcup\{H(a, U) \mid a \in A,\ U \cap B = \varnothing\}.$$

Si $a \in A$, entonces $a \in H(a, X \setminus B) \subset G(A, B)$, luego $A \subset G(A, B)$. Si $b \in B$, entonces $b \in V = H(b, X \setminus A)$ y $V \cap G(A, B) = \varnothing$, pues en caso contrario existiría un $a \in A$ y un abierto $U$ tal que $U \cap B = \varnothing$ y $H(b, X \setminus A) \cap H(a, U) \neq \varnothing$, en contradicción con la propiedad 2) del enunciado. Por lo tanto $b \notin \overline{G(A, B)}$, y así $B \subset X \setminus \overline{G(A, B)}$.

Finalmente, si $A \subset A'$ y $B' \subset B$ y $x \in G(A, B)$, existen un $a \in A \subset A'$ y un abierto $U$ disjunto con $B$ (luego con $B'$) tales que $x \in H(a, U) \subset G(A', B')$, luego $G(A, B) \subset G(A', B')$. ■

De aquí se deducen varias consecuencias de interés, pero empezamos por un hecho técnico:

**Teorema 5.23** *Si $X$ es un espacio topológico $T_1$ con una base $\mathcal{B}$ y existe una función $H_{\mathcal{B}}$ que cumple las condiciones del teorema anterior salvo por que está definida únicamente para pares $(p, U)$ con $p \in U \in \mathcal{B}$, entonces $X$ es monótonamente normal.*

Demostración: Si $U \subset X$ es un abierto arbitrario y $p \in U$, podemos definir

$$H(p, U) = \bigcup\{H_{\mathcal{B}}(p, B) \mid B \subset U\},$$

y es claro que $H$ cumple las condiciones de teorema anterior. ■

La monotonía normal fue definida (aunque sin nombre) por C.R. Borges en 1966, y durante un tiempo fue un problema abierto si es hereditaria, pero con la caracterización que hemos dado es fácil ver que sí que lo es:

**Teorema 5.24** *Todo subespacio de un espacio monótonamente normal es monótonamente normal.*

Demostración: Supongamos que $X$ es monótonamente normal, sea $H$ según el teorema 5.22 y consideremos un subespacio $Y \subset X$. Para cada $U \subset Y$ abierto en $Y$, definimos

$$U^* = \bigcup \{V \mid V \text{ abierto en } X,\ V \cap Y = U\},$$

de modo que $U^* \cap Y = U$, y si $p \in U$, definimos $H_Y(p, U) = H(p, U^*) \cap Y$ y claramente $H_Y$ cumple el teorema 5.22 para $Y$. ■

Así pues, todo espacio monótonamente normal es hereditariamente normal, pero en realidad se cumple mucho más:

**Teorema 5.25** *Todo espacio monótonamente normal es hereditariamente colectivamente normal.*

Demostración: Sea $X$ un espacio monótonamente normal. Por el teorema anterior, basta probar que es colectivamente normal, así que tomamos una familia discreta $\{F_i\}_{i\in I}$ de cerrados disjuntos dos a dos, y definimos

$$U_i = \bigcup_{p\in F_i} H(p, X \setminus \bigcup_{k\neq i} F_k).$$

Es claro entonces que $U_i$ es abierto, que $F_i \subset U_i$ y, si $U_i \cap U_j \neq \varnothing$, existen $p \in F_i$, $q \in F_j$ tales que $H(p, X \setminus \bigcup_{k\neq i} F_k) \cap H(q, X \setminus \bigcup_{k\neq j} F_k) \neq \varnothing$, pero entonces $p \in X \setminus \bigcup_{k\neq j} F_k$ o bien $q \in X \setminus \bigcup_{k\neq i} F_k$, luego $p \notin F_i$ o $q \notin F_j$, contradicción. ■

La simplicidad de la prueba del teorema siguiente muestra la utilidad del concepto de monotonía normal:

**Teorema 5.26** *Todo espacio métrico es monótonamente normal.*

Demostración: Sea $M$ un espacio métrico. Si $U$ es abierto en $M$ y $p \in U$, definimos $H(p, U) = B_{d(p,X\setminus U)/2}(p)$. Entonces $H$ cumple las condiciones del teorema 5.22. Obviamente $p \in H(p, U) \subset U$ y si existe $x \in H(p, U) \cap H(q, V)$, podemos suponer que $d(p, X \setminus U) \leq d(q, X \setminus V)$, de modo que

$$d(p, q) \leq d(p, x) + d(x, q) < \frac{1}{2} d(p, X \setminus U) + \frac{1}{2} d(q, X \setminus V) \leq d(q, X \setminus V),$$

luego $p \in V$. ■

Por consiguiente, todo espacio métrico es hereditariamente colectivamente normal, y en particular hereditariamente colectivamente de Hausdorff y, más en particular, normal.

La prueba de que todo espacio ordenado es monótonamente normal es un poco más delicada (teorema 12.20), pero aún así la monotonía normal resulta ser un enfoque conveniente. 458

Más aún, ahora podemos concluir que la recta de Sorgenfrey $S$ es monótonamente normal, pues hemos probado que es un subespacio de un espacio ordenado (aunque puede probarse que su topología no está inducida por ningún orden total).

Admitiendo el lema de Jones que demostraremos un poco más abajo (teorema 5.30), en el ejemplo A.26 se muestra que el plano de Sorgenfrey $S \times S$ no es normal. Esto nos da un ejemplo de espacio hereditariamente colectivamente normal cuyo producto por sí mismo (el plano de Sorgenfrey $S\times S$, ejemplo A.26) no es siquiera colectivamente de Hausdorff.

Por otra parte, en el ejemplo[6] A.42 se muestra que $\mathbb{N}^{\omega_1}$ tampoco es normal. Esto es interesante porque $\mathbb{N}^{\omega_1}$ es cerrado en $\mathbb{R}^{\omega_1}$, por lo que $\mathbb{R}^{\omega_1}$ tampoco es normal, y es un ejemplo de espacio vectorial topológico localmente convexo que que no es normal.

Aunque la normalidad no se conserva por subespacios ni, por productos, en cambio se conserva por imágenes cerradas, algo que no sucede con los axiomas de separación más débiles:

**Teorema 5.27** *Si $f : X \longrightarrow Y$ es una aplicación continua, cerrada y suprayectiva y $X$ es normal, también lo es $Y$.*

Demostración: Como los puntos son cerrados en $X$ y $f$ es suprayectiva, concluimos que los puntos también son cerrados en $Y$, luego $Y$ cumple el axioma $T_1$.

Supongamos ahora que $A_1$ y $A_2$ son cerrados disjuntos en $Y$ y llamemos $V_i = Y \setminus A_i$, que son abiertos tales que $Y = V_1 \cup V_2$. Entonces tenemos que $X = f^{-1}[V_1] \cup f^{-1}[V_2]$, luego $X \setminus f^{-1}[V_i]$ son cerrados disjuntos en $X$. Por tanto, existen abiertos disjuntos $X \setminus f^{-1}[V_i] \subset U_i$, luego $X \setminus U_i \subset f^{-1}[V_i]$, son cerrados tales que $(X \setminus U_1) \cup (X \setminus U_2) = X$, luego $f[X \setminus U_i] \subset V_i$ son cerrados tales que $f[X \setminus U_1] \cup f[X \setminus U_2] = Y$, luego $A_i \subset Y \setminus f[X \setminus U_i] = U_i'$, que son abiertos disjuntos en $Y$. ■

**Observación** Sin la hipótesis de normalidad una identificación cerrada no tiene por qué conservar siquiera la propiedad de Hausdorff.

En efecto, si $X$ un espacio de Hausdorff que no sea normal y $C_1$, $C_2$ sin dos cerrados en $X$ que no estén contenidos en abiertos disjuntos, llamamos $R$ a la relación que identifica los puntos de cada $C_i$, es decir,

$$R = \{(x, x) \mid x \in X\} \cup (C_1 \times C_1) \cup (C_2 \times C_2).$$

Claramente $R$ es cerrada en $X \times X$ y la proyección $p : X \longrightarrow X/R$ es cerrada, pues si $C$ es un cerrado en $X$, entonces $p^{-1}[p[C]]$ puede ser $C$, $C \cup C_1$, $C \cup C_2$ o $C \cup C_1 \cup C_2$ según si $C$ corta o no a cada $C_i$. Sin embargo, $X/R$ no es un espacio de Hausdorff, pues los puntos $p[C_i]$ no tienen entornos disjuntos. ■

[6]Este ejemplo requiere un caso particular del teorema de Hewitt-Marczewski-Pondiczery, que demostraremos más adelante (teorema 8.7), a saber, que el espacio $\mathbb{N}^{\omega_1}$ tiene un subconjunto denso numerable.

**Teorema 5.28** *Si $f : X \longrightarrow Y$ es una aplicación continua, cerrada y suprayectiva y $X$ es monótonamente normal, también lo es $Y$.*

DEMOSTRACIÓN: Si $G_X$ es un operador monótono de normalidad en $X$, entonces
$$G_Y(A, B) = Y \setminus f[X \setminus G_X(f^{-1}[A], f^{-1}[B])]$$
es un operador monótono de normalidad en $Y$. ■

En la sección siguiente haremos referencia al concepto de desconexión extrema estudiado en la sección 3.6, cuya lectura habíamos pospuesto hasta este punto. 86

## 5.3 Separación completa

En 1924 Urysohn probó un resultado general sobre existencia de funciones continuas que Tietze había demostrado en 1914 para el caso (mucho más sencillo) de los espacios métricos:

**Teorema 5.29 (Lema de Urysohn)** *Un espacio $X$ es normal si y sólo si es $T_1$ y para todo par de cerrados disjuntos $A_0$ y $A_1$ en $X$ existe una función continua $f : X \longrightarrow [0, 1]$ tal que $f|_{A_0} = 0$ y $f|_{A_1} = 1$.*

DEMOSTRACIÓN: Una implicación es inmediata. Dados los cerrados $A_0$, $A_1$, para cada número racional $r \in [0, 1]$ vamos a definir un abierto $V_r$ con la propiedad de que si $r < r'$ entonces $\overline{V}_r \subset V_{r'}$.

Para ello fijamos una enumeración $\{r_n\}_{n=0}^{\infty}$ de los números racionales en $[0, 1]$, en la que exigimos que $r_0 = 0$ y $r_1 = 1$ y definiremos $V_{r_n}$ recurrentemente.

Sean $U$ y $U'$ abiertos disjuntos en $X$ tales que $A_0 \subset U$, $A_1 \subset U'$. De este modo $A_0 \subset U \subset \overline{U} \subset X \setminus U' \subset X \setminus A_1$. Definimos $V_0 = U$ y $V_1 = X \setminus A_1$. Así se cumple que $\overline{V}_0 \subset V_1$, como se requiere.

Supongamos definidos $V_{r_0}, \ldots, V_{r_n}$ de modo que cumplan lo requerido. Llamemos $r_i$ y $r_d$ a los números entre $r_0, \ldots, r_n$ que cumplen $r_i < r_{n+1} < r_d$ de modo que no haya otros $r_j$ intermedios, para $j = 0, \ldots, n$. Por construcción tenemos que $\overline{V}_{r_i} \subset V_{r_d}$. El teorema 5.11 nos da un abierto $V_{r_{n+1}}$ tal que $\overline{V}_{r_i} \subset V_{r_{n+1}} \subset \overline{V}_{r_{n+1}} \subset V_{r_d}$.

Con esto tenemos construida la sucesión de abiertos, y ahora definimos la función $f : X \longrightarrow I$ mediante
$$f(x) = \begin{cases} \inf\{r \in I \cap \mathbb{Q} \mid x \in V_r\} & \text{si } x \in V_1, \\ 1 & \text{si } x \in X \setminus V_1. \end{cases}$$

Como $A_0 \subset V_0$, tenemos que $f|_{A_0} = 0$ y como $V_1 = X \setminus A_1$ también $f|_{A_1} = 1$. Sólo falta probar que $f$ es continua.

Basta probar que la antiimagen por $f$ de todo abierto básico $]a, b[$, $[0, b[$ o $]a, 1]$ es abierta, pero como $]a, b[ = ]a, 1] \cap [0, b[$, basta considerar los intervalos semiabiertos. Ahora bien, $f(x) < b$ equivale a que exista un número racional $r < b$ tal que $x \in V_r$, luego

$$f^{-1}\big[[0, b[\big] = \bigcup_{r<b} V_r$$

es abierto. Igualmente, $f(x) > a$ equivale a que exista un $r' > a$ tal que $x \in X \setminus V_{r'}$, lo que a su vez equivale a que exista un $r > a$ tal que $x \in X \setminus \overline{V}_r$. Por lo tanto,

$$f^{-1}\big[]a, 1]\big] = \bigcup_{r>a} (X \setminus \overline{V}_r)$$

también es abierto. ■

Una formulación alternativa del lema de Urysohn es la siguiente: Si $X$ es un espacio normal y $C \subset U \subset X$, donde $C$ es cerrado y $U$ es abierto, entonces existe una función continua en $X$ que toma el valor 1 sobre $C$ y se anula fuera de $U$. En otras palabras, podemos hacer que la función constante igual a 1 sobre el cerrado $C$ descienda continuamente hasta 0 realizando la transición en un conjunto que no sobresalga del abierto $U$.

Como primera aplicación podemos demostrar un resultado muy útil a la hora de justificar que muchos espacios no son normales:

**Teorema 5.30 (Lema de Jones)** *Sea $X$ un espacio normal, sea $C \subset X$ un subconjunto cerrado discreto y sea $D \subset X$ un subconjunto denso. Entonces se cumple que $|C| < 2^{|C|} \leq 2^{|D|}$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $C(X)$ el conjunto de todas las aplicaciones continuas de $X$ en $\mathbb{R}$. Para cada $A \subset C$, el lema de Urysohn nos da una función continua $f_A : X \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f_A|_A = 1$, $f_A|_{C\setminus A} = 0$. La aplicación $A \mapsto f|_A$ es claramente inyectiva, luego $2^{|C|} = |\mathcal{P}C| \leq |C(X)|$.

Por otra parte, la aplicación $C(X) \longrightarrow \mathbb{R}^D$ dada por $f \mapsto f|_D$ es inyectiva, luego $|C(X)| \leq |\mathbb{R}^D| = 2^{|D|}$. ■

Para entender la importancia del lema de Urysohn conviene introducir algunos conceptos:

**Definición 5.31** Diremos que dos conjuntos $A$ y $B$ en un espacio topológico $X$ están *completamente separados* si existe una función continua $f : X \longrightarrow [0, 1]$ tal que $f[A] = \{0\}$ y $f[B] = \{1\}$. Se dice entonces que $f$ es una *función de Urysohn* para $A$ y $B$.

Se dice que $A$ y $B$ están *perfectamente separados* si existe una función continua $f : X \longrightarrow [0, 1]$ tal que $f^{-1}[\{0\}] = A$, $f^{-1}[\{1\}] = B$.

Obviamente, dos conjuntos perfectamente separados están completamente separados, y dos conjuntos completamente separados están separados por los abiertos $f^{-1}\big[[0, 1/2[\big]$ y $f^{-1}\big[]1/2, 1]\big]$.

**Ejercicio:** Probar que dos subconjuntos $A$ y $B$ de un espacio topológico $X$ están completamente separados si y sólo si existe una función continua $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ de manera que $\sup_{x\in A} f(x) < \inf_{x\in B} f(x)$.

En estos términos el lema de Urysohn afirma que un espacio $T_1$ es normal si y sólo si todo par de cerrados disjuntos están completamente separados, de modo que es indiferente definir la normalidad en términos de separación o de separación completa.

Si $X$ es un espacio topológico y $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función continua, llamaremos *cero* de $f$ al conjunto $Z(f) = \{x \in X \mid f(x) = 0\} = f^{-1}[\{0\}]$. Un subconjunto $A$ de $X$ es un *cero* en $X$ si es el cero de alguna función continua $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$. Los complementarios de los ceros se llaman *coceros.*

Se llaman conjuntos $G_\delta$ a los que pueden expresarse como intersección numerable de abiertos, y conjuntos $F_\sigma$ a los que se expresan como unión numerable de cerrados.

A continuación reunimos las principales propiedades de los ceros y coceros de un espacio topológico:

**Teorema 5.32** *Sea $X$ un espacio topológico.*

1. *Todo cero en $X$ es un cerrado $G_\delta$ y todo cocero es un abierto $F_\sigma$.*
2. *Si $Z$ es un cero de $X$ existe una función $f : X \longrightarrow [0,1]$ continua tal que $Z = Z(f)$.*
3. *La unión finita de ceros es un cero y la intersección finita de coceros es cocero.*
4. *La intersección numerable de ceros es cero y la unión numerable de coceros es cocero.*
5. *Dos ceros disjuntos están perfectamente separados.*
6. *Si $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua y $r \in \mathbb{R}$, los conjuntos $\{x \in X \mid f(x) \leq r\}$, $\{x \in X \mid f(x) \geq r\}$, $\{x \in X \mid r \leq f(x) \leq s\}$ son ceros de $X$, y si cambiamos las desigualdades por desigualdades estrictas son coceros.*

Demostración: 1) Como $\{0\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} ]-1/n, 1/n[$ es un $G_\delta$ en $\mathbb{R}$ y claramente la antiimagen de un $G_\delta$ por una aplicación continua es de nuevo un $G_\delta$, tenemos que todos los ceros son conjuntos $G_\delta$. Igualmente, como $\{0\}$ es cerrado, los ceros son cerrados. Claramente el complementario de un cerrado $G_\delta$ es un abierto $F_\sigma$.

2) Si $Z = Z(g)$, basta tomar $f = |(-1 \vee g) \wedge 1|$.

3) Si $Z = Z(f)$ y $Z' = Z(f')$, entonces $Z \cup Z' = Z(ff')$. Claramente de aquí se sigue la correspondiente propiedad de los coceros.

4) Sea $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty}$ una familia de ceros de $X$, digamos que $Z_n = Z(f_n)$, donde cada $f_n$ toma valores en $[0,1]$. Sea

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} f_n.$$

Por el teorema de Weierstrass $f$ es continua y claramente $Z(f) = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} Z(f_n)$.

5) Sean $Z$ y $Z'$ ceros disjuntos. Sea $Z = Z(f)$ y $Z' = Z(f')$ donde $f$ y $f'$ toman valores en $[0,1]$. En estas condiciones $f + f'$ no se anula, luego $h = f/(f + f')$ es continua en $X$ y es una función de Urysohn que separa perfectamente a $Z$ y $Z'$.

6) Claramente

$$\{x \in X \mid f(x) \leq r\} = Z\big((f - r) \vee 0\big), \quad \{x \in X \mid f(x) \geq r\} = Z\big((f - r) \wedge 0\big),$$

los demás casos se obtienen de éstos tomando intersecciones y complementos. ■

Existe una relación obvia entre los ceros y la separación completa:

**Teorema 5.33** *Dos subconjuntos de un espacio topológico están completamente separados si y sólo si están contenidos en ceros disjuntos.*

DEMOSTRACIÓN: Si $A$ y $B$ son subconjuntos de un espacio $X$ están contenidos en ceros disjuntos, como éstos están completamente separados, es claro que $A$ y $B$ también lo están.

Si $A$ y $B$ están completamente separados, sea $f$ una función de Urysohn para $A$ y $B$. Entonces $Z = f^{-1}[\{0\}]$ y $Z' = f^{-1}[\{1\}] = (f^{-1})^{-1}[\{0\}]$ son ceros disjuntos que contienen a $A$ y $B$ respectivamente. ■

Por otra parte, los ceros admiten una caracterización sencilla en los espacios normales:

**Teorema 5.34** *Un subconjunto de un espacio normal es un cero si y sólo si es un cerrado $G_\delta$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $X$ un espacio normal. Todo cero es un cerrado $G_\delta$ por el teorema 5.32. Supongamos ahora que $C$ es un cerrado $G_\delta$. Entonces $A = X \setminus C = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n$ donde los $F_n$ son cerrados disjuntos de $C$. Por el teorema de Urysohn existe una función de Urysohn $f_n$ para $C$ y $F_n$ (que se anula en $C$), con lo que podemos definir

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} f_n.$$

Por el teorema de Weierstrass $f$ es continua y claramente cumple $f[C] = \{0\}$, pero además, si $x \in A$, existe un $n$ para el cual $x \in F_n$, luego $f_n(x) = 1$ y $f(x) \neq 0$, luego $C = Z(f)$. ■

Veamos ahora que la separación completa está relacionada con la posibilidad de extender funciones reales continuas desde un subespacio. Conviene distinguir la extensión de funciones acotadas del caso general.

**Definición 5.35** Si $X$ es un espacio topológico, representaremos por $C(X)$ al conjunto de todas las funciones continuas $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ y por $C^*(X)$ al subconjunto formado por las funciones continuas acotadas.

Notemos que $C(X)$ es lo que hasta ahora llamábamos $C(X, \mathbb{R})$, y sabemos que tiene estructura de anillo conmutativo y unitario y de espacio vectorial[7] sobre $\mathbb{R}$ con las operaciones definidas puntualmente. Es claro que $C^*(X)$ es a su vez una subálgebra de $C(X)$. En este espacio también tenemos definidos el módulo, el supremo y el ínfimo de dos funciones.

Diremos que un subespacio $Y$ de $X$ está *$C^*$-sumergido* en $X$ si para toda función $f \in C^*(Y)$ existe una función $g \in C^*(X)$ de manera que $g|_Y = f$. Diremos que $Y$ está *$C$-sumergido* en $X$ si cumple esto mismo con $C(Y)$ y $C(X)$, respectivamente.

El teorema siguiente es el resultado fundamental en cuanto a existencia de funciones continuas. En él caracterizamos la $C^*$-sumergibilidad en términos de separación por ceros:

**Teorema 5.36** *Sea $X$ un espacio de Hausdorff. Un subespacio $Y$ de $X$ está $C^*$-sumergido en $X$ si y sólo si todo par de ceros disjuntos en $Y$ están completamente separados en $X$, o sea, están contenidos en ceros disjuntos de $X$.*

DEMOSTRACIÓN: Si se da la inmersión y $Z$, $Z'$ son ceros disjuntos de $Y$, sea $f$ una función de Urysohn que separe a $Z$ y $Z'$ en $Y$. Entonces una extensión de $f$ a $X$ separa a $Z$ y $Z'$ en $X$.

Si se da esta condición vamos a probar en primer lugar que para toda aplicación continua $f : Y \longrightarrow [-c, c]$ existe otra aplicación $g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ continua tal que

1. Para todo $x \in X$ se cumple $|g(x)| \leq c/3$.
2. Para todo $y \in Y$ se cumple $|f(y) - g(y)| \leq (2/3)c$.

Para ello consideremos $A = f^{-1}\big[[c/3, c]\big]$, $B = f^{-1}\big[[-c, -c/3]\big]$. Por el teorema 5.32 tenemos que $A$ y $B$ son ceros disjuntos en $Y$, luego están completamente separados en $Y$. Podemos tomar una función de Urysohn que los separe y modificándola adecuadamente obtenemos la existencia de una función continua $g : X \longrightarrow [-c/3, c/3]$ tal que $g[A] = \{c/3\}$ y $g[B] = \{-c/3\}$. Claramente $g$ cumple lo pedido.

[7]Más precisamente, tiene estructura de álgebra, que no es sino una doble estructura de anillo y de espacio vectorial en la que además se cumple que $\alpha(fg) = (\alpha f)g = f(\alpha g)$, para todo escalar $\alpha$.

Vamos a buscar una extensión para cada función $f \in C^*(Y)$. No perdemos generalidad al suponer que $f : Y \longrightarrow [-1, 1]$. Definiremos la extensión de $f$ como la suma de una serie

$$F = \sum_{n=1}^{\infty} g_n, \tag{5.1}$$

para ciertas funciones $g_n \in C^*(X)$ que construiremos recurrentemente y que verificarán las propiedades siguientes:

1. Para todo $x \in X$, $|g_n(x)| \leq \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$,

2. Para todo $y \in Y$, $|f(y) - \sum\limits_{n=1}^{k} g_n(y)| \leq \left(\dfrac{2}{3}\right)^k$.

Al aplicar la construcción anterior a la función $f$ con $c = 1$ obtenemos una función $g_1$ que cumple lo pedido. Para obtener $g_{k+1}$ a partir de $g_1, \ldots, g_k$ basta aplicar la misma construcción con $c = (2/3)^k$ a la función

$$f - \sum_{n=1}^{k} g_n|_Y.$$

La propiedad 1) garantiza que la serie (5.1) define realmente una función continua $F$ en $X$ (por el teorema de mayoración de Weierstrass) y tomando límites en 2) concluimos que $F|_Y = f$. ■

Analizando la demostración del teorema anterior observamos que, en realidad, si partimos de una función con imagen en un intervalo $[a, b]$, la extensión que le encontramos tiene también imagen en $[a, b]$, luego hemos probado:

**Teorema 5.37** *Sea $X$ un espacio de Hausdorff. Un subespacio $Y$ de $X$ está $C^*$-sumergido en $X$ si y sólo si toda aplicación continua $f : Y \longrightarrow [a, b]$ (donde $a$, $b \in \mathbb{R}$) tiene una extensión continua $g : X \longrightarrow [a, b]$.*

Como consecuencia de estos resultados tenemos una caracterización de los espacios normales en términos de extensión de funciones continuas.

**Teorema 5.38 (Teorema de Tietze)** *Un espacio de Hausdorff es normal si y sólo si todo cerrado está $C^*$-sumergido.*

Demostración: Si en un espacio $X$ todo cerrado está $C^*$-sumergido, dados dos cerrados disjuntos $A$ y $B$, la función $f : A \cup B \longrightarrow [0, 1]$ que cumple $f[A] = \{0\}$ y $f[B] = \{1\}$ es continua, y como $A \cup B$ es un cerrado, se extiende a una función de Urysohn para $A$ y $B$ en $X$, luego $X$ es normal.

Si $X$ es normal e $Y$ es un cerrado en $X$, dos ceros disjuntos en $Y$ son cerrados disjuntos en $X$, luego están completamente separados en $X$, luego por el teorema 5.36, $Y$ está $C^*$-sumergido. ■

A continuación caracterizamos la $C$-sumergibilidad en términos similares a como hemos hecho con la $C^*$-sumergibilidad:

**Teorema 5.39** *Sea $X$ un espacio de Hausdorff e $Y$ un subespacio $C^*$-sumergido en $X$. Entonces $Y$ está $C$-sumergido si y sólo si todo cero en $X$ disjunto de $Y$ está completamente separado de $Y$.*

DEMOSTRACIÓN: Si se cumple esta condición y $f \in C(Y)$ entonces, considerando un homeomorfismo $h : \,]-1, 1[\, \longrightarrow \mathbb{R}$, tenemos que $f \circ h^{-1} : X \longrightarrow [-1, 1]$ continua, y como $Y$ está $C^*$-sumergido existe una función $g : X \longrightarrow [-1, 1]$ continua tal que $g|_Y = f \circ h^{-1}$.

Sea $Z = \{x \in X \mid |g(x)| = 1\}$, que es un cero de $X$ disjunto con $Y$. Por hipótesis $Z$ e $Y$ están completamente separados, luego existe $Z' \in Z(X)$ tal que $Y \subset Z'$ y $Z \cap Z' = \varnothing$. Tomemos una función de Urysohn $r$ para $Z$ y $Z'$ ($r[Z] = \{0\}$ y $r[Z'] = \{1\}$). Sea $\bar{g} : X \longrightarrow \,]-1, 1[$ la función continua dada por $\bar{g}(x) = g(x)r(x)$.

Finalmente sea $F = \bar{g} \circ h : X \longrightarrow \mathbb{R}$. Se cumple que $F$ extiende a $f$, pues si $y \in Y$, entonces

$$F(y) = h(\bar{g}(y)) = h(g(y)r(y)) = h(g(y)) = h\big(h^{-1}(f(y))\big) = f(y).$$

Así pues $Y$ está $C$-sumergido.

Si $Y$ está $C$-sumergido consideremos un cero $Z = Z(f)$ disjunto de $Y$. Entonces $h = (1/f)|_Y$ es una función continua y se extiende a $g : Y \longrightarrow \mathbb{R}$. Tomemos $r : Y \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $r(y) = f(y)g(y)$, aplicación continua que claramente cumple $r[Y] = \{1\}$, $r[Z] = \{0\}$, es decir, separa a $Y$ y $Z$. ■

Como consecuencia obtenemos.

**Teorema 5.40 (de Tietze)** *Todo cerrado en un espacio normal está $C$-sumergido.*

DEMOSTRACIÓN: Si $X$ es un espacio normal, $C$ es un cerrado y $Z$ un cero disjunto con $C$, entonces $C$ y $Z$ son cerrados disjuntos en $X$, luego están completamente separados en $X$. ■

El teorema 5.36 nos permite caracterizar también la desconexión extrema en términos de extensiones de funciones continuas:

**Teorema 5.41** *Si $X$ es un espacio de Hausdorff, las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

1. *$X$ es extremadamente disconexo.*
2. *Todo subespacio denso en $X$ está $C^*$-sumergido.*
3. *Todo abierto en $X$ está $C^*$-sumergido.*

DEMOSTRACIÓN: 1) $\Rightarrow$ 2) Si $D \subset X$ es denso, vamos a aplicar el teorema 5.36, para lo cual tomamos ceros disjuntos $Z_0$ y $Z_1$ en $D$. Tenemos que están separados en $D$, es decir, que existen abiertos $U_i$ en $X$ tales que $Z_i \subset U_i \cap D$ y $U_0 \cap U_1 \cap D = \varnothing$, lo cual equivale a que $U_0 \cap U_1 = \varnothing$ (porque $D$ es denso), y, como $X$ es extremadamente disconexo, $\overline{U}_0 \cap \overline{U}_1 = \varnothing$, luego los abiertos $\overline{U}_i$ separan a $Z_i$ en $X$.

2) $\Rightarrow$ 1) Si $U$ es abierto en $X$, el abierto $U \cup (X \setminus \overline{U}) = X \setminus \partial U$ es denso en $X$, luego la función que vale 1 en $U$ y 0 en $X \setminus \overline{U}$ se extiende a una función continua $f : X \longrightarrow [0,1]$, pero entonces $f[\overline{U}] = \{1\}$ y $f[X \setminus \mathring{\overline{U}}] = \{0\}$, lo que implica que $\overline{U} = \mathring{\overline{U}}$.

1) $\Rightarrow$ 3) Si $U \subset X$ es abierto y $Z_0$, $Z_1$ son ceros disjuntos en $U$, existen abiertos disjuntos $Z_i \subset U_i \subset U$, pero entonces $\overline{U}_i$ son abiertos cerrados (luego ceros) disjuntos en $X$ que separan a $Z_0$ y $Z_1$, luego 5.36 nos da que $U$ está $C^*$-sumergido en $X$.

3) $\Rightarrow$ 1) Si $U_0$ y $U_1$ son abiertos disjuntos, la función que vale $i$ en $U_i$ se extiende a una función continua $f : X \longrightarrow [0,1]$, de modo que $\overline{U}_i \subset f^{-1}[\{i\}]$, luego las clausuras son disjuntas. ■

En 1925, un año después de la publicación del lema que hoy lleva su nombre, Urysohn se planteó algunas cuestiones relacionadas con el mismo. Para plantearlas conviene dar algunas definiciones:

**Definición 5.42** Un espacio topológico $X$ que cumpla la propiedad $T_1$ es:

- *completamente de Hausdorff*[8] si cuando $p$, $q \in X$ son puntos distintos, están completamente separados.
- *completamente regular* si cuando $C \subset X$ es un cerrado y $p \in X \setminus C$, entonces $p$ y $C$ están completamente separados.
- *completamente normal* si cuando $C_1$, $C_2 \subset X$ son cerrados disjuntos en $X$, están completamente separados.

En estos términos, el lema de Urysohn prueba que los espacios completamente normales coinciden con los espacios normales, y Urysohn se planteó si la regularidad coincide también con la regularidad completa, o si al menos los espacios regulares son completamente de Hausdorff. Dado que no obtuvo ningún resultado en esta línea, dejó planteado incluso el caso más radical: ¿es posible demostrar que en un espacio regular con más de un punto existe al menos una función continua no constante con valores en $\mathbb{R}$?

En un intento de responder a esta última pregunta, en 1930 Tychonoff encontró el primer ejemplo de espacio regular que no es completamente regular. Un ejemplo más moderno es el ejemplo A.12 que, de hecho, no es completamente de Hausdorff, es decir, que se trata de un espacio $X$ en el que hay dos puntos distintos $\pm\infty$ tales que toda función continua $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ cumple $f(-\infty) = f(+\infty)$. Sólo en 1946 Hewitt encontró el primer ejemplo de espacio regular (no trivial) en el que las únicas funciones reales continuas son las constantes. Un ejemplo más moderno es el ejemplo A.13.

[8] Usamos aquí este nombre porque sólo introducimos el concepto provisionalmente para comparar con las otras definiciones de este grupo, pero en realidad los espacios con esta propiedad se llaman *espacios de Urysohn,* mientras que se llama espacios completamente de Hausdorff a los que cumplen una propiedad más débil, a saber, que puntos distintos tengan entornos cerrados disjuntos.

La clase de los espacios completamente regulares es una de las más relevantes en topología, y la estudiaremos con más detalle en la sección 5.5.

## 5.4 Espacios perfectamente normales

Introducimos ahora el más restrictivo de los axiomas de separación que se consideran habitualmente:

**Definición 5.43** Se dice que un espacio topológico $X$ es *perfectamente normal,* o que cumple el *axioma* $T_6$, si es normal y todos sus cerrados son conjuntos $G_\delta$ (o, equivalentemente, si todos sus abiertos son conjuntos $F_\sigma$).

Los resultados de la sección anterior explican por qué el requisito adicional que estamos imponiendo no es caprichoso:

**Teorema 5.44** *Si $X$ es un espacio topológico $T_1$, las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

1. *$X$ es perfectamente normal.*
2. *Todo cerrado en $X$ es un cero (o equivalentemente, todo abierto es un cocero).*
3. *Todo par de cerrados disjuntos en $X$ están perfectamente separados.*

Demostración: 1) $\Rightarrow$ 2) Si $X$ es perfectamente normal, todo cerrado es un $G_\delta$ y, como además $X$ es normal, por el teorema 5.34, todo cerrado es un cero.

2) $\Rightarrow$ 3) Si $A$ y $B$ son cerrados disjuntos en $X$, por 2) son ceros, luego por el teorema 5.32 están perfectamente separados.

3) $\Rightarrow$ 1) es inmediato. ■

Al contrario que la normalidad, la normalidad perfecta es hereditaria:

**Teorema 5.45** *Todo subespacio de un espacio perfectamente normal es perfectamente normal.*

Demostración: Supongamos que $X$ es perfectamente normal y consideremos un subespacio $Y \subset X$. Si $C \subset Y$ es cerrado en $Y$, existe $F \subset X$ cerrado tal que $C = F \cap Y$. Entonces existe $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ continua tal que $F = Z(f)$, pero entonces $f|_Y : Y \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua y $Z(f|_Y) = C$. ■

Como consecuencia, todo espacio $T_6$ es también $T_5$.

**Teorema 5.46** *Todo espacio métrico es perfectamente normal.*

Demostración: Si $M$ es un espacio métrico y $A$, $B$ son cerrados disjuntos en $M$, es claro que la función $f : M \longrightarrow [0, 1]$ dada por

$$f(x) = \frac{d(x, A)}{d(x, A) + d(x, B)}$$

es continua y separa perfectamente a $A$ y $B$. ■

**Teorema 5.47** *Un espacio de Lindelöf regular es hereditariamente de Lindelöf si y sólo si es perfectamente normal.*

Demostración: Supongamos que $X$ es hereditariamente de Lindelöf y sea $U \subset X$ un abierto. Por regularidad, para cada $x \in U$ existe un abierto $x \in U_x \overline{U}_x \subset U$ y, como $U$ es de Lindelöf, podemos extraer un subcubrimiento numerable $U = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} U_n$ de modo que $\overline{U}_n \subset U$, y así $U = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} \overline{U}_n$ es un $F_\sigma$. Como $X$ es normal por 5.13, concluimos que $X$ es perfectamente normal.

Recíprocamente, si $X$ es un espacio de Lindelöf perfectamente normal y $U$ es abierto en $X$, entonces es un $F_\sigma$, es decir, $U = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} F_n$, donde cada $F_n$ es cerrado en $X$. Por el teorema 4.47 sabemos que cada $F_n$ es de Lindelöf, y una unión numerable de subespacios de Lindelöf es claramente un espacio de Lindelöf. Finalmente, el teorema 4.49 implica que $X$ es hereditariamente de Lindelöf. ■

Por ejemplo, la recta de Sorgenfrey es hereditariamente de Lindelöf y normal, luego es perfectamente normal. El ejemplo A.31 muestra que $[0, \omega_1]$ no es perfectamente normal con la topología de orden, luego no todo espacio ordenado (ni en particular todo espacio monótonamente normal) es perfectamente normal.

## 5.5 Espacios completamente regulares

En las secciones precedentes hemos visto que la regularidad es una propiedad demasiado débil para garantizar un buen comportamiento de las funciones continuas con valores reales en un espacio topológico, pues puede darse incluso el caso extremo de que en un espacio regular no haya más funciones continuas con valores reales que las constantes. En los espacios normales la situación es completamente opuesta, pero se trata de una clase demasiado restrictiva, ya que no es hereditaria ni productiva (no se conserva ni por subespacios ni por productos). En esta sección veremos que la regularidad completa tiene las ventajas esenciales de la normalidad sin compartir sus inconvenientes. Ya hemos definido la regularidad completa en 5.42, pero repetimos la definición por claridad:

**Definición 5.48** Se dice que un espacio topológico $X$ es *completamente regular* o un *espacio de Tychonoff* o que tiene la propiedad $T_{3\frac{1}{2}}$ si es $T_1$ y cuando $C \subset X$ es cerrado y $p \in X \setminus C$, entonces $p$ y $C$ están completamente separados, es decir, existe una función continua $f : X \longrightarrow [0, 1]$ tal que $f|_C = 0$ y $f(p) = 1$.

El nombre de $T_{3\frac{1}{2}}$ se debe, obviamente, a que la jerarquía de los axiomas de separación se definió antes de que Tychonoff introdujera los espacios completamente regulares, y sucede que su lugar está estrictamente comprendido entre la regularidad ($T_3$) y la normalidad ($T_4$). En efecto, el lema de Urysohn implica que todo espacio normal es completamente regular, mientras que trivialmente todo espacio completamente regular es regular, pues si los puntos y los cerrados se pueden separar completamente (es decir, por funciones continuas) también se pueden separar por abiertos.

Los ejemplos A.12 y A.13 son ejemplos de espacios regulares que no son completamente regulares, mientras que el plano de Sorgenfrey (A.26) o $\mathbb{N}^{\omega_1}$ (ejemplo A.42) son espacios completamente regulares que no son normales.

Notemos que una ligera reformulación de la regularidad completa afirma que un espacio $X$ con la propiedad $T_1$ es completamente regular si cuando $U$ es un abierto en $X$ y $p \in U$, existe una función continua $f : X \longrightarrow [0,1]$ tal que $f(p) = 1$ y $f|_{X\setminus U} = 0$, es decir, que $f$ empieza valiendo 1 en $p$ y desciende hasta 0 dentro de $U$.

Otra reformulación de la regularidad completa es la siguiente:

**Teorema 5.49** *Un espacio $X$ con la propiedad $T_1$ es completamente regular si y sólo si la familia de sus coceros es una base de $X$.*

Demostración: Si $X$ es completamente regular y $p \in U$, donde $U$ es un abierto en $X$, existe una función continua $f : X \longrightarrow [0,1]$ tal que $f(p) = 1$ y $f|_{X\setminus U} = 0$, lo que equivale a que $p \in X \setminus Z(f) \subset U$, luego los coceros forman una base.

Recíprocamente, si los coceros forman una base de $X$ y $p \in U$, donde $U$ es un abierto en $X$, existe una función continua $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $p \in X \setminus Z(f) \subset U$. Esto significa que $f(p) \neq 0$ y que $f|_{X\setminus U} = 0$. Cambiando $f$ por $f/f(p)$ podemos suponer que $f(p) = 1$, y cambiando $f$ por $(f \vee 0) \wedge 1$ podemos suponer que $f : X \longrightarrow [0,1]$, con lo que se cumple la formulación de la regularidad completa previa al enunciado. ∎

Un resultado relacionado es el siguiente:

**Teorema 5.50** *Si $X$ es un espacio completamente regular y $p \in X$ el conjunto de los ceros en $X$ que son entornos de $p$ es una base de entornos de $p$.*

Demostración: Si $p \in U$, donde $U$ es un abierto, existe una función continua $f : X \longrightarrow [0,1]$ tal que $f(p) = 0$ y $f[X \setminus U] = \{1\}$. Entonces

$$p \in f^{-1}\big[[0,1/2[\big] \subset f^{-1}\big[[0,1/2]\big] \subset U$$

el primer conjunto es un cocero y el segundo es un cero, luego éste es un entorno de $p$. ∎

Como aplicación de la caracterización precedente probamos que, en la definición de la regularidad completa, los puntos pueden sustituirse por subespacios compactos:

**Teorema 5.51** *Si $X$ es un espacio completamente regular y $K$, $C$ son subespacios cerrados disjuntos y $K$ es compacto, entonces existe una función continua $f : X \longrightarrow [0,1]$ tal que $f[C] = \{0\}$ y $f[K] = \{1\}$.*

Demostración: Para cada punto $p \in K$, existe un cocero $U_p$ de manera que $p \in U_p \subset X \setminus C$. Los abiertos $U_p$ cubren $K$, luego podemos tomar un subcubrimiento finito de $K$. La unión de los coceros de dicho cubrimiento finito es un cocero $U$ tal que $K \subset U \subset X \setminus C$, luego existe una función continua $g : X \longrightarrow [0, 1]$ tal que $g[C] = \{0\}$ y $g$ no es nula en $K$. Como $K$ es compacto, la función $g$ toma un valor mínimo $m > 0$ en $K$. A su vez, la función $g_1 = f \wedge m$ es continua y cumple $g_1[C] = \{0\}$, $g_1[K] = \{m\}$. Finalmente, $f = g_1/m$ cumple lo requerido. ■

Equivalentemente, en un espacio $X$ completamente regular, si $K \subset U \subset X$, con $K$ compacto y $U$ abierto, existe una función continua $f : X \longrightarrow [0, 1]$ tal que $f[K] = \{1\}$ y $f[X \setminus U] = \{0\}$.

Del teorema anterior se sigue también que dos cerrados disjuntos en un espacio completamente regular, de los cuales al menos uno es compacto, están completamente separados. Como consecuencia:

**Teorema 5.52** *En un espacio completamente regular todo subespacio compacto está $C$-sumergido.*

Demostración: Sea $X$ un espacio completamente regular y $K \subset C$ un compacto. Podemos aplicar el teorema 5.36, pues dos ceros disjuntos en $K$ son dos compactos disjuntos en $X$, luego por la observación precedente están completamente separados. Esto prueba que $K$ está $C^*$-sumergido en $X$, pero, como todas las funciones continuas en $K$ están acotadas, esto es lo mismo que decir que $K$ está $C$-sumergido en $X$. ■

**Teorema 5.53** *Un subespacio compacto en un espacio completamente regular es un cero si y sólo si es $G_\delta$.*

Demostración: Si $X$ es completamente regular y $K \subset X$ es un compacto $G_\delta$, es decir, $K = \bigcap\limits_{n=0}^{\infty} U_n$, por el teorema 5.51 podemos tomar funciones continuas $f_n : X \longrightarrow [0, 1]$ tales que $f_n[K] = 0$, $f_n[X \setminus U] = 1$. Así $K \subset Z(f_n) \subset U_n$, luego $K = \bigcap\limits_{n=0}^{\infty} Z(f_n)$ es un cero. ■

**Teorema 5.54** *Todo subespacio de un espacio completamente regular es completamente regular.*

Demostración: Si $X$ es completamente regular e $Y$ es un subespacio de $X$, para cada función continua $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es claro que $Z(f) \cap Y = Z(f|_Y)$, luego $(X \setminus Z(f)) \cap Y = Y \setminus Z(f|_Y)$. Esto significa que si $U$ es un cocero en $X$, entonces $U \cap Y$ es un cocero en $Y$, luego si los coceros de $X$ forman una base, los de $Y$ también. ■

**Teorema 5.55** *Un producto no vacío de espacios completamente regulares es completamente regular si y sólo si lo son todos los factores.*

Demostración: Sea $X = \prod\limits_{i\in I} X_i$ un producto no vacío de espacios topológicos. Si $X$ es completamente regular, también lo es cada $X_i$ por el teorema anterior y el teorema 1.42. Si todos los $X_i$ son completamente regulares, entonces los coceros son una base de cada $X_i$, luego una base de $X$ la forman los abiertos de la forma $U = \prod\limits_{i\in I} U_i$, tales que existe $I_0 \subset I$ finito de manera que $U_i = X_i$ si $i \in I \setminus I_0$ y $U_i = X_i \setminus Z(f_i)$ si $i \in I_0$, donde $f_i : X_i \longrightarrow \mathbb{R}$ continua. Pero entonces $U = X \setminus Z(f)$, donde $f(x) = \prod\limits_{i\in I_0} f_i(x_i)$, luego los coceros son una base de $X$. ■

Tenemos que todos los espacios métricos y todos los espacios de Hausdorff compactos son completamente regulares, pues son normales. Más aún:

**Teorema 5.56** *Todo espacio de Hausdorff localmente compacto es completamente regular.*

Demostración: Si $X$ es un espacio de Hausdorff localmente compacto, es un subespacio abierto de su compactificación de Alexandroff $X^\infty$, la cual es normal, porque es un compacto de Hausdorff, luego en particular es completamente regular, luego $X$ también lo es. ■

**Teorema 5.57** *Todo espacio cerodimensional es completamente regular.*

Demostración: En un espacio cerodimensional los abiertos cerrados forman una base, pero es inmediato que todo abierto cerrado es un cocero. ■

Sin embargo, la placa de Tychonoff perforada (ejemplo A.34) es un espacio cerodimensional que no es normal.

**Teorema 5.58** *Todo espacio uniforme que cumpla la propiedad $T_0$ cumple de hecho $T_{3\frac{1}{2}}$.*

Demostración: Sea $X$ un espacio uniforme $T_0$ (con lo que sabemos que es de Hausdorff). Si $F \subset X$ es cerrado y $x \in X \setminus F$, entonces existe una banda $V$ en $X$ tal que $B_V(x) \subset X \setminus F$. Por 2.25 existe una pseudométrica uniforme $\rho$ tal que $\{(x, y) \in X \times X \mid \rho(x, y) < 1\} \subset V$. Entonces la función $f : X \longrightarrow [0, 1]$ dada por $f(y) = \text{mín}\{1, \rho(x, y)\}$ es continua en $X$ y cumple $f(x) = 0$ y $f|_F = 1$. ■

El teorema anterior prueba que los espacios uniformizables $T_0$ son completamente regulares. El ejemplo siguiente prueba que el recíproco también es cierto:

**Uniformidades definidas por funciones continuas** Sea $X$ un espacio topológico completamente regular. Para cada función $f \in C(X)$, definimos

$$\rho_f(x, y) = |f(x) - f(y)|.$$

Es inmediato comprobar que $\rho_f$ es una pseudométrica en $X$. Consideremos

$$\mathcal{P} = \{\rho_f \mid f \in C(X)\}, \qquad \mathcal{P}^* = \{\rho_f \mid f \in C^*(X)\},$$

y vamos a probar que las uniformidades $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}^*$ en $X$ definidas por estas dos familias inducen la topología de $X$.

En efecto, si $F \subset C(X)$ es finito y

$$V = V(F, \epsilon) = \{(x, y) \in X \times X \mid \rho_f(x, y) < \epsilon \text{ para todo } f \in F\},$$

tenemos que $B_V(x) = \{y \in X \mid |f(y) - f(x)| < \epsilon \text{ para todo } f \in F\}$, que claramente es abierto en $X$, por lo que todo abierto para cualquiera de las dos uniformidades es abierto en $X$.

Recíprocamente, si $U$ es abierto en $X$ y $x \in U$, existe $f : X \longrightarrow [0, 1]$ tal que $f(x) = 0$ y $f|_{X\setminus U} = 1$. En particular $f \in C^*(X)$ y si $V = V(\{\rho\}, 1/2)$, entonces $x \in B_V(x) \subset U$, pues si $y \in B_V(x)$, entonces $\rho(x, y) = f(y) < 1/2$, luego $y \in U$. Por lo tanto, todo abierto de $X$ es abierto para las dos uniformidades.

Observemos ahora que toda función $f \in C(X)$ (resp. $f \in C^*(X)$) es uniformemente continua en $(X, \mathcal{C})$ (resp. $(X, \mathcal{C}^*)$).

En efecto, dado $\epsilon > 0$, la banda $V = V(\{f\}, \epsilon)$ cumple que si $d(x, y) < V$, entonces $|f(x) - f(y)| < \epsilon$.

Veamos que $(X, \mathcal{C}^*)$ es totalmente acotado. Tenemos que probar que si $F \subset C^*(X)$ es finito y $\epsilon > 0$, existe $A \subset X$ finito tal que $X = V(F, \epsilon)[A]$, es decir tal que para todo $x \in X$ existe $x' \in A$ de modo que $\rho_f(x, x') < \epsilon$ para todo $f \in F$.

Sea $J = [a, b] \subset \mathbb{R}$ tal que $f[X] \subset J$ para todo $f \in F$. Por compacidad podemos cubrir $J$ con un número finito de intervalos abiertos $\{J_i\}_{i=1}^n$ de diámetro menor que $\epsilon$. Entonces los conjuntos

$$\bigcap_{f\in F} f^{-1}[J_{i(f)}],$$

para cada aplicación $i : F \longrightarrow \{1, \ldots, n\}$, cubren $X$ y tienen diámetro menor que $\epsilon$ respecto de todas las pseudométricas $\rho_f$ con $f \in F$. Basta considerar un conjunto $A \subset X$ que contenga un punto de cada uno de estos conjuntos que sea no vacío.

Por consiguiente:

**Teorema 5.59 (TU)** *Si $X$ es un espacio topológico completamente regular, las funciones uniformemente continuas $(X, \mathcal{C}) \longrightarrow \mathbb{R}$ (resp. $(X, \mathcal{C}^*) \longrightarrow \mathbb{R}$) son exactamente las de $C(X)$ (resp. $C^*(X)$).*

Demostración: En el caso de $(X, \mathcal{C})$ es trivial, pues ya hemos probado que las funciones de $C(X)$ son uniformemente continuas, y toda función uniformemente continua es continua. En el caso de $(X, \mathcal{C}^*)$ sabemos que todas las funciones de $C^*(X)$ son uniformemente continuas y, si $f : (X, \mathcal{C}^*) \longrightarrow \mathbb{R}$ es uniformemente continua, entonces $f$ se extiende a una función continua en la compleción $\beta X$ de $X$, pero ésta es totalmente acotada y completa, luego es compacta, luego la extensión está acotada en $\beta X$, luego también en $X$. ■

Una consecuencia inmediata de la discusión precedente es:

**Teorema 5.60** *Un espacio topológico $T_0$ es uniformizable si y sólo si es completamente regular.*

En particular todo espacio compacto es uniformizable, lo que completa la prueba del teorema 4.60 que habíamos dejado pendiente.

Recordemos que el ejemplo A.42 muestra que $\mathbb{N}^{\omega_1}$ no es normal y, como este espacio es cerrado en $\mathbb{R}^{\omega_1}$, tenemos un ejemplo de espacio vectorial topológico que no es $T_4$, por lo que el teorema anterior no se puede mejorar, ni siquiera en el caso de los espacios vectoriales topológicos.

Es frecuente que muchos libros incluyan en las definiciones de las clases más importantes de espacios topológicos la hipótesis de separación necesaria para garantizar que sean al menos completamente regulares. Concretamente:

| Clase | Se les exige | Resultan ser |
|---|---|---|
| Espacios métricos | — | $T_6$ |
| Espacios ordenados | — | $T_5$ |
| Espacios uniformes | $T_0$ | $T_{3\frac{1}{2}}$ |
| Espacios cerodimensionales | $T_1$ | $T_{3\frac{1}{2}}$ |
| Espacios compactos | $T_2$ | $T_4$ |
| Espacios localmente compactos | $T_2$ | $T_{3\frac{1}{2}}$ |
| Espacios extremadamente disconexos[9] | $T_3$ | $T_{3\frac{1}{2}}$ |
| Espacios de Lindelöf | $T_3$ | $T_4$ |

Los resultados que hemos obtenido sobre la estructura uniforme $(X, \mathcal{C}^*)$ nos dan otra caracterización de los espacios completamente regulares:

**Teorema 5.61 (TU)** *Un espacio topológico es completamente regular si y sólo si es homeomorfo a un subespacio de un espacio de Hausdorff compacto.*

Demostración: Obviamente, los subespacios de los espacios compactos son completamente regulares. Recíprocamente, si $X$ es completamente regular, hemos visto que la compleción $\beta X$ de $(X, \mathcal{C}^*)$ es compacta. ■

Vamos a dar una prueba alternativa de este hecho que, entre otras cosas, mostrará que el axioma de elección no es necesario cuando $X$ tiene una base bien ordenable (en particular, si tiene una base numerable). Necesitamos probar un hecho general de interés en sí mismo:

[9] El teorema 5.69, más abajo, prueba en particular que todo espacio extremadamente disconexo regular es completamente regular. Por otra parte, A.37 es un espacio extremadamente disconexo completamente regular que no es normal.

**Teorema 5.62** *Si un espacio topológico $X$ tiene una base infinita de cardinal $\kappa$, toda base infinita de $X$ contiene una base de cardinal $\leq \kappa$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $\mathcal{B}$ una base de cardinal $\kappa$ y sea $\mathcal{B}'$ otra base de $X$. Para cada $B \in \mathcal{B}$ y cada $x \in B$, podemos tomar $B'_x \in \mathcal{B}'$ y luego $B_x \in \mathcal{B}$ tales que $x \in B_x \subset B'_x \subset B$. El conjunto $\mathcal{B}_B = \{B_x \mid x \in B\} \subset \mathcal{B}_0$ tiene cardinal $\leq \kappa$ y, para cada $U \in \mathcal{B}_B$ podemos tomar un $B'_U \in \mathcal{B}'$ tal que $U \subset B'_U \subset B$. De este modo, $\mathcal{B}'_B = \{B'_U \mid U \in \mathcal{B}_B\} \subset \mathcal{B}'$ es un conjunto de cardinal $\leq \kappa$ y $B = \bigcup \mathcal{B}'_B$. Es claro entonces que $\bigcup\limits_{B \in \mathcal{B}} \mathcal{B}'_B \subset \mathcal{B}'$ es una base de cardinal $\leq \kappa$. ■

Los espacios de la forma $[0,1]^\kappa$ se llaman *cubos de Tychonoff*.

**Teorema 5.63** *Si $X$ es un espacio completamente regular con una base infinita de cardinal $\kappa$, entonces $X$ es homeomorfo a un subespacio del cubo $[0,1]^\kappa$.*

DEMOSTRACIÓN: Por el teorema anterior $X$ tiene una base de cardinal $\leq \kappa$ formada por coceros. Pongamos que es de la forma $\{X \setminus Z(f_\alpha)\}_{\alpha<\kappa}$ (con repeticiones si la base tiene cardinal menor que $\kappa$). Sea $f : X \longrightarrow [0,1]^\kappa$ la aplicación dada por $f(x) = \{f_\alpha(x)\}_{\alpha<\kappa}$. Obviamente es continua, y es inyectiva, pues si $x \neq y$ son dos puntos de $X$, existe un $\alpha$ tal que $x \in X \setminus Z(f_\alpha)$, $y \in Z(f_\alpha)$, luego $f_\alpha(x) \neq f_\alpha(y)$, luego $f(x) \neq f(y)$.

Vamos a probar que $f : X \longrightarrow f[X]$ es un homeomorfismo, para lo cual probaremos que $f$ es cerrada. Sea $C \subset X$ un cerrado. Basta probar que $f[C] = \overline{f[C]} \cap f[X]$. Una inclusión es obvia y, si existe $f(x) \in \overline{f[C]} \setminus f[C]$, entonces $x \notin C$, luego existe un $\alpha < \kappa$ tal que $x \in X \setminus Z(f_\alpha)$, $C \subset Z(f_\alpha)$, pero entonces $U = \{y \in [0,1]^\kappa \mid y_\alpha > 0\}$ es un entorno de $f(x)$ tal que $U \cap f[C] = \varnothing$, contradicción. ■

Por otra parte, todo subespacio de un cubo de Tychonoff es completamente regular (pues los cubos son compactos, luego normales). Esto nos da el teorema siguiente:[10]

**Teorema 5.64 (AE)** *Si $X$ es un espacio topológico, las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

1. *$X$ es completamente regular.*
2. *$X$ es homeomorfo a un subespacio de un cubo de Tychonoff.*
3. *$X$ es homeomorfo a un subespacio de un espacio de Hausdorff compacto.*

Los espacios de la forma $2^\kappa$ se llaman *cubos de Cantor*. Una ligera variante del argumento que hemos empleado demuestra lo siguiente:

**Teorema 5.65** *Si $X$ es un espacio cerodimensional con una base infinita de cardinal $\kappa$, entonces $X$ es homeomorfo a un subespacio del cubo $2^\kappa$.*

[10] El axioma de elección se usa únicamente para asegurar que el espacio considerado tiene una base con un cierto cardinal $\kappa$ bien ordenable.

En la prueba del teorema 5.62 sólo tenemos que sustituir la base de coceros por una base de abiertos cerrados, con los que las funciones $f_\alpha$ se pueden tomar con valores en 2.

He aquí una aplicación de 5.63:

**Teorema 5.66 (Teorema de metrización de Urysohn)** *Todo espacio regular con una base numerable es metrizable.*

DEMOSTRACIÓN: Un espacio con una base numerable es hereditariamente de Lindelöf, luego si es regular, el teorema 5.47 nos da que es $T_6$, y 5.63 implica entonces que es homeomorfo a un subespacio del cubo $[0,1]^\omega$, luego es metrizable. ■

En el apartado sobre pseudocompacidad de la sección 9.1 damos dos condiciones necesarias y suficientes para que un espacio regular sea metrizable. 297

## 5.6 Espacios fuertemente cerodimensionales

El concepto de separación completa nos permite introducir una clase más específica de espacios cerodimensionales:

**Definición 5.67** Un espacio topológico $X$ es *fuertemente cerodimensional* si es completamente regular, no vacío y, cuando $A$, $B \subset X$ son disjuntos y están completamente separados, existe un abierto cerrado $C$ en $X$ de manera que $A \subset C$, $B \subset X \setminus C$.

**Teorema 5.68** *Todo espacio fuertemente cerodimensional es cerodimensional y todo espacio de Lindelöf cerodimensional es fuertemente cerodimensional.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que $X$ es fuertemente cerodimensional, y tenemos que probar que los abiertos cerrados son una base de $X$. Sea $p \in U$, donde $U$ es abierto en $X$. Como $X$ es completamente regular, $p$ y $X \setminus U$ están completamente separados, luego existe un abierto cerrado $C$ tal que $p \in C$ y $X \setminus U \subset X \setminus C$, es decir, $p \in C \subset U$.

Supongamos ahora que $X$ es cerodimensional de Lindelöf. Basta probar que todo par de cerrados disjuntos en $X$ puede ser separado por un abierto cerrado. Para cada $x \in X$, podemos tomar un abierto cerrado $C_x$ tal que $x \in C_x$ y $C_x \cap A = \varnothing$ o bien $C_x \cap B = \varnothing$. Los abiertos $C_x$ cubren $X$, luego podemos tomar un subcubrimiento numerable $\{C_n\}_{n=0}^\infty$ de abiertos cerrados, cada uno de los cuales es disjunto de uno de los dos cerrados dados.

Los conjuntos $U_n = C_n \setminus \bigcup\limits_{m<n} C_m$ son una partición de $X$ en abiertos cerrados disjuntos dos a dos, y cada uno de ellos sigue siendo disjunto de al menos uno de los dos cerrados dados. El conjunto $C = \bigcup\{C_n \mid A \cap C_n \neq \varnothing\}$ cumple que $A \subset C$, $B \subset X \setminus C$. ■

Notemos que el espacio del ejemplo A.13, es decir, un espacio regular cuyas funciones continuas son todas constantes, no tiene conjuntos completamente separados y es conexo, luego sería trivialmente fuertemente cerodimensional si no hubiéramos exigido la regularidad completa en la definición.

El ejemplo A.39 muestra un espacio normal cerodimensional que no es fuertemente cerodimensional. Sin embargo, el teorema 12.16 prueba que en espacios ordenados ambos conceptos son equivalentes. 456

**Teorema 5.69** *Todo espacio extremadamente disconexo regular es fuertemente cerodimensional.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $X$ un espacio extremadamente disconexo regular y supongamos que $x \in U \subset X$, donde $U$ es abierto. Por la regularidad existe otro abierto $x \in V \subset \overline{V} \subset X$, de modo que $\overline{V}$ es abierto y cerrado, por lo que podemos definir $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ que valga 0 en $\overline{V}$ y 1 en su complementario, y esto prueba que $X$ es completamente regular.

Supongamos que ahora $A$, $B \subset X$ están completamente separados, de modo que existe una función $f : X \longrightarrow [0, 1]$ que vale 0 en $A$ y 1 en $B$. Basta tomar $U = \overline{f^{-1}\big[[0, 1/2[\big]}$, que es abierto y cerrado y $A \subset U$, $B \subset X \setminus U$. ■

**Teorema 5.70** *Todo espacio regular numerable es fuertemente cerodimensional.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $X$ regular y numerable. Veamos que es cerodimensional. Si $x \in U$, donde $U$ es un abierto en $X$, por la regularidad existe una función continua $f : X \longrightarrow [0, 1]$ tal que $f(x) = 1$ y $f[X \setminus U] = 0$. Como $f[X]$ es numerable, existe un $r \in\, ]0, 1[\, \setminus f[X]$, y $X = f^{-1}\big[[0, r[\big] \cup f^{-1}\big[]r, 1]\big]$ es una partición de $X$ en abiertos cerrados, y $x \in f^{-1}\big[]r, 1]\big] \subset U$, luego los abiertos cerrados son una base de $X$.

Como $X$ es un espacio de Lindelöf, el teorema anterior implica que es fuertemente cerodimensional. ■

En particular, todo espacio regular numerable es disconexo, pero la hipótesis de regularidad es necesaria, como muestra el ejemplo A.11.

Puede probarse que un producto de espacios fuertemente cerodimensionales no tiene por qué ser fuertemente cerodimensional, y que incluso un cero en un espacio fuertemente cerodimensional no tiene por qué ser fuertemente cerodimensional. No obstante, tenemos el resultado siguiente:

**Teorema 5.71** *Si $X$ es fuertemente cerodimensional y $Y$ subset $X$ es un subespacio $C^*$-sumergido no vacío, entonces $Y$ es fuertemente cerodimensional. En particular todo cerrado en un espacio normal fuertemente cerodimensional es fuertemente cerodimensional.*

DEMOSTRACIÓN: Si $A, B \subset Y$ son subconjuntos disjuntos completamente separados, esto significa que existe una función continua $f : Y \longrightarrow [0, 1]$ tal que $f[A] = \{0\}$, $f[B] = \{1\}$. Por hipótesis $f$ se extiende a una función continua en $X$ que separa completamente a $A$ y $B$, luego existe un abierto cerrado $C$ en $X$ que separa a $A$ y $B$, luego $C \cap Y$ es un abierto cerrado en $Y$ que separa a $A$ y $B$. ■

## 5.7 Apéndice: Medidas de Borel

En la sección 10.8 demostraremos que en todo grupo topológico de Hausdorff localmente compacto existen medidas invariantes por traslaciones izquierdas y derechas, que son únicas salvo producto por una constante si les exigimos una condición topológica de regularidad que vamos a estudiar aquí. El contenido de este apéndice no tiene que ver directamente con axiomas de separación, pero vamos a necesitar algunos resultados sobre separación —tanto aquí como en la sección 10.8— que impedían tratar este asunto antes. Remitimos a la sección B.3 para los resultados puramente conjuntistas sobre medidas.

Una medida razonable en un espacio topológico debe incluir entre sus conjuntos medibles a los abiertos y los cerrados. Esto nos lleva necesariamente al concepto de medida de Borel, que vamos a introducir a continuación.

**Definición 5.72** Si $X$ es un espacio topológico, la *$\sigma$-álgebra de Borel* de $X$ es la $\sigma$-álgebra generada por los subconjuntos abiertos de $X$.

Notemos que la $\sigma$-álgebra de Borel de un espacio topológico contiene también a los subconjuntos cerrados, luego, si el espacio de de Hausdorff, en particular contiene a los subespacios compactos.

Una *medida de Borel* en un espacio topológico $X$ es una medida definia sobre la $\sigma$-álgebra de Borel de $X$.

Conviene observar un hecho elemental:

**Teorema 5.73** *Si $f : X \longrightarrow Y$ es una aplicación continua entre espacios topológicos y $B$ es un conjunto de Borel en $Y$, entonces $f^{-1}[B]$ es un conjunto de Borel en $X$.*

Demostración: Sean $\mathcal{B}_X$, $\mathcal{B}_y$ las $\sigma$-álgebras de Borel de $X$ e $Y$, respectivamente y sea $\mathcal{B}_0 = \{B \in \mathcal{B}_Y \mid f^{-1}[B] \in \mathcal{B}_X\}$. Es fácil comprobar que se trata de una $\sigma$-álgebra en $Y$ y, como $f$ es continua, contiene a los abiertos, luego $\mathcal{B}_Y \subset \mathcal{B}_0$. ■

Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio medida donde $X$ es un espacio topológico y la $\sigma$-álgebra $\mathcal{A}$ contiene a la $\sigma$-álgebra de Borel $\mathcal{B}$ de $X$. Diremos que la medida $\mu$ es *regular* si cumple las propiedades siguientes:

1. Si $K \subset X$ es compacto, entonces $\mu(K) < +\infty$,

2. Si $A \in \mathcal{A}$, entonces $\mu(A) = \inf\{\mu(U) \mid A \subset U \subset X,\ U \text{ abierto}\}$,

3. Si $U \subset X$ es abierto, entonces $\mu(U) = \sup\{\mu(K) \mid K \subset U,\ K \text{ compacto}\}$.

La propiedad 2) se llama *regularidad exterior*, y la propiedad 3) *regularidad interior*. Notemos que sólo exigimos la regularidad interior para conjuntos abiertos, pero podemos probar que en realidad se cumple algo más fuerte:

**Teorema 5.74** *Si $(X, \mathcal{A}, \mu)$ es una medida regular y $A \in \mathcal{A}$ es un conjunto $\sigma$-finito (es decir, si es unión numerable de conjuntos de medida finita), entonces*

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K) \mid K \subset A,\ K \text{ compacto}\}.$$

Demostración: Supongamos en primer lugar que $\mu(A) < +\infty$ y sea $\epsilon > 0$. Por la regularidad exterior existe un abierto tal que $A \subset U$ y $\mu(U) < \mu(A) + \epsilon$. Entonces $\mu(U \setminus A) < \epsilon$, luego existe un abierto tal que $U \setminus A \subset V$ y $\mu(V) < \epsilon$. Por otra parte, la regularidad interior de $U$ nos da un compacto $K_0 \subset U$ tal que $\mu(U) - \epsilon < \mu(K_0)$. Entonces $K = K_0 \setminus V \subset A$ es compacto y

$$\mu(K) = \mu(K_0) - \mu(V) > \mu(U) - \epsilon - \mu(V) > \mu(A) - 2\epsilon,$$

luego $A$ cumple la fórmula de la regularidad interior.

En el caso general, $A = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} A_n$, donde $\mu(A_n) < +\infty$. Podemos suponer que $\mu(A) = +\infty$, en cuyo caso, para cada número real $M > 0$, existe un $n$ tal que $\mu(A_n) > M$, luego por la parte ya probada existe un compacto $K \subset A_n \subset A$ tal que $\mu(K) > M$, lo que prueba en este caso la regularidad interior. ∎

En particular toda medida regular $\sigma$-finita satisface la condición de regularidad interior para conjuntos medibles arbitrarios, no necesariamente abiertos.

En muchos casos de interés la regularidad de una medida de Borel no es ninguna restricción. Un primer resultado en esta dirección es el siguiente:

**Teorema 5.75** *Si $\mu$ es una medida de Borel finita en un espacio perfectamente normal $X$ y $A \subset X$ es un conjunto de Borel, entonces*

$$\mu(A) = \operatorname{ínf}\{\mu(U) \mid A \subset U, \textit{abierto}\} = \sup\{\mu(C) \mid C \subset A, \textit{cerrado}\}.$$

Demostración: Sea $\mathcal{C}$ el conjunto de todos los conjuntos de Borel $A \subset X$ que cumplen la conclusión. Es fácil ver que $\mathcal{C}$ está formado por los conjuntos de Borel $A$ tales que, para todo $\epsilon > 0$, existen conjuntos $C \subset A \subset U$ de modo que $C$ es cerrado, $U$ es abierto y $\mu(U \setminus C) < \epsilon$, y a partir de aquí es fácil ver que $\mathcal{C}$ es una $\sigma$-álgebra (la prueba se basa en las mismas ideas que la de B.15).

Basta probar que $\mathcal{C}$ contiene a los conjuntos abiertos. Ciertamente, todo abierto $A$ cumple la propiedad de regularidad exterior. Veamos que también cumple la versión débil de la regularidad interior. Por hipótesis $A = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} C_n$, donde cada $C_n$ es cerrado, y la sucesión se puede tomar creciente, con lo que $\mu(A) = \lim\limits_n \mu(C_n)$, de donde se sigue inmediatamente que $A \in \mathcal{C}$. ∎

**Teorema 5.76** *Toda medida de Borel localmente finita (es decir, tal que todo punto tiene un entorno de medida finita) en un espacio de Hausdorff localmente compacto con una base numerable es regular y $\sigma$-finita.*

Demostración: Sea $X$ un espacio de Hausdorff localmente compacto con una base numerable y sea $\mu$ una medida de Borel en $X$. Notemos que la condición de que $\mu$ sea localmente finita equivale a que $\mu$ es finita en los subconjuntos compactos de $X$, que es una de las condiciones que exige la regularidad.

Por otra parte, es claro que $X$ es $\sigma$-compacto, luego $\mu$ es $\sigma$-finita. Más aún, si $U \subset X$ es abierto, podemos expresar $U = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} K_n$, donde cada $K_n$ es compacto, y la sucesión puede tomarse creciente. Entonces $\mu(U) = \lim\limits_n \mu(K_n)$, y de aquí se sigue inmediatamente la regularidad interior.

Para probar la regularidad exterior observamos que $X = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} U_n$, donde los conjuntos $U_n$ forman una sucesión creciente de abiertos con clausura compacta, luego de medida finita. El espacio $X$ es de Hausdorff, localmente compacto y tiene una base numerable, luego es completamente regular y, por 5.66 es metrizable, luego es perfectamente normal y le podemos aplicar el teorema anterior, no a la medida $\mu$, que no es necesariamente finita, pero sí a las medidas $\mu_n(A) = \mu(A \cup U_n)$. Entonces, si $A \subset X$ es un conjunto de Borel y $\epsilon > 0$, para cada $n$ existe un abierto $V_n$ tal que $A \subset V_n$ y $\mu_n(V_n) < \mu_n(A) + \epsilon/2^{n+1}$. Equivalentemente, $\mu(V_n \cap U_n) < \mu(A \cap U_n) + \epsilon/2^{n+1}$. Llamando $V = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} (V_n \cap U_n)$, tenemos que $A \subset V$ y

$$\mu(V \setminus A) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \mu((U_n \cap V_n) \setminus A) < \epsilon.$$

Por lo tanto, $\mu(V) < \mu(A) + \epsilon$ y tenemos la regularidad exterior. ■

Si $X$ es un espacio topológico y $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, el *soporte* de $f$ se define como

$$\operatorname{sop} f = \overline{\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}}.$$

**Teorema 5.77** *Si $\mu$ es una medida de Borel en un espacio topológico $X$ y es finita en los compactos, entonces toda función continua $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es medible y, si tiene soporte compacto, es integrable.*

Demostración: Obviamente si $f$ es continua las antiimágenes de los abiertos son abiertas, luego conjuntos de Borel, y por lo tanto $f$ es medible. Si $K$ es el soporte de $f$, entonces $f$ está acotada en $K$, luego por la propiedad 10 del teorema B.34, es integrable. ■

En el teorema B.39 construimos el producto de dos medidas $\sigma$-finitas. En espacios con bases numerables el producto de dos medidas de Borel $\sigma$-finitas es una medida de Borel, debido al teorema siguiente:

**Teorema 5.78** *Si $X$ e $Y$ son dos espacios topológicos con bases numerables, entonces el producto de las $\sigma$-álgebras de Borel es la $\sigma$-álgebra de Borel del producto.*

Demostración: Si $U$ y $V$ son conjuntos de Borel en $X$ e $Y$ respectivamente, entonces $U \times Y$ es un conjunto de Borel en el producto, pues es la antiimagen de $U$ por la proyección en $X$, que es continua, luego medible. Igualmente $X \times V$ es un conjunto de Borel, y también lo es $U \times V$ por ser la intersección de ambos.

De aquí se sigue que todos los productos $A \times B$ de conjuntos de Borel son conjuntos de Borel, luego el producto $\mathcal{B}_X \times \mathcal{B}_Y$ de las $\sigma$-álgebras de Borel está contenido en $\mathcal{B}_{X\times Y}$. Recíprocamente, los productos de abiertos básicos $U \times V$ forman una base numerable de $X \times Y$, luego todo abierto de $X \times Y$ es unión numerable de estos abiertos básicos, que están en $\mathcal{B}_X \times \mathcal{B}_Y$, luego todo abierto de $X \times Y$ está en $\mathcal{B}_X \times \mathcal{B}_Y$, luego $\mathcal{B}_{X\times Y} \subset \mathcal{B}_X \times \mathcal{B}_Y$. ■

Sin la hipótesis de $\sigma$-finitud la situación es más compleja porque si $X$ e $Y$ son dos espacios topológicos (incluso localmente compactos), puede suceder que $\mathcal{B}_X \times \mathcal{B}_Y \subsetneq \mathcal{B}_{X\times Y}$. En el caso de espacios localmente compactos es posible definir un producto de medidas de Borel que sea una medida de Borel en el producto, pero no vamos a entrar en ello. Nos limitaremos a demostrar un resultado sobre cambio de orden de integración que nos hará falta para demostrar la unicidad de las medidas de Haar en los grupos topológicos localmente compactos:

**Teorema 5.79** *Sean $X$, $Y$ espacios topológicos de Hausdorff localmente compactos y sean $\mu$, $\nu$ medidas de Borel regulares en $X$ e $Y$, respectivamente. Sea $f : X \times Y \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua de soporte compacto. Entonces*

1. *Las funciones $f_x : Y \longrightarrow \mathbb{R}$ y $f^y : X \longrightarrow \mathbb{R}$ dadas por*
$$f_x(y) = f^y(x) = f(x, y)$$
*son continuas de soporte compacto.*

2. *Las funciones*
$$x \mapsto \int_Y f(x, y)\, d\nu(y), \qquad y \mapsto \int_X f(x, y)\, d\mu(x)$$
*también son continuas de soporte compacto.*

3. $\displaystyle\int_X \int_Y f(x, y)\, d\nu(y)\, d\mu(x) = \int_Y \int_X f(x, y)\, d\mu(x)\, d\nu(y).$

Demostración: 1) Es claro que las funciones $f_x$ y $f^y$ son continuas. Sea $K$ el soporte de $f$ y sean $K_1$ y $K_2$ sus proyecciones en $X$ e $Y$, respectivamente, que son compactas. Pero es inmediato que el soporte de $f_x$ está contenido en $K_1$ y el de $f^y$ está contenido en $K_2$, luego ambas funciones tienen soporte compacto.

2) Notemos que los integrandos son $f_x$ y $f^y$, respectivamente, que son funciones integrables por el apartado anterior. Sea $x_0 \in X$ y sea $\epsilon > 0$. Para cada $y_0 \in K_2$, existen abiertos $x_0 \in U_{y_0} \subset X$, $y_0 \in V_{y_0} \subset Y$ tales que si $(x, y) \in U_{y_0} \times V_{y_0}$ entonces $|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \epsilon/2$. Por compacidad $K_2$ está cubierto por un número finito de abiertos $V_{y_0}$. Llamamos $U$ a la intersección de los $U_{y_0}$ correspondientes, con lo que $U$ es un entorno abierto de $x_0$ tal que si $x \in U$, $y \in K_2$, entonces $|f(x, y) - f(x_0, y)| < \epsilon$.

En efecto, existirá un $y_0$ del cubrimiento finito tal que $y \in V_{y_0}$, con lo que
$$|f(x, y) - f(x_0, y)| \leq |f(x, y) - f(x_0, y_0)| + |f(x_0, y_0) - f(x_0, y)| < \epsilon.$$

Por lo tanto, si $x \in U$, tenemos que

$$\left| \int_Y f(x,y)\, d\nu(y) - \int_Y f(x_0,y)\, d\nu(y) \right| \leq \int_Y |f(x,y) - f(x_0,y)|\, d\nu(y) \leq \epsilon\nu(K_2).$$

Como $\epsilon$ es arbitrario, esto prueba la continuidad en $x_0$ de la primera función integral. La prueba para la segunda es análoga. Es inmediato que los soportes están contenidos en $K_1$ y $K_2$, respectivamente, luego son compactos.

3) Sea $\epsilon > 0$ y, como en el apartado anterior, para cada $x_0 \in K_1$ tomamos una entorno $U_{x_0}$ de $x_0$ tal que si $x \in U_{x_0}$, $y \in K_2$ entonces $|f(x,y) - f(x_0,y)| < \epsilon$. Por compacidad existen $x_1, \ldots, x_n \in K_1$ cuyor entornos abiertos respectivos $U_{x_1}, \ldots, U_{x_n}$ cubren $K_1$.

Definimos inductivamente $A_i = (K_1 \cap U_{x_i}) \setminus \bigcup\limits_{j<i} A_i \subset U_{x_i}$, de modo que los conjuntos $A_i$ son de Borel disjuntos dos a dos y $K_1 = A_1 \cup \cdots \cup A_n$. Sea $g : X \times Y \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$g(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \chi_{A_i}(x) f(x_i,y).$$

Las funciones $f$ y $g$ se anulan fuera de $K_1 \times K_2$ y $|f(x,y) - g(x,y)| < \epsilon$. Por lo tanto,

$$\left| \int_Y \int_X f(x,y)\, d\mu(x)\, d\nu(y) - \int_Y \int_X g(x,y)\, d\mu(x)\, d\nu(y) \right| \leq \epsilon\mu(K_1)\nu(K_2),$$

$$\left| \int_X \int_Y f(x,y)\, d\nu(y)\, d\mu(x) - \int_X \int_Y g(x,y)\, d\nu(y)\, d\mu(x) \right| \leq \epsilon\mu(K_1)\nu(K_2),$$

pero las dos integrales de $g$ son iguales a

$$\sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) \int_Y f(x_i,y)\, d\nu(y),$$

luego

$$\left| \int_Y \int_X f(x,y)\, d\mu(x)\, d\nu(y) - \int_X \int_Y f(x,y)\, d\nu(y)\, d\mu(x) \right| \leq 2\epsilon\mu(K_1)\nu(K_2).$$

Como $\epsilon$ es arbitrario, las dos integrales son iguales. ■

Con esto ya estamos en condiciones de estudiar las medidas de Haar. 364

# Capítulo VI

# Espacios polacos

Estudiamos ahora una clase de espacios topológicos que constituye uno de los nexos más importantes entre la topología más tradicional y la teoría de conjuntos moderna. Se trata de los espacios completamente metrizables con una base numerable, a los que Bourbaki dio el nombre de "espacios polacos", como homenaje al trabajo de los matemáticos polacos como Kuratowski o Sierpiński.

## 6.1 Ejemplos de espacios polacos

Ya hemos indicado lo que es un espacio polaco:

**Definición 6.1** Un *espacio polaco* es un espacio topológico completamente metrizable con una base numerable.

Conviene destacar que no hemos definido un espacio polaco como un espacio métrico completo, sino como un espacio topológico completamente metrizable. Esto hace que "ser un espacio polaco" sea una propiedad meramente topológica y no métrica. Exigimos que la topología esté inducida por una métrica completa, pero si dos métricas completas inducen la misma topología en un conjunto, no tenemos dos, sino un mismo espacio polaco.

Por ejemplo, un subespacio de un espacio métrico completo es completo si y sólo si es cerrado, pero, por el teorema 9.31, un subespacio de un espacio polaco es polaco si y sólo si es un $G_\delta$ (teniendo en cuenta además que todo subespacio de un espacio con una base numerable tiene una base numerable). El "truco" está en que al hablar de subespacios de espacios métricos se entiende que nos referimos a subespacios con la restricción de la métrica, pero al hablar de subespacios de espacios polacos sólo se entiende que la topología es la relativa, pero no hay ningún inconveniente en cambiar de métrica si es necesario.

Recogemos en un teorema la observación que acabamos de hacer:

**Teorema 6.2** *Un subespacio de un espacio polaco es polaco si y sólo si es* $G_\delta$.

Por otra parte, los teoremas 9.26 y 2.31 implican que todo producto numerable de espacios completamente metrizables es completamente metrizable, y es claro que la base del producto obtenida a partir de bases numerables de los factores es numerable. Por lo tanto:

**Teorema 6.3** *Todo producto numerable de espacios polacos es polaco.*

Con esto ya podemos mostrar una amplia gama de ejemplos de espacios polacos:

1. $\mathbb{R}^n$ es claramente un espacio polaco localmente compacto.

2. El intervalo unidad $\mathbb{I} = [0, 1]$ es un espacio polaco compacto.

3. $\omega$ también es un espacio polaco, pues la topología discreta es obviamente completamente metrizable.

4. $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ es un espacio polaco, pues $\mathbb{Q}$ es claramente $F_\sigma$ en $\mathbb{R}$, luego su complementario es $G_\delta$, y basta aplicar el teorema 6.2.

   En cambio, $\mathbb{Q}$ no es un espacio polaco, pues claramente no es un espacio de Baire (es de primera categoría), cuando todo espacio completamente metrizable lo es.

5. El *espacio de Baire* $\mathcal{N} = {}^\omega\omega$ es un espacio polaco, por el teorema 6.3.

6. El *cubo de Cantor* $\mathcal{C} = {}^\omega 2$ también es un espacio polaco, por la misma razón.

7. El *cubo de Hilbert* $\mathbb{H} = [0, 1]^\omega$ también es un espacio polaco, por la misma razón.

A menudo usaremos el siguiente hecho elemental:

**Teorema 6.4** *Si $X$ es un espacio con una base numerable, toda base de $X$ contiene una base numerable.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $\mathcal{B}$ una base numerable de $X$ y sea $\mathcal{B}'$ una base arbitraria. Fijemos $B \in \mathcal{B}$ y sea

$$\mathcal{F}_B = \{U \in \mathcal{B} \mid \bigvee V \in \mathcal{B}'(U \subset V \subset B)\}.$$

Para cada $U \in \mathcal{F}_B$, elegimos un $V \in \mathcal{B}'$ tal que $U \subset V \subset B$, con lo que formamos una familia numerable $\mathcal{F}'_B \subset \mathcal{B}'$. Claramente $B = \bigcup\limits_{V \in \mathcal{F}'_B} V$, luego $\mathcal{B}'_0 = \bigcup\limits_{B \in \mathcal{B}} \mathcal{F}'_B \subset \mathcal{B}'$ es una base numerable de $X$. ■

Los tres últimos ejemplos que hemos puesto de espacios polacos son más representativos de lo que en principio podría parecer. Por ejemplo, en el caso del cubo de Hilbert, sucede que contiene a todos los demás espacios polacos:

**Teorema 6.5** *Un espacio topológico $X$ es polaco si y sólo si es homeomorfo a un $G_\delta$ del cubo de Hilbert.*

DEMOSTRACIÓN: Todo espacio homeomorfo a un $G_\delta$ de $\mathbb{H}$ es polaco por el teorema 6.2. Recíprocamente, si $X$ es un espacio polaco, por ser metrizable es completamente regular, y el teorema 5.63 nos da que es homeomorfo a un subespacio de $\mathbb{H}$, necesariamente un $G_\delta$ de nuevo por 6.2. ■

Una variante del mismo argumento prueba:

**Teorema 6.6** *Todo espacio de Hausdorff localmente compacto con una base numerable es polaco.*

DEMOSTRACIÓN: Si $X$ es un espacio de Hausdorff compacto y tiene una base numerable, por 5.63 es homeomorfo a un subespacio (necesariamente cerrado) de $\mathbb{H}$, luego es completamente metrizable y, por consiguiente, polaco.

Si $X$ es localmente compacto y tiene una base numerable, entonces por 6.4 tiene una base numerable formada por abiertos de clausura compacta, de donde se sigue que la compactificación de Alexandroff $X^\infty$ también tiene una base numerable, luego es polaco, por la parte ya probada, y $X$ es abierto en $X^\infty$, luego también es polaco. ■

**Teorema 6.7** *Si $K$ es un espacio métrico compacto y $X$ es un espacio polaco, entonces el espacio $C(K, X)$ de las funciones continuas de $K$ en $X$ es un espacio polaco con la topología de la convergencia uniforme.*

DEMOSTRACIÓN: Sabemos que $C_u(K, X)$ es metrizable por 2.47. De hecho, una distancia viene dada por

$$d(f, g) = \sup_{x \in K} d(f(x), g(x)),$$

y de hecho es completamente metrizable por 2.53. Falta probar que es separable. Para cada $m, n \in \omega \setminus \{0\}$, definimos

$$C_{m,n} = \{f \in C(K, X) \mid \bigwedge xy \in K(d(x, y) < 1/m \rightarrow d(f(x), f(y)) < 1/n)\}.$$

Cubriendo $K$ con bolas de radio $1/m$ y tomando un subcubrimiento obtenemos un conjunto finito $K_m = \{x_0, \ldots, x_{k-1}\} \subset K$ tal que todo $x \in K$ dista menos de $1/m$ de un punto de $K_m$. Por otro lado, para cada $l \in \omega \setminus \{0\}$, sea $\{U_i^l\}_{i \in \omega}$ un cubrimiento de $X$ por bolas de diámetro menor que $1/l$ (basta tomar todas las bolas con centro en un subconjunto denso numerable).

Para cada $s \in {}^k\omega$ elijamos (si existe) una función $f_s \in C_{m,n}$ que cumpla $f_s(x_j) \in U_{s_j}^l$. Sea $D_{m,n,l} \subset C_{m,n}$ el conjunto de todas las $f_s$ así elegidas y formemos la unión $D_{m,n} = \bigcup\limits_l D_{m,n,l}$ (que es un conjunto numerable).

Vamos a probar que

$$\bigwedge f \in C_{m,n} \bigwedge \epsilon > 0 \bigvee g \in D_{m,n} \bigwedge x \in K_m \ d(f(x), g(x)) < \epsilon.$$

Dadas $f$ y $\epsilon$, tomamos $l > 1/\epsilon$ y elegimos $s \in {}^k\omega$ tal que $f_s(x_j) \in U^l_{s_j}$. Entonces está definida $g = f_s \in D_{m,n}$, que también cumple $g(x_j) \in U^l_{s_j}$, luego $d(f(x_j), g(x_j)) < 1/l < \epsilon$.

Finalmente llamamos $D = \bigcup\limits_{m,n} D_{m,n}$ y vamos a probar que $D$ es denso en $C(K, X)$.

En efecto, dada $f \in C(K, X)$ y $\epsilon > 0$, tomamos $n > 3/\epsilon$. Como $f$ es uniformemente continua, existe un $m$ tal que $f \in C_{m,n}$, luego podemos tomar $g \in D_{m,n}$ tal que $\bigwedge x \in K_m \ d(f(x), g(x)) < \epsilon/3$. Entonces, si $p \in K$, existe un $x \in K_m$ tal que $d(p, x) < 1/m$, luego $d(f(p), f(x)) < 1/n < \epsilon/3$ y también $d(g(p), g(x)) < 1/n < \epsilon/3$. Concluimos que $d(f(p), g(p)) < \epsilon$. ■

## 6.2 El espacio de Baire

El espacio de Baire es $\mathcal{N} = {}^\omega\omega$, donde $\omega$ tiene la topología discreta y en $\mathcal{N}$ consideramos la topología producto. Observemos que, como una base de $\omega$ la forman los conjuntos $\{k\}$, con $k \in \omega$, una base de $\mathcal{N}$ la forman los conjuntos

$$B_s = \{x \in \mathcal{N} \mid x|_n = s\},$$

donde $n \in \omega$ y $s \in {}^n\omega$ es una sucesión de $n$ números naturales. Notemos que $B_s$ es abierto y cerrado, pues

$$\mathcal{N} \setminus B_s = \bigcup_{t \in {}^n\omega \setminus \{s\}} B_t$$

es abierto. Es fácil ver que una base de entornos abiertos de $x \in \mathcal{N}$ es $\{B_{x|_n}\}_{n\in\omega}$.

Veamos ahora que el espacio de Baire $\mathcal{N}$ también tiene una "propiedad universal" análoga a la que hemos probado para el cubo de Hilbert. Para ello introducimos el concepto siguiente:

Un *esquema de Suslin* en un conjunto $X$ es una aplicación $A : \omega^{<\omega} \longrightarrow \mathcal{P}X$.

La *operación de Suslin* es la aplicación $S$ que a cada esquema de Suslin $A$ en $X$ le asigna el conjunto

$$S(A) = \bigcup_{x\in\mathcal{N}} \bigcap_{n\in\omega} A(x|_n) \subset X.$$

Si $X$ es un espacio métrico, diremos que un esquema de Suslin $A$ es abierto, cerrado, etc. si lo son todos los conjuntos $A(s)$. Diremos que $A$ cumple la *condición de los diámetros* si para todo $x \in \mathcal{N}$ se cumple que

$$\lim_n d(A(x|_n)) = 0,$$

donde $d$ denota al diámetro de un conjunto y convenimos en que $d(\varnothing) = 0$. Si $A$ cumple esta condición es claro que $\bigcap\limits_n A(x|_n)$ contiene como máximo un punto. Definimos

$$Z(A) = \{x \in \mathcal{N} \mid \bigcap_{n\in\omega} A(x|_n) \neq \varnothing\},$$

de modo que existe una única aplicación $\phi : Z(A) \longrightarrow X$ tal que, para todo $x \in Z(A)$,

$$\bigcap_{n\in\omega} A(x|_n) = \{\phi(x)\}.$$

Claramente, la imagen de $\phi$ es $S(A)$. Veamos además que $\phi$ es continua.

En efecto: tomamos un abierto $U \subset X$ y un $x \in \phi^{-1}[U]$. Sea $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(\phi(x)) \subset U$ y sea $n \in \omega$ tal que $d(A(x|_n)) < \epsilon$. Entonces tenemos que $A(x|_n) \subset B_\epsilon(\phi(x)) \subset U$, luego $x \in B_{x|_n} \subset \phi^{-1}[U]$, ya que todo $y \in B_{x|_n}$ cumple que $\phi(y) \in A(y|_n) = A(x|_n) \subset U$. Esto prueba que $\phi^{-1}[U]$ es abierto, luego $\phi$ es continua.

Con esto podemos probar la relación más general entre el espacio de Baire y los demás espacios polacos:

**Teorema 6.8** *Todo espacio polaco no vacío es imagen continua del espacio de Baire.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $X$ un espacio polaco no vacío. Veamos en primer lugar que si $U \subset X$ es un abierto no vacío, dado $\epsilon > 0$, existen abiertos no vacíos $\{U_n\}_{n\in\omega}$ de diámetro $< \epsilon$ tales que

$$U = \bigcup_{n\in\omega} U_n = \bigcup_{n\in\omega} \overline{U}_n.$$

En efecto, sea $D$ un subconjunto denso numerable de $X$ y sea $\{U_n\}_{n\in\omega}$ una enumeración de las bolas abiertas $B_{1/n}(d)$ tales que $d \in D$, $1/n < \epsilon/2$ y $\overline{B_{1/n}(d)} \subset U$. Dado $x \in U$, existe un $n > 0$ tal que $1/n < \epsilon$, $B_{1/n}(x) \subset U$. Existe un $d \in D \cap B_{1/2n}(x)$. Entonces $x \in B_{1/2n}(d)$ y $\overline{B_{1/2n}(d)} \subset U$. Por lo tanto, $B_{1/2n}(d)$ es uno de los abiertos $U_i$ y así $x$ está en la unión de todos ellos.

Con esto podemos construir recurrentemente un esquema de Suslin abierto $A$ tal que, para todo $s \in \omega^n$, los abiertos[1] $\{A(s^\frown n)\}_{n\in\omega}$ son los que resultan de aplicar el resultado que acabamos de probar al abierto $A(s)$ con $\epsilon = \frac{1}{n+1}$. Esto hace que el esquema $A$ cumpla las propiedades siguientes:

1. $A(\varnothing) = X$.
2. $d(A(s)) < 1/\ell(s)$ (donde $\ell(s)$ representa la longitud de la sucesión $s$, es decir, su dominio).
3. Si $s \subset t$, entonces $\overline{A(t)} \subset A(s)$.
4. $A(s) = \bigcup_{n\in\omega} A(s^\frown n)$.

[1] Representamos por $s^\frown n$ la sucesión que resulta de prolongar la sucesión finita $s$ con $n$ como último término.

Dado $x \in \mathcal{N}$, podemos tomar puntos $p_n \in A(x|_n)$. La condición sobre los diámetros hace que la sucesión $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ sea de Cauchy en $X$, luego converge a un punto $p \in \bigcap\limits_{n\in\omega} \overline{A(x|_n)} = \bigcap\limits_{n\in\omega} A(x|_n)$.

La última igualdad se debe a la propiedad c): $p \in \overline{A(x|_{n+1})} \subset A(x|_n)$, para todo $n \in \omega$. Esto prueba que la aplicación

$$\phi : \mathcal{N} \longrightarrow X$$

asociada al esquema de Suslin está definida sobre todo $\mathcal{N}$. Sabemos que es continua. Falta probar que es suprayectiva, y esto es consecuencia de la propiedad 4). Dado $p \in X$, tomamos $s_0 = \varnothing$, de modo que $A(s_0) = X$. Por 4) existe un $s_1 \supset s_0$ tal que $p \in A(s_1)$, y existe un $s_2 \supset s_1$ tal que $p \in A(s_2)$ y, repitiendo el proceso, obtenemos un $x \in \mathcal{N}$ tal que $p \in \bigcap\limits_{n\in\omega} A(x|_n)$, pero esto implica que $p = \phi(x)$. ■

Una modificación de la prueba del teorema anterior nos da un resultado más fino:

**Teorema 6.9** *Si $X$ es un espacio polaco, existe un cerrado $C \subset \mathcal{N}$ y una biyección continua $f : C \longrightarrow X$.*

DEMOSTRACIÓN: Vamos a probar que si $F \subset X$ es un conjunto $F_\sigma$ (es decir, una unión numerable de cerrados) y $\epsilon > 0$, entonces $F$ se descompone en unión disjunta $F = \bigcup\limits_{n\in\omega} F_n$, donde $F_n$ es un $F_\sigma$ de diámetro $< \epsilon$ y $\overline{F}_n \subset F$.

En efecto, sea $F = \bigcup\limits_{n\in\omega} C_n$, donde cada $C_n$ es cerrado. Por 6.4 sabemos que $X$ tiene una base numerable formada por bolas de diámetro $< \epsilon$. Las correspondientes bolas cerradas también tienen diámetro $< \epsilon$ y cubren todo el espacio $X$. Sean $\{B_m\}_{m\in\omega}$ estas bolas cerradas. Entonces $F = \bigcup\limits_{n,m} (C_n \cap B_m)$, donde cada conjunto $C_n \cap B_m$ es un cerrado de diámetro $< \epsilon$. Equivalentemente, podemos suponer que cada $C_n$ tiene diámetro $< \epsilon$.

Llamemos $G_n = C_n \setminus \bigcup\limits_{k<n} C_k$, de modo que $F = \bigcup\limits_{n\in\omega} G_n$, donde ahora la unión es disjunta y cada $G_n$ tiene diámetro $< \epsilon$. Además, $G_n$ es la intersección de un cerrado y un abierto, pero en un espacio métrico todo abierto[2] es un conjunto $F_\sigma$, luego $G_n$ es también $F_\sigma$. Pongamos, pues, que $G_n = \bigcup\limits_{m\in\omega} D_m^n$, donde cada $D_m^n$ es cerrado. Podemos suponer que $D_m^n \subset D_{m+1}^n$. Nuevamente, $G_n = \bigcup\limits_{m\in\omega} D_m^n \setminus D_{m-1}^n$, con el convenio de que $D_{-1}^n = \varnothing$, y los conjuntos $D_m^n \setminus D_{m-1}^n$ son $F_\sigma$, disjuntos dos a dos (para todo $m$ y $n$), de diámetro $< \epsilon$ y además $\overline{D_m^n \setminus D_{m-1}^n} \subset D_m^n \subset F$. Basta definir $\{F_n\}_{n\in\omega}$ como una ordenación de $\{D_m^n \setminus D_{m+1}^n\}_{m,n\in\omega}$.

Usando este hecho que acabamos de probar, construimos un esquema de Suslin $A$ con las características siguientes:

[2]Notemos que todo cerrado $C$ en un espacio métrico $M$ es un $G_\delta$, porque puede expresarse como $C = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \{x \in M \mid d(x, C) < 1/n\}$.

1. $A(\varnothing) = X$.
2. $d(A(s)) < 1/\ell(s)$.
3. Si $s \subset t$, entonces $\overline{A(t)} \subset A(s)$ y $A(s)$ es un conjunto $F(\sigma)$.
4. $A(s) = \bigcup_{n\in\omega} A(s^\frown n)$, donde la unión es disjunta.

Veamos que la aplicación continua $\phi : Z(A) \longrightarrow X$ cumple lo pedido. La suprayectividad se prueba igual que en el teorema anterior, como consecuencia de la propiedad 4).

Ahora tenemos además que $\phi$ es inyectiva, pues si $x, y \in Z(A)$ son distintos y $n$ es el primer natural en el que difieren, de modo que $x|_n = y|_n = s$, tenemos que $\phi(x) \in A(s^\frown x(n))$, mientras que $\phi(y) \in A(s^\frown y(n))$, y ambos conjuntos son disjuntos, luego $\phi(x) \neq \phi(y)$.

Sólo falta probar que $Z(A)$ es cerrado. Ahora bien, si $x \in \mathcal{N} \setminus Z(A)$, tenemos que $\bigcap_{n\in\omega} A(x|_n) = \varnothing$. Basta probar que existe un $n \in \omega$ tal que $A(x|_n) = \varnothing$, pues entonces $x \in B_{x|_n} \subset \mathcal{N}\setminus Z(A)$. En caso contrario, podríamos tomar $p_n \in A(x|_n)$, y por las propiedades 2) y 3), la sucesión $\{p_n\}_{n\in\omega}$ es de Cauchy en $X$, luego converge a un $p \in \overline{A(x|_{n+1})} \subset A(x|_n)$ para todo $n$, luego $p \in \bigcap_{n\in\omega} A(x|_n)$, lo que equivale a que $p = \phi(x)$, luego $x \in Z(A)$, contradicción. ■

Si el espacio polaco es cerodimensional, obtenemos un homeomorfismo:

**Teorema 6.10** *Todo espacio polaco cerodimensional es homeomorfo a un subespacio cerrado de $\mathcal{N}$.*

Demostración: Sea $X$ un espacio polaco en las condiciones del enunciado. Por 6.4 el espacio $X$ tiene una base numerable formada por abiertos cerrados de diámetro menor que $\epsilon$. En particular, dado un abierto $U$, podemos expresarlo como unión

$$U = \bigcup_{n\in\omega} U_n$$

de abiertos cerrados de diámetro menor que $\epsilon$. Cambiando $U_n$ por $U_n \setminus \bigcup_{i<n} U_i$ podemos suponer que la unión es disjunta.

Ahora construimos un esquema de Suslin en las mismas condiciones que el del teorema anterior, con la única diferencia de que los conjuntos $A(s)$ son abiertos cerrados. La aplicación $\phi : Z(A) \longrightarrow X$ sigue siendo biyectiva y continua, y $Z(A)$ sigue siendo cerrado, pero como $\phi[Z(A) \cap B_s] = A(s)$, ahora tenemos que las imágenes de los abiertos en $Z(A)$ son abiertos en $X$, y así $\phi$ es un homeomorfismo. ■

Para obtener un homeomorfismo definido sobre todo $\mathcal{N}$ nos falta imponer una condición que nos asegure que cada abierto de $X$ se puede descomponer en unión disjunta de una cantidad numerable de abiertos cerrados no vacíos de diámetro arbitrariamente pequeño:

**Teorema 6.11 (Alexandrov-Urysohn)** *Todo espacio polaco cerodimensional no vacío cuyos compactos tengan todos interior vacío es homeomorfo al espacio de Baire.*

DEMOSTRACIÓN: Notemos en primer lugar que $\mathcal{N}$ cumple la propiedad que estamos exigiendo: Si $K \subset \mathcal{N}$ es compacto y tiene interior no vacío, contiene un abierto básico $B_s$, que será compacto porque también es cerrado. Ahora bien, $B_s$ no puede ser compacto, porque sus proyecciones en $\omega$ tendrían que ser compactas (en $\omega$ con la topología discreta), luego finitas, cuando en realidad infinitas de ellas son infinitas.

Recíprocamente, si $X$ es un espacio en las condiciones del enunciado y $U$ es un abierto cerrado no vacío, por hipótesis no puede ser compacto, por lo que tiene un cubrimiento del que no se puede extraer un subcubrimiento finito. Cada abierto de dicho cubrimiento puede descomponerse en unión de abiertos cerrados de diámetro $< \epsilon$ pertenecientes a una base numerable de $X$, y es claro que estos abiertos cerrados determinan otro cubrimiento (pero ahora formado por una cantidad numerable de abiertos cerrados $U = \bigcup\limits_{n\in\omega} U_n$) del que tampoco puede extraerse un subcubrimiento finito.

Por lo tanto, al cambiar $U_n$ por $U_n \setminus \bigcup\limits_{i<n} U_i$, sigue sin ser posible obtener un cubrimiento finito, luego, si eliminamos los $U_n$ que puedan ser vacíos, seguimos teniendo una descomposición en una cantidad numerable de abiertos cerrados disjuntos dos a dos, y no vacíos. Toda la prueba del teorema anterior es válida, sólo que ahora podemos asegurar que $Z = \mathcal{N}$. ■

Como caso particular:

**Teorema 6.12** $\mathcal{N} \cong \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

DEMOSTRACIÓN: Ya hemos observado que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ es un espacio polaco. Los intervalos abiertos de extremos racionales son una base de $\mathbb{R}$, luego sus intersecciones con $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ son una base de este espacio, pero es claro que dichas intersecciones son abiertas y cerradas. Por consiguiente $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ es cerodimensional.

Finalmente, si un compacto $K \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tuviera interior no vacío, podríamos tomarlo abierto y cerrado, luego habría un intervalo $I$ en $\mathbb{R}$ con extremos racionales tal que $I \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ sería compacto, pero entonces tendría que ser cerrado en $\mathbb{R}$, y claramente no lo es. Ahora basta aplicar el teorema anterior. ■

En particular, en todas aquellas situaciones (relativamente frecuentes) en las que los números racionales resulten despreciables, el espacio $\mathcal{N}$ nos proporciona una descripción alternativa topológicamente muy simple de "casi todo" $\mathbb{R}$.

De la caracterización que hemos obtenido de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ podemos obtener a su vez una caracterización de $\mathbb{Q}$ como espacio métrico:

**Teorema 6.13 (Sierpiński)** *Todo espacio métrico numerable, cerodimensional sin puntos aislados es homeomorfo a $\mathbb{Q}$.*

Demostración: Sea $X$ un espacio en las condiciones del enunciado. La condición de que no tenga puntos aislados se traduce en que si $U$ es un abierto cerrado no trivial (es decir, distinto de $\varnothing$ y de $X$), entonces hay infinitos puntos de $X$ dentro de $U$ e infinitos puntos de $X$ fuera de $U$. Esto nos asegura que cada abierto cerrado no trivial $U$ se puede expresar como unión disjunta de una familia numerable de abiertos cerrados no vacíos de diámetro menor que cualquier $\epsilon$ prefijado.

En efecto, sea $U = \{q_i\}_{i\in\omega}$. Tomamos un abierto cerrado $U_0 \subsetneq U$ de diámetro $< \epsilon$ y tal que $q_0 \in U_0$, luego tomamos un abierto cerrado $U_1$, siempre de diámetro $< \epsilon$, tal que $\varnothing \neq U_1 \subset U \setminus U_0$ y de modo que $q_1 \in U_0 \cup U_1$. De este modo llegamos a obtener una sucesión $\{U_n\}_{n\in\omega}$ de abiertos cerrados disjuntos dos a dos, de diámetro $< \epsilon$ y cuya unión contiene a todos los $q_n$, luego es igual a todo $U$.

Así podemos construir un esquema de Suslin $A$ que nos proporciona un homeomorfismo $\phi : Z \longrightarrow X$. (por el mismo argumento que en 6.10). No podemos probar que $Z$ sea cerrado en $\mathcal{N}$, ni mucho menos que sea todo $\mathcal{N}$, porque en los teoremas anteriores esta parte de la prueba se basaba en la completitud de $X$. No obstante, podemos afirmar que $Z$ es denso en $\mathcal{N}$. En efecto, si tomamos $x \in \mathcal{N}$ y un entorno básico $B_{x|_n}$ de $n$, sabemos que $A(x|_n) \neq \varnothing$, y que, fijado $q \in A(x|_n)$, tiene una antiimagen $y \in Z$ que ha de cumplir $y \in B_{x|_n}$, pues $\phi(y) \in A(x|_n) \cap A(y|_n)$, y estos abiertos son disjuntos salvo si $x|_n = y|_n$.

Por consiguiente, tenemos que $X$ es homeomorfo a un subconjunto denso $D \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Naturalmente, $D$ es numerable y, respecto al orden usual en $\mathbb{R}$, no puede tener máximo ni mínimo elemento, ya que entonces habría números irracionales más allá de su máximo o su mínimo que no estarían en su clausura y, por el mismo motivo, ha de ser denso en sí mismo, pues si existieran $d_1 < d_2$ en $D$ sin ningún punto de $D$ entre ambos, un irracional $d_1 < \xi < d_2$ no estaría en la clausura de $D$.

Ahora basta aplicar [TC 2.39] para concluir que $D$ y, por consiguiente $X$, es homeomorfo a $\mathbb{Q}$. ■

**Observación** El teorema anterior implica que $\mathbb{Q}^2 \cong \mathbb{Q}$, y trivialmente $\mathcal{N}^2 \cong \mathcal{N}$ (ambos son el producto de $\omega$ por sí mismo una cantidad numerable de veces) luego $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^2 \cong \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Por otra parte, es fácil ver que $\mathbb{R}^2 \not\cong \mathbb{R}$. ■

## 6.3 El espacio de Cantor

Estudiamos ahora el cubo de Cantor $\mathcal{C} = {}^\omega 2$. Es un subespacio compacto del espacio de Baire, que tiene por base los conjuntos (abiertos y cerrados)

$$B_s = \{x \in \mathcal{C} \mid x|_n = s\},$$

para cada $n \in \omega$ y cada $s \in {}^n 2$.

Empezamos demostrando lo siguiente:

**Teorema 6.14** *Si $C \subset \mathcal{C}$ es cerrado, existe una retracción $f : \mathcal{C} \longrightarrow C$, es decir, una aplicación continua que restringida a $C$ es la identidad.*

DEMOSTRACIÓN: En la prueba del teorema 9.26 hemos visto que una distancia que induce la topología de $\mathcal{C}$ es la dada por

$$d(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x_n - y_n|}{2^n},$$

pero es claro que la prueba vale igualmente si cambiamos el 2 por un 3, así que vamos a considerar como distancia en $\mathcal{C}$ la dada por

$$d(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x_n - y_n|}{3^n}.$$

Si $x \in \mathcal{C}$, la función continua $d(x,-)$ toma un valor mínimo en el compacto $C$, es decir, existe un $y \in C$ tal que la distancia $d(x,y)$ es mínima. Observemos que $y$ es único, pues si $d(x,y) = d(x,y')$, tenemos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x_n - y_n|}{3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x_n - y_n'|}{3^n}$$

y esto significa que un mismo número real admite dos desarrollos decimales distintos en base 3 formados por ceros y unos, lo cual es imposible (uno de los dos desarrollos tiene que ser finalmente igual a 2).

Esto nos permite definir $f : \mathcal{C} \longrightarrow C$ como la aplicación que a cada $x \in \mathcal{C}$ le asigna el único $f(x) \in C$ para el que la distancia $d(x, f(x))$ es mínima. Obviamente $f|_C$ es la identidad. Basta probar que $f$ es continua, para lo cual basta ver que, para todo $n \in \omega$, si $x|_n = y|_n$, entonces $f(x)|_n = f(y)|_n$.

Supongamos que $x|_n = y|_n$, pero que $f(x)|_n \neq f(y)|_n$. Sea $i < n$ el mínimo número natural tal que $f(x)_i \neq f(y)_i$. Entonces $i$ es también el mínimo número natural en el que difieren las series

$$d(x, f(x)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x_n - f(x)_n|}{3^n}, \qquad d(y, f(y)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|y_n - f(y)_n|}{3^n}.$$

Podemos suponer que $|x_i - f(x)_i| = 0$, $|y_i - f(y)_i| = 1$. Entonces:

$$d(y, f(x)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|y_n - f(x)_n|}{3^n} \leq \sum_{n=0}^{i-1} \frac{|y_n - f(x)_n|}{3^n} + \frac{|x_i - f(x)_i|}{3^i} + \sum_{n=i+1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$$

$$= \sum_{n=0}^{i-1} \frac{|y_n - f(y)_n|}{3^n} + \frac{1}{2}\frac{1}{3^i} < \sum_{n=0}^{i-1} \frac{|y_n - f(y)_n|}{3^n} + \frac{|y_i - f(y)_i|}{3^i}$$

$$\leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|y_n - f(y)_n|}{3^n} = d(y, f(y)),$$

lo que contradice la minimalidad de $f(y)$. ■

Con esto podemos probar:

**Teorema 6.15 (Alexandroff-Hausdorff)** *Todo espacio métrico compacto es imagen continua del espacio de Cantor.*

Demostración: En primer lugar observamos que por 9.25 existe una aplicación continua y suprayectiva $f : \mathcal{C} \longrightarrow [0,1]$, a saber, la dada por

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)2^{-n-1}.$$

En segundo lugar, observamos que $f$ permite definir una aplicación continua y suprayectiva $\mathcal{C}^\omega \longrightarrow \mathbb{H} = [0,1]^\omega$, y es fácil ver que $\mathcal{C}^\omega$ es homeomorfo a $\mathcal{C}$ (ambos son el producto de una cantidad numerable de copias de 2). Con esto hemos probado que existe una aplicación continua y suprayectiva $\phi : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbb{H}$.

En tercer lugar observamos que, por 4.44, todo espacio métrico compacto $X$ tiene una base numerable, luego es un espacio polaco, luego por 6.5 es homeomorfo a un cerrado $K$ del cubo de Hilbert $\mathbb{H}$. Sea $K' = \phi^{-1}[K] \subset \mathcal{C}$, que es cerrado en $\mathcal{C}$. Así tenemos una aplicación $K' \longrightarrow X$ continua y suprayectiva que, compuesta con la retracción dada por el teorema anterior, nos da una aplicación $\mathcal{C} \longrightarrow X$ continua y suprayectiva. ■

Muchos resultados que hemos obtenido para el espacio de Baire pueden adaptarse a resultados análogos para el espacio de Cantor sustituyendo los esquemas de Suslin por *esquemas de Hausdorff,* que no son sino aplicaciones

$$A : 2^{<\omega} \longrightarrow \mathcal{P}X,$$

para un conjunto arbitrario $X$.

Todas las definiciones que hemos dado para esquemas de Suslin (como la condición de los diámetros, etc.) se adaptan de forma obvia a esquemas de Hausdorff. En particular, cada esquema de Hausdorff con la condición de los diámetros en un espacio métrico $X$ define una aplicación continua $\phi : Z \longrightarrow X$, para cierto $Z \subset \mathcal{C}$.

Conviene dar nombre a un requisito que nos va a aparecer a menudo en lo que sigue:

**Definición 6.16** Un espacio topológico es *perfecto* si no tiene puntos aislados.

Claramente, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{I}$, $\mathbb{H}$, $\mathcal{N}$ o $\mathcal{C}$ son ejemplos de espacios polacos perfectos.

**Teorema 6.17 (Brouwer)** *Todo espacio métrico compacto, perfecto y cerodimensional es homeomorfo al espacio de Cantor.*

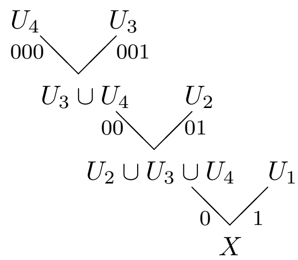
Demostración: Sea $X$ un espacio en las condiciones indicadas. Recordemos que todo espacio métrico compacto es completo. Si $U$ es un abierto cerrado no vacío de $X$, no puede contener un único punto (porque sería aislado), luego podemos dividirlo en unión disjunta de dos abiertos cerrados no vacíos. Cada uno de ellos podemos cubrirlo por abiertos cerrados de diámetro $< \epsilon$ (para un $\epsilon$ prefijado) y, como ambos son compactos, podemos extraer un subcubrimiento finito. Ordenando los abiertos, restando a cada uno los precedentes y eliminando los vacíos, podemos exigir que sean no vacíos y disjuntos dos a dos, y el hecho de que los abiertos del cubrimiento original estuvieran contenidos en uno de dos abiertos disjuntos implica que el subcubrimiento al que hemos llegado ha de contener al menos dos abiertos. En resumen:

> *Todo abierto cerrado no vacío de $X$ puede descomponerse en una unión finita de al menos dos abiertos cerrados disjuntos dos a dos de diámetro menor que $\epsilon$.*

Si cada descomposición tuviera exactamente dos abiertos sería fácil construir a partir de aquí un esquema de Hausdorff sobre $X$. En el caso general hemos de hacer algunos arreglos. Partimos de $A(\varnothing) = X$, luego descomponemos $X$ en abiertos cerrados $X = U_1 \cup \cdots \cup U_n$ de diámetro $< 1$ (con $n \geq 2$) y definimos

$$\begin{array}{rlrl} A(0) = & \bigcup\limits_{i=2}^{n} U_i, & A(1) = & U_1, \\ A(00) = & \bigcup\limits_{i=3}^{n} U_i, & A(01) = & U_2, \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A(0\cdots 0) = & U_n, & A(0\cdots 01) = & U_{n-1}, \end{array}$$

es decir, en cada ramificación "desgajamos" un abierto de la unión hasta que todos quedan separados. La figura muestra la estructura del esquema para el caso de cuatro abiertos:




A continuación prolongamos este esquema descomponiendo cada uno de los abiertos $U_i$ en abiertos cerrados de diámetro menor que $1/2$. Procediendo de este modo obtenemos un esquema de Hausdorff abierto y cerrado $A$ con la condición de los diámetros tal que:

1. $A(\varnothing) = \varnothing$.

2. Para cada $s \in 2^{<\omega}$, $A(s) = A(s^\frown 0) \cup A(s^\frown 1)$, $A(s^\frown 0) \cap A(s^\frown 1) = \varnothing$.

Es inmediato que la aplicación continua asociada a este esquema es un homeomorfismo $\phi : \mathcal{C} \longrightarrow X$. ■

Observemos que si $X$ es cualquier espacio topológico finito discreto con al menos dos puntos, $X^\omega$ cumple las hipótesis del teorema anterior, luego es homeomorfo a $\mathcal{C}$. En particular, ${}^\omega 2$, ${}^\omega 3$, ${}^\omega 4$, …son todos homeomorfos. Por eso los únicos espacios polacos que pueden obtenerse como productos de espacios discretos son $\mathcal{N}$ y $\mathcal{C}$.

Sólo con la condición de que el espacio no tenga puntos aislados conseguimos una inmersión:

**Teorema 6.18** *Todo espacio polaco perfecto no vacío contiene un subespacio homeomorfo al espacio de Cantor.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $X$ un espacio polaco perfecto no vacío. Vamos a definir un esquema de Hausdorff $A$ en $X$ con la condición de los diámetros y que además cumpla lo siguiente:

1. Cada $A(s)$ es un cerrado de interior no vacío en $X$.
2. Para cada $s \in 2^{<\omega}$, se cumple que $A(s^\frown 0) \cap A(s^\frown 1) = \varnothing$.
3. Para cada $s \in 2^{<\omega}$ y cada $i \in 2$, se cumple que $A(s^\frown i) \subset A(s)$.

Estas condiciones aseguran que la aplicación asociada $\phi$ es un homeomorfismo de $\mathcal{C}$ es un subespacio (necesariamente cerrado) de $X$. En efecto, si $x \in \mathcal{C}$, tenemos una sucesión decreciente $\{A(x|_n)\}_{n\in\omega}$ de cerrados no vacíos en $X$. Si tomamos un punto $p_n$ en cada uno de ellos, la condición de los diámetros asegura que es de Cauchy, luego converge a un punto que ha de estar en $\bigcap\limits_{n\in\omega} A(x|_n)$, luego está definido $\phi(x)$.

La propiedad 2) asegura que $\phi$ es una aplicación inyectiva y, como $\mathcal{C}$ es compacto, una aplicación $\phi : \mathcal{C} \longrightarrow X$ biyectiva y continua es un homeomorfismo en la imagen.

Para construir el esquema partimos de cualquier cerrado de interior no vacío, por ejemplo $A(\varnothing) = X$ y, supuesto definido $A(s)$, tomamos dos puntos distintos $x$, $y$ en su interior (que existen, pues $X$ no tiene puntos aislados) y tomamos como $A(s^\frown 0)$ y $A(s^\frown 1)$ dos bolas cerradas disjuntas de centros $x$ e $y$ contenidas en $A(s)$ con el diámetro suficientemente pequeño para garantizar la condición de los diámetros. ■

**El conjunto de Cantor** Conviene destacar un caso particular del teorema anterior. Para cada intervalo $I = [a, b]$, definimos los subintervalos

$$I_0 = [a, a + (b - a)/3], \qquad I_1 = [b - (b - a)/3, b].$$

Al aplicar sucesivamente este proceso de extracción de dos subintervalos disjuntos a partir de uno dado partiendo de $A(\varnothing) = \mathbb{I} = [0, 1]$ formamos un esquema de Hausdorff $A$ en $\mathbb{I}$ cuyos primeros términos son:

$$\begin{array}{ll} A(0) \ = [0/3, 1/3], & A(1) \ = [2/3, 3/3], \\ A(00) = [0/9, 1/9], & A(01) = [2/9, 3/9], \\ A(10) = [3/9, 4/9], & A(11) = [8/9, 9/9]. \end{array}$$

Claramente cumple los requisitos indicados en la prueba del teorema anterior, luego a partir de él obtenemos una aplicación $\phi : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbb{I}$ que es un homeomorfismo en su imagen. Dicha imagen $C$ se conoce como el *conjunto ternario de Cantor.*

Observemos que los subintervalos $I_0$ e $I_1$ de un intervalo $I$ que hemos considerado en la construcción del esquema de Hausdorff coinciden con los subintervalos $I_0$ e $I_2$ considerados al construir los desarrollos ternarios ($b = 3$) en la prueba del teorema 9.25, por lo que $A(0) = I_0$, $A(1) = I_2$, $A(00) = I_{00}$, $A(01) = I_{0,2}$ y, en general, cada intervalo $A(s)$ coincide con $I_{s\circ j}$, donde $j : 2 \longrightarrow 3$ es la aplicación dada por $j(0) = 0$, $j(1) = 2$. Es claro entonces que

$$\{\phi(f)\} = \bigcap_{n=0}^{\infty} A(f|_n) = \bigcap_{n=0}^{\infty} I_{f|_n\circ j} = \{\psi(f \circ j)\},$$

donde $\psi : {}^\omega 3 \longrightarrow \mathbb{I}$ es la aplicación dada por 9.25 para $b = 3$. En otras palabras, $\phi$ es la composición ${}^\omega 2 \longrightarrow {}^\omega 3 \xrightarrow{\psi} \mathbb{I}$, donde la primera aplicación es $f \mapsto f \circ j$.

Esto significa que el conjunto de Cantor $C$ está formado por los números reales en $\mathbb{I}$ cuyo desarrollo en base 3 consta únicamente de ceros y doses. Como es homeomorfo al espacio de Cantor $\mathcal{C}$, vemos que es un compacto cerodimensional.

Llamamos $C_n = \bigcup\limits_{s\in 2^n} A(s)$, de modo que $C_n$ es un subconjunto cerrado de $\mathbb{I}$ (es unión de un número finito de cerrados disjuntos dos a dos), la sucesión $\{C_n\}_{n\in\omega}$ es decreciente y $C = \bigcap\limits_{n\in\omega} C_n$. Los conjuntos $C_n$ admiten una definición recurrente más simple:

**Teorema 6.19** *Se cumplen las relaciones:*

$$C_{n+1} = \frac{1}{3}C_n \cup \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}C_n\right), \qquad C = \frac{1}{3}C \cup \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}C\right).$$

Demostración: Probamos primero las relaciones siguientes:

$$A(0^\frown s) = \frac{1}{3}A(s), \qquad A(1^\frown s) = \frac{2}{3} + A(0^\frown s) = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}A(s).$$

Vamos a probar la primera, pues el razonamiento para la segunda es completamente análogo. Teniendo en cuenta que $A(0) = [0, 1/3]$, $A(1) = [2/3, 1]$, es inmediato comprobar que la igualdad se cumple cuando $\ell(s) = 0$. Si se cumple cuando $\ell(s) = n$, tenemos que $A(s) = [u, v]$ y $A(0^\frown s) = [u/3, v/3]$. Entonces

$$A(0^\frown s^\frown 0) = \left[\frac{u}{3}, \frac{u}{3} + \frac{v-u}{9}\right] = \frac{1}{3}\left[u, u + \frac{v-u}{3}\right] = \frac{1}{3}A(s^\frown 0),$$

$$A(0^\frown s^\frown 1) = \left[\frac{v}{3} - \frac{v-u}{9}, \frac{v}{3}\right] = \frac{1}{3}\left[v - \frac{v-u}{3}, v\right] = \frac{1}{3}A(s^\frown 1),$$

luego la igualdad se cumple para todas las sucesiones de longitud $n + 1$.

Ahora:

$$C_{n+1} = \bigcup_{s\in 2^n} (A(0^\frown s)\cup A(1^\frown s)) = \bigcup_{s\in 2^n} \tfrac{1}{3}A(s)\cup\big(\tfrac{2}{3}+\tfrac{1}{3}A(s)\big) = \tfrac{1}{3}C_n\cup\big(\tfrac{2}{3}+\tfrac{1}{3}C_n\big).$$

Tomemos ahora $x \in C$. Entonces, para cada número natural $n$, tenemos que $x \in C_{n+1} = \frac{1}{3}C_n \cup \big(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}C_n\big)$. En particular $x \in C_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$, luego si $x \in [0, \frac{1}{3}]$ necesariamente $x \in \frac{1}{3}C_n$ para todo $n$, mientras que si $x \in [\frac{2}{3}, 1]$ necesariamente $x \in \frac{2}{3}+\frac{1}{3}C_n$ para todo $n$, luego

$$x \in \big(\bigcap_{n\in\omega} \tfrac{1}{3}C_n\big) \cup \bigcap_{n\in\omega} \big(\tfrac{2}{3}+\tfrac{1}{3}C_n\big) = \tfrac{1}{3}C \cup \big(\tfrac{2}{3}+\tfrac{1}{3}C\big).$$

La inclusión contraria es más sencilla. Por ejemplo, si $x \in \frac{2}{3}+\frac{1}{3}C$, entonces $x \in \frac{2}{3}+\frac{1}{3}C_n \subset C_{n+1}$ para todo $n$, luego $x \in C$. ■

La relación dada por el teorema anterior se interpreta como que $C$ es la unión de dos cerrados (luego también abiertos) disjuntos: $\frac{1}{3}C$ y $\frac{2}{3}+\frac{1}{3}C$, cada uno de los cuales es homeomorfo a $C$ (pues el primero es una homotecia y el segundo una homotecia seguida de una traslación). Más explícitamente, $C$ es la unión de dos copias a escala de sí mismo tres veces más pequeñas. Veamos una consecuencia:

**Teorema 6.20** *Se cumple que* $C + C = [0, 2]$.

DEMOSTRACIÓN: Probamos en primer lugar que $C_n + C_n = [0, 2]$ para todo $n \in \omega$. Para $C_0 = [0, 1]$ es inmediato. Si vale para $C_n$, entonces

$$\begin{aligned} C_{n+1} + C_{n+1} &= \big(\tfrac{1}{3}C_n \cup \big(\tfrac{2}{3}+\tfrac{1}{3}C_n\big)\big) + \big(\tfrac{1}{3}C_n \cup \big(\tfrac{2}{3}+\tfrac{1}{3}C_n\big)\big) \\ &= \big(\tfrac{1}{3}C_n + \tfrac{1}{3}C_n\big) \cup \big(\tfrac{1}{3}C_n + \tfrac{2}{3}+\tfrac{1}{3}C_n\big) \cup \big(\tfrac{2}{3}+\tfrac{1}{3}C_n + \tfrac{2}{3}+\tfrac{1}{3}C_n\big) \\ &= \tfrac{1}{3}[0,2] \cup \big(\tfrac{2}{3}+\tfrac{1}{3}[0,2]\big) + \cup\big(\tfrac{4}{3}+\tfrac{1}{3}[0,2]\big) = [0,\tfrac{2}{3}] \cup [\tfrac{2}{3},\tfrac{4}{3}] \cup [\tfrac{4}{3},2] = [0,2]. \end{aligned}$$

Es claro que $C + C \subset [0, 2]$. Para probar la inclusión opuesta tomamos $a \in [0, 2]$. Acabamos de probar que se puede expresar como $a = x_n + y_n$, con $x_n, y_n \in C_n$. Como $\mathbb{I}$ es un espacio métrico compacto, toda sucesión contiene una subsucesión convergente, luego podemos tomar una subsucesión $\{x_{n_k}\}$ convergente a un cierto $x \in \mathbb{I}$, con lo que la subsucesión $\{y_{n_k}\}$ converge necesariamente a $a - x$, luego tenemos que $a = x + y$. Sólo falta probar que $x, y \in C$.

Ahora bien, fijado un $m \in \omega$, tenemos que $n_k \geq m$ para todo $k$ suficientemente grande, luego $x_{n_k} \in C_m$ y, como $C_m$ es cerrado, resulta que $x \in C_m$, para todo $m$, luego $x \in C$, e igualmente se argumenta con $y$. ■

**Ejemplo** Vamos a usar el conjunto de Cantor para construir una aplicación $f : \mathbb{I} \longrightarrow \mathbb{I}^2$ continua y suprayectiva.

Esto viene a decir que es posible "arrugar" un segmento de forma continua hasta que cubra todo un cuadrado. El primer ejemplo de "curva" que llena un cuadrado fue descubierto por Peano en 1890, y por eso las curvas de estas características se conocen como *"curvas de Peano"*.

Peano definió explícitamente la curva que lleva su nombre, mientras que aquí vamos a dar una prueba muy simple no constructiva.

El teorema 6.15 nos da una aplicación $\phi : \mathcal{C} \longrightarrow [0,1]^2$ continua y suprayectiva. Componiéndola con la inversa del homeomorfismo $\mathcal{C} \longrightarrow C$ en el conjunto de Cantor $C \subset \mathbb{I}$ obtenemos una aplicación continua y suprayectiva $f : C \longrightarrow \mathbb{I}^2$.

Como $C \subset \mathbb{I}$ y el intervalo es normal, el teorema de Tietze nos da que $C$ está $C^*$-sumergido en $[0,1]$, luego las dos funciones coordenadas de $f$ se extienden a todo el intervalo $\mathbb{I}$, y al combinar ambas extensiones obtenemos una función $\bar{f} : \mathbb{I} \longrightarrow \mathbb{I}^2$ continua y suprayectiva. ■

El teorema siguiente implica que tener un subespacio homeomorfo a $\mathcal{C}$ es equivalente a tener un subespacio homeomorfo a $\mathcal{N}$:

**Teorema 6.21** *La aplicación $f : \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{C}$ dada por*

$$f(x) = 0^{x_0} {}^\frown 1 {}^\frown 0^{x_1} {}^\frown 1 {}^\frown 0^{x_2} {}^\frown 1 {}^\frown \cdots,$$

*donde $0^x$ representa una sucesión de $x$ ceros, es un homeomorfismo en su imagen, que es el conjunto de las sucesiones no finalmente constantes.*

Demostración: Obviamente, $f$ es inyectiva y su imagen $\mathcal{C}_0$ es la que dice el enunciado. Una base de $\mathcal{C}_0$ la forman los abiertos $B_s \cap \mathcal{C}_0$, donde $s \in 2^{<\omega}$ termina en 1, y es claro que la antiimagen de uno de estos abiertos es de la forma $B_t$, donde $t \in \omega^{<\omega}$ es la sucesión que cuenta la longitud de cada bloque de ceros consecutivos de $s$. Por lo tanto, $f$ es continua. Similarmente, la imagen de cada abierto básico $B_t$ es de la forma $B_s \cap \mathcal{C}_0$, donde $s$ se define a partir de $t$ de forma análoga a $f$. Concluimos que $f$ es un homeomorfismo en su imagen. ■

Los teoremas 6.18 y 6.21 implican que todo espacio polaco perfecto no vacío contiene un subespacio homeomorfo al espacio de Baire $\mathcal{N}$. El teorema de Baire nos permite demostrar un resultado más fuerte:

**Teorema 6.22** *Todo espacio polaco perfecto no vacío contiene un subespacio $G_\delta$ denso homeomorfo a $\mathcal{N}$.*

Demostración: Sea $X$ un espacio polaco perfecto no vacío y sea $\{B_n\}_{n\in\omega}$ una base numerable. En general, las fronteras de los abiertos son cerrados de interior vacío, luego por el teorema de Baire $\bigcup\limits_{n\in\omega} \partial B_n$ tiene interior vacío. En particular $Y = X \setminus \bigcup\limits_{n\in\omega} \partial B_n$ es un $G_\delta$ denso en $X$. Los conjuntos $B'_n = B_n \cap Y$ forman una base de $Y$ y claramente $\partial B'_n = \varnothing$ (donde la frontera hay que entenderla respecto de la topología de $Y$), luego los $B'_n$ son abiertos y cerrados en $Y$. Esto significa que $Y$ es cerodimensional.

Sea $D$ un subconjunto denso numerable en $Y$. Como $X$ no tiene puntos aislados, si $d \in D$ tenemos que $\{d\}$ es un cerrado de interior vacío, luego, por el teorema de Baire,

$$Z = Y \setminus D = X \setminus \left( \bigcup_{n\in\omega} \partial B_n \cup \bigcup_{d\in D} \{d\} \right)$$

es también un $G_\delta$ denso en $X$, que sigue siendo cero-dimensional, pero con la propiedad adicional de que todos sus compactos tienen interior vacío, pues un compacto con interior no vacío contendría un abierto básico $K = B'_n \setminus D$, que sería cerrado en $Z$, luego compacto, luego cerrado en $Y$, pero entonces $B'_n \setminus K = B'_n \cap D$ sería abierto en $Y$ (no vacío, porque $D$ es denso), y esto significaría que $D$ tendría interior no vacío en $Y$, en contradicción con el teorema de Baire. Ahora basta aplicar el teorema 6.11 para concluir que el espacio $Z$ es homeomorfo a $\mathcal{N}$. ■

**Teorema 6.23 (Cantor-Bendixson)** *Todo espacio polaco $X$ se descompone de forma única como $X = P \cup N$, conde $P$ es un cerrado perfecto (tal vez vacío) y $N$ es un abierto numerable. Además la unión es disjunta.*

DEMOSTRACIÓN: Diremos que un punto $x \in X$ es un *punto de condensación* si todos sus entornos abiertos son no numerables. En general, para cualquier espacio topológico $X$, representaremos por $X^*$ al conjunto de sus puntos de condensación. Evidentemente, $X^*$ es cerrado en $X$, pues si $x \in X \setminus X^*$, entonces existe un abierto numerable $U$ tal que $x \in U$, y $U \subset X \setminus X^*$.

En nuestro caso, tomamos $P = X^*$ y $N = X \setminus P$. Así $P$ es cerrado y $N$ es abierto. Además, si $\{U_n\}_{n\in\omega}$ es una base numerable de $X$, es claro que $N$ es la unión de los $U_n$ que son numerables, luego $N$ es numerable. Falta probar que $P$ es perfecto. Si $x \in P$ fuera un punto aislado, existiría un abierto $U$ tal que $U \cap P = \{x\}$, pero entonces $U \setminus \{x\} \subset N$, luego $U \setminus \{x\}$ sería numerable y $U$ también, lo que contradice a que $x \in P$.

Supongamos ahora que $X = P' \cup N'$ es otra descomposición en las condiciones del enunciado. Veamos en primer lugar que $P' \subset P$. Esto se debe a que si $x \in P'$ y $U$ es un entorno abierto en $X$, tenemos que $x \in U \cap P' \neq \varnothing$ y $U \cap P'$ es un espacio polaco (es un $G_\delta$ en $X$ porque todo cerrado lo es) perfecto, pues un punto aislado de $U \cap P'$ es también un punto aislado de $P'$. Por 6.18 resulta que $U \cap P'$ contiene una copia del espacio de Cantor, luego es no numerable, luego $U$ también lo es y $x \in P'$.

Por otra parte, si $x \in N'$, como $N'$ es abierto numerable, resulta que $x \in N$, es decir, que $N' \subset N$. Esto implica que $P = P'$ y esto a su vez que $N = N'$. ■

Hay que tener presente que cualquiera de los dos conjuntos $P$ o $N$ puede ser vacío. Como consecuencia:

**Teorema 6.24** *Todo espacio polaco es numerable o tiene cardinal $2^{\aleph_0}$.*

DEMOSTRACIÓN: Teniendo en cuenta el teorema anterior, si un espacio polaco no tiene subconjuntos cerrados no vacíos sin puntos aislados es numerable, y en caso contrario tiene cardinal $2^{\aleph_0}$ por el teorema 6.18. Notemos que, en general, el cardinal de un espacio polaco no puede ser mayor que $2^{\aleph_0}$ por el teorema 6.5. ■

Observemos que en [TC 2.53] probamos que el cardinal de $\mathbb{R}$ es $2^{\aleph_0}$ mostrando precisamente que contiene al conjunto de Cantor.

## 6.4 Isomorfismos de Borel

Existen espacios polacos con características topológicas muy diferentes. Por ejemplo, $\mathbb{R}$ es conexo, mientras que $\mathcal{N}$ es cerodimensional, $\mathbb{I}$ es compacto, $\mathbb{R}$ es localmente compacto y $\mathcal{N}$ no es localmente compacto, etc. Sin embargo, vamos a ver que todos los espacios polacos no numerables tienen $\sigma$-álgebras de Borel isomorfas o, dicho de otro modo, todos tienen "la misma" $\sigma$-álgebra de Borel. Para ello necesitamos algunos resultados previos.

**Cambio de topología** Vamos a probar que la topología de un espacio polaco puede modificarse de modo que siga siendo un espacio polaco con los mismos conjuntos de Borel, pero de modo que un conjunto de Borel prefijado pase a ser abierto y cerrado. Empezamos con un hecho elemental:

**Teorema 6.25** *Sean $X$ e $Y$ dos espacios polacos disjuntos. Entonces $X \cup Y$ admite una topología de espacio polaco que restringida a cada uno de los dos conjuntos es su topología original y en la que ambos son abiertos y cerrados.*

Demostración: Fijemos métricas completas $d_X$ y $d_Y$ en $X$ y en $Y$. Podemos suponer que ninguna de ellas toma valores mayores que 1. Basta definir la distancia en $X \cup Y$ dada por

$$d(x,y) = \begin{cases} d_X(x,y) & \text{si } x,y \in X, \\ d_Y(x,y) & \text{si } x,y \in Y, \\ 2 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Es fácil ver que $d$ es ciertamente una distancia y que la unión, con la topología inducida, cumple lo requerido. ■

**Teorema 6.26** *Sea $X$ un espacio polaco y $F \subset X$ un subespacio cerrado. Entonces existe una topología en $X$, más fina que la dada, con la que $X$ es un espacio polaco, sus conjuntos de Borel son los mismos y $F$ es abierto y cerrado.*

Demostración: Tanto $F$ como $X \setminus F$ son subconjuntos $G_\delta$, luego ambos son espacios polacos. Llamemos $X^*$ al mismo conjunto $X$ pero con la topología dada por el teorema anterior. Así $F$ es abierto y cerrado en $X^*$. Si $U$ es abierto en $X$, entonces $U \cap F$ y $U \cap (X \setminus F)$ son abiertos en $F$ y $X \setminus F$ tanto para la topología inducida por $X$ como para la de $X^*$ (pues son las mismas), luego $U = (U \cap F) \cup (U \cap (X \setminus F))$ es abierto en $X^*$, es decir, la topología de $X^*$ es más fina que la de $X$. En particular, $\mathcal{B}(X) \subset \mathcal{B}(X^*)$.

Por último, si $U$ es abierto en $X^*$, entonces $U = (U \cap F) \cup (U \cap (X \setminus F))$ y los dos términos de la unión son conjuntos de Borel en $X$, luego $U \in \mathcal{B}(X)$ y esto implica que $\mathcal{B}(X^*) \subset \mathcal{B}(X)$. En definitiva, $\mathcal{B}(X^*) = \mathcal{B}(X)$. ■

**Teorema 6.27** *Sea $X$ un espacio polaco y $B \subset X$ un conjunto de Borel. Entonces existe una topología más fina en $X$ con la que éste sigue siendo un espacio polaco con los mismos conjuntos de Borel y en la que $B$ es abierto y cerrado.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $\mathcal{B}$ el conjunto de todos los conjuntos $B \subset X$ que cumplen el teorema. Por el teorema anterior contiene a los cerrados, y también a los abiertos pues, más en general, es claro que $\mathcal{B}$ es cerrado para complementos.

Vamos a probar que $\mathcal{B}$ es cerrado para intersecciones numerables, con lo que será una $\sigma$-álgebra y tendremos que $\mathcal{B}(X) \subset \mathcal{B}$ y así el teorema quedará demostrado.

Sea $\{A_n\}_{n\in\omega}$ una sucesión en $\mathcal{B}$ y sea $A = \bigcap\limits_{n\in\omega} A_n$. Llamemos $X_n$ al mismo conjunto $X$ con una topología en las condiciones del enunciado para $A_n$. El producto $P = \prod\limits_{n\in\omega} X_n$ es también un espacio polaco. Sea $j : X \longrightarrow P$ la aplicación diagonal, es decir, la dada por $j(x) = \{x\}_{n\in\omega}$.

Notemos que $j[X]$ es cerrado en $P$, pues si $x \in P \setminus j[X]$, existen índices $i$, $j$ tales que $x_i \neq x_j$ y existen abiertos $U_i$, $U_j$ en $X$ tales que $x_i \in U_i$, $x_j \in U_j$, $U_i \cap U_j = \varnothing$. En principio $U_i$ y $U_j$ son abiertos en la topología original de $X$, pero también lo son en $X_i$ y en $X_j$ porque sus topologías son más finas. Entonces $x \in p_i^{-1}[U_i] \cap p_j^{-1}[U_j]$ y este conjunto es un abierto en $P$ disjunto de $j[X]$.

Sea $X^*$ el conjunto $X$ con la topología que tiene por abiertos las antiimágenes por $j$ de los abiertos de $P$, es decir, la topología que hace a $X^*$ homeomorfo a $j[X]$ cuando en éste consideramos la topología inducida desde $P$. Como $j[X]$ es cerrado en un espacio polaco, $j[X]$ es un espacio polaco, y $X^*$ también.

Observemos ahora que una base de $P$ la forman las intersecciones finitas de abiertos $p_i^{-1}[U_i]$, donde $U_i$ es abierto en $X_i$, luego una base de $j[X]$ la forman las intersecciones finitas de abiertos $p_i^{-1}[U_i] \cap j[X]$, luego una base de $X^*$ la forman las intersecciones finitas de los abiertos $j^{-1}[p_i^{-1}[U_i] \cap j[X]] = U_i$.

En particular, todo abierto de $X$ es abierto en cualquier $X_i$, luego es abierto en $X^*$. Esto significa que la topología de $X^*$ es más fina que la de $X$ y, por consiguiente, $\mathcal{B}(X) \subset \mathcal{B}(X^*)$. Por otra parte, los abiertos básicos de $X^*$ son conjuntos de Borel de $X$, luego $\mathcal{B}(X^*) \subset \mathcal{B}(X)$ y tenemos la igualdad.

Finalmente, cada $A_i$ es abierto y cerrado en $X_i$, luego es abierto y cerrado en $X^*$, luego $A$ es cerrado en $X^*$. El teorema anterior nos permite refinar aún más la topología de $X^*$ para obtener un nuevo espacio polaco $X^{**}$ en las condiciones del enunciado y en el que $A$ es abierto y cerrado. ■

En sus intentos de demostrar o refutar la hipótesis del continuo, Cantor investigó la cardinalidad de subconjuntos "sencillos". Probó que todo abierto no vacío en $\mathbb{R}$ tiene el cardinal del continuo (es inmediato) y el teorema de Cantor-Bendixon le permitió concluir que todo cerrado es numerable o tiene el cardinal del continuo, es decir, que ningún subconjunto abierto o cerrado de $\mathbb{R}$ puede refutar la hipótesis del continuo. El teorema siguiente muestra que un hipotético contraejemplo a la hipótesis del continuo tiene que ser mucho más complicado que un abierto o un cerrado, pues, de hecho, ningún conjunto de Borel puede servir:

**Teorema 6.28 (Alexandroff)** *Todo conjunto de Borel no numerable en un espacio polaco contiene un subconjunto perfecto y, por tanto, tiene cardinal* $\mathfrak{c}$.

Demostración: Sea $X$ un espacio polaco y $B$ un subconjunto de Borel no numerable. Sea $X^*$ el propio $X$ con otra topología más fina en la que $B$ es abierto y cerrado. En particular $B^*$ (es decir, el conjunto $B$ con la topología relativa inducida por $X^*$) es un espacio polaco no numerable. Por el teorema de Cantor-Bendixson 6.23 y 6.18 sabemos que existe un homeomorfismo en la imagen $f : \mathcal{C} \longrightarrow B^*$. Ahora bien, la topología de $B^*$ es más fina que la de $B$, luego $f$ sigue siendo una biyección continua como aplicación $f : \mathcal{C} \longrightarrow B$ y, como $\mathcal{C}$ es compacto, $f$ es un homeomorfismo en su imagen. ■

**Isomorfismos de Borel** Pasamos ya a demostrar que todos los espacios polacos del mismo cardinal tienen la misma $\sigma$-álgebra de Borel. Para el caso de espacios numerables es inmediato, pues claramente $\mathcal{B}(X) = \mathcal{P}X$, luego las álgebras de dos espacios son isomorfas si y sólo si ambos son finitos del mismo cardinal o ambos son infinitos numerables. Sólo hemos de analizar el caso no numerable. Conviene introducir algunos conceptos:

**Definición 6.29** Una biyección $f : X \longrightarrow Y$ entre dos espacios polacos es un *isomorfismo de Borel* si la aplicación $F : \mathcal{B}(Y) \longrightarrow \mathcal{B}(X)$ dada por $F(A) = f^{-1}[A]$ es biyectiva (y, por consiguiente, un isomorfismo de $\sigma$-álgebras).

**Teorema 6.30** *Existe un isomorfismo de Borel entre el espacio de Cantor $\mathcal{C}$ y el intervalo unidad $\mathbb{I}$.*

Demostración: Sea $C$ el conjunto de las sucesiones $x \in \mathcal{C}$ que son finalmente constantes y sea $f : \mathcal{C} \setminus C \longrightarrow \mathbb{I}$ la aplicación dada por

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) 2^{-n-1}.$$

Sabemos que $f$ es inyectiva (pues los únicos números reales que admiten dos desarrollos binarios distintos son los que admiten desarrollos finalmente constantes). Más aún, $f$ es un homeomorfismo en su imagen, pues si una sucesión en $\mathbb{I}$ converge a $r \in \phi[\mathcal{C} \setminus C]$, la sucesión de sus antiimágenes tiene que tener una subsucesión convergente a una sucesión $x \in \mathcal{C}$ que es un desarrollo binario de $r$, luego $x \in \mathcal{C} \setminus C$ es la única antiimagen de $r$ por $f$, luego todas las subsucesiones convergentes de la sucesión de antiimágenes convergen al mismo límite $x$, luego se trata de una sucesión convergente a $x$.

Si llamamos $G = f[\mathcal{C} \setminus C]$ y $C' = \mathbb{I} \setminus G$, tenemos que $C' \subset \mathbb{Q}$, luego $C'$ es numerable, y $C$ también lo es, luego existe una biyección $g : C \longrightarrow C'$. Así pues, $f$ y $g$ determinan entre ambas una biyección $h : \mathcal{C} \longrightarrow [0, 1]$ tal que $h|_{\mathcal{C} \setminus C} = f$ y $h|_C = g$. Observemos además que, al ser numerables, $C$ y $C'$ son conjuntos de Borel.

Así, si $B \in \mathcal{B}(\mathbb{I})$, tenemos que $B \cap G \in \mathcal{B}[G]$ y $B \cap C' \in \mathcal{B}[C']$, luego $f^{-1}[B \cap G] \in \mathcal{B}(\mathcal{C} \setminus C')$ (porque $f$ es continua) y $g^{-1}[B \cap C'] \in \mathcal{B}(C)$ (porque es numerable). Ahora bien, $\mathcal{B}(\mathcal{C} \setminus C') \subset \mathcal{B}(\mathcal{C})$ y $\mathcal{B}(C) \subset \mathcal{B}(\mathcal{C})$ (porque todo abierto en $\mathcal{C} \setminus C$ es la intersección con $\mathcal{C} \setminus C$ de un abierto en $\mathcal{C}$, luego está en $\mathcal{B}(\mathcal{C})$, luego toda la $\sigma$-álgebra generada por los abiertos está en $\mathcal{B}(\mathcal{C})$). Por consiguiente, $h^{-1}[B] = f^{-1}[B \cap G] \cup g^{-1}[B \cap C'] \in \mathcal{B}(\mathcal{C})$.

Exactamente igual se prueba que si $B \in \mathcal{B}(\mathcal{C})$ entonces $h[B] \in \mathcal{B}([0,1])$, luego $h$ es un isomorfismo de Borel. ■

**Teorema 6.31** *Si $X$ es un espacio polaco, existe un conjunto $B \in \mathcal{B}(\mathcal{C})$ y un isomorfismo de Borel $f : X \longrightarrow B$.*

DEMOSTRACIÓN: Veamos en primer lugar que el isomorfismo de Borel del teorema anterior induce un isomorfismo de Borel $\bar{h} : \mathcal{C}^\omega \longrightarrow \mathbb{H}$.

En efecto, si $\bar{h}$ es la aplicación definida de forma natural (coordenada a coordenada) y $A \in \mathcal{C}^\omega$ es abierto, entonces

$$A = U_0 \times \cdots U_{n-1} \times 2^{\omega \setminus n},$$

para ciertos abiertos $U_i$ en $\mathcal{C}$. Sea $B_i \in \mathcal{B}(\mathbb{I})$ tal que $h^{-1}[B_i] = U_i$. Por lo tanto

$$B = B_0 \times \cdots \times B_{n-1} \times [0,1]^{\omega \setminus n} \in \mathbb{B}(\mathbb{H})$$

(porque es la intersección de los $n$ conjuntos de Borel $p_i^{-1}[B_i]$) y claramente $\bar{h}^{-1}[B] = A$.

Así pues, $\mathcal{B}' = \{\bar{h}^{-1}[B] \mid B \in \mathcal{B}(\mathbb{H})\}$ es una $\sigma$-álgebra en $\mathcal{C}^\omega$ que contiene a los abiertos, luego $\mathcal{B}(\mathcal{C}^\omega) \subset \mathcal{B}'$, es decir, que todo $B \in \mathcal{B}(\mathcal{C}^\omega)$ se expresa en la forma $\bar{h}^{-1}[B']$, para cierto $B' \in \mathcal{B}(\mathbb{H})$, que necesariamente es $\bar{h}[B]$. En definitiva, hemos probado que si $B \in \mathcal{B}(\mathcal{C}^\omega)$, entonces $\bar{h}[B] \in \mathcal{B}(\mathbb{H})$, e igualmente se prueba la implicación inversa.

Como $\mathcal{C}^\omega$ es homeomorfo a $\mathcal{C}$ (y un homeomorfismo es un isomorfismo de Borel), componiendo obtenemos un isomorfismo de Borel $i : \mathbb{H} \longrightarrow \mathcal{C}$.

Por el teorema 6.5 existe un conjunto de Borel $A \in \mathcal{B}(\mathbb{H})$ y un homeomorfismo $g : X \longrightarrow A$ (notemos que, como $X$ es polaco, $A$ también lo es, luego es $G_\delta$ en $\mathbb{H}$). Sea $B = i[A] \in \mathcal{B}(\mathcal{C})$. Claramente, $i$ se restringe a un isomorfismo de Borel $i|_A : A \longrightarrow B$, con lo que al componer obtenemos un isomorfismo de Borel $f : X \longrightarrow B$. ■

Por otra parte, si $X$ es un espacio polaco no numerable, existe un homeomorfismo de $\mathcal{C}$ en un subespacio $C$ de $X$, que, en particular, es un isomorfismo de Borel $g : \mathcal{C} \longrightarrow C$. Ahora sólo necesitamos la adaptación siguiente del teorema de Cantor-Bernstein:

**Teorema 6.32** *Sean $X$ e $Y$ espacios polacos y $f : X \longrightarrow Y$, $g : Y \longrightarrow X$ isomorfismos de Borel en sus imágenes respectivas (es decir, $f$ es un isomorfismo de Borel $f : X \longrightarrow f[X] \in \mathcal{B}(Y)$, y análogamente con $g$). Entonces existe un isomorfismo de Borel entre $X$ e $Y$.*

DEMOSTRACIÓN: Definimos $F : \mathcal{B}(X) \longrightarrow \mathcal{B}(X)$ mediante

$$F(A) = X \setminus g[Y \setminus f[A]].$$

Se comprueba inmediatamente que si $A \subset B$ entonces $F(A) \subset F(B)$. Definimos $X_0 = X$, $X_{n+1} = F(X_n)$. Se cumple que $X_{n+1} \subset X_n$, pues obviamente $X_1 \subset X_0$ y basta aplicar la monotonía de $F$. Definimos $X_\infty = \bigcap\limits_{n\in\omega} X_n \in \mathcal{B}(X)$. Se comprueba a partir de la definición de $F$ que

$$F(X_\infty) = \bigcap_{n\in\omega} F(X_n) = \bigcap_{n\in\omega} X_{n+1} = X_\infty.$$

Esto significa que $X \setminus X_\infty = g[Y \setminus f[X_\infty]]$. Por lo tanto, tenemos dos isomorfismos de Borel

$$f|_{X_\infty} : X_\infty \longrightarrow f[X_\infty], \qquad g|_{Y\setminus f[X_\infty]} : Y \setminus f[X_\infty] \longrightarrow X \setminus X_\infty$$

que se combinan para formar un isomorfismo de Borel $h : X \longrightarrow Y$. ■

Así ya podemos concluir:

**Teorema 6.33** *Dados dos espacios polacos $X$ e $Y$, existe un isomorfismo de Borel $f : X \longrightarrow Y$ si y sólo si $X$ e $Y$ tienen el mismo cardinal.*

Demostración: La condición es obviamente necesaria. Antes de la definición 6.29 hemos razonado el caso de espacios numerables. Sólo falta probar que si $X$ es un espacio polaco no numerable existe un isomorfismo de Borel $f : \mathcal{C} \longrightarrow X$, pero los teoremas 6.18 y 6.23 prueban que existe una aplicación continua $f : \mathcal{C} \longrightarrow X$ que es un homeomorfismo en la imagen y, en particular, un isomorfismo de Borel en la imagen, y el teorema 6.31 prueba que existe un isomorfismo de Borel en la imagen $g : X \longrightarrow \mathcal{C}$. El teorema anterior nos da entonces la conclusión. ■

En particular, todos los espacios polacos no numerables tienen la misma $\sigma$-álgebra de Borel.

Vamos a necesitar el refinamiento siguiente del teorema anterior:

**Teorema 6.34** *Sean $X$ e $Y$ dos espacios polacos, $B \in \mathcal{B}(X)$ y $B' \in \mathcal{B}(Y)$. Existe un isomorfismo de Borel $f : X \longrightarrow Y$ tal que $f[B] = B'$ si y sólo si $|B| = |B'|$ y $|X \setminus B| = |Y \setminus B'|$.*

Demostración: La condición es obviamente necesaria. Sean $X^*$ e $Y^*$ los mismos espacios $X$ e $Y$ con topologías en las que $B$ y $B'$ sean abiertos cerrados, según el teorema 6.27. Por el teorema anterior, existen isomorfismos de Borel $B \longrightarrow B'$ y $X \setminus B \longrightarrow Y \setminus B'$, que claramente pueden combinarse para formar un isomorfismo de Borel $f$ que cumple el teorema. ■

**Medidas** Vamos a probar que, cuando en dos espacios polacos tenemos definidas medidas, es posible encontrar un isomorfismo de Borel entre ambos que transforme una medida en otra, supuesto que las medidas cumplan unas condiciones obviamente necesarias. Antes vamos a probar que toda medida de Borel $\sigma$-finita en un espacio polaco es regular. El teorema 5.76 lo prueba en el caso de espacios localmente compactos con una base numerable, pero vamos a ver que, sin más que exigir que la medida sea $\sigma$-finita, lo mismo vale para espacios polacos arbitrarios:

**Teorema 6.35** *Sea $X$ un espacio polaco y $\mu$ una medida de Borel finita en $X$. Entonces, para cada conjunto $\mu$-medible*[3] *$A \subset X$ se cumple que*

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K) \mid K \subset A \text{ es compacto}\}.$$

Demostración: Por el teorema 5.75, la medida de $A$ puede aproximarse por la de un cerrado, luego basta aproximar la de este cerrado por la de un compacto. Equivalentemente, podemos suponer que $A$ es cerrado. Entonces $A$ es él mismo un espacio polaco. Si $\mu(A) = 0$ no hay nada que probar y, en caso contrario, restringiendo la medida a $\mathcal{B}(A)$, podemos suponer que $A = X$. Así pues, hay que probar que

$$\mu(X) = \sup\{\mu(K) \mid K \subset X \text{ es compacto}\}.$$

Para cada $n \in \omega$, la familia de bolas abiertas de radio $2^{-n}$ forma una base de $X$, luego por 6.4 podemos extraer una subbase numerable. Sean $\{B_i^n\}_{i\in\omega}$ las bolas cerradas correspondientes. Como

$$\mu\Big(\bigcup_{i\leq k} B_i^n\Big) \to \mu(X),$$

podemos tomar un $k_n \in \omega$ tal que $\mu\Big(X \setminus \bigcup\limits_{i\leq k_n} B_i^n\Big) < \epsilon/2^{n+1}$. Sea

$$K = \bigcap_{n\in\omega} \bigcup_{i\leq k_n} B_i^n.$$

Entonces $K$ es cerrado, luego es un espacio métrico completo, y es precompacto, pues, dado $\epsilon > 0$ tomamos un $n$ tal que $2^{-n} < \epsilon$ y $K$ puede cubrirse por las bolas abiertas de radio $\epsilon$ y centros en los centros de las bolas cerradas $B_i^n$. Por lo tanto $K$ es compacto. Además,

$$\mu(X) - \mu(K) = \mu(X \setminus K) \leq \sum_{n\in\omega} \mu\Big(X \setminus \bigcup_{i\leq k_n} B_i^n\Big) < \epsilon.$$

■

Lla hipótesis de finitud puede suprimirse:

**Teorema 6.36** *Toda medida de Borel $\sigma$-finita $\mu$ en un espacio polaco $X$ es regular, es decir, para todo conjunto $\mu$-medible $A$, se cumple que*

$$\mu(A) = \sup\{\mu(F) \mid K \subset A \text{ es compacto}\} = \text{ínf}\{\mu(U) \mid A \subset U \text{ es abierto}\}.$$

Demostración: Tenemos el teorema probado para el caso de medidas finitas. (Notemos que 5.74 garantiza la regularidad interior para conjuntos de Borel arbitrarios.) Como $\mu$ es $\sigma$-finita, existen conjuntos $\mu$-medibles $\{A_n\}_{n\in\omega}$ con $\mu(A_n) < +\infty$ y $X = \bigcup\limits_{n\in\omega} A_n$. Uniendo cada $A_n$ a los precedentes podemos suponer que la sucesión es creciente, y eliminando los términos nulos si los hay,

[3] Por conjuntos $\mu$-medibles nos referimos a los conjuntos medibles respecto de la compleción de $\mu$, en el sentido del teorema B.15.

podemos suponer que $\mu(A_n) > 0$ para todo $n$. Si $\mathcal{M}_\mu$ es la $\sigma$-álgebra de los conjuntos $\mu$-medibles, definimos $\mu' : \mathcal{M}_\mu \longrightarrow [0,1]$ mediante

$$\mu'(A) = \sum_{n\in\omega} \frac{\mu(A\cap A_n)}{\mu(A_n)} \frac{1}{2^{n+1}},$$

y es fácil ver que $\mu'$ es una medida de Borel finita en $X$ con los mismos conjuntos medibles y nulos. Dado un conjunto $\mu$-medible $A$, tenemos que $A = \bigcup\limits_{n\in\omega} (A_n\cap A)$ y la unión es creciente, luego

$$\mu(A) = \sup_{n\in\omega} \mu(A_n\cap A).$$

Si se cumple $\mu(A) < +\infty$, fijamos $0 < \epsilon < 1$ y tomamos un $n_0 \in \omega$ tal que $\mu(A) - \mu(A\cap A_{n_0}) < \epsilon/2$; si $\mu(A) = +\infty$, fijamos $N \in \omega$ y tomamos $n_0 \in \omega$ tal que $\mu(A\cap A_{n_0}) > N+1$.

Por el teorema anterior aplicado a la medida $\mu'$ existe un compacto $K\subset A$ tal que

$$\mu'(A) - \mu'(K) < \frac{\epsilon}{\mu(A_{n_0})2^{n_0+2}}.$$

Esto implica, en particular, que

$$\frac{\mu(A\cap A_{n_0}) - \mu(K\cap A_{n_0})}{\mu(A_{n_0})} \frac{1}{2^{n_0+1}} < \frac{\epsilon}{\mu(A_{n_0})2^{n_0+2}},$$

luego $\mu(A\cap A_{n_0}) - \mu(K\cap A_{n_0}) < \epsilon/2$. En el caso en que $A$ tiene medida finita, de aquí deducimos que $\mu(A) - \mu(K\cap A_{n_0}) < \epsilon$, luego también $\mu(A) - \mu(K) < \epsilon$. En el caso de medida infinita queda que $\mu(K) \geq \mu(K\cap A_{n_0}) > N$, luego en ambos casos se cumple la primera igualdad del enunciado.

La segunda es trivial si $\mu(A) = +\infty$, y en caso contrario se razona análogamente a como acabamos de hacer. ■

Como consecuencia tenemos que los conjuntos de medida positiva han de tener cardinal grande:

**Teorema 6.37** *Sea $X$ un espacio polaco y $\mu$ una medida de Borel $\sigma$-finita en $X$ respecto a la que los puntos tengan medida nula. Si un conjunto $\mu$-medible $A$ cumple que $\mu(A) > 0$, entonces $|A| = 2^{\aleph_0}$.*

Demostración: Tenemos que $A$ contiene un cerrado $F$ de medida positiva, luego $F$ no puede ser numerable, luego por 6.28 tiene cardinal $2^{\aleph_0}$ y $A$ también. ■

Vamos a necesitar el hecho siguiente:

**Teorema 6.38** *El conjunto ternario de Cantor $C\subset \mathbb{I}$ es nulo para la medida de Lebesgue.*

Demostración: El conjunto ternario de Cantor es de la forma

$$C = \bigcap_{n\in\omega} \bigcup_{s\in 2^n} A(s),$$

donde cada $A(s)$ es un intervalo cerrado de longitud $3^{-l(s)}$. Por lo tanto,

$$m(C) \leq \sum_{s\in 2^n} 3^{-n} = \left(\tfrac{2}{3}\right)^n$$

para todo $n \in \omega$, luego $m(C) = 0$. ■

**Definición 6.39** Diremos que una medida es *continua* si respecto a ella los puntos tienen medida nula.

Ahora ya podemos probar:

**Teorema 6.40** *Sea $X$ un espacio polaco y $\mu$ una medida de Borel continua y unitaria en $X$. Entonces existe un isomorfismo de Borel $f : X \longrightarrow \mathbb{I}$ tal que, para todo $A \in \mathcal{M}_\mu$, $\mu(A) = m(f[A])$, donde $m$ es la medida de Lebesgue.*

Demostración: Para que $X$ pueda tener una medida no nula tiene que ser no numerable, luego por el teorema 6.33 tenemos que existe un isomorfismo de Borel $g : X \longrightarrow \mathbb{I}$. Podemos definir una medida de Borel en $\mathbb{I}$ mediante $\mu'(B) = \mu(g^{-1}[B])$. Se cumple entonces que si $A \in \mathcal{B}(X)$, $\mu(A) = \mu'(g[A])$. De hecho, lo mismo vale para $A \in \mathcal{M}_\mu$, pues en tal caso $A = B \cup N$, donde $N \subset C \in \mathcal{B}(X)$ y $C$ es nulo. Por lo tanto, $g[A] = g[B] \cup g[N]$ con $g[B] \in \mathcal{B}(\mathbb{I})$ y $g[N] \subset g[C] \in \mathcal{B}(\mathbb{I})$ y $\mu'(g[C]) = 0$. Esto prueba que $g[A] \in \mathcal{M}_{\mu'}$ y

$$\mu'(g[A]) = \mu'(g[B]) = \mu(B) = \mu(A).$$

Es claro entonces que basta demostrar el teorema para la medida $\mu'$ o, lo que es lo mismo, podemos suponer que $X = \mathbb{I}$.

Sea $g : \mathbb{I} \longrightarrow \mathbb{I}$ la función dada por $g(x) = \mu([0, x])$. Claramente $g$ es continua, monótona creciente y $g(0) = 0$, $g(1) = 1$.

Definimos ahora otra medida de Borel en $\mathbb{I}$ mediante $m(B) = \mu(g^{-1}[B])$. La hemos llamado $m$ porque, como vemos a continuación, es la medida de Lebesgue. En efecto,

$$m([0, x]) = \mu(g^{-1}[0, x]) = \mu([0, y]) = g(y) = x,$$

donde $y$ es el máximo del intervalo cerrado $g^{-1}[x]$. De aquí se sigue a su vez que $m([x, y]) = y - x$, y esto caracteriza a la medida de Lebesgue.

Aún no tenemos probado el teorema porque la aplicación $g$ no tiene por qué ser biyectiva, luego no es un isomorfismo de Borel. Para arreglarlo observamos que, para cada $x \in [0, 1]$, como ya hemos observado, $g^{-1}[x]$ es un intervalo que puede reducirse a un punto. De hecho, el conjunto $N$ formado por los puntos $x \in [0, 1]$ tales que $g^{-1}[x]$ contiene más de un punto ha de ser numerable, pues los intervalos serán disjuntos dos a dos, y cada uno de ellos tendrá que contener un número racional distinto.

Llamemos $M = g^{-1}[N]$. Así, la aplicación $g$ se restringe a un homeomorfismo $g : \mathbb{I} \setminus M \longrightarrow \mathbb{I} \setminus N$. Sea $C$ el conjunto ternario de Cantor y $Q = C \setminus N$, que es no numerable y nulo para la medida de Lebesgue. Sea $P = g^{-1}[Q] \subset \mathbb{I} \setminus M$, que cumple $\mu(P) = \mu(g^{-1}[Q]) = m(Q) = 0$. Restringiendo aún más $g$, obtenemos un homeomorfismo

$$g : \mathbb{I} \setminus (P \cup M) \longrightarrow \mathbb{I} \setminus (Q \cup N).$$

Notemos que si $A \subset \mathbb{I} \setminus (P \cup M)$ es un conjunto de Borel, entonces $g[A]$ es un conjunto de Borel (porque $g$ es un homeomorfismo en este dominio) y $g^{-1}[g[A]] = A$, luego $m(g[A]) = \mu(A)$.

Por otra parte, $P \cup M$ y $Q \cup N$ son conjuntos de Borel no numerables, y sus complementarios respectivos también son no numerables (pues $g$ es una biyección entre ellos y el del segundo es $(\mathbb{I} \setminus C) \cup N$, donde $\mathbb{I} \setminus C$ es abierto, luego no numerable). El teorema 6.34 nos da un isomorfismo de Borel de $\mathbb{I}$ en sí mismo que se restringe a un isomorfismo de Borel $h : P \cup M \longrightarrow Q \cup N$. Combinando $g$ y $h$ obtenemos un isomorfismo de Borel $f : \mathbb{I} \longrightarrow \mathbb{I}$ que cumple el enunciado para subconjuntos de Borel $A \subset \mathbb{I} \setminus (P \cup M)$ (porque $g$ tiene esta propiedad) y también para $A \subset P \cup M$ (porque en tal caso $A$ es nulo para $\mu$ y su imagen por $f$ es nula para $m$). De aquí se sigue inmediatamente que $f$ cumple el teorema para todo conjunto de Borel, y de aquí a su vez se sigue sin dificultad que se cumple para todo conjunto medible. ■

Así pues, no sólo es posible encontrar un isomorfismo de Borel que transforme los conjuntos de Borel de un espacio dado en otro, sino que es posible hacerlo de modo que transforme cualquier medida de Borel dada (unitaria y continua) en cualquier otra.

## 6.5 La propiedad de Baire

En cualquier espacio polaco no numerable $X$ existen medidas de Borel[4] continuas y unitarias $\mu$. Cualquiera de estas medidas tiene un comportamiento análogo al de la medida de Lebesgue en $\mathbb{I}$ o $\mathbb{I}^n$ y, entre otras cosas, nos permite distinguir entre conjuntos "muy pequeños" (los de medida 0), "muy grandes" (los de medida 1) y "no muy pequeños" (los de medida positiva). Si llamamos

$$I_m = \{A \in \mathcal{P}X \mid \mu(X) = 0\},$$

nos estamos refiriendo a los conjuntos que cumplen $A \in I_m$, $X \setminus A \in I_m$ y $A \notin I_m$, respectivamente.

Ahora bien, los espacios polacos son espacios de Baire, por lo que podemos hacer una distinción análoga en términos estrictamente topológicos, considerando en lugar de $I_m$ el conjunto $I_c$ de los subconjuntos de $X$ de primera categoría.

[4]Como es habitual, entendemos que $\mu$ es la compleción de una medida de Borel, de modo que la $\sigma$-álgebra de los conjuntos medibles es mayor que la $\sigma$-álgebra de Borel.

Sucede que muchos resultados no cuantitativos sobre teoría de la medida (es decir, en los que no es relevante la medida concreta de ningún conjunto, más allá de si es nulo o no y que no involucren integrales en su enunciado) tienen un análogo en términos de categoría y viceversa. De hecho, algunos de los resultados sobre categoría que vamos a presentar aquí fueron conjeturados precisamente por su analogía con resultados conocidos de la teoría de la medida.

A la hora de poner de manifiesto esa analogía (se suele decir "dualidad") entre medida y categoría nos encontramos con un primer obstáculo, y es que al considerar una medida en un espacio $X$ no consideramos todos los subconjuntos de $X$, sino únicamente los del álgebra $\mathcal{M}_\mu$ de conjuntos medibles y, en principio, no tenemos algo análogo para la categoría.

Si nos fijamos bien en lo que queremos imitar, cuando un conjunto $A \subset X$ es medible, por regularidad existen conjuntos $K_n \subset A \subset U_n$, donde $K_n$ es cerrado (compacto, de hecho) y $U_n$ es abierto, de modo que $\mu(K_n) > \mu(A) - 1/n$, $\mu(U_n) < \mu(A) + 1/n$. Formando la unión de los $K_n$ y la intersección de los $U_n$ obtenemos lo siguiente:

> *Sea $\mu$ una medida de Borel unitaria y continua en un espacio polaco $X$. Si $A \subset X$, entonces $A$ es un conjunto medible si y sólo si existen conjuntos $F \subset A \subset G$, de modo que $F$ es $F_\sigma$, $G$ es $G_\delta$ y $\mu(G \setminus F) = 0$.*

Podríamos haber escrito $\mu(F) = \mu(A) = \mu(G)$, pero entonces el enunciado sería cuantitativo (en él intervendrían las medidas de los conjuntos), mientras que así es cualitativo (sólo estamos diciendo que $G \setminus F \in I_m$).

Hemos probado una implicación, pero la otra es también sencilla: si existen $F$ y $G$, entonces $A \setminus F \subset G \setminus F$, luego $A \setminus F$ es medible (es nulo, por la completitud de $\mu$) y $F$ es medible por ser de Borel, luego $A = F \cup (A \setminus F)$ también es medible.

Así pues, los conjuntos medibles se caracterizan por ser los que se diferencian en un conjunto nulo tanto de un conjunto $F_\sigma$ como de un conjunto $G_\delta$. En particular, esto vale para los conjuntos de Borel: todo conjunto de Borel en $X$ es "casi" un $F_\sigma$ y "casi" un $G_\delta$ en el sentido de que puede convertirse en tal añadiéndole o quitándole un conjunto nulo adecuado.

En particular, vemos así que la $\sigma$-álgebra de los conjuntos medibles sea la menor $\sigma$-álgebra que contiene tanto a la $\sigma$-álgebra de Borel como al conjunto $I_m$ de los conjuntos nulos.

En el caso de la categoría, el álgebra correspondiente tiene una definición más simple:

**Definición 6.41** Un subconjunto $A$ de un espacio polaco $X$ tiene la *propiedad de Baire* si existe un abierto $U$ en $X$ tal que $A \triangle U = (A \setminus U) \cup (U \setminus A)$ es de primera categoría. Llamaremos $\mathrm{Ba}(X)$ al conjunto de todos los subconjuntos de $X$ con la propiedad de Baire.

La operación $A \triangle U = (A \setminus U) \cup (U \setminus A) = (A \cup U) \setminus (A \cap U)$ se llama *diferencia simétrica* de conjuntos, y una comprobación rutinaria muestra que, si $X$ es cualquier conjunto, entonces $\mathcal{P}X$ se convierte en un anillo conmutativo y unitario con la suma dada por la diferencia simétrica y el producto dado por la intersección.[5] Se cumple además que $0 = \varnothing$, $1 = X$ y $-A = A$.

Por ejemplo, teniendo esto en cuenta, es inmediato que $A \triangle U = P \in I_c$ es equivalente a[6] $A = U \triangle P$. En cualquier caso la idea subyacente es que $A$ tiene la propiedad de Baire si puede obtenerse de un abierto $U$ añadiéndole un conjunto de primera categoría $(A \setminus U)$ y quitándole otro $(U \setminus A)$.

Para seguir la prueba del teorema siguiente resulta útil observar además que $I_c$ es un ideal de $\mathcal{P}X$. En efecto, si $A$, $B \in I_c$, entonces $A - B = A \triangle B \subset A \cup B$, luego $A - B \in I_c$, y $A \cdot B = A \cap B \in I_c$.

**Teorema 6.42** *Si $X$ es un espacio polaco,* $\mathrm{Ba}(X)$ *es una $\sigma$-álgebra que contiene a todos los conjuntos de Borel y a todos los conjuntos de primera categoría.*

Demostración: Obviamente, todo abierto $A$ tiene la propiedad de Baire (pues $A \triangle A = \varnothing$) y lo mismo le sucede a todo conjunto de primera categoría (pues $\varnothing \triangle A = A$).

Si $U$ es abierto, entonces $(X \setminus U) \triangle (X \setminus \overline{U}) = \overline{U} \setminus U = \partial U$ es un cerrado de interior vacío, luego de primera categoría. Esto prueba que $X \setminus U \in \mathrm{Ba}(X)$.

Si $A \in \mathrm{Ba}(X)$ es arbitrario y $U$ es un abierto tal que $A \triangle U \in I_c$, es inmediato que

$$(X \setminus A) \triangle (X \setminus U) = A \triangle U = P \in I_c$$

y hemos visto que

$$(X \setminus U) = (X \setminus \overline{U}) \triangle \partial U,$$

luego

$$X \setminus A = (X \setminus U) \triangle P = (X \setminus \overline{U}) \triangle \partial U \triangle P,$$

luego

$$(X \setminus A) \triangle (X \setminus \overline{U}) = \partial U \triangle P \in I_c,$$

por lo que $X \setminus A \in \mathrm{Ba}(X)$.

Por último, si $\{A_n\}_{n\in\omega}$ es una familia de conjuntos en $\mathrm{Ba}(X)$, entonces existen abiertos $U_n$ tales que $A_n \triangle U_n \in I_c$, luego

$$\Big(\bigcup_{n\in\omega} A_n\Big) \triangle \Big(\bigcup_{n\in\omega} U_n\Big) \subset \bigcup_{n\in\omega} (A_n \triangle U_n) \in I_c,$$

luego $\bigcup\limits_{n\in\omega} A_n \in \mathrm{Ba}(X)$.

Esto prueba que $\mathrm{Ba}(X)$ es una $\sigma$-álgebra y, como contiene a los abiertos, contiene a todos los conjuntos de Borel. ■

**Nota** Si consideramos la medida de Lebesgue en $[0, 1]$, no es cierto que para todo conjunto de Borel $A$ exista un abierto $U$ tal que $A \triangle U \in I_m$. Ni siquiera es cierto cuando $A$ es cerrado.

[5] En [TC 7.4] probamos esto en el contexto más general de las álgebras de Boole.

[6] Con el lenguaje usual de la teoría de anillos, estamos pasando de $A+U = P$ a $A = -U+P$.

En efecto, sea $\{q_n\}_{n\in\omega}$ una enumeración de $\mathbb{Q}\cap[0,1]$ y, para cada $n\in\omega$, llamemos $I_n$ a un intervalo abierto de centro $q_n$ y diámetro —o sea, medida— menor que $1/2^{n+2}$. Llamemos $V$ a la unión de los intervalos $I_n$ y consideremos el cerrado $A=[0,1]\setminus V$. Tenemos que $V$ es denso en $[0,1]$ y $m(V)<1/2$, luego $A$ tiene interior vacío en $[0,1]$ y $m(A)>1/2$. Esto implica que no existe ningún abierto $U$ en $[0,1]$ tal que $U\bigtriangleup A$ sea nulo, pues esto implicaría que el abierto $U\setminus A$ sería nulo, pero un abierto sólo puede ser nulo si es vacío, luego $U\subset A$, pero $A$ tiene interior vacío, luego $U=\varnothing$, luego $A=\varnothing\bigtriangleup A$ es nulo, y esto es falso.

Si intentamos adaptar la prueba del teorema anterior, lo que nos lo impide es que hemos usado que $\partial U$ es de primera categoría, pero no es cierto en general que la frontera de un abierto tenga medida nula. Por ejemplo, en la construcción precedente, tenemos que $\partial V=[0,1]$. ■

Otro ejemplo que muestra que la analogía entre medida y categoría no es perfecta es el teorema siguiente, donde las inclusiones están invertidas respecto al caso de la medida:

**Teorema 6.43** *Si $X$ es un espacio polaco, un conjunto $B\subset X$ tiene la propiedad de Baire si y sólo si existen conjuntos $G\subset B\subset F$ tales que $G$ es $G_\delta$ y $F$ es $F_\sigma$, y además $F\setminus G$ es de primera categoría.*

Demostración: Si $P$ es un conjunto diseminado (está contenido en un cerrado de interior vacío), entonces su clausura es un cerrado de interior vacío, luego es de primera categoría. Un conjunto de primera categoría es unión numerable de conjuntos diseminados, luego está contenido en un $F_\sigma$ de primera categoría (la unión de las clausuras de los diseminados).

Un conjunto con la propiedad de Baire es de la forma $B=A\bigtriangleup P$, donde $A$ es abierto y $P$ es de primera categoría. Si $F$ es un $F_\sigma$ de primera categoría que contenga a $P$, tenemos que

$$B=A\bigtriangleup P=(A\setminus F)\cup(A\cap(F\setminus P))\cup(P\setminus A),$$

donde el primer conjunto es un $G_\delta$ y los otros dos son de primera categoría. En definitiva, hemos encontrado un $G\subset B$ tal que $G$ es $G_\delta$ y $B\setminus G$ es de primera categoría. Igualmente $X\setminus B$ contiene un $G_\delta$ en estas condiciones, luego $B\subset F$, para un cierto $F_\sigma$ $F$ tal que $F\setminus B$ es de primera categoría.

Recíprocamente, en las condiciones del enunciado, $B\setminus G\subset F\setminus G\in I_c$, luego $B\setminus G\in\mathrm{Ba}(X)$, y $G\in\mathrm{Ba}(X)$ porque es un conjunto de Borel. Por consiguiente, $B=G\cup(B\setminus G)\in\mathrm{Ba}(X)$. ■

Consideremos la versión cualitativa siguiente del teorema de Fubini B.41 (basta aplicarlo a la función $f=\chi_A$):

**Teorema 6.44 (Fubini)** *Sean $X$, $Y$ dos espacios polacos dotados de dos medidas de Borel $\sigma$-finitas $\mu$ y $\nu$, respectivamente, y sea $A\subset X\times Y$ un conjunto medible respecto de $\mu\times\nu$. Entonces:*

1. *El conjunto* $A_x = \{y \in Y \mid (x, y) \in A\}$ *es medible para todo* $x \in X$ *salvo un conjunto nulo.*

2. $A$ *es nulo si y sólo si* $A_x$ *es nulo para todo* $x \in X$ *salvo un conjunto nulo.*

Sucede que tiene un perfecto análogo para la categoría, lo cual es especialmente sorprendente, porque no se conoce ninguna demostración del teorema anterior que no involucre integrales:

**Teorema 6.45 (Kuratowski-Ulam)** *Sean* $X$, $Y$ *dos espacios polacos y sea* $A \subset X \times Y$ *un conjunto con la propiedad de Baire. Entonces:*

1. *El conjunto* $A_x = \{y \in Y \mid (x, y) \in A\}$ *tiene la propiedad de Baire para todo* $x \in X$ *salvo un conjunto de primera categoría.*

2. $A$ *es de primera categoría si y sólo si* $A_x$ *es de primera categoría para todo* $x \in X$ *salvo un conjunto de primera categoría.*

DEMOSTRACIÓN: Veamos en primer lugar que si $A$ es diseminado, entonces $A_x$ es diseminado para "casi todo" $x \in X$.

En efecto, como $\overline{A}$ también es diseminado y $A_x \subset \overline{A}_x$, no perdemos generalidad si suponemos que $A$ es cerrado (con interior vacío). Sea $U = (X \times Y) \setminus A$, que es un abierto denso. Basta probar que $U_x$ es denso para casi todo $x \in X$. Sea $\{V_n\}_{n\in\omega}$ una base de $Y$ formada por abiertos no vacíos. Entonces $U_n = \pi_X[U \cap (X \times V_n)]$ es abierto en $X$, y es denso, pues si $G \subset X$ es un abierto no vacío, $U \cap (G \times V_n) \neq \varnothing$, luego $U_n \neq \varnothing$. El conjunto $E = \bigcap\limits_{n\in\omega} U_n$ tiene complementario de primera categoría, y si $x \in E$ entonces $U_x \cap V_n \neq \varnothing$ para todo $n$, luego $U_x$ es denso.

De aquí se sigue inmediatamente la implicación $\Rightarrow$ de 2). Por otra parte, tenemos que $A = U \mathbin{\triangle} C$, donde $U$ es abierto y $C$ es de primera categoría, pero entonces $A_x = U_x \mathbin{\triangle} C_x$, donde $U_x$ es abierto y $C_x$ es de primera categoría para casi todo $x \in X$, luego $A_x$ tiene la propiedad de Baire para casi todo $x \in X$. Esto prueba 1).

Por último, si $A_x$ es de primera categoría para casi todo $x \in X$ pero $A$ no es de primera categoría, entonces $A = U \mathbin{\triangle} C$, con $U$ abierto y $C$ de primera categoría, y $U$ no puede ser vacío, luego contiene un abierto básico $G \times H \subset U$ no vacío. Como $G$ es de segunda categoría, existe $x \in G$ tal que $A_x$ y $C_x$ son de primera categoría. Entonces

$$H \setminus C_x \subset U_x \setminus C_x \subset U_x \mathbin{\triangle} C_x = A_x,$$

luego el abierto no vacío $H$ es de primera categoría, lo cual es absurdo. ■

El teorema siguiente muestra que la medida y la categoría son en realidad se contradicen necesariamente a la hora de clasificar determinados conjuntos como "grandes" o "pequeños":

**Teorema 6.46** *Si $\mu$ es una medida de Borel $\sigma$-finita y continua en un espacio polaco $X$, se puede descomponer $X = A \cup B$ con $A \cap B = \varnothing$, de modo que $A$ sea un conjunto nulo (respecto a la medida prefijada) y $B$ sea de primera categoría.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $D$ un subconjunto denso numerable en $X$. Como $\mu(D) = 0$ (por ser numerable), tenemos que para cada $n \in \omega \setminus \{0\}$ existe un abierto $A_n$ tal que $D \subset A_n$ y $\mu(A_n) < 1/n$. Como $D \subset A_n$, resulta que $A_n$ es un abierto denso, luego, llamando

$$A = \bigcap_{n\in\omega\setminus\{0\}} A_n \qquad B = X \setminus A = \bigcup_{n\in\omega\setminus\{0\}} X \setminus A_n,$$

tenemos que $B$ es de primera categoría (es unión de cerrados de interior vacío) y $\mu(A) \leq \mu(A_n) \leq 1/n$ para todo $n$, luego $A$ es nulo. ■

El teorema siguiente marca otra diferencia entre la medida y la categoría:

**Teorema 6.47** *Una aplicación $f : X \longrightarrow Y$ entre espacios polacos es medible Baire (es decir, las antiimágenes por $f$ de los abiertos de $Y$ tienen la propiedad de Baire) si y sólo si existe $F \subset X$ de primera categoría tal que la restricción $f|_{X\setminus F} : X \setminus F \longrightarrow Y$ es continua.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $\{U_n\}_{n\in\omega}$ una base numerable de $Y$. Entonces $f^{-1}[U_n]$ tiene la propiedad de Baire, luego existe un abierto $V_n \subset X$ tal que $f^{-1}[U_n] \triangle V_n$ es de primera categoría. Por lo tanto, existe un $F_\sigma$ de interior vacío $F_n$ tal que $f^{-1}[U_n] \triangle V_n \subset F_n$. Así $F = \bigcup\limits_n F_n$ es también un $F_\sigma$ de interior vacío y $f^{-1}[U_n] \setminus F = V_n \setminus F$, luego $f|_{X\setminus F}$ es continua.

Recíprocamente, si $f|_{X\setminus F} : X \setminus F \longrightarrow Y$ es continua y $F$ es de primera categoría, para todo abierto $U \subset Y$ existe un abierto $V \subset X$ de manera que $f|_{X\setminus F}^{-1}[U] = V \setminus F$. Claramente entonces $V \setminus F \subset f^{-1}[U] \subset V \cup F$, luego llamando

$$Q = ((F \setminus V) \cap f^{-1}[U]) \cup ((F \cap V) \setminus f^{-1}[U]) \subset F,$$

tenemos que $f^{-1}[U] = V \triangle Q$, por lo que tiene la propiedad de Baire. ■

Si consideramos en $X$ una medida de Borel continua y unitaria y una aplicación $f : X \longrightarrow Y$ es medible, no es necesariamente cierto que exista un conjunto nulo $N$ tal que $f|_{X\setminus N} : X \setminus N \longrightarrow Y$ sea continua.

En efecto, fijada una base numerable $\{U_n\}_{n\in\omega}$ de $X$, construimos una sucesión $\{C_n\}_{n\in\omega}$ de cerrados de interior vacío disjuntos dos a dos tales que $C_{2n} \cup C_{2n+1} \subset U_n$.

Esto es posible, pues, supuestos definidos los cerrados $C_0, \ldots, C_{2n-1}$, la unión $C^* = C_0 \cup \cdots \cup C_{2n-1}$ es también cerrada de interior vacío, luego el abierto $U_n \setminus C^*$ es no vacío, contiene dos abiertos disjuntos no vacíos y por el teorema 6.46 cada uno de ellos contiene un cerrado de interior vacío de medida positiva, lo que nos da los conjuntos $C_{2n}$ y $C_{2n+1}$ que cumplen lo requerido.

Sea $F = \bigcup_{n\in\omega} C_{2n}$ y consideremos la función característica $f = \chi_F : X \longrightarrow \mathbb{R}$. Como $F$ es medible, se comprueba trivialmente que la antiimagen de todo subconjunto de $\mathbb{R}$ es medible. Sin embargo, si $N \subset X$ es un conjunto nulo, la restricción $f|_{X\setminus N} \longrightarrow \mathbb{R}$ no es continua en ningún punto $x \in X \setminus N$, pues si $f(x) = i$ y $U$ es cualquier abierto en $\mathbb{R}$ tal que $i \in U$, $1 - i \notin U$, entonces $x \in f^{-1}[U]$, pero este conjunto no es un entorno de $x$, ya que en tal caso existiría un $n$ tal que $x \in U_n \setminus N \subset f^{-1}[U]$, es decir, $f[U_n \setminus N] = \{i\}$, pero $C_{2n}$ y $C_{2n+1}$ tienen medida positiva, luego existe $x_i \in C_{2n+j} \setminus N \subset U_n$ y $f(x_j) = j$, para $j = 0, 1$, contradicción. ■

En cambio:

**Teorema 6.48 (Lusin)** *Si $f : X \longrightarrow Y$ es una aplicación entre espacios polacos y en $X$ fijamos una medida de Borel $\sigma$-finita y continua, entonces $f$ es medible (en el sentido de que las antiimágenes de los abiertos de $Y$ son medibles en $X$) si y sólo si para todo $\epsilon > 0$ existe un conjunto medible $A \subset X$ tal que $\mu(A) < \epsilon$ y $f|_{X\setminus A} : X \setminus A \longrightarrow Y$ es continua.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $\{U_n\}_{n\in\omega}$ una base numerable de $Y$. Si $f$ es medible, en la página 201 hemos visto que existen abiertos $V_n$ y cerrados $F_n$ tales que

$$F_n \subset f^{-1}[U_n] \subset V_n, \qquad \mu(V_n \setminus F_n) < \epsilon/2^{n+1}.$$

Entonces $A = \bigcup_{n\in\omega} (V_n \setminus F_n)$ cumple que $\mu(A) < \epsilon$ y

$$f|_{X\setminus A}^{-1}[U_n] = f^{-1}[U_n] \setminus A = F_n \setminus A = V_n \setminus A,$$

luego la antiimagen es abierta y cerrada en $X \setminus A$, por lo que la restricción es continua.

Recíprocamente, si $f$ cumple la propiedad indicada, sea $A_n \subset X$ medible con $\mu(A_n) < 1/n$ y de modo que $f_n = f|_{X\setminus A_n}$ sea continua. Sea $A = \bigcap_n A_n$, que es un conjunto nulo. Si $U \subset Y$ es abierto, existe un abierto $V_n \subset X$ tal que $f_n^{-1}[U] = V_n \setminus A_n$. Entonces

$$f^{-1}[U] \setminus A = \bigcup_n (f^{-1}[U] \setminus A_n) = \bigcup_n f_n^{-1}[U],$$

luego

$$f^{-1}[U] = (f^{-1}[U] \cap E) \cup \bigcup_n (V_n \setminus A_n)$$

es un conjunto medible (porque el primer término de la derecha es nulo). ■

# Capítulo VII

# Compactificaciones

Observemos que el teorema 5.64 implica que los espacios completamente regulares son exactamente los espacios que pueden sumergirse densamente en un espacio de Hausdorff compacto, lo que nos lleva a un concepto de "compactificación" análogo al concepto que ya conocemos de "compleción" de un espacio uniforme, pero con la diferencia de que las compactificaciones no son únicas en general. En algunos resultados necesitaremos el concepto de pseudocompacidad estudiado en la sección 4.6. 127

En este capítulo usaremos el axioma de elección sin señalarlo explícitamente.

## 7.1 Comparación de compactificaciones

**Definición 7.1** Una *compactificación* de un espacio topológico $X$ es un par $(K, i)$, donde $K$ es un espacio de Hausdorff compacto e $i : X \longrightarrow K$ es un homeomorfismo en su imagen tal que $K = \overline{i[X]}$. Dos compactificaciones $(K, i)$ y $(K', i')$ de un mismo espacio $X$ son *equivalentes* si existe un homeomorfismo que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "f"] & K' \\ X \arrow[u, "i"] \arrow[ur, "i'"'] & \end{tikzcd}$$

El teorema 5.64 implica que un espacio topológico $X$ admite una compactificación si y sólo si es completamente regular (pues si es completamente regular, lo sumergimos en un cubo de Tychonoff y tomamos la clausura de su imagen, con lo que obtenemos una compactificación).

También es obvio que si $X$ es compacto, toda compactificación de $X$ es un homeomorfismo $i : X \longrightarrow K$ y es equivalente a la identidad $i : X \longrightarrow X$.

Como ya hemos señalado, en general un espacio completamente regular admite muchas compactificaciones no equivalentes, pero podemos establecer una relación de orden entre ellas:

Si $(K,i)$ y $(K',i')$ son dos compactificaciones de un mismo espacio $X$, diremos que $(K',i') \leq (K,i)$ si existe una aplicación continua y suprayectiva que haga conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "f"] & K' \\ X \arrow[u, "i"] \arrow[ur, "i'"'] & \end{tikzcd}$$

Es obvio que $(K,i) \leq (K,i)$, así como que si $(K,i) \leq (K',i') \leq (K'',i'')$ entonces $(K,i) \leq (K'',i'')$. Además:

**Teorema 7.2** *Dos compactificaciones $(K,i)$, $(K',i')$ de un espacio $X$ son equivalentes si y sólo si $(K,i) \leq (K',i')$ y $(K',i') \leq (K,i)$.*

Demostración: Una implicación es inmediata. Si existen $f : K \longrightarrow K'$ y $f' : K' \longrightarrow K$ continuas y suprayectivas tales que $i \circ f = i'$, $i' \circ f' = i$, entonces $i \circ f \circ f' = i' \circ f' = i$, luego $f \circ f'$ es la identidad en $i[X]$, que es denso en $K$, luego 1.37 nos da que $f \circ f'$ es la identidad, e igualmente $f' \circ f$ es la identidad, luego $f$ y $f'$ son biyectivas y $f' = f^{-1}$, luego $f$ es un homeomorfismo y las compactificaciones son equivalentes. ■

A partir de aquí identificaremos a cada espacio $X$ con su imagen $i[X]$ en cualquiera de sus compactificaciones, de modo que consideraremos que $X \subset K$ y que $i$ es la inclusión. El espacio $K \setminus X$ se llama *resto* de la compactificación.

Por ejemplo, en estos términos, dos compactificaciones $K$ y $K'$ de un espacio $X$ son equivalentes si existe un homeomorfismo $f : K \longrightarrow K'$ que restringido a $X$ es la identidad, y $K' \leq K$ si existe una aplicación continua $f : K \longrightarrow K'$ que restringida a $X$ es la identidad (la aplicación será necesariamente suprayectiva, dado que $f[K]$ tiene que ser cerrado en $K'$ y a la vez denso, porque contiene a $X$).

En estas circunstancias, es útil observar que $f[K \setminus X] = K' \setminus X$, es decir, que cualquier aplicación entre compactificaciones hace corresponder los restos. Esto se deduce del teorema siguiente:

**Teorema 7.3** *Sea $f : X \longrightarrow Y$ una aplicación continua, donde $X$ es un espacio de Hausdorff y sea $D \subset X$ denso tal que $f|_D : D \longrightarrow f[D]$ sea un homeomorfismo. Entonces $f[X \setminus D] \cap f[D] = \varnothing$.*

Demostración: Supongamos que $x \in X \setminus D$ cumple que $f(x) \in f[D]$. No perdemos generalidad si suponemos que $X = D \cup \{x\}$ y que $Y = f[D]$. Sea $f(x) = f(d)$, con $d \in D$. Sean $x \in U$, $d \in V$ entornos disjuntos. Entonces $f[D \setminus V] = f|_D[D \setminus V]$ es cerrado en $Y = f[D]$, luego $f^{-1}[f[D \setminus V]] = D \setminus V$ es cerrado en $X$, luego $X = \overline{D} = \overline{(D \setminus V) \cup V} = (D \setminus V) \cup \overline{V}$, pero $x \notin \overline{V}$, luego $x \notin X$, contradicción. ■

Como consecuencia:

**Teorema 7.4** *Si $f : K \longrightarrow K'$ es una aplicación continua entre dos compactificaciones de $X$ tal que $f|_X$ es la identidad, entonces $f[K \setminus X] = K' \setminus X$.*

DEMOSTRACIÓN: Claramente $f$ es suprayectiva, pues su imagen es cerrada (por compacidad) y densa (porque contiene a $X$), y el teorema anterior nos da que $f[K \setminus X] \subset K' \setminus X$, luego para que $f$ sea suprayectiva tiene que darse la igualdad. ■

En 4.22 introdujimos la compactificación de Alexandroff $X^\infty$, que está definida para todo espacio localmente compacto no compacto $X$ (en realidad está definida para cualquier espacio topológico $X$, pero sólo es una compactificación de $X$ en el sentido que hemos establecido aquí cuando éste es localmente compacto no compacto) y cuyo resto se reduce a un punto. He aquí algunas propiedades generales de las compactificaciones de los espacios localmente compactos:

**Teorema 7.5** *Si $X$ es un espacio completamente regular, las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

1. *$X$ es localmente compacto.*
2. *$X$ es abierto en todas sus compactificaciones.*
3. *$X$ es abierto en alguna de sus compactificaciones.*

DEMOSTRACIÓN: 1) $\Rightarrow$ 2) Si $X$ es localmente compacto y $K$ es una compactificación de $X$, el teorema 4.26 nos da que $X = U \cap C$, donde $U$ es abierto y $C$ es cerrado en $K$, pero como $X$ es denso en $K$, necesariamente $C = K$, luego $X = U$ es abierto en $K$.

2) $\Rightarrow$ 3) es trivial y 3) $\Rightarrow$ 1) se debe a que todo abierto en un espacio de Hausdorff compacto es localmente compacto. ■

En particular, vemos que sólo los espacios localmente compactos pueden admitir compactificaciones cuyo resto se reduzca a un punto, o incluso a un número finito de puntos, pues los subconjuntos finitos de los espacios de Hausdorff son finitos. Notemos que, por ejemplo, $[0, 1]$ es una compactificación de $]0, 1[$ cuyo resto consta de dos puntos.

Veamos ahora que $X^\infty$ es la menor compactificación de un espacio localmente compacto respecto de la comparación de compactificaciones que hemos introducido:

**Teorema 7.6** *Si $K$ es una compactificación de un espacio localmente compacto $X$, entonces $X^\infty \leq K$.*

DEMOSTRACIÓN: Basta observar que la aplicación $f : K \longrightarrow X^\infty$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in X, \\ \infty & \text{si } x \in K \setminus X \end{cases}$$

es continua, pues si $U$ es un abierto en $X$, entonces, o bien $U \subset X$ es abierto en $X$, luego $f^{-1}[U] = U$ también es abierto en $K$, pues $X$ es abierto en $K$ por el teorema anterior, o bien $\infty \in U$, con lo que $X \setminus U$ es compacto, luego $K \setminus f^{-1}[U] = X \setminus U$ es compacto, luego $f^{-1}[U]$ también es abierto en $K$. ■

Más aún:

**Teorema 7.7** *Si un espacio topológico no compacto $X$ tiene una compactificación mínima $K_0$, en el sentido de que cualquier otra compactificación cumple $K_0 \leq K$, entonces $X$ es localmente compacto y $K_0$ es equivalente a $X^\infty$.*

DEMOSTRACIÓN: Vamos a probar que $K_0 \setminus X$ consta de un único punto, lo cual ya implica que $X$ es localmente compacto y, como $X^\infty$ y $K_0$ son ambas compactificaciones mínimas, tienen que ser equivalentes.

Supongamos que existen dos puntos distintos $p_1$, $p_2 \in K_0 \setminus X$. Entonces $X_1 = K_0 \setminus \{p_1, p_2\}$ es un espacio localmente compacto y la compactificación de Alexandroff $X_1^\infty$ es también una compactificación de $X$. Por hipótesis existe $f : X_1^\infty \longrightarrow K_0$ continua y suprayectiva que restringida a $X$ es la identidad. Como $X$ es denso en $X_1$, también $f|_{X_1}$ es la identidad, luego, considerada como aplicación entre compactificaciones de $X_1$, el teorema 7.4 nos permite concluir que $f[\{\infty\}] = \{p_1, p_2\}$, lo cual es absurdo. ■

Aunque no todo espacio completamente regular admite una compactificación mínima, ahora vamos a probar que sí que admite una compactificación máxima. Para ello probaremos un resultado general:

**Teorema 7.8** *Sea $X$ un espacio topológico, sea $D \subset X$ un subconjunto denso y sea $f : D \longrightarrow K$ una aplicación continua en un espacio de Hausdorff compacto $K$. Las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

1. *$f$ admite una extensión continua $\bar{f} : X \longrightarrow K$.*
2. *Si $A$, $B \subset K$ son cerrados disjuntos, entonces $\overline{f^{-1}[A]} \cap \overline{f^{-1}[B]} = \varnothing$.*
3. *Si $A$, $B \subset K$ son ceros disjuntos, entonces $\overline{f^{-1}[A]} \cap \overline{f^{-1}[B]} = \varnothing$.*

DEMOSTRACIÓN: 1) $\Rightarrow$ 2) Si $\bar{f} : X \longrightarrow K$ es continua y extiende a $f$, entonces $\overline{f^{-1}[A]} \subset \bar{f}^{-1}[A]$, $\overline{f^{-1}[B]} \subset \bar{f}^{-1}[B]$, y claramente $\bar{f}^{-1}[A] \cap \bar{f}^{-1}[B] = \varnothing$.

2) $\Rightarrow$ 3) es trivial. Para probar 3) $\Rightarrow$ 1) aplicaremos el teorema 1.59. Para cada $x \in X$ consideramos la base de filtro

$$\mathcal{B}_x = \{D \cap U \mid U \text{ es un entorno de } x\}$$

convergente a $x$. Como $K$ es compacto, el filtro $f[\mathcal{B}_x]$ tiene un punto adherente $y \in \bigcap_{B \in f[\mathcal{B}_x]} \overline{B}$. Vamos a probar que es único.

Supongamos que la intersección contiene dos puntos $y_1 \neq y_2$. Como $K$ es normal, existen abiertos $y_i \in V_i$ tales que $\overline{V}_1 \cap \overline{V}_2 = \varnothing$ y, más aún, existen ceros disjuntos $Z_i$ tales que $\overline{V}_i \subset Z_i$. Por 2), $\overline{f^{-1}[Z_1]} \cap \overline{f^{-1}[Z_2]} = \varnothing$, luego $x$ no está en al menos uno de estos dos cerrados. Supongamos sin pérdida de generalidad que $x \notin \overline{f^{-1}[Z_1]}$. Entonces $U = X \setminus \overline{f^{-1}[Z_1]}$ es un entorno de $x$, luego existe un $A \in \mathcal{B}_x$ tal que $A \subset U$, luego $f[A] \in f[\mathcal{B}_x]$, luego $y_1 \in \overline{f[A]}$ y, como $Z_1$ es un entorno de $y_1$, tiene que ser $Z_1 \cap f[A] \neq \varnothing$, luego $f^{-1}[Z_1] \cap A \neq \varnothing$, luego $f^{-1}[Z_1] \cap U \neq \varnothing$, contradicción.

Así pues, existe una única función $\bar{f} : X \longrightarrow K$ tal que para todo $x \in X$ se cumple que $f[\mathcal{B}_x]$ converge a $\bar{f}(x)$. Como $f$ es continua, es claro que $\bar{f}$ extiende a $f$, y el teorema 1.59 implica que $\bar{f}$ es continua. ■

Como primera aplicación obtenemos un criterio sobre cuándo una compactificación es mayor que otra:

**Teorema 7.9** *Si $K$ y $K'$ son dos compactificaciones de un espacio $X$, entonces $K' \leq K$ si y sólo si cuando dos cerrados (o ceros) en $X$ tienen clausuras disjuntas en $K'$, también tienen clausuras disjuntas en $K$.*

*En particular, $K$ y $K'$ son equivalentes si y sólo si cumplen que dos cerrados (o ceros) en $X$ tienen clausuras disjuntas en $K$ si y sólo si tienen clausuras disjuntas en $K'$.*

Demostración: Se cumple que $K' \leq K$ si y sólo si la inclusión $i : X \longrightarrow K'$ admite una extensión continua a $K$. Por el teorema anterior, esto equivale a que si $A$ y $B$ son cerrados (o ceros) disjuntos en $K'$, entonces $\overline{A \cap X} \cap \overline{B \cap X} = \varnothing$ en $K$.

Ahora bien, si se cumple la condición del enunciado y $A$, $B$ son cerrados (o ceros) disjuntos en $K'$, es claro que $A \cap X$ y $B \cap X$ son cerrados (o ceros) disjuntos en $X$, luego por hipótesis $\overline{A \cap X} \cap \overline{B \cap X} = \varnothing$ en $K$ y se cumple que $K' \leq K$.

Recíprocamente, si $K' \leq K$, existe $f : K \longrightarrow K'$ continua suprayectiva que extiende a la identidad en $X$. Si $A$, $B \subset X$ son cerrados con clausuras disjuntas en $K'$, entonces $f^{-1}[\overline{A}]$ y $f^{-1}[\overline{B}]$ son cerrados disjuntos en $K$ que contienen, respectivamente, a las clausuras de $A$ y $B$, luego éstas son disjuntas. ■

La prueba del teorema 5.63 nos da una compactificación de un espacio completamente regular $X$ a partir de una base cualquiera formada por coceros. Vamos a estudiar con más detalle la más simple de todas ellas:

**Teorema 7.10** *Todo espacio completamente regular $X$ admite una compactificación $K$ en la que $X$ está $C^*$-sumergido, es decir, toda función continua y acotada $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ se extiende a una función continua (y acotada) $\bar{f} : K \longrightarrow \mathbb{R}$.*

Demostración: Sea $J = C(X, [0, 1])$ el conjunto de todas las funciones continuas $f : X \longrightarrow [0, 1]$ y consideramos la base $\{X \setminus Z(f)\}_{f \in J}$, que consta de todos los coceros en $X$ (repetidos). La prueba del teorema 5.63 muestra que la aplicación $\phi : X \longrightarrow [0, 1]^J$ dada por $\phi(x) = \{f(x)\}_{f \in J}$ es un homeomorfismo en su imagen, luego $K = \overline{\phi[X]}$ es una compactificación de $X$. Vamos a probar que cumple lo requerido.

Consideremos en primer lugar una función continua $f : X \longrightarrow [0, 1]$. Entonces la proyección $p_f : [0, 1]^J \longrightarrow [0, 1]$ cumple que $\phi \circ p_f = f$, luego, al identificar $X$ con $\phi[X]$ se cumple que $p_f|_X = f$, luego $p_f|_K : K \longrightarrow [0,1]$ es una extensión continua de $f$ a $K$.

Si, en general, $f : X \longrightarrow [a,b]$, consideramos cualquier homeomorfismo $h : [a,b] \longrightarrow [0,1]$, de modo que $f \circ h : X \longrightarrow [0,1]$ tiene una extensión continua $\bar{f} : K \longrightarrow [0,1]$, y entonces $\bar{f} \circ h^{-1}$ es una extensión continua de $f$. ■

**Definición 7.11** Si $X$ es un espacio completamente regular, se llama *compactificación de Stone-Čech* de $X$ a la compactificación $\beta X$ construida en la prueba del teorema anterior, es decir, la clausura de $\phi[X]$ en $[0,1]^J$, donde $J = C(X,[0,1])$ y $\phi : X \longrightarrow [0,1]^J$ es la aplicación dada por $\phi(x) = \{f(x)\}_{f\in J}$.

**Teorema 7.12** *Sea $X$ un espacio topológico completamente regular. Entonces la compactificación de Stone-Čech $\beta X$ es, salvo equivalencia, la única compactificación de $X$ que cumple cualquiera de las propiedades siguientes:*

1. *$X$ está $C^*$-sumergido en $\beta X$.*
2. *Ceros disjuntos en $X$ tienen clausuras disjuntas en $\beta X$.*
3. *Toda función continua $f : X \longrightarrow K$, donde $K$ es un espacio de Hausdorff compacto, admite una única extensión continua $\bar{f} : \beta X \longrightarrow K$.*
4. *$\beta X$ es mayor o igual que cualquier otra compactificación de $X$.*

Demostración: El teorema anterior prueba que $\beta X$ cumple 1). Por otra parte, toda compactificación $K$ de $X$ que cumple 1), cumple también 2), pues si $Z_0$,$Z_1$ son dos ceros disjuntos en $X$, entonces, según el teorema 5.32, están completamente separados, es decir, que existe una función $f : X \longrightarrow [0,1]$ continua tal que $Z_0 \subset f^{-1}[\{0\}]$, $Z_1 \subset f^{-1}[\{1\}]$. Podemos tomar una extensión continua $\bar{f} : K \longrightarrow [0,1]$, y es claro entonces que $\overline{Z}_0 \subset \bar{f}^{-1}[\{0\}]$, $\overline{Z}_1 \subset \bar{f}^{-1}[\{1\}]$, por lo que $\overline{Z}_0 \cap \overline{Z}_1 = \varnothing$.

El teorema 7.9 implica que toda compactificación $K$ de $X$ que cumple 2), también cumple 3), y 3) implica trivialmente 4). Además, dos compactificaciones que cumplan 4) son obviamente equivalentes, luego lo mismo vale para dos compactificaciones que cumplan cualquiera de las propiedades precedentes. ■

El apartado 2) del teorema anterior implica lo siguiente:

**Teorema 7.13** *Si $X$ un espacio completamente regular y $C \subset X$ es abierto-cerrado, entonces $\overline{C}$ es abierto-cerrado en $\beta X$.*

Demostración: Si $C \subset X$ es abierto cerrado, entonces $C$ y $X \setminus C$ son ceros disjuntos, luego $\overline{C} \cap \overline{X \setminus C} = \varnothing$, y $\overline{C} \cup \overline{X \setminus C} = \overline{X} = \beta X$. Por lo tanto, $\overline{X \setminus C} = \beta X \setminus \overline{C}$, lo que prueba que $\overline{C}$ es abierto cerrado en $\beta X$. ■

Usamos este hecho para estudiar la desconexión de $\beta X$:

**Teorema 7.14** *Si $X$ es un espacio completamente regular, entonces:*

1. *$X$ es conexo si y sólo si lo es $\beta X$.*
2. *$X$ es fuertemente cerodimensional si y sólo si lo es $\beta X$.*
3. *$X$ es extremadamente disconexo si y sólo si lo es $\beta X$.*

DEMOSTRACIÓN: 1) Si $X$ es conexo, $\beta X$ lo es por el teorema 3.6. Si $X$ es disconexo, a partir de una descomposición de $X$ en unión de dos abiertos cerrados disjuntos no vacíos obtenemos una función continua y suprayectiva $f : X \longrightarrow 2$, que se extiende a una función en $\beta X$ con las mismas características, luego $\beta X$ es disconexo.

2) Supongamos que $X$ es fuertemente cerodimensional y sean $p \neq q$ dos puntos de $\beta X$. Podemos tomar ceros disjuntos $Z_1$, $Z_2$ en $\beta X$ tales que $p \in Z_1$, $q \in Z_2$. Sea $f : \beta X \longrightarrow [0, 1]$ una función continua tal que $f(p) = 0$, $f(q) = 1$. Sean $A_0 = f^{-1}\big[[0, 1/3[\big]$, $A_1 = f^{-1}\big[]2/3, 1]\big]$. Entonces $A_i \cap X$ son abiertos completamente separados en $X$, luego por hipótesis existe un abierto cerrado $C \subset X$ tal que $A_0 \cap X \subset C$, $A_1 \cap X \subset X \setminus C$. Por la observación anterior al enunciado, $\overline{C}$ es abierto cerrado en $\beta X$ y $\overline{A}_0 = \overline{A_0 \cap X} \subset \overline{C}$, luego $p \in \overline{C}$, e igualmente $q \in \beta X \setminus \overline{C}$. Esto prueba que las cuasicomponentes de $\beta X$ son triviales, lo cual equivale a que $\beta X$ es totalmente disconexo por lo 4.12 y a su vez a que sea cerodimensional por 4.29 y fuertemente cerodimensional por 5.68.

Recíprocamente, si $\beta X$ es fuertemente cerodimensional, $X$ también lo es por el teorema 5.71.

3) Supongamos que $X$ es extremadamente disconexo y sea $U$ un abierto en $\beta X$. Entonces $U \cap X$ es abierto en $X$, luego su clausura en $X$ es abierta-cerrada. Dicha clausura es $C = X \cap \overline{U \cap X}$. Como $X$ es denso en $\beta X$, el teorema 1.22 nos da que

$$\overline{U} = \overline{U \cap X} \subset \overline{\overline{U} \cap X} = \overline{\overline{U \cap X} \cap X} \subset \overline{U \cap X} = \overline{U},$$

luego $\overline{U} = \overline{C}$, que es abierto cerrado en $\beta X$ por 7.13.

Recíprocamente, si $\beta X$ es extremadamente disconexo y $U$ es un abierto en $X$, sea $W \subset \beta X$ abierto tal que $W \cap X = U$. Entonces, por 1.22 tenemos que

$$\overline{U} = \overline{W \cap X} = \overline{W},$$

luego $\overline{U}$ es abierto en $\beta X$ y la clausura de $U$ en $X$, que es $\overline{U} \cap X$, también lo es. ■

**Nota** En virtud del teorema 5.68, la segunda parte del teorema anterior puede enunciarse también como que $\beta X$ es cerodimensional (o totalmente disconexo) si y sólo si $X$ es fuertemente cerodimensional. Por lo tanto, el ejemplo A.39 de espacio cerodimensional que no es fuertemente cerodimensional es también un ejemplo de espacio cerodimensional $X$ tal que $\beta X$ no es cerodimensional. ■

El teorema 3.30 implica ahora que $\beta\omega$ no tiene sucesiones convergentes no triviales.

Observemos que ya habíamos construido de otro modo la compactificación de Stone-Čech:

**Teorema 7.15** *Si $X$ es un espacio completamente regular, su compactificación de Stone-Čech es la compleción del espacio uniforme $(X, \mathcal{C}^*)$.*

Demostración: En la página 163 hemos probado que la compleción de $(X, \mathcal{C}^*)$ es compacta y que toda función de $C^*(X)$ es uniformemente continua, luego se extiende a la compleción, es decir, que $X$ está $C^*$-sumergido en ella, luego se trata de $\beta X$. ■

Para terminar señalamos que el espacio $\omega_1$ de todos los ordinales numerables es un ejemplo en el que la compactificación de Stone-Čech $\beta\omega_1 = \omega_1 + 1$ coincide con la compactificación de Alexandroff (véase el ejemplo A.30).

## 7.2 Compactificaciones de tipo Wallman

El teorema 7.15 nos da una representación de la compactificación de Stone-Čech de un espacio $X$ como el espacio formado por todos los filtros de Cauchy minimales respecto de la uniformidad $\mathcal{C}^*$. Vamos a ver que existe una representación más sencilla, que es una generalización debida a Frink (1964) de una construcción de Wallman (1938), basada a su vez en los trabajos de Stone sobre álgebras de Boole.

A Frink se debe la definición general de "base normal" que presentamos a continuación:

**Definición 7.16** Si $X$ es un espacio topológico, una *base normal de cerrados* en $X$ es una familia $\mathcal{Z}$ de cerrados en $X$ que cumpla las propiedades siguientes:

1. $\mathcal{Z}$ la unión y la intersección de dos elementos de $\mathcal{Z}$ está en $\mathcal{Z}$.
2. Si $C$ es cerrado en $X$ y $x \in X \setminus C$, existe $Z \in \mathcal{Z}$ tal que $x \in Z$ y $Z \cap C = \varnothing$.
3. Todo cerrado de $X$ es intersección de elementos de $\mathcal{Z}$.
4. Si $Z_1$, $Z_2 \in \mathcal{Z}$ son disjuntos, existen $Z_1'$, $Z_2' \in \mathcal{Z}$ tales que $U_i = X \setminus Z_i'$ son abiertos disjuntos y $Z_i \subset U_i$.

Wallman trabajó concretamente con la clase $\mathcal{Z}$ de todos los cerrados de un espacio topológico $T_1$, que cumplen trivialmente las propiedades de 1) a 3), mientras que 4) equivale a que el espacio $X$ sea normal. En cambio, si tomamos como $\mathcal{Z}$ la clase de todos los ceros de $X$, entonces $\mathcal{Z}$ es una base normal siempre que $X$ es completamente regular.

**Nota** Toda base normal $\mathcal{Z}$ en un espacio topológico $T_1$ cumple que $\varnothing$, $X \in \mathcal{Z}$. En efecto, $X \in \mathcal{Z}$ por la propiedad 3) y, si $X$ es finito, entonces $\varnothing \in \mathcal{Z}$ por las propiedades 1) y 3). Si $X$ es infinito, en particular contiene dos puntos $x \neq y$. Entonces, la propiedad 2 aplicada a $y \in X \setminus \{x\}$ nos da un $Z \in \mathcal{Z}$ tal que $y \in Z$, $x \notin Z$, y aplicada ahora a $x \in X \setminus Z$ nos da un $Z' \in \mathcal{Z}$ tal que $x \in Z'$ y $Z \cap Z' = \varnothing$. Así pues, $\mathcal{Z}$ contiene dos cerrados disjuntos y, por la propiedad 1), llegamos de nuevo a que $\varnothing \in \mathcal{Z}$. ■

Si $X$ es un conjunto y $\mathcal{Z}$ es cualquier familia no vacía de subconjuntos de $X$ cerrada para uniones e intersecciones finitas y tal que $\varnothing$, $X \in \mathcal{Z}$, definimos un $\mathcal{Z}$-*filtro* en $X$ como un conjunto $\mathcal{F} \subset \mathcal{Z}$ que cumpla las propiedades siguientes:[1]

1. $X \in \mathcal{F}$, $\varnothing \notin \mathcal{F}$,
2. Si $Z_1$, $Z_2 \in \mathcal{F}$, entonces $Z_1 \cap Z_2 \in \mathcal{F}$,
3. Si $Z \in \mathcal{F}$, $Z' \in \mathcal{Z}$, $Z \subset Z'$, entonces $Z' \in \mathcal{F}$.

Diremos que $\mathcal{F}$ es un $\mathcal{Z}$-*ultrafiltro* si no está contenido estrictamente en ningún otro $\mathcal{Z}$-filtro.

Notemos que si $\mathcal{Z} = \mathcal{P}X$, entonces los $\mathcal{Z}$-filtros son simplemente los filtros en $X$ en el sentido de la definición 1.50.

En general, los $\mathcal{Z}$-filtros son bases de filtro, luego, si $X$ es un espacio topológico, tenemos definida la convergencia de $\mathcal{Z}$-filtros. Toda familia de elementos de $\mathcal{Z}$ con la propiedad de la intersección finita genera un $\mathcal{Z}$-filtro.

Una simple aplicación del lema de Zorn al conjunto de todos los $\mathcal{Z}$-filtros que contienen a uno dado nos da la existencia de $\mathcal{Z}$-ultrafiltros:

**Teorema 7.17** *Si $\mathcal{Z}$ es una familia de subconjuntos de $X$ cerrada para uniones e intersecciones finitas con $\varnothing$, $X \in \mathcal{Z}$, todo $\mathcal{Z}$-filtro en $X$ está contenido en un $\mathcal{Z}$-ultrafiltro.*

No podemos decir que un $\mathcal{Z}$-ultrafiltro es un $\mathcal{Z}$-filtro $\mathcal{F}$ tal que, para todo $Z \in \mathcal{Z}$, se cumple que $Z \in \mathcal{F}$ o $X \setminus Z \in \mathcal{F}$ porque no es necesariamente cierto que $X \setminus Z \in \mathcal{Z}$, por lo que no tiene sentido pedir que pertenezca a $\mathcal{F}$. No obstante se cumple algo muy similar:

**Teorema 7.18** *Si $\mathcal{Z}$ es una familia de subconjuntos de $X$ cerrada para uniones e intersecciones finitas con $\varnothing$, $X \in \mathcal{Z}$, un $\mathcal{Z}$-filtro $\mathcal{F}$ en $X$ es un $\mathcal{Z}$-ultrafiltro si y sólo si para todo $Z \in \mathcal{Z}$ tal que $Z \notin \mathcal{F}$, existe un $Z' \in \mathcal{F}$ tal que $Z \cap Z' = \varnothing$.*

Demostración: Si $\mathcal{F}$ es un $\mathcal{Z}$-ultrafiltro en $X$ y $Z \notin \mathcal{F}$, entonces el conjunto $\{Z' \cap Z \mid Z' \in \mathcal{F}\}$ no puede tener la propiedad de la intersección finita, pues en tal caso generaría un $\mathcal{Z}$-filtro que contendría a $\mathcal{F}$ y a $Z$, luego sería $\mathcal{F}$ y $Z \in \mathcal{F}$. Esto significa que existe un $Z' \in \mathcal{F}$ tal que $Z' \cap Z = \varnothing$.

Recíprocamente, si $\mathcal{F}$ tiene esta propiedad y existe otro $\mathcal{Z}$-filtro $\mathcal{F} \subsetneq \mathcal{F}'$, tomamos $Z' \in \mathcal{F}' \setminus \mathcal{F}$, con lo que existe $Z \in \mathcal{F}$ tal que $Z \cap Z' = \varnothing$, pero esto es absurdo, porque $Z, Z' \in \mathcal{F}'$. ■

En particular:

[1]Notemos que los $\mathcal{Z}$-filtros son simplemente los filtros en el sentido de [TC 7.40] en el conjunto $\mathbb{P} = \mathcal{Z} \setminus \{\varnothing\}$, considerado como conjunto parcialmente ordenado con la inclusión.

**Teorema 7.19** *Si $\mathcal{Z}$ es una familia de subconjuntos de $X$ cerrada para uniones e intersecciones finitas con $\varnothing$, $X \in \mathcal{Z}$, $\mathcal{F}$ es un $\mathcal{Z}$-ultrafiltro en $X$ y $Z_1$, $Z_2 \in \mathcal{Z}$, entonces $Z_1 \cup Z_2 \in \mathcal{F}$ si y sólo si $Z_1 \in \mathcal{F}$ o bien $Z_2 \in \mathcal{F}$.*

DEMOSTRACIÓN: Si $Z_1, Z_2 \notin \mathcal{F}$, el teorema anterior nos da $Z_1^*$, $Z_2^* \in \mathcal{F}$ tales que $Z_i^* \cap Z_i = \varnothing$, pero entonces $Z_1^* \cap Z_2^* \in \mathcal{F}$, y es disjunto de $Z_1 \cup Z_2$, luego $Z_1 \cup Z_2 \notin \mathcal{F}$. La otra implicación es consecuencia inmediata de la definición de $\mathcal{Z}$-filtro. ■

**Definición 7.20** Sea $X$ un conjunto y $\mathcal{Z}$ una familia de subconjuntos de $X$ cerrada para uniones e intersecciones finitas con $\varnothing$, $X \in \mathcal{Z}$. Llamaremos[2] $\omega_{\mathcal{Z}}(X)$ al conjunto de todos los $\mathcal{Z}$-ultrafiltros en $X$. Para cada $Z \in \mathcal{Z}$, definimos

$$\overline{Z} = \{p \in \omega X \mid Z \in p\},$$

Observemos que se cumplen las relaciones siguientes:

1. $\overline{\varnothing} = \varnothing$, $\overline{X} = \omega X$.

   Pues $\varnothing$ no está en ningún $\mathcal{Z}$-ultrafiltro y $X$ está en todos.

2. $\overline{Z_1 \cap Z_2} = \overline{Z}_1 \cap \overline{Z}_2$.

   En efecto, $p \in \overline{Z}_1 \cap \overline{Z}_2$ si y sólo si $Z_1 \in p$ y $Z_2 \in p$, si y sólo si $Z_1 \cap Z_2 \in p$, si y sólo si $p \in \overline{Z_1 \cap Z_2}$.

3. $\overline{Z_1 \cup Z_2} = \overline{Z}_1 \cup \overline{Z}_2$.

   La prueba es análoga a la anterior, pero usando el teorema 7.19.

Ahora observamos que los conjuntos $\omega X \setminus \overline{Z}$ son la base de una topología en $\omega X$. En efecto, tenemos que $\overline{X} = \omega X$ y, por otra parte, la propiedad 3) precedente equivale a que la intersección de abiertos básicos es un abierto básico.

Vamos a probar que si $X$ es un espacio topológico $T_1$ y $\mathcal{Z}$ es una base normal en $X$, entonces $\omega X$ es una compactificación de $X$. No obstante, iremos introduciendo gradualmente las condiciones de base normal. El primer resultado es válido en el contexto general que estamos consdierando hasta ahora, en el que ni siquiera suponemos una topología en $X$:

1. *$\omega X$ es compacto.*

   Basta probar que todo cubrimiento abierto de $\omega X$ formado por abiertos básicos admite un subcubrimiento finito. Esto es equivalente a que toda familia de complementarios de abiertos básicos con la propiedad de la intersección finita tenga intersección no vacía. Sea, pues $\Sigma \subset \mathcal{Z}$ tal que $\{\overline{Z} \mid Z \in \Sigma\}$ tenga la propiedad de la intersección finita. Entonces $\Sigma$ tiene también la propiedad de la intersección finita, luego genera un $\mathcal{Z}$-filtro, el cual está a su vez contenido en un $\mathcal{Z}$-ultrafiltro $p \in \omega X$. Como cada $Z \in \Sigma$ cumple $Z \in p$, tenemos que $p \in \overline{Z}$, es decir, que $p \in \bigcap\{\overline{Z} \mid Z \in \Sigma\}$.

[2] Omitiremos el subíndice $\mathcal{Z}$ cuando este conjunto esté fijado de antemano y no haya ambigüedad posible.

2. *$\omega X$ es $T_1$.*

   En efecto, dados $p \neq q$ en $\omega X$, como son dos $\mathcal{Z}$-ultrafiltros, no puede ser que $q \subset p$, luego existe un $Z \in q$ tal que $Z \notin p$, luego $p \in \omega X \setminus \overline{Z}$, $q \notin \omega X \setminus \overline{Z}$.

   Ahora suponemos que $X$ es un espacio topológico $T_1$ y que $\mathcal{Z}$ es una familia de cerrados en $X$ que cumple las dos primeras propiedades de la definición de base normal.

3. *Para cada $x \in X$, el conjunto $F_x = \{Z \in \mathcal{Z} \mid x \in Z\}$ es un $\mathcal{Z}$-ultrafiltro en $X$. Además $\bigcap F_x = \{x\}$.*

   Claramente $F_x$ es un $\mathcal{Z}$-filtro y, si $F_z \subset F'$ es un $\mathcal{Z}$-filtro mayor, tomamos $Z' \in F' \setminus F_x$, con lo que $x \in X \setminus Z'$. Por la propiedad 2) de la definición de base normal, existe $Z \in \mathcal{Z}$ tal que $x \in \mathcal{Z}$ y $Z \cap Z' = \varnothing$, pero entonces $Z \in F_x \subset F'$ y $F'$ tiene dos elementos disjuntos, contradicción.

   Si $y \in X$ es distinto de $x$, aplicamos la propiedad 2) al cerrado $\{y\}$, con lo que existe un $Z \in F_x$ tal que $y \notin Z$, luego $y \notin \bigcap F_x$ y tenemos la segunda afirmación.

   Así tenemos una aplicación inyectiva $i : X \longrightarrow \omega X$ dada por $i(x) = F_x$.

4. *Si $Z \in \mathcal{Z}$, entonces $i[Z] = \overline{Z} \cap i[X]$.*

   En efecto, $i(x) \in i[Z]$ si y sólo si $x \in Z$, si y sólo si $Z \in i(x)$, si y sólo si $i(x) \in \overline{Z} \cap i[X]$.

5. *Si $Z \in \mathcal{Z}$, entonces $\overline{Z}$ es la clausura en $\omega X$ de $i[Z]$. En particular, $i[X]$ es denso en $\omega X$.*

   Claramente $i[Z] \subset \overline{Z}$, luego $\overline{i[Z]} \subset \overline{Z}$. Por otro lado, $\omega X \setminus \overline{i[Z]}$ es la unión de todos los abiertos básicos que son disjuntos de $\overline{i[Z]}$, y éstos son los mismos que los abiertos básicos disjuntos de $i[Z]$, luego $\overline{i[Z]}$ es la intersección de los cerrados $\overline{Z}'$ que contienen a $i[Z]$. Ahora bien, si $i[Z] \subset \overline{Z}'$, entonces $i[Z] \subset Z' \cap i[X] = i[Z']$, luego $Z \subset Z'$, luego $\overline{Z} \subset \overline{Z}'$, luego $\overline{Z} \subset \overline{i[Z]}$.

   A partir de aquí suponemos la propiedad 3) de la definición de base normal.

6. *La aplicación $i : X \longrightarrow i[X]$ es un homeomorfismo.*

   En efecto, la propiedad 4) anterior equivale a que $i[X \setminus Z] = i[X] \setminus \overline{Z}$, y, por la propiedad 3) de la definición de base normal, los conjuntos $X \setminus Z$ con $Z \in \mathcal{Z}$ forman una base de $X$, mientras que los conjuntos $i[X] \setminus \overline{Z}$ forman una base de la topología relativa de $i[X]$.

   Finalmente, si $\mathcal{Z}$ es una base normal, podemos probar:

7. *$\omega X$ es un espacio de Hausdorff.*

   En efecto, sean $p \neq q$ dos puntos de $\omega X$. Como $p$ no está contenido en $q$, existe un $Z \in p$ tal que $Z \notin q$, y por 7.18 existe un $Z' \in q$ tal que $Z \cap Z' = \varnothing$.

Recapitulamos lo que hemos obtenido junto con un hecho adicional:

**Teorema 7.21** *Sea $X$ un espacio topológico $T_1$ y $\mathcal{Z}$ una familia de cerrados en $X$ que cumpla la definición de base normal salvo a lo sumo la propiedad 4). Entonces:*

1. *El conjunto $\omega X$ de todos los $\mathcal{Z}$-ultrafiltros en $X$ es un espacio $T_1$ compacto con la topología que tiene por base a los complementarios de los conjuntos*
$$\overline{Z} = \{p \in \omega X \mid Z \in p\}.$$
2. *La aplicación $i : X \longrightarrow \omega X$ dada por $i(x) = \{Z \in \mathcal{Z} \mid x \in Z\}$ es un homeomorfismo en su imagen.*
3. *Si identificamos $X = i[X] \subset \omega X$, entonces $X$ es denso en $\omega X$ y, más en general, $\overline{Z}$ es la clausura de $Z$, para todo $Z \in \mathcal{Z}$.*
4. *Para $Z_1$, $Z_2 \in \mathcal{Z}$, se cumple*[3]
$$\overline{Z_1 \cup Z_2} = \overline{Z}_1 \cup \overline{Z}_2 \qquad \overline{Z_1 \cap Z_2} = \overline{Z}_1 \cap \overline{Z}_2.$$
5. *Si $\mathcal{Z}$ cumple también la cuarta propiedad de la definición de base normal, entonces $\omega X$ es un espacio de Hausdorff.*
6. *Si $p \in \omega X$, entonces, como $\mathcal{Z}$-filtro en $X$, converge a $p$.*

Demostración: Sólo falta probar la última afirmación. Se trata de probar que el filtro $\mathcal{F}$ generado por $p$ en $\omega X$ contiene a todos los entornos de $p$. Basta probar que contiene a los entornos básicos, es decir, los de la forma $\omega X \setminus \overline{Z}$. Pero $p$ está en este abierto si y sólo si $Z \notin p$, luego existe $Z' \in p \subset \mathcal{F}$ tal que $Z \cap Z' = \varnothing$, luego $Z' \subset \omega X \setminus \overline{Z}$, pues si $x \in Z'$, identificado con $F_x$, tenemos que $Z' \in F_x$, luego $Z \notin F_x$, luego $F_x \in \omega X \setminus \overline{Z}$. Así pues, $\omega X \setminus \overline{Z} \in \mathcal{F}$. ■

Así pues, cada $\mathcal{Z}$-ultrafiltro en $X$ converge a un único punto de $\omega X$.

Las compactificaciones de un espacio topológico $T_1$ de la forma $\omega X$ se llaman *compactificaciones de tipo Wallman,* porque son generalizaciones de la *compactificación de Wallman,* que es la que resulta de aplicar el teorema anterior a la familia $\mathcal{Z}$ de todos los cerrados de $X$. Ya hemos señalado que $\mathcal{Z}$ cumple la definición de base normal salvo a lo sumo la última propiedad, que equivale a que $X$ sea un espacio normal.

Si $X$ no es normal, entonces $\omega X$ no cumple la definición que hemos dado de compactificación porque en ella hemos exigido que el compacto sea de Hausdorff, pero, salvo por este hecho, es ciertamente una "compactificación $T_1$" del espacio dado[4] $X$.

[3]Notemos que la primera igualdad es una propiedad de la clausura válida en todo espacio topológico, pero la segunda no.

[4]Recordemos que la compactificación por un punto de un espacio topológico $X$ es un espacio compacto que contiene a $X$ como subconjunto denso, y que claramente es $T_1$ si y sólo si lo es $X$, luego la existencia de tales "compactificaciones no de Hausdorff" ya la teníamos probada, de hecho sin necesidad del axioma de elección.

En cambio, si $X$ es normal, la propiedad 4) del teorema anterior implica que cerrados disjuntos en $X$ tienen clausuras disjuntas en $\omega X$, por lo que 7.12 nos da que $\omega X$ es equivalente a la compactificación de Stone-Čech $\beta X$.

Sin embargo, si consideramos como $\mathcal{Z}$ la familia $Z(X)$ de los ceros de cualquier espacio topológico completamente regular, entonces $\mathcal{Z}$ es una base normal, y de nuevo la propiedad 4) del teorema anterior afirma que ceros disjuntos tienen clausuras disjuntas, por lo que $\omega X$ es equivalente a $\beta X$:

**Definición 7.22** Si $X$ es un espacio topológico completamente regular, llamamos $Z(X)$ al conjunto de todos los ceros de $X$. Los $Z(X)$-(ultra)filtros se llaman simplemente $z$-(ultra)filtros.

**Teorema 7.23** *Si $X$ es un espacio completamente regular, entonces la compactificación de Stone-Čech de $X$ puede identificarse con el conjunto $\beta X$ de todos los $z$-ultrafiltros en $X$, con la topología que tiene por base a los complementarios de los conjuntos*

$$\overline{Z} = \{p \in \beta X \mid Z \in p\},$$

*identificando cada $x \in X$ con el $z$-ultrafiltro $i(x) = \{Z \in Z(X) \mid x \in Z\}$.*

Por otra parte, hemos probado que si un espacio topológico $T_1$ tiene una base normal, entonces puede sumergirse en un espacio de Hausdorff compacto, luego es completamente regular. Por lo tanto:

**Teorema 7.24 (Frink)** *Un espacio topológico $X$ es completamente regular si y sólo si tiene una base normal.*

Lo interesante de esta caracterización es que es interna. Todos los axiomas de separación los hemos enunciado exclusivamente en términos de la topología del espacio $X$ considerado excepto la regularidad completa, cuya definición involucra objetos "externos" a $X$, a saber, las funciones continuas de $X$ en $\mathbb{R}$. Aquí tenemos una caracterización de la regularidad completa que sólo depende de la topología de $X$.

Observemos también que si $X$ es un espacio topológico discreto, entonces $Z(X) = \mathcal{P}X$, por lo que los $z$-ultrafiltros son simplemente los ultrafiltros en $X$, y es claro entonces que $\beta X$ coincide con el espacio de Stone del álgebra de Boole $\mathcal{P}X$, en el sentido de [TC 7.14].

Frink preguntó si toda compactificación de un espacio de Hausdorff es necesariamente de tipo Wallman, lo cual fue un problema abierto hasta 1977, cuando V. M. Ul'yanov encontró un contraejemplo.

## 7.3 Anillos de funciones continuas

Si $X$ es un espacio topológico, el conjunto $C(X)$ de las funciones continuas de $X$ en $\mathbb{R}$ tiene estructura de anillo con las operaciones definidas puntualmente y contiene como subanillo al espacio $C^*(X)$ de las funciones continuas y acotadas de $X$ en $\mathbb{R}$. Podemos identificar $\mathbb{R}$ con el subanillo formado por las funciones constantes, y así $\mathbb{R} \subset C^*(X) \subset C(X)$.

En $C(X)$ tenemos también definidas puntualmente las operaciones máximo y mínimo $f \vee g$, $f \wedge g$ y el valor absoluto $|f|$. Se cumple que el máximo, el mínimo y el valor absoluto de funciones de $C^*(X)$ están en $C^*(X)$.

También tenemos definido en $C(X)$ un orden parcial dado por $f \leq g$ si y sólo si $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in X$. Todas estas operaciones adicionales están determinadas por la estructura de anillo, en el sentido siguiente:

**Teorema 7.25** *Sean $X$ e $Y$ dos espacios topológicos y $\phi : C(X) \longrightarrow C(Y)$ un homomorfismo de anillos. Entonces, para todas las funciones $f$, $g \in C(X)$:*

1. *Si $f \leq g$, entonces $\phi(f) \leq \phi(g)$.*
2. *$\phi(|f|) = |\phi(f)|$.*
3. *$\phi(f \vee g) = \phi(f) \vee \phi(g)$.*
4. *$\phi(f \wedge g) = \phi(f) \wedge \phi(g)$.*
5. *Si $f \in C^*(X)$, entonces $\phi(f) \in C^*(Y)$.*

Demostración: 1) Claramente $f \geq 0$ si y sólo si existe $g \in C(X)$ tal que $f = g^2$, y en tal caso $\phi(f) = \phi(g)^2$, luego $\phi(f) \geq 0$.

A su vez, si $f \leq g$, entonces $g - f \geq 0$, luego $\phi(g) - \phi(f) \geq 0$, luego $\phi(f) \leq \phi(g)$.

2) $\phi(|f|)^2 = \phi(|f|^2) = \phi(f^2) = \phi(f)^2$ y, como $|f| \geq 0$, también $\phi(|f|) \geq 0$, por el apartado anterior, luego $\phi(|f|) = |\phi(f)|$.

3) Se cumple que $f \vee g + f \vee g = f + g + |f - g|$, luego, por los apartados anteriores,

$$\phi(f \vee g) + \phi(f \vee g) = \phi(f) + \phi(g) + |\phi(f) - \phi(g)| = \phi(f) \vee \phi(g) + \phi(f) \vee \phi(g),$$

de donde $\phi(f \vee g) = \phi(f) \vee \phi(g)$.

4) Se razona análogamente al apartado anterior, usando ahora que

$$f \wedge g + f \wedge g = f + g - |f - g|.$$

5) Como $1 \geq 0$ y $\phi(1) = \phi(1 \cdot 1) = \phi(1)\phi(1)$, tenemos que $\phi(1) \geq 0$ y sólo toma los valores 0 y 1. Si $n \geq 1$ es un número natural, entonces $\phi(n) = \phi(1 + \cdots + 1) = n\phi(1)$ sólo toma los valores 0 y $n$.

Por lo tanto, si $f \in C^*(X)$, existe un $n$ tal que $f \leq n$, luego $\phi(f) \leq \phi(n) \leq n$, luego $\phi(f) \in C^*(Y)$. ■

Notemos que el argumento del último apartado vale igualmente si tenemos un homomorfismo $\phi : C^*(X) \longrightarrow C(Y)$, por lo que no puede haber un epimorfismo (ni en particular un isomorfismo) $\phi : C^*(X) \longrightarrow C(Y)$ salvo que $C(Y) = C^*(Y)$.

Otra consecuencia es que todo isomorfismo de anillos $\phi : C(X) \longrightarrow C(Y)$ se restringe a un isomorfismo de anillos $\phi : C^*(X) \longrightarrow C^*(Y)$.

En efecto, sólo tenemos que probar que la restricción es suprayectiva. Más en general, vamos a ver que si un homomorfismo de anillos $\phi : C(X) \longrightarrow C(Y)$ cumple que $C^*(Y) \subset \phi[C(X)]$, entonces $\phi[C^*(X)] = C^*(Y)$.

En efecto, por hipótesis existe $k \in C(X)$ tal que $\phi(k) = 1$, pero entonces $\phi(1) = \phi(k)\phi(1) = \phi(k) = 1$, luego $\phi(n) = n$ parra todo número natural $n$.

Tomemos $g \in C^*(Y)$, con lo que existe $h \in C(X)$ tal que $\phi(h) = g$. Sea $n$ un número natural tal que $|g| \leq n$ y sea $f = (-n \vee h) \wedge n \in C^*(X)$. Entonces $\phi(f) = (-n \vee g) \wedge n = g$.

**Ideales** Existe una correspondencia natural entre los ideales de $C(X)$ y los $z$-filtros en $X$:

**Teorema 7.26** *Sea $X$ un espacio topológico.*

1. *Si $I$ es un ideal (propio) en $C(X)$, entonces $Z[I] = \{Z(f) \mid f \in I\}$ es un $z$-filtro en $X$.*
2. *Si $F$ es un $z$-filtro en $X$, entonces $Z^{-1}[F] = \{f \in C(X) \mid Z(f) \in F\}$ es un ideal (propio) en $C(X)$.*

Demostración: Si $\varnothing \in Z[I]$, esto significa que existe una función $f \in I$ tal que $Z(f) = \varnothing$, pero entonces $1/f \in I$, luego $1 = f/f \in I$, luego $I = C(X)$, en contra de la hipótesis de que $I$ es un ideal propio. Por lo tanto, $\varnothing \notin Z[I]$. Como $0 \in I$, tenemos que $X = Z(0) \in Z[I]$.

Si $Z_1, Z_2 \in Z[I]$, existen $f_i \in C(X)$ tales que $Z_i = Z(f_i)$, y claramente entonces $Z_1 \cap Z_2 = Z(f_1^2 + f_2^2)$, con $f_1^2 + f_2^2 \in I$, luego $Z_1 \cap Z_2 \in Z[I]$.

Si $Z \in Z[I]$ y $Z' \in Z(X)$ cumple $Z \subset Z'$, tomamos funciones $f \in I$, $f' \in C(X)$ tales que $Z = Z(f)$, $Z' = Z(f')$. Entonces $ff' \in I$, luego tenemos que $Z' = Z \cup Z' = Z(ff') \in Z[I]$. Esto prueba que $Z[I]$ es un $z$-filtro.

Sea ahora $F$ un $z$-filtro. Entonces $1 \notin Z^{-1}[F]$, luego $Z^{-1}[F] \neq C(X)$, y $0 \in Z^{-1}[F]$, pues $Z(0) = X \in F$.

Si $f, g \in Z^{-1}[F]$, entonces $Z(f) \cap Z(g) \subset Z(f+g)$, por lo que $Z(f+g) \in F$, luego $f + g \in Z^{-1}[F]$.

Si $f \in Z^{-1}[F]$ y $g \in C(X)$, entonces $Z(f) \subset Z(fg)$, por lo que $Z(fg) \in F$ y $fg \in Z^{-1}[F]$. Por lo tanto $Z^{-1}[F]$ es un ideal propio de $C(I)$. ■

Es inmediato comprobar que las correspondencias anteriores satisfacen las relaciones:

$$Z[Z^{-1}[F]] = F, \qquad I \subset Z^{-1}[Z[I]].$$

Sin embargo, la inclusión no es necesariamente una igualdad.

**Ejemplo** Consideremos en $C(\mathbb{R})$ el ideal $I = (i)$ generado por la identidad (que no hay que confundir con la función constante 1). Está formado por todas las funciones de la forma $g = fi$, es decir, las funciones que cumplen $g(x) = f(x)x$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Notemos que entonces $0 \in Z(g)$.

Se cumple que $g \in Z^{-1}[Z[I]]$ si y sólo si $Z(g) \in Z[I]$ si y sólo si $g(0) = 0$, pues en tal caso $Z(g) = Z(ig) \in Z[I]$ y si $Z(g) \in Z[I]$ hemos visto que $0 \in Z(g)$.

Así pues, $Z^{-1}[Z[I]] = \{g \in C(\mathbb{R}) \mid g(0) = 0\}$, pero este ideal no coincide con $I$, pues, por ejemplo $g(x) = \sqrt[3]{x}$ cumple $g(0) = 0$ pero $g \notin I$. Si fuera $g(x) = f(x)x$, necesariamente $f(x) = x^{-2/3}$ para todo $x \neq 0$, luego $f$ no sería continua en 0. ∎

También conviene observar que si $I$ es un ideal de $C^*(X)$, no es cierto en general que $Z[I]$ sea un $z$-filtro. Por ejemplo, el conjunto $I \subset C^*(\mathbb{N})$ formado por las sucesiones que convergen a 0 es claramente un ideal, pero contiene sucesiones que no se anulan, por lo que $\varnothing \in Z[I]$.

Teniendo en cuenta que las aplicaciones $Z$ y $Z^{-1}$ conservan las inclusiones, el teorema siguiente es inmediato:

**Teorema 7.27** *Si $X$ es un espacio topológico y $M$ es un ideal maximal en $C(X)$, entonces $Z[M]$ es un $z$-ultrafiltro en $X$, y si $U$ es un $z$-ultrafiltro en $X$, entonces $Z^{-1}[U]$ es un ideal maximal. Las aplicaciones $Z$ y $Z^{-1}$ son biyecciones mutuamente inversas entre los conjuntos de ideales maximales y $z$-ultrafiltros.*

No obstante, si $Z[I]$ es un $z$-ultrafiltro, de ahí no se deduce que $I$ sea un ideal maximal. Sólo que $Z^{-1}[Z[I]]$ lo es.

**Definición 7.28** Si $X$ es un espacio topológico, un ideal $I$ de $C(X)$ es un *$z$-ideal* si, para toda $f \in C(X)$, cuando $Z(f) \in Z[I]$, necesariamente $f \in I$. Esto equivale a que $I = Z^{-1}[Z[I]]$.

Claramente, si $F$ es un $z$-filtro, entonces $Z^{-1}[F]$ es un $z$-ideal. Así $Z$ y $Z^{-1}$ son biyecciones mutuamente inversas entre el conjunto de los $z$-filtros de $X$ y el conjunto de los $z$-ideales de $C(X)$.

En estos términos, el ejemplo precedente es un ejemplo de ideal en $C(\mathbb{R})$ que no es un $z$-ideal.

Si $J$ es cualquier ideal de $C(X)$, entonces $I = Z^{-1}[Z[J]]$ es un $z$-ideal, el menor $z$-ideal que contiene a $J$. (Basta aplicar la igualdad $Z[Z^{-1}[F]] = F$ a $F = Z[I]$.)

Es claro que todo ideal maximal es un $z$-ideal, así como que la intersección de $z$-ideales es un $z$-ideal. No es cierto en general que todo ideal sea intersección de ideales maximales, pero sí de ideales primos:

**Teorema 7.29** *Si $X$ es un espacio topológico, todo $z$-ideal en $C(X)$ es intersección de ideales primos.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $I$ un $z$-ideal y sea $R$ la intersección de todos los ideales primos que contienen a $I$ (notemos que todo ideal está contenido en un ideal maximal, luego en un ideal primo). Tenemos que $I \subset R$ y vamos a probar la inclusión contraria. Si $f \in R$, entonces existe un natural $n$ tal que $f^n \in I$.

En efecto, en caso contrario, consideramos la familia de todos los ideales que contienen a $I$ pero no contienen ninguna potencia de $f$. Por el lema de Zorn, existe un ideal $P$ maximal respecto a la inclusión en dicha familia. Basta probar que $P$ es primo, pues entonces tendríamos que $f \in R \subset P$, contradicción. Para ello tomamos $g$, $h \in C(X) \setminus P$.

Es fácil ver que los elementos de la forma $p + tg$, con $p \in P$ y $t \in C(X)$, forman un ideal de $C(X)$ o bien recorren todo $C(X)$. Por lo tanto, existe un número natural $m$ tal que $f^m = p + tg$, por la maximalidad de $P$ en el primer caso o trivialmente en el segundo. Igualmente existe un $n$ tal que $f^n = p' + t'h$. Entonces $f^{m+n} = p'' + tt'gh$, con $p'' \in P$, luego $gh \notin P$ o, de lo contrario, $f^{m+1} \in P$. ■

**Nota** Como la intersección de $z$-ideales es un $z$-ideal y hemos visto que existen ideales que no son $z$-ideales, ahora podemos concluir que existen ejemplos de ideales primos que no son $z$-ideales. ■

**Teorema 7.30** *Sea $X$ un espacio topológico e $I$ un $z$-ideal de $C(X)$. Las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

1. *$I$ es un ideal primo.*
2. *$I$ contiene un ideal primo.*
3. *Si $f$, $g \in C(X)$ cumplen $fg = 0$, entonces $f \in I$ o bien $g \in I$.*
4. *Para cada $f \in C(X)$, existe $Z \in Z[I]$ donde $f$ tiene signo constante.*

Demostración: Obviamente 1) $\Rightarrow$ 2).

2) $\Rightarrow$ 3). Supongamos que $I$ contiene el ideal primo $P$. Si $fg = 0$, entonces $fg \in P$, luego $f \in P \subset I$ o bien $g \in P \subset I$.

3) $\Rightarrow$ 4) Claramente $(f \vee 0)(f \wedge 0) = 0$, luego $f \vee 0 \in I$ o $f \wedge 0 \in I$ y basta tomar como $Z$ el cero de la función que está en $I$.

4) $\Rightarrow$ 1) Si $gh \in I$, consideramos la función $|g| - |h|$. Por hipótesis existe $Z \in Z[I]$ donde $|g| - |h|$ tiene signo constante. Supongamos que no es negativa. Entonces $Z(g) \cap Z \subset Z(h)$, luego

$$Z \cap Z(gh) = Z \cap Z(h) \subset Z(h),$$

y la intersección está en $Z[I]$, luego $Z(h) \in Z(I)$. Como $I$ es un $z$-ideal, esto implica que $h \in I$. ■

En cualquier anillo conmutativo y unitario se cumple que si si $I_1$, $I_2$ son dos ideales que no se contienen el uno al otro, entonces $I_1 \cap I_2$ no es un ideal primo. En efecto, si $a \in I_1 \setminus I_2$ y $b \in I_2 \setminus I_1$, entonces $ab \in I_1 \cap I_2$, pero ninguno de los dos está en $I_1 \cap I_2$. De aquí deducimos:

**Teorema 7.31** *Si $X$ es un espacio topológico, cada ideal primo de $C(X)$ está contenido en un único ideal maximal.*

Demostración: En general, todo ideal está contenido en un ideal maximal, pero si $M$ y $M'$ son dos ideales maximales distintos, la observación precedente muestra que $M \cap M'$ no es un ideal primo, pero es un $z$-ideal, luego por el teorema anterior no puede contener ningún ideal primo. ■

**Definición 7.32** Si $X$ es un espacio topológico, un $z$-filtro $F$ en $X$ es *primo* si cuando $Z_1$, $Z_2 \in Z(X)$ cumplen $Z_1 \cup Z_2 \in F$, entonces $Z_1 \in F$ o $Z_2 \in F$.

El teorema 7.19 prueba que todo $z$-ultrafiltro es primo.

**Teorema 7.33** *Si $X$ es un espacio topológico y $P$ es un ideal primo en $C(X)$, entonces $Z[P]$ es un $z$-filtro primo. Si $F$ es un $z$-filtro primo, entonces $Z^{-1}[F]$ es un ideal primo.*

Demostración: Si $P$ es un ideal primo y llamamos $Q = Z^{-1}[Z[P]]$, entonces $Z[P] = Z[Q]$ y $Q$ es un $z$-ideal que contiene al ideal primo $P$. Por 7.30 tenemos que $Q$ es un ideal primo. Si $Z(f) \cup Z(g) \in Z[P]$, entonces $Z(fg) \in Q$ y, como $Q$ es un $z$-ideal, $fg \in Q$, luego $f \in Q$ o $g \in Q$. Suponiendo, por ejemplo, que $f \in Q$, entonces $Z(f) \in Z[Q] = Z[P]$, luego $Z[P]$ es primo.

Si $F$ es un $z$-filtro primo, $P = Z^{-1}[F]$ es un $z$-ideal. Si $fg \in P$, entonces

$$Z(fg) = Z(f) \cup Z(g) \in Z[P] = F,$$

luego $Z(f) \in F$ o $Z(g) \in F$, luego $f \in P$ o $g \in P$. ■

El teorema 7.31 se traduce ahora en que cada $z$-filtro primo está contenido en un único $z$-ultrafiltro.

**Teorema 7.34** *Sea $X$ un espacio topológico completamente regular y $F$ un $z$-filtro primo en $X$. Si $x \in X$ es un punto adherente de $F$, entonces $F$ converge a $x$.*

Demostración: Tenemos que probar que todo entorno de $x$ contiene un elemento de $F$. Como entorno básico de $x$ podemos tomar un cero $Z$, el cual contendrá a su vez un cocero $p \in X \setminus Z' \subset Z$. Entonces $Z \cup Z' = X \in F$, luego $Z \in F$ o $Z' \in F$, pero no puede ser $Z' \in F$ porque $p$ es un punto adherente de $F$ y $p \notin Z'$. Por lo tanto, $Z \in F$. ■

Hemos visto que cada $z$-filtro primo $P$ está contenido en un único $z$-ultrafiltro $U$, y ahora vemos que $P$ converge a un punto $x$ si y sólo si lo hace $U$.

En efecto, es inmediato que si $P$ converge a $x$, también lo hace $U$ y, si $U$ converge a $x$, entonces $x$ es un punto adherente de $P$, luego $P$ converge a $x$.

**Espacios de ideales maximales** Hasta aquí hemos considerado espacios topológicos arbitrarios, pero el teorema siguiente muestra que, en lo tocante al estudio de anillos de funciones continuas, no perdemos generalidad si consideramos únicamente espacios completamente regulares:

**Teorema 7.35** *Si $X$ es un espacio topológico, existe un espacio topológico $Y$ completamente regular y una aplicación continua $\pi : X \longrightarrow Y$ tal que la aplicación $\phi : C(Y) \longrightarrow C(X)$ dada por $\phi(f) = \pi \circ f$ es un isomorfismo de anillos.*

Demostración: Consideramos en $X$ la relación de equivalencia dada por $x\,R\,y$ si y sólo si $f(x)=f(y)$ para toda $f\in C(X)$. Sea $Y=X/R$ y consideremos la proyección canónica $\pi : X \longrightarrow Y$.

Claramente, para cada $f \in C(X)$, existe una única $\bar{f} : Y \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\pi \circ \bar{f} = f$. Llamamos $C'$ al conjunto de todas estas funciones $\bar{f}$. Consideramos en $Y$ la menor topología que hace continuas a todas las funciones de $C'$, es decir, tal que $C' \subset C(Y)$. Más concretamente, nos referimos a la topología que tiene por subbase a las antiimágenes de abiertos de $\mathbb{R}$ por funciones de $C'$.

Notemos que $\pi$ es continua, pues si $\bar{f}^{-1}[U]$ es un abierto subbásico de $Y$, donde $U$ es abierto en $\mathbb{R}$ y $f\in C(X)$, entonces $\pi^{-1}[\bar{f}^{-1}[U]] = f^{-1}[U]$ es abierto en $X$.

Ahora vemos que $C(Y)=C'$, pues si $g\in C(Y)$, entonces $f=\pi\circ g\in C(X)$, luego $g=\bar{f}\in C'$.

La aplicación $\phi$ del enunciado es claramente un homomorfismo de anillos y, como $\pi$ es suprayectiva, es inmediato que $\phi$ es inyectiva, y es suprayectiva porque $\phi(\bar{f})=f$.

Sólo falta probar que $Y$ es completamente regular. Veamos en primer lugar que es un espacio de Hausdorff. Si $p$, $q\in Y$, entonces $\pi^{-1}[\{p\}]$ y $\pi^{-1}[\{q\}]$ son dos clases de equivalencia de $R$, luego existe una función $f\in C(X)$ que toma un mismo valor $a$ en todos los puntos de $\pi^{-1}[\{p\}]$ y otro valor $b\neq a$ en todos los puntos de $\pi^{-1}[\{q\}]$. Sean $U_1$ y $U_2$ entornos abiertos disjuntos de $a$ y $b$ en $\mathbb{R}$ y sea $f=\phi(g)$, de modo que $g(p)=a$, $g(q)=b$. Claramente, $g^{-1}[U_1]$ y $g^{-1}[U_2]$ son entornos disjuntos de $p$ y $q$ en $Y$.

El teorema 5.49 implica ahora que $Y$ es completamente regular, pues todo abierto subbásico $f^{-1}[U]$ es un cocero en $Y$ (pues todo abierto $U$ es un cocero en $\mathbb{R}$), luego también son coceros los abiertos básicos (las intersecciones finitas de abiertos subbásicos). ■

**Definición 7.36** Si $X$ es un espacio topológico, un ideal $I$ de $C(X)$ o de $C^*(X)$ es *fijo* si $\bigcap Z[I]\neq\varnothing$. En caso contrario diremos que el ideal es *libre.*

Es fácil identificar los ideales maximales fijos de $C(X)$ y $C^*(X)$:

**Teorema 7.37** *Sea $X$ un espacio topológico completamente regular. Los ideales maximales fijos de $C(X)$ son los de la forma*

$$M_p=\{f\in C(X)\mid f(p)=0\},$$

*para cada $p\in X$. Si $p\neq q$, entonces $M_p\neq M_q$. Lo mismo es válido si cambiamos $C(X)$ por $C^*(X)$.*

Demostración: La aplicación $C(X)\longrightarrow\mathbb{R}$ dada por $f\mapsto f(p)$ es un epimorfismo de anillos, que induce un isomorfismo $C(X)/M_p\longrightarrow\mathbb{R}$. Esto prueba que $C(X)/M_p$ es un cuerpo, luego $M_p$ es un ideal maximal, claramente fijo, pues $p\in\bigcap Z[M_p]$.

Si $M$ es cualquier ideal maximal fijo y $p\in\bigcap Z[M]$,entonces $M\subset M_p$, luego $M=M_p$.

Si $p \neq q$, como $X$ es completamente regular existe una función $f \in C(X)$ tal que $f(p) = 0$ y $f(q) = 1$, lo que prueba que $M_p \neq M_q$. Toda la prueba vale literalmente para $C^*(X)$ en lugar de $C(X)$. ■

**Definición 7.38** Si $X$ es un espacio completamente regular, llamaremos $\mathcal{M}(X)$ al conjunto de todos los ideales maximales de $C(X)$. Consideraremos a $\mathcal{M}(X)$ como espacio topológico con la topología que tiene por base a los complementarios de los conjuntos $\mathcal{Z}(f) = \{M \in \mathcal{M}(X) \mid f \in M\}$, para $f \in C(X)$.

Esto es correcto, pues $\mathcal{Z}(f) \cup \mathcal{Z}(g) = \mathcal{Z}(fg)$, luego la intersección de abiertos básicos es un abierto básico (y $\mathcal{Z}(0) = \mathcal{M}(X)$).

**Teorema 7.39** *Si $X$ es un espacio completamente regular, entonces la aplicación $\phi : X \longrightarrow \mathcal{M}(X)$ dada por $\phi(p) = M_p$ es un homeomorfismo en su imagen. Si $X$ es compacto, es un homeomorfismo.*

DEMOSTRACIÓN: El teorema anterior nos da que $\phi$ es inyectiva y, para cada $f \in C(X)$, tenemos que $\phi[Z(f)] = \mathcal{Z}(f) \cap \phi[X]$.

En efecto, si $p \in Z(f)$, entonces $f(p) = 0$, luego $f \in M_p$, luego tenemos que $\phi(p) = M_p \in \mathcal{Z}(f) \cap \phi[X]$. Recíprocamente, si $\phi(p) = M_p \in \mathcal{Z}(f) \cap \phi[X]$, entonces $f \in M_p$, luego $f(p) = 0$, luego $p \in Z(f)$, luego $\phi(p) \in \phi[Z(f)]$.

Equivalentemente, $\phi[X \setminus Z(f)] = (\mathcal{M}(X) \setminus \mathcal{Z}(f) \cap \phi[X])$, luego $\phi$ hace corresponder una base de $X$ con una base para la topología relativa de $\phi[X]$, luego $\phi$ es un homeomorfismo en su imagen.

Si $X$ es compacto, entonces $\phi$ es suprayectiva, pues su imagen está formada por todos los ideales maximales fijos, pero en un espacio compacto, todo ideal $I$ es fijo, pues $Z[I]$ es un $z$-filtro, luego es convergente. Así pues, los ideales maximales fijos son todos los ideales maximales, es decir, son todo $\mathcal{M}(X)$. ■

Como consecuencia:

**Teorema 7.40** *Dos espacios de Hausdorff compactos $X$ e $Y$ son homeomorfos si y sólo si $C(X)$ y $C(Y)$ son isomorfos.*

DEMOSTRACIÓN: Es obvio que un homeomorfismo $h : X \longrightarrow Y$ induce un isomorfismo $f \mapsto h \circ f$ de $C(Y)$ en $C(X)$. Recíprocamente, si $\phi : C(X) \longrightarrow C(Y)$ es un isomorfismo de anillos, es claro que la aplicación $\bar{\phi} : \mathcal{M}(X) \longrightarrow \mathcal{M}(Y)$ dada por $\bar{\phi}(M) = \phi[M]$ es biyectiva y, más aún es un homeomorfismo, pues si $f \in C(X)$, se cumple que $\bar{\phi}[\mathcal{Z}(f)] = \mathcal{Z}(\phi(f))$. Por lo tanto, $X$ es homeomorfo a $\mathcal{M}(X)$, que es homeomorfo a $\mathcal{M}(Y)$, que es homeomorfo a $Y$. ■

Ahora podemos determinar los ideales maximales de $C^*(X)$:

**Teorema 7.41** *Si $X$ es un espacio completamente regular, el conjunto $\mathcal{M}^*(X)$ de los ideales maximales de $C^*(X)$ es un espacio topológico con la topología que tiene por base a los complementarios de los conjuntos*

$$\mathcal{Z}^*(f) = \{M \in \mathcal{M}^*(X) \mid f \in M\},$$

*con $f \in C^*(X)$. Los elementos de $\mathcal{M}^*(X)$ son de la forma*

$$M_p^* = \{f \in C^*(X) \mid \bar{f}(p) = 0\},$$

*para cada $p \in \beta X$ donde $\bar{f} \in C(\beta X)$ es la única extensión continua de $f$. La aplicación $p \mapsto M_p^*$ es un homeomorfismo $\beta X \longrightarrow \mathcal{M}^*(X)$.*

Demostración: Sabemos que la restricción es un isomorfismo de anillos $C(\beta X) \longrightarrow C^*(X)$, que a su vez induce una biyección $\mathcal{M}^*(X) \longrightarrow \mathcal{M}(\beta X)$, a saber,

$$M \mapsto \bar{M} = \{f \in C(\beta X) \mid f|_X \in M\}.$$

Como los ideales de $\mathcal{M}(\beta X)$ son los de la forma

$$M_p = \{f \in C(\beta X) \mid f(p) = 0\} = \bar{M}_p^*,$$

para $p \in \beta X$, tenemos que los ideales de $\mathcal{M}^*(X)$ son los de la forma $M_p^*$.

Si $M$ es un ideal maximal en $C^*(X)$ y $f \in C^*(X)$, tenemos que $M_p^* \in \mathcal{Z}^*(f)$ si y sólo si $f \in M_p^*$, si y sólo si $\bar{f}(p) = 0$, si y sólo si $\bar{f} \in M_p$, si y sólo si $M_p \in \mathcal{Z}(\bar{f})$. Esto significa que la biyección $M_p^* \mapsto M_p$ hace corresponder cada conjunto $\mathcal{Z}^*(f)$ con $\mathcal{Z}(\bar{f})$, lo que a su vez se traduce en que los complementarios de los conjuntos $\mathcal{Z}^*(f)$ son la base de una topología en $\mathcal{M}^*(X)$, concretamente, de la topología que convierte en un homeomorfismo a la biyección $M_p^* \mapsto M_p$. Como $p \mapsto M_p$ es un homeomorfismo entre $\beta X$ y $\mathcal{M}(\beta X)$, concluimos que $p \mapsto M_p^*$ también es un homeomorfismo. ■

Por otra parte, si $p \in \beta X$, podemos ver a $p$ como un $z$-ultrafiltro en $X$, que se corresponde biunívocamente con el ideal maximal $Z^{-1}(p)$ de $C(X)$. Explícitamente:

$$f \in Z^{-1}(p) \leftrightarrow Z(f) \in p \leftrightarrow p \in \overline{Z(f)}.$$

Así pues:

**Teorema 7.42 (Gelfand-Kolmogoroff)** *Si $X$ es un espacio completamente regular, el espacio $\mathcal{M}(X)$ de los ideales maximales de $C(X)$ está formado por los ideales*

$$M_p = \{f \in C(X) \mid p \in \overline{Z(f)}\},$$

*para cada $p \in \beta X$, donde la clausura se toma en $\beta X$. La biyección $p \mapsto M_p$ es un homeomorfismo $\beta X \longrightarrow \mathcal{M}(X)$. Además, $Z[M_p] = p$.*

Demostración: Ya hemos razonado que los elementos de $\mathcal{M}(X)$ son de la forma indicada. Ahora observamos que $M_p \in \mathcal{Z}(f)$ si y sólo si $p \in M_p$ si y sólo si $p \in \overline{Z(f)}$, y una base de $\mathcal{M}(X)$ está formada por los complementarios de los conjuntos $\mathcal{Z}(f)$, mientras que una base de $\beta X$ está formada por los complementarios de los conjuntos $\overline{Z(f)}$, luego $p \mapsto M_p$ es un homeomorfismo. Por último:

$$Z(f) \in Z[M_p] \leftrightarrow f \in M_p \leftrightarrow p \in \overline{Z(f)} \leftrightarrow Z(f) \in p.$$

■

Así pues, si $X$ es un espacio topológico completamente regular, los anillos $C^*(X)$ y $C(X)$ determinan algebraicamente a $\beta X$, como el espacio de los ideales maximales con una topología definida en términos puramente algebraicos. Todavía hay un aspecto más de esta relación que podemos precisar:

Si $f \in C^*(X)$ y $M \in \mathcal{M}^*(X)$, entonces $M$ se corresponde con un punto $p \in \beta X$, por lo que el valor $\bar{f}(p)$ de la extensión $\bar{f}$ de $f$ a $\beta X$ está determinado por $f$ y $M$. Vamos a ver que también está determinado en términos puramente algebraicos:

**Teorema 7.43** *Sea $X$ un espacio topológico completamente regular, $f \in C^*(X)$ y $M \in \mathcal{M}^*(X)$. Entonces, el valor $\bar{f}(p)$ que la extensión continua de $f$ a $\beta X$ toma en el punto $p \in \beta X$ tal que $M = M_p^*$ es el único número real $r$ tal que $f - r \in M$.*

DEMOSTRACIÓN: El isomorfismo $C(\beta X) \longrightarrow C^*(X)$ hace corresponder el ideal maximal $M = M_p^*$ de $C^*(X)$ con el ideal maximal $M_p$ de $C(\beta X)$, luego también induce un isomorfismo $C(\beta X)/M_p \longrightarrow C^*(X)/M$. Por otra parte, la aplicación $\bar{f} \mapsto \bar{f}(p)$ determina un isomorfismo de anillos $C(\beta X)/M_p \longrightarrow \mathbb{R}$ de modo que $\bar{f}(p)$ es el único número real $r$ tal que $\bar{f} - r \in M_p$, luego $\bar{f}(p)$ también es el único número real $r$ tal que $f - r \in M$. ■

La situación en el caso de $C(X)$ es más complicada. Nos ocupamos de ella en el apartado siguiente, pero antes haremos algunas observaciones adicionales sobre ideales de $C(X)$ y filtros en $X$:

**Definición 7.44** Si $X$ es un espacio completamente regular y $p \in X$, definimos

$$O_p = \{f \in C(X) \mid p \in \mathring{Z}(f)\}.$$

Claramente se trata de un $z$-ideal de $C(X)$, y $Z[O_p]$ está formado por todos los ceros de $X$ que son entornos de $p$, luego es el menor $z$-ideal en $X$ que converge a $p$, luego $O_p \subset M_p$, y todos los ideales primos contenidos en $M_p$ tienen que estar, de hecho, entre $O_p$ y $M_p$ (pues todos convergen a $p$).

Pero $O_p$ no es necesariamente un ideal primo, pues, por ejemplo, en $\mathbb{R}$, tenemos que $[-1, 0] \cup [0, 1] \in Z[O_0]$, pero $[-1, 0], [0, 1] \notin Z[O_0]$, luego $Z[O_0]$ no es un $z$-filtro primo.

Se cumple que $M_p$ es el único ideal maximal de $C(X)$ que contiene a $O_p$, pues si $O_p \subset M$ y $M$ es maximal, entonces $Z[M]$ es un $z$-ultrafiltro que contiene a $Z[O_p]$, converge a $p$, luego $M$ es un ideal fijo y, por 7.37, tiene que ser $M_p$.

**Cocientes ordenados** Si $X$ es un espacio topológico, diremos que un ideal $I$ en $C(X)$ es *convexo* si cuando $0 \leq f \leq g$ y $g \in I$, entonces $f \in I$.

Más en general, esto hace que si $f \leq g \leq h$ con $f$, $h \in I$, entonces $g \in I$, pues tenemos que $0 \leq g - f \leq h - f \in I$, luego $g - f \in I$, luego $g \in I$.

Más aún, si $|f| \in I$, entonces $f \in I$, pues $-|f| \leq f \leq |f|$.

Un ideal $I$ de $C(X)$ es *absolutamente convexo* si cuando $|f| \leq |g|$ y $g \in I$, entonces $f \in I$. En particular, en tal caso $f \in I$ implica que $|f| \in I$.

Es inmediato que todo ideal absolutamente convexo es convexo, pero el recíproco no es cierto.

**Ejemplo** El ideal $(i)$ en $C(\mathbb{R})$, donde $i$ es la identidad, es convexo, pero no absolutamente convexo.

Es convexo porque si $0 \leq f \leq gi$, la condición $gi \geq 0$ implica que $g(x) \geq 0$ si $x > 0$ y $g(x) \leq 0$ si $x < 0$, luego por continuidad $g(0) = 0$, y entonces $f(x)/|x| \leq |g(x)|$ siempre que $x \neq 0$, de donde se sigue que $h^+(x) = f(x)/|x|$ es continua en $\mathbb{R}$ si se prolonga con $h^+(0) = 0$, pero entonces $h(x) = f(x)/x$ también es continua, luego $f = hi \in (i)$. No es absolutamente convexo, pues $|i| \notin (i)$. ■

El interés de la convexidad es el siguiente:

**Teorema 7.45** *Si $X$ es un espacio topológico e $I$ es un ideal convexo de $C(X)$, entonces $C(X)/I$ está parcialmente ordenado por la relación dada por $x \leq y$ si y sólo si $y - x = [h]$, con $h \geq 0$. La proyección natural $p : C(X) \longrightarrow C(X)/I$ conserva el orden.*

Demostración: Obviamente $x - x = [0]$ y $0 \geq 0$, luego $x \leq x$.

Si $x \leq y$, $y \leq x$, entonces $x - y = [h_1]$, $y - x = [h_2]$ con $h_1$, $h_2 \geq 0$, pero $[h_1] = -[h_2]$, luego $0 \leq h_1 \leq h_1 + h_2 \in I$, luego $h_1 \in I$, luego $x = y$.

Si $x \leq y \leq z$, entonces $y - x = [h_1]$, $z - y = [h_2]$, con $h_1$, $h_2 \geq 0$, luego $z - x = [h_1 + h_2]$, con $h_1 + h_2 \geq 0$, luego $x \leq z$.

Es obvio que si $f \leq g$, entonces $p(f) \leq p(g)$, pues $p(g) - p(f) = [g - f]$ y $g - f \geq 0$. ■

Notemos además que si $x \leq y$, entonces $x + z \leq y + z$, y que si $x$, $y \geq 0$, entonces $xy \geq 0$. Por lo tanto, si $C(X)/I$ está totalmente ordenado, entonces es un anillo ordenado.

Veamos lo que aporta que el ideal $I$ sea absolutamente convexo:

**Teorema 7.46** *Sea $X$ un espacio topológico e $I$ un ideal convexo de $C(X)$. Las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

1. *$I$ es absolutamente convexo.*
2. *$f \in I$ implica que $|f| \in I$.*
3. *Si $f$, $g \in I$, entonces $f \vee g \in I$.*
4. *Si $f$, $g \in C(X)$, existen el supremo y el ínfimo de $[f]$ y $[g]$ en $C(X)/I$, dados por $[f] \vee [g] = [f \vee g]$, $[f] \wedge [g] = [f \wedge g]$.*
5. *Si $f \in C(X)$, entonces $[f] \geq 0$ si y sólo si $[f] = [|f|]$.*

Demostración: Ya hemos observado que 1) $\Rightarrow$ 2), y también es claro que 2) $\Rightarrow$ 1), pues si $|f| \leq |g|$ con $g \in I$, por 2) tenemos que $|g| \in I$, luego por la convexidad de $I$ se cumple que $|f| \in I$ y a su vez $f \in I$.

2) $\Rightarrow$ 3) Tenemos que $|f| + |g| \in I$, y además

$$-(|f| + |g|) \leq f \vee g \leq |f| + |g|,$$

luego $f \vee g \in I$.

3) $\Rightarrow$ 4) Claramente $[f] \leq [f \vee g]$, $[g] \leq [f \vee g]$. Supongamos que $[f] \leq [h]$, $[g] \leq [h]$ y tenemos que probar que $[f \vee g] \leq [h]$. Tenemos que $[h - f] = [h_1]$, $[h - g] = [h_2]$, con $h_1, h_2 \geq 0$. Sean $f + h_1 - h = x \in I$, $g + h_2 - h = y \in I$. Entonces

$$f \vee g \leq (h + x) \vee (h + y) = h + (x \vee y),$$

luego $f \vee g + t = h + (x \vee y)$ para $t \geq 0$ y $x \vee y \in I$, luego $[h - f \vee g] = [t]$, luego $[f \vee g] \leq [h]$.

Claramente $[f \wedge g] = -([-f] \vee [-g])$ es el ínfimo de $[f]$ y $[g]$.

4) $\Rightarrow$ 5) Si $[f] = [|f|]$, obviamente $[f] \geq 0$.
Si $[f] \geq 0$, entonces $[-f] \leq 0 \leq [f]$, luego

$$[f] = [f] \vee [-f] = [f \vee -f] = [|f|].$$

5) $\Rightarrow$ 2) Si $f \in I$, entonces $[f] = 0 \geq 0$, luego $[|f|] = [f] = 0$, luego $|f| \in I$. ■

Observemos que todo $z$-ideal $I$ de $C(X)$ es absolutamente convexo, pues si $|f| \leq |g|$, con $g \in I$, entonces $Z(g) \subset Z(f)$, luego $Z(f) \in Z[I]$, luego $f \in I$. Usaremos varias veces este hecho elemental:

**Teorema 7.47** *Sea $X$ un espacio topológico e $I$ un $z$-ideal de $C(X)$. Entonces $f \in C(X)$ cumple $[f] \geq 0$ si y sólo si existe $Z \in Z[I]$ tal que $f|_Z \geq 0$.*

Demostración: Como $I$ es absolutamente convexo, $[f] \geq 0$ es equivalente a que $f - |f| \in I$, luego a que $Z = Z(f - |f|) \in Z[I]$, y claramente $f|_Z \geq 0$. Recíprocamente, si existe $Z \in Z[I]$ tal que $f|_Z \geq 0$, entonces $Z \subset Z(f - |f|)$, luego $Z(f - |f|) \in Z[I]$. ■

**Teorema 7.48** *Si $X$ es un espacio topológico, todo ideal primo $P$ en $C(X)$ es absolutamente convexo, y el cociente $C(X)/P$ está totalmente ordenado.*

Demostración: Supongamos que $|f| \leq |g|$, con $g \in P$. Definimos

$$h(x) = \begin{cases} f(x)^2/g(x) & \text{si } x \notin Z(g), \\ 0 & \text{si } x \in Z(g). \end{cases}$$

Veamos que $h$ es continua. Obviamente lo es en el abierto $X \setminus Z(g)$, luego falta probar que también lo es en cualquier punto $x_0 \in Z(g) \subset Z(f)$. Observemos que si $x \notin Z(g)$, entonces $|f(x)/g(x)| \leq 1$, luego $|h(x)| \leq |f(x)|$ para todo $x \in X \setminus Z(g)$. Dado $\epsilon > 0$, existe un entorno $U$ de $x_0$ tal que si $x \in U$, entonces $|f(x)| < \epsilon$, luego también $|h(x)| < \epsilon$, lo cual prueba que $h$ es continua en $x_0$. Claramente $f^2 = hg \in P$ y, como $P$ es primo, $f \in P$.

Ahora, como $(f-|f|)(f+|f|) = f^2-|f|^2 = 0 \in P$ y $P$ es primo, $f \pm |f| \in P$, luego $[f] \geq 0$ o bien $[f] \leq 0$. Esto implica a su vez que $[f] \leq [g]$ o $[g] \leq [f]$, para todo par de funciones $f$ y $g$. ■

En particular, si $M$ es un ideal maximal de $C(X)$, el cociente $C(X)/M$ es un cuerpo ordenado, y tenemos un monomorfismo de cuerpos $\mathbb{R} \longrightarrow C(X)/M$ que conserva el orden. En otras palabras, podemos identificar los números reales con las clases de las funciones constantes. Sin embargo, este monomorfismo no tiene por qué ser suprayectivo.

**Definición 7.49** Si $X$ es un espacio topológico y $M$ es un ideal maximal de $C(X)$, diremos que $M$ es *real* si el monomorfismo $\mathbb{R} \longrightarrow C(X)/M$ es un isomorfismo. En caso contrario diremos que $M$ es *hiperreal.*

Si $M$ es un ideal maximal hiperreal y $K = C(X)/M$, entonces $K$ es un cuerpo ordenado que contiene estrictamente al cuerpo $\mathbb{R}$ de los números reales. Necesariamente, $K$ es no arquimediano, es decir, existen elementos $\alpha \in K$ que son mayores que todos los números naturales. Más precisamente:

Llamamos $\mathcal{O}_K$ al conjunto de todos los $\alpha \in K$ tales que $|\alpha| \geq n$, para cierto número natural $n$. A sus elementos los llamaremos *elementos finitos* o *infinitamente grandes* de $K$. Equivalentemente, son los elementos tales que $|\alpha| \geq r$, para todo $r \in \mathbb{R}$.

Llamaremos $o_K$ al conjunto de todos los $\alpha \in K$ tales que $|\alpha| \leq 1/n$, para todo número natural $n \geq 1$. A sus elementos los llamaremos *infinitésimos* o *elementos infinitamente pequeños* de $K$. Equivalentemente, son los elementos tales que $|\alpha| \geq \epsilon$, para todo $\epsilon > 0$ (real).

Es fácil ver que $\mathcal{O}_K$ es un subanillo de $K$ y que $o_K$ es un ideal de $\mathcal{O}_K$. Lo que no es inmediato es que $\mathcal{O}_K \subsetneq K$ y que $o_K \neq 0$. Las dos afirmaciones son equivalentes, porque también es evidente que $o_K$ está formado por el 0 y por los inversos de los elementos de $K \setminus \mathcal{O}_K$.

Lo que sí que sabemos es que existe un $\alpha \in K \setminus \mathbb{R}$. Supongamos que no es infinitamente grande ni infinitesimal. Entonces existen números naturales tales que $1/m < \alpha < n$. El conjunto $A = \{r \in \mathbb{R} \mid r < \alpha\}$ es no vacío (pues $1/m \in A$) y está acotado superiormente (en $\mathbb{R}$) por $n$, luego tiene supremo $s \in \mathbb{R}$. No podemos asegurar que $s \leq \alpha$, pero por hipótesis $s \neq \alpha$. Para todo número natural $k \geq 1$, tenemos que $s - 1/k < \alpha < s + 1/k$, luego $|s - \alpha| < 1/k$, luego $s - \alpha \in o_K$ es no nulo.

Así pues, no sólo hemos probado que en $K$ existen elementos infinitos e infinitesimales no nulos, sino que todo elemento finito $\alpha$ se diferencia de un número real $s$ en una cantidad infinitesimal (lo hemos probado bajo el supuesto de que $\alpha$ no es infinitesimal, pero es trivialmente cierto en este caso, con $s = 0$).

Esto equivale a que el monomorfismo $\mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{O}_K/o_K$ es de hecho un isomorfismo. Notemos que es un monomorfismo porque ningún número real no nulo es infinitesimal. Esto nos da una unicidad: cada elemento finito de $K$ está infinitamente cerca de un único número real.

Todo lo dicho es trivialmente cierto en el caso en que el ideal $M$ es real, entendiendo que $\mathcal{O}_K = K = \mathbb{R}$ y que $o_K = 0$.

**Teorema 7.50** *Sea $X$ un espacio topológico, sea $M$ un ideal maximal de $C(X)$, sea $K = C(X)/M$ y $f \in C(X)$. Las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

1. *$[f]$ es infinitamente grande en $K$.*
2. *$f$ no está acotada en los elementos de $Z[M]$.*
3. *Para cada natural $n$, el cero $Z_n = \{x \in X \mid |f(x)| \geq n\}$ está en $Z[M]$.*

Demostración: Por 7.47, se cumple $[f] \geq n$ si y sólo si existe $Z \in Z[M]$ tal que $|f(x)| \leq n$ para todo $x \in Z$, luego la negación de 1) equivale a la negación de 2).

Igualmente, $[|f|] \geq n$ si y sólo si $Z_n$ contiene un elemento de $Z[M]$, lo cual equivale a que $Z_n \in Z[M]$. Esto prueba que 1) $\Leftrightarrow$ 3). ■

El teorema siguiente prueba que existen ideales hiperreales salvo en casos triviales:

**Teorema 7.51** *Sea $X$ un espacio topológico y $f \in C(X)$. Existe un ideal maximal $M$ en $C(X)$ tal que $[f]_M$ es infinitamente grande si y sólo si $f$ no está acotada en $X$.*

Demostración: El teorema anterior nos da que si $[f]_M$ es infinitamente grande, entonces $f$ no está acotada. Supongamos ahora que $f$ no está acotada. Entonces los conjuntos $Z_n$ considerados en el teorema anterior forman una familia con la propiedad de la intersección finita, luego pertenecen a un $z$-ultrafiltro $F$ en $X$, y el ideal $M = Z^{-1}[F]$ es maximal y, por el teorema anterior, $[f]_M$ es infinitamente grande. ■

Así pues:

**Teorema 7.52** *Si $X$ es un espacio topológico, todos los ideales maximales de $C(X)$ son reales si y sólo si $X$ es pseudocompacto.*

Ahora ya podemos determinar algebraicamente las extensiones de las funciones continuas de $C^*(X)$ a $C(\beta X)$ cuando identificamos $\beta X$ con $\mathcal{M}(X)$. Como las funciones no acotadas no se extienden a $\beta X$, conviene considerar la compactificación de Alexandroff $\mathbb{R}^\infty$ de $\mathbb{R}$:

**Definición 7.53** Sea $X$ un espacio completamente regular. Para cada función $f \in C(X)$, llamamos $f^* : \beta X \longrightarrow \mathbb{R}^\infty$ a la única extensión continua de $f$ a $\beta X$ (que existe, por el teorema 7.12).

Claramente, si $f \in C^*(X)$, entonces $f^* : \beta X \longrightarrow \mathbb{R}$ es la única extensión continua de $f$ a $\beta X$.

**Teorema 7.54** *Sea $X$ un espacio completamente regular y $f \in C(X)$. Para cada $p \in \beta X$, se cumple:*

1. $f^*(p) = \infty$ *si y sólo si* $[f]_{M_p}$ *es infinitamente grande.*
2. $f^*(p) = r \in \mathbb{R}$ *si y sólo si* $r$ *es el único número real infinitamente próximo a* $[f]_{M_p}$.

Demostración: Si $f^*(p) = \infty$, entonces, para cada número natural $n$, se cumple que $p \in \overline{Z}_n$, donde

$$Z_n = \{x \in X \mid |f(x)| \geq n\}.$$

En efecto, como $\mathbb{R}^\infty \setminus [-n, n]$ es un entorno de $\infty$, tenemos que

$$U_n = \{q \in \beta X \mid |f^*(q)| \geq n\}$$

es un entorno de $p$. Si $U$ es cualquier entorno de $p$, entonces $U \cap U_n$ es un entorno de $p$, luego $\varnothing \neq U \cap U_n \cap X \subset Z_n$.

El teorema 7.42 nos da que $Z_n \in p = Z[M_p]$, luego $[f]_{M_p}$ es infinitamente grande por 7.50.

Por otra parte, si $f^*(p) = r$, se razona igualmente que $p \in \overline{Y}_n$, donde

$$Y_n = \{x \in X \mid |f(x) - r| \leq 1/n\}.$$

De aquí que $Y_n \in Z[M_p]$ y en $Y_n$ se cumple que $-1/n \leq f - r \leq 1/n$, luego 7.47 nos da que $-1/n \leq [f]_{M_p} - r \leq 1/n$, luego $[f]_{M_r}$ está infinitamente cerca de $r$.

Como los dos casos son excluyentes y no hay más posibilidades, el teorema queda probado. ■

En particular, si $M$ es un ideal maximal de $C(X)$ y $f \in C^*(X)$, entonces el valor $\bar{f}(p)$ que la extensión continua de $f$ a $\beta X$ toma en el punto $p$ correspondiente a $M = M_p$ es el único número real tal que $r$ está infinitamente próximo a $[f]_M$.

**Nota** Observemos que los ideales maximales de $C(X)$ se corresponden con los de $C^*(X)$ a través de la biyección $M_p \mapsto M_p^*$, pero que ésta correspondencia no consiste en general en que $M_p^* = M_p \cap C^*(X)$. Lo que tenemos es que

$$M_p^* = \{f \in C^*(X) \mid \bar{f}(p) = 0\}, \qquad M_p = \{f \in C(X) \mid p \in \overline{Z(f)}\}.$$

Es fácil ver que $M_p \cap C^*(X) \subset M_p^*$, pero no tiene por qué darse la igualdad. Concretamente, el teorema anterior implica que

$$M_p^* = \{f \in C^*(X) \mid [f]_{M_p} \text{ es infinitesimal}\},$$

mientras que, obviamente

$$M_p \cap C^*(X) = \{f \in C^*(X) \mid [f]_{M_p} = 0\}. \qquad ■$$

Terminamos con una caracterización de los ideales maximales reales en términos de sus conjuntos de ceros:

**Teorema 7.55** *Sea $X$ un espacio topológico y $M$ un ideal maximal en $C(X)$. Las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

1. *$M$ es real.*
2. *El $z$-ultrafiltro $Z[M]$ es cerrado para intersecciones numerables.*
3. *El $z$-ultrafiltro $Z[M]$ tiene la propiedad de la intersección numerable (la intersección de una cantidad numerable de sus elementos es no vacía).*

DEMOSTRACIÓN: 1) $\Rightarrow$ 2) Sea $\{Z(f_n)\}_{n=1}^{\infty}$ una familia de elementos de $Z[M]$ y supongamos que su intersección no pertenece a $Z[M]$. Consideremos la función $g(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (|f_n(x)| \wedge 2^{-n})$, claramente continua y no negativa. Además

$$Z(g) = \bigcap_{n=1}^{\infty} Z(f_n) \notin Z[M].$$

Entonces $[g]_M \geq 0$ y $[g]_M \neq 0$. Por otra parte, $Z(f_1) \cap \cdots \cap Z(f_m) \in Z[M]$ no es vacío, luego, si $x$ está en la intersección,

$$g(x) = \sum_{n=m+1}^{\infty} (|f_n(x)| \wedge 2^{-n}) \leq \sum_{n=m+1}^{\infty} 2^{-n} = 1/2^m,$$

luego el teorema 7.47 nos da que $[g]_M \leq 1/2^m$ para todo $m$, lo que significa que $[g]_M$ es infinitesimal, luego $M$ es hiperreal.

2) $\Rightarrow$ 3) es trivial.

3) $\Rightarrow$ 1) Si $M$ es hiperreal, existe $f \in C(X)$ tal que $[f]_M$ es infinitamente grande. El teorema 7.50 implica que $Z_n = \{x \in X \mid |f(x)| \geq n\} \in Z[M]$ y, obviamente, la intersección de estos conjuntos es vacía. ∎

En vista del teorema anterior, a veces se llama *ultrafiltros reales* a los $z$-ultrafiltros cerrados para intersecciones numerables. Así, un ideal maximal de $C(X)$ es real si y sólo si su $z$-ultrafiltro asociado es real.

## 7.4 Espacios realcompactos

El teorema 7.40 afirma que un espacio compacto $X$ está completamente determinado por su anillo de funciones continuas $C(X)$. Trivialmente, esto es lo mismo que decir que está completamente determinado por el anillo $C^*(X)$. Si expresamos el resultado en términos de $C^*(X)$, podemos afirmar que es el mejor resultado posible en esta línea, pues si $X$ es cualquier espacio completamente regular no compacto, tenemos que $C^*(X) \cong C^*(\beta X)$, luego $C^*$ no permite distinguir un espacio $X$ de su compactificación $\beta X$.

Sin embargo, en términos de $C(X)$, el teorema 7.40 dista mucho de ser el mejor posible, pues existe una clase mucho más amplia de espacios topológicos que están completamente determinados por su anillo de funciones continuas. Se trata de los espacios realcompactos, que vamos a introducir ahora.

El teorema 7.37 muestra que los ideales maximales fijos de $C(X)$ son reales, pues si $p \in X$, entonces $[f]_{M_p} = f(p)$. En cambio, los ideales maximales libres pueden ser reales o hiperreales.

**Definición 7.56** Un espacio completamente regular $X$ es *realcompacto* si todo ideal maximal real de $C(X)$ es fijo.

La mera definición nos basta para demostrar lo que hemos afirmado:

**Teorema 7.57** *Dos espacios topológicos realcompactos $X$ e $Y$ son homeomorfos si y sólo si $C(X)$ y $C(Y)$ son isomorfos.*

Demostración: Sea $\phi : C(X) \longrightarrow C(Y)$ un isomorfismo de anillos. Si $M$ es un ideal maximal de $C(X)$ y $\bar{\phi}(M) = \phi[M]$, tenemos también un isomorfismo de cuerpos ordenados $C(X)/M \longrightarrow C(Y)/\bar{\phi}(M)$, luego $M$ es real si y sólo si lo es $\bar{\phi}(M)$.

Así, si $p \in X$, tenemos que $M_p$ es un ideal real de $C(X)$, luego $\bar{\phi}(M_p)$ es un ideal real de $C(Y)$, luego por la realcompacidad es fijo, es decir, es de la forma $\bar{\phi}(M_p) = M_{f(p)}$, para cierto punto $f(p) \in Y$. Tenemos entonces un diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & i[X] \arrow[r] \arrow[d, "\bar{\phi}"] & \mathcal{M}(X) \arrow[d, "\bar{\phi}"] \\ Y \arrow[r, "i"'] & i[Y] \arrow[r] & \mathcal{M}(Y) \end{tikzcd}$$

donde las flechas horizontales son las inmersiones canónicas $i(p) = M_p$, que son homeomorfismos en sus imágenes respectivas. La aplicación $f$ es biyectiva y la conmutatividad del primer cuadrado implica que es un homeomorfismo. ■

En el resto de esta sección estudiaremos la clase de los espacios realcompactos y veremos, entre otras cosas, que es muy amplia. Empezamos observando que la realcompacidad tiene una caracterización topológica muy simple que puede tomarse como definición:

**Teorema 7.58** *Un espacio completamente regular $X$ es realcompacto si y sólo si todo $z$-ultrafiltro real en $X$ (es decir, cerrado para intersecciones numerables) es convergente.*

Demostración: Por el teorema 7.55, un ideal $M$ maximal de $C(X)$ es real si y sólo si $Z[M]$ es un $z$-ultrafiltro con la propiedad de la intersección numerable y por definición $M$ es fijo si y sólo si $\bigcap Z[M] \neq \varnothing$, luego $X$ es realcompacto si y sólo si todo $z$-ultrafiltro real tiene un punto adherente, pero en un $z$-ultrafiltro esto equivale a la convergencia (teorema 7.34) ■

Es claro entonces que todo espacio compacto es realcompacto, pero en realidad tenemos algo más general:

**Teorema 7.59** *Todo espacio de Lindelöf regular es realcompacto.*

DEMOSTRACIÓN: Vamos a probar algo más general: un espacio completamente regular $X$ es de Lindelöf si y sólo si todo $z$-filtro con la propiedad de la intersección numerable tiene un punto de acumulación.

En efecto, si $F$ es un $z$-filtro con la propiedad de la intersección numerable y su intersección fuera vacía, entonces $\{X \setminus Z \mid Z \in F\}$ es un cubrimiento abierto de $X$, luego existe un subcubrimiento numerable, $\{X \setminus Z_n\}_{n=0}^{\infty}$, de modo que $\{Z_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una familia de elementos de $F$ con intersección vacía.

Si $X$ tiene la propiedad indicada y $\mathcal{U}$ es un cubrimiento abierto de $X$, como los coceros en $X$ forman una base, el conjunto $\mathcal{C}$ de todos los coceros contenidos en algún elemento de $U$ es también un cubrimiento abierto de $X$, luego el conjunto $\Sigma$ de todos los complementarios de los coceros de $\mathcal{C}$ es una familia de ceros con intersección vacía.

Si $\Sigma$ tuviera la propiedad de la intersección numerable, generaría un $z$-filtro con la propiedad de la intersección numerable, luego por hipótesis $\bigcap \Sigma \neq \varnothing$, lo que equivale a que $\mathcal{C}$ no es un cubrimiento. Por lo tanto existe un subconjunto numerable $\Sigma_0 \subset \Sigma$ tal que $\bigcap \Sigma_0 = \varnothing$, luego el conjunto $\mathcal{C}_0 \subset \mathcal{C}$ formado por los complementarios de los elementos de $\Sigma_0$ es un cubrimiento abierto de $X$ y entonces $\mathcal{U}$ tiene un subcubrimiento numerable formado por un abierto de $\mathcal{U}$ que contenga a cada cocero de $\mathcal{C}_0$. ■

**Teorema 7.60** *Un espacio de Hausdorff $X$ es compacto y sólo si es realcompacto y pseudocompacto.*

DEMOSTRACIÓN: Obviamente los espacios de Hausdorff compactos son realcompactos y pseudocompactos. Recíprocamente, en un espacio realcompacto y pseudocompacto $X$ todos los $z$-ultrafiltros son reales (por el teorema 7.52), luego todos son convergentes (por la realcompacidad). Esto implica que $\beta X = X$, luego $X$ es compacto. ■

Así, $\omega_1$ con la topología de orden (ejemplo A.30) es un caso de espacio no realcompacto, pues es pseudocompacto y no compacto.

La pregunta de si los espacios discretos son realcompactos tiene una respuesta sorprendente. Si $X$ es un espacio discreto, todos los ultrafiltros son $z$-ultrafiltros, luego $X$ no es realcompacto si existe un ultrafiltro libre en $X$ cerrado para intersecciones numerables, es decir, un ultrafiltro libre $\aleph_1$-completo, pero eso es justamente lo que en [TC 7.70] hemos llamado una medida de Ulam, y un conjunto $X$ tiene una medida de Ulam si y sólo si la tiene su cardinal, es decir, si y sólo si su cardinal es medible Ulam. Por consiguiente:

**Teorema 7.61** *Un espacio discreto $X$ es realcompacto si y sólo si su cardinal no es medible Ulam.*

No puede demostrarse que existan cardinales medibles Ulam, pero hemos demostrado [TC 7.77] que si existe un cardinal medible Ulam, el menor de ellos es medible, luego en particular fuertemente inaccesible. Por lo tanto, un espacio discreto que no sea realcompacto tiene que tener cardinal mayor que $2^{\aleph_0}$, o que $2^{2^{\aleph_0}}$, etc. Recíprocamente, todo espacio discreto de cardinal $2^{\aleph_0}$, o $2^{2^{\aleph_0}}$, etc. es realcompacto.

Como consecuencia vemos que una imagen continua de un espacio realcompacto no tiene por qué ser realcompacta, pues la identidad $f : \omega_1 \longrightarrow \omega_1$ es continua cuando a la izquierda consideramos la topología discreta (con la que $\omega_1$ es realcompacto) y a la derecha la topología de orden (con la que no es realcompacto).

**Definición 7.62** Una *realcompactificación* de un espacio topológico $X$ es un par $(Y, i)$, donde $Y$ es un espacio realcompacto e $i : X \longrightarrow Y$ es un homeomorfismo en su imagen tal que $Y = \overline{i[X]}$. Dos realcompactificaciones $(Y, i)$ y $(Y', i')$ de un mismo espacio $X$ son *equivalentes* si existe un homeomorfismo que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "f"] & Y' \\ X \arrow[u, "i"] \arrow[ur, "i'"'] & \end{tikzcd}$$

Obviamente, toda compactificación de un espacio $X$ es una realcompactificación, pero el recíproco no es cierto en general. Como los espacios realcompactos son completamente regulares, es inmediato que un espacio topológico admite una realcompactificación si y sólo si es completamente regular. Como en el caso de las compactificaciones, en la práctica identificaremos a cada espacio $X$ con su imagen en cualquiera de sus realcompactificaciones.

**Teorema 7.63** *Todo espacio completamente regular tiene una realcompactificación $\upsilon X$ unívocamente determinada salvo equivalencia por cualquiera de las propiedades siguientes:*

1. *$\upsilon X$ es equivalente al mayor subespacio de $\beta X$ en el que $X$ está $C$-sumergido.*

2. *$\upsilon X$ es equivalente al menor subespacio realcompacto de $\beta X$ que contiene a $X$.*

3. *$X$ está $C$-sumergido en $\upsilon X$.*

4. *Toda aplicación continua $f : X \longrightarrow Y$ en un espacio realcompacto $Y$ se extiende a una aplicación continua $\bar{f} : \upsilon X \longrightarrow Y$.*

Demostración: Si tomamos como $\beta X$ el conjunto de todos los $z$-ultrafiltros de $X$, llamamos $\upsilon X \subset \beta X$ al conjunto de todos los $z$-ultrafiltros reales. Puesto que todos los $z$-ultrafiltros fijos son reales, así tenemos que $X \subset \upsilon X \subset \beta X$.

Más precisamente, si no identificamos $X$ con su imagen $i[X] \subset \beta X$ (que es el conjunto de todos los $z$-ultrafiltros fijos), lo que tenemos es que $i[X] \subset \upsilon X$, y así se ve claramente que la igualdad $i[X] = \upsilon X$ equivale a que $X$ sea realcompacto (el conjunto de los $z$-ultrafiltros fijos coincide con el de los $z$-ultrafiltros reales).

Obviamente $X$ es denso en $\upsilon X$, pero, aunque tenemos que $X = \upsilon X$ si y sólo si $X$ es realcompacto, esto no implica que $\upsilon X$ sea realcompacto en general. Enseguida veremos que sí que lo es.

El teorema 7.54 implica que, si $X$ es un espacio completamente regular y $p \in \beta X$, se cumple que $f^*(p) \neq \infty$ para toda $f \in C(X)$ si y sólo si el ideal maximal $M_p$ es real, es decir, si y sólo si el $z$-ultrafiltro $Z[M_p] = p$ es real. Por consiguiente, $f^*$ no toma el valor $\infty$ en $\upsilon X$ y así concluimos que $X$ está $C$-sumergido en $\upsilon X$. Más aún, que $\upsilon X$ es el mayor subespacio de $\beta X$ en el que $X$ está $C$-sumergido.

Notemos que esto no depende de la construcción particular que hemos hecho de $\upsilon X$, es decir, hemos probado que en (una realización concreta de) $\beta X$ existe un máximo espacio $\upsilon X$ en el que $X$ está $C$-sumergido y tal que $X = \upsilon X$ si y sólo si $X$ es realcompacto, pero entonces, si $K_1$ y $K_2$ son dos compactificaciones de $X$ en las que $X$ está $C^*$-sumergido, es decir, dos compactificaciones equivalentes a la compactificación de Stone-Čech de $X$, tanto en $K_1$ como en $K_2$ existe un máximo subespacio $\upsilon_i X$ en el que $X$ está $C$-sumergido y tal que $X = \upsilon_i X$ si y sólo si $X$ es realcompacto. Como todo esto son propiedades topológicas, la equivalencia $f : K_1 \longrightarrow K_2$ se restringe obviamente a un homeomorfismo $f : \upsilon_1 X \longrightarrow \upsilon_2 X$, que podremos decir que es una equivalencia de realcompactificaciones en cuanto hayamos probado que $\upsilon X$ es realcompacto.

En efecto, podemos considerar a $\beta X$ como la compactificación de Stone-Čech de $\upsilon X$, y entonces

$$X \subset \upsilon X \subset \upsilon\upsilon X \subset \beta X,$$

donde $\upsilon\upsilon X$ es el menor subespacio de $\beta X$ donde $\upsilon X$ está $C$-sumergido. Pero entonces $X$ está $C$-sumergido en $\upsilon\upsilon X$, luego tiene que ser $\upsilon\upsilon X = \upsilon X$, y esto prueba que $\upsilon X$ es realcompacto.

Con esto tenemos probado que existe una realcompactificación de $X$ unívocamente determinada salvo equivalencia por la propiedad 1) del enunciado. (Y además sabemos que $X = \upsilon X$ si y sólo si $X$ es realcompacto.)

2) Supongamos ahora que $X \subset Y \subset \beta X$ con $Y$ realcompacto. Entonces $\beta X$ es también la compactificación de Stone-Čech de $Y$, luego $Y = \upsilon Y$ es el mayor subespacio de $\beta X$ en el que está $C$-sumergido. Pero $Y$ está $C$-sumergido en $Y \cup \upsilon X$, pues si $f \in C(Y)$, podemos extenderla a $f^* : \beta X \longrightarrow \mathbb{R}^\infty$ y la extensión será finita en $\upsilon(X)$, y obviamente en $Y$, luego también en $Y \cup \upsilon X$. Por consiguiente, $Y \cup \upsilon X \subset Y$, luego $\upsilon X \subset Y$.

3) Si $Y$ es una realcompactificación de $X$ en la que $X$ está $C$-sumergido, entonces $X$ está $C^*$-sumergido en $\beta Y$, luego podemos considerar a $\beta Y$ como compactificación de Stone-Čech de $X$, de modo que $X \subset Y \subset \beta X$. Como $X$ está $C$-sumergido en $Y$, tenemos que $Y \subset \upsilon X$ por 1), y como $Y$ es realcompacto, $\upsilon X \subset Y$ por 2).

Notemos que el hecho de que $X$ es realcompacto si y sólo si $X = \upsilon X$ es ahora un caso particular de 3), por lo que ya no necesitamos considerarlo como una afirmación adicional.

4) En principio $f$ se extiende a una aplicación continua $\bar{f} : \beta X \longrightarrow \beta Y$. Sin necesidad de suponer que $Y$ es realcompacto, vamos a ver que $\bar{f}[\upsilon X] \subset \upsilon Y$.

Tomamos $p \in \upsilon X$. Para probar que $\bar{f}(p) \in \upsilon Y$ basta ver que si $g \in C(Y)$, entonces la extensión $g^* : \beta Y \longrightarrow \mathbb{R}^\infty$ es finita en $\bar{f}(p)$. Tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "i"'] & \mathbb{R} \arrow[d, "i"] \\
\beta X \arrow[r, "\bar{f}"'] & \beta Y \arrow[r, "g^*"'] & \mathbb{R}^\infty
\end{tikzcd}$$

Por la unicidad de las extensiones, tenemos que $(f \circ g)^* = \bar{f} \circ g^*$, de donde resulta que $g^*(\bar{f}(p)) = (f \circ g)^*(p) \neq \infty$, porque $p \in \upsilon X$. Así pues, $\bar{f}$ se restringe a una aplicación continua $\bar{f} : \upsilon X \longrightarrow \upsilon Y$. ■

Conviene recordar que una realización concreta de $\upsilon X$ es el conjunto de los $z$-filtros reales en $X$ o, equivalentemente, los límites de los ultrafiltros reales de $X$ en $\beta X$.

La restricción induce un isomorfismo de anillos $C(\upsilon X) \longrightarrow C(X)$, por lo que el teorema 7.57 no puede extenderse a una clase más amplia de espacios: todo espacio no realcompacto $X$ tiene el mismo anillo de funciones continuas que el espacio realcompacto $\upsilon X$.

Como consecuencia del teorema anterior tenemos una caracterización de los espacios pseudocompactos:

**Teorema 7.64** *Un espacio completamente regular $X$ es pseudocompacto si y sólo si $\upsilon X = \beta X$.*

Demostración: En efecto, si $X$ es pseudocompacto entonces está $C$-sumergido en $\beta X$, luego tiene que ser $\upsilon X = \beta X$. Si se cumple esta igualdad, toda función continua en $X$ se extiende a $\beta X$, luego está acotada. ■

**Teorema 7.65** *Todo subespacio cerrado de un espacio realcompacto es realcompacto.*

Demostración: Sea $X \subset Y$, donde $X$ es cerrado en $Y$ e $Y$ es realcompacto. La inclusión $X \longrightarrow Y$ se extiende a una aplicación continua $f : \upsilon X \longrightarrow Y$. El teorema 7.3 nos da que $f[\upsilon X \setminus X] \cap X = \varnothing$, luego $f^{-1}[X] = X$, luego $X$ es cerrado en $\upsilon X$, luego $X = \upsilon X$ y así $X$ es realcompacto. ■

**Teorema 7.66** *Todo producto de espacios realcompactos es realcompacto.*

Demostración: Sea $X = \prod\limits_{i \in I} X_i$ un producto de espacios realcompactos. Cada proyección $p_i$ se extiende a una función continua $\bar{p}_i : \upsilon X \longrightarrow X_i$, y con estas funciones formamos una función continua $f : \upsilon X \longrightarrow X$ que restringida a $X$ es la identidad. De nuevo el teorema 7.3 nos da que $f[\upsilon X \setminus X] \cap f[X] = \varnothing$, lo que sólo es posible si $\upsilon X = X$, luego $X$ es realcompacto. ■

**Teorema 7.67** *Si $f : X \longrightarrow Y$ es continua con $X$ realcompacto y $A \subset Y$ es realcompacto, entonces $f^{-1}[A]$ es realcompacto.*

Demostración: La inclusión $f^{-1}[A] \longrightarrow X$ se extiende a una aplicación continua $g : \upsilon f^{-1}[A] \longrightarrow X$, pero también $f|_{f^{-1}[A]} : f^{-1}[A] \longrightarrow A$ se extiende a una aplicación continua $h : \upsilon f^{-1}[A] \longrightarrow A$. Tanto $g \circ f$ como $h$ toman valores en $X$ y coinciden en $f^{-1}[A]$, luego $h = g \circ f$. El teorema 7.3 nos da que

$$g[\upsilon f^{-1}[A] \setminus f^{-1}[A]] \subset X \setminus f^{-1}[A],$$

luego, aplicando $f$,

$$h[\upsilon f^{-1}[A] \setminus f^{-1}[A]] \subset f[X \setminus f^{-1}[A]] \subset X \setminus A,$$

lo cual sólo es posible si $\upsilon f^{-1}[A] \setminus f^{-1}[A] = \varnothing$. ■

Como consecuencia:

**Teorema 7.68** *Todo cocero en un espacio realcompacto es realcompacto.*

(Basta aplicar el teorema anterior con $A = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.)

**Teorema 7.69** *Toda intersección de subespacios realcompactos de un espacio topológico es realcompacta.*

Demostración: Sea $\{X_i\}_{i\in I}$ una familia de subespacios realcompactos de un espacio topológico y sea $X = \bigcap\limits_{i\in I} X_i$.

La inclusión $X \longrightarrow X_i$ se extiende a una aplicación continua $f_i : \upsilon X \longrightarrow X_i$, pero todas las $f_i$ coinciden en $X$, luego coinciden en $\upsilon X$, por lo que cualquiera de ellas es una aplicación continua $f : \upsilon X \longrightarrow X$. El teorema 7.3 implica que $\upsilon X = X$. ■

**Teorema 7.70** *Si $X$ es realcompacto y todos los puntos de $X$ son $G_\delta$, entonces todo subespacio de $X$ es realcompacto.*

Demostración: Por el teorema 5.53, los puntos de $X$ son ceros, luego los conjuntos $X \setminus \{p\}$ son coceros, luego son realcompactos, por 7.68, y todo subespacio $A \subset X$ es de la forma $A = \bigcap\limits_{p\in X\setminus A} (X \setminus \{p\})$, luego es realcompacto por el teorema anterior. ■

Veamos otra caracterización notable de los espacios realcompactos:

**Teorema 7.71** *Un espacio topológico $X$ es realcompacto si y sólo si es homeomorfo a un subespacio cerrado de un cubo $\mathbb{R}^I$.*

Demostración: Sea $X$ un espacio completamente regular, sea $I = C(X)$ y consideremos la aplicación $\phi : X \longrightarrow \mathbb{R}^I$ dada por $\phi(x) = \{f(x)\}_{f\in I}$. Claramente $\phi$ es continua e inyectiva (pues dados dos puntos distintos hay una función continua que los distingue).

Vamos a probar que $\phi : X \longrightarrow \phi[X]$ es un homeomorfismo, para lo cual probaremos que $\phi$ es cerrada. Sea $C \subset X$ un cerrado. Basta probar que $\phi[C] = \overline{\phi[C]} \cap \phi[X]$. Una inclusión es obvia y, si existe $\phi(x) \in \overline{\phi[C]} \setminus \phi[C]$, entonces $x \notin C$, luego existe $f \in I$ tal que $f(x) = 1$ y $f[C] = 0$, pero entonces $U = \{y \in \mathbb{R}^I \mid f(y_f) > 0\}$ es un entorno de $\phi(x)$ tal que $U \cap \phi[C] = \varnothing$, contradicción.

Sea $Y = \overline{\phi[X]}$, cerrado en $\mathbb{R}^I$. Como $\mathbb{R}$ es realcompacto (es Lindelöf), también lo es $\mathbb{R}^I$, luego también lo es $Y$. Ahora observamos que $\phi[X]$ está $C$-sumergido en $Y$, pues si $g \in C(\phi[X])$, podemos expresarla como $g = \phi \circ f$, con $f \in C(X)$, y la proyección $p_f$ es una extensión de $g$ a $\mathbb{R}^I$. Por lo tanto $Y = \upsilon\phi[X]$, luego si $X$ es realcompacto, tiene que ser $Y = \phi[X]$. ■

Del teorema anterior se desprende que todo espacio realcompacto es completamente uniformizable, pues $\mathbb{R}$ es completamente uniformizable, luego $\mathbb{R}^I$ también y todo cerrado en un espacio uniforme completo es completo. En realidad, refinando la prueba del teorema anterior obtenemos el análogo al teorema 7.15:

**Teorema 7.72** *Si $X$ es un espacio completamente regular, su realcompactificación de Hewitt es la compleción del espacio uniforme $(X, \mathcal{C})$.*

DEMOSTRACIÓN: Consideremos la aplicación $\phi : X \longrightarrow \mathbb{R}^I$ construida en la prueba del teorema anterior. Si $p_f$ es la proyección en la componente $f \in I$, tenemos que $\phi \circ p_f = f : X \longrightarrow R$, pero $f$ es uniformemente continua si consideramos en $X$ la uniformidad $\mathcal{C}$ y en $\mathbb{R}$ la uniformidad usual, luego $\phi$ también es uniformemente continua y $\overline{\phi[X]}$ es un subespacio completo de $\mathbb{R}^I$ (porque es cerrado). Por lo tanto, $\phi$ se extiende a una aplicación uniformemente continua $\bar{\phi} : \hat{X} \longrightarrow \overline{Y}$, luego la compleción $\hat{X}$ de $(X, \mathcal{C})$ es uniformemente homeomorfa a $\overline{Y}$, que hemos probado que es homeomorfa a $\upsilon X$. ■

El recíproco (que todo espacio completamente uniformizable sea realcompacto) no puede ser cierto, porque todo espacio discreto es completamente uniformizable, pero si su cardinal es medible Ulam no es realcompacto. No obstante, con una hipótesis mínima para evitar este caso, sí que se cumple. Para probarlo necesitamos algunos resultados previos.

**Teorema 7.73** *Si $X$ es un espacio pseudométrico y $\epsilon > 0$, existen conjuntos $Z_{n,x} \subset X$ (con $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ y $x \in X$) que cumplen las propiedades siguientes:*

1. $\bigcup\limits_{n,x} Z_{n,x} = X$.

2. *Cada $Z_{n,x}$ es cerrado de diámetro menor que $\epsilon$.*

3. *Para cada $n \in \mathbb{N}$, la familia $\{Z_{n,x}\}_{x \in X}$ es discreta, es decir, existe un $\delta > 0$ tal que si $x \neq y$, entonces $d(Z_{n,x}, Z_{n,y}) \geq \delta$.*

DEMOSTRACIÓN: Fijemos un buen orden $\preceq$ en $X$. Fijado $n$, construimos $Z_{n,x}$ por recursión sobre $x$. Sea $\delta = \epsilon/2$. Definimos $Z_{n,x}$ como el conjunto de todos los $z \in X$ que cumplen:

1. Para todo $y \prec x$, $d(Z_{n,y}, z) \geq \delta/n$,
2. $d(x, z) \leq \delta - \delta/n$.

Como la distancia y la distancia a un conjunto son funciones continuas, es claro que cada $Z_{n,y}$ es cerrado. Además $d(Z_{n,x}) < 2\delta = \epsilon$ y si $y \prec x$, se cumple que $d(Z_{n,x}, Z_{n,y}) \geq \delta/n$. Por lo tanto, se cumplen las propiedades 2) y 3) del enunciado.

Para probar 1) tomamos $z \in X$ y sea $x \in X$ el mínimo (respecto del buen orden) tal que $d(x, z) < \delta$ (notemos que $x = z$ cumple lo requerido, luego estamos calculando el mínimo de un conjunto no vacío). Tomamos $n$ tal que $d(x, z) < \delta - \delta/n$. Así, si $y \prec x$ tenemos que $d(y, z) \geq \delta$, luego para todo $w \in Z_{n,y}$, se cumple

$$d(w, z) \geq d(y, z) - d(y, w) \geq \delta - (\delta - \delta/n) = \delta/n,$$

luego $d(Z_{n,y}, z) \geq \delta/n$, luego $z \in Z_{n,x}$. ■

Observemos que, en las condiciones del teorema, cualquier unión de conjuntos $Z_{n,x}$ (con $n$ fijo) es cerrada, pues si $z$ no está en la unión, la bola $B_{(\delta-\delta/n)/2}(z)$ corta a lo sumo a uno de los cerrados, luego reduciendo el radio podemos hacer que no corte a ninguno.

En particular, podemos aplicar este teorema cuando $X$ es un espacio uniforme y $d$ es una pseudométrica uniforme en $X$. En tal caso, cada unión $Z = \bigcup\limits_{x \in I} Z_{n,x}$ es cerrada para la topología inducida por $d$, luego se cumple que $Z = \{z \in X \mid d(z, Z) = 0\}$ y, como la función $d(\ \ , Z)$ es continua (para la topología de $X$), concluimos que $Z$ es cerrado en $Z$. Más aún, es un cero. En particular, $Z_n = \bigcup\limits_{x \in X} Z_{n,x}$ es un cero en $X$ y $\bigcup\limits_{n} Z_n = X$.

Si $U$ es un $z$-ultrafiltro real, existe un $n$ tal que $Z_n \in U$, pues en caso contrario $U$ contendría un elemento disjunto de cada $Z_n$, luego también la intersección, que sería disjunta con $X$, lo cual es absurdo. Así hemos probado lo siguiente:

**Teorema 7.74** *Sea $X$ un espacio uniforme de Hausdorff, sea $d$ una pseudométrica uniforme en $X$, sea $\epsilon > 0$ y $F$ un $z$-ultrafiltro real en $X$. Entonces existe una familia $\{Z_i\}_{i \in I}$ de subconjuntos de $X$ no vacíos tal que:*

1. $\bigcup\limits_{i \in I} Z_i \in F$.
2. *$\{Z_i\}_{i \in I}$ es discreta respecto de $d$.*
3. *Para todo $J \subset I$, la unión $\bigcup\limits_{\in J} Z_i$ es un cero.*

(La familia $\{Z_i\}_{i \in I}$ no es más que $\{Z_{n,x}\}_{x \in X}$ para un $n$ adecuado eliminando los conjuntos que sean vacíos.)

Ahora formamos un conjunto $S \subset X$ que conste de un punto $x_i$ en cada $Z_i$, de modo que $S$ es $d$-discreto, es decir, existe un $\delta > 0$ tal que $d(x_i, x_j) \geq \delta$ siempre que $i \neq j$. Definimos $F_S \subset \mathcal{P}S$ mediante

$$A \in F_S \leftrightarrow \bigcup_{s_i \in A} Z_i \in F.$$

Ahora observamos que $F_S$ es un $z$-ultrafiltro real en $S$. Claramente es un $z$-filtro y si $A \subset S$, entonces $A \in F_S$ o bien $S \setminus A \in F_S$, por 7.19.

**Teorema 7.75** *Sea $X$ un espacio uniforme de Hausdorff. Si para cada pseudométrica uniforme $d$ en $X$ se cumple que todo subespacio $d$-discreto de $X$ es realcompacto, entonces todo $z$-ultrafiltro real en $X$ es un $z$-filtro de Cauchy.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $F$ un $z$-ultrafiltro real en $X$. Según el teorema 2.25, una banda básica en $X$ es de la forma $V = \{(x, y) \in X \times X \mid d(x, y) < \epsilon\}$, para cierta pseudométrica uniforme $d$ en $X$. El conjunto $S$ que hemos construido a partir de $F$ es discreto, luego, por hipótesis es realcompacto. Por lo tanto, el $z$-ultrafiltro real $F_S$ es fijo, luego existe un $i \in I$ tal que $\{s_i\} \in F_A$, lo que equivale a que $Z_i \in F$, y $d(Z_i) < \epsilon$, luego $d(Z_i) < V$. ■

**Teorema 7.76 (Shirota)** *Sea $X$ un espacio completamente regular cuyos subespacios cerrados discretos tengan cardinal no medible Ulam. Entonces $X$ es completamente uniformizable si y sólo si es realcompacto.*

DEMOSTRACIÓN: El teorema 7.72 (o, más fácilmente, las observaciones previas) prueba que si $X$ es realcompacto es completamente uniformizable. Si $X$ es completamente uniformizable y cumple la hipótesis sobre medibilidad, el teorema anterior nos da que todo $z$-ultrafiltro real es un $z$-filtro de Cauchy, luego converge, y esto equivale a que el $z$-ultrafiltro sea fijo. Así pues, $X$ es realcompacto. ■

En particular, un espacio completamente regular de cardinal no medible Ulam es completamente metrizable si y sólo si es realcompacto.

Un enunciado equivalente que no menciona explícitamente los cardinales medibles Ulam es el siguiente: *Un espacio $X$ completamente metrizable es realcompacto si y sólo si todos sus subespacios cerrados discretos lo son.*

## 7.5 P-espacios

La definición de topología pide únicamente que las intersecciones finitas de abiertos sean abiertas, pero, ¿es posible que en un espacio topológico las intersecciones numerables de abiertos sean abiertas? La respuesta es que sí que es posible, pero se trata de una condición muy restrictiva que, no obstante, tiene interés estudiar, porque muestra que otras propiedades que podrían parecer razonables son en realidad igualmente restrictivas.

**Definición 7.77** Un *$P$-punto* en un espacio topológico $X$ es un punto $p \in X$ tal que toda intersección numerable de entornos de $p$ es también un entorno de $p$. Un *$P$-espacio* es un espacio topológico cuyos puntos son todos $P$-puntos.

Claramente un $P$-espacio es un espacio en el que la intersección numerable de abiertos es abierta o, en otros términos, en el que todo $G_\delta$ es abierto. Equivalentemente, la unión numerable de cerrados es cerrada, o también todo $F_\sigma$ es cerrado.

Observemos que si $Y \subset X$ y $p \in Y$ es un $P$-punto en $X$, también lo es en $Y$, por lo que todo subespacio de un $P$-espacio es un $P$-espacio.

Más aún, el conjunto de todos los $P$-puntos de cualquier espacio topológico es un $P$-espacio.

También se comprueba sin dificultad que el producto de dos $P$-espacios es un $P$-espacio. Sin embargo, un producto infinito $X = \prod\limits_{i\in I} X_i$ de $P$-espacios no triviales no es nunca un $P$-espacio, pues si $I_0 \subset I$ es infinito numerable y $\varnothing \neq U_i \subsetneq X_i$ son abiertos, para $i \in I_0$, entonces $\bigcap\limits_{i\in I_0} p^{-1}[U_i]$ es un $G_\delta$ de interior vacío en $X$.

Si no exigimos propiedades de separación, es fácil encontrar ejemplos de $P$-espacios, por ejemplo, un conjunto con la topología del punto particular (ejemplo A.1) es un $P$-espacio que no cumple el axioma $T_0$, mientras que un conjunto con la topología conumerable (ejemplo A.4) es un $P$-espacio $T_1$, pero no $T_2$. El ejemplo A.9 es un caso de $P$-espacio de Hausdorff no regular. En cambio, la regularidad equivale a la regularidad completa:

**Teorema 7.78** *Todo $P$-espacio regular es completamente regular.*

Demostración: Sea $X$ un $P$-espacio regular, sea $C \subset X$ cerrado y sea $p \in X \setminus C$. Por la regularidad podemos tomar un abierto $p \in U_0 \subset \overline{U}_0 \subset X \setminus C$, y a su vez podemos construir recurrentemente una sucesión de abiertos $\{U_n\}_{n<\omega}$ tal que $p \in U_{n+1} \subset \overline{U}_{n+1} \subset U_n$. Así

$$p \in U = \bigcap_{n\in\omega} U_n = \bigcap_{n\in\omega} \overline{U}_n \subset X \setminus C.$$

La intersección $U$ es abierta (porque $X$ es un $p$-espacio) y es cerrada (porque es intersección de cerrados), luego $U$ y $X \setminus U$ son ceros disjuntos que separan completamente a $p$ y a $C$. ■

El "espacio Fortissimo" (ejemplo A.16) es un caso de $P$-espacio $T_5$, pero un $P$-espacio no discreto no puede ser $T_6$. El ejemplo A.33 es un caso de $P$-espacio completamente regular que no es normal.

En los espacios completamente regulares los $P$-puntos tienen una caracterización algebraica:

**Teorema 7.79** *Sea $X$ un espacio completamente regular y $p \in X$. Las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

1. *$p$ es un $P$-punto.*
2. *$M_p = O_p$.*
3. *Toda función $f \in C(X)$ es constante en un entorno de $p$.*

Demostración: Recordemos que $M_p$ está definido en 7.37 y $O_p$ en 7.44. La igualdad $M_p = O_p$ equivale a $Z[M_p] = Z[O_p]$, es decir, a que el conjunto de los ceros a los que pertenece $p$ coincida con el conjunto de los ceros que son entornos de $p$.

1) $\Rightarrow$ 2) Si $Z$ es un cero y $p \in Z$, como $Z$ es un $G_\delta$, es una intersección numerable de entornos de $p$, luego es un entorno de $p$.

2) $\Rightarrow$ 1) Si $p \in \bigcap\limits_{n\in\omega} U_n$, donde cada $U_n$ es un entorno de $p$, podemos tomar ceros $p \in Z_n \subset U_n$, con lo que $p \in \bigcap\limits_{n\in\omega} Z_n \subset \bigcap\limits_{n\in\omega} U_n$. La intersección numerable de ceros es un cero, luego por hipótesis es un entorno de $p$, luego la intersección de los entornos dados también.

2) $\Rightarrow$ 3) Si $f \in C(X)$, entonces $p \in Z(f - f(p))$, luego $U = Z(f - f(p))$ es un entorno de $p$ donde $f$ es constante igual a $f(p)$.

3) $\Rightarrow$ 2) Si $f \in C(X)$ y $p \in Z(f)$, entonces $f$ es constante (igual a 0) en un entorno de $p$, lo que significa que $Z(f)$ es un entorno de $p$. ■

Cuando esto sucede en todo punto tenemos más equivalencias:

**Teorema 7.80** *Si $X$ es un espacio completamente regular, las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

1. *$X$ es un $P$-espacio.*
2. *Todo $G_\delta$ es abierto.*
3. *Todo cero es abierto.*
4. *Todo ideal en $C(X)$ es un $z$-ideal.*
5. *Todo ideal en $C(X)$ es intersección de ideales primos.*
6. *Si $f \in C(X)$, existe $f_0 \in C(X)$ tal que $f = f_0 f^2$.*
7. *Todo ideal primo en $C(X)$ es maximal.*
8. *$M_p = O_p$ para todo $p \in X$.*

Demostración: Ya hemos visto que 1) $\Rightarrow$ 2) y 2) $\Rightarrow$ 3) es evidente, pues todo cero es un $G_\delta$.

3) $\Rightarrow$ 4) Sea $I$ un ideal en $C(X)$ y sea $f \in C(X)$ tal que $Z(f) \in Z[I]$, es decir, que existe $g \in I$ tal que $Z(f) = Z(g)$. Por 3) tenemos que los ceros son abiertos y cerrados, luego podemos definir $h \in C(X)$ mediante

$$h(x) = \begin{cases} f(x)/g(x) & \text{si } x \in X \setminus Z(g), \\ 0 & \text{si } x \in Z(g). \end{cases}$$

Así $f = hg \in I$.

4) $\Rightarrow$ 5) Por 7.29, todo $z$-ideal es intersección de ideales primos, luego por 4) esto vale para todo ideal.

5) $\Rightarrow$ 6) Por hipótesis $(f^2) = \bigcap\limits_{i\in I} P_i$, donde cada $P_i$ es un ideal primo en $C(X)$. Entonces $f^2 \in P_i$, luego $f \in P_i$, luego $f \in (f^2)$, luego $f = f_0 f^2$, para cierta función $f_0 \in C(X)$ (pues el ideal generado por $f^2$ no es sino el conjunto de los múltiplos de $f^2$).

6) $\Rightarrow$ 7) Sea $P$ un ideal primo en $C(X)$. Por [TC 1.39] basta probar que $C(X)/P$ es un cuerpo. Para ello tomamos $[f] \in C(X)/P$ no nula, y por 6) $f = f_0 f^2$, para cierta $f_0 \in C(X)$. Entonces $[f](1 - [f_0][f]) = 0$ con $[f] \neq 0$. Como $P$ es un ideal primo, el cociente es un dominio íntegro, luego $[f_0][f] = 1$, lo cual significa que $[f]$ tiene inverso, y así $C(X)/P$ es un cuerpo.

7) $\Rightarrow$ 8) Si $O_p \neq M_p$, como $O_p$ es un $z$-ideal, tiene que ser intersección de ideales primos, pero, según hemos observado tras la definición 7.44, todos ellos tienen que estar contenidos en el ideal maximal $M_p$, luego tiene que haber otros además de $M_p$, y todos ellos serán ideales primos no maximales.

8) $\Rightarrow$ 1) se sigue del teorema anterior. ■

Así pues, las buenas propiedades algebraicas que parecen en el teorema anterior (que los ideales primos coincidan con los maximales, etc.) sólo se dan en la reducida clase de los $P$-espacios.

En efecto, es una clase bastante reducida, pues:

1. *En un $P$-espacio, no puede ser que todos los puntos sean $G_\delta$, salvo que sea discreto. En particular no puede ser metrizable o siquiera* 1AN *(salvo en el caso discreto).*

   En efecto, si los puntos son $G_\delta$, son abiertos, luego la topología es la discreta.

2. *Un $P$-espacio infinito que sea $T_1$ no puede ser numerablemente compacto.*

   En efecto, en un espacio numerablemente compacto todo conjunto numerable tiene un punto de acumulación, mientras que en un $P$-espacio tiene que ser cerrado, pues los puntos son cerrados y las uniones numerables de cerrados son cerradas.

3. *Un $P$-espacio que sea $T_2$ no puede ser localmente compacto, salvo que sea discreto.*

   En tal caso tendría subespacios de Hausdorff compactos infinitos que serían $P$-espacios, en contra del apartado anterior.

4. *Todo $P$-espacio $T_{3\frac{1}{2}}$ es cerodimensional.*

   Porque los coceros son abiertos y cerrados y forman una base.

5. *Un $P$-espacio que sea $T_{3\frac{1}{2}}$ no puede ser pseudocompacto, salvo que sea finito.*

Si $X$ es un $P$-espacio infinito completamente regular, podemos tomar un subconjunto numerable discreto $N = \{y_n\}_{n\in\omega}$. Como $X$ es cerodimensional, podemos tomar abiertos cerrados $C_n$ tales que $C_n \cap N = \{y_n\}$. Cambiando $C_n$ por $C_n \setminus \bigcup\limits_{m<n} C_m$ podemos suponer que son disjuntos dos a dos.

Como $X$ es un $P$-espacio, la unión de cualquier cantidad de abiertos $C_n$ es abierta y cerrada, luego $N$ está $C^*$-sumergido en $X$ por el teorema 5.36, y entonces el teorema 5.39 nos da que $N$ está, de hecho, $C$-sumergido en $X$, pues todo cero en $X$ disjunto de $N$ es abierto y cerrado, luego está completamente separado de $N$ (por él mismo). Por lo tanto, en $C(X)$ hay funciones no acotadas.

Como hemos caracterizado a los $P$-espacios por propiedades algebraicas del anillo $C(X)$, es obvio que un espacio completamente regular $X$ es un $P$-espacio si y sólo si lo es su realcompactificación $\upsilon X$. El ejemplo A.32 muestra que existen $P$-espacios que no son realcompactos.

## 7.6 Espacios Čech-completos

Vamos a definir una noción topológica de “completitud” que “aproxima” al concepto uniforme de completitud:

**Definición 7.81** Si $X$ es un conjunto, $A \subset X$ y $\mathcal{U}$ es un cubrimiento de $X$, diremos que *$A$ tiene diámetro menor que $\mathcal{U}$* si existe un $U \in \mathcal{U}$ tal que $A \subset U$. Lo representaremos por $\delta(A) < \mathcal{U}$.

Un espacio completamente regular $X$ es *Čech-completo* si existe una familia numerable de cubrimientos abiertos $\{\mathcal{U}_n\}_{n=1}^{\infty}$ de $X$ tal que si $\mathcal{F}$ es una familia de cerrados en $X$ con la propiedad de la intersección finita y contiene conjuntos de diámetro menor que cada $\mathcal{U}_n$, entonces $\bigcap \mathcal{F} \neq \varnothing$.

Por ejemplo, todo espacio métrico completo es Čech-completo, pues basta tomar como $\mathcal{U}_n$ el conjunto de todas las bolas abiertas de radio $1/n$. Entonces, una familia $\mathcal{F}$ en las condiciones de la definición anterior es una base de filtro de Cauchy, luego es convergente, lo cual implica que su intersección no es vacía.

La completitud de Čech de un espacio completamente regular puede caracterizarse en términos de sus compactificaciones:

**Teorema 7.82** *Sea $X$ un espacio completamente regular. Las afirmaciones siguientes son equivalentes:*[5]

1. *$X$ es Čech-completo.*
2. *$X$ es $G_\delta$ en todas sus compactificaciones.*

[5]Sólo requieren AE las implicaciones con 3), por lo que, si omitimos 3) de la cadena de implicaciones y suponemos que $X$ admite al menos una compactificación, el teorema se prueba sin AE.

*3. $X$ es $G_\delta$ en $\beta X$.*

*4. $X$ es $G_\delta$ en una de sus compactificaciones.*

Demostración: 1) $\Rightarrow$ 2). Sea $\{\mathcal{U}_n\}_{n=0}^\infty$ una familia de cubrimientos abiertos de $X$ según la definición de espacio Čech-completo. Para cada $U \in \mathcal{U}_n$ sea $U^*$ un abierto en $K$ tal que $U = U^* \cap X$. Entonces

$$X \subset \bigcap_{n=0}^\infty \bigcup_{U\in\mathcal{U}_n} U \subset \bigcap_{n=0}^\infty \bigcup_{U\in\mathcal{U}_n} U^*.$$

Basta probar que $\bigcap\limits_{n=0}^\infty \bigcup\limits_{U\in\mathcal{U}_n} U^* \subset X$, pues entonces $X$ será un $G_\delta$ en $K$.

Tomemos $x \in \bigcap\limits_{n=0}^\infty \bigcup\limits_{U\in\mathcal{U}_n} U^*$ y sea $\mathcal{F}_x = \{\overline{V} \cap X \mid V \text{ es un entorno de } x\}$.

Claramente $\mathcal{F}_x$ es una familia de cerrados en $X$ con la propiedad de la intersección finita. Para cada índice $n$, existe $U \in \mathcal{U}_n$ tal que $x \in U^*$. Como $K$ es regular, $x \in V \subset \overline{V} \subset U^*$, para cierto entorno abierto $V$ de $x$. Así $\overline{V} \cap X \subset U^* \cap X = U \in \mathcal{U}_n$, luego $\delta(\overline{V} \cap X) < \mathcal{U}_n$. Por 1) tenemos que $\bigcap \mathcal{F}_x \neq \varnothing$, pero $\bigcap \mathcal{F}_x = \bigcap\limits_V \overline{V} = \{x\}$, luego $x \in \bigcap \mathcal{F}_x \subset X$.

Obviamente 2) $\Rightarrow$ 3) $\Rightarrow$ 4). Veamos que 4) $\Rightarrow$ 3). Si $X$ es un $G_\delta$ en una compactificación $K$, sea $f : \beta X \longrightarrow K$ suprayectiva. Por el teorema 7.4, tenemos que $f^{-1}[K \setminus X] = \beta X \setminus X$, pero por hipótesis $K \setminus X$ es un $F_\sigma$, luego $\beta X \setminus X$ también lo es, luego $X$ es un $G_\delta$ en $\beta X$.

Veamos ahora que 3) $\Rightarrow$ 2). Sea $K$ cualquier compactificación de $X$ y sea $f : \beta X \longrightarrow K$ suprayectiva. Por hipótesis $\beta X \setminus X = \bigcup\limits_{n=0}^\infty F_n$, donde cada $F_n$ es cerrado en $\beta X$. Por 7.4 tenemos que $K \setminus X = f[\beta X \setminus X] = \bigcup\limits_{n=0}^\infty f[F_n]$ es también una unión de cerrados, luego $X$ es un $G_\delta$ en $K$.

4) $\Rightarrow$ 1) Sea $K$ una compactificación de $X$ tal que $X = \bigcap\limits_{n=0}^\infty U_n$, con $U_n$ abierto en $K$. Llamamos $\mathcal{U}_n$ al conjunto de todas las intersecciones $V \cap X$, donde $V$ es un abierto en $K$ tal que $\overline{V} \subset U_n$. Como $K$ es regular, es claro que $\mathcal{U}_n$ es un cubrimiento abierto de $X$.

Supongamos ahora que $\mathcal{F}$ es una familia de cerrados en $X$ con la propiedad de la intersección finita que contiene elementos de todos los cubrimientos. Las clausuras en $K$ de los elementos de $\mathcal{F}$ tienen igualmente la propiedad de la intersección finita, luego existe $x \in \bigcap\limits_{A\in\mathcal{F}} \overline{A}$.

Para cada índice $n$, existe un $A_n \in \mathcal{F} \cap \mathcal{U}_n$, con lo que $x \in \overline{A}_n \subset U_n$, luego $x \in \bigcap\limits_{n=0}^\infty U_n = X$.

Por consiguiente, $x \in \bigcap\limits_{A\in\mathcal{F}} (\overline{A} \cap X) = \bigcap\limits_{A\in\mathcal{F}} A = \bigcap \mathcal{F}$. ■

De aquí se deducen varias consecuencias notables:

**Teorema 7.83 (AE)** *Un espacio topológico metrizable es completamente metrizable si y sólo si es Čech-completo.*[6]

Demostración: Tras la definición 7.81 hemos razonado que todo espacio completamente metrizable es Čech-completo. Supongamos ahora que $X$ es un espacio metrizable Čech-completo. Sea $\hat{X}$ su compleción y sea $\alpha\hat{X}$ una compactificación de $\hat{X}$. Claramente $\alpha\hat{X}$ es también una compactificación de $X$. Por el teorema anterior $X$ es un $G_\delta$ en $\alpha\hat{X}$, luego también en $\hat{X}$, y por el teorema 9.31 tenemos que $X$ es completamente metrizable. ■

Por otra parte:

**Teorema 7.84** *Todo espacio topológico de Hausdorff localmente compacto es Čech-completo.*

Demostración: Si $X$ es un espacio de Hausdorff localmente compacto, entonces $X$ es abierto (en particular $G_\delta$) en su compactificación de Alexandroff, luego es Čech-completo. ■

Así pues, la clase de los espacios Čech-completos es más amplia que la de los espacios completamente metrizables. El ejemplo A.38 muestra un espacio numerablemente compacto que no es Čech-completo. Por otra parte:

**Teorema 7.85** *Un espacio Čech-completo con una base numerable es completamente metrizable.*

Demostración: Por el teorema 5.66 es metrizable y por 7.83 es completamente metrizable. ■

En particular, vemos que todo espacio localmente compacto con una base numerable es metrizable.

**Teorema 7.86 (AE)** *Todo subespacio cerrado o $G_\delta$ de un espacio Čech-completo es Čech-completo.*

Demostración: El caso de los subespacios cerrados se sigue inmediatamente de la definición, mientras que el caso de los subespacios $G_\delta$ se sigue del teorema 7.82 (si $A$ es $G_\delta$ en $X$ y $K$ es una compactificación de $X$, entonces $X$ es $G_\delta$ en $K$, luego $A$ también, luego $A$ es $G_\delta$ en $\overline{A}$, luego $A$ es Čech-completo). ■

Respecto a productos, tenemos lo siguiente:

**Teorema 7.87 (AE)** *Todo producto numerable de espacios Čech-completos es Čech-completo.*

[6]Necesitamos AE sólo en una implicación para justificar que el espacio tiene una compactificación, pero no es necesario si tiene una base numerable.

Demostración: Sea $\{X_n\}_{n=0}^\infty$ una familia de espacios Čech-completos. Sea $\alpha X_n$ una compactificación de $X_n$, de modo que $\alpha X_n \setminus X_n$ es $F_\sigma$. Es claro entonces que $\prod\limits_{n=0}^\infty \alpha X_n$ es una compactificación de $\prod\limits_{n=0}^\infty X_n$ y las antiimágenes $F_n = p_n^{-1}[\alpha X_n \setminus X_n]$ son $F_\sigma$ en el producto

$$\prod_{n=0}^\infty \alpha X_n \setminus \prod_{n=0}^\infty X_n = \bigcup_{n=0}^\infty F_n,$$

y así vemos que $\prod\limits_{n=0}^\infty X_n$ es $G_\delta$ en una compactificación, luego es Čech-completo. ■

El espacio discreto $\mathbb{N}$ es Čech-completo, pues es localmente compacto, pero en el ejemplo A.42 probamos que $\mathbb{N}^{\omega_1}$ no es Čech-completo, lo que prueba que el teorema anterior no es válido para productos no numerables.

Algunos argumentos que valen en principio para espacios métricos completos se generalizan a espacios Čech-completo y automáticamente se aplican a los espacios de Hausdorff localmente compactos. Un ejemplo notable de esta situación es el siguiente:

**Teorema 7.88 (de Baire)** *Todo espacio regular Čech-completo es un espacio de Baire.*

Demostración: Sea $X$ un espacio Čech-completo y sea $\{\mathfrak{U}_n\}_{n=1}^\infty$ una familia de cubrimientos abiertos de $X$ según la definición. Sea $\{D_n\}_{n=1}^\infty$ una familia de abiertos densos en $X$. Tenemos que probar que su intersección es densa.

Fijamos un abierto no vacío $U_0$. Como $D_1$ es denso, $U_0 \cap D_1$ es un abierto no vacío, luego podemos tomar un punto $x \in U_0 \cap D_1$ y un abierto $U_1$ tal que $x \in U_1 \subset \overline{U}_1 \subset U_0 \cap D_1$ y $\delta(U_1) < \mathfrak{U}_1$.

Similarmente, $U_1 \cap D_2$ es un abierto no vacío, luego podemos tomar un punto $x \in U_1 \cap D_2$ y un abierto $U_2$ tal que $x \in U_2 \subset \overline{U}_2 \subset U_1 \cap D_2$ y $\delta(U_2) < \mathfrak{U}_2$.

De este modo construimos una sucesión $\{U_n\}_{n=0}^\infty$ tal que $\overline{U}_n \subset U_{n-1} \cap D_n$,

$$U_0 \supset \overline{U}_1 \supset \overline{U}_2 \supset \cdots$$

y $\delta(\overline{U}_n) < \mathfrak{U}_n$. Entonces $\bigcap\limits_{n=1}^\infty \overline{U}_n \subset U_0 \cap \bigcap\limits_{n=1}^\infty D_n$ y la definición de espacio Čech-completo nos da que la intersección no es vacía, lo que prueba que la intersección es densa. ■

En particular todo espacio localmente compacto es un espacio de Baire.

La recta de Sorgenfrey (ejemplo A.25) es un caso de espacio de Baire que no es Čech-completo.

**El juego de Choquet** Vamos a probar que los espacios Čech-completos son algo más que espacios de Baire. En primer lugar probamos que éstos pueden caracterizarse en términos de un juego infinito:

Sea $X$ un espacio topológico. Consideramos el juego $\mathrm{Ch}(X)$ entre dos jugadores I y II definido como sigue: El jugador I empieza la partida eligiendo un abierto no vacío $U_0 \subset X$. A continuación juega II, que tiene que elegir un abierto no vacío $V_0 \subset U_0$, luego I elige un abierto no vacío $U_1 \subset V_0$, y así se va generando una sucesión de abiertos no vacíos

$$U_0 \supset V_0 \supset U_1 \supset V_1 \supset U_2 \supset V_2 \supset \cdots$$

El jugador I gana la partida si $\bigcap\limits_{n=0}^{\infty} U_n = \bigcap\limits_{n=0}^{\infty} V_n = \varnothing$, mientras que II gana la partida si $\bigcap\limits_{n=0}^{\infty} U_n = \bigcap\limits_{n=0}^{\infty} V_n \neq \varnothing$.

Una *estrategia* para el jugador I es una aplicación $\sigma$ que a cada sucesión finita decreciente de longitud par de abiertos de $X$

$$P = (U_0, V_0, \ldots, U_n, V_n)$$

(incluyendo el caso $P = \varnothing$) le asigna un abierto no vacío $\sigma(P) \subset V_n$. Una estrategia para el jugador II se define análogamente, sólo que está definida sobre las sucesiones decrecientes de longitud impar.

Una estrategia $\sigma$ para I es *ganadora* si toda partida

$$U_0 \supset V_0 \supset U_1 \supset V_1 \supset U_2 \supset V_2 \supset \cdots$$

tal que $U_0 = \sigma(\varnothing)$ y $U_n = \sigma(U_0, V_0, \ldots, U_{n-1}, V_{n-1})$ para todo $n \geq 1$ cumple que $\bigcap\limits_{n=0}^{\infty} U_n = \varnothing$, es decir, si I gana la partida siempre que sigue la estrategia independientemente de cuáles sean las jugadas de II. Las estrategias ganadoras para II se definen análogamente.

Obviamente, el juego $\mathrm{Ch}(X)$ no puede tener a la vez una estrategia ganadora para I y II (aunque sí puede suceder que no haya estrategia ganadora para ninguno de ellos).

**Teorema 7.89 (AE)** *Un espacio topológico $X$ es de Baire si y sólo si el jugador* I *no tiene una estrategia ganadora para el juego* $\mathrm{Ch}(X)$.

Demostración: Supongamos que $X$ no es un espacio de Baire. Sea entonces $\{G_i\}_{i=0}^{\infty}$ una sucesión de abiertos densos cuya intersección no es densa. Sea $W \subset X$ un abierto no vacío tal que $W \cap \bigcap\limits_{i=0}^{\infty} G_i = \varnothing$.

Una estrategia ganadora para I es como sigue: la jugada inicial es $\sigma(\varnothing) = W$ y, dada una partida incompleta

$$P = (U_0, V_0, \ldots, U_n, V_n),$$

tomamos $\sigma(P) \subset V_n \cap G_n$. De este modo, si I juega aplicando la estrategia $\sigma$, la partida completa cumple $U_{n+1} \subset V_n \cap G_n$, luego $\bigcap\limits_{n=0}^{\infty} U_n \subset W \cap \bigcap\limits_{n=0}^{\infty} G_n = \varnothing$. Por lo tanto, la estrategia es ganadora.

Supongamos ahora que $X$ es un espacio de Baire y sea $\sigma$ cualquier estrategia para I. Vamos a ver que no es ganadora, es decir, vamos a ver que II tiene una estrategia que es ganadora bajo el supuesto de que I va a jugar aplicando en todo momento la estrategia $\sigma$. Sea $U_\varnothing = \sigma(\varnothing)$. Consideramos todos los abiertos de la forma $\sigma(U_\varnothing, V)$, donde $V \subset U_\varnothing$ y, por el lema de Zorn, tomamos una familia maximal $\{U_\alpha\}_{\alpha<\beta_0}$ de tales abiertos disjuntos dos a dos. Así, para cada $\alpha < \beta_0$ existe $V_\alpha \subset U_\varnothing$ tal que $U_\alpha = \sigma(U_\varnothing, V_\alpha)$.

Si hemos definido abiertos $U_{\alpha_0,\ldots,\alpha_i}$ y $V_{\alpha_0,\ldots,\alpha_i}$, consideramos una familia maximal $\{U_{\alpha_0,\ldots,\alpha_i,\alpha_{i+1}}\}_{\alpha_{i+1}<\beta_{i+1}}$ de abiertos disjuntos dos a dos tal que para cada $\alpha_{i+1}$ existe un abierto $V_{\alpha_0,\ldots,\alpha_i,\alpha_{i+1}} \subset U_{\alpha_0,\ldots,\alpha_i}$ tal que

$$U_{\alpha_0,\ldots,\alpha_i,\alpha_{i+1}} = \sigma(U_\varnothing, V_{\alpha_0}, U_{\alpha_0\alpha_1}, V_{\alpha_0\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_0,\ldots,\alpha_i}, V_{\alpha_0,\ldots,\alpha_i,\alpha_{i+1}})$$

Veamos que la unión $W_i$ de todos los abiertos $U_{\alpha_0,\ldots,\alpha_{i-1}}$ para un $i$ fijo es densa en $U_\varnothing$. Lo probamos por inducción sobre $i$. Para $i = 0$ tenemos únicamente $U_\varnothing$ y la conclusión es trivialmente cierta. Supongamos que es cierto para $i$. Sea $G$ un abierto no vacío en $U_\varnothing$.

Por hipótesis de inducción $W_i \cap G \neq \varnothing$, luego existe una sucesión de índices $\alpha_0, \ldots, \alpha_{i-1}$ tal que $V = U_{\alpha_0,\ldots,\alpha_{i-1}} \cap G \neq \varnothing$. Si $W_{i+1} \cap U = \varnothing$, esto significa que $U_{\alpha_0,\ldots,\alpha_i,\alpha_{i+1}} \cap G = \varnothing$ para todo $\alpha_{i+1}$, pero entonces

$$U = \sigma(U_\varnothing, V_{\alpha_0}, U_{\alpha_0\alpha_1}, V_{\alpha_0\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_0,\ldots,\alpha_{i-1}}, V) \subset V \subset G$$

es disjunto de todos los $U_{\alpha_0,\ldots,\alpha_i}$, lo que contradice la maximalidad de esta familia.

Como $X$ es un espacio de Baire, también lo es $U_\varnothing$, luego existe $x \in \bigcap\limits_{i=0}^{\infty} W_n$. Como $x \in W_1 = \bigcup\limits_{\alpha_0} U_{\alpha_0}$, existe un $\alpha_0$ tal que $x \in U_{\alpha_0}$. Como $x \in W_2$, existe un $\alpha_1$ tal que $x \in U_{\alpha_0\alpha_1}$ (notemos que el primer índice tiene que ser el $\alpha_0$ anterior porque $U_{\alpha_0\alpha_1} \subset U_{\alpha_0}$ y los $U_{\alpha_0}$ son disjuntos dos a dos). De este modo generamos una sucesión $\alpha_0, \alpha_1, \alpha : 2, \ldots$ que corresponde a una partida

$$U_\varnothing \supset V_{\alpha_0} \supset U_{\alpha_0} \supset V_{\alpha_0\alpha_1} \supset U_{\alpha_0\alpha_1} \supset \cdots$$

jugada con la estrategia $\sigma$ tal que $x \in \bigcap\limits_i U_{\alpha_0,\ldots,\alpha_i}$, por lo que el jugador II gana la partida. ■

**Definición 7.90** Un *espacio de Choquet* es un espacio topológico $X$ en el cual el jugador II tiene una estrategia ganadora para el juego $\mathrm{Ch}(X)$.

Por el teorema anterior, todo espacio de Choquet es un espacio de Baire.

**Teorema 7.91** *Todo espacio Čech-completo es de Choquet.*

Demostración: Sea $X$ un espacio Čech-completo y sea $\{\mathcal{U}_n\}_{n=1}^{\infty}$ una familia de cubrimientos abiertos de $X$ según la definición. Si I juega $U_n$, existe un $U \in \mathcal{U}_n$ tal que $U_n \cap U \neq \varnothing$. La estrategia para II es jugar un abierto $V_n \neq \varnothing$ tal que $V_n \subset \overline{V}_n \subset U_n \cap U$.

Así, si II juega una partida siguiendo esta estrategia, al final

$$\varnothing \neq \bigcap_n \overline{V}_n \subset \bigcap_n U_n,$$

luego II gana la partida. ■

**Ejercicio:** Probar que todo espacio pseudocompacto es de Choquet.

Si $\mathcal{B}$ es una base de un espacio topológico $X$, llamaremos $\mathrm{Ch}(X, \mathcal{B})$ al juego análogo a $\mathrm{Ch}(X)$, pero en el que ambos jugadores están obligados a jugar abiertos de la base $\mathcal{B}$. En particular, si $\mathcal{B}$ es la base formada por todos los abiertos, tenemos el juego $\mathrm{Ch}(X)$. Vamos a probar que restringir el juego a una base no afecta a la existencia de estrategias ganadoras.

**Teorema 7.92 (AE)** *Si $X$ es un espacio topológico y $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ son dos bases de $X$, entonces un jugador tiene una estrategia ganadora en el juego* $\mathrm{Ch}(X, \mathcal{B}_1)$ *si y sólo si la tiene en el juego* $\mathrm{Ch}(X, \mathcal{B}_2)$.

Demostración: Sea $\sigma_1$ una estrategia ganadora para el jugador II en el juego $\mathrm{Ch}(X, \mathcal{B}_1)$ y vamos a construir otra para el juego $\mathrm{Ch}(X, \mathcal{B}_2)$.

Sean $\phi_{12} : \mathcal{B}_1 \longrightarrow \mathcal{B}_2$ y $\phi_{21} : \mathcal{B}_2 \longrightarrow \mathcal{B}_1$ aplicaciones que si $U \in \mathcal{B}_1$ no es vacío, entonces $\phi_{12})(U) \subset U$ también es no vacío, e igualmente con $\phi_{21}$. Dada una partida incompleta

$$P = (U_0, V_0, \ldots, U_{n-1}, V_{n-1}, U_n),$$

definimos

$$\sigma_2(P) = \phi_{12}(\sigma_1(\phi_{21}(U_0), V_0', \ldots, \phi_{21}(U_{n-1}), V_{n-1}', \phi_{21}(U_n))),$$

donde los $V_i'$ son los abiertos que resultan de aplicar la estrategia $\sigma_1$. Así, si II juega con esta estrategia $\sigma_2$, cada partida en el juego $\mathrm{Ch}(X, \mathcal{B}_2)$

$$U_0 \supset V_0 \supset U_1 \supset V_1 \supset U_2 \supset V_2 \supset \ldots$$

tiene asociada una partida auxiliar del juego $\mathrm{Ch}(X, \mathcal{B}_1)$:

$$U_0' \supset V_0' \supset U_1' \supset V_1' \supset U_2' \supset V_2' \supset \ldots$$

de modo que, si I juega $U_0$, entonces $U_0' = \phi_{21}(U_0) \subset U_0$, $V_0' = \sigma_1(U_0')$ y $V_0 = \phi_{12}(V_0') \subset V_0'$, si entonces I juega $U_1$, a su vez $U_1' = \phi_{21}(U_1) \subset U_1$, $V_1' = \sigma_1(U_0', V_0', U_1')$ y $V_1 = \phi_{12}(V_1') \subset V_1'$, etc. Como II gana la partida auxiliar, tenemos que

$$\varnothing \neq \bigcap_{n=0}^{\infty} U_n' \subset \bigcap_{n=0}^{\infty} U_n,$$

luego II también gana la partida principal. El razonamiento para una estrategia ganadora de I es análogo. ■

Una ventaja de los espacios de Choquet frente a los Čech-completos es la siguiente:

**Teorema 7.93** *Todo producto de espacios de Choquet es de Choquet.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $\{X_i\}_{i\in I}$ una familia de espacios de Choquet (no vacíos) y llamemos $X = \prod\limits_{i\in I} X_i$. Para cada $i$, sea $\sigma_i$ una estrategia ganadora para II en el juego $\mathrm{Ch}(X_i)$ y vamos a construir una estrategia ganadora para II en el juego de Choquet de $X$ restringido a la base usual del producto.

Supongamos que I juega el abierto básico $U^0 = \prod\limits_{i\in I} U_i^0$, donde todos los $U_i^0 = X_i$ salvo para $i \in F^0 \subset I$ finito. Entonces calculamos $V_i^0 = \sigma_i(U_i^0)$ para $i \in F^0$ y llamamos $V^0$ al abierto básico de $X$ determinado por estos factores.

En general, si tenemos

$$U^0 \supset V^0 \supset \ldots \supset U^{n-1} \supset V^{n-1} \supset U^n$$

y $F^i$ es el soporte de $U^i$ (es decir, el conjunto finito de índices correspondientes a factores no triviales), como $U^{j+1} \subset U^j$, necesariamente $F^i \subset F^{i+1}$ y así, para cada $i \in F^n$, existe un único $j$ tal que $i \in F^j \setminus F^{j-1}$. Definimos

$$V_j^n = \sigma_j(U_i^j, V_i^j, \ldots, U_i^{n-1}, V_j^{n-1}, U_i^n).$$

y con estos factores formamos el abierto básico $V^n$. Vamos a probar que la estrategia es ganadora. Dada una partida completa, llamamos $F = \bigcup\limits_{j=0}^{\infty} F^j$. Si $i \in F$, existe un único $j$ tal que $i \in F^j \setminus F^{j-1}$ y

$$U_i^j \supset V_i^j \supset U_i^{j+1} \supset V_i^{j+1} \supset \cdots$$

es una partida en $X_i$ jugada con la estrategia $\sigma_i$, luego la gana II, lo que significa que existe un $x_j \in \bigcap\limits_{n\geq j} U_i^n$, pero si $n < j$ tenemos que $U_i^n = X_i$, luego de hecho $x_j \in \bigcap\limits_{n=0}^{\infty} U_i^n$.

Por otra parte, si $i \in I \setminus F$, entonces $U_i^n = X_i$ para todo $n$, luego podemos tomar cualquier $x_i \in X_i$ y entonces $x \in \bigcap\limits_{n=0}^{\infty} U^n$. ■

Como consecuencia:

**Teorema 7.94** *Todo producto de espacios Čech-completos es un espacio de Baire.*

Lo mismo vale para productos de espacios pseudocompactos.

# Capítulo VIII

# Cardinales invariantes

A todo espacio topológico le podemos asociar una serie de cardinales que aportan mucha información sobre sus características, y ahora vamos a estudiar con detalle algunos de ellos. Se conocen como "cardinales invariantes", porque se conservan por homeomorfismos.

En todo este capítulo usaremos libremente el axioma de elección.

## 8.1 El peso, el carácter y la densidad

El cardinal invariante más elemental que podemos asociarle a $X$, que no es topológico propiamente dicho, sino puramente conjuntista, es su propio cardinal como conjunto, $|X|$. He aquí algunos más:

**Definición 8.1** Sea $X$ un espacio topológico.

1. El *peso* de $X$ es el menor cardinal de una base. Se representa por $w(X)$. Si $w(X) \leq \aleph_0$, es decir, si $X$ tiene una base numerable, se dice que $X$ satisface el *segundo axioma de numerabilidad.*

2. El *carácter* de un punto $x \in X$ es el menor cardinal de una base de entornos de $x$. Se representa por $\chi(x, X)$. El *carácter* de $X$ es el supremo de los caracteres de sus puntos. Se representa por $\chi(X)$. En estos términos, $X$ cumple el primer axioma de numerabilidad si y sólo si $\chi(X) \leq \aleph_0$.

3. La *densidad* de $X$ es el menor cardinal de un subconjunto denso. Se representa por $d(X)$. Si $d(X) = \aleph_0$, es decir, si $X$ tiene un subconjunto denso numerable, se dice que $X$ es *separable.*

4. Si $X$ es $T_1$, el *pseudocarácter* de un punto $x \in X$ es el menor cardinal de una familia $\mathcal{V}$ de entornos abiertos de $x$ tal que $\bigcap \mathcal{V} = \{x\}$. Se representa por $\psi(x, X)$. El *pseudocarácter* de $X$ es el supremo de los pseudocaracteres de sus puntos. Se representa por $\chi(X)$.

5. Una *red* en $X$ es una familia $\mathcal{R}$ de subconjuntos de $X$ tal que todo abierto puede expresarse como unión de elementos de $\mathcal{R}$. El *peso reticular* de $X$ es el menor cardinal $nw(X)$ de una red en $X$.

**Nota** Debido a la simplicidad de la aritmética de los cardinales infinitos, muchas relaciones entre cardinales invariantes requerirían una expresión diferente, más complicada, para el caso en que los cardinales involucrados son finitos, por lo que adoptaremos el convenio habitual de que cuando un cardinal invariante debería ser finito según su definición, consideramos que vale $\aleph_0$.

Así, por ejemplo, convendremos en que $w(2) = d(2) = \chi(2) = \aleph_0$, cuando, según las definiciones, debería ser $w(2) = d(2) = 2$, $\chi(2) = 1$. ■

Los cardinales $\psi(X)$ y $nw(X)$ pueden parecer artificiales, pero su interés radica —entre otras cosas— en que, por una parte, proporcionan cotas más finas, ya que, obviamente,

$$\psi(X) \leq \chi(X), \qquad \psi(X) \leq |X|, \qquad nw(X) \leq w(X) \qquad nw(X) \leq |X|$$

y, por otra parte, vamos a ver que existen amplias clases de espacios, como los espacios métricos, los espacios localmente compactos o los espacios ordenados, en los que se dan las igualdades $\psi(X) = \chi(X)$, $nw(X) = w(X)$, por lo que los resultados probados para $\psi$ o $nw$ valen, de hecho, para $\chi$ y $w$ en estos espacios. El caso de los espacios ordenados está probado en los teoremas 12.22 y 12.23. 459

Algunas relaciones obvias entre estos cardinales son

$$d(X) \leq w(X) \leq 2^{|X|}, \quad \chi(X) \leq w(X) \leq \chi(X)|X|, \quad d(X) \leq |X|.$$

En cambio, no es cierto en general que $\chi(X) \leq |X|$ o que $w(X) \leq |X|$. El espacio descrito en el ejemplo A.17 es numerable, pero tiene un punto de carácter no numerable. Más aún, tras el teorema 8.7 mostramos otro ejemplo de espacio numerable cuyos puntos tienen todos carácter $\mathfrak{c}$.

Sin embargo, en espacios ordenados (y luego veremos que también en espacios localmente compactos o metrizables) estas desigualdades sí que se cumplen, debido a las igualdades $\chi(X) = \psi(X)$, $w(X) = nw(X)$.

**Teorema 8.2** *Si $f : X \longrightarrow Y$ es una aplicación continua y suprayectiva entre espacios topológicos, entonces $nw(Y) \leq w(X)$. Si $f$ es abierta, entonces*

$$\chi(Y) \leq \chi(X), \qquad w(Y) \leq w(X).$$

DEMOSTRACIÓN: Si $\mathcal{B}$ es una base de $X$, entonces $\mathcal{R} = \{f[B] \mid B \in \mathcal{B}\}$ es una red en $Y$. En efecto, si $U$ es abierto en $Y$, entonces $f^{-1}[U] = \bigcup_{i\in I} B_i$, donde cada $B_i \in \mathcal{B}$, luego $U = \bigcup_{i\in I} f[B_i]$.

Esto prueba que $nw(Y) \leq w(X)$. Si $f$ es abierta, entonces $\mathcal{R}$ es una base de $Y$, luego de hecho tenemos $w(Y) \leq w(X)$.

Similarmente, si $\mathcal{B}$ es únicamente una base de entornos de $x$, entonces $\mathcal{R}$ es una base de entornos de $f(x)$, luego $\chi(f(x), Y) \leq \chi(x, X)$, y a su vez concluimos que $\chi(Y) \leq \chi(X)$. ■

Si la aplicación $f$ no es abierta, no tiene por qué cumplir que $w(Y) \leq w(X)$ o $\chi(Y) \leq \chi(X)$. Basta considerar cualquier biyección $f : \omega \longrightarrow X$, donde $\omega$ tiene la topología discreta y $X$ es un espacio numerable de carácter no numerable.

Una vez más, si $Y$ es un espacio ordenado (o localmente compacto, o metrizable), el teorema anterior se cumple con $w(Y)$ en lugar de $nw(Y)$.

Veamos ahora otras relaciones menos obvias entre los cardinales invariantes de un espacio topológico:

**Teorema 8.3** *Sea $X$ un espacio topológico.*

1. *Si $X$ es $T_0$, entonces $|X| \leq 2^{w(X)}$.*
2. *Si $X$ es $T_1$, entonces $\psi(X) \leq |X|$.*
3. *Si $X$ es $T_1$, entonces $|X| \leq w(X)^{\psi(X)}$.*
4. *Si $X$ es $T_2$, entonces $|X| \leq 2^{2^{d(X)}}$.*
5. *Si $X$ es $T_2$, entonces $|X| \leq d(X)^{\chi(X)}$.*
6. *Si $X$ es $T_3$, entonces $w(X) \leq 2^{d(X)}$.*

Demostración: 1) Sea $\mathcal{B}$ una base con $|\mathcal{B}| = w(X)$. Entonces, la aplicación $X \longrightarrow \mathcal{PB}$ que a cada punto $x$ le asigna sus entornos en la base es inyectiva (porque $X$ es $T_0$), luego $|X| \leq |\mathcal{PB}| = 2^{w(X)}$.

2) Basta observar que[1] $\bigcap\limits_{y \in X \setminus \{x\}} (X \setminus \{y\}) = \{x\}$.

3) Si $x \in X$, podemos tomar $\mathcal{V}_x \subset \mathcal{B}$ con $|\mathcal{V}_x| \leq \psi(X)$ tal que $\bigcap \mathcal{V} = \{x\}$. Así la aplicación $x \mapsto \mathcal{V}_x$ es inyectiva, y su imagen tiene cardinal a lo sumo $|[\mathcal{B}]^{\psi(X)}| = w(X)^{\psi(X)}$.

4) Sea $D$ un subconjunto denso de $X$ con $|A| = d(X)$ y, para cada $x \in X$, sea $\mathcal{B}_x$ una base de entornos de $x$ con $|\mathcal{B}_x| = \chi(x, X)$. Sea

$$\mathcal{D}_x = \{U \cap D \mid U \in \mathcal{B}_x\} \in \mathcal{PP}D.$$

Como $\overline{U \cap D} = \overline{U}$, se cumple que $\bigcap\limits_{U \in \mathcal{D}_x} \overline{U} = \{x\}$. Por consiguiente, la aplicación $x \mapsto \mathcal{D}_x$ es inyectiva, lo cual prueba que $|X| \leq |\mathcal{PP}D|$.

5) Para cada $U \in \mathcal{B}_x$, sea $d(x, U) \in U \cap D$ y sea

$$D_x = \{d(x, U) \mid U \in \mathcal{B}_x\} \in [D]^{\leq \chi(X)}.$$

Llamemos ahora

$$\mathcal{D}'_x = \{U \cap D_x \mid U \in \mathcal{B}_x\} \in [[D]^{\leq \chi(X)}]^{\leq \chi(X)}.$$

[1] Notemos que esto prueba que el pseudocarácter está definido para todo espacio $T_1$. Si un espacio no es $T_1$, contiene un punto $p$ que no es cerrado y, para cada $x \in \overline{\{p\}} \setminus \{p\}$, no existe ninguna familia de abiertos cuya intersección sea $x$, pues todo abierto que contiene a $x$ contiene a $p$.

Nuevamente, como $x \in \overline{U \cap D_x} \subset \overline{U}$, luego $\bigcap\limits_{U \in \mathcal{D}'_x} \overline{U} = \{x\}$, luego una vez más $x \mapsto \mathcal{D}'_x$ es inyectiva y tenemos la desigualdad requerida.

6) Sea $D$ denso en $X$ con $|D| = d(X)$ y sea $\mathcal{B} = \{\mathring{\overline{A}} \mid A \subset D\}$. Si $x \in U$, donde $U$ es abierto en $X$, por la regularidad de $X$ existe un abierto $V$ tal que $x \in V \subset \overline{V} \subset U$, pero $\overline{V} = \overline{V \cap D}$, luego $W = \mathring{\overline{V}} \in \mathcal{B}$ y cumple $x \in W \subset U$. Esto prueba que $\mathcal{B}$ es una base de $X$, y $|\mathcal{B}| \leq 2^{|D|}$. ■

**Nota** La cota de 2) puede parecer poco ajustada, pero no es así. Por ejemplo, el espacio $\beta\omega$ (ejemplo A.36) cumple $d(\beta\omega) = \aleph_0$ y $|\beta\omega| = 2^{\mathfrak{c}}$. ■

Si $Y \subset X$, es fácil ver que

$$w(Y) \leq w(X), \quad \chi(y, Y) \leq \chi(y, X), \quad \chi(Y) \leq \chi(X).$$

Es claro que en general no tienen por qué darse las igualdades. Un caso en el que sí que se da la igualdad es el siguiente:

**Teorema 8.4** *Si $X$ es un espacio regular, $D \subset X$ es denso y $d \in D$, entonces $\chi(d, D) = \chi(d, X)$.*

DEMOSTRACIÓN: Basta ver que si $\mathcal{U}$ es una base de entornos de $d$ en $D$, entonces $\mathcal{U}^* = \{\mathring{\overline{U}} \mid U \in \mathcal{U}\}$ es una base de entornos de $d$ en $X$.

En efecto, si $y \in W \subset X$, con $W$ abierto, por la regularidad existe un abierto $V$ tal que $y \in V \subset \overline{V} \subset W$, y entonces existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $y \in U \subset V \cap D$, luego $y \in \overline{U} \subset \overline{V \cap D} = \overline{V} \subset W$, luego $U^* = \mathring{\overline{U}} \in \mathcal{U}^*$ cumple $y \in U^* \subset W$. ■

Por otra parte, no es cierto en general que si $Y \subset X$ se cumpla $d(Y) \leq d(X)$.

Un ejemplo es $\beta\omega$ (ejemplo A.36), que cumple $d(\beta\omega) = \aleph_0$, mientras que $\omega^* = \beta\omega \setminus \omega$ cumple $d(\omega^*) = \mathfrak{c}$.

**Definición 8.5** Si $f$ es una función que asocia un cardinal a cada espacio topológico y no es monótona, es decir, no cumple que, cuando $Y \subset X$, entonces $f(Y) \leq f(X)$, podemos definir la versión hereditaria de $f$ como

$$fh(X) = \sup\{f(y) \mid Y \subset X\}.$$

Así, la *densidad hereditaria* $dh(X)$ de un espacio topológico $X$ es el supremo de las densidades de sus subespacios. Los espacios que cumplen $dh(X) \leq \aleph_0$ se llaman *hereditariamente separables.* Obviamente, $dh(X) \leq nw(X) \leq w(X)$.

En cuanto a productos, tenemos lo siguiente:

**Teorema 8.6** *Sea $X = \prod\limits_{i \in I} X_i$ un producto de espacios de $T_1$ con más de un punto cada uno y sea $x \in X$. Entonces*

$$w(X) = |I| \sup_{i \in I} w(X_i), \qquad \chi(x, X) = |I| \sup_{i \in I} \chi(x_i, X_i).$$

DEMOSTRACIÓN: Si tomamos en cada $X_i$ una base de cardinal $w(X_i)$, es fácil ver que la base de $X$ que obtenemos con tales abiertos básicos tiene cardinal $|I|\sup\limits_{i\in I} w(X_i)$, e igualmente si construimos una base de entornos de un punto a partir de bases de entornos de sus coordenadas. Esto nos da las desigualdades

$$w(X)\leq |I|\sup_{i\in I} w(X_i), \qquad \chi(x,X)\leq |I|\sup_{i\in I}\chi(x_i,X_i).$$

Por otra parte, como las proyecciones en los factores son abiertas, es fácil ver que las proyecciones en un factor de los elementos de una base (o base de entornos) en $X$ es una base (o base de entornos) del factor correspondiente, lo que nos da las desigualdades $w(X_i)\leq w(X)$, $\chi(x_i,X_i)\leq\chi(x,X)$.

Basta ver que $|I|\leq\chi(x,X)$, pues entonces también $|I|\leq\chi(x,X)\leq w(X)$.

En caso contrario sea $\mathcal{B}$ una base de entornos de $x$ con $|\mathcal{B}|<|I|$ (podemos suponer que $I$ es infinito). Para cada abierto $B\in\mathcal{B}$ sea $x\in U_B=\prod\limits_{i\in I} U_i\subset B$ un abierto de la base usual, de modo que $U_i=X_i$ salvo si $i\in I_B\subset I$ finito. Sea $I_0$ la unión de todos los conjuntos $I_B$.

Entonces $|I_0|<|I|$. Sea $j\in I\setminus I_0$. Como $X_j$ tiene más de un punto (y es un espacio $T_1$) existe un abierto $x_j\in G_j\neq X_j$. Sea $G=p_j^{-1}[G_j]$. Como $x\in G$, ha de existir un cierto $B\in\mathcal{B}$ no vacío tal que $x\in U_B=\prod\limits_{i\in I} U_i\subset B$, luego $U_j\subset G_j$, pero como $j\notin I_0$ ha de ser $U_j=X_j=G_j$, contradicción. ■

En particular el peso y el carácter de un cubo $X^\kappa$ vienen dados por

$$w(X^\kappa)=\kappa w(X), \quad \chi(X^\kappa)=\kappa\chi(X).$$

Así, por ejemplo, el producto de una cantidad no numerable de espacios 1AN (no triviales) no puede ser 1AN, luego en particular un producto no numerable de espacios metrizables no puede ser metrizable.

En vista de este resultado resulta sorprendente la situación para la densidad, que es sustancialmente distinta:

**Teorema 8.7 (Hewitt, Marczewski, Pondiczery)** *Si $\kappa$ es un cardinal infinito y $X=\prod\limits_{i\in I} X_i$ es un producto de espacios de Hausdorff con al menos dos puntos, entonces $d(X)\leq\kappa$ si y sólo si $d(X_i)\leq\kappa$ para todo $i\in I$ y $|I|\leq 2^\kappa$.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que $|I|\leq 2^\kappa$ y que $d(X_i)\leq\kappa$ para cada $i\in I$. Vamos a probar que $d(X)\leq\kappa$ (esta implicación no requiere que los espacios sean de Hausdorff o que tengan al menos dos puntos).

Veamos en primer lugar que existe una familia $\mathcal{A}\subset\mathcal{P}I$ tal que $|\mathcal{A}|\leq\kappa$ y si $i_1,\ldots,i_n$ son elementos de $I$ distintos dos a dos, entonces existen conjuntos $A_i\in\mathcal{A}_i$ disjuntos dos a dos de manera que $i_j\in A_j$, para $j=1,\ldots,n$.

En efecto, como el conjunto de índices $I$ es arbitrario, podemos suponer que es $I={}^\kappa 2$ (si el resultado vale para un conjunto $I$, vale para cualquier subconjunto suyo, luego no perdemos generalidad por suponer que $I$ tiene el mayor cardinal posible). Basta tomar como $\mathcal{A}$ una base de ${}^{\kappa}2$ de cardinal $\kappa$, pues $n$ puntos distintos de $I$ tienen entornos disjuntos, y dentro de cada uno podemos tomar un entorno de la base $\mathcal{A}$.

Para cada $i \in I$ sea $D_i = \{x_{i\alpha}\}_{\alpha<\kappa}$ un subconjunto denso en $X_i$. Para cada $n$-tupla $\Gamma = \{A_j\}_{j<n}$ de elementos de $\mathcal{A}$ disjuntos dos a dos y cada $n$-tupla $\Delta = \{\delta_j\}_{j<n}$ de ordinales en $\kappa$, definimos $f(n, \Gamma, \Delta) \in X$ mediante

$$f(n,\Gamma,\Delta)(i) = \begin{cases} x_{i,\delta_j} & \text{si } i \in A_j, \\ x_{i0} & \text{si } i \notin \bigcup\limits_{j<n} A_j. \end{cases}$$

Sea $D \subset X$ el conjunto de todos los elementos de $X$ definidos de este modo. Claramente $|D| \leq \kappa$. Basta probar que $D$ es denso en $X$.

Sea $U = \prod\limits_{i\in I} U_i$ un abierto básico en $X$, de modo que $U_i = X_i$ salvo si $i \in \{i_0, \ldots, i_{n-1}\} \subset I$. Sea $\Gamma = \{A_j\}_{j<n}$ una $n$-tupla de elementos de $\mathcal{A}$ disjuntos dos a dos tal que $i_j \in A_j$ y sea $\Delta = \{\delta_j\}_{j<n}$ tal que $x_{i_j\delta_j} \in U_{i_j}$. Entonces $f(n, \Gamma, \Delta) \in U \cap D$.

Ahora supongamos que $d(X) \leq \kappa$, sea $D \subset X$ un subconjunto denso tal que $|D| \leq \kappa$ y observemos que $p_i[D]$ es denso en $X_i$ (donde $p_i$ es la proyección en el factor $i$-ésimo), luego $d(X_i) \leq |p_i[D]| \leq |D| \leq \kappa$. En efecto, si $U \subset X_i$ es un abierto no vacío, entonces $p_i^{-1}[U] \cap D \neq \varnothing$, luego $U \cap p_i[D] \neq \varnothing$.

Si cada $X_i$ es de Hausdorff y contiene al menos dos puntos, existen abiertos disjuntos no vacíos $U_i$, $V_i \subset X_i$ (en realidad, para que se cumpla esta implicación no hace falta que los espacios sean de Hausdorff, sino que basta con que contengan dos abiertos disjuntos no vacíos). Sea $f : I \longrightarrow \mathcal{P}D$ la aplicación dada por $f(i) = p_i^{-1}[U_\alpha] \cap D$. Basta probar que es inyectiva, pues entonces $|I| \leq |\mathcal{P}D| \leq 2^\kappa$.

Ahora bien, si $i \neq j$, tenemos que $p_i^{-1}[U_\alpha] \cap p_i^{-1}[V_\beta] \neq \varnothing$ (sólo tenemos que construir un punto $x \in X$ tal que $x_i \in U_\alpha$ y $x_j \in V_\beta$), luego existe un punto $d \in p_i^{-1}[U_\alpha] \cap p_i^{-1}[V_\beta] \cap D$, que claramente cumple $d \in f(i) \setminus f(j)$, luego $f(i) \neq f(j)$. ■

En particular, el producto de a lo sumo $\mathfrak{c}$ espacios separables es separable.

**Ejemplo** El cubo de Cantor ${}^{\mathfrak{c}}2$ tiene un subespacio denso numerable que, por los teoremas 8.4 y 8.6, es un ejemplo de espacio completamente regular, numerable cuyos puntos tienen todos carácter $\mathfrak{c}$.

**Peso y carácter en espacios compactos** Veamos ahora algunas relaciones entre cardinales invariantes válidas para espacios compactos, localmente compactos o de Lindelöf. Empezamos por las que ya habíamos anticipado:

**Teorema 8.8** *Si $X$ es un espacio de Hausdorff localmente compacto y $x \in X$, entonces $\psi(x, X) = \chi(x, X)$.*

DEMOSTRACIÓN: Podemos suponer que $x$ no es un punto aislado, con lo que el carácter y el pseudocarácter son infinitos. Sustituyendo $X$ por un entorno compacto de $x$, podemos suponer que $X$ es compacto.

Sea $\mathcal{V}$ una familia de abiertos en $X$ con $|\mathcal{V}| = \psi(x, X)$ y $\bigcap \mathcal{V} = \{x\}$. Para cada $U \in V$, sea $V_U$ un abierto tal que $x \in V_U \subset \overline{V}_U \subset U$. Entonces

$$\{x\} \subset \bigcap_{U \in \mathcal{V}} V_U \subset \bigcap_{U \in \mathcal{V}} \overline{V}_U \subset \bigcap_{U \in \mathcal{V}} U = \{x\},$$

luego todas las inclusiones son igualdades. Si $U$ es un entorno abierto arbitrario de $x$, tenemos que $\bigcap\limits_{U \in \mathcal{V}} \overline{V}_U \subset U$, luego $X \setminus U \subset \bigcup\limits_{U \in \mathcal{V}} X \setminus \overline{V}_U$, luego existe un conjunto finito $U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{V}$ tal que

$$x \in \bigcap_{i=1}^{n} V_U \subset \bigcap_{i=1}^{n} \overline{V}_U \subset U.$$

Por lo tanto, las intersecciones finitas de los abiertos $V_U$ forman una base de entornos de $x$ de cardinal $\psi(x, X)$, luego $\psi(x, X) \leq \chi(x, X)$. ■

**Teorema 8.9** *Si $X$ es un espacio de Hausdorff localmente compacto infinito, entonces $w(X) = nw(X) \leq |X|$.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos en primer lugar que $X$ es compacto. Sea $\mathcal{R}$ una red en $X$ de cardinal $nw(X)$. Para cada par $R_1$, $R_2$ de elementos de $\mathcal{R}$ que están contenidos en abiertos disjuntos $U_1$, $U_2$, elegimos un par de tales abiertos y llamamos $\mathcal{B}_0$ a la familia de todos los abiertos obtenidos de este modo, que tiene el mismo cardinal de $\mathcal{R}$. Sea $X_1$ el espacio $X$ con la topología que tiene a $\mathcal{B}$ por subbase. Se trata de una topología de Hausdorff, pues si $p$, $q \in X$ son puntos distintos, existen abiertos disjuntos $V_1$ y $V_2$ en $X$ con $p \in V_1$, $q \in V_2$, luego existen $R_1$ y $R_2$ en $\mathcal{R}$ tales que $p \in R_1 \subset V_1$, $q \in R_2 \subset V_2$, luego $R_1$ y $R_2$ son disjuntos, luego están contenidos en elementos disjuntos de $\mathcal{B}$, que son abiertos en $X_1$.

La identidad $i : X \longrightarrow X_1$ es continua, pues los abiertos de $X_1$ son abiertos de $X$ y, como $X$ es compacto, se trata de un homeomorfismo, luego, teniendo en cuenta que las intersecciones finitas de elementos de $\mathcal{B}$ forman una base de $X_1$ de cardinal $nw(X)$, tenemos que $w(X) = w(X_1) \leq |\mathcal{B}_0| = nw(X)$.

Consideremos ahora el caso general en que $X$ es localmente compacto. Si $\mathcal{R}$ es una red en $X$, cada $x \in X$ tiene un entorno compacto $C$, y existe $R \in \mathcal{R}$ tal que $x \in R \subset \overline{R}C$, por lo que el conjunto $\{R_i\}_{i \in I}$ de los elementos de $\mathcal{R}$ con clausura compacta es un cubrimiento de $X$. Podemos cubrir cada $\overline{R}_i$ por abiertos de clausura compacta y, extrayendo un subcubrimiento finito y tomando la unión de sus elementos, concluimos que $\overline{R}_i \subset U_i$, para cierto abierto $U_i$ de clausura compacta. Así, los abiertos $\{U_i\}_{i \in I}$ forman también un cubrimiento de $X$.

Por la parte ya probada, $w(U_i) \leq w(\overline{U}_i) \leq nw(\overline{U}_i) \leq nw(X)$, y uniendo una base de cada $U_i$ de cardinal $\leq nw(X)$ obtenemos una base de $X$ de cardinal $\leq nw(X)$. ■

En espacios compactos, la cota $|X| \leq d(X)^{\chi(X)}$ dada por el teorema 8.3 puede rebajarse a $|X| \leq 2^{\chi(X)}$. De hecho, vamos a probar una desigualdad más general válida para espacios de Lindelöf. Para ello tenemos que introducir otro cardinal invariante:

**Definición 8.10** El *grado de Lindelöf* de $X$ es el menor cardinal $L(X)$ tal que todo cubrimiento abierto tiene un subcubrimiento de cardinal $L(X)$.

Así, $X$ es un espacio de Lindelöf si y sólo si $L(X) = \aleph_0$. Es fácil ver que $L(X) \leq w(X)$, pero podemos afinar más:

**Teorema 8.11** *Todo espacio topológico cumple $L(X) \leq nw(X)$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $\mathcal{R}$ una red en $X$ de cardinal $nw(X)$ y sea $\mathcal{U}$ un cubrimiento abierto de $X$. Cada $x \in X$ está en un $U_x \in \mathcal{U}$ y entonces existe un $R_x \in \mathcal{R}$ tal que $x \in R_x \subset U_x \in \mathcal{U}$, luego el conjunto $\mathcal{R}_0$ de los $R \in \mathcal{R}$ contenidos en un abierto de $\mathcal{U}$ es un cubrimiento de $X$ y si, para cada $R \in \mathcal{R}_0$, tomamos un $U_R \in \mathcal{U}$ tal que $R \subset U_R$, tenemos que $\{U_R \mid R \in \mathcal{R}_0\}$ es un subcubrimiento de $\mathcal{U}$ de cardinal $\leq nw(X)$. ■

Probamos ahora una de las desigualdades más profundas válidas para espacios (de Hausdorff) arbitrarios:

**Teorema 8.12 (Arhangelskii)** *Si $X$ es un espacio de Hausdorff, entonces*

$$|X| \leq 2^{L(X)\chi(X)}.$$

*En particular, todo espacio de Lindelöf cumple $|X| \leq 2^{\chi(X)}$ y todo espacio de Lindelöf que cumpla el primer axioma de numerabilidad cumple $|X| \leq \mathfrak{c}$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $\kappa = L(X)\chi(X)$. Para cada $p \in X$, sea $\mathcal{V}_p$ una base de entornos de $p$ tal que $|\mathcal{V}_p| \leq \kappa$. Vamos a construir una sucesión creciente $\{H_\alpha\}_{\alpha<\kappa^+}$ de cerrados en $X$ y una sucesión $\{\mathcal{V}_\alpha\}_{\alpha<\kappa^+}$ de familias de abiertos en $X$ que cumplan:

1. $|H_\alpha| \leq 2^\kappa$,
2. $\mathcal{V}_\alpha = \{V \in \mathcal{V}_p \mid p \in \bigcup\limits_{\beta<\alpha} H_\beta\}$,
3. Si $W \neq X$ es la unión de $\leq \kappa$ elementos de $\mathcal{V}_\alpha$, entonces $H_\alpha \setminus W \neq \varnothing$.

Supongamos supongamos construido $\{H_\beta\}_{\beta<\alpha}$ (y que $\mathcal{V}_\beta$ son los dados por 2.) de modo que se cumplen las propiedades indicadas. Notemos que 2. define entonces $\mathcal{V}_\alpha$ y que $|\mathcal{V}_\alpha| \leq 2^\kappa$.

Para cada conjunto $W \neq X$ que sea unión de $\leq \kappa$ elementos de $\mathcal{V}_\alpha$, elijamos un punto de $X \setminus W$ y sea $A_\alpha$ el conjunto de todos los puntos obtenidos de este modo. Así $|A_\alpha| \leq 2^\kappa$. Definimos $H_\alpha = \overline{A_\alpha \cup \bigcup\limits_{\beta<\alpha} H_\beta}$. Así $H_\alpha$ es cerrado, contiene a todos los $H_\beta$ anteriores y cumple la propiedad 3. El teorema 8.3 nos da que $|H_\alpha| \leq 2^\kappa$.

Ahora definimos $H = \bigcup_{\alpha<\kappa^+} H_\alpha$, que es cerrado, pues si $p \in X \setminus H$, para cada $\alpha < \kappa^+$ existe un $U_\alpha \in \mathcal{V}_p$ tal que $U_\alpha \subset X \setminus H_\alpha$, pero $|\mathcal{V}_p| \leq \kappa$, luego tiene que haber un $U \in \mathcal{V}_p$ tal que $\{\alpha < \kappa^+ \mid U_\alpha = U\}$ tiene cardinal $\kappa^+$, y entonces, como la familia $H_\alpha$ es creciente, resulta que $p \in U \subset X \setminus H$. También es claro que $|H| \leq 2^\kappa$. Basta probar que $H = X$.

En caso contrario, sea $q \in X \setminus H$. Para cada $p \in H$ sea $V_p \in \mathcal{V}_p$ tal que $q \notin V_p$. Entonces $\{V_p \mid p \in H\} \cup \{X \setminus H\}$ es un cubrimiento abierto de $X$, luego admite un subcubrimiento de cardinal $\kappa$. Equivalentemente, existe $A \subset H$ con $|A| \leq \kappa$ tal que $\{V_p \mid p \in A\}$ cubre $H$. Sea $W = \bigcup_{p\in A} V_p$, de modo que $H \subset W$ y $W \neq X$, pues $q \notin W$. Podemos tomar $\alpha < \kappa^+$ tal que $A \subset \bigcup_{\beta<\alpha} H_\beta$, y así $W$ es unión de $\leq \kappa$ elementos de $\mathcal{V}_\alpha$, luego por 3. debería ser $H_\alpha \setminus W \neq \varnothing$, en contradicción con que $W \subset H$. ■

Notemos que $L(X)$ no es monótono, pues, por ejemplo, la compactificación de Alexandroff $X^\infty$ de un espacio discreto $X$ cumple $L(X^\infty) = \aleph_0$, mientras que $L(X) = |X|$.

Por consiguiente, podemos considerar el grado de Lindelöf hereditario. Del teorema 8.11 se sigue que $Lh(X) \leq nw(X) \leq w(X)$.

A continuación vemos que $Lh$ proporciona una cota para el pseudocarácter:

**Teorema 8.13** *Si $X$ es un espacio de Hausdorff, $\psi(X) \leq Lh(X)$.*

Demostración: Si $x \in X$, para cada $y \in X \setminus \{x\}$, tomamos abiertos disjuntos $x \in U_y$, $y \in V_y$, de modo que $\{V_y\}_{y\in X\setminus\{x\}}$ es un cubrimiento abierto de $X\setminus\{x\}$. Si $\kappa = Lh(X)$, tenemos que $L(X\setminus\{x\}) \leq \kappa$, luego existe $A \subset X\setminus\{x\}$ tal que $|A| \leq \kappa$ y $X \setminus \{x\} = \bigcup_{y\in A} V_y$. Esto implica que

$$\bigcap_{y\in A} U_y \subset \bigcap_{y\in A} (X \setminus V_y) = X \setminus \bigcup_{y\in A} V_y = \{x\},$$

luego $\psi(x) \leq \kappa$. ■

En espacios compactos el teorema anterior proporciona una cota para el carácter. Como aplicación encontramos una cota inferior para el cardinal de un espacio compacto:

**Teorema 8.14 (Čech-Pospíšil)** *Si $K$ es un espacio compacto y para todo punto $x \in K$ se cumple que $\chi(K,x) \geq \kappa \geq \aleph_0$, entonces $|X| \geq 2^\kappa$.*

Demostración: Notemos que la hipótesis implica en particular que $K$ no tiene puntos aislados. Para cada $\alpha < \kappa$ y cada $f \in {}^\alpha 2$, vamos a construir un cerrado no vacío $K_f \subset K$ de modo que la sucesión $\{K_{f|_\beta}\}_{\beta<\alpha}$ sea decreciente respecto a la inclusión y si $f, g \in {}^\alpha 2$ son distintas, entonces $K_f \cap K_g = \varnothing$. Admitiendo que tenemos tal familia de cerrados, es obvio que, para cada $f \in {}^\kappa 2$, podemos tomar un punto $x_f \in \bigcap_{\beta<\kappa} K_{f|_\beta}$ y que la aplicación $f \mapsto x_f$ es inyectiva, luego tenemos la conclusión deseada.

Supongamos en primer lugar que $\kappa = \omega$ y veamos cómo construir los cerrados $K_f$ de modo que además todo ellos tengan interior no vacío.

Para $\alpha = 0$ tomamos $K_\varnothing = K$ y, supuesto que hemos construido $\{K_f\}_{f\in {}^{\leq n}2}$ de modo que todos los $K_f$ tienen interior no vacío, fijamos $f \in {}^n2$ y, como $K$ no tiene puntos aislados, el interior de $\overline{K}_f$ contiene al menos dos puntos $x_0$, $x_1$, y los podemos separar por abiertos $V_0$ y $V_1$ con clausuras disjuntas contenidas en $K_f$. Basta definir $K_g$, para las dos prolongaciones $g \in {}^{n+1}2$ de $f$ como $\overline{V}_0$ y $\overline{V}_1$.

Supongamos ahora que $\kappa$ es no numerable y vamos a construir los cerrados $K_f$ con la condición adicional de que si $f \in {}^\alpha f$, entonces $K_f$ es la intersección de a lo sumo $|\alpha| + \aleph_0$ abiertos. Supongamos construidos los cerrados $\{K_f\}_{f\in{}^{<\alpha}2}$.

Si $\alpha = 0$, tomamos $K_\varnothing = K$. Si $\alpha$ es un ordinal límite y $f \in {}^\alpha 2$, definimos $K_f = \bigcap\limits_{\beta<\alpha} K_{f|_\beta}$.

Supongamos ahora que $\alpha = \beta + 1$ y sea $f \in {}^\beta 2$. Entonces, por hipótesis de inducción, $K_g = \bigcap\limits_{\delta<\mu} U_\delta$, donde $\mu = |\beta| + \aleph_0 < \kappa$ y los $U_\delta$ son abiertos en $K$.

No puede ser $K_g = \{x\}$, para un cierto punto $x \in K$, pues entonces, $\chi(x, X) = \psi(x, X) \leq \mu < \kappa$, en contra de lo supuesto, luego podemos tomar $x_0$, $x_1 \in K_g$ y podemos separarlos por dos cerrados que sean intersecciones numerables de abiertos. En efecto, basta tomar abiertos $x_0 \in U_{0,0}$ y $x_1 \in U_{1,0}$ con clausuras disjuntas y, definidos $U_{i,n}$, tomamos $x_i \in U_{i,n+1} \subset \overline{U}_{i,n+1} \subset U_{i,n}$, de modo que

$$x_i \in U_{i,\omega} = \bigcap_{n\in\omega} U_{i,n} = \bigcap_{n\in\omega} \overline{U}_{i,n},$$

y, si $f_0$ y $f_1$ son las dos extensiones de $g$ a ${}^\alpha 2$, basta definir $K_{f_i}$ como $K_g \cap U_{i,\omega}$. ■

Como consecuencia:

**Teorema 8.15** *Si un espacio compacto $K$ cumple el primer axioma de numerabilidad, entonces $|K| \leq \aleph_0$ o bien $|K| = \mathfrak{c}$.*

DEMOSTRACIÓN: Por el teorema 8.12 tenemos que $|K| \leq \mathfrak{c}$. Basta probar que si $K$ no es numerable, entonces $|K| \geq \mathfrak{c}$. Sea $A$ el conjunto de los puntos de $X$ cuyos entornos son todos no numerables. Entonces $A \neq \varnothing$, pues en caso contrario todo punto tendría un entorno numerable y, tomando un subcubrimiento finito, $K$ sería numerable. Además $A$ es cerrado en $K$, pues si $p \in K \setminus A$, entonces $p \in U \subset K \setminus A$, donde $U$ es un entorno numerable de $p$.

Además $A$ no tiene puntos aislados, pues si $p \in A$ cumple que $V \cap A = \{p\}$, para cierto abierto $V$ en $K$, tomamos una base decreciente $\{V_n\}_{n\in\omega}$ de entornos de $p$ tal que $\overline{V}_0 \subset V$ y $\overline{V}_{n+1} \subset V_n$. Entonces $V_0 \setminus \{p\} = \bigcup\limits_{n\in\omega} (V_n \setminus V_{n+1})$, luego existe un $n < \omega$ tal que $|V_n \setminus V_{n+1}| > \aleph_0$. Como antes, tiene que haber un punto $q \in \overline{V}_n \setminus V_{n+1} \subset V$ con todos sus entornos no numerables, pues si todo punto tiene un entorno numerable, tomando un subcubrimiento finito, $\overline{V}_n \setminus V_{n+1}$ sería numerable. Por lo tanto $q \in V \cap A$, $q \neq p$.

Así pues, $\chi(p, A) \geq \aleph_0$ y el teorema 8.14 nos da que $|A| \geq \mathfrak{c}$. ■

Terminamos este apartado con una relación entre el peso de un espacio compacto y el de su espacio de funciones continuas:

**Teorema 8.16** *Si $K$ es un espacio de Hausdorff compacto, $w(K) = w(C(K))$, donde en $C(K)$ consideramos la topología de la convergencia uniforme.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $\mathcal{B}$ una base de $K$ con $|\mathcal{B}| = w(K)$. Podemos suponer que es cerrada para uniones finitas. Igualmente podemos tomar una base numerable $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}$ cerrada para uniones finitas. Según 4.71, la topología de la convergencia uniforme en $C(K)$ tiene por subbase los conjuntos $T(K_0; U_0)$, donde $K_0 \subset K$ es compacto y $U_0 \subset \mathbb{R}$ es abierto. Vamos a probar que también tiene por subbase a los conjuntos $T(\overline{V}, U)$, donde $V \in \mathcal{B}$ y $U \in \mathcal{B}'$. Así la base formada por las intersecciones finitas de estos abiertos subbásicos tiene cardinal $\leq w(K)$ y podremos concluir que $w(C(K)) \leq w(K)$.

En efecto, si $f \in T(K_0; U_0)$, podemos cubrir $f[K_0]$ por un número finito de abiertos de $\mathcal{B}'$ contenidos en $U_0$, y la unión $U \in \mathcal{B}'$ de este número finito de abiertos básicos cumple $f[K_0] \subset U \subset U_0$ y $f \in T(K_0; U) \subset T(K_0; U_0)$.

Similarmente, podemos cubrir $K_0$ con un número finito de abiertos de $\mathcal{B}$ cuyas clausuras estén contenidas en $f^{-1}[U]$, y la unión $V \in \mathcal{B}$ de estos abiertos cumple $K_0 \subset \overline{V} \subset f^{-1}[U]$ y $f \in T(\overline{V}; U) \subset T(K_0; U) \subset T(K_0; U_0)$.

Esto implica que los abiertos $T(\overline{V}; U)$ forman una subbase, como queríamos probar.

Recíprocamente, tomando un elemento en cada abierto básico, podemos formar un conjunto $D \subset C(K)$ denso en $C(K)$ tal que $|D| \leq w(C(K))$. Vamos a probar que los abiertos

$$V_{g,n} = \{x \in K \mid g(x) > 1/n\}, \qquad \text{con } g \in D, \quad n \in \omega \setminus \{0\}$$

forman una base de $K$, con lo que $w(K) \leq w(C(K))$.

Tomamos $x_0 \in U \subset K$, donde $U$ es abierto. Por 5.49 existe $f : K \longrightarrow [0, 1]$ tal que

$$x_0 \in \{x \in K \mid f(x) > 0\} \subset U.$$

Pongamos que $f(x_0) > 1/n$ y tomemos $g \in D$ tal que $\|f - g\| < 1/2n$. Así

$$x_0 \in V_{g,2n} = \{x \in K \mid g(x) > 1/2n\} \subset \{x \in K \mid f(x) > 0\} \subset U.$$

■

**Nota** Como $C(K)$ es metrizable, es inmediato que $w(C(K)) = d(C(K))$ (véase el teorema 8.21 más abajo). Teniendo en cuenta además el teorema 5.66, concluimos que si $C(K)$ es separable, entonces $K$ es metrizable. ■

**Conexión** La conexión también nos proporciona una cota inferior para el cardinal de un espacio topológico:

**Teorema 8.17** *Si $X$ es un espacio topológico conexo completamente regular con más de un punto, entonces $|X| \geq \mathfrak{c}$.*

Demostración: Si $x$, $y \in X$ son puntos distintos, la regularidad completa nos da una función continua $f : X \longrightarrow [0,1]$ tal que $f(x) = 0$, $f(y) = 1$, y la conexión hace que $f$ sea suprayectiva, luego $|X| \geq |[0,1]| = \mathfrak{c}$. ■

En cambio, el ejemplo A.11 es un espacio de Hausdorff conexo numerable. Por otra parte, todo espacio regular numerable es normal, por 5.13, luego no puede ser conexo. Sin embargo, puede probarse que existe un espacio regular conexo de cardinal $\aleph_1$.

## 8.2 La celularidad y la extensión

Introducimos ahora otros cardinales invariantes que aportan información más fina sobre la estructura de un espacio topológico:

**Definición 8.18** Sea $X$ un espacio topológico.

1. La *celularidad* de $X$ es el menor cardinal $c(X)$ tal que toda familia de abiertos disjuntos dos a dos tiene cardinal $\leq c(X)$. Si $c(X) = \aleph_0$, es decir, cuando toda familia de abiertos disjuntos dos a dos es a lo sumo numerable, se dice que $X$ cumple la *condición de cadena numerable.*

2. El menor cardinal $\kappa$ tal que todo subespacio cerrado discreto de $X$ tiene cardinal $\leq \kappa$ se llama *extensión* de $X$, y se representa por $e(X)$.

1. Obviamente, tenemos las cotas $c(X)$, $e(X) \leq |X|$.

2. Más precisamente, $c(X) \leq d(X) \leq |X|$.

   En efecto, si $\{U_\alpha\}_{\alpha<\kappa}$ es una familia de abiertos disjuntos no vacíos dos a dos y $D \subset X$ es un conjunto denso tal que $|D| = d(X)$, entonces podemos tomar $d_\alpha \in U_\alpha$, y la aplicación $\alpha \mapsto d_\alpha$ es inyectiva, luego $\kappa \leq |D| = d(X)$, luego $x(X) \leq d(X)$.

3. Se cumple también que $e(X) \leq L(X)$.

   En efecto, si $C \subset X$ es discreto de cardinal $\kappa$, para cada $x \in C$ hay un abierto $U_x$ tal que $U_c \cap C = \{x\}$, luego $\{U_c \mid c \in C\} \cup \{X \setminus C\}$ es un cubrimiento abierto de $X$ que no admite subcubrimientos de cardinal menor que $\kappa$.

4. Si $X$ es normal, entonces $e(X) \leq 2^{d(X)}$.

   En efecto, esta desigualdad no es sino una reformulación del lema de Jones (teorema 5.30).

5. El teorema 4.35 afirma que un espacio $X$ numerablemente compacto que cumpla el axioma $T_1$ cumple $e(X) = \aleph_0$.

Ninguno de estos dos cardinales invariantes es monótono, por lo que podemos considerar sus versiones hereditarias $ch(X)$ y $eh(X)$ (definición 8.5), pero sucede que son el mismo cardinal:

**Teorema 8.19** *Si $X$ es un espacio topológico, $ch(X) = eh(X)$ es el mínimo cardinal $\kappa$ tal que todo subespacio discreto de $X$ tiene cardinal $\leq \kappa$.*

DEMOSTRACIÓN: Llamemos $f(X)$ al mínimo cardinal $\kappa$ tal que todo subespacio discreto de $X$ tiene cardinal menor o igual que $\kappa$.

Si un subespacio de $X$ tiene una familia de abiertos disjuntos dos a dos de cardinal $\kappa$ entonces un punto de cada uno de ellos forma un subespacio discreto de cardinal $\kappa$, luego $ch(X) \leq f(X)$. Recíprocamente, si $X$ tiene un subconjunto discreto $D$ de cardinal $\kappa$, entonces $\kappa \leq c(D) \leq ch(X)$, luego $f(X) \leq ch(X)$.

Si $X$ tiene un subespacio discreto $D$ de cardinal $\kappa$ entonces $D$ tiene un subespacio cerrado discreto de cardinal $\kappa$ (el propio $D$), luego $ch(X) \leq eh(X)$. La desigualdad contraria es obvia. ■

Notemos que el teorema 5.4 asegura que todo espacio de Hausdorff infinito $X$ contiene un subespacio infinito discreto, por lo que $ch(X) \geq \aleph_0$ propiamente, es decir, no por el convenio que estamos adoptando por el que los cardinales invariantes que deberían ser finitos toman el valor $\aleph_0$.

1. $c(X), e(X) \leq ch(X) = eh(X) \leq dh(X), Lh(X)$.

   Basta tener en cuenta que, en general, $e(X) \leq L(X)$ y $c(X) \leq d(X)$.

2. Si $X$ es hereditariamente colectivamente de Hausdorff, $c(X) = ch(X)$.

   En efecto, si $\kappa < ch(X)$, existe $D \subset X$ discreto con $|D| > \kappa$, luego existe una familia de abiertos disjuntos dos a dos de cardinal $> \kappa$, luego $c(X) > \kappa$. Por lo tanto, $ch(X) \leq c(X)$, y la otra desigualdad se da siempre.

**Teorema 8.20** *Si $X$ es monótonamente normal, $c(X) = Lh(X)$.*

DEMOSTRACIÓN: Sólo hay que probar que $Lh(X) \leq c(X)$. Para ello llamamos $\kappa = c(X)$ y tenemos que probar que todo subespacio $Y \subset X$ cumple $L(Y) \leq \kappa$. En caso contrario, existe un $Y_0 \subset X$ con un cubrimiento abierto $\mathcal{U}$ que no admite un subcubrimiento de cardinal $\kappa$.

Tomamos $U_0 \in \mathcal{U}$ y un punto $x_0 \in U_0$. Como $U_0$ no cubre $Y_0$, existe $x_1 \in Y \setminus U_0$, y a su vez existe un abierto $U_1 \in \mathcal{U}$ tal que $x_1 \in U_1$. En general, podemos definir una sucesión $\{x_\alpha\}_{\alpha<\kappa^+}$ de puntos de $Y_0$ y otra $\{U_\alpha\}_{\alpha<\kappa^+}$ de abiertos de $\mathcal{U}$ de modo que $x_\alpha \in U_\alpha \setminus \bigcup\limits_{\beta<\alpha} U_\beta$.

En efecto, si hemos construido la sucesión $\{x_\alpha\}_{\alpha<\beta}$, $\{U_\alpha\}_{\alpha<\beta}$, como los estos abiertos no pueden ser un cubrimiento de $Y_0$, siempre podemos tomar un $x_\beta \in Y_0$ con el que prolongar la sucesión.

Llamamos $Y = \{x_\alpha \mid \alpha < \kappa^+\}$, de modo que, para todo $\alpha < \kappa^+$,

$$\{x_\beta \mid \beta < \alpha\} = Y \cap \bigcup_{\beta<\alpha} U_\beta$$

es abierto en $Y$.

Sea $Y_0$ el conjunto de los puntos aislados de $Y$. Entonces $Y_0$ es un subespacio discreto de $X$, pero, como $X$ es hereditariamente colectivamente de Hausdorff, $ch(X) = c(X) = \kappa$, luego $|Y_0| \leq \kappa$.

Además $Y_0$ es denso en $Y$, pues si $U$ es un abierto en $Y$ no vacío, podemos tomar el mínimo $\alpha$ tal que $x_\alpha \in U$, y entonces $\{x_\alpha\} = U \cap \{x_\beta \mid \beta < \alpha + 1\}$ es abierto en $Y$, luego $x_\alpha \in Y_0$.

Como $X$ es regular, para cada $\alpha < \kappa^+$, podemos tomar un abierto $V_\alpha$ en $Y$ tal que

$$x_\alpha \in V_\alpha \subset \overline{V}_\alpha \subset \{x_\beta \mid \beta \leq \alpha\}.$$

Sea $G$ un operador monótono de normalidad que cumpla la condición adicional $G(A, B) \cap G(B, A) = \varnothing$. Definimos $W_\alpha = G(\{x_\alpha\}, Y \setminus V_\alpha)$.

Se cumple que si $\alpha < \beta < \kappa^+$ y $W_\alpha \cap W_\beta \neq \varnothing$, entonces $x_\alpha \in V_\beta$.

En efecto, si $x_\alpha \notin V_\beta$, como también $x_\beta \notin V_\alpha$, tenemos que

$$W_\alpha \cap W_\beta \subset G(Y \setminus V_\beta, Y \setminus V_\alpha) \cap G(Y \setminus V_\alpha, Y \setminus V_\beta) = \varnothing.$$

Como $Y_0$ es denso en $Y$, cada $W_\alpha$ contiene un punto de $Y_0$, pero, como $|Y_0| \leq \kappa$, tiene que haber un mismo $y \in Y_0$ que esté en $\kappa^+$ abiertos, es decir, tiene que haber un $A \subset \kappa^+$ con $|A| = \kappa^+$ tal que $y \in \bigcap\limits_{\alpha \in A} W_\alpha$.

Sea $A = \{\alpha_\delta\}_{\delta < \kappa^+}$ la única enumeración creciente de $A$ y llamemos $y_\delta = x_{\alpha_\delta}$. Así, si $\delta < \epsilon$, tenemos que $W_{\alpha_\delta} \cap W_{\alpha_\epsilon} \neq \varnothing$, luego $y_\delta \in V_{\alpha_\epsilon}$, es decir, que

$$\{y_\delta \mid \delta \leq \epsilon\} \subset V_{\alpha_\epsilon} \subset \overline{V}_{\alpha_\epsilon} \subset \{x_\beta \mid \beta \leq \alpha_\epsilon\}.$$

Si llamamos $D$ al conjunto de todos los $y_\delta$, tenemos que

$$\{y_\delta \mid \delta \leq \epsilon\} \subset V_{\alpha_\epsilon} \cap D \subset \overline{V}_{\alpha_\epsilon} \cap D \subset \{y_\delta \mid \delta \leq \epsilon\},$$

luego tenemos la igualdad, y así $C_\epsilon = \{y_\delta \mid \delta \leq \epsilon\}$ es abierto y cerrado en $D$, luego $D_0 = \{y_{\epsilon+1} \mid \epsilon < \kappa^+\}$ es discreto, pues $(C_{\epsilon+1} \setminus C_\epsilon) \cap D_0 = \{y_{\epsilon+1}\}$. Así hemos llegado a que $X$ contiene un subespacio discreto de cardinal $\kappa^+ > c(\kappa)$, contradicción. ■

Si $X$ es colectivamente normal, cumple también que $d(X) = dh(X)$, pero la prueba es complicada. En su lugar, en el capítulo 12 lo probamos para espacios ordenados (teorema 12.24) junto con otros resultados y aquí lo probamos para espacios métricos. 461

**Teorema 8.21** *Sea $M$ un espacio métrico. Entonces*

$$w(M) = d(M) = dh(M) = e(M) = c(M) = ch(M) = L(X) = Lh(X).$$

Demostración: Si $M$ tiene un conjunto denso $D$ de cardinal $\kappa$ es fácil ver que las bolas $B_{1/n}(p)$ con $p \in D$ forman una base de $M$ de cardinal $\kappa$, de donde $w(M) \leq d(M)$. La otra desigualdad se da siempre.

Si $N \subset M$, entonces $d(N) \leq w(N) \leq w(M)$, luego $d(M) \leq dh(M) \leq w(M)$ y tenemos probadas las dos primeras igualdades de enunciado.

Veamos que $ch(M) \leq e(M)$. Así $c(M) \leq ch(M) \leq e(M) \leq w(M)$.

Sea $e(M) = \kappa$. Sea $D$ un subespacio discreto de $M$. Entonces $D$ es abierto en $\overline{D}$, pues si $x \in D$, existe un abierto $U$ en $\overline{D}$ tal que $U \cap D = \{x\}$, pero ha de ser $U = \{x\}$, ya que si existe $y \in U$, $y \neq x$, entonces podríamos tomar un entorno menor de $y$ que no cortara a $D$, lo que contradice que $y \in \overline{D}$. Por lo tanto cada $\{x\}$ es abierto en $\overline{D}$, luego $D$ es unión de abiertos en $\overline{D}$.

Como $\overline{D}$ es un espacio métrico, es perfectamente normal, y así $D$ es unión de un conjunto numerable de subespacios cerrados en $\overline{D}$, luego en $M$. Como obviamente serán discretos, cada uno de ellos tiene cardinal $\leq \kappa$, luego $D$ también.

Veamos ahora que $d(M) \leq c(M)$, con lo que quedarán probadas las cinco primeras igualdades del enunciado.

Llamamos $\kappa = c(M)$ y tenemos que probar que $d(M) \leq \kappa$.

Para cada número natural no nulo $n$ sea $A_n$ una familia maximal de puntos de $M$ tales que $d(x, y) \geq 1/n$ para todo par $x$, $y \in A_n$ (existe por el lema de Zorn).

Las bolas con centros en $A_n$ y radio $1/(2n)$ son una familia de abiertos disjuntos, luego $|A_n| \leq \kappa$. En consecuencia el conjunto $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ cumple $|A| \leq \kappa$ y además es denso, ya que si existiera un punto $x \in M$ fuera de $\overline{A}$, entonces $d(x, A) > 1/n$ para cierto número natural $n$ luego, en particular, $d(x, A_n) > 1/n$, y $x$ podría ser añadido a $A_n$ contradiciendo su maximalidad.

Las últimas igualdades se deducen de las relaciones generales siguientes:

$$ch(M) \leq Lh(M) \leq w(M), \qquad e(M) \leq L(M) \leq w(M).$$

■

Por ejemplo, de aquí obtenemos otra prueba[2] del teorema 9.15:

**Teorema 8.22** *Si $M$ es un espacio métrico, las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

1. *$M$ es compacto.*
2. *$M$ es numerablemente compacto.*
3. *$M$ es sucesionalmente compacto.*

Demostración: Como $M$ cumple el primer axioma de numerabilidad, el teorema 4.56 nos da que 2) $\leftrightarrow$ 3), y claramente 1) $\Rightarrow$ 2).

Por otra parte, si $M$ es numerablemente compacto, $e(M) = \aleph_0$, luego por el teorema anterior $w(M) = \aleph_0$ y esto implica que es de Lindelöf, luego es compacto. ■

[2]Aunque ésta usa AE, mientras que la que dimos en su momento no.

El cuadro siguiente resume todas las desigualdades entre cardinales invariantes que hemos demostrado. En un espacio métrico todas ellas son igualdades excepto $\chi(x) = \aleph_0 \leq w(X)$ y $nw(X) \leq |X|$.

$$\begin{tikzcd}
 & w(X) & & {|X|} & \\
\chi(X) \arrow[ur] & & nw(X) \arrow[ul] \arrow[ur] & & \\
 & dh(X) \arrow[ur] & & Lh(X) \arrow[ul] & \\
d(X) \arrow[ur] & & ch(X) = eh(X) \arrow[ul] \arrow[ur] & & L(X) \arrow[ul] \\
 & c(X) \arrow[ul] \arrow[ur] & & e(X) \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

**celularidad y extensión en productos** Observemos que la extensión de un producto puede ser mayor que la de los factores. Un ejemplo lo proporciona la recta de Sorgenfrey $S$ (ejemplo A.25), que cumple $e(S) = \aleph_0$, pero $e(S \times S) = \mathfrak{c}$.

El caso de la celularidad es más delicado. En [TC 8.52] hemos probado el teorema siguiente:

**Teorema 8.23** *Sea $\kappa$ un cardinal infinito y sea $X = \prod\limits_{i\in I} X_i$ un producto de espacios topológicos tal que, para cada $I_0 \subset I$ finito, $c(\prod\limits_{i\in I_0} X_i) \leq \kappa$. Entonces $c(X) \leq \kappa$.*

El teorema 8.7 implica que si todos los factores cumplen $d(X_i) \leq \kappa$, entonces cualquier producto finito $P$ cumple $c(P) \leq d(P) \leq \kappa$, luego:

**Teorema 8.24** *Sea $\kappa$ un cardinal infinito y sea $X = \prod\limits_{i\in I} X_i$ un producto de espacios topológicos tales que $d(X_i) \leq \kappa$. Entonces $c(X) \leq \kappa$.*

Es interesante que el teorema no exige ninguna cota al número de factores. Si sólo queremos exigir $c(X_i) \leq \kappa$, lo más que podemos probar es lo siguiente:

**Teorema 8.25 (Kurepa)** *Sea $\kappa$ un cardinal infinito y sea $X = \prod\limits_{i\in I} X_i$ un producto de espacios topológicos tales que $c(X_i) \leq \kappa$. Entonces $c(X) \leq 2^\kappa$.*

Demostración: Por 8.23, basta probar el teorema cuando $I = n \in \omega$. Supongamos que $\mathcal{V}$ es una familia de abiertos en $X$ disjuntos dos a dos con $|\mathcal{V}| > 2^\kappa$. Podemos suponer que cada $V \in \mathcal{V}$ es un abierto básico $V = \prod\limits_{i\in n} V_i$.

Sea $P_i = \{\{V, W\} \in [\mathcal{V}]^2 \mid V_i \cap W_i = \varnothing\}$. Así $[\mathcal{V}]^2 = \bigcup\limits_{i<n} P_i$. Por el teorema de Erdős-Rado [TC 11.6], existe $i < n$ y $\mathcal{W} \subset \mathcal{V}$, con $|\mathcal{W}| > \kappa$ tal que $[\mathcal{W}]^2 \subset P_i$, con lo que $\{W_i \mid W \in \mathcal{W}\}$ es una familia de abiertos disjuntos dos a dos en $X_i$ de cardinal $> \kappa$, contradicción. ■

En [TC 8.57] hemos visto que $\mathrm{AM}(\aleph_1)$ implica que todo producto de espacios de celularidad $\aleph_0$ tiene celularidad $\aleph_0$, mientras que en [TC 8.60] (teniendo en cuenta [TC 8.51]) hemos probado que la hipótesis del continuo implica que existen dos espacios topológicos con celularidad $\aleph_0$ cuyo producto tiene celularidad no numerable.

## 8.3 La celularidad local

Introducimos ahora un nuevo cardinal invariante que nos permitirá extraer consecuencias notables sobre los productos de espacios extremadamente disconexos.

**Definición 8.26** Diremos que una familia $\mathcal{A}$ de abiertos disjuntos en un espacio topológico $X$ es *celular* en un punto $p \in X$ si, para todo $U \in \mathcal{C}$ se cumple que $p \notin \overline{U}$, pero $p \in \overline{\bigcup \mathcal{A}}$.

Obviamente, si $p$ es un punto aislado, no puede haber familias celulares en $p$. Pero, si $X$ es un espacio de Hausdorff, es la única posibilidad. En efecto, si $p$ no es aislado, el lema de Zorn nos da una familia maximal $\mathcal{A}$ de abiertos disjuntos dos a dos tales que, para cada $U \in \mathcal{A}$, se cumpla que $p \notin \overline{U}$. Dicha familia es necesariamente celular en $p$, pues si $p \notin \overline{\mathcal{A}}$, entonces, como $p$ no es aislado, el abierto $V = X \setminus \overline{\bigcup A}$ tiene que contener otro punto $q \neq p$, y podemos tomar abiertos disjuntos $p \in U_0$, $q \in U_1$, de modo que $p \notin \overline{U}_1$, por lo que $\mathcal{A} \cup \{U_1\}$ contradice la maximalidad de $\mathcal{A}$.

Más aún, si $\{V_i\}_{i \in I}$ es una base de entornos de $p$, cada $V_i$ corta a $\bigcup \mathcal{A}$, luego corta a un $U_i \in \mathcal{A}$, luego $\mathcal{A}' = \{U_i \mid i \in I\}$ sigue siendo una familia celular en $p$.

Así pues, si $X$ es un espacio de Hausdorff y $p$ es un punto no aislado, podemos definir la *celularidad* de $X$ en $p$ como el menor cardinal $c(p, X)$ de una familia celular en $p$. Para los puntos aislados podemos adoptar el convenio de que $c(p, X) = \aleph_0$.

**Teorema 8.27** *Si $X$ es un espacio de Hausdorff y $p \in X$, entonces $c(p, X)$ es un cardinal infinito regular, $c(p, X) \leq c(X)$ y $c(p, X) \leq \chi(p, X)$.*

Demostración: Hemos probado que si $p$ no es un punto aislado, entonces existe una familia celular en $p$ de cardinal menor o igual que $\chi(p, X)$, luego $c(p, X) \leq \chi(p, X)$. La desigualdad $c(p, X) \leq c(X)$ es obvia. Veamos ahora que $\kappa = c(p, X)$ es regular. En caso contrario, si $\mathcal{A}$ es una familia celular en $p$ de cardinal $\kappa$, podemos partirla como $\mathcal{A} = \bigcup\limits_{\alpha<\beta} \mathcal{A}_\alpha$, donde $\beta < \kappa$ y $|\mathcal{A}_\alpha| < \kappa$. Si $U_\alpha = \bigcup \mathcal{A}_\alpha$, por la minimalidad de $\kappa$ tenemos que $p \notin \overline{U}_\alpha$, pero si llamamos

$\mathcal{A}' = \{U_\alpha \mid \alpha < \beta\}$, entonces $p \in \overline{\bigcup \mathcal{A}'}$, luego $\mathcal{A}'$ es celular en $p$ y tiene cardinal menor que $\kappa$, contradicción. ■

Vamos a relacionar este cardinal con la desconexión extrema. Para ello definimos una versión local:

**Definición 8.28** Diremos que un espacio topológico $X$ es *extremadamente disconexo en un punto* $p \in X$ si existen abiertos disjuntos $U$ y $V$ en $X$ tales que $p \in \overline{U} \cap \overline{V}$.

Claramente, $X$ es extremadamente disconexo si y sólo si lo es en todos sus puntos.

**Teorema 8.29** *Sean $X$, $Y$ dos espacios de Hausdorff y $x \in X$, $y \in Y$ puntos no aislados. Si $c(x, X) = c(y, Y)$, entonces $X \times Y$ no es extremadamente disconexo en el punto $(x, y)$.*

Demostración: Sean $\{U_\alpha\}_{\alpha<\kappa}$ y $\{V_\alpha\}_{\alpha<\kappa}$ familias celulares en $x$ e $y$, respectivamente, donde $\kappa = c(x, X) = c(y, Y)$. Sean

$$G_\beta = U_\beta \times \Big(Y \setminus \overline{\bigcup_{\alpha\leq\beta} V_\alpha}\Big), \qquad H_\beta = \Big(X \setminus \overline{\bigcup_{\alpha\leq\beta} U_\alpha}\Big) \times V_\beta,$$

$$G = \bigcup_{\beta<\kappa} G_\beta, \qquad H = \bigcup_{\beta<\kappa} H_\beta.$$

Claramente $G$ y $H$ son abiertos en $X \times Y$, y son disjuntos, pues si $(u, v) \in G \cap H$, existen $\beta$, $\beta' < \kappa$ tales que $(u, v) \in G_\beta \cap H_{\beta'}$. Pero si, por ejemplo, $\beta \leq \beta'$, tendría que ser $u \in U_\beta$ y $u \in X \setminus \overline{\bigcup\limits_{\alpha\leq\beta'} U_\alpha}$, lo cual es absurdo.

Basta probar que $(x, y) \in \overline{G} \cap \overline{H}$. Para ello tomamos un entorno básico $A \times B$. Entonces existe un $\beta < \kappa$ tal que $A \cap U_\beta \neq \varnothing$. Por la minimalidad de $\kappa$, tenemos que $y \notin \overline{\bigcup\limits_{\alpha\leq\beta} U_\alpha}$, pero $y \in \overline{\bigcup\limits_{\alpha<\kappa} V_\alpha}$, luego también $y \in \overline{\bigcup\limits_{\beta<\alpha<\kappa} V_\alpha}$.

Por lo tanto, podemos tomar $\beta < \gamma < \kappa$ tal que $B \cap V_\gamma \neq \varnothing$. Entonces, como $V_\gamma \cap \bigcup\limits_{\alpha\leq\beta} V_\alpha = \varnothing$, también $V_\gamma \cap \overline{\bigcup\limits_{\alpha\leq\beta} V_\alpha} = \varnothing$, luego

$$\varnothing \neq (A \cap U_\beta) \times (B \cap V_\gamma) \subset (A \times B) \cap G_\beta \subset (A \times B) \cap G.$$

Igualmente se prueba que $(A \times B) \cap H \neq \varnothing$. ■

Así, por ejemplo, ahora podemos afirmar que si $X$ es un espacio de Hausdorff, $X \times X$ no es extremadamente disconexo salvo que $X$ sea discreto, pues si tiene un punto $x$ no aislado, entonces el producto no es extremadamente disconexo en $(x, x)$, por el teorema anterior.

Para extraer consecuencias más fuertes del teorema anterior vamos a obtener una caracterización de la celularidad local. Recordemos que un abierto $U$ en un espacio topológico $X$ se dice *regular* si $U = \mathring{\overline{U}}$. En [TC 7.30] se demuestra que si $U$ es un abierto arbitrario, entonces $\mathring{\overline{U}}$ y $X \setminus \overline{U}$ son abiertos regulares.

**Definición 8.30** Si $\kappa$ es un cardinal infinito y $X$ es un espacio de Hausdorff, un punto $p \in X$ es un $P^*(\kappa)$-*punto* si cuando la intersección de $\kappa$ entornos de $p$ que sean abiertos regulares es también un entorno de $p$.

Si eliminamos la condición de que los abiertos sean regulares obtenemos la definición de $P(\kappa)$-punto, de modo que un $P(\aleph_0)$-punto es lo que en 7.77 hemos llamado $P$-punto.

La razón para introducir la regularidad es para trabajar con espacios de Hausdorff arbitrarios, porque en un espacio regular los abiertos regulares forman una base, así que los $P^*(\kappa)$-puntos coinciden con los $P(\kappa)$-puntos.

En efecto, si $p \in U$, donde $U$ es abierto, por regularidad existe un abierto $V$ tal que $p \in V \subset \overline{V} \subset U$, luego $p \in \mathring{\overline{V}} \subset U$ y $\mathring{\overline{V}}$ es un abierto regular.

**Teorema 8.31** *Si $X$ es un espacio de Hausdorff y $p \in X$ no es un punto aislado, entonces $c(p, X)$ es el menor cardinal $\kappa$ tal que $p$ no es un $P^*(\kappa)$-punto.*

Demostración: Veamos que si $p$ es un $P^*(\kappa)$-punto, entonces no existen familias celulares en $p$ de cardinal $\kappa$. Si $\mathcal{A}$ fuera una, para cada $U \in \mathcal{A}$ tenemos que $p \in X \setminus \overline{U}$, que es un abierto regular, luego $p$ está en el interior de la intersección

$$\bigcap_{U \in \mathcal{A}} (X \setminus \overline{U}) = X \setminus \bigcup_{U \in \mathcal{A}} \overline{U}.$$

Dicho interior es

$$X \setminus \overline{\bigcup_{U \in \mathcal{A}} \overline{U}} \subset X \setminus \overline{\bigcup \mathcal{A}},$$

luego $p \notin \overline{\bigcup \mathcal{A}}$, contradicción.

Esto prueba que $p$ no es un $P^*(c(p, X))$-punto, luego $c(p, X)$ es mayor o igual que el cardinal indicado en el enunciado. Para probar la desigualdad opuesta suponemos que $p$ no es un $P^*(\kappa)$-punto y vamos a probar que existe una familia celular en $p$ de cardinal $\kappa$.

Sea $\{U_\alpha\}_{\alpha<\kappa}$ una familia de abiertos regulares que contengan a $p$, pero cuya intersección no sea entorno de $p$. Sea $V_0 = X \setminus \overline{U}_0$ y, en general,

$$V_\beta = \overbrace{\bigcap_{\alpha<\beta} U_\alpha}^{\circ} \setminus \overline{U}_\beta.$$

Vamos a probar que $\{V_\beta\}_{\beta<\kappa}$ es una familia celular en $p$. Son claramente conjuntos abiertos y, si $\alpha < \beta$, entonces $V_\alpha \cap V_\beta \subset U_\alpha \setminus \overline{U}_\alpha = \varnothing$. Como $U_\beta \cap V_\beta = \varnothing$, ciertamente $p \notin \overline{V}_\beta$. Sólo falta probar que $p \in \overline{\bigcup_{\beta<\kappa} V_\beta}$.

Para ello tomamos un abierto tal que $p \in G$. Entonces $G \not\subset \bigcap_{\alpha<\kappa} U_\alpha$, luego existe un mínimo $\beta < \kappa$ tal que $G \not\subset U_\beta$. Como $U_\beta$ es regular, si fuera $G \subset \overline{U}_\beta$, entonces $G \subset \mathring{\overline{U}}_\beta = U_\beta$, contradicción, luego $G \setminus \overline{U}_\beta \neq \varnothing$ y, por la minimalidad de $\beta$, de hecho, $G \cap V_\beta \neq \varnothing$, luego $G \cap \bigcup_{\beta<\kappa} V_\beta \neq \varnothing$. ■

Así, si un espacio regular $X$ no es un $P$-espacio, existe un punto $x \in X$ que no es un $P$-punto, luego no es un $P^*(\aleph_0)$-punto, luego no es aislado y $c(x, X) = \aleph_0$.

Por lo tanto, si $X$ e $Y$ son espacios topológicos regulares y ninguno de los dos es un $P$-espacio, existen puntos $x \in X$, $y \in Y$ no aislados tales que $c(x, X) = \aleph_0 = c(y, Y)$, luego el teorema anterior nos da que $X \times Y$ no es extremadamente disconexo en $(x, y)$.

Observemos que, como las aplicaciones abiertas conservan la desconexión extrema (teorema 3.29), si un producto $X \times Y$ es extremadamente disconexo, ambos factores lo son, y acabamos de probar que, además, al menos uno de ellos tiene que ser un $P$-espacio extremadamente disconexo. En realidad podemos llegar a una condición necesaria mucho más fuerte:

**Teorema 8.32** *Si $X$ es un espacio de Hausdorff extremadamente disconexo y $p \in X$, entonces $c(p, X) = \aleph_0$ o bien $c(p, X)$ es un cardinal medible.*

Demostración: Supongamos que $c(p, X) = \kappa > \aleph_0$. En particular, esto implica que $p$ no es un punto aislado de $X$. Sea $\{U_\alpha\}_{\alpha<\kappa}$ una familia celular en $p$ y definamos

$$\mathcal{U} = \{A \subset \kappa \mid p \in \overline{\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha}\}.$$

Vamos a probar que $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro $\kappa$-completo no principal en $\kappa$, lo cual es justamente lo que requiere la definición de cardinal medible [TC 7.70]. Claramente, $\kappa \in \mathcal{U}$, $\varnothing \notin \mathcal{U}$ y si $A \subset B \subset \kappa$ con $A \in \mathcal{U}$, también $B \in \mathcal{U}$. Si $A \subset \kappa$, los abiertos

$$\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha, \qquad \bigcup_{\alpha \in \kappa \setminus A} U_\alpha$$

son disjuntos, luego

$$X = \overline{\bigcup_{\alpha<\kappa} U_\alpha} = \overline{\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha} \cup \overline{\bigcup_{\alpha \in \kappa \setminus A} U_\alpha}$$

es la unión de dos abiertos disjuntos, de donde se sigue que $A \in \mathcal{U}$ o $\kappa \setminus A \in \mathcal{U}$. Sólo falta probar que si $S \subset \mathcal{U}$ con $|S| < \kappa$, entonces $\bigcap S \in \mathcal{U}$.

Para cada $A \in S$, sea $V_A = X \setminus \overline{\bigcup_{\alpha \in \kappa \setminus A} U_\alpha}$. Así $\{V_A\}_{A \in S}$ es una familia de abiertos regulares entornos de $p$. Por el teorema anterior $p$ no es un $P^*(\kappa)$-punto, luego la intersección de los $V_A$ es entorno de $p$, es decir, existe un abierto $G$ tal que $p \in G \subset \bigcap_{A \in S} V_A$. Por lo tanto

$$p \notin \overline{X \setminus \bigcap_{A \in S} V_A} = \overline{\bigcup_{A \in S} \bigcup_{\alpha \in \kappa \setminus A} U_\alpha},$$

luego $\bigcup_{A \in S} (\kappa \setminus A) \notin \mathcal{U}$, luego $\bigcap S = \bigcap_{A \in S} A \in \mathcal{U}$. ■

Así pues:

**Teorema 8.33** *Si $X$, $Y$ son espacios regulares extremadamente disconexos y $X \times Y$ es también extremadamente disconexo, los puntos no aislados de uno de los factores deben tener todos celularidad medible.*

En efecto, en caso contrario ambos factores tienen puntos no aislados de celularidad numerable por el teorema anterior, y entonces el producto no es extremadamente disconexo por 8.29.

Notemos que si $x \in X$ cumple que $c(x, X)$ es medible, entonces se cumple $c(x, X) \leq |X|$, pues en caso contrario $|X| < c(x, X) \leq 2^{2^{|X|}}$, pero esto es imposible, porque los cardinales medibles son inaccesibles [TC 7.75].

Recordemos que un cardinal $\kappa$ es medible Ulam si existe un cardinal medible menor o igual que $\kappa$. Por lo tanto:

**Teorema 8.34** *Si $X$ e $Y$ son espacios regulares extremadamente disconexos de cardinal no medible Ulam y $X \times Y$ es extremadamente disconexo, entonces $X$ e $Y$ son discretos.*

Ahora también es inmediato:

**Teorema 8.35** *Todo $P$-espacio regular extremadamente disconexo de cardinal no medible Ulam es discreto.*

El ejemplo A.46 prueba que, si existen cardinales medibles, sí que es posible que un producto de dos espacios extremadamente disconexos regulares no discretos sea extremadamente disconexo.

## 8.4 Cardinales característicos del continuo

En el capítulo VIII de [TC] hemos introducido varios cardinales comprendidos entre $\aleph_1$ y $\mathfrak{c}$ cuyo valor exacto no puede determinarse a partir de los axiomas usuales de la teoría de conjuntos. Aquí vamos a ver algunos resultados topológicos que dependen de ellos. Varios de ellos tienen que ver con la convergencia de sucesiones, así que conviene hacer algunas observaciones generales previas.

**Definición 8.36** Diremos que una sucesión es *trivial* si es finalmente constante, con lo que, en un espacio de Hausdorff, converge al punto que toma finalmente. Diremos que una sucesión converge *estrictamente* a un punto $x$ si no toma nunca el valor $x$.

Así, si una sucesión convergente no es trivial, pasando a una subsucesión, obtenemos otra sucesión que converge estrictamente al mismo límite.

Si $X$ es un espacio topológico y $A \subset X$ es un subespacio numerable, diremos que $A$ *converge* a un punto $x \in X \setminus A$ si para todo entorno $U$ de $x$ se cumple que $A \subset^* U$, es decir, que $A \setminus U$ es finito.

La relación con la convergencia de sucesiones es que si $\{x_n\}_{n\in\omega}$ es cualquier enumeración de $A$, entonces $A$ converge a $x$ en el sentido precedente si y sólo si $\{x_n\}_{n\in\omega}$ converge a $x$ en el sentido usual de convergencia de sucesiones, y esto es independiente de la enumeración de $A$ elegida.

Recíprocamente, si $\{x_n\}_{n\in\omega}$ es cualquier sucesión estrictamente convergente a $x$, entonces el conjunto $S = \{x_n \mid n \in \omega\}$ converge a $x$.

**Compacidad sucesional** Si $A \subset X$ es numerable y $x \in \overline{A}$, en general no tiene por qué existir una sucesión en $A$ que converja a $x$. Sabemos que una condición suficiente es que $x$ tenga una base numerable de entornos. Ahora vamos a probar que basta una hipótesis ligeramente más débil:

**Teorema 8.37** *Sea $X$ un espacio topológico, sea $A \subset X$ un conjunto numerable y sea $x \in \overline{A}$ un punto tal que $\chi(x, X) < \mathfrak{p}$. Entonces existe una sucesión en $A$ que converge a $x$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $\mathcal{U}$ una base de entornos abiertos de $x$ tal que $|\mathcal{U}| < \mathfrak{p}$. Podemos suponer que $x \notin A$, de modo que, para cada $U \in \mathcal{U}$, la intersección $U \cap A$ es infinita.

De este modo $\{U \cap A \mid U \in \mathcal{U}\}$ es una familia de subconjuntos de $A$ con la propiedad fuerte de la intersección finita y cardinal $< \mathfrak{p}$, luego existe un conjunto $B = \{x_n \mid n \in \omega\} \subset A$ infinito tal que $B \setminus U$ es finito, para todo $U \in \mathcal{U}$. Así pues, la sucesión $\{x_n\}_{n\in\omega}$ converge a $x$. ■

Para sacar partido a este hecho conviene introducir un nuevo concepto:

**Definición 8.38** Diremos que un espacio topológico $X$ es *subsucesional* si cuando $A \subset X$ es numerable y $p$ es un punto de acumulación de $A$, existe una sucesión en $A$ que converge a $p$.

**Teorema 8.39** *El cardinal $\mathfrak{p}$ es el mínimo cardinal $\kappa$ que cumple una cualquiera de las propiedades siguientes:*

1. *${}^{\kappa}2$ no es subsubsucesional.*
2. *Existe un espacio (de Hausdorff) compacto $X$ no subsucesional que cumple $\chi(X) = \kappa$.*
3. *Existe un espacio (de Hausdorff) numerablemente compacto $X$ no subsucesional que cumple $\chi(X) = \kappa$.*
4. *Existe un espacio topológico $X$ no subsucesional que cumple $\chi(X) = \kappa$.*

DEMOSTRACIÓN: Como 1) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 3) $\Rightarrow$ 4), el mínimo cardinal que cumple 1) es mayor o igual que el mínimo que cumple 2), etc. Además, el teorema anterior implica que el menor cardinal que cumple 4) es mayor o igual que $\mathfrak{p}$.

Sólo falta probar que $\mathfrak{p}$ es mayor o igual que el mínimo cardinal que cumple 1), para lo cual basta probar que el espacio ${}^{\mathfrak{p}}2$ no es subsucesional. Ahora bien, por el teorema 5.65, basta encontrar un espacio cerodimensional $X$ con $w(X) \leq \mathfrak{p}$ que no sea subsucesional (pues obviamente un espacio que contiene un espacio no subsucesional no es subsucesional).

Sea $S \subset [\omega]^{\omega}$ una familia de conjuntos con la propiedad de la intersección fuerte de la intersección finita que no admita una pseudointersección y $|S| = \mathfrak{p}$. Podemos suponer que $S$ es cerrado para intersecciones numerables. Entonces $\bigcap S$ es finita y, eliminando los elementos de la intersección de cada elemento de $S$, podemos suponer que $\bigcap S = \varnothing$.

Basta considerar $X = \omega + 1$ con la topología que tiene por abiertos a los conjuntos $U$ tales que si $\omega \in U$ entonces existe un $A \in S$ tal que $A \subset U$.

Claramente estos conjuntos definen una topología en $X$, que cumple el axioma $T_1$ y es cerodimensional, pues tiene por base a los abiertos-cerrados $\{n\}$, con $n \in \omega$, y $\{\omega\} \cup A$, con $A \in S$. Esto muestra también que $w(X) \leq \mathfrak{p}$.

Por último, $X$ no es , pues si $A = \omega$, tenemos que $\omega \in \overline{A}$, pero ninguna sucesión en $A$ converge a $\omega$. Si así fuera, el conjunto $A$ de términos de la sucesión (necesariamente infinito) sería una pseudointersección de $S$. ■

Así pues, todo espacio topológico $X$ tal que $\chi(X) < \mathfrak{p}$ es subsucesional y, teniendo en cuenta el teorema 4.35, todo espacio $T_1$ numerablemente compacto y es sucesionalmente compacto, luego:

**Teorema 8.40** *Todo espacio topológico $T_1$ numerablemente compacto $X$ de carácter $\chi(X) < \mathfrak{p}$ es sucesionalmente compacto.*

Si en lugar de una cota sobre el carácter queremos una cota sobre el cardinal del espacio, entonces tenemos que considerar el cardinal $\mathfrak{t}$:

**Teorema 8.41** *Todo espacio de Hausdorff compacto de cardinal menor que* $2^{\mathfrak{t}}$ *es sucesionalmente compacto.*

Demostración: Sea $X$ un espacio de Hausdorff compacto que no es sucesionalmente compacto. Sea $\{x_n\}_{n\in\omega}$ una sucesión en $X$ que no tenga subsucesiones convergentes. Sea $N = \{x_n \mid n \in \omega\}$, necesariamente infinito.

Entonces, si $T \in [N]^\omega$, existen $T_1, T_2 \in [T]^\omega$ tales que $T_1' \cap T_2' = \varnothing$ (donde $T'$ representa el conjunto de puntos de acumulación).

En efecto, como $X$ es compacto, $T$ tiene un punto de acumulación, pero no puede ser único (o la subsucesión de $\{x_n\}_{n\in\omega}$ formada por los puntos de $T$ sería convergente), luego podemos tomar dos de ellos $p_1$ y $p_2$ y dos entornos cerrados disjuntos, cada uno de los cuales contendrá un subconjunto infinito $T_i \subset Y$ de modo que $T_1' \cap T_2' = \varnothing$.

Ahora podemos construir como sigue una aplicación $T : {}^{<\mathfrak{t}}2 \longrightarrow [N]^\omega$ con la propiedad de que si $s \subset t$ entonces $T(t) \subset^* T(s)$:

Partimos de $T(\varnothing) = N$. Supuesto definido $T(s)$, elegimos dos conjuntos $T(s^\frown 0)$, $T(s^\frown 1) \in [T(s)]^\omega$ tales que $T(s^\frown 0)' \cap T(s^\frown 1)' = \varnothing$. Supuesta definida $T|_{{}^{<\lambda}2}$, con $\lambda < \mathfrak{t}$, para cada $f \in {}^\lambda 2$ tomamos como $T(f)$ una pseudointersección de la torre $\{T(f|_\delta)\}_{\delta<\lambda}$.

Notemos que si $T_1 \subset^* T_2$, entonces $T_1' \subset T_2'$, por lo que, para cada $f \in {}^{\mathfrak{t}}2$, la sucesión $\{T(f|_\alpha)'\}_{\alpha<\mathfrak{t}}$ es una familia decreciente de cerrados en $X$, luego por compacidad podemos definir $\phi : {}^{\mathfrak{t}}2 \longrightarrow X$ de modo que $\phi(f) \in \bigcap\limits_{\alpha<\mathfrak{t}} T(f|_\alpha)$. Claramente es inyectiva, luego $|X| \geq 2^{\mathfrak{t}}$. ■

Notemos que $2^{\mathfrak{t}}$ puede ser mayor que $\mathfrak{c}$. En cambio, si sustituimos "compacto" por "numerablemente compacto", tenemos lo siguiente:

**Teorema 8.42** $\mathfrak{c}$ *es el menor cardinal de un espacio de Hausdorff numerablemente compacto que no es sucesionalmente compacto.*

Demostración: Veamos que si $X$ es numerablemente compacto y $|X| < \mathfrak{c}$, entonces es sucesionalmente compacto. Suponiendo que no lo es, podemos construir una aplicación $T : {}^{<\mathfrak{t}}2 \longrightarrow [N]^\omega$ exactamente en las mismas condiciones de la prueba del teorema anterior, pero no vamos a poder aprovecharla completamente. Nos basta considerar su restricción $T : {}^{<\omega}2 \longrightarrow [N]^\omega$. En efecto, así $\{T(f|_n)'\}_{n<\omega}$ es una familia decreciente numerable de cerrados, y como $X$ es numerablemente compacto, obtenemos una aplicación inyectiva $\phi : {}^\omega 2 \longrightarrow X$, que nos permite concluir que $|X| \geq \mathfrak{c}$.

Pero ahora podemos probar que existe un espacio $X$ de cardinal $\mathfrak{c}$ que es numerablemente compacto y no sucesionalmente compacto. Partamos de un espacio cualquiera $X$ que cumpla lo segundo, por ejemplo $X = {}^{\mathfrak{c}}2$ (ejemplo A.40) y consideremos en él el conjunto $S$ de los términos de una sucesión sin subsucesiones convergentes.

Sea $f : [X]^\omega \longrightarrow X$ una función que a cada $A \in [X]^\omega$ le escoge un punto de acumulación. Definimos una sucesión $\{S_\alpha\}_{\alpha<\omega_1}$ de subespacios de $X$, partiendo de $S_0 = S$ y

$$S_{\alpha+1} = \bigcup_{\beta<\alpha} S_\beta \cup \{f(A) \mid A \in [\bigcup_{\beta<\alpha} S_\beta]^\omega\}.$$

Llamamos $T = \bigcup_{\alpha<\omega_1} S_\alpha$. Una simple inducción prueba que $|S_\alpha| \leq \mathfrak{c}$, de donde también $|T| \leq \mathfrak{c}$.

Además $T$ es numerablemente compacto por el teorema 4.35, porque para todo conjunto numerable $A \subset T$ existe un $\alpha < \omega_1$ tal que $A \subset S_\alpha$, y entonces $f(A) \in S_{\alpha+1} \subset T$ es un punto de acumulación de $A$ en $T$.

Por último, la sucesión $S \subset T$ sigue sin tener subsucesiones convergentes en $T$, pues también serían subsucesiones convergentes en $X$, luego $T$ no es sucesionalmente compacto. ■

Si queremos cotas sobre el peso, tenemos que considerar el cardinal $\mathfrak{s}$:

**Teorema 8.43** *El cardinal $\mathfrak{s}$ es el mínimo cardinal $\kappa$ que cumple una cualquiera de las propiedades siguientes:*

1. *${}^\kappa 2$ no es sucesionalmente compacto.*
2. *Existe un espacio de Hausdorff compacto $X$ no sucesionalmente compacto que cumple $w(X) = \kappa$.*
3. *Existe un espacio de Hausdorff numerablemente compacto $X$ no sucesionalmente compacto que cumple $w(X) = \kappa$.*

Demostración: Basta probar que $\mathfrak{s}$ es mayor o igual que el menor cardinal que cumple 1) y menor o igual que el menor cardinal que cumple 3). Para probar lo segundo tomamos un espacio numerablemente compacto $X$ con $w(X) < \mathfrak{s}$ y vamos a probar que es sucesionalmente compacto.

Sea $N \in [X]^\omega$, sea $\mathcal{B}$ una base de $X$ con $|\mathcal{B}| < \mathfrak{s}$ y sea

$$\mathcal{B}' = \{B \in \mathcal{B} \mid |B \cap N| = \aleph_0\}.$$

Entonces $\{B \cap N \mid B \in \mathcal{B}'\}$ tiene cardinal $< \mathfrak{s}$, luego existe $A \in [N]^\omega$ tal que, para todo $B \in \mathcal{B}'$, o bien $A \subset^* B \cap N$, o bien $A \subset^* N \setminus B$.

Como $X$ es numerablemente compacto, $A$ tiene un punto de acumulación $p$. Así, si $B \in \mathcal{B}$ cumple $p \in B$, entonces $B \cap A \subset B \cap N$ es infinito, luego $B \in \mathcal{B}'$, luego $A \subset^* B \cap N$, o bien $A \subset^* N \setminus B$, pero el segundo caso no puede darse, ya que $|B \cap A| = \aleph_0$, luego $A \subset^* B \cap N$, es decir, $B$ contiene a todos los puntos de $A$ salvo un número finito.

Así, si $\{x_n\}_{n\in\omega}$ es una sucesión en $X$ y tomamos $N = \{x_n \mid n \in \omega\}$, la subsucesión formada por los puntos de $A$ converge a $p$, luego $X$ es sucesionalmente compacto.

Ahora falta probar que ${}^{\mathfrak{s}}2$ no es sucesionalmente compacto. Equivalentemente, probaremos que $2^S$ no es sucesionalmente compacto, donde $S$ es una familia de escisión en $\omega$ de cardinal $\mathfrak{s}$. Definimos $\sigma : \omega \longrightarrow 2^S$ mediante $\sigma(n)_A = 1 \leftrightarrow n \in A$ y vamos a probar que la imagen de $\{\sigma(n)\}_{n\in\omega}$ es una sucesión en $2^S$ sin subsucesiones convergentes.

En caso contrario, existiría $I \in [\omega]^\omega$ tal que $\{\sigma(n)\}_{n\in I}$ sería convergente. Sea $x \in 2^S$ el límite. La convergencia en $2^S$ equivale a la convergencia en cada coordenada, es decir, a que, para cada $A \in S$, la sucesión $\{\sigma(n)_A\}_{n\in I}$ converge a $x(A)$ en 2, luego $\{n \in I \mid \sigma(n)_A = 1 - x(A)\}$ es finito. Pero esto equivale a que $\{n \in I \mid n \in A\}$ o bien $\{n \in I \mid n \notin A\}$ es finito, es decir, a que $I \cap A$ o $I \setminus A$ sea finito para todo $A \in S$, lo que contradice que $S$ sea una familia de escisión.

■

En particular, los axiomas de la teoría de conjuntos no permiten decidir si el espacio ${}^{\omega_1}2$ es o no sucesionalmente compacto. Más aún, si $2^{\mathfrak{s}} = \mathfrak{c}$, entonces ${}^{\mathfrak{s}}2$ es un espacio compacto de cardinal $\mathfrak{c}$ que no es sucesionalmente compacto, mientras que si $2^{\mathfrak{t}} > \mathfrak{c}$ (por ejemplo, si $\mathfrak{t} = \mathfrak{c}$) entonces todo espacio compacto de cardinal $\mathfrak{c}$ es sucesionalmente compacto.

El cardinal $\mathfrak{t}$ también nos proporciona una condición suficiente para la equivalencia entre la compacidad numerable y la compacidad sucesional:

**Teorema 8.44** *Sea $X$ un espacio topológico tal que $Lh(X) < \mathfrak{t}$. Entonces $X$ es numerablemente compacto si y sólo si es sucesionalmente compacto.*

Demostración: Una implicación se cumple siempre, por el teorema 4.55. Supongamos que $X$ es numerablemente compacto, pero no sucesionalmente compacto. Sea $\{x_n\}_{n\in\omega}$ una sucesión en $X$ que no tenga subsucesiones convergentes. Sea $S = \{x_n \mid n \in \omega\} \subset X$. Entonces $S$ no tiene subconjuntos cerrados infinitos en $X$, pues tales subconjuntos serían numerablemente compactos y sucesionalmente compactos por 8.42, luego $S$ tendría subsucesiones convergentes.

Así pues, si $C \subset S$, existen puntos $x \in \overline{C} \setminus C$, y para cada uno de ellos existe un entorno abierto $U_x$ tal que $C \setminus U_x$ es infinito (pues en caso contrario una enumeración de $C$ convergería a $x$).

Vamos a construir una sucesión $\{x_\alpha\}_{\alpha<\mathfrak{t}}$ en $X$, otra $\{S_\alpha\}_{\alpha<\mathfrak{t}}$ en $[S]^\omega$ y otra $\{U_\alpha\}_{\alpha<\mathfrak{t}}$ de abiertos de $X$ de modo que se cumplan las propiedades siguientes:

1. $x_\alpha \in U_\alpha$,
2. $x_\alpha \in (\overline{S}_\alpha \setminus S_\alpha) \setminus U_\gamma$, para todo $\gamma < \alpha < \mathfrak{t}$,
3. $S_\alpha \subset^* S_\gamma \setminus U_\gamma$, para todo $\gamma < \alpha < \mathfrak{t}$,
4. $S_\alpha \setminus U_\alpha$ es infinito.

Empezamos por $S_0 = S$, tomamos $x_0 \in \overline{S}_0 \setminus S_0$ y un entorno abierto $U_0$ de $x_0$ tal que $S_0 \setminus U_0$ sea infinito. Supongamos definidos $x_\beta$, $S_\beta$ y $U_\beta$ para todo $\beta < \alpha < \mathfrak{t}$ cumpliendo lo requerido.

Si $\alpha = \beta + 1$, tomamos $S_\alpha = S_\beta \setminus U_\beta$, que es infinito por 4) y así claramente se cumple 3). Si $\alpha$ es un ordinal límite, por 3) tenemos que $\{S_\beta\}_{\beta<\alpha}$ es una torre en $[S]^\omega$ y, como $\alpha < \mathfrak{t}$, la podemos prolongar con un $S_\alpha \subset S$, que cumplirá $S_\alpha \subset^* S_\beta \subset^* S_\gamma \setminus U_\gamma$ para todo $\gamma < \beta < \alpha$, luego para todo $\gamma < \alpha$. Así pues, en ambos casos se cumple 3).

Tomamos ahora $x_\alpha \in \overline{S}_\alpha \setminus S_\alpha$ y un entorno abierto $U_\alpha$ tal que $S_\alpha \setminus U_\alpha$ sea infinito. Así se cumplen 1) y 4) y sólo falta comprobar que $x_\alpha \notin U_\gamma$, para $\gamma < \alpha$, y así tendremos 2), pero $x_\alpha \in S'_\alpha \subset (S_\gamma \setminus U_\gamma)' \subset (X \setminus U_\gamma)' \subset X \setminus U_\gamma$.

Finalmente, sea $L = \{x_\alpha \mid \alpha < \mathfrak{t}\} \subset X$. Tenemos que

$$x_\alpha \in U_\alpha \cap L \subset \{x_\beta \mid \beta \leq \alpha\},$$

por lo que $\{U_\alpha \cap L\}_{\alpha<\mathfrak{t}}$ es un cubrimiento abierto de $L$ que no admite subcubrimientos de cardinal $< \mathfrak{t}$, luego $Lh(X) \geq L(L) \geq \mathfrak{t}$. ■

En particular:

**Teorema 8.45** *Todo espacio compacto hereditariamente de Lindelöf es sucesionalmente compacto.*

**Teorema 8.46** *Todo producto de menos de* $\mathfrak{t}$ *espacios sucesionalmente compactos es sucesionalmente compacto, y si el número de factores es* $\leq \mathfrak{t}$*, entonces el producto es al menos numerablemente compacto.*

Demostración: Sea $\kappa \leq \mathfrak{t}$ y sea $X = \prod\limits_{\alpha<\kappa} X_\alpha$ un producto de espacios sucesionalmente compactos. Sea $\{x_n\}_{n\in\omega}$ una sucesión en $X$. Entonces existe $I_0 \subset \omega$ tal que la subsucesión $\{x_{n,0}\}_{n\in I_0}$ converge a $a_0 \in X_0$. En general, supongamos que hemos definido $\{I_\alpha\}_{\alpha<\gamma}$ de modo que si $\alpha < \beta < \gamma$ entonces $I_\beta \subset^* I_\alpha$ y de modo que $\{x_{n,\alpha}\}_{n\in I_\alpha}$ converge a $a_\alpha$ en $X_\alpha$.

Si $\gamma = \beta + 1$, podemos tomar $I_\gamma \subset I_\beta$ infinito tal que $\{x_{n,\gamma}\}_{n\in I_\gamma}$ converge a un $a_\gamma$ en $X_\gamma$. Si $\gamma$ es un ordinal límite, la torre $\{I_\alpha\}_{\alpha<\gamma}$ se puede prolongar con un cierto $I^*$, y podemos tomar $I_\gamma \subset I^*$ tal que $\{x_{n,\gamma}\}_{n\in I_\gamma}$ converge igualmente a un $a_\gamma$ en $X_\gamma$.

Así tenemos definida una sucesión $\{I_\alpha\}_{\alpha<\kappa}$. Si $\kappa < \mathfrak{t}$, todavía podemos prolongarla con un $I^* \subset^* I_\alpha$ para todo $\alpha$, y como $\{x_{n,\alpha}\}_{n\in I_\alpha}$ converge a $a_\alpha$, también $\{x_{n,\alpha}\}_{n\in I^*}$ converge a $a_\alpha$, para todo $\alpha < \kappa$, luego $\{x_n\}_{n\in I^*}$ es una subsucesión convergente de la sucesión dada, lo que prueba que $X$ es sucesionalmente compacto.

Si $\kappa = \mathfrak{t}$, tenemos construido igualmente un punto $a \in X$ de modo que $\{x_{n,\alpha}\}_{n\in I_\alpha}$ converge a $a_\alpha$ en $X_\alpha$, aunque ahora no podemos pasar a un conjunto de índices común. No obstante, vamos a probar que $a$ es un punto adherente de la sucesión dada, lo que probará que $X$ es numerablemente compacto. Consideremos un entorno básico de $a$, digamos $U = \prod\limits_{\alpha<\kappa} U_\alpha$, donde $U_\alpha = X_\alpha$ salvo si $\alpha \in J \subset \kappa$ finito.

Entonces, si $J \subset \beta < \kappa$, tenemos que $\{x_{n,\alpha}\}_{n\in I_\beta}$ converge a $a_\alpha$ en $X_\alpha$ para todo $\alpha < \beta$, luego $U$ contiene infinitos términos de la sucesión $\{x_n\}_{n\in I_\beta}$, luego $a$ es un punto adherente de la sucesión dada. ■

***P*-puntos en $\omega^*$** Recordemos que, si $X$ es un espacio topológico, un punto $p \in X$ es un $P$-punto si toda intersección numerable de entornos de $p$ sigue siendo un entorno de $p$. Es suficiente considerar entornos de una base de entornos prefijada, de modo que en el caso de un espacio $\beta D$, donde $D$ es discreto, podemos considerar entornos básicos de la forma $\overline{A}$, con $A \subset D$. Teniendo en cuenta que un ultrafiltro $p \in \beta D$ cumple $p \in \overline{A}$ si y sólo si $A \in p$, el teorema siguiente es inmediato:

**Teorema 8.47** *Si $D$ es un espacio topológico discreto, un ultrafiltro $p \in \beta D$ es un $P$-punto si y sólo si es $\aleph_1$-completo.*

Los ultrafiltros libres $\aleph_1$-completos en un conjunto $D$ son lo que en [TC 7.70] hemos llamado medidas de Ulam en $D$, por lo que los únicos $P$-puntos de $\beta D$ son los puntos (aislados) de $D$ (los ultrafiltros fijos) salvo que $|D|$ sea un cardinal medible Ulam, en cuyo caso existen también $P$-puntos de $\beta D$ en $D^* = \beta D \setminus D$, que en particular serán $P$-puntos de $D^*$. En particular, los únicos $P$-puntos de $\beta\omega$ son los puntos de $\omega$.

Pero la situación es muy diferente si consideramos $P$-puntos de $\omega^* = \beta\omega \setminus \omega$. Su caracterización conjuntista es muy simple:

**Teorema 8.48** *Un ultrafiltro $p$ en $\omega$ es un $P$-punto de $\omega^*$ si y sólo si es libre y, cuando $S \subset p$ es numerable, existe una pseudointersección de $S$ que pertenece a $p$.*

Demostración: Se cumple que $p \in \omega^*$ si y sólo si $p$ es libre, y un entorno básico de $p$ en $\omega^*$ es entonces de la forma $A^*$, con $p \in A^*$, que es equivalente a $A \in p$. Por lo tanto, una familia numerable de entornos básicos de $p$ es de la forma $\{A^* \mid A \in S\}$, donde $S \subset p$ es numerable, y la condición de $P$-punto equivale a que, para toda $S$ en estas condiciones, $\bigcap\limits_{A\in S} A^*$ sea un entorno de $p$, es decir, que exista $B \in p$ tal que $B^* \subset \bigcap\limits_{A\in S} A^*$.

A su vez, esto equivale a que $B^* \subset A^*$, para todo $A \in S$, que a su vez es equivalente a $B \subset^* A$, para todo $A \in S$, es decir, a que $B$ sea una pseudointersección de $S$. ■

Un espacio de Hausdorff compacto como $\omega^*$ no puede ser un $P$-espacio, luego sin duda contiene puntos que no son $P$-puntos. Sin embargo, la posible existencia de $P$-puntos en $\omega^*$ no es decidible a partir de los axiomas de la teoría de conjuntos.

La situación es sutil, porque en el ejemplo A.36 punto 7 probamos que todo $G_\delta$ no vacío en $\beta\omega$ tiene interior no vacío, de donde se sigue que lo mismo vale en $\omega^*$ (porque el interior del $G_\delta$ no puede estar contenido en $\omega$, o podríamos construir otro $G_\delta$ de interior vacío). Por lo tanto, toda intersección numerable de entornos de un punto $p \in \omega^*$ tiene interior no vacío, sin embargo, para que $p$ fuera un $P$-punto tendría que ocurrir que $p$ estuviera siempre en dicho interior, cosa que no podemos probar.

Vamos a ver que $\mathfrak{t} = \mathfrak{c}$ (y en particular el axioma de Martin o la Hipótesis del Continuo) implica que hay $P$-puntos en $\omega^*$:

**Teorema 8.49** *Si $\mathfrak{t} = \mathfrak{c}$, existen $P$-puntos en $\omega^*$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $\{A_\alpha\}_{\alpha<\mathfrak{c}}$ una enumeración de $\mathcal{P}\omega$. Definimos como sigue una sucesión $\{X_\alpha\}_{\alpha<\mathfrak{c}}$ casi decreciente de subconjuntos infinitos de $\omega$: Tomamos $X_0 = \omega$. Supuesto definido $X_\alpha$ (infinito), definimos

$$X_{\alpha+1} = \begin{cases} X_\alpha \cap A_\alpha & \text{si } X_\alpha \cap A_\alpha \text{ es infinito,} \\ X_\alpha \setminus A_\alpha & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Claramente $X_{\alpha+1}$ es infinito y $X_{\alpha+1} \subset X_\alpha$. Supuesto definido $\{X_\delta\}_{\delta<\lambda}$ casi decreciente, con $\lambda < \mathfrak{c}$, la hipótesis $\mathfrak{t} = \mathfrak{c}$ implica que no es una torre, luego podemos prolongarla con un $X_\lambda$ infinito casi contenido en todos los conjuntos precedentes. Consideremos ahora

$$U = \{X \subset \omega \mid \bigvee \alpha < \mathfrak{c}\ X_\alpha \setminus X \text{ es finito}\}.$$

Vamos a probar que $U$ es un $P$-punto en $\omega^*$. Claramente es un filtro no principal, y es un ultrafiltro, pues todo $A \subset \omega$ es de la forma $A_\alpha$, para cierto $\alpha < \mathfrak{c}$, y entonces, o bien $X_\alpha \subset A_\alpha$, o bien $X_\alpha \subset \omega \setminus A_\alpha$, luego $A \in U$ o bien $\omega \setminus A \in U$.

Para probar que es un $P$-punto tomamos una familia $\{B_n\}_{n\in\omega}$ de elementos de $U$, de modo que para cada $n$ existe un $\alpha_n < \mathfrak{c}$ tal que $X_{\alpha_n} \subset^* B_n$. Sea $\alpha = \sup_n \alpha_n < \mathfrak{c}$ (donde usamos que $\operatorname{cf} \mathfrak{c} > \aleph_0$). Entonces $X_\alpha \in U$ está casi contenido en todos los $X_{\alpha_n}$ y, por lo tanto, en todos los $B_n$. ■

En realidad el teorema anterior puede probarse con una hipótesis ligeramente más débil, a saber, $\mathfrak{d} = \mathfrak{c}$. Nos basaremos en el teorema siguiente:

**Teorema 8.50** *Si $F$ es un filtro libre en $\omega$ generado por menos de $\mathfrak{d}$ conjuntos y $S \subset F$ es numerable, existe una pseudointersección de $S$ que tiene intersección no vacía con todos los elementos de $F$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $\{Y_i\}_{i\in I}$ un generador de $F$, con $|I| < \mathfrak{d}$. Esto significa que $A \in F$ si y sólo si existe un $i \in I$ tal que $Y_i \subset A$. Podemos suponer que $S = \{X_n\}_{n\in\omega}$ es una familia decreciente de subconjuntos de $\omega$ (en caso contrario cambiamos cada $X_n$ por su intersección con los sus predecesores). Para cada $i \in I$ definimos $f_i : \omega \longrightarrow \omega$ mediante $f_i(n) = \min(X_n \cap Y_i)$. Como $|I| < \delta$, existe una función $f : \omega \longrightarrow \omega$ no dominada por ninguna de las funciones $f_i$, es decir, tal que para todo $i \in I$ existen infinitos valores de $n$ para los que $f_i(n) < f(n)$.

Definimos $X = \bigcup_{n\in\omega} (X_n \cap f(n))$ y vamos a probar que cumple lo requerido.

Para cada $k \geq n$, tenemos que $X_k \cap f(k) \subset X_n$, luego

$$X \setminus \Big(\bigcup_{k<n} (X_k \cap f(k))\Big) \subset \bigcup_{k\geq n} (X_k \cap f(k)) \subset X_n,$$

y el conjunto que resta en el primer término es finito, luego $X \subset^* X_n$, para todo $n$, es decir, que $X$ es una pseudointersección de $S$. Ahora basta probar que $X \cap Y_i \neq \varnothing$, para todo $i \in I$. Ahora bien, tomamos $n \in \omega$ tal que

$$f(n) > f_i(n) = \text{mín}(X_n \cap Y_i),$$

luego $\text{mín}(X_n \cap Y_i) \in f(n) \cap X_n \cap Y_i \subset X \cap Y_i$. ■

Ahora ya podemos probar:

**Teorema 8.51** *Si $\mathfrak{d} = \mathfrak{c}$, entonces existen $P$-puntos en $\omega^*$.*

Demostración: Sea $\{S_\alpha\}_{\alpha<\mathfrak{c}}$ una enumeración de todas las sucesiones numerables decrecientes $S_\alpha = \{X_n^\alpha\}_{n\in\omega}$ de subconjuntos infinitos de $\omega$ (con posibles repeticiones dentro de cada sucesión). Vamos a construir una sucesión creciente de filtros $\{F_\alpha\}_{\alpha\leq\mathfrak{c}}$ con generadores de cardinal menor que $\mathfrak{c}$. Partimos del filtro $F_0$ de todos los subconjuntos cofinitos de $\omega$, que es numerable. Supuesto definido $F_\alpha$, consideramos la familia $S_\alpha$ y distinguimos dos casos:

Si algún $X_n^\alpha$ es disjunto de algún elemento de $F_\alpha$, definimos $F_{\alpha+1} = F_\alpha$.

En caso contrario, consideramos el filtro $\tilde{F}_\alpha$ generado por $F_\alpha$ y $S_\alpha$, es decir generado por los conjuntos $Y \cap X_n^\alpha$, con $Y \in F_\alpha$. Si $F_\alpha$ tiene un generador de cardinal menor que $\mathfrak{c}$, lo mismo le sucede a $\tilde{F}_\alpha$.

Por el teorema anterior, existe una pseudointersección $X$ de $S_\alpha$ que tiene intersección no vacía con todos los elementos de $\tilde{F}_\alpha$, luego podemos considerar el filtro $F_{\alpha+1}$ generado por $\tilde{F}_\alpha$ y por $X$, que también está generado por menos de $\mathfrak{c}$ conjuntos.

Supuestos definidos $\{F_\delta\}_{\delta<\lambda}$, definimos $F_\lambda = \bigcup_{\delta<\lambda} F_\delta$. Llamamos $F = F_\mathfrak{c}$.

Sea $S \subset F$ numerable y veamos que $F$ contiene una pseudointersección de $S$. No perdemos generalidad si suponemos que los elementos de $S$ forman una sucesión decreciente, y entonces existe un $\alpha < \mathfrak{c}$ tal que $S_\alpha$ es una enumeración de $S$. Como los elementos de $S_\alpha$ están en $F$, no pueden tener intersección vacía con ningún elemento de $F$ ni, en particular, de $F_\alpha$, luego en la construcción hemos incorporado $S_\alpha$ a $F_{\alpha+1}$, a la vez que una pseudointersección $X$ de $S_\alpha$, que de modo que $X \in F_{\alpha+1} \subset F$.

Sólo falta probar que $F$ es un ultrafiltro, pero si $X \subset \omega$, existe un $\alpha < \mathfrak{c}$ tal que $S_\alpha$ es la sucesión constante igual a $X$. Si existe un $Y \in F_\alpha \subset F$, entonces $Y \subset \omega \setminus X$, luego $\omega \setminus X \in F$. En caso contrario, $X \in F_{\alpha+1} \subset F$. ■

**Nota** En la prueba del teorema anterior, en lugar de tomar como $F_0$ el filtro de los conjuntos cofinitos, podemos partir del filtro generado por $F_0$ y cualquier conjunto infinito prefijado $A \subset \omega$, y el resultado es que construimos un $P$-punto tal que $A \in F$ o, lo que es lo mismo, $F \in A^*$. Por lo tanto, lo que obtenemos realmente es que en $\omega^*$ hay un conjunto denso de $P$-puntos, por lo que el conjunto de todos ellos forma un $P$-espacio sin puntos aislados.

## Segunda parte

# Espacios con estructuras adicionales

# Capítulo IX

# Espacios métricos

En este capítulo reuniremos las propiedades básicas de los espacios métricos, incluyendo como caso particular los espacios normados. El estudio de los espacios normados continuará luego en el capítulo 10 en el contexto más general de los espacios vectoriales topológicos.

## 9.1 Espacios métricos

Los espacios métricos son el eslabón que conecta la topología abstracta con sus raíces geométricas y constituyen una de las clases más importantes de espacios topológicos.

**Definición 9.1** Una *pseudométrica* en un conjunto $M$ es una aplicación

$$d : M \times M \longrightarrow [0, +\infty[$$

que cumpla las propiedades siguientes, para todos los puntos $x, y, z \in M$:

1. $d(x, x) = 0$,
2. $d(x, y) = d(y, x)$,
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

   Diremos que $d$ es una *métrica* o una *distancia* en $M$ si además cumple:

4. $d(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$,

Un *espacio pseudométrico* (resp. *métrico*) es un par $(M, d)$, donde $M$ es un conjunto y $d$ es una pseudométrica (resp. métrica) en $M$. En la práctica escribiremos $M$ en lugar de $(M, d)$.

Es claro que el concepto de "distancia" es una abstracción natural que conserva las propiedades esenciales de la idea intuitiva de "distancia". La propiedad 3) recibe el nombre de "desigualdad triangular", y su interpretación geométrica es clara.

**Ejemplos** Si $M$ es un conjunto arbitrario, la *métrica discreta* en $M$ es

$$d(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = y, \\ 0 & \text{si } x \neq y. \end{cases}$$

Es inmediato comprobar que se trata realmente de una distancia en $M$.

La *métrica usual* en $\mathbb{R}$ es la dada por $d(x,y) = |x-y|$. También se comprueba sin dificultad que es una distancia.

El interés del concepto de "pseudométrica" no se pondrá de manifiesto hasta algo más adelante, pero lo introducimos aquí para enunciar en general los resultados sobre métricas que valgan igualmente para pseudométricas. Veamos, no obstante, un ejemplo de pseudométrica que no es una métrica:

Definimos en $\mathbb{R}^2$ la aplicación $d : \mathbb{R}^2 \longrightarrow [0, +\infty[$ dada por

$$d((x,y),(x',y')) = |x - x'|.$$

Es fácil comprobar que se trata de una pseudométrica, pero no es una métrica, pues, por ejemplo, $x = (1,0)$, $y = (1,7)$ cumplen $d(x,y) = 0$, pero $x \neq y$. ■

La desigualdad triangular de las pseudométricas implica una desigualdad de interés que conviene destacar:

**Teorema 9.2** *Si $M$ es un espacio pseudométrico y $x, x', y, y' \in M$, se cumple:*

$$|d(x,y) - d(x',y')| \leq d(x,x') + d(y,y').$$

Demostración: Por la desigualdad triangular: $d(x,y) \leq d(x,x') + d(x',y)$, luego $d(x,y) - d(x',y) \leq d(x,x')$. Igualmente $d(x',y) - d(x,y) \leq d(x,x')$, luego

$$|d(x,y) - d(x',y)| \leq d(x,x'),$$

e igualmente se concluye que $|d(x',y) - d(x',y')| \leq d(y,y')$. Por lo tanto:

$$|d(x,y) - d(x',y')| = |d(x,y) - d(x',y) + d(x',y) - d(x',y')|$$

$$\leq |d(x,y) - d(x',y)| + |d(x',y) - d(x',y')| \leq d(x,x') + d(y,y'). \quad ■$$

Si $M$ es un espacio pseudométrico, $x \in M$ y $\epsilon > 0$ es un número real, definimos la *bola abierta* de centro $x$ y radio $\epsilon$ en $M$ como el conjunto

$$B_\epsilon(x) = \{y \in M \mid d(x,y) < \epsilon\}.$$

Intuitivamente, es claro que cualquier bola abierta de centro $x$ contiene todos los puntos "de alrededor" de $x$, y los axiomas que hemos postulado para las distancias son suficientes para asegurar que esta idea conduce ciertamente a la definición de un espacio topológico:

**Teorema 9.3** *Si $M$ es un espacio pseudométrico, el conjunto $\mathcal{T}$ de todas las bolas abiertas en $M$ es la base de una topología en $M$.*

Demostración: Aplicamos el teorema 1.5. Puesto que $x \in B_1(x)$, es obvio que $\bigcup \mathcal{B} = X$. Si $x \in B_{\epsilon_1}(u) \cap B_{\epsilon_2}(v)$, tomamos

$$\epsilon = \min\{\epsilon_1 - d(x, u), \epsilon_2 - d(x, v)\} > 0$$

y observamos que

$$x \in B_\epsilon(x) \subset B_{\epsilon_1}(u) \cap B_{\epsilon_2}(v),$$

pues si $z \in B_\epsilon(x)$ entonces $d(z, u) \leq d(z, x) + d(x, u) < \epsilon + d(x, u) < \epsilon_1$, e igualmente $d(z, v) < \epsilon_2$. ■

**Definición 9.4** La topología dada por el teorema anterior recibe el nombre de *topología inducida por la pseudométrica.* En lo sucesivo consideraremos siempre a los espacios pseudométricos como espacios topológicos con la topología inducida por la métrica, que es la menor topología en $M$ para la cual las bolas abiertas son abiertas en el sentido topológico.

La topología inducida por la métrica usual en $\mathbb{R}$ se llama *topología usual* en $\mathbb{R}$. Si $M$ es un espacio métrico con la métrica discreta, es claro que $B_1(x) = \{x\}$, luego todos los puntos son aislados y la topología inducida no es sino la topología discreta.

**Teorema 9.5** *Si $x$ es un punto de un espacio pseudométrico $M$, una base de entornos abiertos de $x$ en $M$ está formada por las bolas abiertas de centro $x$.*

Demostración: Si $A$ es un entorno de $x$, existe un abierto $U$ tal que $x \in U \subset A$ y, como las bolas abiertas son una base, esto implica que existe un $\epsilon_1 > 0$ y un punto $u \in M$ de modo que $x \in B_{\epsilon_1}(u)$, pero en la prueba del teorema anterior hemos visto que esto implica que existe un $\epsilon > 0$ tal que $x \in B_\epsilon(x) \subset B_\epsilon(u) \subset U \subset A$. ■

Observemos que del teorema anterior se sigue inmediatamente que en un espacio pseudométrico $M$, fijado un $\epsilon_0 > 0$, las bolas $B_\epsilon(x)$ de radio $\epsilon < \epsilon_0$ forman claramente una base de entornos abiertos del punto $x$, luego todas las bolas de radio menor que $\epsilon_0$ forman también una base de de $M$.

En principio, dado un espacio topológico, puede ser dudoso si existe una (pseudo)métrica que induce la topología dada. Por otra parte, pseudométricas distintas pueden inducir la misma topología. Esto nos lleva a las definiciones siguientes:

**Definición 9.6** Un espacio topológico $M$ es *(pseudo)metrizable* si existe una (pseudo)métrica $d$ en $M$ que induce su topología. Dos pseudométricas en un mismo conjunto se dicen *equivalentes* si inducen la misma topología.

Así, por ejemplo, todo espacio topológico discreto es metrizable (pues la topología discreta está inducida por la métrica discreta) y la topología usual en $\mathbb{R}$ también es metrizable (por definición).

Veamos un ejemplo de pseudométricas equivalentes:

**Teorema 9.7** *Toda (pseudo)métrica en un conjunto $M$ es equivalente a una (pseudo)métrica acotada $d : M \times M \longrightarrow [0, 1]$.*

Demostración: Basta observar que si $d'$ es una (pseudo)métrica en $M$ entonces

$$d(x, y) = \text{mín}\{d'(x, y), 1\}$$

también es una (pseudo)métrica en $M$ y, como las bolas de radio $< 1$ para las distancias $d'$ y $d$ son las mismas, las topologías inducidas tienen una misma base, luego son la misma. ■

En particular, la métrica usual en $\mathbb{R}$ no está acotada (hay puntos a distancias arbitrariamente grandes), pero acabamos de probar que existe otra métrica acotada (que no es, por consiguiente, la usual) que induce en $\mathbb{R}$ la misma topología que la métrica usual.

Tenemos, pues, que distinguir entre las *propiedades topológicas* de un espacio (pseudo)métrico (las que dependen únicamente de la topología inducida por la (pseudo)métrica, pero no de la métrica en concreto que la induce) de las *propiedades métricas* (las que sí que dependen de la (pseudo)métrica).

Por ejemplo, diremos que un subconjunto $A \subset M$ de un espacio pseudométrico está *acotado* si existe un número real $C > 0$ tal que si $x$, $y \in A$, entonces $d(x, y) < C$.

**Ejercicio:** Probar que si $M$ es un espacio pseudométrico y $x \in M$, entonces un subconjunto $A \subset M$ está acotado si y sólo si está contenido en una bola abierta, si y sólo si está contenido en una bola abierta de centro $x$.

El teorema anterior prueba que la acotación de un subconjunto es una propiedad métrica y no meramente topológica, en el sentido de que si tenemos dos (pseudo)métricas equivalentes en un mismo conjunto, ambas inducen la misma topología, pero un conjunto puede estar acotado para una y no estarlo para la otra. Dicho con otras palabras, conociendo la topología inducida por una (pseudo)métrica, no podemos saber si un conjunto dado está acotado o no para dicha (pseudo)métrica.

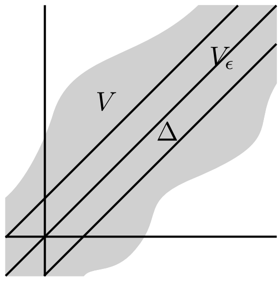
Una de las razones por las que tiene interés identificar los conceptos puramente topológicos y distinguirlos de los conceptos métricos es que los conceptos topológicos son aplicables en todos los espacios topológicos, incluyendo muchos espacios de interés que resultan no ser metrizables, por lo que si el lector toma una conciencia clara de qué conceptos y resultados son puramente topológicos, podrá aplicarlos con seguridad al tratar con dichos espacios, sabiendo que la ausencia de una métrica es irrelevante.

Por otra parte, hay muchos conceptos definibles en espacios métricos que no son topológicos y, aun así, pueden ser definidos en términos de una estructura más general que la de espacio métrico, a mitad de camino entre los espacios métricos y los espacios topológicos, y que conviene conocer por el mismo motivo. Se trata de la estructura de "espacio uniforme", que introducimos en el capítulo 2.

43

**La uniformidad inducida por una métrica** Si $M$ es un espacio (pseudo)métrico, las bandas

$$V_\epsilon = \{(x, y) \in M \times M \mid d(x, y) < \epsilon\}$$




son la base de una uniformidad (de Hausdorff en el caso de un espacio métrico) en $M$ que induce la misma topología que la pseudométrica $d$. De hecho, se cumple que $B_{V_\epsilon}(x) = B_\epsilon(x)$.

La figura muestra una banda $V$ que contiene a una banda básica $V_\epsilon$. ■

En lo sucesivo consideraremos siempre a los espacios métricos como espacios uniformes con la uniformidad que acabamos de definir. Así, al tratar con espacios métricos conviene tener presente en todo momento cuáles de los conceptos y resultados manejados son puramente "topológicos" (es decir, que tienen sentido en espacios topológicos arbitrarios, aunque no sean metrizables), cuales son "uniformes" (tienen sentido en espacios uniformes arbitrarios, aunque la uniformidad no derive de una métrica) y cuales son propiamente "métricos".

Un espacio uniforme es *(pseudo)metrizable* si su uniformidad está inducida por una (pseudo)métrica.

**Observaciones** En este punto el lector debe reflexionar sobre algunas sutilezas: distintas uniformidades pueden inducir la misma topología en un conjunto. Incluso puede suceder que una de ellas sea metrizable y la otra no. Esto lo ilustra el ejemplo A.18, donde se muestra una uniformidad no metrizable[1] que induce la topología discreta (metrizable).

Por otro lado, métricas distintas pueden inducir la misma uniformidad. Por ejemplo el teorema 9.7 muestra que si en un espacio métrico sustituimos su distancia $d'$ por $d(x, y) = \min\{d'(x, y), 1\}$ la topología inducida no se ve alterada. Ahora podemos precisar que la uniformidad inducida tampoco, pues las bandas $V_\epsilon$ con $\epsilon < 1$ son las mismas para ambas métricas y constituyen una base de ambas uniformidades. Así pues, cuando una uniformidad está inducida por una métrica, no perdemos generalidad si suponemos que ésta está acotada.

En otro orden de cosas, conviene recordar que las bandas básicas $V_\epsilon$ no son las únicas bandas de la uniformidad inducida por una métrica, sino que cualquier otra banda que contenga a una de ellas pertenece también a la uniformidad. Por ejemplo, podemos considerar

$$V = \{(x, y) \in M \times M \mid d(x, y) \leq \epsilon\},$$

y entonces sucede que $B_V(x) = \{y \in M \mid d(x, y) \leq \epsilon\}$, que en general no es un conjunto abierto en $M$ (por ejemplo, no lo es si $M = \mathbb{R}$ con la métrica usual).

[1]La prueba de que la uniformidad no es metrizable se basa en el teorema 2.27, pero en realidad sólo requiere su implicación trivial: una uniformidad metrizable tiene una base numerable, a saber, la formada por las bandas $V_{1/n}$, para $n = 1, 2, \ldots$, mientras que la uniformidad del ejemplo no admite bases numerables.

Así pues, conviene recordar que las bolas definidas por bandas en un espacio uniforme no son necesariamente abiertas. En cualquier caso, una bola $B_V(x)$ siempre es, por definición, un entorno de $x$. ■ 6

---

**Productos finitos de espacios métricos** Vamos a probar que todo producto finito de espacios uniformes metrizables es metrizable. De hecho hay muchas distancias distintas que inducen la uniformidad producto El teorema siguiente presenta dos de ellas:

**Teorema 9.8** *Si $M_1, \ldots, M_n$ son un número finito de espacios (pseudo)métricos y $M = M_1 \times \cdots \times M_n$, entonces*

$$d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{n} d_i(x_i, y_i), \qquad d_\infty(x,y) = \max\{d(x_i,y_i) \mid i = 1, \ldots, n\}$$

*son dos (pseudo)métricas en $M$ que inducen el producto de las uniformidades de los factores, y en particular la topología producto.*

Demostración: Es fácil comprobar que son realmente (pseudo)métricas. Si en las bandas básicas descritas en el teorema 2.8 restringimos las bandas $V_i$ a bandas de una base del factor correspondiente obtenemos una base de la misma uniformidad, que en nuestro caso está formada por las bandas

$$\{(x,y) \in M \times M \mid d_i(x_i, y_i) < \epsilon_i, \ i = 1, \ldots, n\},$$

donde $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$ son números reales positivos. Más aún, si llamamos $\epsilon$ al mínimo de todos ellos, vemos que toda banda básica contiene una de la forma

$$V_\epsilon = \{(x,y) \in M \times M \mid d_i(x_i, y_i) < \epsilon, \ i = 1, \ldots, n\}.$$

Por lo tanto, estas bandas son también una base de la uniformidad producto, y claramente son también una base para la uniformidad inducida por la distancia $d_\infty$.

Las desigualdades siguientes son inmediatas:

$$d_\infty(x,y) \leq d_1(x,y) \leq n\, d_\infty(x,y),$$

y a su vez nos dan las inclusiones $V^\infty_{\epsilon/n} \subset V^1_\epsilon \subset V^\infty_\epsilon$, de donde concluimos que las bandas básicas de ambas distancias son base de la misma uniformidad. ■

La distancia $d_1$ se conoce a veces como *"distancia de Manhattan"*, porque en $\mathbb{R}^2$ es la distancia que hay que recorrer para ir de $x$ a $y$ si sólo podemos hacer movimientos horizontales y verticales (como si camináramos por las calles de una ciudad "cuadriculada"). La segunda es la menos intuitiva,[2] pero la más sencilla

[2]La métrica más natural en un producto (especialmente en $\mathbb{R}^n$) es la métrica euclídea

$$d_2(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2},$$

pero es más complicada de manejar y, topológicamente, es equivalente a las dos anteriores. Esto será inmediato en cuanto hayamos introducido la norma euclídea en $\mathbb{R}^n$ (véase la página 314). Por ello rara vez necesitaremos considerar esta distancia.

de manejar. Por ejemplo, es con ella con la que hemos probado directamente que la uniformidad inducida es la uniformidad producto.

Más adelante veremos que en un producto numerable de espacios (pseudo) métricos también es posible definir una distancia que induzca la topología producto, pero esto ya no es cierto para productos no numerables. En cambio, en el apartado sobre productos de espacios uniformes de la sección 2.1 hemos probado que esta limitación desaparece cuando consideramos espacios uniformes en lugar de espacios métricos. 10.

---

**La topología relativa** Si $M$ es un espacio métrico y $N \subset M$, entonces la distancia $d$ de $M$ se restringe a una distancia $d|_{N\times N} : N \times N \longrightarrow \mathbb{R}$ que convierte a $N$ en un espacio métrico.

Si llamamos $\mathcal{U}_M^d$ a la uniformidad inducida por $d$ en $M$, es claro que la uniformidad $\mathcal{U}_N^d$ que induce en $N$ la restricción de la métrica coincide con la uniformidad $\mathcal{U}_N$ que $\mathcal{U}_M^d$ induce en $N$.

En efecto, basta observar que las bandas básicas para la métrica restringida a $N$ son las intersecciones con $N \times N$ de las correspondientes en $M$, luego la uniformidad inducida por la métrica restringida tiene la misma base que $\mathcal{U}_N$.

En particular la topología que $d$ induce en $N$ es la topología relativa a la topología que $d$ induce en $M$.

Por lo tanto, en lo sucesivo consideraremos a todo subconjunto de un espacio métrico como espacio métrico con la restricción de la métrica, lo cual es a su vez consistente con considerarlo como subespacio uniforme con la uniformidad relativa o como subespacio topológico con la topología relativa. 447

---

**Distancia de un punto a un conjunto** En un espacio pseudométrico, los puntos de la clausura de un conjunto tienen una caracterización muy intuitiva, pues resultan ser los puntos que se encuentran a "distancia 0" del conjunto, en el sentido de la definición siguiente:

**Definición 9.9** Sea $M$ un espacio pseudométrico, sea $\varnothing \neq A \subset M$ y sea $x \in M$, definimos la *distancia* de $x$ a $A$ como

$$d(x, A) = \text{ínf}\{d(x, y) \mid y \in A\}.$$

**Teorema 9.10** *Sea $X$ un espacio pseudométrico y $A \subset M$ un conjunto no vacío. Entonces $\overline{A} = \{x \in M \mid d(x, A) = 0\}$.*

Demostración: Si $d(x, A) = 0$, para probar que es adherente basta ver que toda bola abierta de centro $x$ corta a $A$. Dado $\epsilon > 0$ tenemos que $d(x, A) < \epsilon$, lo que significa que existe un $y \in A$ tal que $d(x, y) < \epsilon$, es decir, $y \in B_\epsilon(x) \cap A$. El recíproco se prueba igualmente. ■ 16

---

**Continuidad uniforme** Si $f : M \longrightarrow N$ es una aplicación entre espacios métricos y $x \in M$, la continuidad de $f$ en $x$ equivale a que la antiimagen $f^{-1}[B_\epsilon(f(x))]$ sea un entorno de $x$, es decir, a que contenga una bola $B_\delta(x)$. Más explícitamente:

**Teorema 9.11** *Una aplicación $f : M \longrightarrow N$ entre dos espacios pseudométricos es continua en un punto $x \in M$ si y sólo si para todo $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $x' \in M$ cumple $d(x, x') < \delta$, entonces $d(f(x), f(x')) < \epsilon$.*

En otras palabras, si queremos asegurar que $f(x')$ diste de $f(x)$ menos que $\epsilon$, sólo tenemos que tomar $x'$ a una distancia de $x$ menor que un $\delta$ adecuado.

**Ejemplo** Consideremos la función $f : [0, +\infty[ \longrightarrow [0, +\infty[$ dada por $f(x) = x^2$. Vamos a probar que es continua en un punto arbitrario $x$ de su dominio. Para ello, dado $\epsilon > 0$, tenemos que encontrar $\delta > 0$ tal que si $|x - y| < \delta$, entonces $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ o, más explícitamente

$$|x^2 - y^2| = (x + y)|x - y| < \epsilon.$$

Basta tomar $\delta = \text{mín}\{1, \epsilon/(2x + 1)\}$, pues entonces, si $|x - y| < \delta \leq 1$, en particular $y < x + 1$, luego

$$|x^2 - y^2| = (x + y)|x - y| < (2x + 1)\delta < \epsilon.$$

Esto prueba la continuidad, pero observemos que el $\delta$ que marca lo próximo a $x$ que debe estar un punto $y$ para que $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ depende del punto $x$. Cuando mayor es $x$, menor es el $\delta$ que hemos encontrado para asegurar que se cumple la definición de continuidad. Si intentamos encontrar un mismo $\delta > 0$ que satisfaga la definición de continuidad para todos los puntos $x$, enseguida vemos que es imposible, pues, dado $\delta > 0$, siempre podemos considerar

$$x > \frac{\epsilon}{\delta} - \frac{\delta}{4},$$

y entonces

$$|f(x + \delta/2) - f(x)| = \left(2x + \frac{\delta}{2}\right)\frac{\delta}{2} > \epsilon,$$

pues la última desigualdad equivale a la que hemos usado para elegir $x$. Así pues, cualquiera que sea el $\delta > 0$ elegido, siempre hay puntos $x$, $y$ que distan $\delta/2$ tales que $f(x)$ y $f(y)$ distan más de $\epsilon$. Esto prueba que $f$ no es uniformemente continua en el sentido que definimos a continuación. ■

**Definición 9.12** Una función $f : M \longrightarrow N$ entre dos espacios métricos es *uniformemente continua* si para todo $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que, cuando $x$, $y \in M$ cumplen $|x - y| < \delta$, entonces $|f(x) - f(y)| < \epsilon$.

La diferencia con el enunciado del teorema 9.11 es que para que $f$ sea continua en $M$, fijados $\epsilon > 0$ y $x \in M$, tenemos que encontrar un $\delta > 0$ que cumpla la definición para todo punto $y \in M$, mientras que en la definición de continuidad uniforme sólo fijamos un $\epsilon > 0$ y tenemos que encontrar un $\delta > 0$ que cumpla la definición para cualquier par de puntos $x$, $y \in M$.

El ejemplo anterior muestra que una función puede ser continua sin ser uniformemente continua. Es posible que, para garantizar que $f(y)$ se parezca suficientemente a $f(x)$, sea necesario fijar un grado de aproximación $\delta > 0$ para $y$ que dependa necesariamente del punto $x$ considerado.

La noción de continuidad uniforme aparece implícita en los trabajos de Bolzano, quien probó que una función continua en el intervalo $]0, 1[$ no es necesariamente uniformemente continua, y afirmó, sin dar una prueba completa, que toda función continua en $[0, 1]$ es uniformemente continua. El concepto fue definido por Heine en 1870 y en 1872 publicó una prueba de los resultados de Bolzano que copiaba casi literalmente unas lecciones de Dirichlet de 1854 sobre integrales definidas.

Una condición suficiente para que una función entre espacios métricos sea uniformemente continua es que cumpla la propiedad de Lipschitz:

**Definición 9.13** Una función $f : M \longrightarrow N$ entre espacios pseudométricos tiene la *propiedad de Liptschitz* si existe una constante $C > 0$ tal que, para todo par de puntos de $M$ se cumple que $d(f(x), f(y)) < C\, d(x, y)$.

En efecto, esto garantiza que si $d(x, y) < \epsilon/C$ entonces $d(f(x), f(y)) < \epsilon$.

Veamos algunos ejemplos de funciones con la propiedad de Lipschitz:

Una *inmersión isométrica* $f : M \longrightarrow N$ entre dos espacios métricos es una aplicación tal que $d(f(x), f(x')) = d(x, x')$, para todo $x$, $x' \in M$. Una *isometría* es una inmersión isométrica biyectiva.

En otras palabras, las inmersiones isométricas son las aplicaciones que conservan las distancias, por lo que los conceptos y resultados métricos son los que se conservan por isometrías. Notemos que, como $x = x'$ si y sólo si $d(x, x') = 0$, las inmersiones isométricas entre espacios métricos son necesariamente inyectivas. Dos espacios métricos son *isométricos* si existe una isometría entre ambos.

Es inmediato que toda inmersión isométrica entre espacios pseudométricos tiene la propiedad de Lipschitz, luego es uniformemente continua. De hecho, como la inversa de una inmersión isométrica es trivialmente una isometría (definida únicamente sobre su imagen), tenemos que toda inmersión isométrica es un homeomorfismo en su imagen.

**Teorema 9.14** *En un espacio pseudométrico, la distancia $d : M \times M \longrightarrow \mathbb{R}$ es uniformemente continua y, para todo subconjunto $A \subset M$, también lo es la función $d(\ \ , A) : M \longrightarrow R$.*

Demostración: La continuidad de la distancia se sigue de la relación dada por el teorema 9.2, que podemos expresar en la forma:

$$|d(x, y) - d(x', y')| \leq d_1((x, y), (x', y')),$$

por lo que $d$ tiene la propieda de Lipschitz con constante $C = 1$.

Lo mismo sucede con $d(\ \ , A)$, que satisface la relación:

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y).$$

Para probarla observamos que si $z \in A$, se cumple $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$. De aquí se sigue claramente $d(x, A) \leq d(x, y) + d(y, z)$, y tomando el ínfimo en $z$ vemos que $d(x, A) \leq d(x, y) + d(y, A)$. Análogamente, $d(y, A) \leq d(x, y) + d(x, A)$, de donde se sigue la relación con valores absolutos. ■

Por ejemplo, ahora es inmediato que las *bolas cerradas*

$$\tilde{B}_\epsilon(x) = \{y \in M \mid d(x, y) \leq \epsilon\}$$

y las *esferas*

$$S_\epsilon(x) = \{y \in M \mid d(x, y) = \epsilon\}$$

son cerradas, pues son las antiimágenes por la aplicación continua $d(-, \{x\})$ de los cerrados $[0, \epsilon]$ y $\{\epsilon\}$, respectivamente.

Ahora bien, aunque en $\mathbb{R}^n$ se prueba sin dificultad que una bola cerrada es la clausura de la bola abierta del mismo radio y la esfera es su frontera, esto no es cierto en espacios métricos arbitrarios. Por ejemplo, si $M = [0, 1] \cup [2, 3]$, la bola abierta $B_2(0) = [0, 1]$ es también cerrada, luego es su propia clausura, y su frontera es vacía, mientras que $\tilde{B}_2(0) = [0, 1] \cup \{2\}$ y $S_2(0) = \{2\}$.

En la sección 2.1 generalizamos la noción de aplicación uniformemente continua al contexto de aplicaciones entre espacios uniformes arbitrarios. 50

---

**Compacidad** Veamos ahora que un espacio métrico es compacto si y sólo si toda sucesión tiene una subsucesión convergente:

**Teorema 9.15** *Si $M$ es un espacio métrico, las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

1. *$M$ es compacto.*
2. *$M$ es numerablemente compacto.*
3. *$M$ es sucesionalmente compacto.*

Demostración: Como los espacios métricos cumplen el primer axioma de numerabilidad, el teorema 4.56 implica que en ellos la compacidad numerable equivale a la compacidad sucesional, luego obviamente todo espacio compacto es numerablemente compacto y sucesionalmente compacto.

Supongamos ahora que $M$ es sucesionalmente compacto, pero no compacto. Entonces existiría un cubrimiento abierto $M = \bigcup\limits_{i \in I} A_i$ que no admite subcubrimientos finitos.

Sea $\epsilon > 0$ y $x_0 \in M$. Si $B_\epsilon(x_0) \neq M$, existe un punto $x_1 \in M$ tal que $d(x_1, x_0) \geq \epsilon$. Si $B_\epsilon(x_0) \cup B_\epsilon(x_1) \neq M$, existe un punto $x_2 \in M$ tal que $d(x_2, x_0) \geq \epsilon$, $d(x_2, x_1) \geq \epsilon$.

Si $M$ no pudiera cubrirse por un número finito de bolas de radio $\epsilon$, podríamos construir una sucesión $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ con la propiedad de que $d(x_i, x_j) \geq \epsilon$ para todos los naturales $i$, $j$. Es claro que tal sucesión no puede tener subsucesiones convergentes, pues una bola de centro el límite y radio $\epsilon/2$ debería contener infinitos términos de la sucesión, que distarían entre sí menos de $\epsilon$.

Concluimos que para todo $\epsilon > 0$ existen puntos $x_0, \ldots, x_n \in M$ de modo que $M = B_\epsilon(x_0) \cup \cdots \cup B_\epsilon(x_n)$.

Lo aplicamos a $\epsilon = 1$ y obtenemos tales bolas. Si todas ellas pudieran cubrirse con un número finito de abiertos $A_i$ también $M$ podría, luego al menos una de ellas, digamos $B_1(x_0)$ no es cubrible por un número finito de abiertos del cubrimiento.

Igualmente, con $\epsilon = 1/2$ obtenemos una bola $B_{1/2}(x_1)$ no cubrible por un número finito de abiertos del cubrimiento. En general obtenemos una sucesión de bolas $B_{1/(n+1)}(x_n)$ con esta propiedad.

Sea $x$ un punto adherente de la sucesión $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$. Sea $i \in I$ tal que $x \in A_i$. Como $A_i$ es un abierto existe un número natural $k$ tal que $B_{2/(k+1)}(x) \subset A_i$. Sea $n > k$ tal que $d(x_n, x) < 1/(k+1)$. Entonces $B_{1/(n+1)}(x_n) \subset B_{2/(k+1)}(x) \subset A_i$, en contradicción con que $B_{1/(n+1)}(x_n)$ no era cubrible con un número finito de abiertos del cubrimiento. ■ 113

---

**Paracompacidad** Probamos a continuación que todo espacio (pseudo)métrico es paracompacto. La paracompacidad la estudiamos en la sección 4.7, pero la prueba del teorema siguiente sólo requiere la mera definición 4.88.

En realidad vamos a probar algo ligeramente más fuerte, para lo cual definimos una familia *discreta* de subconjuntos de un espacio topológico como una familia tal que cada punto tiene un entorno que corta a lo sumo a un conjunto de la familia. Claramente, toda familia discreta de conjuntos es localmente finita.

Diremos que una familia de conjuntos es $\sigma$-localmente finita (resp. $\sigma$-discreta) si es unión numerable de familias localmente finitas (discretas).

**Teorema 9.16 (AE) (Stone)** *Si $M$ es un espacio pseudométrico, entonces todo cubrimiento abierto de $X$ admite un refinamiento abierto localmente finito y $\sigma$-discreto.*

Demostración: Sea $\rho$ la pseudométrica de $M$ y sea $\{U_i\}_{i\in I}$ un cubrimiento abierto de $X$. Fijemos un buen orden en el conjunto $I$. Vamos a definir recurrentemente familias $\{\mathcal{V}_n\}_{n=0}^{\infty}$ de abiertos de $M$ de modo que $\mathcal{V}_n = \{V_{i,n}\}_{i\in I}$, donde

$$V_{i,n} = \bigcup_c B_{1/2^n}(c),$$

donde $c$ recorre los puntos de $X$ que cumplen:

1. $i$ es el menor elemento de $I$ tal que $c \in U_i$.

2. $c \notin V_{j,m}$, para $m < n$ y $j \in I$.

3. $B_{3/2^n}(c) \subset U_i$.

Así $V_{i,n} \subset U_i$ es abierto. Vamos a probar que $\mathcal{V} = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} \mathcal{V}_n$ es un cubrimiento de $X$, con lo que será un refinamiento del cubrimiento dado. En efecto, si $x \in X$, podemos tomar el menor índice $i \in I$ tal que $x \in U_i$, y un número natural $n$ tal que $B_{3/2^n}(x) \subset U_i$. Entonces, o bien $x \in V_{j,m}$, para un cierto $j \in I$ y un $m < n$, o bien $x \in V_{i,n}$.

Veamos ahora que, para cada número natural $n$, si $x_1 \in V_{i_1,n}$, $x_2 \in V_{i_2,n}$ con $i_1 \neq i_2$, entonces $\rho(x_1, x_2) > 1/2^n$.

Esto implica que la familia $\mathcal{V}_n$ es discreta, porque cada bola de radio $1/2^{n+1}$ corta a lo sumo a un $V_{i,n}$.

Podemos suponer que $i_1 < i_2$. Sean $c_1$ y $c_2$ tales que $x_k \in B_{1/2^n}(c_k) \subset V_{i_k,n}$. Por la propiedad 3) tenemos que $B_{3/2^n}(c_1) \subset U_{i_1}$ y por 1) $c_2 \notin U_{i_1}$, luego $\rho(c_1, c_2) \geq 3/2^n$, luego

$$\rho(c_1, c_2) \leq \rho(c_1, x_1) + \rho(x_1, x_2) + \rho(c_2, x_2)$$

o, equivalentemente,

$$\rho(x_1, x_2) \geq \rho(c_1, c_2) - \rho(c_1, x_1) - \rho(c_2, x_2) > \frac{1}{2^n}.$$

Sólo falta probar que $\mathcal{V}$ es localmente finita. Para ello probaremos que para todo $j \in I$ y todo par $p$, $q$ de números naturales, si $B_{1/2^p}(x) \subset V_{j,q}$, entonces $B_{1/2^{p+q+1}}(x) \cap V_{i,n} = \varnothing$ para todo $n > p + q$ y todo $i \in I$.

Con esto tenemos que si $x \in X$, existen naturales $p$, $q$ y un $j \in I$ tales que $B_{1/2^p}(x) \subset V_{j,q}$, luego la bola $B_{1/2^{p+q+1}}(x)$ corta a lo sumo $p + q + 1$ elementos de $\mathcal{V}$ (pues corta a lo sumo a un elemento de cada $\mathcal{V}_n$ con $n \leq p + q$).

En efecto, si $i \in I$ y $n > p + q \geq q$, los puntos $c \in X$ según la definición de $V_{i,n}$ no pertenecen a $V_{j,q}$ (por la condición 2). Como $B_{1/2^p}(x) \subset V_{j,q}$, tenemos que $\rho(x, c) \geq 1/2^p$ para todos los $c$. Entonces $B_{1/2^{p+q+1}}(x) \cap B_{1/2^n}(c) = \varnothing$, pues en caso contrario

$$\rho(x, c) < \frac{1}{2^{p+q+1}} + \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{2^{p+1}} + \frac{1}{2^{p+1}} = \frac{1}{2^p}.$$

Por lo tanto, $B_{1/2^{p+q+1}}(x) \cap V_{i,n} = \varnothing$. ∎

Así pues, todo espacio pseudométrico es paracompacto. Del teorema anterior se deduce también lo siguiente:

**Teorema 9.17 (AE)** *Todo espacio pseudométrico tiene una base $\sigma$-discreta.*

DEMOSTRACIÓN: Por el teorema anterior, para cada $n \geq 1$, las bolas de radio $1/n$ forman un cubrimiento abierto que admite un refinamiento abierto $\sigma$-discreto $\mathcal{V}_n$, y es claro entonces que $\bigcup\limits_n \mathcal{V}_n$ es una base $\sigma$-discreta del espacio. ∎

En particular, todo espacio pseudometrizable tiene una base $\sigma$-localmente finita.

**Teorema 9.18** *Todo espacio regular con una base $\sigma$-localmente finita es perfectamente normal.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $X$ un espacio regular y sea $\mathcal{B} = \bigcup\limits_{n\in\omega} \mathcal{B}_n$ una base de $X$ tal que cada familia $\mathcal{B}_n$ sea localmente finita.

Si $W$ es un abierto en $X$, para cada $x \in W$ existe un $n_x \in \omega$ y un $U_x \in \mathcal{B}_{n_x}$ tal que $x \in U_x \subset \overline{U}_x \subset W$. Sea $U_n = \bigcup\{U_x \mid n_x = n\}$. Así el abierto $U_n$ es la unión de una familia localmente finita de abiertos, luego por el teorema 4.89 tenemos que $\overline{U}_n \subset W$. De hecho, $W = \bigcup\limits_{n\in\omega} U_n = \bigcup\limits_{n\in\omega} \overline{U}_n$. Así pues, todo abierto es un $F_\sigma$, luego el teorema quedará probado si demostramos que $X$ es normal.

En efecto, si $A$ y $B$ son dos cerrados disjuntos en $X$, tomando $W = X \setminus B$ tenemos abiertos tales que $A \subset W = \bigcup\limits_{n\in\omega} U_n$ con $\overline{U}_n \cap B = \varnothing$, y tomando $W = X \setminus A$ obtenemos abiertos tales que $B \subset \bigcup\limits_{n\in\omega} V_n$ con $\overline{V}_n \cap A = \varnothing$, y ahora basta razonar como en la prueba del teorema 5.13. ■

Vamos a probar que la existencia de una base $\sigma$-discreta o $\sigma$-localmente finita no sólo es una condición necesaria, sino también suficiente, para que un espacio regular sea metrizable. Para ello probamos lo siguiente:

**Teorema 9.19** *Sea $X$ un espacio $T_0$ y sea $\{\rho_n\}_{n\in\omega}$ una familia de pseudométricas continuas en $X$ acotadas por 1 tales que para todo cerrado no vacío $A \subset X$ y todo $x \in X \setminus A$ existe un $n \in \omega$ tal que $\rho_n(x, A) > 0$. Entonces $X$ es metrizable.*

DEMOSTRACIÓN: Basta definir $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ mediante

$$d(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho_n(x, y)}{2^n}.$$

Es fácil ver que $d$ es una pseudométrica, y de hecho es una métrica, pues si $x$, $y \in X$ son dos puntos distintos, existe un abierto $U$ que contiene a uno y no al otro (digamos $x \in U$, $y \notin U$), luego $A = X \setminus U$ es un cerrado no vacío tal que $x \in X \setminus A$. Por hipótesis existe un $n \in \omega$ tal que $\rho_n(x, y) \geq \rho_n(x, A) > 0$, luego $d(x, y) > 0$.

Vamos a probar ahora que si $A \subset X$, entonces $x \in \overline{A}$ (donde la clausura se toma respecto a la topología dada en $X$) si y sólo si $d(x, A) = 0$. Esto implicará que $\overline{A}$ es la misma respecto a la topología dada en $X$ y respecto a la métrica, luego ambas topologías tienen los mismos cerrados, luego también los mismos abiertos, luego son la misma.

Si $x \in X \setminus \overline{A}$, por hipótesis existe un $n \in \omega$ tal que

$$d(x, A) \geq d(x, \overline{A}) \geq \rho_n(x, \overline{A})/2^n > 0.$$

Por otra parte, como cada $\rho_n$ es continua en $X \times X$, el criterio de mayoración de Weierstrass nos da que $d$ también lo es, así como la aplicación $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = d(x, A)$. Así, si $x \in \overline{A}$, tenemos que $f(x) \in f[\overline{A}] \subset \overline{f[A]} = 0$, luego $d(x, A) = 0$. ■

**Teorema 9.20 (Teorema de metrización de Nagata-Smirnov) (AE)** *Un espacio topológico es metrizable si y sólo si es regular y tiene una base $\sigma$-localmente finita.*

DEMOSTRACIÓN: Ya hemos probado que las condiciones son necesarias. Supongamos ahora que $X$ es regular y que $\mathcal{B} = \bigcup\limits_{n\in\omega} \mathcal{B}_n$ es una base de $X$, donde cada $\mathcal{B}_n$ es localmente finita. Por el teorema 9.18 sabemos que $X$ es $T_6$. Por lo tanto, para cada $U \in \mathcal{B}$ existe una función $f_U : X \longrightarrow [0,1]$ tal que $Z(f_U) = X \setminus U$.

Para cada abierto $U$, llamamos $U^* = (U \times X) \cup (X \times U)$, que es un abierto en $X \times X$, y es claro que $\{U^* \mid U \in \mathcal{B}_n\}$ es una familia localmente finita. Además, $|f_U(x) - f_U(y)| = 0$ si $(x,y) \in (X \times X) \setminus U^*$. Por lo tanto, la función $\rho_n : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\rho_n(x,y) = \sum_{U\in\mathcal{B}_n} |f_U(x) - f_U(y)|$$

es continua, ya que cada punto $(x,y) \in X \times X$ tiene un entorno que corta a un número finito de abiertos $U^*$, con $U \in \mathcal{B}_n$, luego la suma en dicho entorno es una suma finita de funciones continuas. Claramente $\rho_n$ es una pseudométrica en $X$ y, cambiándola por $\max\{\rho_n, 1\}$, podemos exigir que esté acotada por 1. Sólo falta probar que estas pseudométricas cumplen la condición del teorema anterior.

Sea $A \subset X$ cerrado no vacío y sea $x \in X \setminus A$. Entonces existe un $U \in \mathcal{B}$ tal que $x \in U \subset X \setminus A$. Sea $n \in \omega$ tal que $U \in \mathcal{B}_n$. Así $f_U(x) > 0$ y $f_U[A] = 0$, luego $\rho_n(x, A) \geq f_U(x) > 0$. ■

Teniendo en cuenta el teorema 9.17, tenemos también:

**Teorema 9.21 (Teorema de metrización de Bing) (AE)** *Un espacio topológico es metrizable si y sólo si es regular y tiene una base $\sigma$-discreta.*

Notemos que esto implica en particular que todo espacio regular con una base numerable es metrizable, (es decir, el teorema 5.66), pues toda familia numerable de abiertos es trivialmente $\sigma$-discreta. En el ejemplo A.35 se muestra otra aplicación de este teorema. 167

## 9.2 Espacios métricos completos

Vamos a probar que la completitud de un espacio métrico está determinada por la convergencia de las sucesiones de Cauchy, con lo que los filtros resultan habitualmente innecesarios. Observemos antes una propiedad elemental de las sucesiones de Cauchy:

**Teorema 9.22** *Toda sucesión de Cauchy en un espacio métrico está acotada.*

DEMOSTRACIÓN: Si $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión es de Cauchy en un espacio métrico $M$, existe un $m \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq m$ se cumple $d(x_n, x_m) \leq 1$. Sea $C = \max(\{d(x_k, x_m) \mid k < m\} \cup \{1\})$. Es claro entonces que $d(x_n, x_m) \leq C$ para todo $n$, luego la sucesión está acotada. ■

**Teorema 9.23** *Un espacio métrico es completo si y sólo si es sucesionalmente completo.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que $M$ es un espacio métrico en el que toda sucesión de Cauchy converge y sea $F$ un filtro de Cauchy en $M$. Para cada natural $m \geq 1$, sea $B_m \in F$ tal que $d(B_m) < V_{1/(3m)}$. Entonces, por 2.18, tenemos que $d(\overline{B_m}) < V_{1/m}$, lo que significa que $d(\overline{B}_m) < 1/m$ en el sentido métrico usual, y $\overline{B_m} \in F$, luego podemos suponer que los $B_m$ son cerrados, así como que $B_0 \supset B_1 \supset B_2 \supset \cdots$

Sea $a_m \in B_m$. Claramente la sucesión $\{a_m\}$ es de Cauchy, luego converge a un punto $x$ tal que $\bigcap\limits_m B_m = \{x\}$. Si $B \in F$, sea $B'_m = \overline{B} \cap B_m$. Por el mismo argumento concluimos que $\varnothing \neq \bigcap\limits_m B'_m = \overline{B} \cap \bigcap_m B_m = \overline{B} \cap \{x\}$, luego $x \in \overline{B}$, lo que prueba que $x$ es punto adherente de $F$ y, al ser éste un filtro de Cauchy, converge a $x$. ■

Un resultado fundamental es que $\mathbb{R}$ es un espacio métrico completo. Para probarlo necesitamos los resultados del apartado sobre convergencia de sucesiones del capítulo 12. 452

**Teorema 9.24** $\mathbb{R}$*, con la distancia usual, es un espacio métrico completo.*

DEMOSTRACIÓN: Dada una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$, para probar que es convergente basta probar que lo es una cualquiera de sus subsucesiones. Por el teorema 12.11 podemos tomar una subsucesión monótona, que estará acotada, porque toda sucesión de Cauchy es acotada y obviamente toda subsucesión de una sucesión acotada está acotada. Pero las observaciones anteriores a 12.11 prueban que en un conjunto totalmente ordenado completo toda sucesión monótona y acotada es convergente. ■

El teorema de Baire prueba que los espacios métricos completos poseen una propiedad notable que conviene estudiar más en general a través de la clase de los espacios que la satisfacen. Nos ocupamos de ello en la sección 1.6. 37

---

**Desarrollos decimales** Ahora podemos probar que todo número real admite un desarrollo decimal, como $\sqrt{2} = 1.4142135\ldots$

No hay razón para restringirnos a la base 10, sino que podemos fijar como base cualquier número natural $b \geq 2$. Si $I = [u, v]$ es un intervalo cerrado, para número natural $i < b$ definimos los subintervalos

$$I_i = [u + i(v-u)/b, u + (i+1)(v-u)/b].$$

Si llamamos $l(I) = v - u$ a la longitud de un intervalo $I = [u, v]$, tenemos que los subintervalos $I_0, \ldots, I_{b-1}$ dividen a $I$ en $b$ partes de la misma longitud $l(I_i) = l(I)/b$.

Llamamos $S_n(b)$ al conjunto de todas las sucesiones de longitud $n$ de números naturales menores que $b$ (entendiendo que $S_0(b) = \{\varnothing\}$ contiene a la sucesión vacía) y $S(b) = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} S_n(b)$.

Definimos recurrentemente una aplicación $f : S(b) \longrightarrow \mathcal{P}[0,1]$ que asigne a cada sucesión $s$ un intervalo cerrado contenido en $[0,1]$. Concretamente, tomamos $f(\varnothing) = [0,1]$ y, supuesta definida $f|_{S_n(b)}$, definimos

$$f|_{S_{n+1}(b)}(s) = f|_{S_n(b)}(s|_n)_{s(n)},$$

donde $s|_n$ representa la sucesión $s$ restringida a los números menores que $n$. Escribiremos $I_s = f(s)$. Por ejemplo, para $b = 3$, tenemos que

$$I_\varnothing = [0,1], \quad I_0 = [0,1/3], I_1 = [1/3,2/3], I_2 = [2/3,3/3],$$

$$\begin{array}{lll} I_{00} = [0,1/9], & I_{01} = [1/9,2/9], & I_{02} = [2/9,3/9], \\ I_{10} = [3/9,4/9], & I_{11} = [4/9,5/9], & I_{12} = [5/9,6/9], \\ I_{20} = [6/9,7/9], & I_{21} = [7/9,8/9], & I_{22} = [8/9,1]. \end{array}$$

En general, una simple inducción demuestra que, si $l(s) = n$, entonces

$$I_s = \left[\sum_{i<n} \frac{s(i)}{b^{i+1}}, \sum_{i<n} \frac{s(i)}{b^{i+1}} + \frac{1}{b^n}\right],$$

de modo que $\{I_s\}_{s \in S_n(b)}$ es una partición de $[0,1]$ en $b^n$ subintervalos consecutivos de longitud $1/b^n$.

Sea $\bar{b} = \{0, \ldots, b-1\}$, de modo que $\bar{b}^{\mathbb{N}}$ es el conjunto de todas las sucesiones (infinitas) de números naturales menores que $b$. Para cada $f \in \bar{b}^{\mathbb{N}}$ y cada $n \in \mathbb{N}$, llamamos $f|_n$ a la sucesión de los $n$ primeros términos de $f$.

Como, para cada $s \in S_{n+1}(b)$, el intervalo $I_s$ es una subdivisión de $I_{s|_n}$, tenemos que para cada $f \in \bar{b}^{\mathbb{N}}$, la sucesión de intervalos $\{I_{f|_n}\}_{n=0}^{\infty}$ es decreciente y $l(I_{f|_n}) = 1/b^n$. En particular $\lim\limits_n l(I_{f|_n}) = 0$.

Si tomamos un punto $x_n \in I_{f|_n}$, la sucesión $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ es de Cauchy (pues si $n_1, n_2 \geq n$, entonces $|x_{n_1} - x_{n_2}| \leq 1/b^n$), luego converge a un número real $u$. Pero la sucesión está finalmente dentro de cada intervalo cerrado $I_{f|_n}$, luego $u \in \bigcap\limits_{n=0}^{\infty} I_{f|_n}$. De hecho, $\bigcap\limits_{n=0}^{\infty} I_{f|_n} = \{u\}$, pues si la intersección contuviera dos números, digamos $u < v$, podríamos tomar $n$ tal que $1/b^n < v - u$, y entonces no puede suceder que $u, v \in I_{f|_n}$.

Por consiguiente podemos definir $\phi : \bar{b}^{\mathbb{N}} \longrightarrow [0,1]$ como la única aplicación que cumple

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} I_{f|_n} = \{\phi(f)\}.$$

Más explícitamente, $\phi(f)$ es el único número real que cumple

$$\sum_{i<n} \frac{f(i)}{b^{i+1}} \leq \phi(f) \leq \sum_{i<n} \frac{f(i)}{b^{i+1}} + \frac{1}{b^n}$$

para todo $n$. Como la serie de términos positivos de la izquierda está acotada por $\phi(f)$, tenemos que es convergente y, tomando límites,

$$\phi(f) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f(i)}{b^{i+1}}.$$

El teorema siguiente recoge lo que hemos demostrado junto con algunos hechos adicionales:

**Teorema 9.25** *Dado un número natural $b \geq 2$, la aplicación $\phi : \bar{b}^{\mathbb{N}} \longrightarrow [0,1]$ que a cada sucesión $f$ de números naturales menores que $b$ le asigna el número real*

$$\phi(f) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f(i)}{b^{i+1}}$$

*es continua y suprayectiva (considerando en $\bar{b}$ la topología discreta y en $\bar{b}^{\mathbb{N}}$ la topología producto) y cada número $0 \leq \alpha \leq 1$ tiene una única antiimagen por $\phi$ excepto los números racionales no nulos de la forma*

$$\alpha = \sum_{i<n} \frac{s(i)}{b^{i+1}},$$

*que tienen exactamente dos antiimágenes.*

Demostración: Sea $0 \leq \alpha \leq 1$. Entonces $\alpha \in I_\varnothing$ y, supuesto definido $s_n \in S_n(b)$ tal que $\alpha \in I_{s_n}$, es claro que $\alpha$ pertenecerá al menos a uno de los $b$ subintervalos en los que dividimos $I_{s_n}$, de modo que existe un $s_{n+1} \in S_{n+1}(b)$ tal que $s_{n+1}$ prolonga a $s_n$ y $\alpha \in I_{s_{n+1}}$. De este modo obtenemos una sucesión de prolongaciones sucesivas $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ que define una función $f = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} s_n \in \bar{b}^{\mathbb{N}}$ tal que $\phi(f) = \alpha$.

Notemos que, en cada paso, la elección de $s_{n+1}$ está unívocamente determinada por $\alpha$ salvo que $\alpha$ sea uno de los extremos de los $n+1$ subintervalos en los que se divide $I_{s_n}$, es decir, si existe un $0 < j < b$ tal que $\alpha \in (I_{s_n})_{j-1} \cap (I_{s_n})_j$. En tal caso podemos definir $s_{n+1}(n) = j-1$ o $s_{n+1}(n) = j$.

Si $\alpha$ es un número para el que se da este caso, podemos considerar el mínimo número natural $n \geq 1$ para el que esto sucede. Entonces

$$\alpha = \sum_{i<n} \frac{s_n(i)}{b^{i+1}} + \frac{j}{b^{n+1}} > 0,$$

que es el extremo común de los intervalos $(I_{s_n})_{j-1}$, $(I_{s_n})_j$.

Ahora bien, si elegimos $s_{n+1}(n) = j - 1$, esto significa que $\alpha$ es el extremo superior de $I_{s_{n+1}}$, luego a partir de ese momento $\alpha$ estará siempre en el último intervalo de cada subdivisión posterior, luego la función $f$ a la que llegamos cumple necesariamente $f(i) = b - 1$ para todo $i > n + 1$. Similarmente, si elegimos $s_{n+1}(n) = j$, entonces $\alpha$ es el extremo inferior de $I_{s_{n+1}}$, luego a partir de ese momento $\alpha$ estará siempre en el primer intervalo de cada subdivisión posterior, y necesariamente $f(i) = 0$ para $i > n + 1$. Por lo tanto, $\alpha$ tiene únicamente dos antiimágenes.

Falta probar que $\phi$ es continua. Ahora bien, si $f|_{n+1} = g|_{n+1}$, tenemos que

$$|\phi(f) - \phi(g)| = \Big|\sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{f(i) - g(i)}{b^{i+1}}\Big| \leq \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{|f(i) - g(i)|}{b^{i+1}} \leq \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{b^i} = \frac{1}{(b-1)b^n},$$

luego, dado $\epsilon > 0$, sólo tenemos que tomar $n$ tal que $b^n > 1/((b-1)\epsilon)$ para asegurar que si $d(f, g) < V_{n+1}$, entonces $d(\phi(f) - \phi(g)) < \epsilon$, donde

$$V_{n+1} = \{(f, g) \in \bar{b}^{\mathbb{N}} \times \bar{b}^{\mathbb{N}} \mid f|_{n+1} = g|_{n+1}\}$$

es una de las bandas básicas para el producto de la uniformidad discreta en $\bar{b}$, luego $\phi$ es uniformemente continua. ■

Así, si $\beta$ es un número real, podemos expresarlo como $\beta = \pm(E[|\beta|] + \alpha)$, con $0 < \alpha < 1$ y, combinando el teorema [TC 2.25] con el teorema anterior, $\beta$ admite una expresión de la forma

$$\beta = \pm \sum_{i=0}^{n} c_i b^i \pm \sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_i}{b^i} = \pm \sum_{i=-\infty}^{n} c_i b^i$$

(donde la última igualdad es únicamente una notación que introducimos aquí), para ciertos números naturales $0 \leq c_i < b$, unívocamente determinados por $\beta$ salvo por la posibilidad doble indicada en el teorema anterior, según la cual, por ejemplo (en base 10)

$$183.347000\ldots = 183.346999\ldots$$

Aquí hemos introducido la notación habitual, consistente en yuxtaponer las cifras $c_i$ e indicar con un punto la separación entre la parte entera y la parte fraccionaria.

**Productos numerables de espacios métricos** Ahora podemos extender el teorema 9.8 sobre productos finitos de espacios métricos al caso numerable:

**Teorema 9.26** *Si $\{M_i\}_{i=0}^{\infty}$ es una familia numerable de espacios métricos, existe una distancia en $M = \prod_{i=0}^{\infty} M_i$ que induce el producto de las uniformidades de los factores (y en particular induce la topología producto).*

Demostración: Por el teorema 9.7 podemos tomar una distancia $d_n$ en $M_n$ que tome valores en $[0,1]$. Notemos que las distancias modificadas inducen la misma uniformidad, pues, para todo $\epsilon < 1$, las bandas $V_\epsilon$ son las mismas. Definimos $d : M \times M \longrightarrow M$ mediante

$$d(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_i(x_n, y_n)}{2^n} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2.$$

(Aquí usamos el teorema 9.53). La prueba de que $d$ es una distancia no ofrece dificultad. Es claro que una base para la uniformidad producto la forman las bandas

$$V_{\epsilon,m} = \{(x,y) \in M \times M \mid d_i(x_i, y_i) < \epsilon \mid i = 1, \ldots, m\}.$$

Pero, para $i \leq m$, tenemos que $d_i(x_i, y_i) < 2^m d(x,y)$, luego $V_{\epsilon/2^m} \subset V_{\epsilon,m}$, donde la primera banda es la banda básica determinada por $d$. Esto prueba que toda banda para la uniformidad producto es una banda para la uniformidad de la distancia $d$.

Consideremos ahora una banda $V_\epsilon$ para la distancia y veamos que contiene una banda para la uniformidad producto. Para ello tomamos un $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \frac{\epsilon}{2}$$

y tomamos $\delta > 0$ tal que

$$\delta \sum_{n=0}^{m} \frac{1}{2^n} < \frac{\epsilon}{2}.$$

Así, se cumple que $V_{\delta,m} \subset V_\epsilon$, pues si $d(x,y) < V_{\delta,m}$, entonces

$$d(x,y) = \sum_{n=0}^{m} \frac{d_i(x_i, y_i)}{2^n} + \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{d_i(x_i, y_i)}{2^n} < \sum_{n=0}^{m} \frac{\delta}{2^n} + \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \epsilon.$$

Por lo tanto, ambas uniformidades coinciden. ∎

**Oscilación de una función** Vamos a probar algunos resultados sobre extensión de aplicaciones continuas entre espacios métricos, para lo cual necesitamos introducir un concepto que tiene interés en sí mismo:

**Definición 9.27** Sea $f : A \longrightarrow N$ una función arbitraria de un subconjunto $A \subset M$ de un espacio métrico $M$ en un espacio métrico $N$. Si $U \subset M$, definimos la *oscilación* de $f$ en $U$ como

$$\operatorname{osc}(f, U) = \sup\{d(f(x), f(y)) \mid x, y \in U \cap A\} \in [0, +\infty],$$

entendiendo que la oscilación es infinita si $U \cap A = \varnothing$. Si $x \in \overline{A}$, definimos la *oscilación* de $f$ en $x$ como

$$\operatorname{osc}(f, x) = \text{ínf}\{\operatorname{osc}(f, U) \mid U \text{ es un entorno de } x\}.$$

Veamos algunos hechos sencillos:

1. *Si $x \in A$, entonces $f$ es continua en $x$ si y sólo si* $\operatorname{osc}(f,x) = 0$.

   En efecto, si $f$ es continua en $x$, dado $\epsilon > 0$, existe un entorno $U$ de $x$ tal que si $y \in A \cap U$, entonces $d(f(x), f(y)) < \epsilon/2$, luego $\operatorname{osc}(f,U) \leq \epsilon$, luego $\operatorname{osc}(f,x) = 0$.

   Recíprocamente, si $\operatorname{osc}(f,x) = 0$ y $\epsilon > 0$, existe un entorno $U$ de $x$ tal que si $\operatorname{osc}(f,U) < \epsilon$, luego si $y \in U \cap A$, se cumple que $d(f(x), f(y)) < \epsilon$, lo que prueba la continuidad de $f$ en $x$.

2. *Si $N$ es un espacio métrico completo, $f : A \longrightarrow N$ es continua, y*

   $$A^* = \{x \in \overline{A} \mid \operatorname{osc}(f,x) = 0\},$$

   *entonces $f$ se extiende a una (única) aplicación continua $f^* : A^* \longrightarrow N$.*

   Para cada $x \in A^*$, sea $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión en $A$ que converge a $x$. Entonces, dado $\epsilon > 0$, existe un entorno $U$ de $x$ tal que $\operatorname{osc}(f,U) < \epsilon$, y existe un $n_0$ tal que si $n \geq n_0$, entonces $x_n \in U \cap A$, luego si $m, n \geq n_0$, tenemos que $d(f(x_m), f(x_n)) < \epsilon$. Esto prueba que la sucesión $\{f(x_n)\}_{n=0}^{\infty}$ es de Cauchy en $N$, luego converge a un punto $y \in N$.

   Si $\{x_n'\}_{n=0}^{\infty}$ es otra sucesión en $A$ que converge a $x$, por lo que acabamos de probar $\{f(x_n')\}_{n=0}^{\infty}$ converge a un punto $y' \in N$, pero también podemos aplicar el argumento a la sucesión $x_0, x_0', x_1 x_1', \ldots$, con lo que obtenemos que la sucesión imagen converge a un tercer punto $y'' \in N$, pero ésta tiene como subsucesiones a $\{f(x_n)\}_{n=0}^{\infty}$ y a $\{f(x_n')\}_{n=0}^{\infty}$, luego concluimos que $y = y'' = y'$. En otras palabras, el punto $y$ es independiente de la elección de la sucesión.

   Por lo tanto, podemos definir $f^* : A^* \longrightarrow N$ tal que $f^*(x)$ sea el límite común de todas las imágenes de todas las sucesiones en $A$ que convergen a $x$. Como $f$ es continua, es claro que $f^*$ extiende a $f$, y también es obvio que es continua, por la caracterización de la continuidad en términos de sucesiones.

3. *$A^*$ es un subconjunto $G_\delta$ de $M$.*

   En efecto, los conjuntos $A_n = \{x \in \overline{A} \mid \operatorname{osc}(f,x) < 1/n\}$ son abiertos en $\overline{A}$, pues si $x \in A_n$ existe un entorno abierto $U$ de $x$ tal que $\operatorname{osd}(f,U) < 1/n$, y entonces $x \in \overline{A} \cap U \subset A_n$, luego $A_n$ es un entorno de todos sus puntos. Pero

   $$A^* = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n,$$

   luego $A^*$ es un $G_\delta$ en $\overline{A}$. Más aún, si expresamos $A_n = \overline{A} \cap U_n$, donde $U_n$ es abierto en $M$, tenemos que

   $$A^* = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n \cap \overline{A},$$

pero en un espacio métrico, todo cerrado es un $G_\delta$. Concretamente, se cumple que

$$\overline{A} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in M \mid d(x, \overline{A}) < 1/n\},$$

y la intersección de dos $G_\delta$ en $M$ es un $G_\delta$ en $M$.

Con esto hemos probado:

**Teorema 9.28** *Si $f : A \longrightarrow N$ es una aplicación continua de un subconjunto $A \subset M$ de un espacio métrico $M$ en un espacio métrico completo $N$, existe un $G_\delta$ en $M$ tal que $A \subset A^* \subset \overline{A}$ tal que $f$ se extiende a una función continua $f^* : A^* \longrightarrow N$.*

Elaborando un poco el argumento obtenemos el teorema siguiente:

**Teorema 9.29 (Lavrentieff)** *Sean $A \subset M$, $B \subset N$ dos subconjuntos de dos espacios métricos completos y sea $f : A \longrightarrow B$ un homeomorfismo. Entonces existen conjuntos $G_\delta$ en $M$ y $N$, respectivamente, $A \subset A^* \subset \overline{A}$, $B \subset B^* \subset \overline{B}$ tales que $f$ se extiende a un homeomorfismo $f^* : A^* \longrightarrow B^*$.*

Demostración: Hemos construido extensiones continuas $f^* : A_0 \longrightarrow N$ y $(f^{-1})^* : B_0 \longrightarrow M$, donde $A_0$ y $B_0$ son conjuntos $G_\delta$ en $M$ y $N$, respectivamente. Llamamos $A^* = \{x \in A_0 \mid f^*(x) \in B_1\}$. Se trata de la antiimagen de un conjunto $G_\delta$ por una aplicación continua, luego es un $G_\delta$ en $A_0$, luego también en $M$. Igualmente, $B^* = \{x \in B_0 \mid (f^{-1})^*(x) \in A_0\}$ es un $G_\delta$ en $N$.

Veamos ahora que $f^*[A^*] = B^*$. En efecto, si $x \in A^*$, entonces $f^*(x) \in B_0$ y $f^* \circ (f^{-1})^* : A^* \longrightarrow M$ es una función continua que en $A$ es la identidad. Como $A$ es denso en $A^*$, $f^* \circ (f^{-1})^*$ es la identidad en $A^*$, luego tenemos que $(f^{-1})^*(f^*(x)) = x \in A^* \subset A_0$, lo que prueba que $f^*(x) \in B^*$. Así pues, $f^*[A] \subset B^*$. Si $y \in B^*$, como antes $(f^{-1})^*(y) \in A^*$ y $f^*((f^{-1})^*(y)) = y$, luego $y \in f^*[A^*]$, y así obtenemos la igualdad $f^*[A^*] = B^*$.

Así pues, hemos visto que $f^* : A^* \longrightarrow B^*$ y $(f^{-1})^* : B^* \longrightarrow A^*$, así como que son mutuamente inversas, luego son homeomorfismos. ■

**Subespacios completamente metrizables** Un subespacio de un espacio métrico completo es completo si y sólo si es cerrado, pero no necesita ser cerrado para ser completamente metrizable, es decir, para que exista una métrica completa que induzca su topología.

Por ejemplo, $M = ]0, 1[$ no es cerrado en $\mathbb{R}$, por lo que no es completo con la distancia usual que hereda de $\mathbb{R}$. Sin embargo, es completamente metrizable. En efecto, basta basta considerar un homeomorfismo $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ y definir $d(x, y) = |f(x) - f(y)|$. Así $f$ biyecta los abiertos de $\mathbb{R}$ tanto con los abiertos usuales de $M$ (por ser un homeomorfismo) como con sus abiertos respecto de $d$ (por ser una isometría), por lo que $d$ induce la topología usual en $M$, pero, como $\mathbb{R}$ es completo y $f$ es una isometría, $(M, d)$ también es completo.

Este ejemplo muestra que, en un espacio métrico, no es lo mismo ser completo que ser completamente metrizable. Obviamente, todo espacio métrico completo es completamente metrizable, pero un espacio métrico puede no ser completo y ser completamente metrizable, como acabamos de ver. Los teoremas siguientes clarifican la situación:

**Teorema 9.30** *Todo $G_\delta$ en un espacio métrico $M$ es homeomorfo a un cerrado en $M \times \mathbb{R}^\omega$.*

Demostración: Sea $A \subset M$ un subconjunto $G_\delta$. Entonces $M \setminus A = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} F_n$, donde cada $F_n$ es cerrado en $M$. Consideremos la aplicación $f : M \longrightarrow \mathbb{R}^\omega$ dada por $f_n(x) = d(x, F_n)$. Claramente es continua, luego el teorema 1.38 implica que $f \subset M \times \mathbb{R}^\omega$ es cerrado. Por claridad llamaremos $G = f$ cuando lo consideremos como subespacio $G \subset M \times \mathbb{R}^\omega$.

Por otra parte, la aplicación $i : M \longrightarrow G$ dada por $i(x) = (x, f(x))$ es un homeomorfismo (su inversa es la proyección en la primera componente). Pero es fácil ver que

$$i[A] = i[M] \cap (M \times \,]0, +\infty[^\omega)$$

(porque $x \in A$ si y sólo si $d(x, F_n) > 0$ para todo $n$). Por lo tanto, $i[A]$ es cerrado en $M \times \,]0, +\infty[^\omega$, que a su vez es homeomorfo a $M \times \mathbb{R}^\omega$. ■

Con esto podemos probar:

**Teorema 9.31** *Sea $M$ un espacio métrico y $A \subset X$.*

1. *Si $M$ es completamente metrizable y $A$ es un $G_\delta$ en $M$, entonces $A$ es completamente metrizable.*

2. *Si $A$ es completamente metrizable, entonces $A$ es un $G_\delta$ en $M$.*

Demostración: 1) Si $M$ es completamente metrizable, también lo es el producto $M \times \mathbb{R}^\omega$, pues por 9.26 un producto numerable de espacios metrizables es metrizable (con una métrica que induce la uniformidad producto) y todo producto de espacios uniformes completos es completo (teorema 2.31), luego el teorema anterior nos da que $A$ es completamente metrizable, pues todo cerrado en un espacio métrico completo es completo.

2) Sea $d$ la distancia en $M$ y sea una distancia en $A$ con la que $(A, d)$ es un espacio métrico completo. Entonces, la identidad $(A, d) \longrightarrow (A, d')$ se extiende a una aplicación continua $f : A^* \longrightarrow A$, donde $A^* \subset \overline{A}$ es un $G_\delta$ en $M$, pero $f : A^* \longrightarrow M$ coincide con la identidad en $A$, que es denso en $A^*$, luego tiene que coincidir con la identidad en $A^*$. Como $f[A^*] = A$, tiene que ser $A = A^*$, luego $A$ es un $G_\delta$ en $M$. ■

Por ejemplo, es claro que $\mathbb{Q}$ es $F_\sigma$ en $\mathbb{R}$, luego $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ es $G_\delta$, luego por el teorema anterior es completamente metrizable.

Otra aplicación notable de la completitud de $\mathbb{R}$ es la prueba de que $\mathbb{R}^n$ admite una única topología de Hausdorff con la que se convierte en un espacio vectorial topológico. En la sección 11.2 probamos algo mucho más general. 390

## 9.3 Espacios normados

El concepto de "espacio normado" que vamos a introducir a continuación se debe a Hilbert y a Banach, y constituye una de las combinaciones más importantes entre una estructura algebraica y una topológica, que resulta ser la más adecuada para desarrollar la mayor parte del llamado "análisis funcional", si bien, al profundizar en él, en ciertas ocasiones acaba siendo necesaria la estructura aún más general de "espacio vectorial topológico" que estudiaremos en el capítulo siguiente. Remitimos al apéndice B para la definición de espacio vectorial y sus propiedades elementales.

**Cuerpos métricos** Como veremos enseguida, una norma en un espacio vectorial es una aplicación que asigna un "tamaño" a cada vector, pero para definirla necesitamos que los escalares tengan previamente asignado un tamaño, lo cual se lleva a cabo a través del concepto de "valor absoluto":

**Definición 9.32** Un *valor absoluto* en un cuerpo $K$ es una aplicación

$$|\ | : K \longrightarrow \mathbb{R}$$

que cumple las propiedades siguientes, para todo $\alpha$, $\beta \in K$.

1. $|\alpha| \geq 0$ y $|\alpha| = 0$ si y sólo si $\alpha = 0$,
2. $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$,
3. $|\alpha\beta| = |\alpha||\beta|$

Un *cuerpo métrico* es un par $(K, |\ |)$, donde $|\ |$ es un valor absoluto en $K$. Normalmente escribiremos $K$, sobrentendiendo que $|\ |$ representa un valor absoluto distinto en cada caso.

Notemos que un valor absoluto se restringe a un homomorfismo de grupos $|\ | : K^* \longrightarrow \mathbb{R}^*$. Esto implica, en particular, las propiedades 1) y 2) de la lista siguiente:

1. $|1| = 1$
2. Si $\alpha \neq 0$, $|\alpha^{-1}| = |\alpha|^{-1}$.
3. $|-1| = 1$, pues $|-1|^2 = |1| = 1$, luego $|-1| = 1$.
4. $|-\alpha| = |\alpha|$, pues $|-\alpha| = |-1||\alpha| = |\alpha|$.

Ahora es inmediato que, como en el caso de $\mathbb{R}$, un valor absoluto en un cuerpo induce en éste una distancia mediante $d(\alpha, \beta) = |\alpha - \beta|$. Consideraremos a los cuerpos métricos como espacios métricos siempre con esta distancia.

Es claro que $\mathbb{R}$ es un cuerpo métrico con el valor absoluto usual derivado de su estructura de cuerpo ordenado, pero es posible considerar otros cuerpos métricos no ordenados. El caso más interesante es el cuerpo $\mathbb{C}$ de los números complejos. Para englobar estos dos casos adoptaremos el convenio de usar la letra $\mathbb{K}$ para referirnos a $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ indistintamente.

En la teoría clásica sobre espacios normados se trabaja con espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, pero en otras ramas de la matemática, como la teoría algebraica de números, es frecuente encontrarse con espacios normados sobre otros cuerpos métricos. Sucede que muchos resultados válidos para $\mathbb{K}$-espacios vectoriales valen igualmente para otros cuerpos con casi las mismas pruebas, así que, cuando la generalización no obligue a grandes cambios, trabajaremos en el contexto general de un cuerpo métrico arbitrario $K$.

Sólo hay un hecho que es trivial para $\mathbb{K}$ y que en otros cuerpos requiere una ligera variante técnica, y es que, obviamente, si $\alpha \geq 0$ es un número real, en $\mathbb{K}$ se cumple que $|\alpha| = \alpha$, por lo que en $\mathbb{K}$ el valor absoluto toma cualquier valor real $\geq 0$. Esto no es cierto en otros cuerpos. De hecho, hay un caso en el que es radicalmente falso:

En todo cuerpo $K$ se puede definir un *valor absoluto trivial* mediante

$$|\alpha| = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha = 0, \\ 1 & \text{si } \alpha \neq 0. \end{cases}$$

Diremos que un cuerpo métrico es *trivial* si su valor absoluto es el trivial[3] Vemos que en este caso el valor absoluto sólo toma dos valores, 0 y 1. Si descartamos esta posibilidad, seguimos sin poder asegurar que el valor absoluto vaya a tomar todos los valores reales $\geq 0$, pero a menudo basta con el teorema siguiente:

**Teorema 9.33** *Si $K$ es un cuerpo métrico no trivial y $\alpha > 0$ es un número real y $x \in K$ cumple $|x| > 1$, entonces existe un único entero $m \in \mathbb{Z}$ tal que $|x|^m \leq \alpha < |x|^{m+1}$.*

DEMOSTRACIÓN: Observemos ante todo que, por definición de valor absoluto trivial, en un cuerpo métrico no trivial $K$ existe siempre un $x \in K$ no nulo tal que $|x| \neq 1$ y, cambiando $x$ por $x^{-1}$ si es necesario, podemos tomarlo tal que $|x| > 1$. Entonces $\lim\limits_m |x|^m = +\infty$, luego, dado $\alpha \geq 1$, existe un mínimo natural $m$ tal que $\alpha < |x|^{m+1}$, luego $|x|^m \leq \alpha < |x|^{m+1}$.

Si $\alpha < 1$ tomamos el mínimo natural $m$ tal que $1 < 1/\alpha \leq |x|^m$, con lo que $m > 0$ y $|x|^{m-1} < 1/\alpha \leq |x|^m$, de donde a su vez $|x|^{-m} \leq \alpha < |x|^{-m+1}$. La unicidad se sigue de que la función $m \mapsto |x|^m$ es estrictamente creciente. ■

En lo sucesivo entenderemos que siempre que hablemos de cuerpos métricos, nos referimos a cuerpos métricos no triviales.

[3] Notemos que la topología inducida por el valor absoluto trivial no es la trivial, sino todo lo contrario, la discreta. El lector podría pensar que sería más razonable llamar "cuerpos métricos discretos" a los cuerpos métricos triviales, pero en teoría de números es costumbre llamar valores absolutos discretos a aquellos cuya imagen es un subgrupo discreto de $\mathbb{R}^*$.

**Espacios normados** Según indicábamos, un espacio normado es un espacio vectorial sobre un cuerpo métrico en el que hay definida una "norma" que asigna a cada vector un "tamaño" o "longitud":

**Definición 9.34** Si $K$ es un cuerpo métrico y $V$ es un espacio vectorial sobre $K$, una *norma* en $V$ es una aplicación $\| \ \| : V \longrightarrow \mathbb{R}$ que cumple las propiedades siguientes, para todos los vectores $v, v_1, v_2$ y todo escalar $\alpha$:

1. $\|v\| \geq 0$ y $\|v\| = 0$ si y sólo si $v = 0$,
2. $\|v_1 + v_2\| \leq \|v_1\| + \|v_2\|$,
3. $\|\alpha v\| = |\alpha| \|v\|$.

Un *espacio normado* es un par $(V, \| \ \|)$, donde $V$ es un espacio vectorial sobre $K$ y $\| \ \|$ es una norma en $V$, aunque en la práctica, como es habitual, escribiremos $V$ en lugar de $(V, \| \ \|)$ y sobrentenderemos que $\| \ \|$ representa una norma distinta en cada caso.

Es inmediato que toda norma en un espacio $V$ determina una distancia en $V$, a saber, la dada por

$$d(v_1, v_2) = \|v_1 - v_2\|.$$

En lo sucesivo consideraremos siempre a los espacios normados como espacios métricos con esta distancia, y a su vez como espacios topológicos con la topología inducida por la métrica.

Dos normas en un mismo espacio vectorial $V$ son *equivalentes* si inducen métricas equivalentes, es decir, si inducen la misma topología en $V$.

**Espacios prehilbertianos** El lector familiarizado con el álgebra de $\mathbb{R}^n$ sabrá sin duda que en este espacio está definido el producto escalar

$$x \cdot y = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$$

que tiene interpretación geométrica muy simple, que permite medir, no sólo la longitud de los vectores, sino también el ángulo que forman dos vectores. Vamos a ver que el concepto de producto escalar también puede ser generalizado axiomáticamente, aunque para ello tenemos que restringir el cuerpo de escalares a $\mathbb{K}$, es decir, a $\mathbb{R}$ o a $\mathbb{C}$.

**Definición 9.35** Un *producto escalar* en un $\mathbb{K}$-espacio vectorial $H$ es una aplicación $\cdot : H \times H \longrightarrow K$ que cumple las propiedades siguientes, para $x$, $y$, $z \in H$ y $\alpha \in K$.

1. $x \cdot y = \overline{y \cdot x}$,
2. $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$,
3. $(\alpha x) \cdot y = \alpha(x \cdot y)$,
4. $x \cdot x \geq 0$ y $x \cdot x = 0$ si y sólo si $x = 0$.

En 1), la barra representa la conjugación compleja, de modo que si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ la propiedad se reduce a $x \cdot y = y \cdot x$.

Notemos que 1) y 2) implican también la propiedad distributiva por la derecha: $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$. De las propiedades 1) y 3) se sigue que

$$x \cdot (\alpha y) = \overline{(\alpha y) \cdot x} = \overline{\alpha}\, \overline{y \cdot x} = \overline{\alpha}\, x \cdot y.$$

Un *espacio prehilbertiano* es un par $(H, \cdot)$, donde $H$ es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y $\cdot$ es un producto escalar en $H$. Como es habitual, en la práctica escribiremos $H$ en lugar de $(H, \cdot)$.

Si $H$ es un espacio prehilbertiano y $x \in H$, definimos la *norma* de $x$ como $\|x\| = \sqrt{x \cdot x}$.

Vamos a probar que todo espacio prehilbertiano es un espacio normado con la norma que acabamos de introducir. Para ello nos basaremos en el teorema siguiente:

**Teorema 9.36 (Desigualdad de Schwarz)** *Si $x, y$ son elementos de un espacio prehilbertiano, entonces $|x \cdot y| \leq \|x\|\,\|y\|$.*

Demostración: Sean $A = \|x\|^2$, $B = |x \cdot y|$ y $C = \|y\|^2$. Existe un número complejo $\alpha$ tal que $|\alpha| = 1$ y $\alpha(y \cdot x) = B$. Para todo número real $r$ se cumple

$$0 \leq (x - r\alpha y) \cdot (x - r\alpha y) = x \cdot x - r\alpha(y \cdot x) - r\bar{\alpha}(x \cdot y) + r^2\, y \cdot y.$$

Notemos que $\bar{\alpha}(x \cdot y) = \bar{B} = B$, luego $A - 2Br + Cr^2 \geq 0$. Si $C = 0$ ha de ser $B = 0$, o de lo contrario la desigualdad sería falsa para $r$ grande. Si $C > 0$ tomamos $r = B/C$ y obtenemos $B^2 \leq AC$, y basta tomar la raíz cuadrada de ambos miembros. ■

**Teorema 9.37** *Todo espacio prehilbertiano es un espacio normado con la norma dada por $\|x\| = \sqrt{x \cdot x}$.*

Demostración: De la propiedad 4) de la definición de producto escalar se sigue que $\|x\| = 0$ si y sólo si $x = 0$, y por otra parte

$$\|\alpha x\| = \sqrt{(\alpha x) \cdot (\alpha x)} = \sqrt{|\alpha|^2\, x \cdot x} = \sqrt{|\alpha|^2}\,\sqrt{x \cdot x} = |\alpha|\,\|x\|.$$

Por último, usando la desigualdad de Schwarz vemos que

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= (x + y) \cdot (x + y) = x \cdot x + x \cdot y + y \cdot x + y \cdot y \\ &\leq \|x\|^2 + 2\|x\|\,\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2, \end{aligned}$$

donde hemos usado que $x \cdot y + y \cdot x = x \cdot y + \overline{x \cdot y}$ es un número real, luego

$$x \cdot y + y \cdot x \leq |x \cdot y + y \cdot x| \leq |x \cdot y| + |y \cdot x| \leq 2\|x\|\|y\|.$$

Calculando la raíz cuadrada llegamos a que $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$. ■

**Ejemplo** Un producto escalar en $\mathbb{K}^n$ viene dado por

$$x \cdot y = x_1 \bar{y}_1 + \cdots + x_n \bar{y}_n.$$

La norma $\|x\|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2}$ que induce este producto recibe el nombre de *norma euclídea* en $\mathbb{K}^n$.

No todas las normas derivan de un producto escalar. Una condición necesaria para que se dé el caso (en 9.48 veremos también que es suficiente) es que cumplan la llamada "ley del paralelogramo":

**Teorema 9.38 (Ley del paralelogramo)** *Si $V$ es un espacio prehilbertiano y $x$, $y \in V$, entonces*

$$2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 = \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2.$$

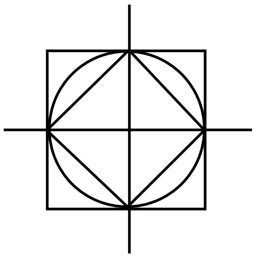
DEMOSTRACIÓN: Basta desarrollar:

$$\|x+y\|^2 = (x+y)\cdot(x+y) = x\cdot x + y\cdot y + x\cdot y + y\cdot x = \|x\|^2 + \|y\|^2 + x\cdot y + y\cdot x,$$

$$\|x-y\|^2 = (x-y)\cdot(x-y) = x\cdot x + y\cdot y - x\cdot y - y\cdot x = \|x\|^2 + \|y\|^2 - x\cdot y - y\cdot x,$$

y sumar ambas ecuaciones. ■

**Normas en $\mathbb{K}^n$** La norma euclídea que acabamos de introducir es la que tiene una interpretación geométrica más directa, pero hay otras normas equivalentes que a menudo son más cómodas para trabajar, a saber:



$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \qquad \|x\|_\infty = \text{máx}\{|x_i| \mid i = 1, \ldots, n\}.$$

La equivalencia entre éstas y la norma euclídea se sigue fácilmente de las desigualdades

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty,$$

de donde $B^\infty_{\epsilon/n}(x) \subset B^1_\epsilon(x) \subset B^2_\epsilon(x) \subset B^\infty_\epsilon(x)$, y es claro entonces que las métricas asociadas a las tres normas inducen la misma topología, pues todo entorno de un punto para una de ellas lo es para cualquiera de las otras. La figura muestra tres bolas del mismo centro y radio para las tres normas.

Observemos que ni $\|\ \ \|_1$ ni $\|\ \ \|_\infty$ derivan de un producto escalar (para todo $n \geq 2$), pues no cumplen la ley del paralelogramo. Basta aplicarla a los vectores $x = (1, 0, 0, \ldots, 0)$ e $y = (0, 1, 0, \ldots, 0)$. El resultado es, respectivamente,

$$2 + 2 = 2^2 + 2^2, \qquad 2 + 2 = 1^1 + 1^2,$$

luego en ambos casos tenemos una contradicción.

**Productos finitos de espacios normados** Análogamente a lo que sucede con los productos finitos de espacios métricos (véase la página 292), si $V_1, \ldots, V_n$ son espacios normados, existen normas en el producto cartesiano $V_1 \times \cdots \times V_n$ que inducen las distancias definidas en la sección 9.1, a las que ahora podemos añadir la distancia euclídea derivada de la norma euclídea. Concretamente:

$$\|x\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \|x_i\|, \quad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2}, \quad \|x\|_\infty = \max\{\|x_i\| \mid i = 1, \ldots, n\}.$$

El hecho de que $\|\ \|_1$, $\|\ \|_2$ y $\|\ \|_\infty$ sean normas en $\mathbb{R}^n$ implica inmediatamente que cualquiera de las tres aplicaciones precedentes es una norma en el producto finito (pero ahora sobre un cuerpo métrico arbitrario $K$). Además se cumplen las desigualdades

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty,$$

por lo que las tres normas son equivalentes. Ya hemos probado que la distancia $d_\infty$ asociada a $\|\ \|_\infty$ induce la topología producto, por lo que lo mismo vale para las otras dos. En cambio:

**Teorema 9.39** *Si $\{V_i\}_{i\in I}$ es una familia infinita de espacios normados no nulos, no existe ninguna norma en $\prod\limits_{i\in I} V_i$ que induzca la topología producto.*

Demostración: En caso contrario, la bola unitaria $B_0(0)$ del producto contendría un abierto básico para la topología producto, es decir, un abierto de la forma $U = \prod\limits_{i\in I} U_i$, donde $U_i = V_i$ salvo en un número finito de casos. Como $I$ es infinito, existe $i_0 \in I$ tal que $U_{i_0} = V_{i_0}$. Tomamos $v \in \prod\limits_{i\in I} V_i$ que tenga todas sus componentes nulas excepto $v_{i_0}$. Entonces, para todo $\alpha \in K$ se cumple que $\alpha v \in U \subset B_1(0)$, de modo que $|\alpha|\|v\| \leq 1$ y $|\alpha| \leq 1/\|v\|$, pero esto es imposible, porque en $K$ hay elementos de valor absoluto arbitrariamente grande. ■

**Subespacios normados** Si $V$ es un espacio normado y $W$ es un subespacio vectorial, es inmediato que la norma de $V$ se restringe a una norma en $W$, por lo que siempre consideraremos a los subespacios vectoriales de los espacios normados como espacios normados con la restricción de la norma.

Claramente, la métrica inducida en $W$ por la restricción de la norma de $V$ es la restricción de la métrica de $V$, luego la topología de $W$ como subespacio normado de $V$ es la topología relativa inducida por la topología de $V$.

Igualmente, el producto escalar de un espacio prehilbertiano $V$ se restringe a un producto escalar en cualquiera de sus subespacios $W$, de modo que $W$ se convierte a su vez en un espacio prehilbertiano cuya norma es la restricción de la norma de $V$, luego la topología de $W$ es también la tolpología relativa inducida desde $V$.

**Continuidad** La teoría de espacios normados es el contexto natural para demostrar que las funciones más habituales son continuas. Para empezar, el teorema 9.14 implica que si $V$ es un espacio normado, la norma $\| \ \| : V \longrightarrow \mathbb{R}$ es uniformemente continua, pues $\|v\| = d(v, 0)$ y la distancia es uniformemente continua. En particular, si $K$ es un cuerpo métrico, el valor absoluto $| \ | : K \longrightarrow \mathbb{R}$ es uniformemente continuo. Más aún:

**Teorema 9.40** *Si $V$ es un espacio normado sobre un cuerpo métrico $K$, entonces la suma $+ : V \times V \longrightarrow V$ y el producto $\cdot : K \times V \longrightarrow V$ son aplicaciones continuas. (La suma es, de hecho, uniformemente continua.)*

Demostración: Claramente $\|v' + w' - v - w\| \leq \|(v', w') - (v, w)\|_1$, lo que implica que la suma es uniformemente continua. Similarmente,

$$\|\alpha' v' - \alpha v\| \leq \|\alpha' v' - \alpha' v\| + \|\alpha' v - \alpha v\| = |\alpha'| \|v' - v\| + |\alpha' - \alpha| \|v\|.$$

Dado $\epsilon > 0$, tomamos $0 < \delta < 1$ que cumpla además

$$\delta < \frac{\epsilon}{|\alpha| + \|v\| + 1} < \epsilon.$$

Así, si $(\alpha', v') \in B_\delta(\alpha) \times B_\delta(v)$, tenemos $|\alpha' - \alpha| < \delta$, luego $|\alpha'| \leq |\alpha| + \delta < |\alpha| + 1$, luego

$$\|\alpha' v' - \alpha v\| < \frac{|\alpha'|\epsilon}{|\alpha| + \|v\| + 1} + \frac{\|v\|\epsilon}{|\alpha| + \|v\| + 1} < \epsilon,$$

luego $\alpha' v' \in B_\epsilon(\alpha v)$ y el producto es continuo en $(\alpha, v)$. ■

En particular, si $K$ es un cuerpo métrico, la suma y el producto en $K$ son aplicaciones continuas. Además:

**Teorema 9.41** *Si $K$ es un cuerpo métrico, la aplicación $K \setminus \{0\} \longrightarrow K$ dada por $\alpha \mapsto 1/\alpha$ es continua.*

Demostración: Sea $\alpha \in K \setminus \{0\}$. Sea $\delta = |\alpha|/2$. Si $\beta \in B_\delta(\alpha)$, entonces

$$|\alpha| \leq |\alpha - \beta + \beta| \leq \delta + |\beta|,$$

luego $|\beta| \geq |\alpha| - \delta = \delta$. Dado $\epsilon > 0$, tomamos $0 < \delta' < 1$, $\delta' < \delta|\alpha|\epsilon$. Así, si $|\beta - \alpha| < \delta'$, tenemos que

$$\left| \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\alpha} \right| = \frac{|\beta - \alpha|}{|\beta||\alpha|} < \frac{\delta|\alpha|\epsilon}{\delta|\alpha|} = \epsilon.$$

■

**Teorema 9.42** *El producto escalar $\cdot : V \times V \longrightarrow \mathbb{K}$ en un espacio prehilbertiano es continuo.*

DEMOSTRACIÓN: Usando la desigualdad de Schwarz vemos que, si $(x,y)$, $(x',y') \in V \times V$, se cumple

$$|x' \cdot y' - x \cdot y| = |x' \cdot y' - x' \cdot y + x' \cdot y - x \cdot y| \leq |x' \cdot (y' - y)| + |(x' - x) \cdot y|$$
$$\leq \|x'\| \|y' - y\| + \|x' - x\| \|y\|.$$

Dado $0 < \epsilon < 1$, tomamos $0 < \delta < \epsilon/(2(\|x\| + \|y\| + 1))$ y así, si $\|x' - x\| < \delta$, $\|y' - y\| < \delta$, tenemos que $\|x'\| \leq \|x' - x\| + \|x\| < \|x\| + 1$, con lo que

$$|x' \cdot y' - x \cdot y| < \frac{(\|x\| + 1)\epsilon}{2(\|x\| + \|y\| + 1)} + \frac{\|y\|\epsilon}{2(\|x\| + \|y\| + 1)} < \epsilon.$$

■

De aquí podemos extraer muchas consecuencias, pero conviene hacerlo en el contexto más general de los grupos topológicos, por lo que el lector puede pasar ahora a la sección 10.1 para luego regresar a este punto. 335

Tenemos, pues, que si $V$ es un espacio normado, el conjunto $C(X, V)$ de las aplicaciones continuas de un espacio topológico $X$ en $V$ es un subespacio vectorial de $V^X$, es decir, que la suma de funciones continuas y el producto por un escalar de una función continua es una función continua.

Más aún, el conjunto $C(X, K)$ de las aplicaciones continuas de $X$ en un cuerpo métrico $K$ es un subanillo de $K^X$, lo que significa que el producto de funciones continuas es una función continua, y también la inversa de una función continua que no toma el valor 0 en ningún punto.

Otra consecuencia notable es que la continuidad de una aplicación lineal entre espacios normados equivale a su continuidad en 0. A su vez, esto puede traducirse a términos más simples:

**Teorema 9.43** *Si $f : V \longrightarrow W$ es una aplicación lineal entre espacios normados, las condiciones siguientes son equivalentes:*

1. *$f$ es continua.*
2. *$f$ es continua en $0$.*
3. *Existe un número real $M \geq 0$ tal que $\|f(v)\| \leq M\|v\|$ para todo $v \in V$.*

DEMOSTRACIÓN: La equivalencia entre las dos primeras afirmaciones es el teorema 10.1. Si $f$ es continua, existe $0 < \delta < 1$ tal que si $\|v\| < \delta$ entonces $\|f(v)\| < 1$. Fijado $\alpha \in K$ con $|\alpha| > 1$, el teorema 9.33 nos da un $m \in \mathbb{Z}$ tal que $|\alpha^n| \leq \|v\|/\delta < |\alpha^{n+1}|$. Así $\|v/\alpha^{n+1}\| < \delta$, luego $\|f(v/\alpha^{n+1})\| < 1$, es decir,

$$\|f(v)\| < |\alpha^n||\alpha| \leq \frac{|\alpha|}{\delta}\|v\|$$

y basta tomar $M = |\alpha|/\delta$.

Recíprocamente, si existe la constante $M$ en las condiciones del enunciado, se cumple que $B_{\epsilon/M}(0) \subset f^{-1}[B_\epsilon(0)]$, lo que prueba que $f$ es continua en 0, luego es continua. ■

Es claro que el espacio $\mathcal{L}(V, W)$ de todas las aplicaciones lineales continuas entre dos espacios vectoriales topológicos es un espacio vectorial. La tercera condición del teorema anterior nos permite definir en él una norma:

**Teorema 9.44** *Si $V$ y $W$ son dos espacios normados, el espacio $\mathcal{L}(V, W)$ de todas las aplicaciones lineales continuas de $V$ en $W$ es un espacio normado con la norma dada por*

$$\|f\| = \sup\{\|f(v)\|/\|v\| \mid v \in V \setminus \{0\}\}.$$

*En particular, para $f \in \mathcal{L}(V, W)$ y $v \in V$, se cumple que $\|f(v)\| \leq \|f\|\|v\|$.*

Demostración: El teorema anterior garantiza que $\|f\| \geq 0$ es un número real y claramente $\|f\| = 0$ equivale a $f = 0$. Por otra parte,

$$\begin{aligned} \|(f+g)(v)\| &= \|f(v) + g(v)\| \leq \|f(v)\| + \|g(v)\| \\ &\leq \|f\|\|v\| + \|g\|\|v\| = (\|f\| + \|g\|)\|v\|, \end{aligned}$$

luego $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$. Similarmente se prueba que $\|\alpha f\| = |\alpha|\|f\|$. ■

Conviene observar que para espacios normados sobre $\mathbb{K}$ (es decir, sobre $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) la norma de una aplicación lineal continua admite otras expresiones de interés:

**Teorema 9.45** *Sea $f : V \longrightarrow W$ una aplicación lineal continua entre dos $\mathbb{K}$-espacios normados con $V \neq 0$. Entonces*

$$\|f\| = \sup\{\|f(v)\| \mid v \in V,\ \|v\| \leq 1\} = \sup\{\|f(v)\| \mid v \in V,\ \|v\| = 1\}.$$

Demostración: Si $\|v\| \leq 1$, tenemos que $\|f(v)\| \leq \|f\|\|v\| \leq \|f\|$, luego ambos supremos son menores o iguales que $\|f\|$. Por otra parte, dado $\epsilon > 0$, existe un $v \in V \setminus \{0\}$ tal que $\|f(v/\|v\|)\| = \|f(v)\|/\|v\| > \|f\| - \epsilon$, y $v/\|v\|$ tiene norma 1, luego $\|f\| - \epsilon$ no es cota superior de ninguno de los dos conjuntos del enunciado, lo que nos da ambas igualdades. ■

Como aplicación vamos a dar un criterio muy simple que determina cuándo dos normas son equivalentes:

**Teorema 9.46** *Dos normas $\|\ \|_1$ y $\|\ \|_2$ en un $K$-espacio vectorial $V$ son equivalentes si y sólo si existen constantes reales $0 < m < M$ tales que, para todo $v \in V$,*

$$m\|v\|_1 \leq \|v\|_2 \leq M\|v\|_1.$$

*En particular, ambas inducen la misma uniformidad.*

Demostración: En virtud del teorema 9.43, la existencia de tales constantes equivale a que las identidades

$$(V, \|\ \|_1) \longrightarrow (V, \|\ \|_2), \qquad (V, \|\ \|_2) \longrightarrow (V, \|\ \|_1)$$

sean continuas, lo que significa que la identidad es un homeomorfismo, y esto a su vez equivale a que las dos topologías sean la misma.

Por otra parte, las desigualdades del enunciado nos dan las inclusiones

$$V^1_{\epsilon/M} \subset V^2_\epsilon, \qquad V^2_{m\epsilon} \subset V^1_\epsilon,$$

por lo que las uniformidades definidas por ambas normas son la misma. ■

El teorema anterior muestra en particular que dos normas equivalentes en un mismo espacio vectorial determinan los mismos conjuntos acotados. Esto se debe a que el concepto de acotación en un espacio normado puede definirse directamente a partir de su estructura de espacio vectorial topológico. Lo mostramos en la sección 11.1. 389

El teorema 11.4 afirma que una aplicación lineal abierta entre espacios vectoriales topológicos tiene que ser suprayectiva. Entre espacios normados podemos decir más:

**Teorema 9.47** *Sea $f : V \longrightarrow W$ una aplicación lineal entre espacios normados. Las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

1. *$f$ es abierta.*
2. *Existe un $\delta > 0$ tal que $B_\delta(0) \subset f[B_1(0)]$.*
3. *Existe $M > 0$ tal que para todo $w \in W$ existe un $v \in V$ tal que $f(v) = w$ y $\|v\| < M\|w\|$.*

Demostración: 1) $\Rightarrow$ 2) es trivial, pues si $f$ es abierta $f[B_1(0)]$ tiene que ser abierto, luego entorno de 0.

2) $\Rightarrow$ 3) Fijado $\alpha \in K$ tal que $|\alpha| > 1$, para cada $w \in W$ no nulo el teorema 9.33 nos da un $m \in \mathbb{Z}$ tal que $|\alpha^m| \leq \delta/(2\|v\|) < |\alpha^{m+1}|$. Así, $\|\alpha^m w\| \leq \delta/2$, luego existe un $v' \in V$ tal que $\|v'\| \leq 1$ y $f(v') = \alpha^m w$. Llamamos $v = v'/\alpha^m$, de modo que $f(v) = w$ y

$$\|v\| \leq |\alpha|^{-m} = |\alpha||\alpha^{-m-1}| \leq \frac{2|\alpha|}{\delta}\|w\|,$$

luego basta tomar $M = 1|\alpha|/\delta$.

3) $\Rightarrow$ 1) Sea $U \subset V$ un abierto y sea $x \in U$. Sea $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(x) \subset U$ y vamos a probar que $B_{\epsilon/M}(f(x)) \subset f[U]$, con lo que $f[U]$ será abierto. En efecto, si $w \in B_{\epsilon/M}(f(x))$, por 3) existe $v \in V$ tal que $f(v) = w - f(x)$ y $\|v\| < M\|w - f(x)\| < \epsilon$, luego $x + v \in U$ y $w = f(x + v) \in f[U]$. ■

Ahora podemos probar que la ley del paralelogramo es también una condición suficiente para que una norma derive de un producto escalar:

**Teorema 9.48** *Sea $V$ un $\mathbb{K}$-espacio normado. La norma de $V$ deriva de un producto escalar si y sólo si cumple la ley del paralelogramo:*

$$2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 = \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2.$$

DEMOSTRACIÓN: Supongamos en primer lugar que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Observemos que en un espacio prehilbertiano (sobre $\mathbb{R}$) se cumple que

$$\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 = (x+y)\cdot(x+y) - (x-y)\cdot(x-y) = 4x\cdot y,$$

por lo que el producto escalar puede calcularse a partir de la norma mediante

$$x\cdot y = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2).$$

Vamos a tomar esta última expresión como definición de un producto en $V$, y vamos a ver que es un producto escalar. Aceptando esto, la norma que induce será

$$\sqrt{x\cdot x} = \sqrt{\frac{1}{4}\|2x\|^2} = \|x\|.$$

En particular esto prueba que $x\cdot x \geq 0$ y que sólo es igual a 0 cuando $x = 0$. También es inmediato que $x\cdot y = y\cdot x$. Ahora, por la ley del paralelogramo,

$$2\|x+z\|^2 + 2\|y\|^2 = \|x+y+z\|^2 + \|x-y+z\|^2.$$

Por lo tanto,

$$\|x+y+z\|^2 = 2\|x+z\|^2 + 2\|y\|^2 - \|x-y+z\|^2 = 2\|y+z\|^2 + 2\|x\|^2 - \|y-x+z\|^2.$$

(La segunda igualdad se obtiene intercambiando $x$ con $y$ en la prueba de la primera.) Como $A = B$ y $A = C$ implican que $A = (B+C)/2$, de aquí obtenemos que

$$\|x+y+z\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + \|x+z\|^2 + \|y+z\|^2 - \frac{1}{2}\|x-y+z\|^2 - \frac{1}{2}\|y-x+z\|^2.$$

Cambiando $z$ por $-z$ obtenemos

$$\|x+y-z\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + \|x-z\|^2 + \|y-z\|^2 - \frac{1}{2}\|x-y-z\|^2 - \frac{1}{2}\|y-x-z\|^2.$$

Por lo tanto,

$$(x+y)\cdot z = \frac{1}{4}(\|x+y+z\|^2 - \|x+y-z\|^2)$$

$$= \frac{1}{4}(\|x+z\|^2 - \|x-z\|^2) + \frac{1}{4}(\|y+z\|^2 - \|y-z\|^2) = x\cdot z + y\cdot z.$$

Veamos finalmente que si $\alpha \in \mathbb{R}$ se cumple $(\alpha x)\cdot y = \alpha(x\cdot y)$. Por la linealidad para la suma que ya hemos probado tenemos que esto es cierto para $\alpha \in \mathbb{N}$ y de la definición del producto se sigue que vale para $\alpha = -1$, de donde a su vez se sigue que vale para todo $\alpha \in \mathbb{Z}$.

Si $\alpha = m/n$ es un número racional, aplicamos la parte ya probada a $x' = x/n$:

$$n((\alpha x)\cdot y) = n((mx')\cdot y) = m((nx')\cdot y) = m(x\cdot y),$$

y dividiendo entre $n$ queda $(\alpha x)\cdot y = \alpha(x\cdot y)$.

Ahora observamos que el producto escalar que hemos definido es continuo en $V \times V$, porque lo son la norma y las operaciones de $V$, luego también es continua en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ la aplicación $\alpha \mapsto \frac{1}{\alpha}(\alpha x \cdot y)$, y sobre $\mathbb{Q}$ es constante igual a $x \cdot y$. Como dos funciones continuas que coinciden en un conjunto denso (en un espacio de Hausdorff) tienen que ser iguales, concluimos que $\frac{1}{\alpha}(\alpha x \cdot y) = x \cdot y$ para todo $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, luego $(\alpha x) \cdot y = \alpha(x \cdot y)$ para todo $\alpha \neq 0$, y trivialmente también para $\alpha = 0$.

Esto termina la prueba en el caso real. Ahora supongamos que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ y definimos

$$x \cdot y = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{3} i^k \|x + i^k y\|^2.$$

Así, la parte real y la parte imaginaria de $x \cdot y$ son

$$\frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2) \qquad \text{y} \qquad \frac{1}{4}(\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2),$$

respectivamente, y los argumentos anteriores se aplican a ambas sin cambio alguno (notemos que $V$ es también un espacio normado sobre $\mathbb{R}$), con lo que obtenemos que $(x+y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$, así como que $(\alpha x) \cdot y = \alpha(x \cdot y)$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$. Pero además:

$$(ix) \cdot y = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{3} i^k \|i(x + i^{k-1} y)\|^2 = i \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{3} i^{k-1} \|x + i^{k-1} y\|^2 = i(x \cdot y),$$

de donde se sigue que $(\alpha x) \cdot y = \alpha(x \cdot y)$ para todo $\alpha \in \mathbb{C}$. Finalmente:

$$\begin{aligned} x \cdot y &= \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - \|x-y\|^2 - i\|x-iy\|^2) \\ &= \frac{1}{4}(\|y+x\|^2 + i\|y-ix\|^2 - \|y-x\|^2 - i\|y+ix\|^2) = \overline{y \cdot x}. \end{aligned}$$

lo que termina la prueba. ■

Terminamos probando un resultado clásico de la teoría de espacios normados:

**Teorema 9.49 (Mazur-Ulam)** *Toda isometría $f : V \longrightarrow W$ entre $\mathbb{R}$-espacios normados que cumpla $f(0) = 0$ es lineal.*

DEMOSTRACIÓN: Veamos que, para todos los vectores $v_1$, $v_2 \in V$, se cumple que

$$f\left(\frac{v_1 + v_2}{2}\right) = \frac{f(v_1) + f(v_2)}{2}.$$

Para ello, fijados $v_1$, $v_2$, definimos

$$\delta(f) = \left\| f\left(\frac{v_1 + v_2}{2}\right) - \frac{f(v_1) + f(v_2)}{2} \right\|$$

y en primer lugar observamos que

$$\delta(f) \leq \frac{1}{2} \left\| f\left(\frac{v_1 + v_2}{2}\right) - f(v_1) \right\| + \frac{1}{2} \left\| f\left(\frac{v_1 + v_2}{2}\right) - f(v_2) \right\| = \frac{\|v_1 - v_2\|}{2}.$$

Sea $\rho : W \longrightarrow W$ la aplicación dada por $\rho(z) = f(v_1) + f(v_2) - z$, que claramente es una isometría, luego también lo es $f'(v) = f \circ \rho \circ f^{-1} : V \longrightarrow V$. Ésta cumple $f'(v_1) = v_2$ y $f'(v_2) = v_1$. Además,

$$\delta(f') = \left\| f^{-1}\left(f(v_1) + f(v_2) - f\left(\frac{v_1 + v_2}{2}\right)\right) - \frac{v_1 + v_2}{2}\right\|$$

$$= \left\| f(v_1) + f(v_2) - f\left(\frac{v_1 + v_2}{2}\right) - f\left(\frac{v_1 + v_2}{2}\right)\right\| = 2\delta(f).$$

Ahora bien, si $\delta(f) > 0$, a partir de $f'$ podríamos obtener otra isometría $f'' : V \longrightarrow V$ tal que $\delta(f'') > 2^2\delta(f)$, y repitiendo el proceso podríamos obtener isometrías con $\delta(f^{n)}) = 2^n\delta(f)$, cuando, por otra parte, hemos demostrado que $\delta(f^{n)}) \leq \|v_1 - v_1\|/2$, y tenemos una contradicción.

Esto prueba que $\delta(f^{n)}) = 0$, para cualquier par de vectores $v_1$, $v_2 \in V$, y esto equivale a la igualdad que queríamos probar.

Veamos ahora que, si $0 \leq t \leq 1$, se cumple

$$f((1 - t)v_1 + tv_2) = (1 - t)f(v_1) + tf(v_2).$$

Lo tenemos probado para $t = 1/2$. Vamos a ver que se cumple para $t = k/2^n$, donde $0 \leq k \leq 2^n$ es un número natural. Lo tenemos probado para $n = 1$ y es trivial para $k = 0$ o $k =^{2^n}$. Si vale para $n$ y $t = k/2^{n+1}$, podemos suponer que $k = 2u + 1$ es impar, pues si no, $t$ admite una expresión con denominador $2^n$ y basta aplicar la hipótesis de inducción. Así

$$t = \frac{1}{2}t_1 + \frac{1}{2}t_2, \qquad \text{donde} \quad t_1 = \frac{u}{2^n}, \quad t_2 = \frac{u + 1}{2^n}.$$

Por hipótesis de inducción, la fórmula se cumple para $t_1$ y $t_2$, luego

$$(1 - t)v_1 + tv_2 = \frac{(1 - t_1)v_1 + t_1v_2}{2} + \frac{(1 - t_2)v_1 + t_2v_2}{2},$$

y basta aplicar el caso $t = 1/2$ seguido de la hipótesis de inducción.

Es fácil probar que los números de la forma $k/2^n$ son densos en $[0, 1]$, luego la igualdad que queremos probar, para $v_1$ y $v_2$ fijos, es una igualdad entre dos funciones continuas en $[0, 1]$ que coinciden en un conjunto denso, luego son iguales. Esto prueba la fórmula para todo $t$.

Como $f(0) = 0$, aplicando la igualdad a $t = 1/2$, $v$ y $-v$ obtenemos que

$$0 = f((v - v)/2) = f(v)/2 + f(-v)/2,$$

luego $f(-v) = -f(v)$. Ahora, si $\alpha > 0$, usamos que

$$0 = f\left((1 - \frac{1}{\alpha + 1})(-v) + \frac{1}{\alpha + 1}(\alpha v)\right) = -(1 - \frac{1}{\alpha + 1})f(v) + \frac{1}{\alpha + 1}f(\alpha v),$$

de donde $f(\alpha v) = \alpha f(v)$, y la relación $f(-v) = -f(v)$ implica que la igualdad precedente vale también para $\alpha < 0$. Por último,

$$f(v_1 + v_2) = 2f\left(\frac{v_1 + v_2}{2}\right) = 2f(v_1/2) + 2f(v_2/2) = f(v_1) + f(v_2),$$

luego $f$ es lineal. ■

Notemos que si $f$ es una isometría tal que $f(0) = w_0$, entonces $\tilde{f} = f - w_0$ es una isometría que cumple $\tilde{f}(0) = 0$, luego $\tilde{f}$ es lineal, y por lo tanto, la expresión general para una isometría entre espacios normados es $f(v) = w_0 + \tilde{f}(v)$, donde $\tilde{f}$ es una isometría lineal. 450

---

**Cocientes** Si $V$ es un espacio normado y $W$ es un subespacio vectorial, el espacio cociente $V/W$ tiene una estructura de espacio vectorial topológico. Si el subespacio $W$ es cerrado, dicha topología deriva de una norma:

**Teorema 9.50** *Si $V$ es un espacio normado y $W$ es un subespacio cerrado, entonces la topología cociente en $V/W$ está inducida por la norma dada por $\|v + W\| = d(v, W)$.*

Demostración: Ciertamente, $\|v+W\| = d(v, W) = 0$ si y sólo si se cumple que $v \in \overline{W} = W$, si y sólo si $v + W = 0 + W$.

Si $\alpha \in K$ es no nulo, tenemos que

$$\|\alpha v + W\| = \text{ínf}\{\|\alpha v - w\| \mid w \in W\} = \text{ínf}\{\|\alpha v - \alpha w\| \mid w \in W\}$$

$$= \text{ínf}\{|\alpha|\|v - w\| \mid w \in W\} = |\alpha| \,\text{ínf}\{\|v - w\| \mid w \in W\} = |\alpha|\|v + W\|.$$

Si $\alpha = 0$ la igualdad es trivial.

Si $v_1, v_2 \in V$ y $\epsilon > 0$, existen $w_1, w_2 \in W$ tales que

$$\|v_1 - w_1\| < \|v_1 + W\| + \epsilon/2 \qquad \|v_2 - w_2\| < \|v_2 + W\| + \epsilon/2.$$

Entonces

$$\|v_1 + v_2 + W\| \leq \|v_1 + v_2 - w_1 - w_2\| \leq \|v_1 - w_1\| + \|v_2 - w_2\|$$

$$< \|v_1 + W\| + \|v_2 + W\| + \epsilon.$$

Como esto vale para todo $\epsilon > 0$, de hecho

$$\|v_1 + W + v_2 + W\| \leq \|v_1 + W\| + \|v_2 + W\|.$$

Con esto queda probado que la aplicación que hemos definido es una norma en $V/W$. Falta probar que induce la topología cociente determinada por la proyección $p : V \longrightarrow V/W$. Para ello basta probar que $p$ es una identificación cuando en el cociente consideramos la topología inducida por la norma, y a su vez basta probar que $p$ es continua y abierta.

Ahora bien, como $\|p(v)\| = d(v, W) \leq \|v\|$, tenemos que $p$ es continua (de hecho, con $\|p\| \leq 1$). Para que $p$ sea abierta basta con que $p[B_1(0)]$ sea un entorno de 0. De hecho, vamos a ver que contiene a $B_1(0 + W)$. En efecto, si $\|v + W\| < 1$, existe un $w \in W$ tal que $\|v - w\| < 1$ y $p(v - w) = v + W$, luego $v + W \in p[B_1(0)]$. ■

Notemos que sólo hemos empleado que $W$ es cerrado para demostrar que $\|v + W\| = 0$ implica que $v + W = 0$, pero este hecho es crucial, porque si $W$ no es cerrado, entonces $V/W$ no es un espacio de Hausdorff y, por consiguiente, su topología no puede derivar de una norma. 32

## 9.4 Espacios normados completos

**Series infinitas** Vamos a caracterizar la completitud de un espacio normado en términos de la convergencia de series infinitas. Empecemos con algunas consideraciones generales sobre series.

Observemos que si $f : X \times X \longrightarrow Y$ es una aplicación continua entre espacios topológicos y $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ son sucesiones en $X$ convergentes a límites $l_1$ y $l_2$, entonces la sucesión $\{(x_n, y_n)\}_{n=0}^{\infty}$ converge a $(l_1, l_2)$ en $X \times X$ (por el teorema 1.31), luego la sucesión $\{f(x_n, y_n)\}_{n=0}^{\infty}$ converge a $f(l_1, l_2)$.

Por ejemplo, si $X$ es un espacio vectorial topológico, el hecho de que la suma sea continua se traduce en que si $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ convergen a $l_1$ y $l_2$, entonces la sucesión suma $\{x_n + y_n\}_{n=0}^{\infty}$ converge a $l_1 + l_2$. y $\{\alpha x_n\}_{n=0}^{\infty}$ converge a $\alpha l_1$.

Similarmente, en un cuerpo métrico (o en un grupo topológico) el producto de sucesiones convergentes converge al producto de los límites, etc.

**Definición 9.51** Si $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión en un grupo topológico abeliano $V$, usaremos la notación $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ para representar la sucesión $\left\{\sum\limits_{n=0}^{N} a_n\right\}_{N=0}^{\infty}$. Las sucesiones de este tipo[4] se llaman *series infinitas*. Los términos $\sum\limits_{n=0}^{N} a_n$ se llaman *sumas parciales* de la serie.

Si la serie es convergente (es decir, si lo es la sucesión de sus sumas parciales), es costumbre llamar también $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ a su límite.

El teorema siguiente recoge las propiedades elementales de las series infinitas:

**Teorema 9.52** *Una serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ en un grupo topológico abeliano es convergente si y sólo si lo es cualquiera de las series $\sum\limits_{n=k+1}^{\infty} a_n$, y en tal caso los límites cumplen la relación*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{k} a_n + \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n.$$

[4] En la práctica admitiremos series de la forma $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n$ con el significado obvio.

*Además, se cumple que*

$$\lim_n a_n = \lim_n \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n = 0.$$

DEMOSTRACIÓN: Si llamamos $F = \sum_{n=0}^{k} a_n \in V$, la aplicación $t : V \longrightarrow V$ dada por $t(x) = F + x$ es un homeomorfismo. La sucesión de sumas parciales $\left\{\sum_{n=0}^{N} a_n\right\}_{N=0}^{\infty}$ converge si y sólo si lo hace su subsucesión

$$\left\{\sum_{n=0}^{N} a_n\right\}_{N=k}^{\infty} = \left\{t\Big(\sum_{n=k+1}^{N} a_n\Big)\right\}_{k=0}^{\infty},$$

y en tal caso el límite es el mismo. A su vez, esto sucederá si y sólo si converge la sucesión $\left\{\sum_{n=k+1}^{N} a_n\right\}_{k=0}^{\infty}$ y, en caso de convergencia, la relación entre los límites es

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = t\Big(\sum_{n=k+1}^{\infty} a_n\Big) = \sum_{n=0}^{k} a_n + \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n,$$

como queríamos probar. Más aún, tomando límites en los dos miembros de la igualdad

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n - \sum_{n=0}^{k} a_n,$$

(usando ahora la continuidad de la función $x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n - x$), concluimos que

$$\lim_n \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n = 0.$$

Por último, expresamos

$$a_k = \sum_{n=0}^{k} a_n - \sum_{n=0}^{k-1} a_n$$

y usamos que las dos sumas parciales de la derecha convergen al mismo límite (la serie completa), luego diferencia tiende a 0. ■

Hay unas series de números reales especialmente simples para las que podemos calcular explícitamente el valor de su suma:

**Ejemplo: Series geométricas** Si $a < 1$, se cumple que $\sum_{n=k}^{\infty} a^n = \dfrac{a^k}{1-a}$.

En efecto, una simple inducción demuestra que, para todo $a \in \mathbb{R}$, se cumple:

$$a^{N+1} - 1 = (a-1)(1 + a + \cdots + a^N),$$

de donde, si $a < 1$,

$$\sum_{n=0}^{N} a^n = \frac{1 - a^{N+1}}{1-a},$$

y al tomar límites, teniendo en cuenta que $\lim\limits_n a^{N+1} = 0$, concluimos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a}.$$

En general,

$$\sum_{n=k}^{\infty} a^n = a^k \sum_{n=k}^{\infty} a^{n-k} = a^k \sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{a^k}{1-a}.$$

■

Otro caso sencillo es el de las series de términos positivos. Se dice que una serie de números reales $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ tiene *términos positivos* si cumple $a_n \geq 0$ para todo índice $n$.

Esto hace que la sucesión de sus sumas parciales sea monótona creciente, luego converge en $\overline{\mathbb{R}}$ (teorema 12.10) y el límite está en $\mathbb{R}$ si y sólo si sus sumas parciales están acotadas superiormente (y el límite es el supremo). Por ejemplo, ahora podemos concluir lo siguiente:

**Teorema 9.53** *Si $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ y $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ son dos sucesiones de números reales tales que $0 \leq a_n \leq b_n$ para todo $n$ y la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ converge en $\mathbb{R}$, lo mismo vale para $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$, y además $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \leq \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$.*

DEMOSTRACIÓN: Basta observar que cada suma parcial de la serie menor está acotada por la suma correspondiente de la mayor, la cual a su vez está acotada por su suma. ■

Veamos finalmente la caracterización de la completitud que habíamos anunciado:

**Definición 9.54** Una serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} v_n$ en un espacio normado $V$ es *absolutamente convergente* si la serie de números reales $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \|v_n\|$ es convergente.

**Teorema 9.55** *Un espacio normado $V$ es completo si y sólo si toda serie en $V$ absolutamente convergente es convergente.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que $V$ es completo y sea $\sum\limits_{n=0}^{\infty} v_n$ una serie absolutamente convergente en $V$. Recordemos que la serie no es sino la sucesión $\{S_N\}_{N=0}^{\infty}$, donde $S_N = \sum\limits_{n=0}^{N} v_n$. Vamos a probar que esta sucesión de sumas parciales es de Cauchy, con lo que será convergente. En efecto, si $N_1 \leq N_2$, tenemos que

$$\|S_{N_2} - S_{N_1}\| = \left\| \sum_{n=N_1}^{N_2} v_n \right\| \leq \sum_{n=N_1}^{N_1} \|v_n\|.$$

Dado $\epsilon > 0$, existe un $N_0$ tal que si $N \geq N_0$ se cumple que

$$\sum_{n=N}^{\infty} \|v_n\| = \sum_{n=0}^{\infty} \|v_n\| - \sum_{n=0}^{N} \|v_n\| < \epsilon,$$

luego si $N_0 \leq N_1 \leq N_2$ tenemos que

$$\|S_{N_2} - S_{N_1}\| \leq \sum_{n=N_1}^{N_1} \|v_n\| \leq \sum_{n=N}^{\infty} \|v_n\| < \epsilon,$$

luego, en efecto, la serie es de Cauchy en $V$, luego convergente.

Recíprocamente, si las series absolutamente convergentes son convertentes, tomamos una sucesión de Cauchy $\{v_n\}_{n=0}^{\infty}$. Aplicando la definición de sucesión de Cauchy, podemos construir una sucesión $\{n_k\}_{k=0}^{\infty}$ de índices de manera que $\|v_{n_{k+1}} - v_{n_k}\| < 2^{-k}$.

Entonces, por 9.53, la serie $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \|v_{n_{k+1}} - v_{n_k}\|$ es convergente en $\mathbb{R}$, luego por hipótesis la serie $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (v_{n_{k+1}} - v_{n_k})$ converge en $V$. Ahora bien, las sumas parciales de esta serie son $S_N = v_{n_{N+1}} - v_0$, luego la sucesión $\{v_{n_N} - v_0\}_{N=0}^{\infty}$ es convergente, y también lo es $\{v_{n_N}\}_{N=0}^{\infty}$. Pero si una sucesión de Cauchy tiene una subsucesión convergente, converge (teorema 2.29). ■

Como consecuencia:

**Teorema 9.56** *Si $f : V \longrightarrow W$ es una aplicación lineal, continua y abierta entre espacios normados y $V$ es completo, entonces $W$ también lo es.*

DEMOSTRACIÓN: Por el teorema 9.47 existe $M > 0$ tal que para todo $w \in W$ existe un $v \in V$ tal que $f(v) = w$ y $\|v\| < M\|w\|$.

Sea $\{w_n\}_{n=0}^{\infty}$ una sucesión en $W$ tal que la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \|w_n\|$ converge. Sea $v_n \in V$ tal que $f(v_n) = w_n$ y $\|v_n\| < M\|w_n\|$. Por el teorema 9.53 la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \|n_n\|$ también converge y por el teorema anterior $\sum\limits_{n=0}^{\infty} v_n$ converge en $V$. El hecho de que $f$ sea lineal y continua implica que la imagen de esta serie, que es $\sum\limits_{n=0}^{\infty} w_n$, también converge. El teorema anterior implica entonces que $W$ es completo. En particular:

**Teorema 9.57** *Si $V$ es un espacio normado completo y $N$ es un subespacio cerrado, entonces el cociente $V/N$ también es completo.*

DEMOSTRACIÓN: Basta tener en cuenta que la proyección $p : V \longrightarrow V/N$ es abierta (teorema 10.26). ■

Una propiedad fundamental de las series absolutamente convergentes es que su suma no se altera si reordenamos sus términos:

**Teorema 9.58** *Si $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ es una serie absolutamente convergente en un espacio normado completo $V$ y $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ es una aplicación biyectiva, entonces la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ es absolutamente convergente y tiene la misma suma.*

Demostración: Una serie es absolutamente convergente si y sólo si converge la serie de las normas de sus términos, pero ésta (es decir, la sucesión de las sumas parciales de las normas) es una sucesión de números reales monótona creciente, por lo que converge si y sólo si está acotada. Toda suma parcial de las normas de la reordenación está mayorada por una suma parcial de las normas de la serie original (tomando los sumandos necesarios para incluir todos los que aparecen en la suma dada). Por tanto las sumas parciales de las normas de la reordenación están acotadas y la serie converge absolutamente.

Sea $\epsilon > 0$. Existe un número natural $n_0$ tal que si $n \geq n_0$

$$\left\|\sum_{k=0}^{n} a_k - \sum_{k=0}^{\infty} a_k\right\| = \left\|\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k\right\| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \|a_k\| = \sum_{k=0}^{\infty} \|a_k\| - \sum_{k=0}^{n} \|a_k\| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Sea $m_0 \geq n_0$ tal que $\{0, 1, \ldots, n_0\} \subset \{\sigma(0), \sigma(1), \ldots, \sigma(m_0)\}$. Entonces si $n \geq m_0$,

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{k=0}^{n} a_{\sigma(k)} - \sum_{k=0}^{\infty} a_k\right\| &\leq \left\|\sum_{k=0}^{n} a_{\sigma(k)} - \sum_{k=0}^{n_0} a_k\right\| + \left\|\sum_{k=0}^{n_0} a_k - \sum_{k=0}^{\infty} a_k\right\| \\ &< \sum_{k=n_0+1}^{\infty} \|a_k\| + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon.\end{aligned}$$

Por lo tanto $\sum_{k=0}^{\infty} a_{\sigma(k)} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$. ■

Esto hace que si $I$ es un conjunto infinito numerable y $\{a_i\}_{i\in I}$ es cualquier familia de elementos de un espacio normado completo $V$, podamos decir que esta sucesión define una serie *absolutamente convergente* en $V$ si, fijada cualquier biyección $s : \mathbb{N} \longrightarrow I$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_{s(n)}$ es absolutamente convergente.

El teorema anterior prueba que esto no depende de la elección de $s$, ni tampoco el valor de la suma, que podemos representar por $\sum_{i\in I} a_i$, sin especificar ninguna biyección en particular.

Una serie de este tipo converge a una suma $S \in V$ si y sólo si satisface la propiedad siguiente, que no hace referencia a ninguna biyección:

> *Para todo $\epsilon > 0$ existe $F_0 \subset I$ finito tal que, para todo $F_0 \subset F \subset I$, se cumple $\left\|S - \sum_{i\in F} a_i\right\| < \epsilon$.*

En efecto, si la serie converge a $S$ al enumerar $I$, basta fijar una enumeración y tomar como $F_0 = \{i_0, \ldots, i_{n_0}\}$ los primeros términos de la sucesión, de modo que

$$\left\|\sum_{n=n_0+1}^{\infty} a_{i_n}\right\| < \frac{\epsilon}{2}, \qquad \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \|a_{i_n}\| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Entonces, si $F_0 \subset F \subset I$, con $F$ finito:

$$\left\|S - \sum_{i\in F} a_i\right\| \leq \left\|\sum_{n=0}^{\infty} a_{n_i} - \sum_{n=0}^{n_0} a_{i_n}\right\| + \left\|\sum_{i\in F_0} a_i - \sum_{i\in F} a_i\right\| < \frac{\epsilon}{2} + \sum_{i\in F\setminus F_0} \|a_i\| < \epsilon.$$

Recíprocamente, si se cumple esta condición y fijamos una enumeración de $I$, para cada $\epsilon > 0$ tomamos $F_0$ según la hipótesis y elegimos un $n_0$ para el que $F_0 \subset \{i_0, \ldots, i_{n_0}\}$. Así, para todo $n_1 \geq n_0$ se cumple que

$$\|S - \sum_{n=0}^{n_1} a_i\| < \epsilon,$$

luego la serie converge a $S$.

Las series absolutamente convergentes se pueden manipular exactamente igual que si fueran sumas finitas. El siguiente teorema justifica cualquier operación razonable entre ellas.

**Teorema 9.59** *Sea* $\{a_i\}_{i\in I}$ *una familia numrable de elementos de un espacio normado completo* $V$. *Sea* $I = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} I_n$ *una división de* $I$ *en partes disjuntas. Entonces* $\sum\limits_{i\in I} a_i$ *es (absolutamente) convergente si y sólo si lo son las series* $\sum\limits_{i\in I_n} a_i$ *y* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \sum\limits_{i\in I_n} |a_i|$. *Además en tal caso*

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i\in I_n} a_i.$$

Demostración: Si $\sum\limits_{i\in I} a_i$ es absolutamente convergente, las sumas parciales de sus normas están acotadas, pero toda suma parcial de cada $\sum\limits_{i\in I_n} \|a_i\|$ lo es también de la primera, luego éstas están acotadas, por lo que las series $\sum\limits_{i\in I_n} a_i$ convergen absolutamente. Dado cualquier natural $k$, tomamos para cada $n \leq k$ un conjunto finito $F_n \subset I_n$ tal que $\sum\limits_{i\in I_n} \|a_i\| - \sum\limits_{i\in F_n} \|a_i\| < 1/(k+1)$. Entonces

$$\sum_{n=0}^{k} \sum_{i\in I_n} \|a_i\| < \sum_{n=0}^{k} \sum_{i\in F_n} \|a_i\| + 1 \leq \sum_{i\in I} \|a_i\| + 1,$$

luego las sumas parciales están acotadas y así todas las series convergen absolutamente.

Supongamos ahora que las series $\sum\limits_{i\in I_n} |a_i|$ y $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \sum\limits_{i\in I_n} |a_i|$ convergen absolutamente. Si $F \subset I$ es finito, para un cierto $k$ suficientemente grande se cumple

$$\sum_{i\in F} |a_i| = \sum_{n=0}^{k} \sum_{i\in I_n \cap F} |a_i| \leq \sum_{n=0}^{k} \sum_{i\in I_n} |a_i| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i\in I_n} |a_i|,$$

luego las sumas parciales de $\sum\limits_{i\in I} |a_i|$ están acotadas y la serie converge absolutamente.

Ahora supongamos la convergencia de todas las series y probemos la igualdad de las sumas. Notemos que la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i\in I_n} a_i$$

es convergente porque es absolutamente convergente. Sea $\epsilon > 0$. Existe un $F_* \subset I$ finito tal que si $F_* \subset F \subset I$ es finito, entonces

$$\Big\|\sum_{i\in I} a_i - \sum_{i\in F} a_i\Big\| < \frac{\epsilon}{4}.$$

Existe un número natural $n_0$ tal que $F_* \subset \bigcup\limits_{n=0}^{n_0} I_n$ y

$$\Big\|\sum_{n=n_0+1}^{\infty}\sum_{i\in I_n} a_i\Big\| < \frac{\epsilon}{4}.$$

Para cada $n \leq n_0$ existe un conjunto finito $F_n \subset I_n$ tal que si $F_n \subset F \subset I_n$, entonces

$$\Big\|\sum_{i\in I_n} a_i - \sum_{i\in F} a_i\Big\| < \frac{\epsilon}{2(n_0+1)}.$$

Sea $F = F_* \cup \bigcup\limits_{n=0}^{n_0} F_n$, de modo que

$$\begin{aligned}\Big\|\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i\in I_n} a_i - \sum_{i\in I} a_i\Big\| &\leq \Big\|\sum_{n=n_0+1}^{\infty}\sum_{i\in I_n} a_i\Big\| + \Big\|\sum_{n=0}^{n_0}\sum_{i\in I_n} a_i - \sum_{i\in F} a_i\Big\| \\ &+ \Big\|\sum_{i\in F} a_i - \sum_{i\in I} a_i\Big\| \\ &< \frac{\epsilon}{4} + \Big\|\sum_{n=0}^{n_0}\Big(\sum_{i\in I_n} a_i - \sum_{i\in I_n\cap F} a_i\Big)\Big\| + \frac{\epsilon}{4} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.\end{aligned}$$

Por lo tanto ambas sumas coinciden. ■

**Espacios de aplicaciones lineales** Vamos a estudiar ahora la completitud de los espacios $\mathcal{L}(V, W)$ de aplicaciones lineales continuas entre dos espacios normados. Necesitamos un resultado previo:

**Teorema 9.60** *Si $V$ y $W$ son dos espacios normados y $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión acotada en $\mathcal{L}(V, W)$ tal que para todo $v \in V$ existe $\lim\limits_n f_n(v) = f(v)$. Entonces $f \in \mathcal{L}(V, W)$.*

Demostración: Es inmediato que $f$ es lineal, pues

$$\begin{aligned}f(\alpha v_1 + \beta v_2) &= \lim_n f_n(\alpha v_1 + \beta v_2) = \lim_n(\alpha f_n(v_1) + \beta f(v_2)) \\ &= \alpha \lim_n f_n(v_1) + \beta \lim_n f_n(v_2) = \alpha f(v_1) + \beta f(v_2).\end{aligned}$$

Sea $M = \sup\limits_n \|f_n\|$. Entonces, como la norma es continua en $W$,

$$\|f(v)\| = \lim_n \|f_n(v)\| \leq \lim_n \|f_n\|\|v\| \leq M\|v\|,$$

luego $f$ es continua. ■

**Teorema 9.61** *Si $V$ y $W$ son espacios normados y $W$ es completo, entonces $\mathcal{L}(V,W)$ es completo.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $\{f_n\}_{n=0}^\infty$ una sucesión de Cauchy en $\mathcal{L}(V,W)$. Entonces, para todo $v \in V$ tenemos que $\|f_n(v) - f_m(v)\| \leq \|f_n - f_m\|\|v\|$, de donde se sigue que $\{f_n(v)\}_{n=0}^\infty$ es una sucesión de Cauchy en $W$, luego converge a un cierto $f(v) \in W$. Por el teorema anterior (teniendo en cuenta que toda sucesión de Cauchy está acotada), tenemos que $f \in \mathcal{L}(V,W)$.

Dado $\epsilon > 0$, existe un $n_0$ tal que si $m$, $n \geq n_0$ entonces $\|f_n - f_m\| < \epsilon$, por lo que

$$\|f_n(v) - f_m(v)\| \leq \epsilon\|v\|.$$

Si hacemos tender $m$ a infinito dejando $n$ fijo, obtenemos que

$$\|f_n(v) - f(v)\| \leq \epsilon\|v\|,$$

luego $\|f_n - f\| \leq \epsilon$, lo que implica que $\{f_n\}_{n=0}^\infty$ converge a $f$ en $\mathcal{L}(V,W)$. ■

El teorema siguiente, conocido también como teorema de Banach-Steinhaus, puede parafrasearse como que si un conjunto de aplicaciones lineales continuas está puntualmente acotado, entonces está uniformemente acotado:

**Teorema 9.62 (Principio de acotación uniforme)** *Sea $V$ un espacio de Banach, sea $W$ un espacio normado y sea $H \subset \mathcal{L}(V,W)$ tal que, para cada $v \in V$, el conjunto $\{\|f(v)\| \mid f \in H\}$ está acotado. Entonces $\{\|f\| \mid f \in H\}$ está acotado.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $V_n = \bigcap\limits_{f\in H} \{v \in V \mid \|f(v)\| \leq n\}$, que es cerrado en $V$. Por hipótesis $V = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} V_n$, luego, por el teorema de Baire, existe un $n$ tal que $\mathring{V}_n \neq \varnothing$.

Sea $v_0 \in \mathring{V}_n$, de modo que existe un $\epsilon > 0$ tal que $\{v \in V \mid \|v - v_0\| \leq \epsilon\} \subset V_n$.

Ahora, si $v \in V$ cumple $\|v\| \leq 1$ y $f \in H$, entonces

$$\|f(u)\| = \epsilon^{-1}\|f(v_0 + \epsilon v) - f(v_0)\| \leq \epsilon^{-1}(\|f(v_0 + \epsilon v)\| + \|f(v_0)\|) \leq 2n\epsilon^{-1},$$

luego $\|f\| \leq 2n\epsilon^{-1}$, para todo $f \in H$. ■

El ejemplo A.55 construimos los espacios de sucesiones $\ell^1$, $\ell^2$ y $\ell^\infty$, que son ejemplos notables de espacios de Banach de dimensión infinita.

**Dualidad** Introducimos ahora, en el contexto de los espacios normados, un concepto que estudiaremos más adelante en general para espacios vectoriales topológicos arbitrarios:

**Definición 9.63** Si $V$ es un $\mathbb{K}$-espacio normado, podemos distinguir entre su *dual algebraico* $V^* = L(V,\mathbb{K})$, que es espacio vectorial de todos los funcionales lineales en $V$, y su *dual topológico* $V' = \mathcal{L}(V,\mathbb{K})$, que es el subespacio formado por los funcionales lineales continuos.

Según los teoremas 9.44 y 9.45, en $V'$ tenemos definida la norma

$$\|f\| = \sup\{\|f(v)\| \mid v \in V,\ \|v\| \leq 1\} = \sup\{\|f(v)\| \mid v \in V,\ \|v\| = 1\}$$

y, según el teorema 9.61, se cumple que $V'$ es, de hecho, un espacio de Banach aunque $V$ no lo sea. Se cumple que $|f(v)| \leq \|f\|\|v\|$.

A su vez, podemos considerar el espacio dual $V''$ de $V'$, que recibe el nombre de espacio *bidual* de $V$.

Un hecho notable es que, si en general no es posible definir de forma natural (es decir, sin apoyarse en elecciones concretas de bases) aplicaciones lineales $\phi : V \longrightarrow V'$, sí que existe una aplicación lineal muy simple $i : V \longrightarrow V''$, a saber, la evaluación dada por $i_v(f) = f(v)$. Claramente es inyectiva y además es continua, pues $|i_v(f)| = |f(v)| \leq \|f\|\|v\|$, lo que significa que $\|i_v\| \leq \|v\|$.

Más adelante veremos que $i_v$ es, de hecho, una inmersión isométrica. Cuando además es suprayectiva (y, por consiguiente, una isometría) se dice que el espacio $V$ es *reflexivo.*

Por ejemplo, en la sección siguiente demostramos, entre otras cosas, que todo espacio de Hilbert es reflexivo.

**La geometría de los espacios de Hilbert** Vamos a mostrar algunos resultados específicos sobre espacios de Hilbert que no son válidos para espacios de Banach arbitrarios:

**Definición 9.64** Si $H$ es un espacio de Hilbert y $A \subset X$, definimos

$$A^\perp = \{x \in H \mid x \cdot a \text{ para todo } a \in A\}.$$

Es claro que $A^\perp$ es un subespacio vectorial de $H$. Más aún, puesto que $\{a\}^\perp$ es la antiimagen de 0 por la aplicación continua $x \mapsto a \cdot x$, se cumple que $\{a\}^\perp$ es cerrado, y como

$$A^\perp = \bigcap_{a \in A} \{a\}^\perp,$$

vemos que $A^\perp$ es un subespacio cerrado de $H$.

**Teorema 9.65** *Sea $M$ un subconjunto no vacío, cerrado y convexo de un espacio de Hilbert $H$. Entonces $M$ contiene un único elemento de norma mínima.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $\delta$ el ínfimo de las normas de los elementos de $M$. Aplicando la identidad del paralelogramo a $\frac{1}{2}x$, $\frac{1}{2}y$ tenemos

$$\frac{1}{4}\|x-y\|^2 = \frac{1}{2}\|x\|^2 + \frac{1}{2}\|y\|^2 - \left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2.$$

Si $x$, $y \in M$, por convexidad $(x+y)/2 \in M$, luego

$$\|x-y\|^2 \leq 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 - 4\delta^2. \tag{9.1}$$

Si $\|x\| = \|y\| = \delta$ esto implica $x = y$, lo que nos da la unicidad. Es fácil construir una sucesión $\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \subset M$ tal que $\lim\limits_n \|x_n\| = \delta$. Aplicando 9.1 a $x_m$ y $x_n$ concluimos fácilmente que la sucesión es de Cauchy, luego converge a un punto $x$ que, por continuidad de la norma, cumplirá $\|x\| = \delta$. Además, como $M$ es cerrado, ha de ser $x \in M$ y claramente su norma es la mínima en $M$. ■

**Teorema 9.66** *Sea $V$ un subespacio cerrado de un espacio de Hilbert $H$. Entonces*

1. *Todo $x \in H$ se descompone de forma única como $x = Px + Qx$, donde $Px \in V$, $Qx \in V^\perp$.*
2. *$Px$ y $Qx$ son los puntos de $V$ y $V^\perp$ más próximos a $x$.*
3. *Las aplicaciones $P : H \longrightarrow V$ y $Q : H \longrightarrow V^\perp$ son lineales y continuas.*
4. *$\|x\|^2 = \|Px\|^2 + \|Qx\|^2$.*

Demostración: El conjunto $x + V$ es cerrado y convexo, luego podemos definir $Qx$ como el elemento de norma mínima en $x + V$. Definimos $Px = x - Qx$. Obviamente $Px \in V$. Veamos que $Qx \in V^\perp$. Para ello probaremos que $(Qx) \cdot y = 0$ para todo $y \in V$. No perdemos generalidad si suponemos $\|y\| = 1$. Por definición de $Qx$ tenemos que

$$(Qx) \cdot (Qx) = \|Qx\|^2 \leq \|Qx - \alpha y\|^2 = (Qx - \alpha y) \cdot (Qx - \alpha y),$$

para todo $\alpha \in \mathbb{K}$. Simplificando queda

$$0 \leq -\alpha(y \cdot Qx) - \bar{\alpha}(Qx \cdot y) + \alpha\bar{\alpha},$$

y si hacemos $\alpha = (Qx) \cdot y$ queda $0 \leq -|(Qx) \cdot y|^2$, luego $(Qx) \cdot y = 0$.

Esto prueba la existencia de la descomposición de 1). La unicidad se debe a que $V \cap V^\perp = 0$.

Ahora observamos que si $y \in V$ entonces

$$\|x - y\|^2 = \|Qx + (Px - y)\|^2 = \|Qx\|^2 + \|Px - y\|^2,$$

luego la mínima distancia entre $x$ y un punto $y \in V$ se alcanza cuando $y = Px$. Esto prueba 2). El apartado 4) se debe a que

$$\|x\|^2 = \|Px\|^2 + \|Qx\|^2 + Px \cdot Qx + Qx \cdot Px = \|Px\|^2 + \|Qx\|^2.$$

La linealidad de $P$ y $Q$ es obvia y la continuidad se debe a que por 4) tenemos $\|Px\| \leq \|x\|$, $\|Qx\| \leq \|x\|$. ■

El teorema siguiente caracteriza los funcionales lineales continuos de un espacio de Hilbert:

**Teorema 9.67 (Riesz-Fréchet)** *Sea $H$ un espacio de Hilbert y $f : H \longrightarrow \mathbb{K}$ un funcional lineal continuo. Entonces existe un único $y \in H$ tal que $f(x) = x \cdot y$ para todo $x \in H$.*

Demostración: Si $f$ es la aplicación nula tomamos $y = 0$. En otro caso sea $V$ el núcleo de $f$, que será un subespacio cerrado propio de $H$. Por el teorema anterior $V^\perp \neq 0$, luego podemos tomar $z \in V^\perp$ con $\|z\| = 1$. Sea $u = f(x)z - f(z)x$. Como $f(u) = f(x)f(z) - f(z)f(x) = 0$, tenemos que $u \in V$, luego $u \cdot z = 0$. La definición de $u$ implica

$$f(x) = f(x)(z \cdot z) = f(z)(x \cdot z).$$

Tomando $y = \overline{f(z)}\, z$ resulta $f(x) = x \cdot y$.

La unicidad es obvia, pues si dos puntos $y$, $y'$ cumplen el teorema, entonces $y - y'$ es ortogonal a todo $x \in H$. ■

Con esto estamos en condiciones de establecer de forma canónica lo que es "casi" una isometría entre un espacio de Hilbert y su dual:

La aplicación $\phi : H \longrightarrow H'$ dada por $\phi(y)(x) = x \cdot y$ es biyectiva y cumple $\phi(y_1 + y_2) = \phi(y_1) + \phi(y_2)$, $\phi(\alpha y) = \bar{\alpha}\phi(y)$, por lo que si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ se trata de un isomorfismo de espacios vectoriales.

Además, se cumple que $\|\phi(y)\| = \|y\|$. En efecto, por la desigualdad de Schwarz 9.36:

$$|\phi(y)(x)| = \|x \cdot y\| \leq \|x\|\|y\|,$$

luego $\|\phi(y)\| \leq \|y\|$. Por otra parte, $\phi(y)(y) = \|y\|^2 \leq \|\phi(y)\|\|y\|$, luego $\|\phi(y)\| \geq \|y\|$.

Por lo tanto, si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ tenemos que $\phi$ es una inmersión isométrica. Más aún, podemos definir en $H'$ el producto escalar dado por

$$\phi(y_1)\phi(y_2) = y_2 \cdot y_1,$$

con el que $H'$ se convierte en un espacio de Hilbert (que induce la norma que ya tenemos definida en $H'$) y si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ resulta que $\phi : H \longrightarrow H'$ es un isomorfismo de espacios de Hilbert, es decir, un isomorfismo de espacios vectoriales que conserva el producto escalar.

**Nota** Cuando $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, en muchos casos particulares, este "isomorfismo conjugado" puede transformarse en un auténtico isomorfismo. Por ejemplo, en el caso de $\ell^2$, podemos definir $\bar{\phi} : \ell^2 \longrightarrow (\ell^2)'$ mediante $\bar{\phi}(x) = \phi(\bar{x})$, donde $\bar{x}$ es la sucesión que resulta de conjugar todos los términos de la sucesión dada $x$. Es claro que $\bar{\phi}$ es un isomorfismo de espacios de Hilbert. ■

Ahora es fácil concluir que todos los espacios de Hilbert son reflexivos, pues la inmersión canónica en el bidual $i : H \longrightarrow H''$ no es sino la composición de las biyecciones $H \xrightarrow{\phi_1} H' \xrightarrow{\phi_2} H''$ que tenemos definidas.

En efecto, si $y \in H$ y $f = \phi_1(x) \in H'$, tenemos que

$$\phi_2(\phi_1(y))(f) = \phi_1(x) \cdot \phi_1(y) = y \cdot x = \phi_1(x)(y) = f(y) = i_y(f).$$

Esto implica en particular que

$$i_x \cdot i_y = \phi_2(\phi_1(x)) \cdot \phi_2(\phi_1(y)) = \phi_1(y) \cdot \phi_1(x) = x \cdot y,$$

luego $i$ es, en efecto, un isomorfismo de espacios de Hilbert.

En los ejemplo A.55 y A.58 determinamos algunos espacios duales más. En la sección 9.2 mostramos otras aplicaciónes de los resultados que hemos obtenido sobre convergencia de series. 301

---

**El teorema de Hanh Banach** Para espacios normados, el teorema de Hahn-Banach admite la formulación siguiente:

**Teorema 9.68 (Hahn-Banach) (AE)** *Si $V$ es un espacio normado sobre $\mathbb{K}$ y $W \subset V$ es un subespacio vectorial, todo funcional lineal continuo $f : W \longrightarrow \mathbb{K}$ admite una extensión lineal continua $\bar{f} : V \longrightarrow \mathbb{K}$ tal que $\|\bar{f}\| = \|f\|$.*

Demostración: Podemos suponer que $f$ no es la aplicación nula. Entonces $g = f/\|f\|$ es una aplicación lineal que cumple $|g(x)| \leq \|x\|$ para todo $x \in W$, luego por el teorema anterior se extiende a una aplicación lineal $\bar{g} : V \longrightarrow \mathbb{K}$ tal que $|g(x)| \leq \|x\|$ para todo $x \in V$, luego $\|g\| \leq 1$ y $\bar{f} = \|f\|g$ cumple $\|\bar{f}\| \leq \|f\|$ y extiende a $f$. Esto implica a su vez que $\|\bar{f}\| = \|f\|$. ■

Como aplicación demostramos que la inmersión canónica de un espacio normado en su bidual es siempre isométrica:

**Teorema 9.69 (AE)** *Si $V$ es un espacio normado, la inyección natural en su bidual $i : V \longrightarrow V''$ es una inmersión isométrica.*

Demostración: Para cada $v \in V$, consideramos el subespacio vectorial $\langle v \rangle = \{\alpha v \mid \alpha \in \mathbb{K}\}$ y definimos un funcional lineal $f_0 : \langle v \rangle \longrightarrow \mathbb{K}$ mediante $f_0(\alpha v) = \alpha\|v\|$. Es obvio que $\|f_0\| = 1$, así como que $f_0(v) = \|v\|$. Por el teorema 9.68 existe $f \in V'$ tal que $f(v) = \|v\|$ y $\|f\| = 1$. Por consiguiente

$$\|v\| = |f(v)| = |i_v(f)| \leq \|i_v\|\|f\| = \|i_v\|,$$

luego de hecho $\|i_v\| = \|v\|$ y así $i$ es una inmersión isométrica. ■ 91

# Capítulo X

# Grupos topológicos

Introducimos ahora unas estructuras algebraico-topológicas más generales que la de los espacios normados, en las que la relación entre álgebra y topología se reduce a lo indispensable. Remitimos al apéndice B para los preliminares algebraicos sobre grupos que vamos a necesitar.

## 10.1 Definición y propiedades básicas

Un *grupo topológico* es un par $(G, \mathcal{T})$, donde $G$ es un grupo y $\mathcal{T}$ es una topología en $G$ respecto de la cual las operaciones

$$\cdot : G \times G \longrightarrow G \qquad \text{y} \qquad (\ )^{-1} : G \longrightarrow G$$

son continuas.

En la práctica, como es habitual, no mencionaremos expresamente la topología de los grupos topológicos.

Un *isomorfismo topológico* entre dos grupos topológicos es un isomorfismo de grupos que además es un homeomorfismo. Si existe un isomorfismo topológico entre dos grupos topológicos se dice que son *topológicamente isomorfos*.

Es inmediato que si $V$ es un espacio vectorial topológico, entonces $(V, +)$ es un grupo topológico, pues la aplicación $v \mapsto -v$ es también continua, ya que es la composición de la aplicación continua $v \mapsto (-1, v)$ con el producto por escalares, que es continuo.

**Ejemplos** Del teorema 9.41 se desprende que si $K$ es un cuerpo métrico, entonces $(K^*, \cdot)$ es un grupo topológico.

Es obvio que todo subgrupo de un grupo topológico es a su vez un grupo topológico con la topología relativa y la restricción del producto del grupo.

Si $\{G_i\}_{i\in I}$ es una familia de grupos topológicos el producto $\prod\limits_{i\in I} G_i$ es también un grupo topológico con la topología producto.

Por ejemplo, para probar la continuidad del producto

$$\prod_{i\in I} G_i \times \prod_{i\in I} G_i \longrightarrow \prod_{i\in I} G_i$$

basta probar que son continuas las composiciones con las proyecciones, pero entonces tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\prod\limits_{i\in I} G_i \times \prod\limits_{i\in I} G_i \arrow[r] \arrow[d] & \prod\limits_{i\in I} G_i \arrow[d] \\
G_i \times G_i \arrow[r] & V_i
\end{tikzcd}$$

donde la proyección de la izquierda y el producto/suma de la fila inferior son aplicaciones continuas.

El *producto directo* $\coprod\limits_{i\in I} G_i$ de una familia $\{G_i\}_{i\in I}$ de grupos topológicos se define como el subgrupo del producto $\prod\limits_{i\in I} G_i$ formado por las funciones que toman el valor 1 salvo a lo sumo en una cantidad finita de índices. Es inmediato que ciertamente es un subgrupo y es denso en $\prod\limits_{i\in I} V_i$, pues claramente corta a todo abierto básico no vacío. ■

Si $G$ es un grupo topológico y $X$ es cualquier espacio topológico, el conjunto $C(X,G)$ de las aplicaciones continuas $f : X \longrightarrow G$ resulta ser un subgrupo del grupo $G^X$ de todas las aplicaciones de $X$ en $G$.

En efecto, esto significa que si $f, g : X \longrightarrow G$ son continuas, también lo es su producto, dado por $(fg)(x) = f(x)g(x)$ y la aplicación inversa $f^{-1}(x) = f(x)^{-1}$. Esto se debe a que $fg$ es la composición de la aplicación continua $x \mapsto (f(x), g(x))$ con el producto en $G$, que es continuo, e igualmente $f^{-1}$ es la composición de $f$ con la aplicación continua $u \mapsto u^{-1}$.

Si $G$ es un grupo, cada $g \in G$ determina una *traslación por la derecha* $G \longrightarrow G$, dada por $x \mapsto xg$ y una *traslación por la izquierda* dada por $x \mapsto gx$. Obviamente, si $G$ es abeliano ambas coinciden.

Si $G$ es un grupo topológico, las traslaciones son homeomorfismos, pues son continuas (son la composición de la aplicación continua $x \mapsto (x, g)$ con el producto en el grupo) y la inversa de la traslación $x \mapsto xg$ es la traslación $x \mapsto xg^{-1}$, luego también es continua.

La definición de grupo topológico pide que la aplicación $g \mapsto g^{-1}$ sea continua, pero de hecho es un homeomorfismo, pues es su propia inversa.

El hecho de que las traslaciones sean homeomorfismos hace que la topología de un grupo topológico esté completamente determinada por los entornos de 1. Más concretamente, si $U \subset G$ es un entorno de 1, se cumple que

$$gU = \{gu \mid u \in U\} \qquad \text{y} \qquad Ug = \{ug \mid u \in U\}$$

son entornos de $g$ (pues son las imágenes de $U$ por las traslaciones izquierda y derecha), y cualquier entorno de $g$ es de cualquiera de estas dos formas.

Esto se aplica en particular a los espacios vectoriales topológicos y, más en particular, a los espacios normados, en los cuales se cumple, concretamente, que $x + B_\epsilon(0) = B_\epsilon(x)$.

El teorema siguiente es un ejemplo de cómo aprovechar que las traslaciones son homeomorfismos:

**Teorema 10.1** *Sea $f : G \longrightarrow H$ un homomorfismo de grupos topológicos. Entonces $f$ es una aplicación continua (resp. abierta) si y sólo si es continua (resp. abierta[1]) en* $1$.

Demostración: Si $f$ es continua en $1$ y $g \in G$, sea $U$ un entorno de $f(g)$. Entonces $Uf(g)^{-1}$ es un entorno de $f(1) = 1$, luego $f^{-1}[Uf(g)^{-1}] = f^{-1}[U]g^{-1}$ es un entorno de $1 \in G$, luego $f^{-1}[U]$ es un entorno de $g$. Esto prueba que $f$ es continua en $g$ y, como $g$ es arbitrario, que es continua. El razonamiento para aplicaciones abiertas es análogo. ■

En vista de la relevancia de los entornos de $1$ conviene analizar sus propiedades con más detalle. Si $A$, $B \subset G$, usamos la notación

$$AB = \{ab \mid a \in A, b \in B\}, \qquad A^{-1} = \{a^{-1} \mid a \in A\}.$$

**Teorema 10.2** *Si $G$ es un grupo topológico y $U$ es un entorno de $1$, se cumple:*

1. *Existe otro entorno $V$ de $1$ tal que $VV \subset U$.*
2. *Existe otro entorno $V$ de $1$ tal que $V^{-1} \subset U$.*
3. *Si $a \in G$, existe otro entorno $V$ de $1$ tal que $a^{-1}Va \subset U$.*

Demostración: 1) Como $1 \cdot 1 = 1$, la antiimagen de $U$ en $G \times G$ por el producto en $G$ es un entorno de $(1, 1)$, luego contiene un abierto de la forma $V \times V$, y es claro que $V$ cumple lo requerido. La prueba de 2) es análoga, considerando ahora la aplicación $g \mapsto g^{-1}$. Para 3) consideramos la *conjugación* $x \mapsto a^{-1}xa$, que también es continua (es un homeomorfismo, de hecho) y deja fijo al $1$. ■

El caso es que estas propiedades, junto con otra que obviamente deben cumplir los elementos de una base de entornos de $1$, son suficientes para definir una topología en un grupo:

**Teorema 10.3** *Sea $G$ un grupo y $\mathcal{U}$ una familia de subconjuntos de $G$ no vacíos tales que:*

1. *Si $U, V \in \mathcal{U}$, existe $W \in \mathcal{U}$ tal que $W \subset U \cap V$.*
2. *Si $U \in \mathcal{U}$ existe $V \in \mathcal{U}$ tal que $VV \subset U$.*
3. *Si $U \in \mathcal{U}$, existe $V \in \mathcal{U}$ tal que $V^{-1} \subset U$.*
4. *Si $U \in \mathcal{U}$ y $a \in G$, existe $V \in \mathcal{U}$ tal que $a^{-1}Va \subset U$.*

*Entonces existe una única topología en $G$ con la que $G$ es un grupo topológico y $\mathcal{U}$ es una base de entornos de* $1$.

[1] Esto ha de entenderse como que la imagen de todo entorno abierto de 1 es abierta.

DEMOSTRACIÓN: Observemos en primer lugar que todo $U \in \mathcal{U}$ cumple $1 \in U$. En efecto, tomamos $V \in \mathcal{U}$ tal que $VV \subset U$, luego $W \in \mathcal{U}$ tal que $W^{-1} \subset V$ y finalmente $X \in \mathcal{U}$ tal que $X \subset V \cap W$. Entonces, si $g \in X$, tenemos que $g^{-1} \in W^{-1} \subset V$ y $1 = gg^{-1} \in VV \subset U$.

Definimos $\mathcal{T}$ como el conjunto de todos los subconjuntos $X$ de $G$ tales que para todo $x \in X$ existe $V \in \mathcal{U}$ tal que $xV \subset X$. Es inmediato que se trata de una topología en $G$. Veamos que, para todo $g \in G$, la familia $g\mathcal{U} = \{gU \mid U \in \mathcal{U}\}$ es una base de entornos de $g$.

Si $U \in \mathcal{U}$, como $1 \in U$, tenemos que $g \in gU$. Sea

$$X = \{x \in gU \mid xW \subset gU \text{ para cierto } W \in \mathcal{U}\}.$$

Claramente $g \in X \subset gU$. Vamos a probar que $X$ es abierto. Si $x \in X$, existe un $W \in \mathcal{U}$ tal que $xW \subset gU$, y podemos tomar $V \in \mathcal{U}$ tal que $VV \subset W$. Así $xV \subset X$, pues si $y \in xV$ tenemos que $yV \subset gU$, pues $y = xv$, para cierto $v \in V$ y $y = xv \in xvV \subset xW \subset gU$. Esto prueba que $X \in \mathcal{T}$, luego $gU$ es un entorno de $g$.

Recíprocamente, si $V$ es un entorno de $g$, existe $X \in \mathcal{T}$ tal que $g \in X \subset V$, luego existe un $V \in \mathcal{U}$ tal que $gV \subset X$. Por lo tanto, $g\mathcal{U}$ es ciertamente una base de entornos de $g$.

Veamos finalmente que $G$ es un grupo topológico con la topología que hemos definido. Para ello probaremos que la aplicación $f : G \times G \longrightarrow G$ dada por $f(x, y) = xy^{-1}$ es continua. Haciendo $x = 1$ de aquí se sigue la continuidad de $y \mapsto y^{-1}$ y de aquí se sigue a su vez la del producto.

Fijamos un punto $(x, y) \in G \times G$ y tomamos $U \in \mathcal{U}$, de modo que $xy^{-1}U$ es un entorno básico arbitrario de $xy^{-1}$. Por la propiedad 4) aplicada a $y^{-1}$ obtenemos $W \in \mathcal{U}$ tal que $Wy^{-1} \subset y^{-1}U$. A su vez podemos tomar $V \in \mathcal{U}$ tal que $VV^{-1} \subset W$. Entonces $xV \times yV$ es un entorno de $(x, y)$ y

$$f[xV \times yV] = xVV^{-1}y^{-1} \subset xWy^{-1} \subset xy^{-1}U.$$

Esto prueba la continuidad de $f$ en $(x, y)$.

La unicidad se debe a que si dos topologías $\mathcal{T}_1$ y $\mathcal{T}_2$ en $G$ tienen la misma base de entornos de 1, entonces la identidad $(G, \mathcal{T}_1) \longrightarrow (G, \mathcal{T}_2)$ es continua en 1, luego es continua en $G$ por 10.1, y lo mismo vale intercambiando las topologías, luego la identidad es un homeomorfismo y ambas topologías son la misma. ■

**Nota** La propiedad 3) se cumple automáticamente si los elementos de $\mathcal{U}$ cumplen $V = V^{-1}$. Un subconjunto de un espacio vectorial que cumpla esta propiedad se dice "equilibrado", y es inmediato que todo entorno $U$ de 1 en un grupo topológico contiene un entorno de 1 equilibrado, a saber $U \cap U^{-1}$. ■

Un grupo topológico puede tener subgrupos abiertos, como es el caso de $\mathbb{R}^*$, que tiene como subgrupo abierto al intervalo $]0, +\infty[$. Notemos que también es cerrado, y esto no es casual:

**Teorema 10.4** *Todo subgrupo abierto de un grupo topológico es también cerrado.*

DEMOSTRACIÓN: Si $H$ es un subgrupo abierto de un grupo topológico $G$ y $g \in G \setminus H$, entonces $gH \subset G \setminus H$, pues si $h \in gH \cap H$, serís $h = gh'$, con $h' \in H$, luego $g = hh'^{-1} \in H$. Por lo tanto, $G \setminus H$ es abierto. ■

**Teorema 10.5** *Un subgrupo de un grupo topológico es abierto si y sólo si tiene interior no vacío.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $G$ un grupo topológico, sea $H$ un subgrupo con interior no vacío y sea $U \subset H$ un abierto no vacío. Si $u \in U$ y $h \in H$, entonces $hu^{-1}U \subset H$ es un entorno de $h$, luego $H$ es abierto. ■

Por otra parte, los subgrupos no tienen por qué ser cerrados. Por ejemplo, un producto directo de infinitos grupos topológicos es denso en el producto, luego no es cerrado, pues no coincide con el producto.

## 10.2 Las estructuras uniformes

Veamos ahora que todo grupo topológico admite cuatro estructuras naturales de espacio uniforme, definidas sin relación con métrica alguna, por lo que constituyen un ejemplo de cómo el concepto de espacio uniforme permite reducir a un mismo esquema general dos contextos aparentemente no relacionados:

**Definición 10.6** Si $G$ es un grupo topológico, definimos las *uniformidades izquierda, derecha, superior* (o *bilátera*) e *inferior* $\mathcal{U}_G^i$, $\mathcal{U}_G^d$, $\mathcal{U}_G$ y $\mathcal{U}_G^{id}$ como las uniformidades que tienen por base, respectivamente, las bandas

1. $V_U^i = \{(x, y) \in G \times G \mid x^{-1}y \in U\}$,
2. $V_U^d = \{(x, y) \in G \times G \mid xy^{-1} \in U\}$,
3. $V_U = \{(x, y) \in G \times G \mid x^{-1}y \in U,\ xy^{-1} \in U\}$,
4. $V_U^{id} = \{(x, y) \in G \times G \mid \text{existen } u, u' \in U \text{ tales que } xu = u'y\}$,

donde $U$ recorre los entornos equilibrados de 1.

Las cuatro familias de bandas son bases de uniformidades en $G$, pues cumplen

$$V^*_{U\cap U'} \subset V^*_U \cap V^*_{U'}, \qquad 2V^*_W \subset V^*_U,$$

donde $W$ es un entorno de 1 equilibrado tal que $WW \subset U$. Además:

$$B_{V_U^i}(x) = xU, \quad B_{V_U^d}(x) = Ux, \quad B_{V_U}(x) = xU \cap Ux, \quad B_{V_U^{id}}(x) = UxU,$$

y, cuando $U$ recorre los entornos equilibrados de 1, las cuatro familias forman[2] una base de entornos de $x$ respecto de la topología de $G$, luego las cuatro uniformidades inducen la topología de $G$.

[2]En el caso de los conjuntos $UxU$, consideramos la aplicación continua $f : G\times G\times G \longrightarrow G$ dada por $f(x, y, z) = xyz$, que cumple $f(1, x, 1) = x$, por lo que si $V$ es un entorno de $x$, entonces $f^{-1}[V]$ es un entorno de $(1, x, 1)$, que puede tomarse de la forma $U \times G \times U$, con lo que $UxU = f[U \times \{x\} \times U] \subset V$.

Es claro que las cuatro uniformidades coinciden cuando el grupo $G$ es abeliano. En realidad, las uniformidades que uno consideraría "naturalmente" en primera instancia en un grupo topológico $G$ son la izquierda y la derecha, pero veremos que al estudiar la relación entre ambas en grupos no abelianos llegamos pronto a la necesidad de considerar la uniformidad superior y, menos evidentemente, también la inferior. El teorema siguiente proporciona la relación entre ellas:

**Teorema 10.7** *Si $G$ es un grupo topológico, entonces:*

1. *$\mathcal{U}_G$ es la menor uniformidad en $G$ que contiene a $\mathcal{U}_G^i \cup \mathcal{U}_G^d$.*
2. *$\mathcal{U}_G^{id}$ es la mayor uniformidad en $G$ contenida en $\mathcal{U}_G^i \cap \mathcal{U}_G^d$.*

Demostración: Claramente $V_U = V_U^i \cap V_U^d$, de donde se sigue inmediatamente la primera afirmación. Para probar la segunda observamos que $V_G^i \cup V_G^d \subset V_G^{id}$, de donde $\mathcal{U}_G^{id} \subset \mathcal{U}_G^i \cap \mathcal{U}_G^d$.

Supongamos ahora que $\mathcal{U} \subset \mathcal{U}_G^i \cap \mathcal{U}_G^d$ es una uniformidad en $G$, tomemos $V \in \mathcal{U}$ y sea $W \in \mathcal{U}$ tal que $2W \subset V$. Sea $U$ un entorno equilibrado de 1 tal que $V_U^i \cup V_G^d \subset W$. Veamos que $V_U^{id} \subset V$, con lo que $V \in \mathcal{U}_G^{id}$.

En efecto, si $(x, y) \in V_U^{id}$, existen $u$, $u' \in U$ tales que $xu = u'y$, luego $(xu, y) \in V_U^d \subset W$ y $(x, xu) = (x, u'y) \in V_U^i \subset W$, luego $(x, y) \in 2W \subset V$. ■

Salvo que se indique lo contrario, consideraremos a cada grupo topológico $G$ como espacio uniforme con la uniformidad bilátera $\mathcal{U}_G$. Cuando queramos considerar la uniformidad izquierda, la derecha o la inferior lo indicaremos escribiendo $G_i$, $G_d$ o $G_{id}$.

El teorema anterior implica que si $U_G^i = U_G^d$, las cuatro uniformidades coinciden, y esto sucede trivialmente si $G$ es abeliano (en particular en los espacios vectoriales topológicos), pero también en otros casos, como cuando $G$ es discreto, pues entonces la uniformidad izquierda y la derecha se reducen a la uniformidad discreta.

Es claro que si $H$ es un subgrupo de un grupo topológico $G$, la restricción a $H$ (en el sentido del teorema 2.9) de las uniformidades izquierda, derecha o bilátera de $G$ es la uniformidad correspondiente de $H$. Igualmente se comprueba que cualquiera de las cuatro uniformidades en un producto $\prod\limits_{i \in I} G_i$ es el producto de las uniformidades correspondientes.

Merece la pena escribir explícitamente a qué se reduce la continuidad uniforme de una aplicación $f : G \longrightarrow H$ entre dos grupos topológicos. Respecto a las uniformidades izquierdas es:

> *Para todo entorno equilibrado $U$ de 1 en $H$ existe un entorno equilibrado $V$ de 1 en $G$ de modo que si $x$, $y \in G$ cumplen $x^{-1}y \in V$, entonces $f(x)^{-1}f(y) \in U$.*

Para la uniformidad derecha es:

> *Para todo entorno equilibrado $U$ de 1 en $H$ existe un entorno equilibrado $V$ de 1 en $G$ de modo que si $x$, $y \in G$ cumplen $xy^{-1} \in V$, entonces $f(x)f(y)^{-1} \in U$.*

La continuidad uniforme para las uniformidades biláteras se reduce a que $f$ cumpla simultáneamente ambas condiciones. Para la uniformidad inferior es:

> *Para todo entorno equilibrado $U$ de 1 en $H$ existe un entorno equilibrado $V$ de 1 en $G$ de modo que si $x$, $y \in G$ cumplen $xv = v'y$, con $v, v' \in V$, entonces existen $u$, $u' \in U$ tales que $f(x)u = u'f(y)$.*

A partir de estas expresiones es inmediato el teorema siguiente:

**Teorema 10.8** *Todo homomorfismo continuo $f : G \longrightarrow H$ entre grupos topológicos es uniformemente continuo cuando en $G$ y en $H$ se considera cualquiera de las cuatro uniformidades que hemos definido (la misma en ambos).*

Demostración: En efecto, si $U$ es un entorno equilibrado de 1 en $H$, podemos tomar un entorno equilibrado $V$ de 1 en $G$ tal que $V \subset f^{-1}[U]$, y es claro que $V$ cumple la definición de continuidad uniforme. ■

En particular, toda aplicación lineal continua entre espacios vectoriales topológicos es uniformemente continua.

Observemos que si $G$ es un grupo abeliano, el producto $(x, y) \mapsto xy$ es un homomorfismo de grupos, por lo que es uniformemente continuo. Para grupos no abelianos no tiene por qué serlo, pero no es necesario que el grupo sea abeliano para que lo sea. En general se cumple lo siguiente:

**Teorema 10.9** *Si $G$ es un grupo topológico, el producto en $G$ es una aplicación uniformemente continua $G_d \times G_i \longrightarrow G_{id}$.*

Demostración: Sea $U$ un entorno equilibrado de 1 en $G$. Una banda básica de $G_d \times G_i$ es

$$V = \{((g_1, g_2), (g_1', g_2')) \in (G_d \times G_i) \times (G_d \times G_i) \mid (g_1, g_1') \in V_U^d, (g_2, g_2') \in V_U^i\}.$$

Basta probar que si $d((g_1, g_2), (g_1', g_2')) < V$, entonces $d(g_1g_2, g_1'g_2') < V_U^{id}$. En efecto, tenemos que $g_1 = vg_1'$ y $g_2 = g_2'v'$, luego $g_1g_2 = vg_1'g_2'v'$, y esto equivale a $d(g_1g_2, g_1'g_2') < V_U^{id}$. ■

Por lo tanto, basta con que $\mathcal{U}_G^i = \mathcal{U}_G^d$ para que el producto sea uniformemente continuo. Vamos a caracterizar los grupos en los que se da esta igualdad. Para ello probamos primero lo siguiente:

**Teorema 10.10** *Si $G$ es un grupo topológico y $U$, $W$ son entornos equilibrados de 1, las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

1. $V_U^d \subset V_W^i$.
2. $V_U^i \subset V_W^d$.
3. $\bigcup\limits_{x\in G} x^{-1}Ux \subset W$.

DEMOSTRACIÓN: Veamos que 1) $\Leftrightarrow$ 3). La equivalencia con 2) es análoga. Si $V^d_U \subset V^i_W$, tomemos $y \in x^{-1}Ux$, de modo que existe $u \in U$ tal que $y = x^{-1}ux$, luego $xy = ux$, luego $(xy, x) \in V^d_U \subset V^i_W$, luego existe $w \in W$ tal que $xy = xw$, luego $y = w \in W$.

Recíprocamente, si se cumple 3) y $(x, y) \in V^d_U$, existe un $u \in U$ tal que $y = ux$, luego $x^{-1}y = x^{-1}ux \in x^{-1}Ux \subset W$, luego $(x, y) \in V^i_W$. ■

Con esto podemos probar:

**Teorema 10.11** *Si $G$ es un grupo topológico, las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

1. $\mathcal{U}^i_G = \mathcal{U}^d_G$.
2. $\mathcal{U}^i_G \subset \mathcal{U}^d_G$.
3. $\mathcal{U}^d_G \subset \mathcal{U}^i_G$.
4. *Para todo entorno de* 1 *equilibrado $W$, existe otro entorno de* 1 *equilibrado $U$ tal que* $\bigcup_{x\in G} x^{-1}Ux \subset W$.
5. *Para todo entorno de* 1 *equilibrado $W$, la intersección* $\bigcap_{x\in G} x^{-1}Wx$ *es un entorno de* 1 *equilibrado.*
6. *Para todo entorno de* 1 *equilibrado $W$, existe otro entorno de* 1 *equilibrado $U \subset W$ tal que $x^{-1}Ux = U$ para todo $x \in G$.*

DEMOSTRACIÓN: Veamos que 2) $\Leftrightarrow$ 4). Si se cumple 2) y $W$ es un entorno de 1 equilibrado, tenemos que $V^i_W \in \mathcal{U}^i_G \subset \mathcal{U}^d_G$, luego existe un entorno de 1 equilibrado $U$ tal que $V^d_U \subset V^i_W$. Por el teorema anterior se cumple 4). El recíproco es análogo.

Igualmente se prueba que 3) $\Leftrightarrow$ 4), luego 2) $\Leftrightarrow$ 3) y entonces es claro que ambas afirmaciones equivalen a 1).

4) $\Rightarrow$ 5) Dado $W$, tomamos $U$ que cumpla 4) y entonces $U \subset \bigcap_{x\in G} x^{-1}Wx$.

5) $\Rightarrow$ 4) Dado $W$, tomamos $U = \bigcap_{x\in G} x^{-1}Wx$ y se cumple 4).

6) $\Rightarrow$ 4) es trivial. Para probar 4) $\Rightarrow$ 6) tomamos $W$, consideramos el entorno $U$ dado por 4) y entonces $U' = \bigcup_{x\in G} x^{-1}Ux \subset W$ cumple 6). ■

La última condición se expresa diciendo que $G$ *tiene entornos invariantes pequeños.*

Consideremos ahora la aplicación $x \mapsto x^{-1}$:

**Teorema 10.12** *Si $G$ es un grupo topológico, $(\ )^{-1} : G_i \longrightarrow G_d$ es un homeomorfismo uniforme y $(\ )^{-1} : G_i \longrightarrow G_i$ es uniformemente continua si y sólo si se cumple $\mathcal{U}^i_G = \mathcal{U}^d_G$.*

Demostración: La primera parte es inmediata sin más que tener en cuenta que
$$d(x,y) < V_U^i \leftrightarrow d(x^{-1},y^{-1}) < V_U^d.$$
Esto nos da a su vez una implicación de la segunda parte del enunciado. Si $x \mapsto x^{-1}$ es uniformemente continua respecto a la uniformidad izquierda, esto significa que para cada entorno de 1 equilibrado $W$ existe otro entorno equilibrado $U$ tal que $d(x,y) < V_U^i$ implica que $d(x^{-1},y^{-1}) < V_W^i$, que a su vez equivale a $d(x,y) < V_W^d$. Por lo tanto, $V_U^i \subset V_W^d$, y esto prueba que $\mathcal{U}_G^d \subset \mathcal{U}_G^i$, luego por el teorema anterior se da la igualdad. ■

Notemos que si una aplicación es uniformemente continua como aplicación $G \longrightarrow G$, también lo es como aplicación $G_i \longrightarrow G_i$, luego el teorema anterior prueba que $x \mapsto x^{-1}$ no es uniformemente continua (respecto de la uniformidad bilátera) salvo que $\mathcal{U}_G^i = \mathcal{U}_G^d$.

**Nota** La aplicación $f : ]0,+\infty[ \longrightarrow ]0,+\infty[$ dada por $f(x) = 1/x$ es uniformemente continua respecto a la uniformidad inducida por la estructura de grupo topológico de $]0,+\infty[$ con el producto de números reales, pero es fácil ver que no lo es respecto de la uniformidad inducida desde $\mathbb{R}$ (la inducida por la estructura de grupo con la suma). Por lo tanto, tenemos otro ejemplo de dos uniformidades distintas que inducen la misma topología. ■

Finalmente consideramos las traslaciones:

**Teorema 10.13** *Si $G$ es un grupo topológico y $a$, $b \in G$, entonces la aplicación $f : G \longrightarrow G$ dada por $f(x) = axb$ es un homeomorfismo uniforme cuando consideramos en $G$ cualquiera de las cuatro uniformidades izquierda, derecha, superior o inferior (la misma en ambos casos).*

Demostración: Consideremos primero la uniformidad izquierda. Dado un entorno de 1 equilibrado $U$, llamamos $W = bUb^{-1}$, que es también un entorno de 1 equilibrado y, si $d(x,y) < V_W^i$, entonces
$$f(x)^{-1}f(y) = b^{-1}x^{-1}yb \in b^{-1}Wb \subset U,$$
luego $d(f(c),f(y)) < V_U^i$.

La prueba para la uniformidad derecha es análoga, y el hecho de que $f$ sea uniformemente continua respecto de ambas uniformidades implica que también lo es respecto de la uniformidad superior. En el caso de la inferior, dado el entorno $U$, definimos $W = a^{-1}Ua \cap bUb^{-1}$, que también es un entorno de 1 equilibrado, y si $d(x,y) < V_W^{id}$, existen $w$, $w' \in W$ tales que $xw = w'y$, luego
$$axbb^{-1}wb = aw'a^{-1}ayb$$
luego $f(x)b^{-1}wb = aw'a^{-1}f(y)$, luego $f(x)u = u'f(y)$, con $u = b^{-1}wb \in U$, $u' = aw'a^{-1} \in U$, luego $d(f(x),f(y)) < V_U^{id}$. ■

Terminamos esta sección mostrando algunas consecuencias del hecho de que los grupos topológicos sean uniformizables. Por ejemplo, el teorema 2.13 nos da inmediatamente:

**Teorema 10.14** *Si $G$ es un grupo topológico y $X \subset G$, entonces*

$$\overline{X} = \bigcap_U XU = \bigcap_U UX = \bigcap_U UXU,$$

*donde $U$ recorre los entornos abiertos de* 1.

Basta observar que $V_U^i[X] = XU$, $V_U^d[X] = UX$, $V_U^{id}[X] = UXU$.

De aquí podemos extraer varias consecuencias:

**Teorema 10.15** *Todo grupo topológico tiene una base de entornos de* 1 *cerrados.*

Demostración: Sea $G$ un grupo topológico y $U$ un entorno de 1. Sea $V$ otro entorno tal que $VV \subset U$. Por el teorema anterior $\overline{V} \subset VV \subset U$ y $\overline{V}$ es un entorno cerrado de 1. ■

**Teorema 10.16** *Si $G$ es un grupo topológico, las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

1. *$G$ es un espacio de Hausdorff.*
2. *$\{1\}$ es cerrado en $G$.*
3. *$\bigcap_U U = \{1\}$, donde $U$ recorre los entornos de* 1.

Demostración: El hecho de que las traslaciones sean invariantes implica claramente que $\{1\}$ es cerrado si y sólo si todos los puntos son cerrados, es decir, si y sólo si $G$ cumple la propiedad $T_1$. Y el teorema 2.10 nos da que esto equivale a que $G$ tenga la propiedad de Hausdorff. Esto prueba que 1) $\Leftrightarrow$ 2), mientras que 2) $\Leftrightarrow$ 3) se sigue del teorema 10.14 aplicado a $X = \{1\}$. ■

**Teorema 10.17** *La clausura de un subgrupo en un grupo topológico es también un subgrupo.*

Demostración: Sea $G$ un grupo topológico y $H$ un subgrupo de $G$. Sean $g_1$, $g_2 \in \overline{H}$ y sean $U$, $V$ entornos de 1. El teorema 10.14 nos da que $g_1 = uh_1$, $g_2 = h_2 v$, con $h_1$, $h_2 \in H$, $u \in U$, $v \in V$, luego $g_1 g_2 = uh_1h_2v \in UHV$, para todo $U$, $V$, luego $g_1g_2 \in \overline{H}$.

Similarmente, dado $g \in \overline{H}$ y un entorno $U$ de 1, tenemos que $U^{-1}$ es un entorno de 1, luego $g = u^{-1}h$, con $u \in U$ y $h \in H$, luego $g^{-1} = h^{-1}u \in HU$, para todo $U$, luego $g^{-1} \in \overline{H}$.

En el caso de un espacio vectorial topológico $V$ y un subespacio $W$ tenemos además que si $v \in \overline{W}$ y $\alpha \in K$ no es nulo, entonces, para todo entorno $U$ de 0, también $\alpha^{-1}U$ es un entorno de 0, luego $v = w + \alpha^{-1}u$, con $w \in W$ y $u \in U$, luego $\alpha v = \alpha w + u \in W + U$, para todo $U$, luego $\alpha v \in \overline{W}$. ■

A partir de aquí el lector puede pasar a la sección 11.1, donde se introducen los espacios vectoriales topológicos. 385

## 10.3 Pseudométricas invariantes

Veamos que las las pseudométricas que generan las uniformidades de un grupo topológico pueden tomarse invariantes por traslaciones en el sentido siguiente:

**Definición 10.18** Una pseudométrica $\rho : G \times G \longrightarrow \mathbb{R}$ en un grupo $G$ es *invariante por la izquierda* (resp. *por la derecha*) si $\rho(gx, gy) = \rho(x, y)$ (resp. $\rho(xg, yg) = \rho(x, y)$) para todo $x, y, g \in G$. Diremos que es *invariante* si lo es por ambos lados.

Sólo tenemos que observar que, si en el teorema 2.24 partimos de bandas $V_n$ invariantes por la izquierda (o por la derecha, o por ambos lados), es decir, tales que $(x, y) \in V_n$ si y sólo si $(gx, gy) \in V_n$ (resp. $(xg, yg) \in V_n$ o las dos condiciones a la vez) la pseudométrica obtenida es invariante por la izquierda (o por la derecha o por ambos lados).

En efecto, recordemos la construcción de $\rho$:

> Dado un par $(x, y) \in X \times X$ consideramos todas las sucesiones finitas $x_0, \ldots, x_k$ de puntos de $X$ tales que $x_0 = x$, $x_k = y$. Definimos $\rho(x, y)$ como el ínfimo de las cantidades $1/2^{i_1} + \cdots + 1/2^{i_k}$ tales que $(x_{j-1}, x_j) \in V_{i_j}$.

Vemos que la aplicación $(x_0, \ldots, x_n) \mapsto (gx_0, \ldots, gx_k)$ biyecta las sucesiones finitas que cumplen $x_0 = x$, $x_k = y$ con las que cumplen $x_0 = gx$, $x_k = gy$, y la condición $(x_{j-1}, x_j) \in V_{i_j}$ equivale a $(gx_{j-1}, gx_j) \in V_{i_j}$ (o a $(x_{j-1}g, x_jg) \in V_{i_j}$), por lo que $\rho(gx, gy) = \rho(x, y)$ (resp. $\rho(xg, yg) = \rho(x, y)$).

Por otra parte, las bandas $V_U^i$ (resp. $V_U^d$) son trivialmente invariantes por la izquierda (resp. por la derecha) y, si se cumple $\mathcal{U}_G^i = \mathcal{U}_G^d$, el teorema 10.11 nos da que $G$ tiene una base de entornos de 1 tales que $xU = Ux$, para todo $x \in G$ y para estos entornos $V_U^i = V_U^d$ es invariante por ambos lados.

Por lo tanto, si en el teorema 2.25 partimos de una banda $V$ que sea básica para $\mathcal{U}_G^i$ o $\mathcal{U}_G^d$, en la demostración podemos completar la sucesión con más bandas básicas, con lo que todas son invariantes (por el lado correspondiente), con lo que la pseudométrica $\rho$ obtenida es también invariante por la izquierda, o por la derecha, o por ambos lados si $\mathcal{U}_G^i = \mathcal{U}_G^d$.

Teniendo esto en cuenta, el teorema 2.26 admite la versión siguiente para grupos topológicos:

**Teorema 10.19** *Si $G$ es un grupo topológico, las uniformidades $\mathcal{U}_G^i$ y $\mathcal{U}_G^d$ están generadas por sus pseudométricas continuas invariantes por la izquierda o por la derecha, respectivamente, o por las pseudométricas continuas invariantes si se cumple $\mathcal{U}_G^i = \mathcal{U}_G^d$.*

El enunciado del teorema anterior aporta algo frente al de 2.26, y es que en principio deberíamos haber dicho "pseudométricas uniformes" en lugar de "pseudométricas continuas", pero el teorema siguiente justifica el enunciado:

**Teorema 10.20** *Si $G$ es un grupo topológico y $\rho : G \times G \longrightarrow \mathbb{R}$ es una pseudométrica continua invariante por la izquierda (resp. por la derecha) entonces $\rho$ es uniforme para la uniformidad izquierda (resp. derecha) de $G$.*

DEMOSTRACIÓN: Dado $\epsilon > 0$, tenemos que probar que existe un entorno equilibrado $U$ de 1 en $G$ tal que si $d(x, y) < V_U^i$ entonces $\rho(x, y) < \epsilon$ (el argumento por la derecha es análogo). Por la continuidad existe un entorno equilibrado $U$ tal que si $(x, y) \in B_{V_U^i}(1) \times B_{V_U^i}(1)$ entonces $\rho(x, y) < \epsilon$. Entonces, si $d(x, y) < V_U^i$, tenemos que $x^{-1}y \in U$, luego $\rho(y^{-1}x, 1) < \epsilon$ y, por la invarianza de $\rho$, concluimos que $\rho(x, y) < \epsilon$. ■

El teorema 2.27 puede refinarse como sigue:

**Teorema 10.21** *Si $G$ es un grupo topológico (de Hausdorff), las uniformidades $\mathcal{U}_G^i$ y $\mathcal{U}_G^d$ son pseudometrizables (metrizables) si y sólo si $G$ tiene una base numerable de entornos de 1, y en tal caso la pseudométrica (métrica) que genera la uniformidad puede tomarse invariante por la izquierda o la derecha, respectivamente, o invariante si $\mathcal{U}_G^i = \mathcal{U}_G^d$.*

DEMOSTRACIÓN: Si $G$ tiene una base numerable $\{U_n\}_{n=0}^\infty$ de entornos de 1, entonces las uniformidades izquierda y derecha de $G$ tienen bases numerables $\{V_{U_n}^i\}_{n=0}^\infty$, $\{V_{U_n}^d\}_{n=0}^\infty$, respectivamente, luego por 2.27 tenemos que son pseudometrizables (metrizables) y, por las consideraciones precedentes, la pseudométrica (métrica) generadora puede tomarse invariante por la izquierda o por la derecha o por ambos lados, según el caso.

Recíprocamente, si cualquiera de las uniformidades es pseudometrizable, entonces tienen una base numerable, la cual determina una base numerable de entornos de 1 en $G$, a saber, la dada por las bolas $B_V(1)$, donde $V$ es una banda básica de la uniformidad. ■

Para completar este análisis sólo falta observar que la condición $\mathcal{U}_G^i = \mathcal{U}_G^d$ no sólo es suficiente, sino también necesaria, para que las uniformidades de un grupo topológico puedan ser generadas por pseudométricas invariantes:

**Teorema 10.22** *Si $G$ es un grupo topológico y cualquiera de sus cuatro uniformidades naturales está generada por una familia de pseudométricas invariantes, entonces $\mathcal{U}_G^i = \mathcal{U}_G^d$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $\mathcal{P}$ una familia de pseudométricas invariantes en $G$ que genere cualquiera de las cuatro uniformidades $\mathcal{U}$ de $G$. En particular, la topología de $G$ es la inducida por $\mathcal{U}$, luego una base de entornos de 1 en $G$ la forman las bolas $U = B_V(1)$, donde $V = V(F, \epsilon)$ es una banda básica de $\mathcal{U}$, donde $F \subset \mathcal{P}$ es finito. Explícitamente, esto significa que $u \in U$ si y sólo si para todo $\rho \in F$ se cumple que $\rho(u, 1) < \epsilon$.

Por el teorema 10.11, basta probar que cada $U$ en estas condiciones es un entorno equilibrado de 1 que cumple $x^{-1}Ux = U$. En efecto, si $u \in U$ y $\rho \in F$, entonces $\rho(u, 1) < \epsilon$, luego $\rho(1, u^{-1}) < \epsilon$, luego $u^{-1} \in U$. Esto prueba que $U$ es equilibrado.

Por otra parte, si $y \in x^{-1}Ux$ y $\rho \in F$, existe un $u \in U$ tal que $y = x^{-1}ux$, con lo que
$$\rho(y,1) = \rho(x^{-1}ux,1) = \rho(ux,x) = \rho(u,1) < \epsilon,$$
luego $y \in U$, y esto mismo aplicado a $x^{-1}$ en lugar de $x$ nos da la inclusión opuesta. ■

Observemos que, por el teorema 10.12 y las observaciones posteriores, una condición necesaria y suficiente para que la topología de un grupo topológico $G$ esté generada por una familia de pseudométricas invariantes es que la aplicación $x \mapsto x^{-1}$ sea uniformemente continua respecto a la uniformidad izquierda, derecha o bilátera.

Consideremos ahora el caso particular de un espacio vectorial topológico. Conviene introducir una definición:

**Definición 10.23** Si $V$ es un $K$-espacio vectorial, una *semipseudonorma* en $V$ es una aplicación $|\ \ |: V \longrightarrow \mathbb{R}$ que cumple las propiedades siguientes, para todo $v$, $w \in V$ y todo $\alpha \in K$:

1. $|0| = 0$.
2. $|v+w| \leq |v| + |w|$.
3. Si $|\alpha| \leq 1$, entonces $|\alpha v| \leq |v|$.

   Una *pseudonorma* es una *semipseudonorma* que además cumple:

4. $|v| = 0$ si y sólo si $v = 0$.

Observemos que toda semipseudonorma define una pseudométrica invariante $\rho(x,y) = |x-y|$, que es una métrica si y sólo si la semipseudonorma es una pseudonorma.

El interés de estos conceptos se debe a que si en el teorema 2.24 partimos de bandas de la forma $V_n = V_{U_n}$, donde $U_n$ es un entorno de 0 equilibrado, es inmediato que, además de ser invariante, la pseudométrica $\rho$ que construimos cumple que $\rho(\alpha x, \alpha y) \leq \rho(x,y)$, siempre que $|\alpha| \leq 1$, y esto se traduce en que $|x| = \rho(x,0)$ es una semipseudonorma tal que $\rho(x,y) = |x-y|$.

En efecto, la única propiedad de la definición que no es inmediata es:
$$|v+w| = \rho(v+w,0) = \rho(v,-w) = \rho(v,w) \leq \rho(v,0) + \rho(0,w) = |v| + |w|,$$
y, por otra parte, $\rho(x,y) = \rho(x-y,0) = |x-y|$.

Por consiguiente, el teorema 10.19 se particulariza al resultado siguiente:

**Teorema 10.24** *La uniformidad de un espacio vectorial topológico está generada por (las pseudométricas asociadas a) sus semipseudonormas continuas.*

Y el teorema 10.21 se particulariza a este otro enunciado:

**Teorema 10.25** *Un espacio vectorial topológico (de Hausdorff) es pseudometrizable (metrizable) si y sólo si tiene una base numerable de entornos de* $0$*, y en tal caso la pseudométrica (métrica) que genera su uniformidad puede tomarse inducida por una semipseudonorma (pseudonorma), con lo que es invariante por traslaciones y las bolas de centro* $0$ *son equilibradas.* 30

---

## 10.4 Cocientes

Si $G$ es un grupo topológico y $N$ es un subgrupo de $G$, tenemos definidas las relaciones de congruencia por la izquierda y por la derecha módulo $N$, que dan lugar a dos conjuntos cociente $(G/N)_i$ y $(G/N)_d$. Podemos considerarlos como espacios topológicos con la topología cociente, y entonces resultan ser homeomorfos, pues la biyección $f : (G/N)_i \longrightarrow (G/N)_d$ dada por $f(gN) = Ng^{-1}$ es un homeomorfismo.

En efecto, si $p_i$, $p_d$ son las proyecciones en los cocientes respectivos, tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "p_i"] \arrow[d, "f_0"'] & (G/N)_i \arrow[d, "f"] \\ G \arrow[r, "p_d"'] & (G/N)_d \end{tikzcd}$$

donde $f_0(g) = g^{-1}$. Como $f_0$ es un homeomorfismo, resulta que $A \subset (G/N)_i$ es abierto si y sólo si $p_i^{-1}[A]$ es abierto, si y sólo si $f_0[p_i^{-1}[A]] = p_d^{-1}[f[A]]$ es abierto, si y sólo si $f[A]$ es abierto.

En vista de esto, no perdemos generalidad si consideramos únicamente cocientes $(G/N)_d$, de modo que en adelante representaremos los cocientes respecto a la congruencia por la derecha simplemente como $G/N$. Por supuesto, cuando $N$ es un subgrupo normal, $(G/N)_i = (G/N)_d$ y el cociente tiene estructura de grupo, que resulta ser un grupo topológico, según probamos ahora:

**Teorema 10.26** *Si* $N$ *es un subgrupo de un grupo topológico* $G$*, la proyección* $p : G \longrightarrow G/N$ *es abierta. Si* $N$ *es normal,* $G/N$ *es un grupo topológico.*

Demostración: Si $U$ es abierto en $G$, entonces $p^{-1}[p[U]] = NU = \bigcup\limits_{n\in N} nU$ es abierto en $G$, luego $p[U]$ es abierto en $G/N$.

Supongamos ahora que $N$ es un subgrupo normal y sea $\pi : G \times G \longrightarrow G$ el producto en $G$. Si $U$ es abierto en $G/N$, entonces $p^{-1}[U]$ es abierto en $G$, luego $\pi^{-1}[p^{-1}[U]]$ es abierto en $G \times G$, luego $p[\pi^{-1}[p^{-1}[U]]]$ es abierto en $(G/N) \times (G/N)$ (porque $p$ es abierta, luego $p \times p$ también), pero este conjunto es precisamente la antiimagen de $U$ por el producto de $G/N$, luego queda probado que es continuo.

Similarmente, si $U$ es abierto en $G/N$, tenemos que $U^{-1} = p[p^{-1}[U]^{-1}]$ es también abierto, por lo que la aplicación $Ng \mapsto Ng^{-1}$ también es continua. ■

Es fácil ver que en el caso particular en que $W$ es un subespacio vectorial de un espacio vectorial topológico $V$, el espacio vectorial cociente $V/W$ es también un espacio vectorial topológico.

**Teorema 10.27** *Si $G$ es un grupo topológico y $N$ es un subgrupo, el cociente $G/N$ es un espacio de Hausdorff si y sólo si $N$ es cerrado en $G$.*

Demostración: Sea $p : G \longrightarrow G/N$ la proyección en el cociente. Si $G/N$ es de Hausdorff, entonces $\{p(1)\}$ es cerrado en $G/N$, luego $N = p^{-1}[p(1)]$ es cerrado en $G$.

Si $N$ es cerrado, como la proyección es abierta, en virtud del teorema 1.48, basta probar que la relación de congruencia

$$R = \{(g_1, g_2) \in G \times G \mid g_1 g_2^{-1} \in N\}$$

es cerrada en $G \times G$, pero esto es obvio, pues se trata de la antiimagen de $N$ (que es cerrado) por la aplicación continua $(g_1, g_2) \mapsto g_1 g_2^{-1}$. ■

He aquí la versión topológica del teorema de isomorfía:

**Teorema 10.28** *Si $f : G \longrightarrow H$ es un epimorfismo continuo de grupos topológicos, entonces el isomorfismo $\bar{f} : G/\operatorname{N}(f) \longrightarrow H$ inducido por $f$ es continuo, y es un homeomorfismo si y sólo si $f$ es una aplicación abierta.*

Demostración: Si $U$ es abierto en $H$, entonces $f^{-1}[U]$ es abierto en $H$, luego $\bar{f}^{-1}[U] = p[f^{-1}[U]]$ es abierto en $G/\operatorname{N}(f)$. Por lo tanto, $\bar{f}$ es continua. Si $f$ es abierta y $U$ es un abierto en $G/\operatorname{N}(f)$, entonces $p^{-1}[U]$ es abierto en $G$, luego $f[p^{-1}[U]] = \bar{f}[U]$ es abierto en $H$. ■

Obviamente, este teorema se aplica en particular al caso de los espacios vectoriales topológicos.

**Ejemplo** Vamos a ver que las proyecciones en cocientes no tienen por qué ser cerradas. Para ello consideramos el espacio vectorial topológico $V = \mathbb{R}^2$ y el subespacio $W = \{0\} \times \mathbb{R}$. Sea $\pi : V \longrightarrow \mathbb{R}$ la proyección en la primera componente, cuyo núcleo es $W$. Como es abierta (teorema 1.41) el teorema anterior nos da un homeomorfismo $\bar{\pi} : V/W \longrightarrow \mathbb{R}$. Consideremos por otra parte la proyección $p : V \longrightarrow V/W$ la proyección natural.

El conjunto $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\}$ es cerrado en $V$, pues es la antiimagen del cerrado $\{1\}$ de $\mathbb{R}$ por la aplicación continua $(x, y) \mapsto xy$, pero $\bar{\pi}[p[C]] = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, que no es cerrado en $\mathbb{R}$, luego $p[C]$ no es cerrado en $V/W$. ■

**Teorema 10.29** *Si $G$ es un grupo topológico y $N$ es un subgrupo normal de $G$, entonces $\overline{N}$ también es un subgrupo normal.*

Demostración: Basta tener en cuenta que si $g \in G$, entonces la conjugación $x \mapsto x^g$ es un isomorfismo topológico de $G$ en sí mismo, luego conserva las clausuras y, por consiguiente: $(\overline{N})^g = \overline{N^g} = \overline{N}$, luego $\overline{N}$ es normal. ■

En particular, en todo grupo topológico $G$ tenemos que $\overline{\{1\}}$ es un subgrupo normal cerrado, y claramente es el menor subgrupo que cumple que el cociente $G/\overline{\{1\}}$ es de Hausdorff.

En el apartado sobre cocientes, al final de la sección 9.3, mostramos que los cocientes de espacios normados respecto de subespacios cerrados son espacios normados. 322

## 10.5 Compleciones de grupos topológicos

A la hora de definir qué entendemos por "grupo topológico completo" nos encontramos con el problema de que tenemos cuatro uniformidades naturales que inducen su topología, y unas pueden ser completas y otras no. En cualquier caso, el teorema 10.12 implica que $G_i$ es completo si y sólo si lo es $G_d$, pues ambos son uniformemente homeomorfos.

De hecho, cuando Weil introdujo el concepto de espacio uniforme, en el caso de los grupos topológicos consideró únicamente las uniformidades izquierda y derecha, y definió un grupo topológico completo como un grupo topológico completo respecto a dichas uniformidades. Sin embargo, en 1944 Dieudonné mostró un ejemplo de grupo topológico completo en el sentido de Weil cuyas compleciones izquierda y derecha no admiten estructura de grupo topológico. Quedó planteado entonces el problema de si es posible considerar una uniformidad en un grupo topológico que induzca su topología y cuya compleción sí que admita estructura de grupo topológico. En 1946 Raĭkov dio una respuesta positiva, y la uniformidad que consideró no fue sino la que hemos llamado uniformidad bilátera o superior. Por último, veremos que la uniformidad inferior interviene de forma natural en el estudio de las relaciones entre las compleciones de las otras tres uniformidades.

Estos hechos explican por qué hemos adoptado el convenio de considerar como uniformidad "por defecto" de un grupo topológico su uniformidad bilátera, lo que ahora nos lleva a la definición siguiente:

**Definición 10.30** Un grupo topológico $G$ es *completo* o *Raĭkov-completo,* si lo es respecto de su uniformidad bilátera. Diremos que $G$ es *Weil-completo* si lo es respecto de sus uniformidades izquierda y derecha.

Según las observaciones precedentes, para que un grupo sea Weil-completo basta con que lo sea respecto de una de las dos uniformidades laterales, pues ello implica que también lo es respecto de la otra.

En general, si dos uniformidades inducen la misma topología en un conjunto $X$ y cumplen $\mathcal{U}_1 \subset \mathcal{U}_2$, todo filtro de Cauchy para la segunda lo es para la primera (y los filtros convergentes son los mismos), por lo que si $(X, \mathcal{U}_1)$ es completo, también lo es $(X, \mathcal{U}_2)$.

Por lo tanto, todo grupo topológico Weil-completo es completo, y todavía podríamos definir un grupo *fuertemente completo* como un grupo completo es respecto de su uniformidad inferior, y entonces todo grupo topológico fuertemente completo resulta ser Weil-completo.

Sin embargo, el ejemplo A.48 muestra un grupo topológico completo que no es Weil-completo, mientras que el ejemplo A.49 corresponde a un grupo Weil-completo que no es fuertemente completo.

Pasamos a estudiar las compleciones de un grupo topológico. Por simplicidad nos restringiremos al caso de grupos de Hausdorff, cuyas compleciones de Hausdorff vienen dadas por el teorema 2.39.

Para tratar simultáneamente con todos los casos conviene probar un resultado técnico general:

**Teorema 10.31** *Sea $G$ un grupo topológico y sean $\mathcal{U}_1$, $\mathcal{U}_2$ dos de sus cuatro uniformidades naturales. Entonces se cumple la propiedad $\Phi(\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2)$ siguiente:*

> *Para cada $V_0 \in \mathcal{U}_2$ existe $V \in \mathcal{U}_2$ tal que para todo $x \in G$ existe $W \in \mathcal{U}_1$ tal que $W[B_V(x)] \subset B_{V_0}(x)$.*

DEMOSTRACIÓN: Si $\mathcal{U}_2 \subset \mathcal{U}_1$ la propiedad $\Phi(\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2)$ se cumple trivialmente, pues basta tomar $V \in \mathcal{U}_2$ tal que $2V \subset V_0$ y $W = V$. Entonces, si $z \in W[B_V(x)]$, existe un $y \in B_V(x)$ tal que $(z, y) \in V$, luego $(x, z) \in 2V \subset V_0$.

También es inmediato que si se cumple $\Phi(\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2)$ y $\mathcal{U}_1 \subset \mathcal{U}'_1$, entonces se cumple $\Phi(\mathcal{U}'_1, \mathcal{U}_2)$.

Esto hace que, de los 16 casos que habría que considerar, en realidad baste ocuparse de tres de ellos:

$\Phi(\mathcal{U}^{id}_G, \mathcal{U}^i_G)$ Tomamos $V_0 = V^i_{U_0} \in \mathcal{U}^i_G$, donde $U_0$ es un entorno de 1 equilibrado. Tomamos otro entorno equilibrado tal que $U^3 \subset U_0$, y llamamos $V = V^i_U$.

Dado $x \in G$, tomamos un entorno de 1 equilibrado $U_x \subset U$ de manera que $x^{-1}U_x x \subset U$ y llamamos $W = V^{id}_{U_x}$. Sea $s \in W[B_V(x)]$, lo cual significa que existe un $y$ tal que $(x, y) \in V^i_U$ y $(s, y) \in V^{id}_{U_x}$. A su vez, esto significa que $y \in xU$, $s \in U_x y U_x$, luego

$$s \in U_x x U U_x \subset x x^{-1} U_x x U U_x \subset xUUU \subset xU_0.$$

Por lo tanto, $s \in B_{V_0}(x)$.

$\Phi(\mathcal{U}^{id}_G, \mathcal{U}^d_G)$ se prueba análogamente.

$\Phi(\mathcal{U}^{id}_G, \mathcal{U}_G)$ Tomamos $V_0 \in \mathcal{U}_G$, de modo que $V_0 = V_1 \cap V_2$, donde $V_1 \in \mathcal{U}^i_G$, $V_2 \in \mathcal{U}^d_G$. Por los casos ya probados, existen $V_3 \in \mathcal{U}^i_G$ y $V_4 \in \mathcal{U}^d_G$ que sirven como $V$ en $\Phi(\mathcal{U}^{id}_G, \mathcal{U}^i_G)$ y $\Phi(\mathcal{U}^{id}_G, \mathcal{U}^d_G)$, para $V_1$ y $V_2$ respectivamente. Entonces $V = V_3 \cap V_4 \in \mathcal{U}_G$ sirve como $V$ simultáneamente en $\Phi(\mathcal{U}^{id}_G, \mathcal{U}^i_G)$ y $\Phi(\mathcal{U}^{id}_G, \mathcal{U}^d_G)$ para $V_1$ y $V_2$.

Esto significa que para cada $x \in G$ existen $W^1_x, W^2_x \in \mathcal{U}^{id}_G$ que cumplen las propiedades correspondientes para $V$ y $V_1$ y $V_2$, respectivamente, pero entonces $W_x = W^1_x \cap W^2_x$ sirve para ambas, es decir,

$$W_x[B_V(x)] \subset B_{V_1}(x) \cap B_{V_2}(x) = B_{V_0}(x).$$ ■

Como consecuencia:

**Teorema 10.32** *Sea $G$ un grupo topológico de Hausdorff y sean $\mathcal{U}_1$ y $\mathcal{U}_2$ dos de sus cuatro uniformidades. Sea $F$ un filtro de Cauchy en $G_2$. Entonces:*

1. *si $F_0 \subset F$ es un filtro de Cauchy en $G_1$, también es un filtro de Cauchy en $G_2$.*

2. *Si $\mathcal{U}_1 \subset \mathcal{U}_2$ y $F$ es minimal en $G_2$, también es minimal en $G_1$.*

3. *Si $\mathcal{U}_1 \subset \mathcal{U}_2$ y $G$ es de Hausdorff, la inclusión $i : \hat{G}_2 \longrightarrow \hat{G}_1$ es uniformemente continua y un homeomorfismo en su imagen.*

DEMOSTRACIÓN: 1) Sea $V_0 \in \mathcal{U}_2$. Por el teorema anterior existe $V \in \mathcal{U}_2$ y una familia $\{W_x\}_{x \in G}$ de bandas de $(G, \mathcal{U}_1)$ de manera que $W_x[B_V(x)] \subset B_{V_0}(x)$.

Como $F$ es de Cauchy en $(G, \mathcal{U}_2)$, existe $A \in F$ tal que $d(A) < V$. Tomemos $a \in A$. Como $F_0$ es de Cauchy en $(G, \mathcal{U}_1)$, existe un $B \in F_0$ tal que $d(B) < W_a$. Como $F_0 \subset F$ se cumple que $A \cap B \in F$. Tomemos $b \in A \cap B$. Entonces $B \subset B_{W_a}(b) = W_a[\{b\}] \subset W_a[B_V(a)] \subset B_{V_0}(a)$. Por lo tanto $d(B) < 2V_0$. Como $V_0$ es una banda arbitraria en $\mathcal{U}_2$, esto implica que $F_0$ es de Cauchy en $(G, \mathcal{U}_2)$.

2) Como $\mathcal{U}_1 \subset \mathcal{U}_2$, es claro que $F$ es un filtro de Cauchy en $G_1$. Supongamos que $F_0 \subset F$ es otro filtro de Cauchy en $G_1$, por 1) también es de Cauchy en $G_2$, luego la minimalidad de $F$ implica que $F_0 = F$, luego $F$ también es minimal en $G_1$.

3) Por 2) tenemos que $\hat{G}_2 \subset \hat{G}_1$. Una banda básica en $\hat{G}_1$ es de la forma $\tilde{V}$, donde $V \in \mathcal{U}_1 \subset \mathcal{U}_2$, y $\tilde{V} \cap (\tilde{G}_2 \times \tilde{G}_2)$ es precisamente la banda $\tilde{V} \in \hat{\mathcal{U}}_2$. Esto prueba que la inclusión es uniformemente continua. En particular, si $a \in \hat{G}_2$, todo entorno de $a$ respecto de la topología relativa a $\hat{\mathcal{U}}_1$ lo es también respecto de $\hat{\mathcal{U}}_2$. Esto implica que $F_a^1 \subset F_a^2$, donde

$$F_a^i = \{U \cap G \mid U \text{ es un entorno de } a \text{ en } \hat{G}_i\}.$$

Por otra parte, el teorema 2.37 nos da que $F_a^i$ es el único filtro de Cauchy minimal en $G_i$ que converge a $a$ en $\hat{G}_i$, luego por 2) $F_a^2$ también es minimal en $G_1$, luego $F_a^1 = F_a^2$ y, en particular, $\lim F_a^1 = a$ en $\hat{G}_2$.

Así, la identidad $j : \hat{G}_2 \longrightarrow \hat{G}_2$, donde en el primer espacio consideramos la topología relativa a $\hat{G}_1$ y en el segundo la propia de $\hat{G}_2$, cumple que su restricción $i|_G : G \longrightarrow \hat{G}_2$ es continua (pues $\hat{G}_1$ y $\hat{G}_2$ inducen la misma topología en $G$) y todo flitro $F$ en $G$ convergente a $a \in \hat{G}_2$ respecto a la topología relativa a $\hat{G}_1$ converge también a $a$ en la topología de $\hat{G}_2$, pues claramente $F_a^1 \subset F$ y $F_a^1$ converge a $a$ en $\hat{G}_2$.

Por consiguiente, podemos aplicar el teorema 1.59, según el cual $j$ es continua, lo que significa que $i : \hat{G}_2 \longrightarrow \hat{G}_1$ es un homeomorfismo en su imagen. ■

Como consecuencia:

**Teorema 10.33** *Si $G$ es un grupo topológico de Hausdorff, sus cuatro compleciones están relacionadas según muestra el diagrama siguiente:*

$$\begin{tikzcd}
& \hat{G}^{id} & \\
\hat{G}^{i} \arrow[ur] & & \hat{G}^{d} \arrow[ul] \\
& \hat{G} \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

*donde las cuatro flechas son inclusiones, y todas ellas son uniformemente continuas y homeomorfismos en sus imágenes respectivas. Además $\hat{G} = \hat{G}^i \cap \hat{G}^d$.*

Demostración: Si $a \in \hat{G}^i \cap \hat{G}^d$, en la prueba del teorema anterior hemos visto que $F_a^i = F_a^{id} = F_a^d$, luego $F_a^{id}$ es a la vez un filtro de Cauchy en $G$ respecto de $\mathcal{U}_G^i$ y respecto de $\mathcal{U}_G^d$, lo que implica que es un filtro de Cauchy respecto de $\mathcal{U}_G$, luego converge a cierto $c \in \hat{G}$, pero aplicando las inclusiones (que son continuas), vemos que $a = c \in \hat{G}$. ■

Estudiamos ahora la existencia de extensiones continuas de la aplicación $x \mapsto x^{-1}$ en un grupo topológico de Hausdorff:

**Teorema 10.34** *Si $G$ es un grupo topológico de Hausdorff, entonces la aplicación $j : G \longrightarrow G$ dada por $j(x) = x^{-1}$ se extiende a un único homeomorfismo uniforme $j : \hat{G}^{id} \longrightarrow \hat{G}^{id}$ tal que $j \circ j$ es la identidad, el cual se restringe a su vez a homeomorfismos uniformes $j : \hat{G}_i \longrightarrow \hat{G}_d$ y $j : \hat{G} \longrightarrow \hat{G}$.*

Demostración: Si $U$ es un entorno de 1 equilibrado en $G$, es inmediato que $j^{-1}[V_U^{id}] = V_U^{id}$, luego $j : G_{id} \longrightarrow G_{id}$ es un homeomorfismo uniforme, luego se extiende a un único homeomorfismo uniforme $j : \hat{G}^{id} \longrightarrow \hat{G}^{id}$. Se cumple que $j \circ j$ es la identidad porque $j \circ j$ y la identidad coinciden en $G$.

Similarmente, $j : G_i \longrightarrow G_d$ es un homeomorfismo uniforme, luego se extiende a un homeomorfismo uniforme $j^* : \hat{G}_i \longrightarrow \hat{G}_d$, pero como $j|_{G_i}$ y $j^*$ coinciden en $G$, tienen que ser iguales, luego concluimos que $j[\hat{G}^i] = \hat{G}^d$, luego $j[\hat{G}^d] = \hat{G}^i$.

A su vez, esto implica que $j[\hat{G}] = j[\hat{G}_i \cap \hat{G}_d] = j[\hat{G}_i] \cap j[\hat{G}_d] = \hat{G}_d \cap \hat{G}_i = \hat{G}$. ■

Para estudiar la existencia de extensiones continuas del producto de un grupo topológico a sus compleciones nos apoyaremos en el teorema siguiente:

**Teorema 10.35** *Sea $G$ un grupo topológico y sea $\mathcal{U}$ una de las tres uniformidades $\mathcal{U}_G^i$, $\mathcal{U}_G^d$, $\mathcal{U}_G$. Si $F_1$, $F_2$ son filtros de Cauchy respecto de $\mathcal{U}$, entonces el producto $F_1F_2 = \{AB \mid A \in F_1, B \in F_2\}$ es una base de filtro de Cauchy respecto de $\mathcal{U}$.*

Demostración: Consideremos en primer lugar el caso $\mathcal{U} = \mathcal{U}_G^i$. Claramente $(A \cap A')(B \cap B') \subset AB \cap A'B'$, de donde se sigue que $F_1F_2$ es una base de filtro.

Sea $U_0$ un entorno de 1 equilibrado en $G$ y sea $U$ otro entorno equilibrado tal que $U^3 \subset U_0$. Entonces existe un $B \in F_2$ tal que $d(B) < V_U^i$, es decir, tal que $B^{-1}B \subset U$. Sea $b \in B$. Entonces existe un $A \in F_1$ tal que $d(A) < V_{bUb^{-1}}^i$, es decir, tal que $A^{-1}A \subset bUb^{-1}$. Así

$$(AB)^{-1}AB = B^{-1}A^{-1}AB \subset B^{-1}bUb^{-1}B \subset U^3 \subset U_0,$$

luego $d(AB) < V_{U_0}^i$.

Análogamente se razona con $\mathcal{U}_G^d$ y, si $F_1$ y $F_2$ son filtros de Cauchy respecto de $\mathcal{U}_G$, también lo son respecto de $\mathcal{U}_G^i$ y respecto de $\mathcal{U}_G^d$, luego por la parte ya probada $F_1F_2$ es una base de filtro de Cauchy respecto de ambas uniformidades, luego también respecto de $\mathcal{U}_G$. ■

Como consecuencia:

**Teorema 10.36** *Sea $G$ un grupo topológico de Hausdorff y sea $G_*$ uno de los espacios uniformes $G_i$, $G_d$ o $G$. El producto en $G$ se extiende a una única operación continua $G_* \times G_* \longrightarrow G_*$ asociativa y con elemento neutro* 1 *(y conmutativa si lo es el producto en $G$).*

Demostración: Consideremos en primer lugar el caso $G_* = G_i$. Llamemos $m : G_i \times G_i \longrightarrow G_i$ al producto en $G$. Si $x$, $y \in \hat{G}_i$, entonces $x$ e $y$ son dos filtros de Cauchy minimales en $G$ que convergen a ellos mismos como puntos de $\hat{G}_i$. Por el teorema anterior, $xy$ es una base de filtro de Cauchy en $G_i$, luego converge a un punto de $\hat{G}_i$ que podemos llamar $\bar{m}(x, y)$. Esto nos define una aplicación $\bar{m} : \hat{G}_i \times \hat{G}_i \longrightarrow \hat{G}_i$.

Observemos que $\bar{m}$ extiende a $m$, pues si $x$, $y \in G$, entonces, identificados con sus imágenes en $\hat{G}_i$ son los filtros de todos sus entornos, y el filtro generado por $xy$ contiene a todos los entornos de $m(x, y)$ (pues si $U$ es un entorno de $m(x, y)$, entonces $m^{-1}[U]$ es un entorno de $(x, y)$, luego contiene un entorno básico $A \times B$, luego $AB \subset U$, con $AB \in xy$), luego $xy$ converge a $m(x, y)$, luego $\bar{m}(x, y) = m(x, y)$.

Más en general, si $F$ es cualquier filtro en $G_i \times G_i$ que converge a un punto $(x, y) \in \hat{G}_i \times \hat{G}_i$, entonces $xy \subset \bar{m}[F]$.

En efecto, por 2.37 un elemento arbitrario de $x$ como filtro en $G_i$ es de la forma $A = U_1 \cap G_i$, donde $U_1$ es un entorno de $x$ en $\hat{G}_i$, e igualmente un elemento arbitrario de $y$ es $B = U_2 \cap G$, donde $U_2$ es un entorno de $y$. Entonces $U_1 \times U_2$ es un entorno de $(x, y)$, luego existe $C \in F$ tal que

$$C \subset (U_1 \times U_2) \cap (G_i \times G_i) = A \times B \subset \bar{m}^{-1}[AB],$$

luego $AB \in \bar{m}[F]$. Por consiguiente, $\bar{m}[F]$ converge a $\bar{m}(x, y)$ y el teorema 1.59 nos da entonces que $\bar{m}$ es continua. A partir de aquí escribiremos $xy = \bar{m}(x, y)$.

Las propiedades algebraicas del producto en $\hat{G}_i$ se siguen de las de su restricción a $G$ por densidad. Por ejemplo, las aplicaciones $\hat{G}_i \times \hat{G}_i \times \hat{G}_i$ dadas por $(x, y, z) \mapsto (xy)z$ y $(x, y, z) \mapsto x(yz)$ son continuas y coinciden en $G_i \times G_i \times G_i$, luego coinciden en $\hat{G}_i \times \hat{G}_i \times \hat{G}_i$, y esto significa que el producto en $\hat{G}_i$ es asociativo. Igualmente se prueba que es conmutativo si lo es el de $G_i$.

Similarmente, las aplicaciones $\hat{G}_i \longrightarrow \hat{G}_i$ dadas por $x \mapsto 1x$ y $x \mapsto x1$ son continuas y coinciden con la identidad en $G_i$, luego son la identidad, y esto prueba que 1 es el elemento neutro para el producto en $\hat{G}_i$.

Análogamente se prueba que el producto en $G_d$ se extiende a $\hat{G}_d$, y por densidad las restricciones a $\hat{G} \times \hat{G}$ de los productos en $\hat{G}_i \times \hat{G}_i$ y en $\hat{G}_d \times \hat{G}_d$ son iguales, pues coinciden en $G \times G$. En particular, ambas restricciones son una operación $\hat{G} \times \hat{G} \longrightarrow \hat{G}$, luego el producto en $G$ también tiene una extensión continua a $\hat{G}$. ■

Combinando el teorema anterior con 10.34 obtenemos:

**Teorema 10.37** *Si $G$ es un grupo topológico de Hausdorff, existe un único producto continuo $\hat{G} \times \hat{G} \longrightarrow \hat{G}$ que extiende al producto en $G$, con el cual $\hat{G}$ es un grupo topológico.*

*La uniformidad de $\hat{G}$ coincide con la uniformidad bilátera determinada por su estructura de grupo, y sus uniformidades izquierda, derecha e inferior son las inducidas desde $\hat{G}_i$, $\hat{G}_d$ y $\hat{G}_{id}$, respectivamente.*

*Además todo homomorfismo continuo $f : G \longrightarrow H$ en un grupo topológico (de Hausdorff) completo respecto a su uniformidad bilátera se extiende a un (único) homomorfismo continuo $\hat{f} : \hat{G} \longrightarrow H$.*

Demostración: El teorema anterior prueba que el producto en $G$ se extiende a un único producto continuo en $\hat{G} \times \hat{G}$, y tras el teorema 10.32 hemos visto que la aplicación $x \mapsto x^{-1}$ también tiene una extensión continua a $\hat{G}$ y como las aplicaciones $x \mapsto xx^{-1}$ y $x \mapsto x^{-1}x$ son continuas en $\hat{G}$ y coinciden con la aplicación constante 1 en $G$, se cumple que $xx^{-1} = x^{-1}x = 1$ para todo $x \in \hat{G}$, luego $\hat{G}$ tiene estructura de grupo.

Sea $\mathcal{U}_1$ una de las cuatro uniformidades $\mathcal{U}^{id}_{\hat{G}}, \mathcal{U}^{i}_{\hat{G}}, \mathcal{U}^{d}_{\hat{G}}, \mathcal{U}_{\hat{G}}$ y sea $\mathcal{U}_2$ la uniformidad inducida desde $\hat{G}_{id}, \hat{G}_i, \hat{G}_d, \hat{G}$, respectivamente. Entonces $\mathcal{U}_1$ y $\mathcal{U}_2$ inducen la topología de $\hat{G}$, en el caso de $\mathcal{U}_2$ porque las inclusiones entre las cuatro compleciones de $G$ son homeomorfismos en sus imágenes, y las dos uniformidades inducen la misma uniformidad en $G$. El teorema 2.17 nos da entonces que $\mathcal{U}_1 = \mathcal{U}_2$.

Por el teorema 10.8, el homomorfismo $f$ del enunciado es uniformemente continuo, luego por 2.40 sabemos que se extiende a una aplicación uniformemente continua $\hat{f} : \hat{G} \longrightarrow H$. Las aplicaciones $\hat{G} \times \hat{G} \longrightarrow \hat{G}$ dadas por $(x, y) \mapsto \hat{f}(xy)$ y $(x, y) \mapsto \hat{f}(x)\hat{f}(g)$ son continuas y coinciden en el conjunto denso $G \times G$, luego coinciden en $\hat{G}$, y esto prueba que $\hat{f}$ es un homomorfismo de grupos. ■

En resumen, hemos probado que la compleción bilátera $\hat{G}$ de un grupo topológico $G$ es también un grupo topológico. Sin embargo:

**Teorema 10.38** *Si $G$ es un grupo topológico de Hausdorff y la compleción $\hat{G}_i$ o $\hat{G}_d$ admite estructura de grupo topológico (con $G$ como subgrupo) entonces $\hat{G}_i = \hat{G}_d = \hat{G}$.*

DEMOSTRACIÓN: En tal caso la aplicación $x \mapsto x^{-1}$ en $\hat{G}_i$ (o $\hat{G}_d$) tiene que ser la única extensión continua de la aplicación correspondiente en $G$, que, según 10.34 toma imágenes en $\hat{G}_d$ (o $\hat{G}_i$), luego tiene que ser $\hat{G}_i = \hat{G}_d$, lo que a su vez implica que $\hat{G}_i = \hat{G}_d = \hat{G}$. ■

**Nota** Es importante entender que las igualdades $\hat{G}_i = \hat{G}_d = \hat{G}$ son exclusivamente conjuntistas (topológicas, de hecho), y no contradicen que en este grupo común tengamos tres uniformidades diferentes $\hat{U}_G^i$, $\hat{U}_G^d$, $\hat{U}_G$.

Un ejemplo de esta situación lo proporciona el grupo del ejemplo A.49, que cumple $G = \hat{G} = \hat{G}_i = \hat{G}_d \subsetneq \hat{G}_{id}$, pero en el que $\mathcal{U}_G^i \neq \mathcal{U}_G^d$, por lo que las tres uniformidades en $G$ son diferentes. ■

Notemos también que si $\hat{G}$ es completo respecto a sus uniformidades izquierda o derecha (en cuyo caso lo es respecto de las dos), esto implica que $\hat{G}$ es cerrado en $\hat{G}_i$ y en $\hat{G}_d$, pero, como $G \subset \hat{G}$, de hecho es denso en ambos espacios, luego estamos de nuevo en el caso en que $\hat{G}_i = \hat{G} = \hat{G}_d$.

El teorema 10.34 nos da que la aplicación $x \mapsto x^{-1}$ tiene una extensión continua a $\hat{G}^{id}$, por lo que cabe preguntarse si el producto en $G$ también la tiene, en cuyo caso $\hat{G}^{id}$ también tendría estructura de grupo topológico. Para abordar el problema demostramos el teorema siguiente:

**Teorema 10.39** *Sea $G$ un grupo topológico y sean $F_1$ y $F_2$ filtros en $G$ tales que $F_1F_2$ es una base de filtro de Cauchy en $G_d$ (resp. $G_i$). Entonces $F_1$ (resp. $F_2$) es un filtro de Cauchy en $G_d$ (resp. $G_i$).*

DEMOSTRACIÓN: Si $F_1F_2$ es una base de filtro de Cauchy en $G_d$, para cada entorno de 1 equilibrado $U$ existen $A \in F_1$ y $B \in F_2$ tales que $d(AB) < V_U^d$, con lo que

$$AA^{-1} \subset ABB^{-1}A^{-1} = AB(AB)^{-1} \subset U.$$

Por lo tanto, $F_1$ es una base de filtro de Cauchy en $G_d$. La afirmación alternativa se prueba análogamente. ■

**Teorema 10.40** *Si $G$ es un grupo topológico de Hausdorff y el producto en $G$ admite una extensión continua a $\hat{G}^{id}$, entonces $\hat{G}^{id} = \hat{G}^i = \hat{G}^d = \hat{G}$.*

DEMOSTRACIÓN: Si el producto en $G$ se extiende a $\hat{G}^{id}$, el mismo argumento del teorema 10.37 prueba que $\hat{G}^{id}$ tiene estructura de grupo topológico con dicha extensión (dado que la aplicación $x \mapsto x^{-1}$ también tiene una extensión continua). Por lo tanto, dado $x \in \hat{G}^{id}$, existe un $y \in \hat{G}^{id}$ tal que $xy = yx = 1 \in G$.

Puesto que $x$ e $y$ son filtros en $G$ convergentes a $x$ e $y$ respectivamente, las bases de filtro producto $xy$, $yx$ son bases de filtro en $G$ convergentes a 1 en la topología de $G$, luego son bases de filtro de Cauchy tanto respecto de $\mathcal{U}_G^i$ como respecto de $\mathcal{U}_G^d$, luego el teorema anterior implica que $x$ es un filtro de Cauchy tanto en $G_i$ como en $G_d$, luego su límite (que es el propio $x$) cumple $x \in \hat{G}^i \cap \hat{G}^d = \hat{G}$.

Con esto hemos probado que $\hat{G}^{id} = \hat{G}$, con lo que $\hat{G}^{id} = \hat{G}^i = \hat{G}^d = \hat{G}$. ■

**Nota** Observemos que las igualdades $\hat{G}^{id} = \hat{G}^i = \hat{G}^d = \hat{G}$ equivalen a que $\hat{G}$ sea completo respecto a su uniformidad inferior (pues su compleción respecto de esta uniformidad es $\hat{G}^{id}$). Un ejemplo en el que esto sucede sin que las uniformidades izquierda y derecha coincidan es el grupo $\mathrm{LG}(2, \mathbb{R})$ estudiado en el ejemplo A.47. ■

Concluimos que la única de las cuatro compleciones naturales de un grupo topológico $G$ que puede tener estructura de grupo topológico (con $G$ como subgrupo) es $\hat{G}$, en el sentido de que si alguna otra la tiene también es porque coincide con $\hat{G}$.

Terminamos con el teorema siguiente, que generaliza a 9.57:

**Teorema 10.41** *Si $G$ es un grupo topológico metrizable y $N$ es un subgrupo normal cerrado, el cociente $G/N$ es metrizable y, si $G$ es completo, $G/N$ también lo es.*

Demostración: Si $G$ es metrizable, tiene una base numerable de entornos de 1, digamos $\{V_n\}_{n=0}^{\infty}$, que podemos tomar decreciente y tal que $V_{n+1}^2 \subset V_n$. Como la proyección $p : G \longrightarrow G/N$ es abierta, $\{p[V_n]\}_{n=0}^{\infty}$ es una base numerable de entornos de 1 en $G/N$, luego el cociente es metrizable por 10.21.

Supongamos que $G$ es completo y sea $\{x_n N\}_{n=0}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en $G/N$, por ejemplo, respecto de la uniformidad izquierda. Basta probar que tiene una subsucesión convergente, luego, pasando a una subsucesión, la propiedad de Cauchy nos permite suponer que, para todo $n \in \mathbb{N}$, si $p$, $q \geq n$, se cumple que $x_p^{-1} x_q N \in p[V_n]$. Por lo tanto, si $u \in x_p N$, $v \in x_q N$, se cumple que[3] $u^{-1}v \in NV_n = V_n N$, luego $v \in uV_n N \cap x_q N$, luego $uV_n \cap x_q N \neq \varnothing$.

Esto nos permite elegir recurrentemente $u_n \in x_n N$ de modo que se cumpla $u_{n+1} \in u_n V_n$. De este modo, $u_{n+p} \in u_n V_n V_{n+1} \cdots V_{n+p-1} \subset u_n V_{n-1}$, y esto significa que la sucesión $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ es de Cauchy en $G$, luego converge, luego por la continuidad de la proyección, también converge $\{u_n N\}_{n=0}^{\infty} = \{x_n N\}_{n=0}^{\infty}$. ■

En la sección 11.2 estudiamos el caso particular (mucho más simple) de la compleción de un espacio vectorial topológico. 394

## 10.6 Conexión

Estudiamos ahora la conexión en grupos topológicos. Empezamos observando lo siguiente:

[3] En general, si $N$ es un subgrupo normal y $A$ es un conjunto arbitrario, $NA = AN$, pues $na = aa^{-1}na \in aN$.

**Teorema 10.42** *Si $G$ es un grupo topológico y $U$ es un entorno equilibrado de* 1*, entonces* $H = \bigcup_{n=1}^{\infty} U^n$ *es un subgrupo abierto y cerrado de $G$. En particular, si $G$ es conexo tiene que ser $G = H$.*

Demostración: Recordemos que "equilibrado" significa que $U = U^{-1}$. Es inmediato que si $x \in U^m$, $y \in U^n$, entonces $xy \in U^{m+n}$, luego $H$ es cerrado para productos, y además, si $x \in U^n$, entonces $x^{-1} \in (U^{-1})^n = U^n$, luego $H$ también es cerrado para inversos. Por lo tanto es un subgrupo, abierto porque es unión de abiertos (notemos que, en general, si $A$ y $B$ son abiertos, también lo es $AB = \bigcup_{a\in A} aB$, luego cada $U^n$ es abierto), y cerrado por 10.4. ■

Así pues, en un grupo topológico conexo, todos los subgrupos propios tienen que tener interior vacío, pues si un subgrupo contiene un entorno de 0 (que podemos suponer equilibrado), necesariamente contiene al subrgrupo $H$ dado por el teorema anterior.

**Teorema 10.43** *En un grupo topológico, la componente conexa de* 1 *es un subgrupo normal cerrado.*

Demostración: Sea $G$ un grupo topológico y $C$ la componente conexa de 1. Si $g \in C$, entonces $1 = g^{-1}g \in g^{-1}C$ y $g^{-1}C$ es una componente conexa de $G$ (porque las traslaciones son homeomorfismos), luego $g^{-1}C = C$ y así $g^{-1} = g^{-1}1 \in C$.

Por lo tanto, si $g \in C$, por la parte ya probada $g^{-1} \in C$ y, aplicando dicha parte a $g^{-1}$, concluimos que $gC = C$, luego $C$ es cerrado para el producto y es, pues, un subgrupo, necesariamente cerrado, porque las componentes conexas siempre lo son.

Similarmente, si $g \in G$ tenemos que $x \mapsto g^{-1}xg$ es un homeomorfismo de $G$ en sí mismo, luego $g^{-1}Cg$ es la componente conexa de $g^{-1}1g = 1$, luego $g^{-1}Cg = C$ y $C$ es un subgrupo normal. ■

Notemos que las componentes conexas de $G$ no son sino los trasladados $gC$, con $g \in G$, es decir, los elementos del grupo cociente $G/N$.

**Teorema 10.44** *Sea $G$ un grupo topológico y $N$ un subgrupo normal.*

1. *Si $N$ y $G/N$ son conexos, también lo es $G$.*
2. *Si $N$ y $G/N$ son totalmente disconexos, también lo es $G$.*

Demostración: Sea $p : G \longrightarrow G/N$ la proyección en el cociente.

1) Supongamos que $A$ es un abierto cerrado no vacío en $G$. Si $g \in G$, tenemos que $gN$ es conexo, luego $gN \subset A$ o bien $gN \cap A = \varnothing$. Esto implica que $A = p^{-1}[p[A]]$, luego $p[A]$ es abierto y cerrado en $G/N$, luego $p[A] = G/N$ y, por consiguiente, $A = G$.

2) Supongamos que $C \subset G$ es conexo. Entonces $p[C]$ es conexo en $G/N$, luego $p[C] = \{gN\}$, para cierto $g \in G$, luego $C \subset gN$, pero $gN$ es totalmente disconexo, luego $C$ se reduce a un punto. ■

Notemos que, en las condiciones del teorema anterior, si $G$ es conexo también lo es $G/N$, pero no necesariamente $N$. Basta considerar $G = \mathbb{R}$ y $N = \mathbb{Z}$. Por otra parte, si $G$ es totalmente disconexo, también lo es $N$, pero no necesariamente $G/N$. Un ejemplo lo proporciona el grupo $G$ de todas las sucesiones de números racionales convergentes (en $\mathbb{R}$), que es un espacio normado sobre $\mathbb{Q}$ con la norma $\|x\| = \sup\{|x_n| \mid n \in \mathbb{N}\}$. Tomamos como $N$ el subgrupo de las sucesiones convergentes a 0. Entonces $G$ es totalmente disconexo (cerodimensional, de hecho), pero $G/N$ es isomorfo y homeomorfo a $\mathbb{R}$, que es conexo.

**Teorema 10.45** *Si $G$ es un grupo topológico y $C$ es la componente conexa de* 1*, entonces $G/C$ es totalmente disconexo.*

Demostración: Sea $C^*$ la componente conexa de 1 de $G/C$. Entonces $N = p^{-1}[C^*]$ es un subgrupo de $G$ que contiene a $C$ y $C^* = N/C$. Por el teorema anterior $N$ es conexo, luego tiene que ser $N = C$, luego $C^* = C/C = 1$, luego $G/C$ es totalmente disconexo. ■

Exactamente igual que el teorema 10.43 se demuestra:

**Teorema 10.46** *En un grupo topológico, la cuasicomponente de* 1 *es un subgrupo normal cerrado.*

Sin embargo, al contrario de lo que sucede con las componentes conexas, existen grupos topológicos $G$ tales que el cociente $G/Q$ sobre la cuasicomponente de 1 tiene cuasicomponente no trivial, con lo que son ejemplos de grupos en los que la cuasicomponente y la componente conexa de 1 no coinciden, pero no es fácil poner ejemplos de tales grupos. 400

## 10.7 Compacidad

Vamos a aplicar ahora la compacidad al estudio de los grupos topológicos.

**Grupos topológicos localmente compactos** Empezamos observando que la compacidad local en un grupo topológico (en particular en un espacio vectorial topológico) tiene la caracterización que cabe esperar:

**Teorema 10.47** *Un grupo topológico es localmente compacto si y sólo si existe un entorno de* 1 *compacto.*

Demostración: Sea $G$ un grupo topológico con un entorno de 1 compacto $U$. Si $V$ es cualquier otro entorno de 1, por el teorema 10.15 existe un entorno cerrado de 1 tal que $W \subset U \cap V$. Por estar contenido en $U$ es compacto, luego 1 tiene una base de entornos compactos. Si $g \in G$, los trasladados por $g$ de los entornos compactos de 1 forman una base de entornos compactos de $g$, luego $G$ es localmente compacto. La otra implicación es trivial. ■

La completitud en los grupos topológicos es una propiedad local, en el sentido siguiente:

**Teorema 10.48** *Si $G$ es un grupo topológico y $U$ es un entorno de 1 que es completo con la uniformidad izquierda, derecha o bilátera, entonces $G$ es completo. Lo mismo sucede si para todo $a \in G$ el conjunto $UaU$ es completo respecto de la uniformidad inferior.*

DEMOSTRACIÓN: Podemos suponer que $U$ es equilibrado y, cambiando $U$ por $\overline{U}$, que es cerrado. Por el teorema 10.13 las traslaciones son uniformemente continuas (respecto de las cuatro uniformidades), por lo que todos los subespacios $aU$ y $Ua$, con $a \in G$, son completos, así como $aU \cap Ua$ y, en caso de que la uniformidad sea la inferior, tenemos que $UaU$ es completo por hipótesis.

Si $F$ es un filtro de Cauchy en $G$, existe $A \in F$ tal que $d(A) < V_U$ (para la uniformidad izquierda, derecha o bilátera). Tomamos $a \in A$ y sea $B = B_{V_U}(a)$, de modo que $A \subset B$. Notemos que $B$ es uno de los subespacios $aU$, $Ua$, $aU \cap Ua$ o $UaU$, luego es completo.

Es claro que $F|_B = \{C \cap B \mid C \in F\}$ es un filtro de Cauchy en $B$, luego converge, y esto implica que $F$ converge al mismo límite. ■

Como consecuencia:

**Teorema 10.49** *Todo grupo topológico localmente compacto es completo respecto a cualquiera de las cuatro uniformidades naturales.*

DEMOSTRACIÓN: Si $G$ es un grupo topológico localmente compacto, podemos tomar un entorno compacto $U$ de 1. Si $a \in G$, entonces $UaU$ también es compacto, pues lo es $Ua$ y claramente $UaU$ es la imagen de $Ua \times U$ por la aplicación producto, que es continua. En particular, tanto $U$ como $UaU$ son completos con cualquiera de las uniformidades que heredan de $G$ (teorema 4.63), luego el teorema anterior implica que $G$ es completo respecto a las cuatro uniformidades. ■

En particular, todo subgrupo localmente compacto de un grupo topológico de Hausdorff es cerrado. Notemos, por otra parte, que $]0, 1[$ es un espacio uniforme localmente compacto no completo.

**Teorema 10.50** *Si $G$ es un grupo topológico localmente compacto y $N$ es un subgrupo normal cerrado, entonces $G/N$ es localmente compacto y si $C \subset G/N$ es un subconjunto compacto, existe $K \subset G$ compacto tal que $p[K] = C$, donde $p : G \longrightarrow G/N$ es la proyección canónica.*

DEMOSTRACIÓN: Como $p$ es abierta, la imagen por $p$ de un entorno compacto de 1 es un entorno compacto de 1 en $G/N$, luego $G/N$ es localmente compacto.

Si $U$ es un entorno abierto de 1 con clausura compacta, entonces $\{p[gU]\}_{g\in G}$ es un cubrimiento abierto de $G/N$, luego $C$ admite un subcubrimiento finito. Pongamos que $C \subset \bigcup_{i=1}^{n} p[g_iU]$. Basta tomar $K = p^{-1}[C] \cap \bigcup_{i=1}^{n} g_i\overline{U}$. ■

**Grupos topológicos totalmente acotados** Una consecuencia notable del teorema 4.60 es que en un grupo topológico compacto las cuatro uniformidades naturales coinciden. En cambio, el ejemplo A.47 es un caso de grupo localmente compacto en el cual difieren. Un poco más en general, vamos a ver que la coincidencia se da de hecho en los grupos topológicos totalmente acotados.

Como en el caso de la completitud, a la hora de definir lo que entendemos por un grupo topológico totalmente acotado tenemos que especificar la uniformidad que consideramos, pero en este caso hay menos opciones:

**Teorema 10.51** *Si $G$ es un grupo topológico y $A \subset G$ cumple que $A = A^{-1}$, entonces $A$ es totalmente acotado en $G$ si y sólo si lo es en $G_i$ si y sólo si lo es en $G_d$.*

DEMOSTRACIÓN: La equivalencia de la acotación total respecto de $G_i$ y $G_d$ se sigue del teorema 10.12. Por otra parte, como la identidad $G \longrightarrow G_i$ es uniformemente continua, si $A$ es totalmente acotado en $G$ lo es en $G_i$. Supongamos finalmente que $A$ es totalmente acotado en $G_i$, luego en $G_d$, y veamos que lo es en $G$.

Sea $U_0$ un entorno equilibrado de 1 y consideremos la banda $V_{U_0}$. Sea $U$ otro entorno equilibrado de 1 tal que $UU \subset U_0$. Así $2V_U \subset V_{U_0}$. Además podemos descomponer $V_U = V_U^i \cap V_U^d$. Por hipótesis existen $F_i, F_d \subset G$ finitos tales que $A \subset V_U^i[F_i] \cap V_U^d[F_d]$. Equivalentemente,

$$A \subset \bigcup_{(u,v) \in F_i \times F_d} (B_{V_U^i}(u) \cap B_{V_U^d}(v)).$$

Descartamos las intersecciones vacías y, para las restantes, observamos que si $z \in B_{V_U^i}(u) \cap B_{V_U^d}(v)$, entonces $B_{V_U^i}(u) \cap B_{V_U^d}(v) \subset B_{2V_U}(z) \subset B_{V_{U_0}}(z)$, luego $A$ está cubierto por un número finito de bolas de radio $V_{U_0}$, lo que implica que $A$ es totalmente acotado en $G$. ■

**Definición 10.52** Diremos que un grupo topológico $G$ es *totalmente acotado* si lo es respecto de su uniformidad izquierda, o derecha, o bilátera.

El ejemplo A.50 muestra un caso de grupo topológico que no es totalmente acotado, pero sí que lo es respecto de su uniformidad inferior. Ahora ya podemos probar:

**Teorema 10.53** *En un grupo topológico de Hausdorff totalmente acotado, las uniformidades izquierda y derecha coinciden.*

DEMOSTRACIÓN: Si $G$ es un grupo topológico totalmente acotado, entonces $\hat{G}$ es un grupo topológico compacto, luego sus uniformidades izquierda y derecha coinciden, pero las uniformidades izquierda y derecha de $G$ son las restricciones de las de $\hat{G}$, luego también coinciden. ■

**Grupos topológicos compactos** Es inmediato que si $A$ es un subconjunto abierto de un grupo topológico y $B$ es un subconjunto cualquiera, entonces $AB = \bigcup\limits_{b\in B} Ab$ es abierto. Sin embargo, no es cierto que el producto de subconjuntos cerrados sea necesariamente cerrado. Por ejemplo, en $\mathbb{R}^2$ podemos considerar

$$A = \mathbb{R} \times \{0\}, \quad B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0,\ xy = 1\}.$$

Entonces $A + B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$, que no es cerrado. No obstante:

**Teorema 10.54** *Sean $A$ y $B$ subconjuntos de un grupo topológico $G$.*

1. *Si $A$ es compacto y $B$ es cerrado, entonces $AB$ y $BA$ son cerrados.*
2. *Si $A$ y $B$ son compactos, entonces $AB$ y $BA$ son compactos.*

Demostración: La segunda propiedad es inmediata, pues $A$ y $B$ son imágenes continuas del compacto $A \times B$. Veamos que $BA$ es cerrado. Igualmente se prueba que $AB$ también lo es.

Si $g \in G \setminus BA$, entonces $B^{-1}g \cap A = \varnothing$. Para cada $a \in A$ existe un entorno de 1 equilibrado tal que $aU_aU_aU_a \cap B^{-1}g = \varnothing$, luego $aU_aU_a \cap (B^{-1}gU_a) = \varnothing$.

Por compacidad existen $a_1, \ldots, a_n \in A$ tales que $A \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} a_iU_{a_i}$. Llamemos $U = \bigcap\limits_{i=1}^{n} U_{a_i}$, de modo que, para cada $a \in A$, existe un $i$ tal que

$$aU \subset a_iU_{a_i}U \subset a_iU_{a_i}U_{a_i},$$

luego $aU \cap B^{-1}gU = \varnothing$, y por lo tanto $AU \cap B^{-1}gU = \varnothing$. De aquí se sigue que $gUU \cap BA = \varnothing$, luego $g \in gUU \subset G \setminus BA$, luego $G \setminus BA$ es abierto. ■

Veamos algunas aplicaciones:

**Teorema 10.55** *Si $G$ es un grupo topológico y $N$ es un subgrupo normal compacto, entonces la proyección $p : G \longrightarrow G/N$ es cerrada.*

Demostración: Si $B \subset G$ es cerrado, entonces $BN$ es compacto por el teorema anterior, luego $p[BN] = p[B]$ es cerrado. ■

**Teorema 10.56** *Sea $G$ un grupo topológico y $N$ un subgrupo normal cerrado. Entonces $G$ es compacto si y sólo si lo son $N$ y $G/N$.*

Demostración: Obviamente, si $G$ es compacto lo es $N$ (por ser cerrado) y $G/N$ (por ser imagen continua de $G$). Si $N$ y $G/N$ son compactos, sea $\{F_i\}_{i\in I}$ una familia de cerrados en $G$ con la propiedad de la intersección finita. No perdemos generalidad si suponemos que es cerrada para intersecciones finitas.

Sea $p : G \longrightarrow G/N$ la proyección canónica. Por el teorema anterior tenemos que $\{p[F_i]\}_{i\in I}$ es una familia de cerrados en $G/N$ con la propiedad de la intersección finita. Por compacidad podemos tomar $x \in \bigcap\limits_{i\in I} p[F_i]$. Pongamos que $x = f_in_i$, con $f_i \in F_i$, $n_i \in N$.

Sea $A_i = \overline{\{n_j \mid F_j \subset F_i\}} \subset N$. Como $\{F_i\}_{i\in I}$ es cerrada para intersecciones finitas, es claro que $\{A_i\}_{i\in I}$ es una familia de cerrados en $N$ con la propiedad de la intersección finita, luego existe un $n \in N \cap \bigcap\limits_{i\in I} A_i$. Entonces

$$n \in \overline{\{n_j \mid F_j \subset F_i\}},$$

luego, aplicando el homeomorfismo $g \mapsto xg^{-1}$ obtenemos que

$$xn^{-1} \in \overline{\{xn_j^{-1} \mid F_j \subset F_i\}} = \overline{\{f_j \mid F_j \subset F_i\}} \subset F_i,$$

luego $xn^{-1} \in \bigcap\limits_{i\in I} F_i \neq \varnothing$. ■

El teorema 10.42 nos da que en un grupo topológico conexo cualquier entorno del neutro es un sistema generador. Ahora consideramos el extremo opuesto, el de los grupos totalmente disconexos. Si suponemos la compacidad local tenemos que hay entornos del neutro que generan subgrupos arbitrariamente pequeños.

**Teorema 10.57** *En un grupo topológico de Hausdorff localmente compacto (compacto) totalmente disconexo los subgrupos (normales) abiertos compactos forman una base de entornos de* 1.

Demostración: Sea $G$ un grupo localmente compacto totalmente disconexo, que será, de hecho, cerodimensional, por el teorema 4.29. Sea $U$ un entorno compacto de 1. Entonces existe un abierto compacto $A$ con $1 \in A \subset U$. Sea $B$ el conjunto de todos los $g \in G$ tales que $Ag \in A$. Vamos a probar que $H = B \cap B^{-1}$ es un subgrupo abierto y compacto contenido en $U$.

Veamos que $B$ es abierto. Sea $g \in B$ y $x \in A$. Puesto que $xg \in A$ y $A$ es abierto, por la continuidad del producto, existen entornos $U_x$ y $V_x$ de los puntos $x$ y $g$ tales que $U_xV_x \subset A$. Como $A$ es compacto, podemos cubrirlo con un número finito de $U_x$. Sea $V$ la intersección de los correspondientes $V_x$. Entonces $AV \subset A$ y por consiguiente $V \subset B$.

Veamos ahora que $B$ es cerrado o, equivalentemente, que $G \setminus B$ es abierto. Sea $r \in G \setminus B$. Como $Ar \not\subset A$ existe un $a \in A$ de modo que $ar \in G \setminus A$. Por tanto existe un entorno $W$ de $r$ tal que $aW \subset G \setminus A$. Esto prueba que $W \subset G \setminus B$ y consecuentemente que $B$ es cerrado.

Como $1 \in A$, para cada $y \in B$ tenemos que $y = 1y \in A$, luego $B \subset A$. Trivialmente $1 \in B$. Hemos probado que $H$ es un entorno de 1 abierto y compacto. Falta ver que es un subgrupo.

Sean $h$, $k \in H$. Entonces $h \in B$ y $k^{-1} \in B$, luego

$$A(hk^{-1}) = (Ah)k^{-1} \subset Ak^{-1} \subset A.$$

Esto prueba que $hk^{-1} \in B$ e igualmente se prueba que $(hk^{-1})^{-1} = kh^{-1} \in B$ luego $hk^{-1} \in H$.

Si $G$ es compacto llamamos $N$ a la intersección de los subgrupos $g^{-1}Hg$ con $g \in G$. Claramente $N$ es un subgrupo normal compacto contenido en $H$. Basta ver que es abierto.

Por la continuidad del producto, para todo $g \in G$ existen entornos $V_g$ y $W_g$ de 1 y $g$ respectivamente tales que $W_g^{-1}V_gW_g \subset H$. Como $G$ es compacto podemos cubrirlo con una cantidad finita de abiertos $W_g$. Sea $V$ la intersección de los $V_g$ correspondientes. Entonces $g^{-1}Vg \subset H$ para todo $g \in G$. De aquí que $V \subset N$. Así pues $N$ es un entorno del neutro y al ser un subgrupo lo es de todos sus puntos. ■

**Teorema 10.58** *Si $G$ es un grupo topológico localmente compacto, la componente conexa de* 1 *es la intersección de todos los subgrupos abiertos de $G$, y coincide con la cuasicomponente de* 1*.*

Demostración: Sea $C$ la componente conexa de 1. Si $H$ es un subgrupo abierto de $G$, también es cerrado, por 10.4, luego $C \subset H$ y $H/C$ es un subgrupo abierto de $G/C$. Más aún, todo subgrupo abierto de $G/C$ es de esta forma. El teorema 10.45 nos da que $G/C$ es totalmente disconexo, luego, si $g \in G$ pertenece a todos los subgrupos abiertos de $G$, el teorema anterior nos da que $gC$ está en todos los entornos de 1 en $G/C$, luego $gC = 1C$ y $g \in C$. Como $C$ es intersección de abiertos cerrados, tiene que contener a la cuasicomponente de 1, y la inclusión opuesta se da siempre. ■

En la sección 11.5 estudiamos la compacidad en espacios vectoriales topológicos. 416

## 10.8 La medida de Haar

**Definición 10.59** Una *medida de Haar izquierda* (resp. *derecha*) en un grupo topológico $G$ es una medida de Borel regular (definición 5.72) no nula $(G, \mathcal{B}, \mu)$ tal que para todo $A \in \mathcal{B}$ y todo $g \in G$ se cumple que $\mu(gA) = \mu(A)$ (resp. $\mu(Ag) = \mu(A)$). (Notemos que los conjuntos $gA$ y $Ag$ son de Borel por el teorema 5.73.)

En otras palabras, una medida de Haar es una medida de Borel invariante por traslaciones izquierdas o derechas. Vamos a probar que todo grupo topológico de Hausdorff localmente compacto tiene medidas de Haar izquierdas y derechas únicas salvo multiplicación por una constante. La existencia de medidas invariantes en grupos de Lie fue demostrada por Hurwitz en 1897, mientras que en 1933 Haar demostró su existencia en grupos topológicos localmente compactos métricos separables. En 1935 von Neumann probó la unicidad, y en 1940 Weil probó la existencia y unicidad en el caso general de grupos topológicos localmente compactos. La prueba de Weil usa el teorema de Tychonoff y depende, por consiguiente, del axioma de elección, pero el mismo año Cartan publicó otra prueba que no lo requiere basada en la prueba de Weil de la unicidad de la medida de Haar.

La prueba de Cartan es bastante más técnica, así que aquí presentamos una variante de la prueba de Weil, pero veremos que si el grupo $G$ tiene una base numerable la aplicación del teorema de Tychonoff no requiere el axioma de elección.

La prueba del teorema siguiente no ofrece ninguna dificultad y muestra que la existencia de una medida de Haar izquierda implica la existencia de una medida de Haar derecha, y viceversa:

**Teorema 10.60** *Si $G$ es un grupo topológico y $\mu$ es una medida de Haar izquierda (resp. derecha), entonces $\hat{\mu}(A) = \mu(A^{-1})$ es una medida de Haar derecha (resp. izquierda).*

**Existencia** Para la prueba de existencia necesitamos dos resultados previos sencillos sobre grupos topológicos:

**Teorema 10.61** *Si $G$ es un grupo topológico y $K \subset U \subset G$, donde $K$ es compacto y $U$ es abierto, existe un entorno abierto de 1 tal que $KV \subset U$.*

Demostración: Para cada $x \in K$, sea $V_x$ un entorno abierto de 1 tal que $V_xV_x \subset x^{-1}U$. Los abiertos $xV_x$ cubren $K$, luego podemos extraer un subcubrimiento finito $K \subset x_1V_{x_1} \cup \cdots \cup x_nV_{x_n}$. Basta tomar $V = V_{x_1} \cap \cdots \cap V_{x_n}$, pues si $x \in K$, existe un $i$ tal que $x \in x_iV_{x_i}$, luego $xV \subset x_iV_{x_i}V_{x_i} \subset U$. ■

**Teorema 10.62** *Sea $X$ un espacio de Hausdorff, sea $K \subset X$ compacto y sean $U_1$, $U_2$ abiertos en $X$ tales que $K \subset U_1 \cup U_2$. Entonces existen compactos $K_1$, $K_2$ tales que $K = K_1 \cup K_2$ y $K_i \subset U_i$.*

Demostración: Consideremos los compactos $C_1 = K \setminus U_1$, $C_2 = K \setminus U_2$. Claramente $C_1 \cap C_2 = \varnothing$, luego 4.10 nos da que existen abiertos disjuntos $V_1$ y $V_2$ tales que $C_i \subset V_i$. Basta tomar $K_1 = K \setminus V_1$, $K_2 = K \setminus V_2$, con lo que tenemos dos compactos tales que $K = K_1 \cup K_2$ y $K_i \subset U_i$. ■

Para eludir el axioma de elección cuando $G$ tiene una base numerable usaremos el teorema siguiente:

**Teorema 10.63** *Si $G$ es un grupo topológico de Hausdorff localmente compacto con una base numerable, existe un conjunto numerable $\mathcal{K}$ tal que:*

1. *Los elementos de $\mathcal{K}$ son subconjuntos compactos de $G$.*
2. *Toda unión finita de elementos de $\mathcal{K}$ está en $\mathcal{K}$.*
3. *Si $K \subset U \subset G$, donde $K$ es compacto y $U$ es abierto, existe $K' \in \mathcal{K}$ tal que $K \subset \mathring{K}' \subset K' \subset U$.*
4. *Existe un subgrupo denso $D \subset G$ tal que si $d \in D$ y $K \in \mathcal{K}$, entonces $dK \in \mathcal{K}$.*

Demostración: Sea $\mathcal{B}$ una base numerable de $G$. Eligiendo un elemento de cada abierto básico obtenemos un conjunto denso numerable $D_0 \subset G$. Si $D$ es el menor subgrupo que contiene a $D_0$, también es numerable, y sigue siendo denso.

En efecto, podemos construir $D$ como $D = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} D_n$, donde $D_0$ es el conjunto denso dado y $D_{n+1} = D_n D_n \cup D_n^{-1}$, de modo que cada $D_n$ es numerable y $D$ también lo es.

Sea $\mathcal{K}_0$ el conjunto de las clausuras de los abiertos de $\mathcal{B}$ relativamente compactos. Puesto que tenemos una aplicación suprayectiva $\mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{K}_0$, se cumple que $\mathcal{K}_0$ también es numerable, y también lo es la clase de las uniones finitas de elementos de $\mathcal{K}_0$, por lo que podemos suponer que $\mathcal{K}_0$ es cerrado para uniones finitas.

Veamos que $\mathcal{K}_0$ cumple la segunda propiedad del enunciado. En primer lugar, si $U \subset G$ es abierto y $x \in U$, como $G$ es localmente compacto, existe un entorno compacto $C$ de $x$ tal que $x \in C \subset U$, luego existe un abierto $V \in \mathcal{B}$ tal que $x \in V \subset \mathring{C} \subset U$, luego la clausura $K' = \overline{V} \subset C$ es compacta, luego $K' \in \mathcal{K}_0$ y $x \in V \subset \mathring{K}' \subset K' \subset U$.

Si $K \subset U$, los interiores de los elementos de $\mathcal{K}_0$ contenidos en $U$ cubren $K$, luego podemos extraer un subcubrimiento finito

$$K \subset \mathring{K}_1 \cup \cdots \cup \mathring{K}_n \subset K_1 \cup \cdots \cup K_n \subset U,$$

donde $K_i \in \mathcal{K}_0$ y, como $\mathcal{K}_0$ es cerrado para uniones finitas, $K' = K_1 \cup \cdots \cup K_n$ cumple $K' \in \mathcal{K}_0$ y $K \subset \mathring{K}' \subset U$.

Definimos $\mathcal{K}_1 = \bigcup\limits_{d \in D} d\mathcal{K}_0$, que es una unión numerable de conjuntos numerables, luego sigue siendo numerable. Como las traslaciones son homeomorfismos, $\mathcal{K}_1$ cumple las propiedad 1) del enunciado. Como $1 \in D$, tenemos que $\mathcal{K}_0 \subset \mathcal{K}_1$, por lo que $\mathcal{K}_1$ también cumple la propiedad 3). Además cumple la 4), pues si $K \in \mathcal{K}_1$, existe un $K' \in \mathcal{K}_0$ y un $d_0 \in D$ de manera que $K = d_0 K'$, luego si $d \in D$ se cumple que $dK = dd_0 K'$, pero $dd_0 \in D$, porque $D$ es cerrado para productos, luego $dK \in \mathcal{K}_1$.

Finalmente definimos $\mathcal{K}$ como el conjunto de uniones finitas de elementos de $\mathcal{K}_1$, que sigue siendo numerable y es claro que cumple todas las propiedades requeridas. ■

**Teorema 10.64** *Si $G$ es un grupo topológico de Hausdorff localmente compacto, existe*[4] *una medida de Haar izquierda y una medida de Haar derecha en $G$.*

Demostración: Por el teorema 10.60 basta probar que existe una medida de Haar izquierda. Si $K \subset G$ es compacto y $V \subset G$ tiene interior no vacío, entonces $K \subset \bigcup\limits_{g \in G} g\mathring{V}$, luego existen $g_1, \ldots, g_n \in G$ tales que $K \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} g\mathring{V}$. Definimos $(K : V)$ como el mínimo número natural $n$ para el que esto sucede (que sólo sera nulo si $K = \varnothing$).

[4]Según hemos indicado, la prueba que vamos a dar requiere el axioma de elección, pero no marcamos el teorema con **(AE)** porque existe otra prueba que no lo requiere. Como también hemos indicado, la prueba que presentamos no requiere AE cuando $G$ tiene una base numerable.

Sea $\mathcal{K}$ el conjunto de todos los subconjuntos compactos de $G$ (o, en ausencia del axioma de elección, el conjunto numerable dado por el teorema 10.63). Como $G$ es localmente compacto, existe $K_0 \in \mathcal{K}$ tal que $\mathring{K}_0 \neq \varnothing$.

Para cada entorno abierto $U$ de 1, definimos $\mu_U : \mathcal{K} \longrightarrow \mathbb{R}$ mediante

$$\mu_U(K) = \frac{(K : U)}{(K_0 : U)} \geq 0.$$

Notemos que, como $K_0 \neq \varnothing$, se cumple $(K_0 : U) \neq 0$. Veamos que

$$0 \leq \mu_U(K) \leq (K : K_0).$$

Ciertamente $\mu_U(K)$ es un cociente de números naturales, luego no es negativo. Tenemos que probar que

$$(K : U) \leq (K : K_0)(K_0 : U).$$

Por abreviar, escribiremos $m = (K : K_0)$, $n = (K_0 : U)$. Entonces, existen $g_1, \ldots g_m, h_1, \ldots, h_n \in G$ tales que

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{m} g_i \mathring{K}_0, \qquad K_0 \subset \bigcup_{j=1}^{n} h_j U.$$

Por lo tanto $K \subset \bigcup\limits_{i=1}^{m} \bigcup\limits_{j=1}^{n} g_i h_j U$, por lo que $(K : U) \leq mn$.

Consideramos ahora el espacio compacto[5] $X = \prod\limits_{K \in \mathcal{K}} [0, (K : K_0)]$, de modo que podemos considerar a cada $\mu_U$ como un punto de $X$. Para cada entorno abierto $V$ de 1, definimos

$$C(V) = \overline{\{\mu_U \mid U \subset V\}} \subset X,$$

donde $U$ recorre también los entornos abiertos de 1. La familia formada por estos conjuntos tiene la propiedad de la intersección finita, pues si $V_1, \ldots, V_n$ son entornos abiertos de 1 y $V = V_1 \cap \cdots \cap V_n$, entonces $\mu_V \in \bigcap\limits_{i=1}^{n} C(V_i)$. Como $X$ es compacto, existe $\mu \in \bigcap\limits_{V} C(V)$, que es una aplicación $\mu : \mathcal{K} \longrightarrow [0, +\infty[$.

1. *Si $K_1 \subset K_2$ son elementos de $\mathcal{K}$, entonces $\mu(K_1) \leq \mu(K_2)$.*

   En efecto, si $U$ es un entorno abierto de 1, el cubrimiento con el que calculamos $(K_2 : U)$ cubre también a $K_1$, luego $(K_1 : U) \leq (K_2 : U)$, luego $\mu_U(K_1) \leq \mu_U(K_2)$.

   Ahora, la aplicación $\phi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $\phi(f) = f(K_2) - f(K_1)$ es continua y toma valores $\geq 0$ en cada $\mu_U$, luego por continuidad también en cada $C(V)$, luego $\phi(\mu) \geq 0$ y así $\mu(K_1) \leq \mu(K_2)$.

[5] El único uso de AE en la prueba consiste en la aplicación del teorema de Tychonoff para justifica que $X$ es compacto, pero según las observaciones tras el teorema 4.16, en el caso en que $\mathcal{K}$ es numerable no se requiere el axioma de elección.

2. *Si* $K_1,\ K_2 \in \mathcal{K}$, *entonces* $\mu(K_1 \cup K_2) \leq \mu(K_1) + \mu(K_2)$.

   Si $U$ es un entorno abierto de 1, uniendo los cubrimientos de $K_1$ y $K_2$ con los que calculamos $(K_1 : U)$ y $(K_2 : U)$ obtenemos un cubrimiento de $K_1 \cup K_2$, de donde $(K_1 \cup K_2 : U) \leq (K_1 : U) + (K_2 : U)$, y de aquí que $\mu_U(K_1 \cup K_2) \leq \mu_U(K_1) + \mu_U(K_2)$.

   Como antes, consideramos la función continua $\phi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $\phi(f) = f(K_1 \cup K_2) - f(K_1) - f(K_2)$, que es $\geq 0$ en cada $\mu_U$, luego en cada $C(V)$, luego $\phi(\mu) \geq 0$ y esto prueba la relación indicada.

3. *Si* $K_1U^{-1} \cap K_2U^{-1} = \varnothing$, *entonces* $\mu_U(K_1 \cup K_2) = \mu_U(K_1) + \mu_U(K_2)$.

   En efecto, sea $(K_1 \cup K_2 : U) = n$, de modo que existen $g_1, \ldots, g_n \in G$ tales que $K_1 \cup K_2 \subset g_1U \cup \cdots \cup g_nU$. Si un $g_iU$ corta a tanto a $K_1$ como a $K_2$, entonces $g_i \in K_1U^{-1} \cap K_2U^{-1} = \varnothing$, luego, reordenando los $g_i$, podemos suponer que $K_1 \subset g_1U \cup \cdots \cup g_mU$, $K_2 \subset g_{m+1}U \cup \cdots \cup g_nU$, luego $(K_1 : U) + (K_2 : U) \leq n = (K_1 \cup K_2 : U)$. El paso previo nos da la igualdad.

4. *Si* $K_1 \cap K_2 = \varnothing$, *entonces* $\mu(K_1 \cup K_2) = \mu(K_1) + \mu(K_2)$.

   Por 4.10 existen abiertos disjuntos $K_i \subset U_i$ y por el teorema anterior existen entornos abiertos de 1 tales que $K_iV_i \subset U_i$. Si $V = V_1 \cap V_2$, entonces $K_1V \cap K_2V = \varnothing$, y si $U \subset V^{-1}$, entonces $K_1U^{-1} \cap K_2U^{-1} = \varnothing$, luego, por el apartado anterior, $\mu_U(K_1 \cup K_2) = \mu_U(K_1) + \mu_U(K_2)$. Esto hace que la función $\phi(f) = f(K_1 \cup K_2) - f(K_1) - f(K_2)$ es nula en $C(V^{-1})$, luego en $\mu$, y así obtenemos la conclusión.

Para cada abierto $U$ en $G$, definimos $\mu(U) = \sup\{\mu(K) \mid K \in \mathcal{K},\ K \subset U\}$.

Observemos que si $K \in \mathcal{K}$ es compacto y abierto, entonces $\mu(K)$ en el sentido que acabamos de definir coincide con el que ya teníamos definido. Esto supone probar que

$$\mu(K) = \sup\{\mu(K') \mid K' \in \mathcal{K},\ K' \subset K\},$$

donde aquí $\mu$ es en ambos miembros la que ya teníamos definida. Ahora bien, la desigualdad $\leq$ es obvia, y la opuesta se sigue del apartado 1 anterior.

Veamos ahora que si $g \in G$, entonces $\mu(U) = \mu(gU)$. En este punto tenemos que distinguir el caso general en que $\mathcal{K}$ es el conjunto de todos los subconjuntos compactos de $G$ del caso en que $\mathcal{K}$ viene dado por el teorema 10.63.

En ambos casos tenemos que si $K \in \mathcal{K}$, $U \subset G$ es abierto y $g \in G$, entonces $(K : U) = (gK, U)$. Basta tener en cuenta que si $K \subset g_1U \cup \cdots \cup g_nU$, entonces $gK \subset gg_1U \cup \cdots \cup gg_nU$.

En el caso general, de aquí deducimos que $\mu_U(K) = \mu_U(gK)$, y la función continua $\phi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $\phi(f) = f(gK) - f(K)$ se anula en todos los puntos $\mu_U$, luego también en cada $C(V)$, luego $\phi(\mu) = 0$, luego se cumple que $\mu(gK) = \mu(K)$. A su vez, de aquí se sigue inmediatamente que $\mu(U) = \mu(gU)$.

Si $\mathcal{K}$ viene dado por el teorema 10.63 el razonamiento no es válido porque $gK$ no está necesariamente en $\mathcal{K}$ y $\mu_U(gK)$ no está definido necesariamente. Lo que sí que podemos afirmar es que $\mu_U(dK) = \mu_U(K)$ para todo $K \in \mathcal{K}$ y todo $d \in D$.

Este caso parte del supuesto de que $G$ tiene una base numerable, luego en particular tiene una base numerable de entornos de 1 y, por 10.21, es metrizable y existe una distancia $\rho$ invariante por la izquierda que induce su uniformidad izquierda. Tenemos que probar la igualdad entre:

$$\mu(U) = \sup\{\mu(K) \mid K \in \mathcal{K},\ K \subset U\}$$

y

$$\mu(gU) = \sup\{\mu(K) \mid K \in \mathcal{K},\ K \subset gU\}.$$

Podemos suponer que $U \neq G$, pues en caso contrario $gU = U$ y la igualdad es obvia. Si $K \in \mathcal{K}$ cumple $K \subset U$, entonces $gK \subset gU$ y podemos considerar

$$\epsilon = \rho(gK, G \setminus gU) = \operatorname{ínf}\{\rho(x, y) \mid (x, y) \in gK \times (G \setminus gU)\} > 0.$$

En efecto, esta distancia no puede ser nula, pues en tal caso existirían sucesiones $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ en $gK$ e $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ en $G \setminus gU$ de modo que $\lim\limits_n \rho(x_n, y_n) = 0$, pero como $gK$ es compacto, pasando a una subsucesión podemos suponer que existe $\lim\limits_n x_n = x \in gK$, pero entonces $\rho(x, G \setminus gU) = 0$, luego $x \in G \setminus gU$, contradicción.

Sea $C$ un entorno compacto de $g$ en $G$. El producto en $G$ es continuo en el compacto $C \times K$, luego es uniformemente continuo. Esto significa que existe un $\delta > 0$ tal que si $\rho(g, g') < \delta$ y $\rho(x, x') < \delta$, entonces $\rho(gx, g'x') < \epsilon/2$.

El entorno $C$ contiene una bola de centro $g$ y radio menor que $\delta$, en la cual podemos tomar un $d \in D$, y así, para todo $x \in K$, se cumple que $\rho(gx, dx) < \epsilon/2$, luego $dK \subset gU$, $dK \in \mathcal{K}$ y $\mu(dK) = \mu(K)$. Esto implica que $\mu(U) \leq \mu(gU)$.

Aplicando esta desigualdad al abierto $gU$ y a $g^{-1}$ obtenemos la desigualdad opuesta $\mu(gU) \leq \mu(U)$, luego tenemos la igualdad.

Es obvio que si $U_1 \subset U_2$, entonces $\mu(U_1) \leq \mu(U_2)$. Para cada $A \in \mathcal{P}G$ definimos

$$\mu^*(A) = \operatorname{ínf}\{\mu(U) \mid A \subset U,\ \text{con } U \text{ abierto}\}.$$

Como en el paso anterior, se demuestra sin dificultad que esta definición coincide con la que ya teníamos en compactos y en abiertos, así como que si $A_1 \subset A_2$, entonces $\mu^*(A_1) \leq \mu^*(A_2)$. También es inmediata la igualdad $\mu^*(gA) = \mu^*(A)$.

Vamos a probar que $\mu^*$ es una medida exterior en $G$ (definición B.16). Ciertamente toma valores $\geq 0$ y $\mu^*(\varnothing) = 0$. Sólo tenemos que probar que si $\{A_k\}_{k=0}^{\infty}$ es cualquier sucesión en $\mathcal{P}G$, entonces

$$\mu^*\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k\right) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \mu^*(A_k).$$

Supongamos en primer lugar que los $A_k$ son abiertos. Si $K \in \mathcal{K}$ cumple $K \subset \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k$, por compacidad existe un $n$ tal que $K \subset \bigcup_{k=0}^{n} A_k$. Aplicando el teorema 10.62 varias veces, descomponemos $K = \bigcup_{k=0}^{n} K_k$, con $K_k \subset A_k$.

En el caso en que $\mathcal{K}$ viene dado por el teorema 10.63, no es necesario que los $K_i$ estén en $\mathcal{K}$, pero podemos tomar $K_i' \in \mathcal{K}$ tales que $K_i \subset K_i' \subset A_k$ (en el caso general tomamos $K_i' = K_i$). Por las propiedades 1 y 2 anteriores:

$$\mu(K) \leq \mu\Big(\bigcup_{k=0}^{n} K_k'\Big) \leq \sum_{k=0}^{n} \mu(K_k') \leq \sum_{k=0}^{n} \mu(A_k) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \mu(A_k).$$

Tomando el supremo para todo $K$ concluimos la desigualdad que queríamos probar (para conjuntos abiertos). En el caso general, podemos suponer que $\sum_{k=0}^{\infty} \mu^*(A_k) < +\infty$, pues en caso contrario la desigualdad es trivial. Dado $\epsilon > 0$, tomamos un abierto $U_k$ tal que $A_k \subset U_k$ y $\mu(U_k) < \mu^*(A_k) + \epsilon/2^{k+1}$. Así

$$\mu^*\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k\right) \leq \mu\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} U_k\right) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \mu(U_k) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \mu^*(A_k) + \epsilon,$$

y como $\epsilon$ es arbitrario, podemos eliminarlo.

Veamos que todo abierto $U$ es $\mu^*$-medible, con lo que toda la $\sigma$-álgebra de Borel de $G$ estará contenida en la $\sigma$-álgebra de los conjuntos $\mu^*$-medibles.

Para ello tomamos $A \subset G$, y tenemos que probar que

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap U) + \mu^*(A \setminus U).$$

Podemos suponer que $\mu^*(A) < +\infty$, o la conclusión es trivial. Sea $\epsilon > 0$ y sea $A \subset V \subset G$ abierto tal que $\mu(V) < \mu^*(A) + \epsilon$. Sea $K \subset V \cap U$ en $\mathcal{K}$ tal que $\mu(V \cap U) - \epsilon \leq \mu(K)$. Sea $L \subset V \setminus K$ en $\mathcal{K}$ tal que $\mu(V \setminus K) - \epsilon \leq \mu(L)$. Así

$$\mu(V \setminus U) - \epsilon \leq \mu(V \setminus K) - \epsilon \leq \mu(L),$$

luego

$$\mu^*(A \cap U) + \mu^*(A \setminus U) - 2\epsilon \leq \mu(V \cap U) + \mu(V \setminus U) - 2\epsilon \leq \mu(K) + \mu(L)$$

$$= \mu(K \cup L) \leq \mu((V \cap U) \cup (V \setminus K)) \leq \mu(V) \leq \mu^*(A) + \epsilon.$$

Por lo tanto,

$$\mu^*(A \cap U) + \mu^*(A \setminus U) \leq \mu^*(A) + 3\epsilon$$

y, como $\epsilon$ es arbitrario, podemos eliminarlo y concluimos que $U$ es $\mu^*$-medible.

Llamamos $\mu$ a la restricción de $\mu^*$ a la $\sigma$-álgebra de Borel. Se trata de una medida que sobre abiertos y compactos toma los valores que habíamos definido previamente, de donde se sigue trivialmente que es regular.

Notemos que $\mu$ es no nula, pues, para todo abierto $U$, se cumple $\mu_U(K_0) = 1$, luego la función $p_{K_0} : X \longrightarrow \mathbb{R}$ toma el valor constante 1 sobre todas las $\mu_U$, luego también en cada $C(V)$, luego $p_{K_0}(\mu) = 1$, luego $\mu(K_0) = 1$.

Por último, como $\mu^*$ es invariante por traslaciones izquierdas, su restricción $\mu$ a la $\sigma$-álgebra de Borel de $G$ también lo es. ■

**Nota** Hemos construido la medida $\mu$ por restricción de una medida exterior $\mu^*$, usando el teorema B.17, pero éste afirma de hecho que la restricción de $\mu^*$ a la $\sigma$-álgebra de los conjuntos $\mu^*$-medibles es, de hecho, una medida completa, y hemos probado que es regular e invariante por traslaciones, luego podemos concluir que la compleción de la medida de Haar que hemos construido (teorema B.15) es también una medida regular invariante por traslaciones. ■

**Unicidad** Para probar la unicidad de la medida de Haar necesitamos algunas propiedades de estas medidas:

**Teorema 10.65** *Si $\mu$ es una medida de Haar en un grupo topológico de Hausdorff $G$, entonces todo abierto no vacío tiene medida positiva.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que $\mu$ es una medida de Haar izquierda. Para una medida derecha se razona análogamente. Por definición $\mu$ no es nula, luego existe un conjunto de Borel con medida positiva. Por la regularidad exterior, existe un abierto en $G$ con medida positiva y, por la regularidad interior, existe un compacto $K \subset G$ tal que $\mu(K) > 0$.

Sea $U$ un abierto no vacío. Si $x \in K$ y $u \in U$, entonces $x \in xu^{-1}U$, luego $K \subset \bigcup\limits_{g \in G} gU$ y podemos extraer un subcubrimiento finito, $K \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} g_iU$, con lo que $0 < \mu(K) \leq \sum\limits_{i=1}^{n} \mu(g_iU) = n\mu(U)$. Así pues, $\mu(U) > 0$. ■

**Teorema 10.66** *Si $G$ es un grupo topológico, $\mu$ es una medida de Haar izquierda en $G$, $f : G \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función integrable y $x \in G$, entonces también es integrable la función $g \mapsto f(xg)$ y*

$$\int_G f(xg)\, d\mu(g) = \int_G f(g)\, d\mu(g).$$

DEMOSTRACIÓN: Lo probamos en primer lugar cuando $f = \chi_A$, para cierto conjunto de Borel $A$. En tal caso $f(xg) = \chi_{x^{-1}A}(g)$ y $x^{-1}A$ también es de Borel, luego la función trasladada también es medible. Además

$$\int_G \chi_A(xg)\, d\mu(g) = \int_G \chi_{x^{-1}A}(g)\, d\mu(g) = \mu(x^{-1}A) = \mu(A) = \int_G \chi_A(g)\, d\mu(g).$$

En segundo lugar suponemos que $f = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}$ es una función simple. Entonces la función trasladada es $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{x^{-1}A_i}$, luego también es una función simple y

$$\begin{aligned}\int_G f(xg)\, d\mu(g) &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \int_G \chi_{A_i}(xg)\, d\mu(g)\\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \int_G \chi_{A_i}(g)\, d\mu(g) = \int_G f(g)\, d\mu(g).\end{aligned}$$

En tercer lugar suponemos que $f : G \longrightarrow [0, +\infty[$ es integrable, con lo que, según el teorema B.24, existe una sucesión $\{s_n\}_{n=1}^\infty$ monótona creciente de funciones simples que converge puntualmente a $f$. Entonces las funciones trasladadas $g \mapsto s_n(xg)$ también son simples y forman una sucesión monótona creciente convergente a $g \mapsto f(xg)$. Por el teorema de la convergencia monótona tenemos que ésta es medible y

$$\int_G f(xg)\, d\mu(g) = \lim_n \int_G s_n(xg)\, d\mu(g) = \lim_n \int_G s_n(g)\, d\mu(g) = \int_G f(g)\, d\mu(g),$$

luego en particular la función trasladada es integrable.

Finalmente, si $f$ es integrable, también lo son $f^+$ y $f^-$, y basta aplicar a ambas el caso precedente. ■

También necesitaremos un hecho general:

**Teorema 10.67** *Si $X$ es un espacio uniforme y $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función continua de soporte compacto, entonces es uniformemente continua.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $K$ el soporte de $f$ y fijemos $\epsilon > 0$. Como $f$ es continua, para cada $x \in K$, existe una banda abierta $V_x$ en $X$ tal que si $y \in B_{V_x}(x)$, entonces $|f(y) - f(x)| < \epsilon/2$. Sea $W_x$ tal que $W_x W_x \subset V_x$. Las bolas abiertas $B_{W_x}(x)$ cubren $K$, luego podemos extraer un subcubrimiento finito $K \subset B_{W_{x_1}}(x_1) \cup \cdots \cup B_{W_{x_n}}(x_n)$. Sea $V = W_{x_1} \cap \cdots \cap W_{x_n}$. Vamos a probar que si $d(x, y) < V$, entonces $|f(x) - f(y)| < \epsilon$.

En efecto, si $x$, $y \notin K$, entonces $f(x) = f(y) = 0$ y la conclusión es trivial, así que podemos suponer que uno de los dos puntos está en $K$, por ejemplo $x \in K$. Entonces existe un $i$ tal que $x \in B_{W_{x_i}}(x_i) \subset B_{V_{x_i}}(x_i)$. Además $(y, x) \in V \subset W_{x_i}$, luego $(y, x_i) \in 2W_{x_i} \subset V_{x_i}$, luego $y \in B_{V_{x_i}}(x_i)$. Así pues,

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(x_i)| + |f(x_i) - f(y)| < \epsilon.$$

Esto prueba que $f$ es uniformemente continua. ■

De aquí deducimos:

**Teorema 10.68** *Si $G$ es un grupo topológico de Hausdorff localmente compacto, $\mu$ es una medida de Borel regular en $G$ y $f : G \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función continua de soporte compacto, entonces las funciones*

$$x \mapsto \int_G f(xy)\, d\mu(y), \qquad x \mapsto \int_G f(yx)\, d\mu(y)$$

*son continuas.*

DEMOSTRACIÓN: Veamos que la segunda función es continua en un punto $x_0 \in G$. La comprobación para la primera es análoga. Sea $K$ el soporte de $f$ y sea $U$ un entorno abierto de $x_0$ con clausura compacta. Notemos que si $x \in U$ y $f(yx) \neq 0$, entonces $yx \in K$, luego $y \in K\overline{U}^{-1}$.

Por el teorema anterior, $f$ es uniformemente continua respecto de la uniformidad izquierda de $G$, luego, dado $\epsilon > 0$, existe un entorno abierto $U_0$ de 1 tal que si $x^{-1}y \in U_0$, entonces $|g(x) - g(y)| < \epsilon$.

Así, si $x \in U \cap x_0U_0$ e $y \in G$, tenemos que $(yx_0)^{-1}yx = x_0^{-1}x \in U_0$, luego $|f(yx) - f(yx_0)| < \epsilon$. Por lo tanto,

$$\left|\int_G f(yx)\,d\mu(y) - \int_G f(yx_0)\,d\mu(y)\right|$$

$$= \left|\int_{K\overline{U}^{-1}} f(yx)\,d\mu(y) - \int_{K\overline{U}^{-1}} f(yx_0)\,d\mu(y)\right|$$

$$\leq \int_{K\overline{U}^{-1}} |f(yx) - f(yx_0)|\,d\mu(t) \leq \epsilon\mu(K\overline{U}^{-1}).$$

Notemos que $\mu(K\overline{U}^{-1}) < +\infty$ porque es la medida de un conjunto compacto. Como $\epsilon$ es arbitrario, esto implica que la función integral es continua en $x_0$. ■

**Teorema 10.69** *Si $G$ es un grupo topológico de Hausdorff localmente compacto y $\mu$, $\nu$ son medidas de Haar izquierdas (resp. derechas) en $G$, existe una constante $c > 0$ tal que $\mu = c\nu$.*

DEMOSTRACIÓN: Observemos que existe $g : G \longrightarrow [0, 1]$ continua de soporte compacto y no nula. En efecto, como $G$ es localmente compacto, todo $p \in G$ tiene un entorno abierto $U$ de clausura compacta. Como $G$ es completamente regular, existe una función $g : G \longrightarrow [0, 1]$ tal que $g(p) = 1$ y $g[G \setminus U] = \{0\}$. Por lo tanto, el soporte de $g$ está contenido en $\overline{U}$, luego es compacto.

Por el teorema 5.77, $g$ es integrable respecto a toda medida de Haar en $G$. Más aún, vamos a probar que toda función continua $g : G \longrightarrow [0, +\infty[$ con soporte compacto tiene integral estrictamente positiva.

En efecto, como $g$ no es nula, existe un $a > 0$ tal que $U = \{x \in G \mid g(x) > a\}$, es un abierto no vacío, luego de medida positiva. Por lo tanto,

$$\int_G g\,d\mu \geq \int_U g\,d\mu \geq \int_U a\,d\mu = a\mu(U) > 0.$$

Sea ahora $f : G \longrightarrow \mathbb{R}$ cualquier función continua de soporte compacto y definimos $h : G \times G \longrightarrow \mathbb{R}$ mediante

$$h(x, y) = \frac{f(x)g(yx)}{\int_G g(tx)d\nu(t)}.$$

Notemos que $t \mapsto g(tx)$ es una función continua no nula de soporte compacto que no toma valores negativos, luego hemos probado que la integral del denominador es estrictamente positiva, y así $h$ está bien definida.

Sean $K_1$ y $K_2$ los soportes de $f$ y $g$, respectivamente. Si $h(x,y) \neq 0$, entonces $x \in K_1$, $yx \in K_2$, luego el soporte de $h$ está contenido en $K_1 \times (K_2 K_1^{-1})$, luego es compacto. Además $h$ es continua, pues el numerador de la expresión que la define lo es obviamente y el denominador lo es por el teorema anterior.

Ahora aplicamos el teorema 5.79 seguido de 10.66, de modo que

$$\int_G \int_G h(x,y)\, d\nu(y) d\mu(x) = \int_G \int_G h(x,y)\, d\mu(x) d\nu(y)$$

$$= \int_G \int_G h(y^{-1}x, y)\, d\mu(x) d\nu(y) = \int_G \int_G h(y^{-1}x, y)\, d\nu(y) d\mu(x)$$

$$= \int_G \int_G h(y^{-1}, xy)\, d\nu(y) d\mu(x).$$

En el último paso hemos aplicado 10.66 a la integral respecto de $\nu$ cambiando $y$ por $xy$. Ahora aplicamos la definición de $h$:

$$\int_G \int_G \frac{f(x)g(yx)}{\int_G g(tx) d\nu(t)}\, d\nu(y) d\mu(x) = \int_G \int_G \frac{f(y^{-1})g(x)}{\int_G g(ty^{-1}) d\nu(t)}\, d\nu(y) d\mu(x).$$

Equivalentemente,

$$\int_G f(x)\, d\mu(x) = \int_G g(x)\, d\mu(x) \int_G \frac{f(y^{-1})}{\int_G g(ty^{-1}) d\nu(t)} d\nu(y).$$

Ahora sólo tenemos que observar que el último factor depende de $f$, de $g$ y de $\nu$, pero no de $\mu$. Por lo tanto, el cociente

$$\frac{\int_G f(x)\, d\mu(x)}{\int_G g(x)\, d\mu(x)}$$

no depende de $\mu$, sino que es el mismo para toda medida de Haar izquierda $\mu$ en $G$. En particular,

$$\frac{\int_G f(x)\, d\mu(x)}{\int_G g(x)\, d\mu(x)} = \frac{\int_G f(x)\, d\nu(x)}{\int_G g(x)\, d\nu(x)},$$

para todo par de funciones continuas de soporte compacto $f$ y $g$, con $g$ estrictamente positiva. Equivalentemente,

$$\int_G f(x)\, d\mu(x) = c \int_G f(x)\, d\nu(x),$$

donde la constante

$$c = \frac{\int_G g(x)\, d\mu(x)}{\int_G g(x)\, d\nu(x)}$$

depende de $\mu$, $\nu$ y $g$, pero no de $f$. Vamos a probar que $\mu = c\nu$.

Sea $K \subset G$ compacto y sea $\epsilon > 0$. Por la regularidad exterior, existe un abierto $K \subset U \subset G$ tal que $\nu(U) < \nu(K) + \epsilon/c$. Pasando a un abierto menor, podemos exigir que $\overline{U}$ sea compacta. Como $G$ es completamente regular, el teorema 5.51 nos da que existe una función continua $f : G \longrightarrow [0, 1]$ tal que $f[K] = \{1\}$ y $f[G \setminus U] = \{0\}$. Entonces el soporte de $f$ está contenido en $\overline{U}$, luego se trata de una función continua de soporte compacto. Por lo tanto,

$$\mu(K) = \int_G \chi_K(x)\, d\mu(x) \leq \int_G f(x)\, d\mu(x) = c \int_G f(x)\, d\nu(x)$$

$$\leq c \int_G \chi_U(x)\, d\nu(x) = c\,\nu(U) < c\nu(K) + \epsilon.$$

Por lo tanto, $\mu(K) \leq c\nu(K)$. Intercambiando los papeles de $\mu$ y $\nu$ obtenemos la desigualdad contraria.

Con esto tenemos que las medidas $\mu$ y $c\nu$ coinciden sobre todos los compactos. Por la regularidad exterior coinciden sobre todos los abiertos y, por la regularidad interior, coinciden sobre todos los conjuntos de Borel.

El teorema 10.60 implica que la conclusión es válida también para medidas derechas. ■

Así pues, las medidas de Haar en grupos topológicos de Hausdorff localmente compactos son únicas salvo múltiplos por constantes positivas. Si $G$ es un grupo topológico de Hausdorff compacto, toda medida de Haar en $G$ es finita por definición, luego existe una única medida de Haar izquierda $\mu$ en $G$ tal que $\mu(G) = 1$. Lo mismo vale para medidas derechas. Concretamente, es claro que la única medida de Haar derecha que cumple $\hat{\mu}(G) = 1$ es la dada por el teorema 10.60.

Al hablar de "la medida de Haar" izquierda o derecha en un grupo topológico compacto, se sobreentiende habitualmente que se trata de la única medida que cumple $\mu(G) = 1$.

**La función modular** Estudiamos ahora el problema de cuándo las medidas de Haar derechas e izquierdas coinciden. Por supuesto, coinciden cuando el grupo es abeliano, pero vamos a ver que también lo hacen en muchos otros casos.

Si $G$ es un grupo topológico localmente compacto y $\mu$ es una medida de Haar izquierda en $G$, para cada $g \in G$, la traslación derecha $x \mapsto xg$ es un homeomorfismo, luego transforma conjuntos de Borel en conjuntos de Borel. Para cada conjunto de Borel $A$, podemos definir $\mu_g(A) = \mu(Ag)$, y es fácil ver que se trata de una medida de Borel en $G$ invariante por traslaciones izquierdas. El teorema 10.69 nos da entonces que existe una constante $\Delta(g) > 0$ tal que $\mu_g = \Delta(g)\mu$. Tenemos así definida una función $\Delta : G \longrightarrow ]0, +\infty[$.

Notemos que no depende de la elección de $\mu$, pues si $\nu$ es otra medida de Haar izquierda, existe un $c > 0$ tal que $\nu = c\mu$, y entonces

$$\nu_g(A) = \nu(Ag) = c\mu(Ag) = c\Delta(g)\mu(A) = \Delta(g)\nu(A).$$

**Definición 10.70** Si $G$ es un grupo topológico localmente compacto, llamamos *función modular* de $G$ a la única función $\Delta : G \longrightarrow ]0, +\infty[$ tal que para toda medida de Haar izquierda $\mu$ en $G$ se cumple que $\mu(Ag) = \Delta(g)\mu(A)$, para todo conjunto de Borel $A$ en $G$ y todo $g \in G$.

**Teorema 10.71** *Si $G$ es un grupo topológico de Hausdorff localmente compacto, entonces la función modular $\Delta : G \longrightarrow ]0, +\infty[$ es un homomorfismo continuo de grupos topológicos.*

DEMOSTRACIÓN: Es fácil ver que $\Delta$ es un homomorfismo:

$$\Delta(xy)\mu(A) = \mu(Axy) = \Delta(y)\mu(Ax) = \Delta(x)\Delta(y)\mu(A),$$

para todo conjunto de Borel $A$ y todos los $x$, $y \in G$, luego $\Delta(xy) = \Delta(x)\Delta(y)$.

Veamos la continuidad. Para cada función $f : G \longrightarrow \mathbb{R}$ y cada $x \in G$, definimos $f_x(y) = f(yx^{-1})$. Si $A \subset G$ es un conjunto de Borel, es claro que $(\chi_A)_x = \chi_{Ax}$, por lo que, si $\mu$ es una medida de Haar izquierda,

$$\int_G (\chi_A)_x(y)\, d\mu(y) = \mu(Ax) = \Delta(x)\mu(A) = \Delta(x) \int_G \chi_A(y)\, d\mu(y).$$

De aquí se sigue que la igualdad

$$\int_G f_x(y)\, d\mu(y) = \Delta(x) \int_G f(y)\, d\mu(y)$$

se cumple para funciones simples, y a su vez para funciones no negativas, y a su vez para funciones integrables. Si tomamos, concretamente, una función $f$ continua de soporte compacto no nula y que no tome valores negativos, entonces $\int_G f(y)\, d\mu(y) > 0$. (En la prueba del teorema 10.69 hemos visto que existen tales funciones y que su integral es positiva.) Por otra parte, el miembro izquierdo de la igualdad precedente es una función continua de $x$, por el teorema 10.68, luego la función $\Delta$ también es continua. ■

Hemos definido la función modular a partir de las medidas de Haar izquierdas, pero si $\mu$ es una medida de Haar derecha, entonces la medida $\hat{\mu}$ dada por el teorema 10.60 es una medida de Haar izquierda, luego

$$\mu(gA) = \hat{\mu}(A^{-1}g^{-1}) = \Delta(g^{-1})\hat{\mu}(A^{-1}) = \Delta(g)^{-1}\mu(A).$$

Por lo tanto, la función modular derecha es simplemente $1/\Delta$.

**Definición 10.72** Un grupo topológico de Hausdorff localmente compacto $G$ es *unimodular* si su función modular es $\Delta = 1$.

Obviamente, esto sucede con la función modular izquierda si y sólo si sucede con la derecha, y a su vez equivale a que exista una medida de Haar izquierda en $G$ que sea también una medida de Haar derecha, y también a que todas las medidas de Haar izquierdas sean también medidas de Haar derechas.

Obviamente, todo grupo topológico de Hausdorff localmente compacto abeliano es unimodular, pero el teorema siguiente muestra que la clase de grupos unimodulares es mucho mayor:

**Teorema 10.73** *Todo grupo topológico de Hausdorff compacto es unimodular.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $G$ un grupo topológico de Hausdorff localmente compacto y supongamos que existe un $g \in G$ tal que $\Delta(g) \neq 1$. Cambiando $g$ por $g^{-1}$ si es necesario, podemos suponer que $\Delta(g) > 1$, y entonces $\Delta(g^n) = \Delta(g)^n$ tiende a $+\infty$, por lo que $\Delta$ es una función continua en $G$ con valores en $\mathbb{R}$ y no acotada. Esto implica que $G$ no es compacto. ■

Más en general:

**Teorema 10.74** *Todo grupo topológico de Hausdorff localmente compacto cuyas uniformidades izquierda y derecha coincidan es unimodular.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $G$ un grupo en las condiciones del enunciado y sea $\mu$ una medida de Haar izquierda en $G$. Como $G$ es localmente compacto tiene un entorno de 1 compacto. Por el teorema 10.11, dicho contiene otro entorno $U$ tal que $xU = Ux$ para todo $x \in G$. Al estar contenido en un compacto, tenemos que $\mu(U) < +\infty$ y además

$$\mu(U) = \mu(xU) = \mu(Ux) = \Delta(x)\mu(U),$$

luego $\Delta(x) = 1$. ■

**Propiedades de la medida de Haar** Ya hemos señalado que las medidas de Haar de los grupos topológicos compactos son finitas. Veamos ahora que es el único caso:

**Teorema 10.75** *Si $G$ es un grupo topológico de Hausdorff localmente compacto y $\mu$ es una medida de Haar izquierda o derecha en $G$, entonces $\mu$ es finita si y sólo si $G$ es compacto.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que $\mu$ es una medida de Haar izquierda finita en $G$. Sea $K \subset G$ un compacto tal que $\mu(K) > 0$. (Por ejemplo, según 10.65, basta considerar un compacto de interior no vacío). Entonces, si $x_1, \ldots, x_n \in G$ cumplen que los conjuntos $x_iK$ son disjuntos dos a dos, tiene que ser necesariamente $n \leq \mu(G)/\mu(K)$. Sea $n$ el máximo número natural tal que existen $x_1, \ldots, x_n$ en estas condiciones. Entonces, para todo $x \in G$, se cumple que $xK$ corta a $K_0 = \bigcup\limits_{i=1}^{n} x_iK$, luego $x \in K^{-1}K_0$, luego $G = K^{-1}K_0$, que es compacto por ser la imagen de $K \times K_0$ por la aplicación continua $(u, v) \mapsto u^{-1}v$. ■

También es fácil caracterizar los grupos topológicos discretos por sus medidas de Haar:

**Teorema 10.76** *Un grupo topológico de Hausdorff localmente compacto $G$ es discreto si y sólo si existe un $g \in G$ tal que $\{g\}$ tiene medida de Haar estrictamente positiva, en cuyo caso esto lo cumplen todos los elementos de $G$.*

Demostración: Sea $\mu$ una medida de Haar en $G$ (izquierda o derecha, indistintamente). Si $G$ es discreto, la medida de $\{g\}$ tiene que ser estrictamente positiva por el teorema 10.65. Si un punto tiene medida positiva, como todo punto es un trasladado de cualquier otro punto, todos los puntos tienen la misma medida $c > 0$. Dado $g \in G$, existe un abierto $U$ tal que $g \in U$ y $\mu(U) < 2c$, pero esto implica que $U$ no puede contener ningún otro punto, es decir, que $U = \{g\}$, por lo que $G$ es discreto. ■

Así, si normalizamos la medida de Haar de un grupo discreto $G$ de modo que cada punto tenga medida 1, la medida (izquierda o derecha) $\mu : \mathcal{P}G \longrightarrow \mathbb{R}$ viene dada por

$$\mu(A) = \begin{cases} |A| & \text{si } A \text{ es finito,} \\ +\infty & \text{si } A \text{ es infinito.} \end{cases}$$

Observemos que esta medida puede definirse en cualquier conjunto $G$, aunque no sea un grupo. Tenemos así una prueba directa de que todo grupo discreto es unimodular, aunque esto se deduce del teorema 10.74.

**Teorema 10.77** *Si $G$ y $H$ son grupos topológicos de Hausdorff localmente compactos con bases numerables, entonces las medidas de Haar (izquierdas o derechas) de $G \times H$ los los productos de las medidas de Haar correspondientes de $G$ y $H$.*

Demostración: Según el teorema 5.78, la $\sigma$-álgebra de Borel de $G \times H$ es el producto de las $\sigma$-álgebras de Borel de los factores, por lo que los productos de medidas de Haar son medidas de Borel en $G \times H$. Por el teorema 5.76 son medidas de Borel regulares, luego sólo falta probar que son invariantes por traslaciones.

En efecto, sean $\mu$ y $\nu$ medidas de Haar izquierdas en $G$ y $H$, respectivamente. Entonces, según el teorema B.39,

$$(\mu \times \nu)((g,h)A) = \int_G \nu(((g,h)A)_x)\, d\mu(x),$$

pero $((g,h)A)_x = \{y \in H \mid (x,y) \in (g,h)A\} = \{y \in H \mid (g^{-1}x, h^{-1}y) \in A\}$

$$= \{y \in H \mid h^{-1}y \in A_{g^{-1}x}\} = hA_{g^{-1}x},$$

luego

$$(\mu \times \nu)((g,h)A) = \int_G \nu(hA_{g^{-1}x})\, d\mu(x) = \int_G \nu(A_{g^{-1}x})\, d\mu(x) = (\mu \times \nu)(g,1)A).$$

Expresando ahora la medida como integral sobre $H$, llegamos a que

$$(\mu \times \nu)((g,h)A) = (\mu \times \nu)(A).$$

■

**La medida de Lebesgue** La *medida de Lebesgue* en $\mathbb{R}^n$ es la única medida de Haar en $\mathbb{R}^n$ que cumple $m([0,1]^n) = 1$.

Por el teorema anterior, la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^{n+m}$ es el producto de las medidas de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$. En particular, la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$ es el producto de $n$ veces la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$.

**Nota** En principio, hemos definido la medida de Lebesgue como una medida de Borel, pero, según la observación tras el teorema 10.64, la compleción de la medida de Lebesgue (en el sentido del teorema B.15) también es una medida regular invariante por traslaciones, y es a esta medida a la que se suele llamar medida de Lebesgue.

Conviene observar que la medida de Lebesgue completa en $\mathbb{R}^{m+n}$ no es el producto de las medidas de Lebesgue completas en $\mathbb{R}^m$ y $\mathbb{R}^n$, sino la compleción de dicho producto, pues éste resulta no ser completo. ■

No todo subconjunto de $\mathbb{R}$ es medible Lebesgue. En el apéndice B de [TC] probamos resultados mucho más generales sobre existencia de conjuntos no medibles en espacios polacos.

Por definición, la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$ cumple $m([0,1]) = 1$ y, como $\mathbb{R}$ no es discreto, los puntos tienen medida nula. A partir de aquí y de la invarianza por traslaciones es inmediato que $m([0,1/q]) = 1/q$, lo que a su vez nos da que $m([0,p/q]) = p/q$, para todo número racional $s = p/q$ y de aquí a su vez $\mu([r,s]) = s - r$, para todo par de números racionales $r \leq s$. Expresando un intervalo como intersección numerable de intervalos de extremos racionales concluimos que $m([a,b]) = b - a$ para todo par de números reales $a \leq b$.

Observemos ahora que, para todo $c \neq 0$, la aplicación $m_c(A) = m(cA)$ es una medida de Borel en $\mathbb{R}$ no nula invariante por traslaciones, luego por la unicidad de la medida de Haar tiene que existir una constante $k$ tal que $m_c(A) = km(A)$, pero aplicando esto a $A = [0,1]$ vemos que $k = |c|$, es decir, que, para toda constante $c \neq 0$ y todo conjunto $A$ medible Lebesgue, se cumple

$$m(cA) = |c|m(A).$$

En términos de integrales esto se expresa en la forma

$$\int_{\mathbb{R}} \chi_{c^{-1}A}(x)\, dm(x) = |c^{-1}| \int_{\mathbb{R}} \chi_A(x)\, dm(x),$$

o equivalentemente,

$$\int_{\mathbb{R}} \chi_A(x)\, dm(x) = |c| \int_{\mathbb{R}} \chi_A(cx)\, dm(x).$$

De aquí se sigue fácilmente que la igualdad es cierta para funciones simples y a su vez para funciones arbitrarias $f : \mathbb{R} \longrightarrow [0,+\infty]$, es decir:

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\, dm(x) = |c| \int_{\mathbb{R}} f(cx)\, dm(x).$$

Como consecuencia:

**Ejemplo: La medida de Haar en $]0, +\infty[$** Una medida de Haar en el grupo multiplicativo $G = ]0, +\infty[$ viene dada por

$$\mu(A) = \int_A \frac{1}{x}\, dm(x).$$

En efecto, por el teorema B.31 tenemos que $\mu$ es una medida de Borel en $G$, necesariamente regular, por 5.76, y ciertamente es no nula. Sólo tenemos que probar que es invariante por traslaciones. Ahora bien, si $g \in G$:

$$\mu(gA) = \int_{gA} \frac{1}{x}\, dm(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\chi_{gA}(x)}{x}\, dm(x) = g\int_{\mathbb{R}} \frac{\chi_{gA}(gx)}{gx}\, dm(x)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \frac{\chi_A(x)}{x}\, dm(x) = \int_A \frac{1}{x}\, dm(x) = \mu(A).$$

■

Si $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es un isomorfismo, es claro que $\mu_f(A) = m(f[A])$ es una medida de Borel en $\mathbb{R}^n$ invariante por traslaciones, luego por la unicidad de la medida de Haar existe una constante $c_f > 0$ tal que $\mu_f(A) = c_f m(A)$. Aplicando esta igualdad a $A = [0, 1]^n$, vemos que $c_f = m(f\big[[0, 1]^n\big])$. Vamos a calcular explícitamente esta constante en el caso $n = 2$.

Si una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ cumple

$$f(1, 0) = (a, b), \qquad f(0, 1) = (c, d),$$

la linealidad implica claramente que $f(x, y) = (ax + cy, bx + dy)$. Podemos representar la aplicación lineal $f$ determinada por $a, b, c, d$ mediante la matriz

$$M_f = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

A través de esta correspondencia, es fácil ver que la composición de aplicaciones se corresponde con el producto de matrices dado por

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc' & cb' + dd' \end{pmatrix}.$$

Una comprobación rutinaria muestra que el *determinante* $\det f = ad-bc$ cumple la relación $\det(f \circ g) = \det f\, \det g$. En particular, puesto que la identidad en $\mathbb{R}^2$ se corresponde con la matriz identidad

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

que tiene determinante 1, si $f$ es un isomorfismo, $\det f \det f^{-1} = \det 1 = 1$, luego $\det f \neq 0$.

El teorema siguiente es válido en $\mathbb{R}^n$, pero lo probamos únicamente para $n = 2$ porque la prueba general requiere algunos resultados de álgebra lineal en los que no vamos a entrar:

**Teorema 10.78** *Si $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ es un isomorfismo, entonces, para todo conjunto de Borel $A \subset \mathbb{R}^2$, se cumple que $m(f[A]) = |\det f|\, m(A)$.*

Demostración: Por la discusión precedente, sólo tenemos que probar la relación $m(f[[0,1]^2]) = |\det f|$. Si la matriz de $f$ es de la forma

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix},$$

entonces $a \neq 0 \neq d$ y $f(x,y) = (ax, dy)$, y es claro que $f[[0,1]^2] = [[0,a]] \times [[0,d]]$, donde los dobles corchetes indican que $[[0,a]] = [0,a]$ o bien $[[0,a]] = [a,0]$, según si $a > 0$ o $a < 0$. Puesto que $m$ es el producto de la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$ por sí misma, $m(f[[0,1]^2]) = |a||d|$, como había que probar.

Supongamos ahora que la matriz de $f$ cumple $b \neq 0$. Entonces, una simple comprobación muestra que

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c + \frac{d-ad}{b} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{a-1}{b} & 1 \end{pmatrix},$$

mientras que si es $c \neq 0$, tenemos

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{a-1}{c} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & b + \frac{d-ad}{c} \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

luego basta considerar isomorfismos con matrices de la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}.$$

Ahora bien, en el primer caso $f(x,y) = (x, bx+y)$, por lo que, para $0 \leq x \leq 1$,

$$f\big[[0,1]^2\big]_x = [bx, bx+1]$$

y

$$m(f\big[[0,1]^2\big]) = \int_{[0,1]} m(f\big[[0,1]^2\big]_x)\, dm = \int_{[0,1]} 1\, dm = 1 = |\det f|.$$

En el segundo caso razonamos análogamente a partir de la relación

$$f\big[[0,1]^2\big]^y = [cy, cy+1].$$

■

La fórmula del teorema anterior aplicada a $f^{-1}$ equivale a

$$\int_{\mathbb{R}^2} \chi_{f^{-1}[A]}(x)\, dx = \frac{1}{|\det f|} \int_{\mathbb{R}^2} \chi_A(x)\, dm(x),$$

que a su vez equivale a

$$\int_{\mathbb{R}^2} \chi_A(y)\, dm(y) = |\det f| \int_{\mathbb{R}^2} \chi_A(f(x))\, dm(x).$$

De aquí se sigue que la misma relación es válida si en vez de $\chi_A$ ponemos cualquier función simple, y a su vez cualquier función $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow [0, +\infty]$, y a su vez cualquier función integrable $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, con lo que tenemos la identidad

$$\int_{\mathbb{R}^2} g(y)\, dm(y) = |\det f| \int_{\mathbb{R}^2} g(f(x))\, dm(x).$$

Finalmente, si $A \subset \mathbb{R}^2$ es un conjunto medible Lebesgue, entonces $\chi_{f^{-1}[A]}g$ también es integrable, y al aplicar la igualdad anterior a esta función obtenemos el caso $n = 2$ del siguiente teorema de cambio de variable:

**Teorema 10.79** *Si $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es un isomorfismo y $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es integrable (para la medida de Lebesgue), entonces*

$$\int_{f[A]} g(y)\, dm(y) = |\det f| \int_A g(f(x))\, dm(x).$$

Sólo necesitamos el caso $n = 2$ que hemos probado para llevar a cabo los cálculos que requiere el ejemplo A.51, que muestra un grupo topológico que no es unimodular, es decir, en el que las medidas de Haar izquierdas y derechas no coinciden.

**Teorema 10.80** *Si $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es una isometría en $\mathbb{R}^n$ respecto de la distancia euclídea y $A \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto medible Lebesgue, $m(f[A]) = m(A)$.*

Demostración: Lo probamos únicamente en el caso $n = 2$, aunque el resultado es cierto en general. La aplicación $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $g(x) = f(x) - f(0)$ también es una isometría, que cumple además $g(0) = 0$. Por el teorema de Mazur-Ulam 9.49, tenemos que $g$ es un isomorfismo. Basta probar que $\det g = \pm 1$, pues entonces 10.78 implica que

$$m(f[A]) = m(g[A] + f(0)) = m(g[A]) = m(A).$$

Ahora bien, en la prueba del teorema 9.48 hemos visto que

$$x \cdot y = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2).$$

por lo que si $g$ es una isometría, de hecho conserva el producto escalar, luego si $g(1, 0) = (a, b)$, $g(0, 1) = (c, d)$, las relaciones $(1, 0)(1, 0) = (0, 1)(0, 1) = 1$, $(1, 0)(0, 1) = 0$ implican que $a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 1$, $ac + bd = 0$, luego

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

y tomando determinantes queda $(\det g)^2 = 1$. ■

**La medida de Haar en $2^I$** Observemos que $2 = \{0, 1\}$ es un grupo abeliano con la operación determinada por $1+1 = 0$, luego, si $I$ es un conjunto arbitrario, $2^I$ es también un grupo abeliano compacto con la suma definida componente a componente. Por lo tanto, tiene una única medida de Haar tal que $m(2^I) = 1$.

Para cada $J \subset I$ finito y cada $Y \subset 2^J$, definimos

$$C_J(Y) = \{f \in 2^I \mid f|_J \in Y\}.$$

De este modo, los conjuntos $C_J(Y)$ son una base de abiertos cerrados en $2^I$. De hecho, basta considerar los conjuntos de la forma $C_J(\{s\})$, para cada $s \in 2^J$.

Si llamamos $s_0 \in 2^J$ a la aplicación nula, es claro que $C_J(\{s\}) = \bar{s}+C_J(\{s_0\})$, donde $\bar{s} : I \longrightarrow 2$ es la extensión de $s$ a $I$ que toma el valor 0 fuera de $J$. Esto hace que $m(C_J(\{s\})) = m(C_J(\{s_0\}))$ y, como $2^I = \bigcup\limits_{s\in 2^J} C_J(\{s\})$ y la unión es disjunta, tiene que ser $m(C_J(\{s\})) = 1/2^{|J|}$. A su vez, esto implica que

$$m(C_J(Y)) = \frac{|Y|}{2^{|J|}}.$$

Claramente, cualquier medida de Borel regular en $2^I$ que coincida con $m$ en los abiertos cerrados básicos $C_J(\{s\})$, coincidirá con $m$ en todos los abiertos y, a su vez, en todos los conjuntos de Borel, luego $m$ está determinada por la regularidad y por la relación $m(C_J(\{s\})) = 1/2^{|J|}$.

En el caso del cubo $\mathcal{C} = {}^\omega 2$, el teorema 5.76 asegura la regularidad, luego $m$ es la única medida de Borel en $\mathcal{C}$ que cumple $m(C(s)) = 1/2^{|J|}$. Veamos ahora que esta medida está muy relacionada con la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$:

**Teorema 10.81** *Sea $\phi : \mathcal{C} \longrightarrow [0, 1]$ la aplicación dada por el teorema* 9.25. *Consideramos en $\mathcal{C}$ la medida de Haar y en $[0, 1]$ la medida de Lebesgue. Entonces, si $B \subset [0, 1]$ es un conjunto de Borel, se cumple que $m(\phi^{-1}[B]) = m(B)$.*

DEMOSTRACIÓN: Consideremos la medida de Borel $m'$ en $[0, 1]$ dada por $m'(B) = m(\phi^{-1}[B])$. Observemos que si $B = \left]k/2^i, (k + 1)/2^i\right[$, donde

$$k = \sum_{n=0}^{i-1} s(n)2^{i-n-1},$$

entonces $\phi^{-1}[B] = C_i(s) \setminus \{x\}$, donde $x$ es la sucesión $s$ prolongada con ceros (cuya imagen es $k/2^i$), luego $m'(B) = 1/2^i = m(B)$.

Todo intervalo abierto en $[0, 1]$ puede expresarse como unión creciente numerable de intervalos diádicos de este tipo, luego $m$ y $m'$ coinciden sobre los intervalos abiertos. A su vez, todo abierto en $[0, 1]$ puede expresarse como unión numerable de intervalos abiertos disjuntos dos a dos, luego $m$ y $m'$ coinciden sobre los abiertos, luego también sobre los cerrados y, por la regularidad, coinciden sobre todos los conjuntos de Borel, luego $m(\phi^{-1}[B]) = m(B)$. ■ 175

# Capítulo XI

# Espacios vectoriales topológicos

Hemos visto que una norma dota de una topología al espacio vectorial en el que está definida respecto a la cual las operaciones vectoriales son continuas. Si eliminamos el requisito de que la topología tenga que venir definida por una norma, llegamos al concepto de espacio vectorial topológico.

## 11.1 Definición y propiedades básicas

Un *espacio vectorial topológico* sobre un cuerpo métrico (no trivial) $K$ es un par $(V, \mathcal{T})$, donde $V$ es un espacio vectorial sobre $K$ y $\mathcal{T}$ es una topología en $V$ respecto de la cual las operaciones

$$+ : V \times V \longrightarrow V, \qquad \text{y} \qquad \cdot : K \times V \longrightarrow V$$

son continuas.

En la práctica, como es habitual, no mencionaremos expresamente la topología de los espacios vectoriales topológicos.

Un *isomorfismo topológico* entre dos espacios vectoriales topológicos es un isomorfismo que además es un homeomorfismo. Si existe un isomorfismo topológico entre dos espacios vectoriales topológicos, se dice que son *topológicamente isomorfos.*

Es inmediato que si $V$ es un espacio vectorial topológico, entonces $(V, +)$ es un grupo topológico, pues la aplicación $v \mapsto -v$ es también continua, ya que es la composición de la aplicación continua $v \mapsto (-1, v)$ con el producto por escalares, que es continuo.

**Ejemplos** El teorema 9.40 afirma que todo espacio normado es un espacio vectorial topológico con la topología inducida por la norma.

Es obvio que todo subespacio vectorial de un espacio vectorial topológico es a su vez un espacio vectorial topológico con la topología relativa y la restricción de la suma y el producto por escalares del espacio.

Si $\{V_i\}_{i\in I}$ es una familia de espacios vectoriales topológicos el producto $\prod\limits_{i\in I} V_i$ es también un espacio vectorial topológico con la topología producto. La prueba es análoga a la que hemos visto en la sección 10.1 para grupos topológicos.

El teorema 9.39 prueba que el producto de una cantidad infinita de espacios normados no es un espacio normado, pero sigue siendo un espacio vectorial topológico, así que tenemos ejemplos de espacios vectoriales topológicos que no son espacios normados.

La *suma directa* $\bigoplus\limits_{i\in I} V_i$ de una familia $\{V_i\}_{i\in I}$ de espacios vectoriales topológicos se define como el subespacio del producto $\prod\limits_{i\in I} V_i$ formado por las funciones que toman el valor 0 salvo a lo sumo en una cantidad finita de índices. Es inmediato que ciertamente es un subespacio vectorial, y además es denso en el producto $\prod\limits_{i\in I} V_i$, pues claramente corta a todo abierto básico no vacío. ■

Si $V$ es un espacio vectorial topológico y $X$ es cualquier espacio topológico, el conjunto $C(X,V)$ de las aplicaciones continuas $f : X \longrightarrow V$ resulta ser un subespacio vectorial del espacio $V^X$ de todas las aplicaciones de $X$ en $V$. (En la sección 10.1 hemos visto que es un subgrupo, y análogamente se prueba que es un subespacio vectorial.)

En el caso en que $K$ es un cuerpo métrico, en $K^X$ tenemos además una estructura de anillo dada por el producto $(fg)(x) = f(x)g(x)$, y también concluimos que $C(X,K)$ es un subanillo cuyas unidades (elementos inversibles) son las funciones $f \in C(X,K)$ que no se anulan en ningún punto, pues entonces la función $f^{-1}(x) = f(x)^{-1}$ es continua por el teorema 9.41.

Como en el caso de los grupos topológicos, la topología de un espacio vectorial topológico está determinada por los entornos de 0. Vamos a probar un teorema análogo a 10.3, que nos permitirá definir estructuras de espacio vectorial topológico sin más que determinar adecuadamente una base de entornos de 0, pero para garantizar la continuidad del producto por escalares tenemos que exigir más propiedades a los conjuntos seleccionados:

**Definición 11.1** Si $K$ es un cuerpo métrico y $U$ es un subconjunto de un $K$-espacio vectorial $V$, se dice que $U$ es *absorbente* si para todo $v \in V$ existe $\epsilon > 0$ tal que si $\alpha \in K$ cumple $|\alpha| \leq \epsilon$ entonces $\alpha v \in U$. Se dice que $U$ es *equilibrado* si cuando $v \in U$ y $\alpha \in K$ cumple $|\alpha| \leq 1$, entonces $\alpha v \in U$.

Por ejemplo, si $V$ es un espacio normado, las bolas $B_\epsilon(0)$ son absorbentes y equilibradas.

**Teorema 11.2** *Si $V$ es un espacio vectorial topológico y $U$ es un entorno de* 0*, se cumple:*

1. *Existe otro entorno $V$ de $0$ tal que $V + V \subset U$.*

2. *Si $\alpha \in K$ no es nulo, entonces $\alpha U$ es un entorno de $0$.*

3. *$U$ es absorbente.*

4. *$U$ contiene un entorno de $0$ equilibrado.*

Demostración: La primera propiedad es un caso particular de 10.2. La segunda es consecuencia de que la aplicación $v \mapsto \alpha v$ es un homeomorfismo que fija al 0 (su inversa es $v \mapsto (1/\alpha)v$).

Para probar que todo entorno de 0 es absorbente tomamos $v \in V$ y, como $0 \cdot v = 0$, la antiimagen de $U$ por el producto contiene un entorno de $(0, v)$, que será de la forma $B_{2\epsilon}(0) \times W$, para cierto $\epsilon > 0$ y cierto entorno $W$ de 0. Así, si $|\alpha| \leq \epsilon$, se cumple que $\alpha v \in U$.

Similarmente, como $0 \cdot 0 = 0$, existe un $\epsilon > 0$ y un entorno $W$ de 0 (que podemos tomar $W \subset U$) de modo que si $|\alpha| < 2\epsilon$ y $w \in W$, entonces $\alpha w \in U$.

Recordemos que estamos suponiendo que los cuerpos métricos no son triviales, luego existe $\alpha_0 \in K$ tal que $|\alpha_0| < \epsilon$. Definimos

$$U_0 = \bigcup_{|\alpha|\leq 1} \alpha\alpha_0 W,$$

que claramente es un entorno de 0 equilibrado, y $U_0 \subset W$, pues si $|\alpha| \leq 1$, entonces $|\alpha\alpha_0| < 2\epsilon$. ■

Como en el caso de los grupos topológicos, se cumple el recíproco:

**Teorema 11.3** *Sea $V$ un espacio vectorial sobre un cuerpo métrico $K$ (no trivial) y sea $\mathcal{U}$ una familia de subconjuntos de $V$ absorbentes y equilibrados tales que:*

1. *Si $U_1$, $U_2 \in \mathcal{U}$, existe $W \in \mathcal{U}$ tal que $W \subset U_1 \cap U_2$.*

2. *Si $U \in \mathcal{U}$ existe $W \in \mathcal{U}$ tal que $W + W \subset U$.*

3. *Si $U \in \mathcal{U}$ y $\alpha \in K$ no es nulo, existe $W \in \mathcal{U}$ tal que $W \subset \alpha U$.*

*Entonces existe una única topología en $V$ con la que $V$ es un espacio vectorial topológico y $\mathcal{U}$ es una base de entornos de $0$.*

Demostración: Tenemos que $(V, +)$ es un grupo y $\mathcal{U}$ cumple las condiciones del teorema 10.3. Las dos primeras son las mismas que las del enunciado, sólo que aquí están escritas con notación aditiva. Para la tercera sirve el propio entorno $U$, pues al ser equilibrado cumple que $-U \subset U$, y la cuarta es trivial en grupos abelianos, pues $-a + U + a = U$.

Por consiguiente, existe una única topología $\mathcal{T}$ en $V$ con la que $(V, +)$ es un grupo abeliano y $\mathcal{U}$ es una base de entornos de 0. Sólo falta probar que el producto por escalares también es continuo.

Tomemos $(\alpha_0, v_0) \in K \times V$ y tomemos $U \in \mathcal{U}$, de modo que $\alpha_0 v_0 + U$ es un entorno básico de $\alpha_0 v_0$. Sea $W \in \mathcal{U}$ tal que $W + W \subset U$. Como es absorbente, existe $0 < \epsilon < 1$ tal que si $\alpha \in K$ cumple $|\alpha| \leq \epsilon$, entonces $\alpha v_0 \in W$. Entonces:

$$\alpha v - \alpha_0 v_0 = \alpha v - \alpha v_0 + \alpha v_0 - \alpha_0 v_0 = \alpha(v - v_0) + (\alpha - \alpha_0)v_0,$$

por lo que si $(\alpha, v) \in B_\epsilon(\alpha_0) \times (v_0 + W)$, tenemos que $\alpha(v - v_0) \in W$ (porque $W$ es equilibrado y $|\alpha| \leq \epsilon < 1$) y $(\alpha - \alpha_0)v_0 \in W$ (porque $|\alpha - \alpha_0| \leq \epsilon$), luego $\alpha v \in \alpha_0 v_0 + U$. ■

Mientras un grupo topológico puede tener subgrupos propios abiertos, no sucede lo mismo en los espacios vectoriales topológicos:

**Teorema 11.4** *Si $V$ es un espacio vectorial topológico y $W$ es un subespacio de $V$ con interior no vacío (en particular, si es abierto), entonces $W = V$.*

*Si $f : V_1 \longrightarrow V_2$ es una aplicación lineal abierta entre espacios vectoriales topológicos, necesariamente es suprayectiva.*

Demostración: Si $W$ tiene interior no vacío, entonces contiene un abierto, que será de la forma $w + U$, donde $w \in W$ y $U$ es un entorno de 0, pero, como $W$ es un subespacio vectorial, también $U \subset W$, pero entonces, como $U$ es absorbente, si $v \in V$, existe un $\alpha \in K$ no nulo tal que $\alpha v \in U \subset W$, luego $v \in W$. Así pues, $W = V$. La segunda parte es inmediata, pues $f[V_1]$ es un subespacio vectorial abierto, luego $f[V_1] = V_2$. ■

Como los espacios vectoriales topológicos son grupos topológicos abelianos, las cuatro uniformidades estudiadas en la sección 10.2 se reducen a una única uniformidad. No obstante, en un espacio normado tenemos, por una parte, la uniformidad inducida por su estructura de espacio vectorial topológico y, por otra, la inducida por su métrica. Sin embargo, esto no supone ningún conflicto porque ambas son la misma, como se deduce del teorema siguiente, más general:

**Teorema 11.5** *Sea $G$ un grupo topológico y sea $d : G \times G \longrightarrow \mathbb{R}$ una distancia que induzca la topología de $G$ y que sea invariante por traslaciones por la izquierda, es decir, tal que $d(gx, gy) = d(x, y)$ para todo $x, y, g \in G$. Entonces la uniformidad inducida por la métrica coincide con la uniformidad izquierda inducida por la estructura de grupo topológico. Análogamente sucede con métricas invariantes por traslaciones por la derecha (resp. por ambos lados) y la uniformidad derecha (resp. bilátera.)*

Demostración: Toda banda para la uniformidad izquierda de grupo contiene una banda $V_A^i$, donde $A$ es un entorno equilibrado de 1, el cual contiene una bola abierta $B_\epsilon(1) \subset A$, y entonces $V_\epsilon \subset V_A^i$, pues si $d(x, y) < \epsilon$, entonces tenemos $d(1, x^{-1}y) < \epsilon$, luego $x^{-1}y \in A$, y por consiguiente $(x, y) \in V_A^i$.

Esto prueba que toda banda para la uniformidad izquierda de grupo lo es para la uniformidad métrica. Recíprocamente, toda banda para la métrica contiene una banda $V_\epsilon$ y, si $A$ es un entorno simétrico de 1 contenido en $B_\epsilon(1)$, se cumple que $V_A^i \subset V_\epsilon$, pues si $(x, y) \in V_A$ entonces $x^{-1}y \in A$, luego $d(x^{-1}y, 1) < \epsilon$, luego $d(x, y) < \epsilon$, luego $(x, y) \in V_\epsilon$. Por lo tanto las bandas métricas lo son para la uniformidad izquierda de grupo. ■

**Teorema 11.6** *La clausura de un subespacio vectorial en un espacio vectorial topológico es un subespacio vectorial.*

DEMOSTRACIÓN: Si $V$ es un espacio vectorial topológico y $W$ es un subespacio vectorial, por 10.17 sabemos que $\overline{W}$ es un subgrupo de $V$. Además, si $v \in \overline{W}$ y $\alpha \in K$ no es nulo, entonces, para todo entorno $U$ de 0, también $\alpha^{-1}U$ es un entorno de 0, luego $v = w + \alpha^{-1}u$, con $w \in W$ y $u \in U$, luego $\alpha v = \alpha w + u \in W + U$, para todo $U$, luego $\alpha v \in \overline{W}$. ■

Del teorema 11.2 se sigue que todo espacio vectorial topológico tiene una base de entornos de 0 equilibrados. El teorema siguiente, junto con 10.15 nos da que podemos tomarlos tanto abiertos como cerrados:

**Teorema 11.7** *Si $V$ es un espacio vectorial topológico y $U$ es un entorno de 0 equilibrado, entonces $\mathring{U}$ y $\overline{U}$ también lo son.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $z \in \mathring{U}$ (resp. $z \in \overline{U}$) y $\alpha \in K$ tal que $|\alpha| \leq 1$. Queremos probar que $\alpha z \in \mathring{U}$ (resp. $\alpha z \in \overline{U}$), pero esto se cumple ciertamente si $\alpha = 0$, luego podemos suponer que $\alpha \neq 0$. En tal caso $x \mapsto \alpha x$ es un homeomorfismo de $V$ en sí mismo, luego $\alpha z$ está en el interior (resp. la clausura) de $\alpha U = U$, es decir, $\alpha z \in \mathring{U}$ (resp. $\alpha z \in \overline{U}$). ■ 316

---

**Conjuntos acotados** En virtud del teorema 9.46, todas las normas equivalentes en un mismo espacio vectorial determinan los mismos conjuntos acotados. Tal y como señalamos en la observación posterior, esto se debe a que es posible definir un concepto de acotación en espacios vectoriales topológicos que depende exclusivamente de la topología y de la estructura algebraica, y que en el caso de los espacios normados coincide con la acotación respecto de la norma:

**Definición 11.8** Un subconjunto $A$ de un $K$-espacio vectorial topológico es *(linealmente) acotado* si para todo entorno $U$ de 0 existe un $\lambda \in K$ tal que $A \subset \lambda U$.

Es claro que en la definición podemos sustituir "entorno de 0" por "entorno básico de 0". En particular en un espacio normado basta considerar bolas de centro 0, pero, como los homotéticos de bolas son bolas, concluimos que un conjunto $A$ está linealmente acotado si y sólo si está contenido en una bola, con lo que la acotación lineal coincide con la acotación en el sentido métrico usual.

El concepto de acotación lineal es la generalización adecuada de la acotación para espacios vectoriales topológicos cuya topología no venga dada por una norma, pero es importante recordar que, aunque la topología pueda venir inducida por una distancia, la acotación lineal no coincide necesariamente con la acotación métrica (salvo que la distancia venga a su vez inducida por una norma).

En efecto, si una topología viene inducida por una distancia, el teorema 9.7 nos dice que podemos modificarla para obtener otra que induce la misma topología y respecto a la cual todos los conjuntos están acotados. Sin embargo, es claro que si $E$ es un espacio vectorial topológico no trivial, entonces el propio $E$ no puede ser linealmente acotado.

El teorema siguiente muestra que la acotación lineal se comporta de forma similar a la acotación métrica:

**Teorema 11.9** *Sea $V$ un espacio vectorial topológico.*

1. *La unión finita de conjuntos acotados es acotada.*
2. *Todo subconjunto finito de $V$ está acotado.*
3. *La imagen de un conjunto acotado por una aplicación lineal y continua es acotada.*

DEMOSTRACIÓN: 1) Sean $B_1, \ldots, B_n$ conjuntos acotados y sea $U$ un entorno equilibrado de 0. Para cada $B_i$ existe $\lambda_i \in K$ de modo que $B_i \subset \lambda_i U$. Sea $\lambda \in K$ tal que $|\lambda| > |\lambda_i|$ para todo $i$. Entonces $\bigcup\limits_{i=1}^{n} B_i \subset \lambda U$.

2) El hecho de que los entornos de 0 sean absorbentes equivale a que los puntos son conjuntos acotados, luego por el apartado anterior todo conjunto finito está acotado.

El apartado 3) es inmediato a partir de la definición. ■

La acotación en un espacio vectorial topológico puede caracterizarse en términos de sucesiones:

**Teorema 11.10** *Un subconjunto $A$ de un $K$-espacio vectorial topológico $V$ está acotado si y sólo si para toda sucesión $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ en $K$ convergente a 0 y toda sucesión $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ en $A$, se cumple que $\{\alpha_n x_n\}_{n=0}^{\infty}$ converge a 0 en $V$.*

DEMOSTRACIÓN: Si $A$ está acotado y $U$ es un entorno de 0 equilibrado, existe $\alpha \in K$ no nulo tal que $\alpha A \subset U$. Para todo $n$ suficientemente grande, $|\alpha_n| \leq |\alpha|$, y entonces también $\alpha_n A \subset U$, luego $\alpha_n x_n \in U$, lo que implica que la sucesión converge a 0.

Recíprocamente, si $A$ no está acotado, existe un entorno $U$ de 0 tal que $A$ no está contenido en ningún conjunto $\lambda U$, luego podemos tomar $\alpha_n \in K$ tal que $|\alpha_n| \geq n$ y $x_n \in A \setminus \alpha_n U$, pero $\{\alpha_n^{-1}\}_{n=0}^{\infty}$ converge a 0 y $\alpha_n^{-1} x_n \notin U$ para todo $n$, luego $\{\alpha_n^{-1} x_n\}_{n=0}^{\infty}$ no converge a 0, en contradicción con lo supuesto. ■ 318

---

## 11.2 Completitud

En esta sección presentamos los resultados básicos sobre completitud en espacios vectoriales topológicos. Empezamos aplicando la completitud al estudio de los espacios vectoriales topológicos de dimensión finita.

**Espacios vectoriales topológicos de dimensión finita** Si $K$ es un cuerpo métrico completo, podemos verlo como $K$-espacio vectorial topológico (completo), luego $K^n$ es también un espacio vectorial topológico completo (por el teorema 2.31). El objetivo de esta sección es demostrar el teorema siguiente, del que extraeremos algunas consecuencias:

**Teorema 11.11** *Si $K$ es un cuerpo métrico completo (no trivial) y $V$ es un espacio vectorial topológico de Hausdorff de dimensión finita $n$ sobre $K$, entonces $V$ es topológicamente isomorfo a $K^n$. De hecho, todo isomorfismo de $K^n$ en $V$ es un homeomorfismo topológico.*

Demostración: Observemos que toda aplicación lineal $\phi : K^n \longrightarrow V$ en cualquier espacio vectorial topológico $V$ es continua, pues es de la forma

$$\phi(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n,$$

donde $v_1, \ldots, v_n$ es la imagen por $\phi$ de la base canónica de $K^n$ y basta tener en cuenta que la suma y el producto en $V$ son continuas, así como las proyecciones en $K^n$. El problema está en probar que si $\phi$ es un isomorfismo, entonces $\phi^{-1}$ también es continua.

Razonamos por inducción sobre $n$. Notemos que el caso $n = 1$ no requiere la hipótesis de completitud. Para probar que $\phi^{-1}(\alpha v_1) = \alpha$ es continua, basta ver que lo es en 0.

Sea $\epsilon > 0$ y sea $\alpha_0 \in K$ tal que $0 < |\alpha_0| < \epsilon$. Como $V$ es de Hausdorff, existe un entorno de 0 equilibrado $W$ en $V$ tal que $\alpha_0 v_1 \notin W$. Entonces, si $\alpha v_1 \in W$, tiene que ser $|\alpha| < \epsilon$, pues si fuera $|\alpha| \geq \epsilon$ entonces $\alpha_0 v_1 = (\alpha_0/\alpha)\alpha v_1 \in W$, porque $W$ es equilibrado.

Así pues, $v \in W$ implica que $|\phi^{-1}(v)| < \epsilon$, lo que equivale a la continuidad de $\phi^{-1}$.

Supongamos ahora que la conclusión es válida para espacios vectoriales de dimensión $n-1$. Fijado $\phi$ y la base correspondiente $v_1, \ldots, v_n$ de $V$, consideramos los subespacios $V_0 = \langle v_1, \ldots, v_{n-1} \rangle$ y $W_0 = \langle v_n \rangle$. Se trata de subespacios vectoriales de dimensión $n-1$ y 1, respectivamente. Por hipótesis de inducción son uniformemente isomorfos a $K^{n-1}$ y $K$, respectivamente. Como $K$ es completo, también lo son $K^{n-1}$ y $K$, luego también $V_0$ y $W_0$. Como $V$ es un espacio de Hausdorff, $V_0$ y $W_0$ son cerrados en $V$, luego por 10.27 los cocientes $V/W_0$ y $V/V_0$ son espacios de Hausdorff de dimensión $n-1$ y 1, respectivamente. Otra vez por la hipótesis de inducción, los isomorfismos

$$\alpha_1[v_1] + \cdots + \alpha_{n-1}[v_{n-1}] \mapsto (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}), \qquad \alpha_n[v_n] \mapsto \alpha_n$$

son isomorfismos uniformes $V/W_0 \longrightarrow K^{n-1}$ y $V/V_0 \longrightarrow K$, respectivamente. Al componerlos con las proyecciones $V \longrightarrow V/W_0$ y $V \longrightarrow V/V_0$ obtenemos aplicaciones lineales continuas que no son sino

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n \mapsto (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}), \qquad \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n \mapsto \alpha_n.$$

Por lo tanto, la aplicación $\phi^{-1}(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ también es continua. ■

Esto nos lleva a la definición siguiente:

**Definición 11.12** Si $K$ es un cuerpo métrico completo y $V$ es un espacio vectorial de dimensión finita, llamaremos *topología usual* o *topología euclídea* en $V$ a la única topología de Hausdorff en $V$ con la que éste adquiere estructura de espacio vectorial topológico.

En efecto, siempre existe una tal topología, porque cualquier isomorfismo entre $V$ y $K^n$ permite transportar la topología (producto) de $K^n$ a $V$, y dicha topología es única, pues si hubiera dos, el teorema anterior nos da que la identidad $(V, \mathcal{T}_1) \longrightarrow (V, \mathcal{T}_2)$ sería un isomorfismo topológico, luego $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$.

En particular, dos $K$-espacios vectoriales de la misma dimensión finita $n$ son topológicamente isomorfos, pues ambos son topológicamente isomorfos a $K^n$. Por la unicidad, si $V$ y $W$ son dos $K$-espacios vectoriales de dimensión finita, la topología usual en $V \times W$ es la topología producto. En particular, la topología usual en $K^n$ es la topología producto de la topología de $K$.

Como $K^n$ es completo con la topología producto, lo mismo vale para todo espacio vectorial topológico de dimensión finita (siempre sobre un cuerpo métrico completo), luego todo subespacio vectorial de dimensión finita de un espacio vectorial topológico de Hausdorff es completo y, en particular, cerrado.

Si $V$ es un espacio vectorial de dimensión finita y $W$ es un subespacio, entonces $W$ es cerrado, luego la topología cociente en $V/W$ es de Hausdorff, luego es la usual.

Más aún, sabemos que la topología (y la uniformidad) de $K^n$ está inducida por una norma (hemos dado tres ejemplos de normas equivalentes en $K^n$, a saber $\|\ \|_1$, $\|\ \|_2$ y $\|\ \|_\infty$), pero ahora podemos decir más. Como todas las normas inducen una estructura de espacio vectorial topológico, tenemos lo siguiente:

**Teorema 11.13** *Si $K$ es un cuerpo métrico completo y $V$ es un $K$-espacio vectorial de dimensión finita, entonces todas las normas en $V$ son equivalentes y $V$ es completo respecto de cualquiera de ellas.*

Otra consecuencia elemental es la siguiente:

**Teorema 11.14** *Si $K$ es un cuerpo métrico completo y $\phi : V \longrightarrow W$ es una aplicación lineal entre $K$-espacios vectoriales topológicos y $V$ tiene dimensión finita y la topología euclídea, entonces $\phi$ es continua.*

En efecto, por el teorema 11.11 no perdemos generalidad si suponemos que $V = K^n$, y en la propia prueba del teorema hemos razonado que cualquier aplicación lineal $\phi$ definida en $K^n$ es continua.

Del teorema siguiente deduciremos algunas consecuencias de interés sobre espacios vectoriales topológicos completamente metrizables:

**Teorema 11.15** *Sea $V$ un espacio vectorial topológico que sea un espacio de Baire y sea $A \subset V$ un cerrado absorbente y equilibrado. Entonces $A + A$ es un entorno de* $0$.

Demostración: Como $A$ es absorbente y equilibrado $V = \bigcup_{n=1}^{\infty} nA$. Como todos los conjuntos $nA$ son cerrados y $V$ es un espacio de Baire, alguno de ellos tiene que tener interior no vacío, luego $\overline{A}$ tiene interior no vacío. Si $v \in \mathring{\overline{A}}$, entonces 0 está en el interior de $\overline{A} - v \subset \overline{A} + \overline{A}$. ■

Para espacio vectoriales topológicos completamente metrizables se cumple el recíproco del teorema 11.4:

**Teorema 11.16 (de la aplicación abierta)** *Toda aplicación lineal continua y suprayectiva entre espacios vectoriales topológicos completamente metrizables es abierta.*

Demostración: Sea $f : V \longrightarrow W$ en las condiciones del enunciado y sea $U$ un entorno de 0 en $V$. Basta probar que $f[U]$ es abierto. Por 10.25 podemos tomar una distancia en $V$ invariante por traslaciones. Tomemos $r > 0$ tal que $U_0 = B_{2r}(0) \subset U$ y sea $U_n = B_{r2^{-n}}(0)$. Se cumple que $U_2 + U_2 \subset U_1$, pues

$$d(0, u + u') \leq d(0, u) + d(u, u + u') = d(0, u) + d(0, u') < \frac{r}{4} + \frac{r}{4} = \frac{r}{2}.$$

Como la suma es continua tenemos que

$$\overline{f[U_2]} + \overline{f[U_2]} \subset \overline{f[U_2] + f[U_2]} \subset \overline{f[U_1]}.$$

Como $U_2$ es absorbente y equilibrado, también lo es $f[U_2]$, y $\overline{f[U_2]}$, luego por 11.15 tenemos que $\overline{f[U_2]} + \overline{f[U_2]}$ es un entorno de 0, al igual que $\overline{f[U_1]}$. Ahora basta probar que $\overline{f[U_1]} \subset f[U]$.

Tomemos $y_1 \in \overline{f[U_1]}$ y, supuesto definido $y_n \in \overline{f[U_n]}$, como antes concluimos que $\overline{f[U_{n+1}]}$ es un entorno de 0, luego $(y_n - \overline{f[U_{n+1}]}) \cap f[U_n] \neq \varnothing$, luego existe $x_n \in U_n$ tal que $f(x_n) \in y_n - \overline{f[U_{n+1}]}$. Definimos $y_{n+1} = y_n - f(x_n) \in \overline{f[U_{n+1}]}$.

Notemos que $\lim_n y_n = 0$, pues si $G$ es un entorno de 0 en $W$, entonces $\overline{f^{-1}[G]}$ es un entorno de 0 cerrado en $V$, luego existe un $n$ tal que $U_n \subset f^{-1}[G]$, luego $\overline{f[U_n]} \subset G$ y así $y_m \in G$ para todo $m \geq n$.

Las sumas $\sum_{n=0}^{k} x_n$ forman una sucesión de Cauchy, pues si $k < k'$,

$$d(\sum_{n=1}^{k} x_n, \sum_{n=1}^{k'} x_n) = d(0, \sum_{n=k+1}^{k'} x_n) \leq d(0, \sum_{n=k+1}^{k'-1} x_n) + d(\sum_{n=k+1}^{k'-1} x_n, \sum_{n=k+1}^{k'} x_n)$$

$$= d(0, \sum_{n=k+1}^{k'-1} x_n) + d(0, x_{k'}) = \sum_{n=k+1}^{k'} d(0, x_n) < r \sum_{n=k+1}^{k'} \tfrac{1}{2^n}.$$

Por lo tanto existe $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \in V$. Si en la desigualdad anterior para $k = 0$ hacemos tender $k'$ a infinito obtenemos que $d(0, x) \leq r$, luego $x \in B_{2r}(0) \subset U$. Además

$$\sum_{n=1}^{k} f(x_n) = \sum_{n=1}^{k} (y_n - y_{n+1}) = y_1 - y_{k+1},$$

luego haciendo tender $k$ a infinito resulta que $y_1 = f(x) \in f[U]$. ■

De aquí deducimos a su vez:

**Teorema 11.17 (de la gráfica cerrada)** *Una aplicación lineal $f : V \longrightarrow W$ entre espacios vectoriales topológicos completamente metrizables es continua si y sólo si su gráfica es cerrada en $V \times W$.*

Demostración: Una implicación es el teorema 1.38. Sea $G \subset V \times W$ la gráfica de $f$ (técnicamente $G = f$) y sea $\pi : G \longrightarrow V$ la proyección en la primera componente, es decir, $\pi(v, f(v)) = v$.

Observemos que $G$ es un subespacio vectorial de $V \times W$ y que $\pi$ es un isomorfismo continuo (pues es la restricción de la proyección $V \times W \longrightarrow V$, que es continua). Por el teorema de la aplicación abierta su inversa $\pi^{-1} : V \longrightarrow G$ es continua, y también lo es la composición con la proyección en la segunda componente, que no es sino $f$. ■ 60

---

**Compleciones de espacios vectoriales topológicos** Como los espacios vectoriales topológicos son grupos topológicos abelianos, las uniformidades izquierda, derecha, superior e inferior son iguales entre sí, luego tenemos una única compleción natural.

**Teorema 11.18** *Si $V$ es un $K$-espacio vectorial topológico de Hausdorff, las operaciones de $V$ admiten unas únicas extensiones continuas $\hat{V} \times \hat{V} \longrightarrow \hat{V}$ y $K \times \hat{V} \longrightarrow \hat{V}$ con las que la compleción $\hat{V}$ adquiere estructura de espacio vectorial topológico.*

Demostración: Sabemos que la suma en $V$ se extiende a una suma en $\hat{V}$ con la que la compleción se convierte en un grupo abeliano. Para cada $\alpha \in K$, la aplicación $V \longrightarrow V$ dada por $v \mapsto \alpha v$ también es uniformemente continua, luego se extiende a $\hat{V}$, y así tenemos definido también un producto por escalares $K \times \hat{V} \longrightarrow \hat{V}$.

Los argumentos típicos de densidad prueban que $\hat{V}$ es un espacio vectorial con estas operaciones. Para que sea un espacio vectorial topológico falta probar que el producto por escalares es continuo (sólo sabemos que son continuas las aplicaciones $v \mapsto \alpha v$, con $\alpha$ fijo).

Antes vamos a probar que si $\mathcal{B}$ es una base de entornos de 0 en $V$, entonces $\overline{\mathcal{B}} = \{\overline{U} \mid U \in \mathcal{B}\}$ es una base de entornos de 0 en $\hat{V}$.

En efecto, las bandas $V_U$ con $U \in \mathcal{B}$ son una base de la uniformidad de $V$, luego por el teorema 2.16 sus clausuras $\overline{V}_U$ son una base de la uniformidad de $\hat{V}$. Basta probar que $\overline{V}_U = V_{\overline{U}}$.

Ahora bien, si $(x, y) \in \overline{V}_U$ y $W_0$ es un entorno de 0, sea $W$ otro entorno de 0 equilibrado tal que $2W_0 \subset W$ (aquí usamos que $\hat{V}$ es un grupo topológico). Existe $(u, v) \in ((x + W) \times (y + W)) \cap V_U$, con lo que $u = x + w_1$, $v = y + w_2$ y

$$u - v = x - y + w_1 - w_2 \in U \cap (x - y + 2W) \subset U \cap (x - y + W_0) \neq \varnothing,$$

luego $x - y \in \overline{U}$, es decir, $(x, y) \in V_{\overline{U}}$.

Recíprocamente, si $(x, y) \in V_{\overline{U}}$ y $W$ es un entorno de 0, entonces $x - y \in \overline{U}$, luego existe $u \in (x - y + W) \cap U$, con lo que $u = x - y + w$ y así

$$(x + w, y) \in V_U \cap ((x + W) \times (y + W)) \neq \varnothing,$$

luego $(x, y) \in \overline{V}_U$.

La base $\mathcal{B}$ la podemos tomar formada por entornos de 0 equilibrados. Vamos a probar que entonces $\overline{\mathcal{B}}$ cumple las condiciones del teorema 11.3, con lo que existirá una única topología en $\hat{V}$ con la cual éste es un espacio vectorial topológico y que tiene a $\overline{\mathcal{B}}$ por base de entornos de 0. Pero entonces dicha topología será también la única con la que $\hat{V}$ es un grupo topológico, luego tiene que ser la topología que ya tenemos definida en $\hat{V}$, y así tendremos probado que la compleción $\hat{V}$ es un espacio vectorial topológico.

Ahora bien, $\overline{\mathcal{B}}$ cumple las propiedades 1) y 2) precisamente porque es una base de entornos de 0 de un grupo topológico, mientras que 3) se cumple porque las aplicaciones $v \mapsto \alpha v$ son homeomorfismos: Si $U \in \mathcal{B}$ y $\alpha \in K$ no es nulo, existe un $W \in \mathcal{B}$ tal que $W \subset \alpha U$, y entonces $\overline{W} \subset \overline{\alpha U} = \alpha \overline{U}$.

Por lo tanto, sólo falta probar que los elementos de $\overline{\mathcal{B}}$ son absorbentes y equilibrados. Podemos suponer que los elementos de $\mathcal{B}$ son equilibrados, y entonces los de $\overline{\mathcal{B}}$ también lo son, de nuevo porque las aplicaciones $v \mapsto \alpha v$ son homeomorfismos.

Por último, para probar que son absorbentes, dado $U_0 \in \mathcal{B}$ y un $v \in \hat{V}$, tomamos $U \in \mathcal{B}$ tal que $U + U \subset U_0$ y un filtro $F$ en $V$ convergente a $v$ (podemos tomar $F = v$). Sea $A \in F$ tal que $d(A) < U$, con lo que $A - A \subset U$. Fijamos $a \in A$ y, como $U$ es absorbente, existe un $\alpha \in K$ tal que $a \in \alpha U$. Como $U$ es equilibrado podemos suponer que $|\alpha| \geq 1$. Entonces $A - a \subset U \subset \alpha U$, luego $A \subset a + U \subset \alpha(U + U) \subset \alpha U_0$, y entonces $v \in \overline{A} \subset \overline{\alpha U_0} = \alpha \overline{U}_0$. ■

Notemos que el teorema 2.40, junto con el hecho de que las aplicaciones lineales continuas son uniformemente continuas, se traduce en que $\hat{V}$ es, salvo isomorfismo topológico, el único $K$-espacio vectorial topológico completo que contiene a $V$ como subespacio denso, en el sentido de que, si $V^*$ es otro, entonces la identidad en $V$ se extiende a un isomorfismo topológico $\hat{V} \longrightarrow V^*$.

Observamos ahora que la compleción de un espacio normado es un espacio normado:

**Teorema 11.19** *Si $V$ es un $K$-espacio normado, la norma en $V$ se extiende a una norma en $\hat{V}$ que induce su uniformidad.*

Demostración: Basta observar que la norma $\| \ \| : V \longrightarrow [0, +\infty[$ es uniformemente continua, luego por 2.40 se extiende a $\hat{V}$ y la extensión es también una norma. En efecto:

1. Tenemos que $\|v\| \geq 0$ porque la extensión podemos hacerla con valores en $[0, +\infty[$, y ciertamente $\|0\| = 0$.

2. Se cumple que $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ porque la aplicación en $\hat{V} \times \hat{V}$ dada por $(v, w) \mapsto \|v\| + \|w\| - \|v + w\|$ es continua y toma valores $\geq 0$ en $V$, luego por densidad también en $\hat{V}$.

3. Se cumple que $\|\alpha v\| = |\alpha|\|v\|$ porque las aplicaciones en $\hat{V}$ dadas por $v \mapsto |\alpha|\|v\|$ y $v \mapsto \|\alpha v\|$ con continuas y coinciden en $V$, luego son iguales.

El teorema 11.5 nos da que la distancia $d(v, w) = \|v - w\|$ en $V$ induce su uniformidad, luego es uniformemente continua, luego se extiende a una aplicación uniformemente continua $d : \hat{V} \times \hat{V} \longrightarrow \mathbb{R}$ que, por densidad, tiene que venir dada igualmente por $d(v, w) = \|v - w\|$.

Las propiedades que hemos probado hasta ahora implican que $d$ es una pseudométrica en $\hat{V}$. Si llamamos $\mathcal{U}_1$ a la uniformidad de $\hat{V}$ y $\mathcal{U}_2$ a la inducida por $d$, la continuidad uniforme de $d$ se traduce en que $\mathcal{U}_2 \subset \mathcal{U}_1$ (dado $\epsilon > 0$, existe $W \in \mathcal{U}_1$ tal que $W \subset V_\epsilon = \{(v, w) \in \hat{V} \times \hat{V} \mid d(v, w) < \epsilon\}$). Por lo tanto, la identidad $i : (\hat{V}, \mathcal{U}_1) \longrightarrow (\hat{V}, \mathcal{U}_2)$ es uniformemente continua. Como ambas uniformidades coinciden en $V$, el teorema 2.17 implica que $\mathcal{U}_1 \subset \mathcal{U}_2$, luego $d$ induce la uniformidad de $\hat{V}$. Como $\hat{V}$ es un espacio de Hausdorff, concluimos que $d$ es una métrica, lo que se traduce en que $\|v\| = 0$ si y sólo si $v = 0$, que es lo que faltaba para probar que la extensión de la norma es una norma. ■

**Teorema 11.20** *Si $K$ es un cuerpo métrico, entonces la suma, el producto y el valor absoluto en $K$ admiten extensiones únicas a $\hat{K}$ con las que $\hat{K}$ es un cuerpo métrico.*

DEMOSTRACIÓN: Considerando a $K$ como $K$-espacio normado, los teoremas anteriores nos dan operaciones

$$+ : \hat{K} \times \hat{K} \longrightarrow \hat{K}, \qquad \cdot : K \times \hat{K} \longrightarrow \hat{K}$$

y una extensión $|\ | : \hat{K} \longrightarrow \hat{K}$ con las que $\hat{K}$ es un $K$-espacio normado. Para cada $\beta \in \hat{K}$, la aplicación $K \longrightarrow \hat{K}$ dada por $\alpha \mapsto \alpha\beta$ es uniformemente continua, pues $|\alpha\beta - \alpha'\beta| = |\alpha - \alpha'||\beta|$, luego se extiende a una aplicación uniformemente continua en $\hat{K}$, con lo que tenemos un producto $\hat{K} \times \hat{K} \longrightarrow \hat{K}$ que extiende al de $K$. Veamos que es continuo.

Para ello observamos en primer lugar que cumple $|\alpha\beta| = |\alpha||\beta|$, pues, fijado $\beta \in \hat{K}$, las aplicaciones $\alpha \mapsto |\alpha\beta|$ y $\alpha \mapsto |\alpha||\beta|$ son continuas y coinciden en $K$, luego son iguales. Ahora basta observar que

$$|\alpha\beta - \alpha'\beta'| \leq |\alpha\beta - \alpha'\beta| + |\alpha'\beta - \alpha'\beta'| = |\alpha - \alpha'||\beta| + |\alpha'||\beta - \beta'|,$$

donde hemos usado que la extensión del valor absoluto de $K$ es una norma en $\hat{K}$. De la desigualdad anterior se sigue claramente la continuidad del producto en $\hat{K}$, y los argumentos típicos de densidad implican que $\hat{K}$ es un anillo conmutativo y unitario. Sólo falta probar que todo elemento $\alpha \in \hat{K}$ no nulo tiene un inverso para la multiplicación.

En efecto, existe una sucesión $\{\alpha_n\}_{n=0}^\infty$ tal que $\lim_n \alpha_n = \alpha$, con lo que $\lim_n |\alpha_n| = |\alpha| > 0$, luego eliminando los primeros términos de la sucesión podemos suponer que existe un $\epsilon > 0$ tal que $|\alpha_n| > \epsilon$ para todo índice $n$, luego

$$\left|\frac{1}{\alpha_n} - \frac{1}{\alpha_m}\right| = \frac{|\alpha_m - \alpha_n|}{|\alpha_n||\alpha_m|} \leq \frac{|\alpha_m - \alpha_n|}{\epsilon^2}$$

y de aquí se sigue que la sucesión $\{\alpha_n^{-1}\}_{n=0}^{\infty}$ es de Cauchy en $K$, luego converge en $\hat{K}$ a un cierto $\alpha^*$, de modo que $\alpha\alpha^* = \lim\limits_n \alpha_n\alpha_n^{-1} = 1$.

Por lo tanto, $\hat{K}$ es un cuerpo, y hemos probado que la extensión del valor absoluto es un valor absoluto, por lo que $\hat{K}$ es un cuerpo métrico que tiene a $K$ como subcuerpo denso. ■

En otras palabras, la compleción de un cuerpo métrico tiene una estructura natural de cuerpo métrico (completo). Por ejemplo, ahora podemos ver a $\mathbb{R}$ como la compleción de $\mathbb{Q}$ como cuerpo métrico.

**Ejercicio:** Probar que si $V$ es un $K$-espacio vectorial topológico, entonces el producto por escalares $K \times \hat{V} \longrightarrow \hat{V}$ admite una extensión única a un producto $\hat{K} \times \hat{V} \longrightarrow \hat{V}$ con la que $\hat{V}$ se convierte en un $\hat{K}$-espacio vectorial topológico. Si $V$ es un espacio normado, la norma en $\hat{V}$ como $K$-espacio vectorial es también una norma en $\hat{V}$ como $\hat{K}$-espacio vectorial.

67

---

## 11.3 Convergencia uniforme

Si $X$ es un conjunto, $\Sigma \subset \mathcal{P}X$ y $V$ es un espacio vectorial topológico, el teorema 2.54 prueba que el espacio $\mathcal{F}_\Sigma(X,V)$ de todas las aplicaciones de $X$ en $V$ es un grupo topológico con la topología de la convergencia uniforme en los conjuntos de $\Sigma$, pero también sabemos que en general no es un espacio vectorial topológico, pues, según las observaciones previas al teorema 2.49, basta considerar el caso de la convergencia uniforme en $X$ (es decir, $\Sigma = \{X\}$) para tener un contraejemplo incluso si $V$ es un espacio normado. Ya señalamos que el único inconveniente en este caso es la presencia de funciones no acotadas, y vamos a ver que lo mismo es cierto en general.

En la prueba del teorema 2.54 hemos visto que una base de entornos de 0 del grupo topológico $\mathcal{F}_\Sigma(X,V)$ está formada por las intersecciones finitas de conjuntos de la forma

$$V(A;U) = \{f \in \mathcal{F}_\Sigma(X,V) \mid f[A] \subset U\},$$

donde $A$ recorre $\Sigma$ y $U$ recorre los entornos equilibrados de 0 en $V$, aunque es claro que basta considerar elementos de cualquier base de entornos de 0 en $V$. Más aún, si $\Sigma$ es cerrado para uniones finitas, los entornos $V(A;U)$ ya forman una base de entornos de 0, sin necesidad de tomar intersecciones finitas.

El teorema 2.49 admite la generalización siguiente:

**Teorema 11.21** *Sea $X$ un conjunto, sea $\Sigma \subset \mathcal{P}X$, sea $V$ un espacio vectorial topológico y $W$ un subespacio vectorial de $\mathcal{F}_\Sigma(X,V)$. Entonces $W$ es un espacio vectorial topológico con la topología de la convergencia uniforme en los conjuntos de $\Sigma$ si y sólo si para cada $A \in \Sigma$ y cada $f \in W$ se cumple que $f[A]$ está acotado en $V$.*

Demostración: Los conjuntos $V(A;U)$ cumplen casi todas las propiedades exigidas por el teorema 11.3. En efecto, podemos suponer que $\Sigma$ es cerrado para uniones finitas, y entonces:

1. $V(A_1 \cup A_2; U_1 \cap U_2) \subset V(A_1;U_1) \cap V(A_2;U_2)$.
2. Si $W + W \subset U$, entonces $V(A;W) + V(A;W) \subset V(A;U)$.
3. Claramente $\alpha V(A;U) = V(A;\alpha U)$, por lo que si $W \subset \alpha U$, entonces
$$V(A;W) \subset \alpha V(A;U).$$

   Además, $V(A;U)$ es equilibrado si lo es $U$.

La única propiedad que no podemos garantizar en general es que los conjuntos $V(A;U)$ sean absorbentes. Notemos ahora que si llamamos $V(A;U)$ a la intersección con $W$ de $V(A;U)$, se siguen cumpliendo las propiedades anteriores, y lo que tenemos que probar es que los conjuntos $V(A;U) \subset W$ son absorbentes en $W$ si y sólo si se cumple la hipótesis del enunciado.

En efecto, si $f \in W$, como $f[A]$ está acotado, existe un $\lambda \in K$ tal que $f[A] \subset (1/\lambda)U$ y, más en general, si $|\alpha| \leq |\lambda|$, entonces $|\alpha/\lambda| \leq 1$ luego, si suponemos que $U$ es equilibrado, $(\alpha/\lambda)U \subset U$, luego $f[A] \subset (1/\lambda)U \subset (1/\alpha)U$, y entonces $f \in V(A;(1/\alpha)U) = (1/\lambda)V(A;U)$, por lo que $\alpha f \in V(A;U)$. Esto prueba que $V(A;U)$ es absorbente.

Recíprocamente, si $W$ es un espacio vectorial topológico, $V(A;U)$ tiene que ser absorbente, luego, dado $f \in W$, existe un $\alpha \in K$ tal que $(1/\alpha)f \in V(A;U)$, luego $f \in V(A;\alpha U)$, luego $f[A] \subset \alpha U$, lo que prueba que $f[A]$ está acotado. ■

**Notas** Si entendemos que una aplicación está acotada cuando lo está su imagen, la condición de que $f[A]$ esté acotado en $V$ en el teorema anterior puede expresarse equivalentemente diciendo que las funciones $f \in W$ están acotadas sobre los conjuntos de $\Sigma$.

Si $V$ es un espacio de Hausdorff, sabemos que una condición suficiente para que $\mathcal{F}_\Sigma(X,V)$ también lo sea es que $\bigcup \Sigma = X$. Si $X$ es un espacio topológico, una condición suficiente para que $C_\Sigma(X,V)$ sea un espacio de Hausdorff (suponiendo que $X$ y $V$ lo son) es que $\bigcup \Sigma$ sea denso en $X$, pues si $f \in C_\Sigma(X,V)$ no es la función nula, tiene que existir $x \in \bigcup \Sigma$ tal que $f(x) \neq 0$, luego existe un entorno $U$ de 0 en $V$ tal que $f(x) \notin U$, así como un $A \in \Sigma$ tal que $x \in A$, y entonces $f \notin V(A;U)$, luego $C_\Sigma(X,V)$ es de Hausdorff por 10.16. ■

**Ejemplos** Sabemos que si tomamos como $\Sigma$ la familia de todos los conjuntos $\{x\}$ con $x \in X$ (o, equivalentemente, todos los subconjuntos finitos de $X$) obtenemos la topología de la convergencia puntual. El teorema anterior nos proporciona una prueba alternativa de que con ella $\mathcal{F}_\Sigma(X,V)$ es un espacio vectorial topológico, ya que si $A$ es finito, $f[A]$ también lo es, luego está acotado en $V$. ■

El teorema siguiente generaliza a 2.49:

**Teorema 11.22** *Si $X$ es un conjunto, $\Sigma \subset \mathcal{P}X$ y $V$ es un espacio vectorial topológico, el espacio $\mathcal{F}^*_\Sigma(X,V)$ de todas las funciones acotadas de $X$ en $V$ es un espacio vectorial topológico con la topología de la convergencia uniforme en los conjuntos de $\Sigma$.*

En el caso particular de la topología de la convergencia uniforme podemos decir más:

**Teorema 11.23** *Si $X$ es un conjunto y $V$ es un espacio vectorial topológico, el espacio $\mathcal{F}^*_u(X,V)$ es cerrado en $\mathcal{F}_u(X,V)$. En particular, si $V$ es completo, también lo es $\mathcal{F}^*_u(X;V)$*

DEMOSTRACIÓN: Si $f \in \overline{\mathcal{F}^*_u(X,V)}$ y $U$ es un entorno de 0 en $V$, sea $W$ otro entorno de 0 equilibrado tal que $2W \subset U$. Entonces $f + V(X;W)$ es un entorno de $f$, luego existe $g \in \mathcal{F}^*_u(X,V) \cap (f + V(X;W))$. Como $g[X]$ está acotado, existe $\alpha \in K$ tal que $g[X] \subset \alpha W$. Como $W$ es equilibrado podemos suponer que $|\alpha| \geq 1$, pues si $|\alpha| < 1$ entonces $\alpha W \subset W$ y podemos tomar $\alpha = 1$. Así $W \subset \alpha W$ (pues si $w \in W$ entonces $\alpha^{-1}w \in W$). Como $(f-g)[X] \subset W \subset \alpha W$, resulta que $f[X] \subset \alpha W + \alpha W \subset \alpha U$, y esto prueba que $f \in \mathcal{F}^*_u(X;V)$. El teorema 2.52 nos da la completitud de $\mathcal{F}^*_u(X;V)$ supuesta la de $V$. ■

**Ejercicio:** Probar que si $V$ tiene un entorno de 0 acotado, entonces $\mathcal{F}^*_u(X,V)$ es abierto y cerrado en $\mathcal{F}_u(X,V)$.

El teorema 11.9 afirma que las aplicaciones lineales continuas están acotadas sobre los conjuntos acotados, luego en el espacio $\mathcal{L}(X,V)$ de aplicaciones lineales continuas entre dos espacios vectoriales topológicos el teorema 11.21 es aplicable a cualquier familia $\Sigma$ de conjuntos acotados. Enunciamos esto explícitamente:

**Teorema 11.24** *Sean $X$ y $V$ espacios vectoriales topológicos y sea $\Sigma$ una familia de subconjuntos acotados de $X$. Entonces el espacio $\mathcal{L}_\Sigma(X,V)$ de todas las aplicaciones lineales continuas de $X$ en $V$ dotado de la topología de la convergencia uniforme en los conjuntos de $\Sigma$ es un espacio vectorial topológico.*

**Nota** Es fácil ver que, si $X$ y $V$ son espacios de Hausdorff, una condición suficiente para que el espacio $\mathcal{L}_\Sigma(X,V)$ también lo sea es que la envoltura lineal $\langle \bigcup \Sigma \rangle$ sea densa en $X$. ■

El teorema anterior nos muestra que tomando como $\Sigma$ la familia de todos los subconjuntos acotados de $X$ obtenemos una estructura de espacio vectorial topológico $\mathcal{L}_\Sigma(X,V)$. Ya conocíamos un caso particular de esta topología:

**Teorema 11.25** *Si $V$ y $W$ son espacios normados, la topología inducida por la norma definida en el teorema* 9.44 *en $\mathcal{L}(V,W)$ es la topología de la convergencia uniforme en los subconjuntos acotados de $V$.*

DEMOSTRACIÓN: Observemos que una base de entornos de 0 de la topología de la convergencia uniforme en los subconjuntos acotados de $V$ está formada por los conjuntos $V(A;U)$ donde $A$ recorre las bolas abiertas $B_r(0)$ de $V$ y $U$ las bolas abiertas $B_\epsilon(0)$ de $W$. Claramente

$$B_{\epsilon/r}(0) = \{f \in \mathcal{L}(V,W) \mid \|f\| \leq \epsilon/r\} \subset V(B_r(0); B_\epsilon(0)),$$

lo que prueba que todo entorno de 0 en $\mathcal{L}_\Sigma(V,W)$ es un entorno de 0 para la norma.

Recíprocamente, fijemos $\alpha \in K$ tal que $|\alpha| > 1$ y veamos que

$$V(B_1(0); B_1(0)) \subset B_{2|\alpha|}(0).$$

En efecto, si $\|f\| \geq 2|\alpha| > |\alpha|$, existe $v \in V$ no nulo tal que $|\alpha|\|v\| < \|f(v)\|$. Podemos tomar el máximo entero $n$ tal que $|\alpha|^n \leq \|f(v)\|$, y entonces se cumple $\|v\| < |\alpha|^n \leq \|f(v)\|$, pues si fuera $|\alpha|^n \leq \|v\|$, entonces

$$|\alpha|^{n+1} \leq |\alpha|\|v\| < \|f(v)\|,$$

en contra de la maximalidad de $n$. Por lo tanto, $\|\alpha^{-n}v\| < 1$ y $\|f(\alpha^{-n}v)\| \geq 1$, luego $f \notin V(B_1(0); B_1(0))$. Esto prueba que la bola $B_{2|\alpha|}(0)$ es un entorno de 0 en $\mathcal{L}_\Sigma(V,W)$ y, como las homotecias $v \mapsto rv$ son homeomorfismos, de hecho todas las bolas son entornos de 0, luego todo entorno de 0 para la norma lo es también en $\mathcal{L}_\Sigma(V,W)$. ■ 75

---

## 11.4 Espacios vectoriales localmente convexos

En esta sección trabajamos únicamente con espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$ (es decir, $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$), de modo que si $V$ es un $\mathbb{K}$ espacio vectorial podemos hablar de subconjuntos convexos de $V$ (definición B.6). El teorema siguiente nos da una primera conexión entre la convexidad y la topología de la que extraeremos varias consecuencias:

**Teorema 11.26** *Sea $V$ un espacio vectorial topológico y $A \subset V$ un conjunto convexo. Si $x \in \mathring{A}$, $y \in \overline{A}$ y $0 \leq \lambda < 1$, entonces $(1-\lambda)x + \lambda y \in \mathring{A}$.*

DEMOSTRACIÓN: Podemos suponer que $0 < \lambda < 1$. Realizando una traslación podemos suponer que $(1-\lambda)x + \lambda y = 0$. Entonces $y = \alpha x$, para cierto $\alpha < 0$. Así $\alpha x = y \in \alpha\mathring{A} \cap \overline{A}$, luego existe un $\alpha z \in \alpha\mathring{A} \cap A$, con lo que $z \in \mathring{A}$. Sea $\beta = \alpha/(\alpha - 1)$, con lo que $0 < \beta < 1$ y $\beta z + (1-\beta)\alpha z = 0$. Entonces

$$U = \{\beta w + (1-\beta)\alpha z \mid w \in \mathring{A}\}$$

es un entorno de 0, pero $w \in \mathring{A}$ y $\alpha z \in A$ implican que $U \subset A$, porque $A$ es convexo, luego $0 \in \mathring{A}$. ■

**Teorema 11.27** *Si $V$ es un espacio vectorial topológico sobre $\mathbb{K}$ y $A \subset V$ es convexo, entonces también son convexos $\mathring{A}$ y $\overline{A}$. Si además $A$ tiene interior no vacío, entonces $\overline{\mathring{A}} = \overline{A}$ y $\mathring{\overline{A}} = \mathring{A}$. En particular $\partial A = \partial\mathring{A} = \partial\overline{A}$.*

Demostración: La convexidad de $\mathring{A}$ es consecuencia inmediata del teorema anterior.

Para cada $\lambda \in [0,1]$, sea $\phi_\lambda : V \times V \longrightarrow V$ dada por $\phi_\lambda(v,w) = (1-\lambda)v + \lambda w$. Claramente es una aplicación continua y, como $A$ es convexo, $\phi_\lambda[A \times A] \subset A$, luego

$$\phi_\lambda[\overline{A} \times \overline{A}] = \phi_\lambda[\overline{A \times A}] \subset \overline{\phi_\lambda[A \times A]} \subset \overline{A},$$

y esto implica que $\overline{A}$ es convexo.

Supongamos ahora que $\mathring{A} \neq \varnothing$. El teorema anterior implica que $\overline{A} \subset \overline{\mathring{A}}$, pues si $y \in \overline{A}$ y $x \in \mathring{A}$, entonces la aplicación $f : [0,1] \longrightarrow V$ dada por $f(\lambda) = (1-\lambda)x + \lambda y$ es continua y si $U$ es un entorno de $y$, entonces $f^{-1}[U]$ es un entorno de 1, luego existe un $\lambda < 1$ tal que $f(\lambda) \in U \cap \mathring{A}$, luego $y \in \overline{\mathring{A}}$. La otra inclusión es trivial.

Tomemos ahora un $x \in \mathring{\overline{A}}$. Aplicando una traslación, no perdemos generalidad si suponemos que es $x = 0$. Sea $U$ un entorno de 0 equilibrado tal que $U \subset \overline{A} = \overline{\mathring{A}}$ por la parte ya probada. Entonces existe $y \in U \cap \mathring{A}$. Como $U$ es equilibrado, también $-y \in U \subset \overline{A}$. Así $0 = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}(-y) \in \mathring{A}$ por 11.26.

Además $\partial A = \overline{A} \cap \overline{V \setminus A} = \overline{\mathring{A}} \cap \overline{V \setminus \mathring{A}} = \partial \mathring{A} = \overline{A} \cap V \setminus \mathring{\overline{A}} = \overline{A} \cap \overline{V \setminus \overline{A}} = \partial \overline{A}$. ■

**Definición 11.28** Si $V$ es un espacio vectorial topológico y $A \subset V$, definimos $\overline{\mathrm{co}}(A)$ como la clausura de la envoltura convexa de $A$, que resulta ser el menor cerrado convexo que contiene a $A$.

**Ejercicio:** Sea $C = \{(x, 1/|x|) \mid x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$. Probar que $C$ es cerrado, pero que su envoltura convexa no lo es.

Observemos ahora que las bolas abiertas en un espacio normado son convexas. En efecto, si $x, y \in B_\epsilon(z)$ y $0 \leq \lambda \leq 1$, entonces

$$\|(1-\lambda)x + \lambda y - z\| = \|(1-\lambda)(x-z) + \lambda(y-z)\| \leq (1-\lambda)\|x-z\| + \lambda\|z\| < \epsilon,$$

luego $(1-\lambda)x + \lambda y \in B_\epsilon(z)$.

**Definición 11.29** Si $V$ es un espacio vectorial, un conjunto $A \subset V$ es *absolutamente convexo* si es convexo y equilibrado.

Por ejemplo, las bolas abiertas de centro 0 en un espacio normado son absolutamente convexas.

Si $V$ es un espacio vectorial topológico sobre $\mathbb{K}$, es inmediato que todo conjunto convexo $A \subset V$ es arcoconexo, luego conexo. Basta tener en cuenta que si $x, y \in A$, entonces $f(t) = (1-t)x + ty$ es un arco en $A$ que conecta $x$ con $y$. En particular, todo espacio vectorial topológico es arcoconexo.

Más aún, todo espacio vectorial topológico $V$ es localmente arcoconexo, pues si $x \in V$, todo entorno de $x$ contiene uno de la forma $x + U$, donde $U$ es un entorno de 0 equilibrado, y entonces $x + U$ es arcoconexo, dado que, para todo $u \in U$, la función $f : [0,1] \longrightarrow V$ dada por $f(t) = x + tu$ es un arco contenido en $x + U$ que conexta $x$ con $x + u$.

Lo que ya no es cierto en general es que todo espacio vectorial topológico sea *localmente convexo*, es decir, que tenga una base de entornos de 0 convexos (lo cual equivale claramente a que todo punto tenga una base de entornos convexos).

Claramente, todo espacio normado es un espacio vectorial topológico localmente convexo, pues las bolas abiertas de centro 0 son una base de entornos (absolutamente) convexos.

**Teorema 11.30** *Todo espacio vectorial topológico localmente convexo tiene una base de entornos de* 0 *abiertos (resp. cerrados) y absolutamente convexos.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $V$ un espacio vectorial topológico absolutamente convexo y sea $U$ un entorno de 0. Por 10.15 contiene un entorno de 0 cerrado $F$.

Sea $C \subset F$ un entorno de 0 convexo. Por 11.2 existe un entorno de 0 equilibrado $W \subset C$. Entonces $U_0 = \operatorname{co}(W) \subset C \subset F$ es un entorno convexo de 0. Veamos que es equilibrado.

En efecto, si $z \in U_0$, entonces $z = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i w_i$, donde $w_i \in W$ y los $\lambda_1$ suman 1. Si $\alpha \in \mathbb{K}$ cumple $|\alpha| \leq 1$, entonces $\alpha z = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \alpha w_i$, donde $\alpha w_i \in W$, luego $\alpha z \in U_0$.

De hecho, acabamos de probar que la envoltura convexa de un conjunto equilibrado es equilibrada, y los teoremas 11.7 y 11.27 nos dan que $\mathring{U}_0$ es un entorno de 0 abierto y absolutamente convexo contenido en $U$. Similarmente, $\overline{U}_0 \subset F \subset U$ es un entorno de 0 cerrado y absolutamente convexo. ■

El teorema 11.3 se simplifica para el caso de espacios localmente convexos:

**Teorema 11.31** *Sea $V$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y sea $\mathcal{U}$ una familia de subconjuntos de $V$ absorbentes y absolutamente convexos tales que:*

1. *Si $U_1$, $U_2 \in \mathcal{U}$, existe $W \in \mathcal{U}$ tal que $W \subset U_1 \cap U_2$.*
2. *Si $U \in \mathcal{U}$ y $\alpha > 0$, existe $W \in \mathcal{U}$ tal que $W \subset \alpha U$.*

*Entonces existe una única topología en $V$ con la que $V$ es un espacio vectorial topológico (que será localmente convexo) y $\mathcal{U}$ es una base de entornos de* 0.

DEMOSTRACIÓN: Basta probar que $\mathcal{U}$ cumple las hipótesis del teorema 11.3. Si $U \in \mathcal{U}$, tomamos $W \in \mathcal{U}$ tal que $W \subset \frac{1}{2}U$, y entonces $W + W \subset U$, pues todo elemento de $W + W$ es de la forma $\frac{1}{2}u_1 + \frac{1}{2}u_2$ y está en $U$ por convexidad.

Por otra parte, si $U \in \mathcal{U}$ y $\alpha \in \mathbb{K}$ es no nulo, por hipótesis existe $W \in \mathcal{U}$ tal que $W \subset |\alpha|U$, pero $\beta = \alpha/|\alpha|$ cumple $|\beta| \leq 1$, luego $\beta U = U$ y, por consiguiente, $|\alpha|U = |\alpha|\beta U = \alpha U$. ■

Los espacios $\ell^p$ con $0 < p < 1$ son ejemplos de espacios vectoriales topológicos completamente metrizables no localmente convexos (teorema A.73).

**Seminormas** El teorema 10.24 prueba que la uniformidad de todo espacio vectorial topológico está generada por una familia de semipseudonormas, que es un concepto un tanto artificial, pero que garantiza que los entornos de 0 definidos como intersecciones de bolas de semipseudonormas sean equilibrados. Introducimos ahora el concepto, mucho más natural, de "seminorma" y probamos que en los espacios vectoriales topológicos localmente convexos, las semipseudonormas generadoras de la uniformidad pueden tomarse de modo que sean seminormas:

**Definición 11.32** Si $V$ es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, una *seminorma* en $V$ es una aplicación $p : V \longrightarrow \mathbb{R}$ que cumple las propiedades siguientes, para todos los vectores $v, v_1, v_2$ y todo escalar $\alpha$:

1. $p(v) \geq 0$.
2. $p(v_1 + v_2) \leq p(v_1) + p(v_2)$,
3. $p(\alpha v) = |\alpha| p(v)$.

Así, una norma en $V$ es una seminorma tal que $p^{-1}[\{0\}] = \{0\}$.

En general, se llama *núcleo* de una seminorma $p$ a $\mathrm{N}(p) = p^{-1}[\{0\}]$, y es claro que se trata de un subespacio vectorial de $V$. (Notemos que se cumple $p(0) = p(0 \cdot 0) = 0 \cdot p(0) = 0$.)

Notemos que toda seminorma (en particular, toda norma) cumple además la desigualdad:

$$|p(v_1) - p(v_2)| \leq p(v_1 - v_2).$$

En efecto,

$$p(v_1) = p(v_1 - v_2 + v_2) \leq p(v_1 - v_2) + p(v_2),$$

e igualmente llegamos a que

$$p(v_2) \leq p(v_2 - v_1) + p(v_1) = p(v_1 - v_2) + p(v_1),$$

luego

$$-p(v_1 - v_2) \leq p(v_1) - p(v_2) \leq p(v_1 - v_2),$$

de donde $|p(v_1) - p(v_2)| \leq p(v_1 - v_2)$. ∎

Si $p$ es una seminorma en un espacio vectorial $V$, definimos

$$B_p = \{v \in V \mid p(v) < 1\}.$$

La prueba del teorema siguiente no ofrece ninguna dificultad:

**Teorema 11.33** *Si $p_1, \ldots, p_n$ son seminormas en un espacio vectorial $V$ y definimos $p : V \longrightarrow \mathbb{R}$ como $p(v) = \max\{p_1(v), \ldots, p_n(v)\}$, entonces $p$ es una seminorma en $V$ y $B_p = \bigcap\limits_{i=1}^{n} B_{p_i}$.*

**Teorema 11.34** *Si $p$ es una seminorma en un espacio vectorial $V$, entonces $B_p$ es un conjunto absorbente y absolutamente convexo.*

DEMOSTRACIÓN: Para probar que $B_p$ es absorbente tomamos $v \in V$. O bien $p(v) = 0$, en cuyo caso $v \in B_p$, o bien $p(v) > 0$, en cuyo caso podemos tomar $0 < \epsilon < 1/p(v)$, de modo que si $\alpha \in \mathbb{K}$ cumple $|\alpha| \leq \epsilon$, entonces

$$p(\alpha v) = |\alpha| p(v) \leq \epsilon p(v) < 1,$$

luego $\alpha v \in B_p$.

Claramente $B_p$ es equilibrado, pues si $v \in B_p$ y $\alpha \in \mathbb{K}$ cumple $|\alpha| \leq 1$, entonces $p(\alpha v) = |\alpha| p(v) \leq p(v) < 1$, luego $\alpha v \in B_p$.

Finalmente probamos que $B_p$ es convexo. Si $v_1, v_2 \in B_p$ y $0 \leq \lambda \leq 1$, entonces

$$p((1-\lambda)v_1 + \lambda v_2) \leq (1-\lambda)p(v_1) + \lambda p(v_2) < 1 - \lambda + \lambda = 1,$$

luego $(1-\lambda)v_1 + \lambda v_2 \in B_p$. ■

Veamos ahora que todo subconjunto absorbente y absolutamente convexo de un espacio vectorial $V$ define una seminorma:

**Definición 11.35** Si $V$ es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y $A \subset V$ es absorbente y absolutamente convexo, se define el *funcional de Minkowski* asociado a $A$ como la aplicación $p_A : V \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$p_A(v) = \text{ínf}\{\lambda > 0 \mid v \in \lambda A\}.$$

Notemos que, como $A$ es absorbente, siempre existe un $\alpha > 0$ tal que $\alpha v \in A$, luego $v \in (1/\alpha)A$, por lo que $p_A(v) \geq 0$ está bien definido.

**Teorema 11.36** *Si $V$ es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y $A \subset V$ es un subconjunto absorbente y absolutamente convexo, entonces el funcional de Minkowski $p_A$ es una seminorma en $V$ tal que*

$$B_{p_A} = \{v \in V \mid p_A(v) < 1\} \subset A \subset \{v \in V \mid p_A(v) \leq 1\}.$$

DEMOSTRACIÓN: Notemos en primer lugar que, como $A$ es equilibrado, $0 \in A$, luego, claramente, $p_A(0) = 0$. Sea $v \in V$ y $\alpha \in \mathbb{K}$. Si $\alpha = 0$, trivialmente $p(\alpha v) = 0 = |\alpha| p(v)$, luego podemos suponer que $\alpha \neq 0$. Observemos entonces que si $\alpha, \lambda \in \mathbb{K}$ con $\alpha \neq 0$, se cumple que

$$\alpha v \in \lambda A \text{ si y sólo si } v \in \frac{\lambda}{|\alpha|} A,$$

pues, $v \in (\lambda/|\alpha|)A$ equivale a $\alpha v \in \lambda(\alpha/|\alpha|)A$, que a su vez equivale a $\alpha v \in \lambda A$, porque $A$ es equilibrado, luego $(\alpha/|\alpha|)A = A$. Por consiguiente,

$$p_A(\alpha v) = \text{ínf}\{\lambda > 0 \mid \alpha v \in \lambda A\} = \text{ínf}\{\lambda > 0 \mid v \in (\lambda/|\alpha|)A\}$$

$$= \text{ínf}\{|\alpha|\lambda/|\alpha| > 0 \mid v \in (\lambda/|\alpha|)A\} = |\alpha| \,\text{ínf}\{\mu > 0 \mid v \in \mu A\} = |\alpha| p_A(v),$$

donde hemos usado que $x \mapsto |\alpha|x$ es una semejanza de $\mathbb{R}$ en sí mismo, luego conserva los ínfimos.

Tomemos ahora $v_1$, $v_2 \in V$. Dado $\epsilon > 0$, existen $\lambda$, $\mu > 0$ tales que

$$\lambda \leq p_A(v_1) + \epsilon, \qquad v_1 \in \lambda A, \qquad \mu \leq p_A(v_2), \qquad v_2 \in \mu A.$$

Tomamos $a_1$, $a_2 \in A$ tales que $v_1 = \lambda a_1$, $v_2 = \mu a_2$. Por convexidad

$$\frac{1}{\lambda + \mu}(v_1 + v_2) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} a_1 + \frac{\mu}{\lambda + \mu} a_2 \in A,$$

luego $v_1 + v_2 \in (\lambda + \mu)A$, luego $p_A(v_1 + v_2) \leq \lambda + \mu \leq p_A(v_1) + p_A(v_2) + 2\epsilon$. Como esto vale para todo $\epsilon > 0$, de hecho $p_A(v_1 + v_2) \leq p_A(v_1) + p_A(v_2)$.

Con esto tenemos probado que $p_A$ es una seminorma. Si $p_A(v) < 1$, existe $0 < \lambda < 1$ tal que $v \in \lambda A \subset A$, luego $B_{p_A} \subset A$. Por otra parte, si $v \in A$ entonces $v \in 1 \cdot A$, luego $p_A(v) \leq 1$. ■

Sucede que toda seminorma es un funcional de Minkowski:

**Teorema 11.37** *Si $p$ es una seminorma en un $\mathbb{K}$-espacio vectorial $V$ y $A = B_p$, entonces $p = p_A$.*

DEMOSTRACIÓN: Si $v \in V$, entonces

$$p_A(v) = \text{ínf}\{\lambda > 0 \mid v/\lambda \in A\} = \text{ínf}\{\lambda > 0 \mid p(v/\lambda) < 1\}$$
$$= \text{ínf}\{\lambda > 0 \mid p(v) < \lambda\} = p(v).$$ ■

Ahora ya podemos relacionar las seminormas de un espacio vectorial topológico con su topología:

**Teorema 11.38** *Si $p : V \longrightarrow \mathbb{R}$ es una seminorma en un espacio vectorial topológico $V$, las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

1. *$p$ es continua.*
2. *$p$ es continua en $0$.*
3. *$B_p$ es un entorno de $0$.*
4. *$B_p^* = \{v \in V \mid p(v) \leq 1\}$ es un entorno de $0$.*
5. *$B_p$ es abierto.*

DEMOSTRACIÓN: Claramente 1) $\Rightarrow$ 2) y por otra parte 2) $\Rightarrow$ 1), pues, dado $v \in V$ y $\epsilon > 0$,

$$p^{-1}\big[\,]p(v) - \epsilon, p(v) + \epsilon[\,\big] = \{w \in V \mid |p(v) - p(w)| < \epsilon\} \supset \{w \in V \mid p(v - w) < \epsilon\},$$

pero el último conjunto es claramente $v + \epsilon B_p$, que es un entorno de $v$, ya que $B_p = p^{-1}\big[\,]-1, 1[\,\big]$ es un entorno de $0$.

También es claro que 2) $\Rightarrow$ 3), pues $B_p = p^{-1}\big[\,]-1,1[\,\big]$. Trivialmente 3) $\Rightarrow$ 4). Para probar que 4) $\Rightarrow$ 2) tenemos en cuenta que los intervalos $[-\epsilon,\epsilon]$ son una base de entornos de 0 en $\mathbb{R}$, y se cumple que $p^{-1}\big[[-\epsilon,\epsilon]\big] = \epsilon B_p^*$ es un entorno de 0, luego $p$ es continua en 0. Por último, es trivial que 5) $\Rightarrow$ 3), así como que 1) $\Rightarrow$ 5). ■

**Definición 11.39** Sea $V$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y sea $\mathcal{P}$ una familia no vacía de seminormas en $V$. Llamaremos *topología inducida por* $\mathcal{P}$ a la menor topología en $V$ respecto de la cual todas las seminormas de $\mathcal{P}$ son continuas.

**Teorema 11.40** *Si $V$ es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y $\mathcal{P}$ es una familia no vacía de seminormas en $V$, la topología inducida por $\mathcal{P}$ dota a $V$ de estructura de espacio vectorial topológico localmente convexo. Una base de entornos abiertos de* 0 *la forman los conjuntos*

$$\{v \in V \mid p_1(v) < \epsilon, \ldots, p_n(v) < \epsilon\}, \qquad \textit{con } p_1,\ldots,p_n \in \mathcal{P}, \quad \epsilon > 0.$$

*La topología será de Hausdorff si y sólo si para cada $v \in V$ existe $p \in \mathcal{P}$ tal que $p(v) \neq 0$.*

Demostración: Sea $\mathcal{U}$ el conjunto de todos los conjuntos de la forma $\epsilon U$, donde $\epsilon > 0$ y $U = \bigcap\limits_{i=1}^{n} B_{p_i}$, con $p_i \in \mathcal{P}$.

Observemos que el teorema 11.33 nos da que $U = B_p$, donde $p = \max\{p_i\}$, luego $U$ es absorbente y absolutamente convexo, y lo mismo vale para $\epsilon U$. Ahora es inmediato que $\mathcal{U}$ cumple las hipótesis del teorema 11.31, luego existe una única topología $\mathcal{T}$ en $V$ respecto de la cual $\mathcal{U}$ es una base de entornos de 0.

Respecto de $\mathcal{T}$, cada $B_p$ es un entorno de 0, luego por el teorema anterior es abierto y la seminorma $p$ es continua. Recíprocamente, si $\mathcal{T}'$ es una topología respecto de la cual las seminormas de $\mathcal{P}$ son continuas, entonces cada $B_p$ es abierto y todos los elementos de $\mathcal{U}$ son abiertos, de donde se sigue que $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$. En otras palabras, $\mathcal{T}$ es la que hemos definido como topología inducida por $\mathcal{P}$. Sólo falta observar que los conjuntos descritos en el enunciado son precisamente los elementos de $\mathcal{U}$.

Por último, es claro que la condición que hemos enunciado para que la topología sea de Hausdorff equivale a que la intersección de todos los entornos de 0 se reduzca a $\{0\}$, que es, ciertamente, equivalente a que la topología sea de Hausdorff. ■

En un espacio normado, la norma es una seminorma, y el teorema anterior implica que la topología inducida por la norma en el sentido de la definición 11.39 es la topología inducida por la norma en el sentido usual. Más aún, toda topología localmente convexa está inducida por una familia de seminormas:

**Teorema 11.41** *Si $V$ es un espacio vectorial topológico localmente convexo, la topología de $V$ es la inducida por la familia de las seminormas continuas en $V$.*

Demostración: Sea $\mathcal{T}$ la topología de $V$ y $\mathcal{T}'$ la topología inducida por sus seminormas continuas. Por definición de ésta, tenemos que $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$. Por otra parte, si $U$ es un entorno de 0 respecto de $\mathcal{T}$, por 11.30 podemos tomar otro entorno $W \subset U$ que sea además absolutamente convexo, y entonces $p = p_W$ es una seminorma continua, pues, $W \subset \{v \in V \mid p(v) \leq 1\}$, luego $B_p^*$ es un entorno de 0 y basta aplicar el teorema 11.38. Por otra parte, $B_p \subset W$, luego $W$ es un entorno de 0 para $\mathcal{T}'$, de donde se sigue que $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$ y tenemos la igualdad. ■

**Ejemplo** Si $\{V_i\}_{i\in I}$ es una familia de espacios normados y $V = \prod\limits_{i\in I} V_i$, entonces $p_i(v) = \|v_i\|$ es claramente una seminorma en $V$, y es continua porque es la composición de una proyección con la norma en $V_i$, y ambas aplicaciones son continuas. Es inmediato comprobar que estas seminormas generan la topología producto. ■

Ahora generalizamos el teorema 9.43:

**Teorema 11.42** *Si $f : V \longrightarrow W$ es una aplicación lineal entre $\mathbb{K}$-espacios vectoriales topológicos localmente convexos y $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}'$ son familias de seminormas que generan la topología de $V$ y $W$, respectivamente, entonces $f$ es continua si y sólo si para toda $q \in \mathcal{P}'$ existen seminormas $p_1, \ldots, p_n \in \mathcal{P}$ y un número real $M > 0$ tales que $q(f(v)) \leq M \max_i p_i(v)$, para todo $v \in V$.*

Demostración: Si $f$ es continua, consideramos $U = \{w \in W \mid q(w) \leq 1\}$, que es un entorno de 0, luego $f^{-1}[U[$ es un entorno de 0 en $V$ y el teorema 11.40 nos da seminormas $p_1, \ldots, p_n \in \mathcal{P}$ y un $\epsilon > 0$ de modo que

$$\{v \in V \mid p_1(v) < \epsilon, \ldots, p_n(v) < \epsilon\} \subset f^{-1}[U].$$

Así, si $v \in V$ y $c > \max_i p_i(v)$, tenemos que $\epsilon v/c \in f^{-1}[U]$, luego $q(\epsilon f(v)/c) \leq 1$, luego $q(f(v)) \leq \epsilon^{-1} c$, para todo $c > \max_i p_i(v)$, luego también se cumple que $q(f(v)) \leq \epsilon^{-1} \max_i p_i(v)$.

Recíprocamente, si $f$ cumple la propiedad indicada y $U$ es un entorno de 0 en $W$, existen $q_1, \ldots, q_m \in \mathcal{P}'$ y $\epsilon > 0$ tales que

$$U_0 = \{w \in W \mid q_1(w) < \epsilon, \ldots, q_m(w) < \epsilon\} \subset U.$$

Aplicando la condición del enunciado a cada seminorma $q_i$, obtenemos un número finito de seminormas $p_1, \ldots, p_n \in \mathcal{P}$ y un $M > 0$ de modo que

$$G = \{v \in V \mid p_1(v) < \epsilon/M, \ldots p_n(v) < \epsilon/M\} \subset f^{-1}[U_0] \subset f^{-1}[U],$$

luego $f$ es continua en 0 y, por consiguiente, es continua. ■

Observemos que, en las condiciones del teorema 11.21, si el espacio $V$ es localmente convexo, el espacio $W$ también lo es, pues si $U$ es un entorno de 0 en $V$ convexo entonces $V(A; U)$ es convexo. A continuación describimos las seminormas que generan los espacios $\mathcal{L}_\Sigma(X, V)$:

**Teorema 11.43** *Sean $X$ y $V$ son $\mathbb{K}$-espacios vectoriales topológicos, de modo que $V$ sea localmente convexo. Sea $\Sigma$ una familia de subconjuntos acotados de $X$. Si $\mathcal{P}$ es una familia de seminormas que genera la topología de $V$, entonces la topología de $\mathcal{L}_\Sigma(X,V)$ está generada por las seminormas*

$$p_A(f) = \sup_{x\in A} p(f(x)),$$

*para cada $A \in \Sigma$ y cada $p \in \mathcal{P}$.*

DEMOSTRACIÓN: Observemos en primer lugar que, como $f[A]$ está acotado en $V$, existe un $\alpha \in \mathbb{K}$ no nulo tal que $f[A] \subset \alpha\{v \in V \mid p(v) < 1\}$, luego si $x \in A$, tenemos que $p(\alpha^{-1}f(x)) < 1$, luego $p(f(x)) < |\alpha|$, luego existe el supremo que define a $p_A(f)$, y es inmediato comprobar que $p_A$ es realmente una seminorma en $\mathcal{L}(X,V)$.

Ahora observamos que, si llamamos $U = \{v \in V \mid p(v) \leq 1\}$, entonces

$$\{f \in \mathcal{L}(X,V) \mid p_A(f) \leq 1\} = V(A;U),$$

lo que prueba que las seminormas $p_A$ son continuas (teorema 11.38). Además, si $U$ es cualquier entorno de 0 en $V$, existen $p_1,\ldots,p_n \in \mathcal{P}$ tales que

$$\bigcap_{i=1}^n \{v \in V \mid p_i(v) < \epsilon\} \subset U,$$

de donde se sigue que

$$\bigcap_{i=1}^n \{f \in \mathcal{L}(X,V) \mid (p_i)_A(f) < \epsilon\} \subset V(A;U),$$

lo que prueba que las seminormas $p_A$ generan la topología de $\mathcal{L}_\Sigma(X,V)$. ■

El teorema 10.25 admite una precisión para el caso de espacios localmente convexos:

**Teorema 11.44** *Un $\mathbb{K}$-espacio vectorial topológico (de Hausdorff) localmente convexo es pseudometrizable (metrizable) si y sólo si tiene una base numerable de entornos de 0, y en tal caso la pseudométrica (métrica) que genera su uniformidad puede tomarse inducida por una semipseudonorma (pseudonorma) cuyas bolas de centro 0 sean absolutamente convexas.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $V$ un espacio en las condiciones del enunciado. Podemos tomar una base numerable de entornos de 0 absolutamente convexos que formen una sucesión decreciente, con lo que sus funcionales de Minkowski son una familia $\{p_n\}_{n=1}^\infty$ creciente de seminormas que generan la uniformidad de $V$. A su vez podemos definir

$$|v| = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{2^n}\frac{p_n(v)}{1+p_n(v)}.$$

Vamos a comprobar que se trata de una semipseudonorma (pseudonorma) que genera la uniformidad de $V$ y que define bolas de centro 0 absolutamente convexas.

Obviamente $|0| = 0$ y si $|v| = 0$, entonces $p_n(v) = 0$ para todo $n$, luego $v$ está en todos los entornos de 0, de modo que si $V$ tiene la propiedad de Hausdorff, tiene que ser $v = 0$.

Observemos que si $0 < a \leq b$, se cumple trivialmente que $\frac{a}{1+a} \leq \frac{b}{1+b}$. Aplicando esto a $a = p_n(v+w)$ y $b = p_n(v) + p_n(w)$, tenemos que

$$\frac{p_n(v+w)}{1+p_n(v+w)} \leq \frac{p_n(v)+p_n(w)}{1+p_n(v)+p_n(w)} \leq \frac{p_n(v)}{1+p_n(v)} + \frac{p_n(w)}{1+p_n(w)},$$

de donde $|v+w| \leq |v| + |w|$.

Si $|\alpha| \leq 1$, entonces, tomando $a = |\alpha| p_n(v)$ y $b = p_n(v)$,

$$\frac{p_n(\alpha v)}{1+p_n(\alpha v)} = \frac{|\alpha| p_n(v)}{1+|\alpha| p_n(v)} \leq \frac{p_n(v)}{1+p_n(v)},$$

luego $|\alpha v| \leq |v|$.

Esto prueba que la aplicación es una semipseudonorma (pseudonorma) y, más aún, si $0 \leq \alpha \leq 1$ y $v$, $w \in B_\epsilon(0)$, entonces

$$|(1-\alpha)v + \alpha w| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{(1-\alpha)p_n(v) + \alpha p_n(w)}{1+p_n((1-\alpha)v+\alpha w)} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^n} = \epsilon,$$

luego $(1-\alpha)v + \alpha w \in B_\epsilon(0)$, y así la bola es convexa. Sólo falta probar que $|\ \ |$ genera la uniformidad de $V$. Ahora bien, si $p_n(v) < 1/2^{k+1}$, entonces, teniendo en cuenta que las seminormas son crecientes,

$$|v| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{p_n(v)}{1+p_n(v)} \leq \sum_{n=1}^{k+1} \frac{1}{2^n} \frac{p_n(v)}{1+p_n(v)} + \sum_{n=k+2}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{p_n(v)}{1+p_n(v)}$$

$$\leq \frac{1}{2^{k+1}} \sum_{n=1}^{k+1} \frac{1}{2^n} + \sum_{n=k+2}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{k+1}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{2^k},$$

luego la banda determinada por $|v-w| < 1/2^k$ contiene a la banda de $V$ dada por $p_n(v-w) < 1/2^{k+1}$. Esto prueba que la uniformidad definida por $|\ \ |$ está contenida en la uniformidad de $V$. Recíprocamente, si $|v| < 1/2^{n+k+1}$, entonces

$$\frac{1}{2^n} \frac{p_n(v)}{1+p_n(v)} < \frac{1}{2^{n+k+1}},$$

luego

$$\frac{p_n(v)}{1+p_n(v)} < \frac{1}{2^{k+1}},$$

y de aquí se sigue que

$$\frac{1}{2}p_n(v) < \left(1 - \frac{1}{2^{k+1}}\right) p_n(v) < \frac{1}{2^{k+1}},$$

luego $p_n(v) < 1/2^k$. Por consiguiente, la banda de $V$ dada por $p_n(v-w) < 1/2^k$ contiene a la banda $|v - w| < 1/2^{n+k+1}$, luego la uniformidad definida por $|\ |$ contiene a la de $V$. ■

**Conjuntos acotados** Es inmediato que el producto de espacios topológicos localmente convexos es localmente convexo, por lo que el producto de infinitos espacios normados es un ejemplo de espacio vectorial topológico localmente convexo cuya topología no deriva de una norma. Ahora vamos a dar una condición necesaria y suficiente para que un espacio vectorial topológico sea normable, es decir, para que su topología venga inducida por una norma.

La condición necesaria y suficiente para que el funcional de Minkowski asociado a un entorno de 0 convexo y equilibrado $C$ sea una norma es que $C$ sea acotado. Más aún, cuando esto ocurre la norma induce la topología del espacio:

**Teorema 11.45** *Un espacio vectorial topológico de Hausdorff localmente convexo es normable si y sólo si posee un entorno de* 0 *acotado.*

Demostración: Sea $E$ un espacio en las condiciones del enunciado y sea $U$ un entorno de cero convexo y equilibrado contenido en el entorno de cero acotado. Entonces $U$ es también acotado. Por consiguiente, dado cualquier entorno de cero $V$, se cumple $U \subset tV$ para un cierto $t > 0$, luego la familia $\{\epsilon U \mid \epsilon > 0\}$ forma una base de entornos de cero. Como el espacio es de Hausdorff, $\bigcap\limits_{\epsilon>0} \epsilon U = \{0\}$ y de aquí se deduce que $p_U$ es una norma.

Como la aplicación $p_U$ es continua, toda bola abierta de centro 0 para la norma es abierta en el espacio y, recíprocamente, si $V$ es un entorno de 0 en el espacio, existe un $t > 0$ tal que $U \subset tV$, luego

$$B_{1/t}(0) = \{x \in E \mid p_U(x) < 1/t\} \subset \frac{1}{t}U \subset V.$$

Así pues, la topología de la norma es la topología de $E$. ■

Los conjuntos acotados se comportan especialmente bien en los espacios localmente convexos metrizables y, más en general, en la clase de espacios que definimos a continuación:

**Definición 11.46** Un espacio vectorial topológico localmente convexo $V$ es *bornológico* si todo subconjunto $U \subset V$ absolutamente convexo que absorbe a los conjuntos acotados (es decir, tal que para todo $A \subset V$ acotado existe un $\alpha \geq 0$ tal que $A \subset \alpha U$) es un entorno de 0.

**Teorema 11.47** *Todo espacio vectorial topológico localmente convexo metrizable es bornológico.*

Demostración: Si $V$ es un espacio vectorial topológico localmente convexo metrizable, tiene una base numerable $\{U_n\}_{n=0}^{\infty}$ de entornos de 0, que podemos tomar decreciente. Si $U \subset V$ es un conjunto absolutamente convexo que absorbe a los conjuntos acotados, tiene que existir un $n$ tal que $U_n \subset nU$ (de donde se sigue que $U$ es un entorno de 0). En caso contrario, podríamos tomar puntos $v_n \in U_n \setminus nU$, con lo que $\{v_n\}_{n=0}^{\infty}$ converge a 0, luego $A = \{v_n \mid n \in \omega\}$ es un conjunto acotado (pues todo entorno de 0 contiene a casi todos sus puntos, y multiplicándolo por un escalar adecuado podemos hacer que contenga también a los que faltan). Por hipótesis existe un escalar $\alpha$ tal que $A \subset \alpha U$ y, si $n \geq \alpha$, entonces $v_n \in nU$, contradicción. ■

El ejemplo A.66 muestra un caso de espacio vectorial topológico que no es bornológico.

La continuidad de las aplicaciones lineales sobre espacios bornológicos admite las caracterizaciones siguientes:

**Teorema 11.48** *Sea $f : V \longrightarrow W$ una aplicación lineal entre dos espacios vectoriales topológicos localmente convexos con $V$ bornológico. Las afirmaciones siguientes son equvalentes:*

1. *$f$ es continua.*

2. *$f$ transforma sucesiones convergentes a 0 en sucesiones convergentes a 0.*

3. *$f$ transforma sucesiones convergentes a 0 en sucesiones acotadas.*

4. *$f$ está acotada sobre los conjuntos acotados.*

Demostración: Claramente 1) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 3). Veamos que 3) $\Rightarrow$ 4). Sea $A \subset V$ un conjunto acotado. Si $f[A]$ no es acotado, existe un entorno $U$ de 0 en $W$ tal que $f[A] \not\subset nU$, para todo $n \in \omega$. En particular, podemos tomar $x_n \in A$ tal que $f(x_n) \notin n^2U$, luego $f(x_n/n) \notin nU$. Esto significa que la sucesión $\{f(x_n/n)\}_{n=1}^{\infty}$ no está acotada en $W$, pero la sucesión $\{x_n/n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a 0 por 11.10, en contradicción con 3).

Veamos que 4) $\Rightarrow$ 1). Si $A \subset V$ es un conjunto acotado y $U$ es un entorno de 0 en $W$ absolutamente convexo, entonces $U$ absorbe a $f[A]$, luego $f^{-1}[U]$ absorbe a $A$. Como $A$ es arbitrario y $f^{-1}[U]$ es absolutamente convexo, por la definición de espacio bornológico tenemos que $f^{-1}[U]$ es un entorno de 0, luego $f$ es continua en 0 y, por consiguiente, continua. ■

Como aplicación generalizamos el teorema 9.61. Recordemos que, según el teorema 11.25, la topología inducida por la norma de $\mathcal{L}(V, W)$ es la de la convergencia uniforme en los subconjuntos acotados de $V$.

**Teorema 11.49** *Sean $V$ y $W$ espacios vectoriales topológicos de Hausdorff localmente convexos, $V$ bornológico y $W$ completo. Sea $\Sigma$ una familia de subconjuntos acotados de $V$ tal que toda sucesión convergente a 0 en $V$ esté contenida en un conjunto de $\Sigma$. Entonces $\mathcal{L}_\Sigma(V, W)$ es completo.*

Demostración: Sea $F$ un filtro de Cauchy en $\mathcal{L}_\Sigma(V,W)$. Para cada $x \in V$, sabemos que la evaluación $v_x : \mathcal{L}_\Sigma(V,W) \longrightarrow W$ es uniformemente continua, luego $v_x[F]$ es un filtro de Cauchy en $W$. Por completitud, converge a un punto $f(v) \in W$. Tenemos así una aplicación $f : V \longrightarrow W$ tal que $F$ converge puntualmente a $f \in \mathcal{F}(V,W)$. Por el teorema 2.51 tenemos que de hecho $F$ converge a $f$ en $\mathcal{F}_\Sigma(V,W)$, luego $f \in \overline{\mathcal{L}_\Sigma(V,W)}$.

Fijados $\alpha$, $\beta \in \mathbb{K}$ y $x$, $y \in V$, la aplicación $\phi : \mathcal{F}_\Sigma(V,W) \longrightarrow W$ dada por $\phi = v_{\alpha x+\beta y} - \alpha v_x - \beta v_y$ es continua y se anula en $\mathcal{L}_\Sigma(V,W)$, luego se anula también en su clausura, y en particular en $f$, lo que significa que $f$ es lineal. Falta probar que es continua, para lo cual aplicamos el teorema anterior.

Sea $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ una sucesión en $V$ convergente a 0. Por hipótesis existe un conjunto $A \in \Sigma$ tal que $X = \{x_n \mid n \in \omega\} \subset A$, luego el filtro $F$ converge uniformemente a $f$ en $A$ (luego en $X$). Por lo tanto $f \in \overline{\mathcal{F}_u^*(X,W))} = \mathcal{F}_u^*(X,W))$, por el teorema 11.23. Así pues, la sucesión $\{f(x_n)\}_{n=0}^\infty$ está acotada, y el teorema anterior implica que $f \in \mathcal{L}(V,W)$. ■

**El teorema de Hahn-Banach** El teorema A.72 muestra que en un espacio vectorial topológico no tiene por qué haber funcionales lineales continuos no nulos. Sin embargo, vamos a ver que si el espacio es localmente convexo entonces hay muchos. Esto es consecuencia del teorema siguiente,[1] en cuyo enunciado no aparece ninguna topología:

**Teorema 11.50 (Hahn-Banach) (TU)** *Sea $V$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, sea $p : V \longrightarrow \mathbb{R}$ una aplicación que cumpla*

$$p(v+w) \leq p(v) + p(w), \qquad p(\alpha v) = \alpha p(v)$$

*para $\alpha > 0$. Sea $W \subset V$ un subespacio vectorial y $f : W \longrightarrow \mathbb{R}$ un funcional lineal tal que $f(w) \leq p(w)$ para todo $w \in W$. Entonces existe un funcional lineal $\bar{f} : V \longrightarrow \mathbb{R}$ que extiende a $f$ y tal que $\bar{f}(v) \leq p(v)$ para todo $v \in V$.*

Demostración: Veamos que si $W \subset W_1 \subset V$ es un subespacio vectorial, $f_1 : W_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ es un funcional lineal que extiende a $f$ cumpliendo $f(w) \leq p(w)$ para todo $w \in W_1$ y $v \in V \setminus W_1$, entonces, si llamamos $W_2$ al subespacio vectorial generado por $W_1 \cup \{v\}$ , existe un funcional lineal $f_2 : W_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ en las mismas condiciones.

En efecto, es claro que los elementos de $W_2$ son de la forma $w_1 + \alpha v$, con $w_1 \in W_1$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. De hecho, la expresión es única, pues si $w_1 + \alpha v = w_1' + \alpha' v$, entonces $\alpha = \alpha'$ o, de lo contrario, podríamos despejar $v$ para concluir que $v \in W_1$. A su vez, esto implica que $w_1 = w_1'$. Si $w_1$ y $w_1' \in W_1$, tenemos que

$$\begin{aligned} f_1(w_1') - f_1(w_1) = f_1(w_1' - w_1) \leq p(w_1' - w_1) &= p(w_1' + v - (w_1 - v)) \\ &\leq p(w_1' + v) + p(-w_1 - v), \end{aligned}$$

[1]La prueba que damos aquí usa el lema de Zorn, que es equivalente a AE, pero la marcamos con (TU) porque en [TC 10.37] damos una prueba que sólo requiere el teorema de los ultrafiltros.

luego
$$-p(-w_1 - v) - f_1(w_1) \leq p(w_1' + v) - f_1(w_1').$$
Por consiguiente,
$$\sup_{w_1 \in W_1} (-p(-w_1 - v) - f_1(w_1)) \leq \inf_{w_1 \in W_1} (p(w_1 + v) - f_1(w_1)).$$
Tomamos cualquier $\gamma \in \mathbb{R}$ entre ambos valores, de modo que
$$-p(-w_1 - v) - f_1(w_1) \leq \gamma \leq p(w_1' + v) - f_1(w_1'),$$
para todo $w_1$, $w_1' \in W_1$, y definimos $f_2(w_1 + \alpha v) = f_1(w_1) + \alpha\gamma$, que claramente es un funcional lineal en $W_2$ que extiende a $f_1$. Si $\alpha > 0$, tenemos que
$$\gamma \leq p(\frac{w_1}{\alpha} + v) - f_1(\frac{w_1}{\alpha}),$$
luego $\alpha\gamma \leq p(w_1 + \alpha v) - f_1(w_1)$, luego $f_2(w_1 + \alpha v) \leq p(w_1 + \alpha v)$. Igualmente, si $\alpha < 0$, tenemos que
$$-p(-\frac{w_1}{\alpha} - v) - f_1(\frac{w_1}{\alpha}) \leq \gamma,$$
de donde, multiplicando por $\alpha$, resulta $p(w_1 + \alpha v) - f_1(w_1) \geq \alpha\gamma$ y llegamos a la misma conclusión (que es trivial si $\alpha = 0$). Así pues, $f_2(w_2) \leq p(w_2)$ para todo $w_2 \in W_2$.

Con esto la conclusión se sigue inmediatamente mediante el lema de Zorn. Basta considerar la familia de todas las aplicaciones $f_1 : W_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ que extienden a $f$ y están mayoradas por $p$ con el orden dado por $f_1 \leq f_2$ si y sólo si $W_1 \subset W_2$ y $f_2|_{W_1} = f_1$. El lema de Zorn nos da un funcional maximal respecto de este orden, digamos $\bar{f} : W_1 \longrightarrow \mathbb{R}$, y necesariamente $W_1 = V$, pues en caso contrario la parte ya probada nos permitiría extender $\bar{f}$ a un subespacio mayor. ■

De aquí se sigue una versión que vale igualmente para espacios complejos:

**Teorema 11.51 (Hahn-Banach) (TU)** *Sea $V$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, sea $W \subset V$ un subespacio vectorial, $p : V \longrightarrow \mathbb{R}$ una seminorma y $f : W \longrightarrow \mathbb{K}$ un funcional lineal tal que, para todo $x \in W$, se cumpla $|f(x)| \leq p(x)$. Entonces existe un funcional lineal $\bar{f} : V \longrightarrow \mathbb{K}$ que extiende a $f$ y tal que $|\bar{f}(x)| \leq p(x)$ para todo $x \in V$.*

Demostración: Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, la seminorma $p$ cumple los requisitos del teorema anterior, luego podemos obtener la extensión $\bar{f} : V \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por éste. Pero $\bar{f}(-x) \leq p(-x) = p(x)$ implica que $-p(x) \leq \bar{f}(x) \leq p(x)$, luego $|\bar{f}(x)| \leq p(x)$.

En el caso complejo, consideramos a $V$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial y aplicamos el teorema anterior a $g = \operatorname{Re} f$, con lo que obtenemos $\bar{g} : V \longrightarrow \mathbb{R}$, a partir de la cual podemos definir $\bar{f}(x) = \bar{g}(x) - i\bar{g}(ix)$, que cumple lo requerido.

En efecto, usando que $f(iv) = if(v)$ obtenemos que $\operatorname{Re} f(iv) = -\operatorname{Im} f(v)$, de donde $\bar{f}|_W = f$, y, para cada $x \in V$, expresando $\bar{f}(x) = r\alpha$, donde $r = |\bar{f}(x)|$ y $\alpha = \bar{f}(x)/r$, tenemos que

$$|\bar{f}(x)| = r = \alpha^{-1}\bar{f}(x) = \bar{f}(\alpha^{-1}x) = \bar{g}(\alpha^{-1}x) \leq p(\alpha^{-1}x) = |\alpha^{-1}|p(x) = p(x),$$

donde la igualdad $\bar{f}(\alpha^{-1}x) = \operatorname{Re}\bar{f}(\alpha^{-1}x) = \bar{g}(\alpha^{-1}x)$ se debe a que $\bar{f}(\alpha^{-1}x) = r$ es un número real. ■

Al aplicar este teorema a un espacio vectorial topológico localmente convexo obtenemos lo siguiente:

**Teorema 11.52 (AE)** *Si $V$ es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial topológico localmente convexo y $W \subset V$ es un subespacio vectorial, todo funcional lineal continuo $f : W \longrightarrow \mathbb{K}$ admite una extensión lineal continua en $V$.*

Demostración: Como $f$ es continua, $U_0 = \{w \in W \mid |f(w)| \leq 1\}$ es un entorno de 0 en $W$, luego existe un entorno de 0 absolutamente convexo $U$ en $V$ tal que $U \cap W \subset U_0$. El funcional de Minkowski $p_U$ es una seminorma continua en $V$ tal que $|f(x)| \leq p_U(x)$ para todo $x \in W$.

En efecto, si $\lambda > 0$ cumple que $x \in \lambda U$, entonces $\lambda^{-1}x \in U \cap W \subset U_0$, luego $\lambda^{-1}|f(x)| \leq 1$, luego $|f(x)| \leq \lambda$, y tomando el ínfimo en $\lambda$ obtenemos que $|f(x)| \leq p_U(x)$. El teorema de Hahn-Banach nos da un funcional lineal $\bar{f} : V \longrightarrow \mathbb{K}$ que extiende a $f$ y además $|\bar{f}(x)| \leq p_U(x)$ para todo $x \in V$.

Se cumple que $\bar{f}$ es continuo (en 0), pues si $v \in \epsilon U$, entonces

$$|\bar{f}(\epsilon^{-1}v)| \leq p_U(\epsilon^{-1}v) \leq 1$$

luego $|\bar{f}(v)| \leq \epsilon$. ■

En la sección 9.4 particularizamos estos resultados al caso de espacios normados y extraemos algunas consecuencias. 334

---

**Equicontinuidad** La equicontinuidad en espacios de aplicaciones lineales tiene caracterizaciones más simples:

**Teorema 11.53** *Sean $V$ y $W$ dos espacios vectoriales topológicos y $H \subset L(V, W)$. Las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

1. *$H$ es equicontinuo.*
2. *$H$ es equicontinuo en 0.*
3. *Si $U$ es un entorno de 0 en $W$, entonces $\bigcap\limits_{f \in H} f^{-1}[U]$ es un entorno de 0 en $V$.*

Demostración: 1) $\Rightarrow$ 2) es obvio.

2) $\Rightarrow$ 3) Si $U$ es un entorno de 0, que podemos suponer equilibrado, la definición de equicontinuidad en 0 aplicada a la banda determinada por $U$ nos da que existe un entorno $G$ de 0 en $V$ tal que para todo $v \in G$ y toda $f \in H$ se cumple que $f(v) \in U$, y esto equivale a 3).

3) $\Rightarrow$ 1) Tomamos $v_0 \in V$ y vamos a probar que $H$ es equicontinuo en $V$. Para ello tomamos una banda en $W$, que está determinada por un entorno de 0 equilibrado $U$. Por 3) tenemos que $G = v_0 + \bigcap\limits_{f \in H} f^{-1}[U]$ es un entorno de $v_0$ y si $v_0 + v \in G$ y $f \in H$, tenemos que $f(v_0 + v) - f(v_0) = f(v) \in U$, luego $(f(v_0), f(v_0 + v))$ está en la banda prefijada. ■

Notemos que, en las condiciones del teorema anterior, se cumple de hecho que $H \subset \mathcal{L}(V, W)$, es decir, que las funciones de $H$ son continuas.

**Teorema 11.54** *Sean $V$ y $W$ espacios vectoriales topológicos, sea $\Sigma$ una familia de subconjuntos acotados de $V$. Entonces, todo conjunto $H \subset \mathcal{L}_\Sigma(V, W)$ equicontinuo está acotado.*

Demostración: Recordemos que $\mathcal{L}_\Sigma(V, W)$ significa que consideramos en $\mathcal{L}(V, W)$ la topología de la convergencia uniforme en los conjuntos de $\Sigma$. Fijado $A \in \Sigma$ y un entorno $U$ de 0 en $W$, tenemos que $G = \bigcap\limits_{f \in H} f^{-1}[U]$ es un entorno de 0. Como $A$ está acotado, existe un $\lambda \neq 0$ tal que $A \subset \lambda G$. Entonces todo $f \in H$ cumple $\lambda^{-1} f[A] \subset U$, luego $\lambda^{-1} f \in V(A; U)$, luego $H \subset \lambda V(A; U)$. Un entorno básico de 0 en $\mathcal{L}_\Sigma(V, W)$ es una intersección finita de entornos de la forma $V(A; U)$, donde podemos tomar $U$ equilibrado, y así tomando un $\lambda > 0$ suficientemente grande tenemos que $H$ está contenido en un homotético de la intersección. ■

El recíproco no es cierto en general, pero sí que se cumple si imponemos una condición al espacio $V$:

**Definición 11.55** Un *tonel* en un espacio vectorial topológico localmente convexo $V$ es un conjunto cerrado, absolutamente convexo y absorbente. Un espacio vectorial topológico localmente convexo es *tonelado* si todo tonel es un entorno de 0.

Según el teorema 11.30, todo espacio vectorial topológico localmente convexo tiene una base de entornos de 0 formada por toneles, luego un espacio vectorial topológico localmente convexo es tonelado si y sólo si los toneles forman una base de entornos de 0.

**Teorema 11.56** *Si $V$ es un espacio vectorial topológico locamente convexo y es un espacio de Baire, entonces es tonelado.*

Demostración: Si $T$ es un tonel en $V$, basta aplicar 11.15 a $A = \frac{1}{2}T$ y tener en cuenta que $A + A \subset T$. ■

Así pues, todo espacio vectorial topológico localmente convexo y completamente metrizable (en particular todo espacio de Banach) es tonelado. El ejemplo A.66 muestra un caso de espacio no tonelado.

**Teorema 11.57** *Sean $V$ y $W$ espacios vectoriales topológicos localmente convexos y supongamos además que $V$ es tonelado. Entonces, todo subconjunto acotado de $\mathcal{L}_p(V, W)$ es equicontinuo.*

Demostración: Sea $H \subset \mathcal{L}_p(V,W)$ un conjunto acotado (recordemos que la $p$ indica que consideramos la topología de la convergencia puntual) y sea $U$ un entorno de 0 en $W$ cerrado y absolutamente convexo. Entonces el conjunto $U_0 = \bigcap\limits_{f\in H} f^{-1}[U]$ es un subconjunto de $V$ cerrado, convexo y equilibrado. Veamos que es absorbente, y así será un tonel. El conjunto

$$G = \{f \in \mathcal{L}_p(V,W) \mid f(v) \in U\}$$

es un entorno de 0 equilibrado en $\mathcal{L}_p(V,W)$ y, como $H$ está acotado, existe un $\alpha \in \mathbb{K}$ no nulo tal que $H \subset \alpha G$, y lo mismo vale para todo $\lambda$ con $|\lambda| \leq |\alpha|$. Esto significa que si $f \in H$ entonces $\lambda f \in G$, luego $f(\lambda v) \in U$, luego $\lambda v \in f^{-1}[U]$, luego $\lambda v \in U_0$.

Como $V$ es tonelado, tenemos que $U_0$ es un entorno de 0, y así $f[U_0] \subset U$ para todo $f \in H$, lo que significa que $H$ es equicontinuo. ■

Notemos que, en las condiciones del teorema anterior si $\Sigma$ es cualquier familia de conjuntos acotados de $V$ tal que $\bigcup \Sigma = V$, todo conjunto $H$ acotado en $\mathcal{L}_\Sigma(V,W)$ lo está también en $\mathcal{L}_p(V,W)$ (pues la topología de la convergencia puntual es menos fina), luego $H$ es equicontinuo. 429

## 11.5 Compacidad

**Espacios localmente compactos** Mientras que la clase de los grupos topológicos localmente compactos contiene a los grupos topológicos más importantes, vamos a ver ahora que la compacidad local es demasiado restrictiva en el contexto de los espacios vectoriales topológicos, pues sólo incluye a los espacios de dimensión finita, para los cuales no es necesaria una teoría tan general. En efecto:

**Teorema 11.58** *Sea $K$ un cuerpo métrico completo y $V$ un $K$-espacio vectorial topológico de Hausdorff localmente compacto no trivial. Entonces $K$ es localmente compacto y $V$ tiene dimensión finita.*

Demostración: Por el teorema 11.11, todo subespacio de $V$ de dimensión 1 es topológicamente isomorfo a $K$, pero los isomorfismos topológicos son también uniformes, luego el subespacio es completo, luego es cerrado en $V$, luego es localmente compacto, luego $K$ también lo es.

Tomemos ahora un entorno de 0 compacto $U$ en $V$. Fijemos $\alpha \in K$ tal que $0 < |\alpha| < 1$.

Veamos entonces que $\{\alpha^n U\}_{n=0}^{\infty}$ es una base de entornos de 0. Basta ver que todo entorno de 0 abierto y equilibrado $W$ contiene un $\alpha^n U$.

En efecto, si $v \in U$, como $W$ es absorbente, existe $\beta \in K$ no nulo tal que $\beta v \in W$. Sea $n$ tal que $|\alpha^n| < |\beta|$. Como $W$ es equilibrado y $|\alpha^n\beta^{-1}| < 1$, $v \in \alpha^{-n}\alpha^n\beta^{-1}W \subset \alpha^{-n}W$, luego $U \subset \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} \alpha^{-n}W$.

Como $W$ es equilibrado, tenemos que $\alpha W \subset W$, luego $\alpha^{-n}W \subset \alpha^{-(n+1)}W$, luego por compacidad existe un $n$ tal que $U \subset \alpha^{-n}W$, luego $\alpha^n U \subset W$.

Por otra parte, $U \subset \bigcup_{v\in V} (v + \alpha U)$, luego existen $v_1, \ldots, v_n \in V$ tales que $U \subset \bigcup_{i=1}^{n} (v_i + \alpha U)$. Si llamamos $F = \langle v_1, \ldots, v_n \rangle$, tenemos que $U \subset F + \alpha U$, pero esto implica a su vez que $\alpha U \subset F+\alpha^2 U$, luego $U \subset F+F+\alpha^2 U = F+\alpha^2 U$. En general, $U \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} (F + \alpha^n U) = \overline{F} = F$, donde hemos usado el teorema 10.14 junto con el hecho de que $\{\alpha^n U\}_{n=1}^{\infty}$ forman una base de entornos de 1, así como que $F$ es cerrado por el teorema 11.11, ya que todo subespacio de $V$ de dimensión finita es completo. Finalmente, el teorema 11.4 nos da que $V = F$, luego $V$ tiene dimensión finita. ■

El recíproco es inmediato:

**Teorema 11.59** *Si $K$ es un cuerpo métrico competo y $V$ es un $K$-espacio vectorial topológico de Hausdorff, entonces $V$ es localmente compacto si y sólo si tiene dimensión finita. En tal caso, los subconjuntos compactos de $V$ son los cerrados y acotados.*[2]

Demostración: Por el teorema anterior, no perdemos generalidad si suponemos que $V = K^n$ y consideramos en él la norma $\|\ \|_\infty$. Además sabemos que $K$ es localmente compacto.

La bola unitaria cerrada de $V$ es $B = \bar{B}_1(0)^n$, donde $\bar{B}_1(0)$ es la bola unitaria cerrada de $K$, que es compacta. El teorema de Tychonoff nos da que $B$ también es compacta, luego $V$ es localmente compacto.

Más aún, hemos probado que la bola cerrada unitaria respecto a $\|\ \|_\infty$ es compacta, luego, de hecho, todas las bolas cerradas respecto a $\|\ \|_\infty$ son compactas, y todo subconjunto de $V$ cerrado y acotado es compacto, porque está contenido en una bola cerrada, luego es cerrado en un compacto.

Recíprocamente, si $C \subset V$ es compacto, entonces es cerrado y, como las bolas $B_n(0)$, con $n \in \mathbb{N}$ (respecto de cualquier norma prefijada), forman un cubrimiento abierto de $C$, necesariamente existe un $n$ tal que $C \subset B_n(0)$, luego $C$ está acotado. ■

Terminamos con el resultado siguiente:

**Teorema 11.60** *En un espacio vectorial topológico, todo subconjunto totalmente acotado está (linealmente) acotado.*

Demostración: Sea $V$ un espacio vectorial topológico y sea $C \subset V$ un subconjunto totalmente acotado. Sea $U_0$ un entorno de 0 en $V$. Tenemos que probar que existe un $\lambda \in K$ tal que $C \subset \lambda U_0$. Sea $U$ un entorno de 0 equilibrado tal que $U+U \subset U_0$. Sea $W = V_U \cap (C\times C)$, que es una banda en la uniformidad de $C$. Por hipótesis existe $A \subset C$ finito tal que $C = W[A]$. Así, si $c \in C$, existe un $a \in A$ tal que $(c, a) \in V_U$, es decir, $c - a \in U$, luego $C \subset \bigcup_{a\in A} (a + U)$.

[2]Aquí hay que entender que nos referimos a conjuntos acotados respecto de cualquier norma en $V$, pues todas son equivalentes (por 11.13) o, alternativamente, a conjuntos linealmente acotados en el sentido de la definición 11.8.

Como $U$ es absorbente, para cada $a \in A$ existe $\lambda_a \in U$ tal que $a \in \lambda_a U$. Sea $\lambda \in K$ tal que $|\lambda| > 1$ y $|\lambda| > |\lambda_a|$ para todo $a \in A$. Entonces, como $U$ es equilibrado, $U \subset \lambda U$ y todo $a \in A$ cumple $a \in \lambda U$. Concluimos que

$$C \subset \bigcup_{a \in A} (\lambda U + \lambda U) = \lambda(U + U) \subset \lambda U_0.$$

■

**Teoremas de separación de convexos** El teorema de Hanh-Banach tiene algunas consecuencias notables sobre la geometría de los espacios vectoriales topológicos localmente convexas. Para enunciarlas necesitamos el concepto de hiperplano:

**Definición 11.61** Si $V$ es un espacio vectorial, un *hiperplano homogéneo* en $V$ es un subespacio vectorial propio maximal respecto de la inclusión. Un *hiperplano* en $V$ es un subconjunto de $V$ de la forma $H = v + H_0$, donde $v \in V$ y $H_0$ es un hiperplano homogéneo. Equivalentemente, un hiperplano es una variedad afín maximal respecto de la inclusión.

Teniendo en cuenta que la clausura de un subespacio vectorial es un subespacio, es inmediato que todo hiperplano homogéneo es denso o cerrado y, como las traslaciones son homeomorfismos, lo mismo vale para hiperplanos arbitrarios.

Los hiperplanos están muy relacionados con los funcionales lineales:

**Teorema 11.62** *Si $V$ es un $K$-espacio vectorial, los hiperplanos de $V$ son los conjuntos de la forma $H = \{v \in V \mid f(v) = \alpha\}$, con $f : V \longrightarrow K$ lineal no nula y $\alpha \in K$. Además $f$ y $\alpha$ están determinados por $H$ salvo producto por una (misma) constante.*

Demostración: Si $H$ tiene la forma indicada en el enunciado, entonces $f$ es suprayectiva (pues su imagen en un subespacio vectorial de $K$ no nulo), luego $H \neq \varnothing$ y, si $v \in H$, es claro que $H = v + H_0$, donde $H_0$ es el núcleo de $f$, que es un hiperplano homogéneo, pues $V/H_0$ es isomorfo a $K$, luego tiene dimensión 1 y no tiene subespacios vectoriales propios, lo que implica que no existen espacios vectoriales intermedios entre $H_0$ y $V$, es decir, que $H_0$ es maximal.

Recíprocamente, si $H = v + H_0$ es un hiperplano en $V$, entonces $H/H_0$ es un espacio vectorial no nulo sin subespacios propios, lo cual implica que tiene dimensión 1, luego es isomorfo a $K$. Componiendo la proyección en el cociente con un isomorfismo obtenemos un funcional lineal $f : V \longrightarrow K$ de núcleo $H_0$. Si $\alpha = f(v)$, es claro que $H = \{v \in V \mid f(v) = \alpha\}$.

Si $H = \{v \in V \mid f(v) = \alpha\} = \{v \in V \mid g(v) = \beta\}$, entonces, $H_0$ es el núcleo tanto de $f$ como de $g$, luego ambas inducen isomorfismos $\bar{f}, \bar{g} : V/H_0 \longrightarrow K$. Si $w \in V \setminus H_0$ y llamamos $\gamma = g(w)f(w)^{-1}$, entonces $\bar{g} = \gamma \bar{f}$ (porque ambos coinciden sobre $[w]$, que es una base de $V/H_0$), de donde $g = \gamma f$, pues todo elemento de $V$ es de la forma $\delta w + h$, con $h \in H_0$ y así

$$f(\delta w + h) = \delta f(w) = \delta \gamma g(w) = g(\delta w + h).$$

Por último, si $v \in H$ tenemos que $\beta = g(v) = \gamma f(v) = \gamma \alpha$. ■

El teorema siguiente muestra que un hiperplano es cerrado si y sólo si el funcional que lo determina es continuo:

**Teorema 11.63** *Si $V$ es un espacio vectorial topológico y $f : V \longrightarrow K$ es un funcional lineal, entonces $f$ es continuo si y sólo si su núcleo es cerrado.*

DEMOSTRACIÓN: Obviamente, si $f$ es continua, su núcleo es cerrado, pues es la antiimagen de $\{0\}$, que es cerrado en $K$. Recíprocamente, si el núcleo $N$ de $f$ es cerrado, podemos expresar $f$ como la composición de la proyección $V \longrightarrow V/N$, que es continua, con el isomorfismo $V/N \longrightarrow K$ inducido por $f$, que es continuo por el teorema 11.11. ■

Ahora necesitamos un hecho técnico. Recordemos que en 11.35 hemos definido el funcional de Minkowski de un conjunto absorbente y absolutamente convexo. Vamos a probar ahora que, si el conjunto no es equilibrado, su funcional de Minkowski, aunque no sea necesariamente una seminorma, cumple las hipótesis del teorema de Hahn-Banach 11.50.

**Teorema 11.64** *Sea $V$ un $\mathbb{R}$-espacio vectorial topológico localmente convexo y sea $C \subset V$ un entorno de $0$ convexo. Definimos $p_C : V \longrightarrow \mathbb{R}$ mediante*

$$p_C(v) = \text{ínf}\{\lambda > 0 \mid v \in \lambda C\}.$$

*Entonces $p_C$ es una aplicación continua y cumple:*

$$p_C(v + w) \leq p_C(v) + p_C(w), \qquad p_C(\alpha v) = \alpha p_C(v),$$

*para todo $v$, $w \in V$ y todo $\alpha > 0$. Además $C = \{v \in V \mid p_C(v) < 1\}$.*

DEMOSTRACIÓN: Como $C$ es un entorno de 0, es absorbente, luego, dado $v \in V$, existe un $\lambda > 0$ tal que $v \in \lambda C$, por lo que $p_C(v)$ está bien definido. La prueba de que $p_C(v + w) \leq p_C(v) + p_C(w)$ dada en el teorema 11.36 depende únicamente de la convexidad de $C$, por lo que es válida en este contexto. Lo mismo sucede con la prueba de que $p_C(\alpha v) = \alpha p_C(v)$. Con la restricción a $\alpha > 0$ no requiere que $C$ sea equilibrado, luego vale también.

Sea $B = \{v \in V \mid p_C(v) < 1\}$. Si $v \in C$ y llamamos $h : \mathbb{R} \longrightarrow V$ a la aplicación continua dada por $h(\lambda) = \lambda v$, tenemos que $1 \in h^{-1}[C]$ y el conjunto es abierto, luego existe un $0 < \lambda < 1$ tal que $\lambda v \in C$, luego $p_C(v) \leq \lambda < 1$ y $v \in B$. Recíprocamente, si $v \in B$, existe $0 < \lambda < 1$ tal que $v \in \lambda C$, luego $\lambda^{-1} v \in C$. Como $0 \in C$, por convexidad $v = (1 - \lambda)0 + \lambda\lambda^{-1} v \in C$.

Sólo falta probar que $p_C$ es continua. Fijado $w \in V$, una base de entornos de $p_C(w)$ la forman los intervalos $]p_C(w) - \epsilon, p_C(w) + \epsilon[$, y

$$p_C^{-1}[]p_C(w) - \epsilon, p_C(w) + \epsilon[] = \{v \in V \mid |p_C(v) - p_C(w)| < \epsilon\},$$

pero $p_C(v) = p_C(v - w + w) \leq p_C(v - w) + p_C(w)$, e igualmente tenemos que $p_C(w) \leq p_C(w - v) + p_C(v)$, luego

$$|p_C(v) - p_C(w)| \leq \text{máx}\{p_C(v - w), p_C(w - v)\}.$$

Por consiguiente,

$$\{v \in V \mid p_C(v-w) < \epsilon,\ p_C(w-v) < \epsilon\} \subset p^{-1}[]p_C(w)-\epsilon, p_C(w)+\epsilon[],$$

y el conjunto de la izquierda es $(w+\epsilon C)\cap(w-\epsilon C)$, que es un entorno de $w$.

■

El teorema siguiente se conoce a menudo como la forma geométrica del teorema de Hahn-Banach:

**Teorema 11.65 (Mazur) (TU)** *Sea $V$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial topológico, $L$ una variedad afín en $V$, y $C \subset V$ un abierto convexo no vacío que no corte a $L$. Entonces existe un hiperplano cerrado $H$ que contiene a $L$ y no corta a $C$.*

Demostración: Supongamos en primer lugar que $\mathbb{K}=\mathbb{R}$. Aplicando una traslación podemos suponer que $L$ es un subespacio vectorial de $V$.

Si $v_0 \in C$, entonces $C' = -v_0 + C$ es un entorno de 0, luego es absorbente. Sea $p : V \longrightarrow \mathbb{R}$ su funcional de Minkowski. En el teorema anterior hemos probado que es continuo y que cumple las hipótesis del teorema de Hahn-Banach. Además, en la prueba hemos visto que $C' = \{v \in V \mid p(v) < 1\}$, luego

$$C = \{v \in V \mid p(v-v_0) < 1\}.$$

Como $L \cap C = \varnothing$, tenemos que $p(v-v_0) \geq 1$ para todo $v \in L$. Sea $L_0$ el subespacio vectorial generado por $L$ y $v_0$, cuyos elementos son de la forma $v+\alpha v_0$, con $v \in L$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Además, la expresión es única, pues si se cumple $v+\alpha v_0 = v'+\alpha' v_0$, tiene que ser $\alpha=\alpha'$ o, de lo contrario, concluiríamos que $v_0 \in L$, y por lo tanto $v=v'$.

Definimos $f : L' \longrightarrow \mathbb{R}$ mediante $f(v+\alpha v_0) = -\alpha$. Claramente es un funcional lineal en $L'$. Vamos a probar que $f(v) \leq p(v)$ para todo $v \in L'$.

Si $\alpha < 0$ tenemos que

$$f(v+\alpha v_0) = -\alpha \leq -\alpha p(-v/\alpha - v_0) = p(v+\alpha v_0),$$

donde hemos usado que $-v/\alpha \in L$. Por otra parte, si $\alpha \geq 0$, entonces

$$f(v+\alpha v_0) = -\alpha \leq 0 \leq p(v+\alpha v_0).$$

El teorema de Hahn-Banach nos da un funcional lineal $\bar{f} : V \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\bar{f}(v) \leq p(v)$ para todo $v \in V$ y que extiende a $f$. Notemos que $-\bar{f}(v) \leq p(-v)$, luego $|\bar{f}(v)| \leq h(v) = \text{máx}\{p(v), p(-v)\}$, y la continuidad de $p$ implica la de $h$. Esto a su vez implica que $\bar{f}$ es continuo (en 0), pues, dado $\epsilon > 0$, tenemos que $h^{-1}[]-\epsilon,\epsilon[] \subset \bar{f}^{-1}[]-\epsilon,\epsilon[]$ son entornos de 0.

Por consiguiente, el núcleo $H$ de $\bar{f}$ es un hiperplano cerrado en $V$ y $L \subset H$, pues $f$ se anula en $L$, luego $\bar{f}$ también. Finalmente, si $v \in H$, tenemos que

$$0 = \bar{f}(v) = \bar{f}(v-v_0) + f(v_0) = \bar{f}(v-v_0) - 1 \leq p(v-v_0) - 1,$$

luego $p(v-v_0) \geq 1$, luego $v \notin C$, es decir, que $H \cap C = \varnothing$.

Esto termina la prueba en el caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Si es $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ aplicamos el caso ya probado a $V$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial. Como $L = iL$ (pues $L$ es un $\mathbb{C}$-subespacio vectorial, $L = iL \subset H \cap iH = H_0$, que claramente es un $\mathbb{C}$-subespacio vectorial cerrado en $V$ que no corta a $C$.

Sólo falta probar que $H_0$ es un hiperplano. En efecto, en primer lugar observamos que $H \neq iH$, pues si así fuera $H$ sería un hiperplano complejo, luego $\dim_{\mathbb{C}} V/H = 1$, luego $\dim_{\mathbb{R}} V/H = 2$ (porque $\mathbb{C}$ tiene dimensión 2 como $\mathbb{R}$-espacio vectorial), cuando esta última dimensión es en realidad 1.

Como $H \subset H + iH \subset V$ y $H + iH$ es un $\mathbb{R}$-subespacio vectorial, tiene que ser $H + iH = V$. Es fácil ver entonces que la proyección $iH \longrightarrow V/H$ es suprayectiva y tiene núcleo $H_0$, por lo que $iH/H_0$ es isomorfo a $V/H$, luego $\dim_{\mathbb{R}}(iH/H_0) = 1$. Por otro lado, $\dim_{\mathbb{R}}(V/iH) = 1$, porque $iH$ es otro hiperplano. Así pues, tenemos las inclusiones $H_0 \subsetneq iH \subsetneq V$, donde cada cociente de espacios consecutivos tiene dimensión 1. Es fácil ver entonces que $\dim_{\mathbb{R}}(V/H_0) = 2$, luego $\dim_{\mathbb{C}}(V/H_0) = 1$ y $H_0$ es un hiperplano. ■

El teorema de Mazur es una forma débil de lo que se conoce como un teorema de separación de conjuntos convexos, pues afirma que un abierto convexo no vacío puede separarse mediante un hiperplano de una variedad afín disjunta de él. Vamos a precisar esta noción de separación:

**Definición 11.66** Si $V$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial y $f : V \longrightarrow \mathbb{R}$ es una aplicación lineal continua, los conjuntos

$$V_\alpha = \{v \in V \mid f(v) < \alpha\}, \qquad V^\alpha = \{v \in V \mid f(v) > \alpha\},$$

$$\overline{V}_\alpha = \{v \in V \mid f(v) \leq \alpha\}, \qquad \overline{V}^\alpha = \{v \in V \mid f(v) \geq \alpha\},$$

se llaman *semiespacios* de nivel $\alpha$ determinados por $f$. Los dos primeros son abiertos y los otros dos son cerrados. Equivalentemente, se dice que son los cuatro semiespacios determinados por el hiperplano $H = \{v \in V \mid f(v) = \alpha\}$, pues es fácil ver que están unívocamente determinados por $H$.

Se dice que un hiperplano cerrado $H$ *separa (estrictamente)* dos conjuntos $A, B \subset V$ si están contenidos en subespacios cerrados (abiertos) distintos de $H$.

El teorema siguiente generaliza considerablemente al teorema de Mazur:

**Teorema 11.67 (Primer teorema de separación) (TU)** *Sea $V$ un $\mathbb{R}$-espacio vectorial topológico, sea $C \subset V$ un subconjunto convexo de interior no vacío y $D$ otro conjunto convexo no vacío tal que $\mathring{C} \cap D = \varnothing$. Entonces existe un hiperplano cerrado que separa $C$ y $D$. Si ambos son abiertos, la separación es estricta.*

Demostración: Por 11.27 tenemos que $\mathring{C}$ es convexo, al igual que $\mathring{C} - D$, que es abierto (es la unión de los abiertos $\mathring{C} - d$, con $d \in D$) y no contiene a 0, pues $\mathring{C} \cap D = \varnothing$. Por 11.65 existe un hiperplano cerrado $H_0$ que contiene a $\{0\}$ y que no corta a $\mathring{C} - D$. Pongamos que $H = \{v \in V \mid f(v) = 0\}$. Entonces $f[\mathring{C} - D]$ es un subconjunto convexo de $\mathbb{R}$ (es decir, un intervalo) que no contiene a 0.

Cambiando el signo a $f$ si es preciso podemos suponer que $f[\mathring{C} - D] \subset ]0, +\infty[$. Esto significa que si $c \in \mathring{C}$ y $d \in D$, entonces $f(d) < f(c)$. En particular podemos considerar $\alpha = \inf f[\mathring{C}]$, y es claro entonces que $f(d) \leq \alpha \leq f(c)$ para todo $c \in \mathring{C}$ y todo $d \in D$. En otras palabras,

$$D \subset \overline{V}_\alpha, \qquad \mathring{C} \subset \overline{V}^\alpha.$$

Por el teorema 11.27 tenemos que $C \subset \overline{C} = \overline{\mathring{C}} \subset \overline{V}^\alpha$, de modo que $H$ separa los conjuntos $C$ y $D$.

Supongamos ahora que $C$ y $D$ son abiertos. Entonces $f[C]$ y $f[D]$ son intervalos abiertos en $\mathbb{R}$ (notemos que $f$ es abierta, porque es la composición de la proyección $V \longrightarrow V/H$ con el isomorfismo topológico $V/H \longrightarrow \mathbb{R}$). Es claro entonces que $\alpha$ se encuentra entre ambos intervalos y que, por consiguiente, $D \subset V_\alpha$ y $C \subset V^\alpha$. ■

El teorema anterior garantiza la existencia de hiperplanos cerrados gracias a que supone la existencia de un convexo de interior no vacío. Si queremos un teorema sobre separación de convexos sin esta hipótesis, tenemos que suponer que el espacio es localmente convexo:

**Teorema 11.68 (Segundo teorema de separación) (TU)** *Sea $V$ un $\mathbb{R}$-espacio vectorial topológico localmente convexo y $C$, $D$ dos subconjuntos convexos disjuntos, donde $C$ es compacto y $D$ es cerrado. Entonces existe un hiperplano cerrado $H$ que separa estrictamente a $C$ y $D$.*

Demostración: Vamos a probar que existe un entorno convexo $U$ de 0 tal que $C+V$ y $D+V$ son disjuntos. Como son dos abiertos convexos, la conclusión se sigue entonces del primer teorema de separación.

Basta probar la existencia de un entorno de 0 absolutamente convexo $W$ tal que $C \cap (D + W) = \varnothing$, pues entonces $U = \frac{1}{2}W$ cumplirá lo requerido. (En efecto, si $c + \frac{1}{2}w_1 = d + \frac{1}{2}w_2$, entonces $c = d + \frac{1}{2}w_2 + \frac{1}{2}(-w_1) \in C \cap (D + W)$.)

Supongamos, por el contrario, que para todo entorno de 0 absolutamente convexo $W$ se cumple que $C \cap (D + W) \neq \varnothing$. Estos conjuntos forman una base de filtro en $C$, pues si $W_1$ y $W_2$ son dos entornos de 0 absolutamente convexos, también lo es $W_1 \cap W_2$, y

$$C \cap (D + (W_1 \cap W_2)) \subset (C \cap (D + W_1)) \cap (C \cap (D + W_2)).$$

Como $C$ es compacto, esta base de filtro tiene un punto adherente $x_0 \in C$. Esto significa que $x_0 \in \overline{D + W} \subset D + W + W$, para todo $W$ (por 10.14). Como todo entorno $U$ de 0 contiene un entorno de la forma $W + W$, donde $W$ es un entorno de 0 absolutamente convexo, concluimos que $x_0 \in \bigcap\limits_U (D + U) = \overline{D} = D$, contradicción. ■

**Nota** La compacidad es necesaria para garantizar que la separación es estricta. Por ejemplo, los convexos cerrados

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq 0\}, \qquad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0,\ y \geq 1/x\}$$

no pueden ser separados estrictamente. ■

Como consecuencia:

**Teorema 11.69 (AE)** *Si $V$ es un espacio vectorial topológico localmente convexo y $C \subset V$ es un cerrado convexo no vacío, entonces $C$ es la intersección de todos los semiespacios cerrados que lo contienen.*

Demostración: Si $x \in V \setminus C$, como $\{x\}$ es compacto, el teorema anterior nos da un hiperplano cerrado $H$ que determina un semiespacio que contiene a $C$ y no a $x$. ■

Podemos precisar ligeramente este hecho:

**Definición 11.70** Si $V$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial topológico y $C \subset V$, un *hiperplano soporte* de $C$ es un hiperplano cerrado $H$ tal que $H \cap C \neq \varnothing$ y tal que $C$ está contenido en uno de los semiespacios cerrados determinados por $H$.

**Teorema 11.71 (TU)** *Sea $V$ un $\mathbb{R}$-espacio vectorial topológico localmente convexo y sea $C \subset V$ un conjunto convexo, compacto y no vacío. Para cada hiperplano cerrado $H$ existen como mínimo uno y como máximo dos hiperplanos soporte de $C$ paralelos a $H$ (es decir, trasladados de $H$). Más aún, $C$ es la intersección de los semiespacios determinados por sus hiperplanos soporte en los que está contenido.*

Demostración: Sea $H = \{v \in V \mid f(v) = \gamma\}$, donde $f : V \longrightarrow \mathbb{R}$ es una aplicación lineal y continua. Como $C$ es compacto, $f$ toma un valor mínimo $\alpha$ y un valor máximo $\beta$ en $C$. Es fácil ver que $H_0 = \{v \in V \mid f(v) = \alpha\}$ y $H_1 = \{v \in V \mid f(v) = \beta\}$ son hiperplanos soporte de $C$ paralelos a $H$, no necesariamente distintos, así como que no puede haber más.

Si $y \in V \setminus C$, por el segundo teorema de separación existe un hiperplano cerrado $H = \{v \in V \mid f(v) = \gamma\}$ que separa estrictamente $C$ de $\{y\}$. Podemos suponer que $f(v) < \gamma$ para todo $v \in C$ y que $f(y) > \gamma$. Entonces, el supremo $\beta$ de $f$ en $C$ determina un hiperplano soporte de $C$ tal que $C \subset \{v \in V \mid f(v) \leq \beta\}$ y $f(y) > \gamma > \beta$. ■

Observemos que el teorema anterior implica que

$$C = \bigcap_{f \in V'} f^{-1}[f[C]],$$

donde $V'$ es el conjunto de todos los funcionales lineales continuos $f : V \longrightarrow \mathbb{R}$.

En efecto, si $x \in V \setminus C$, existe un hiperplano soporte $H = \{v \in V \mid f(v) = \alpha\}$ tal que $f[C] \subset \,]-\infty, \alpha]$ y $f(x) > \alpha$, luego $x \notin f^{-1}[f[C]]$.

**Caras y puntos extremos** Vamos a estudiar la estructura de los subconjuntos compactos convexos, para lo cual introducimos algunos conceptos:

**Definición 11.72** Sea $V$ un $\mathbb{R}$-espacio vectorial topológico y $K \subset V$ un conjunto convexo. Diremos que $C \subset K$ es una *cara* de $K$ si es un cerrado convexo no vacío tal que cuando $x, y \in K$ y $0 < \lambda < 1$ cumplen que $(1 - \lambda)x + \lambda y \in C$, entonces $x, y \in C$. Si $C \subsetneq K$ diremos que la cara es *propia*.

En otras palabras, un subconjunto cerrado convexo $C \neq \varnothing$ es una cara de $K$ si cuando corta a un segmento de extremos en $K$ en un punto distinto de dichos extremos, entonces los extremos (luego todo el segmento) está contenido en $C$.

Por ejemplo, si $K = [0,1]^3 \subset \mathbb{R}^3$ es un cubo, es fácil ver que el propio $K$, sus caras (en el sentido geométrico usual), sus aristas y sus vértices son caras de $K$.

Se dice que $z \in K$ es un *punto extremo* de $K$ si cuando $x, y \in C$ y $0 \leq \lambda \leq 1$ cumplen que $x \neq y$ y $z = (1-\lambda)x + \lambda y$, necesariamente $\lambda = 0, 1$. Llamaremos $E(K)$ al conjunto de todos los puntos extremos de $K$.

En otras palabras, $z$ es un punto extremo si no pertenece a ningún segmento con extremos en $K$ salvo que él sea uno de los extremos. Es inmediato comprobar que los puntos extremos no son más que las caras de $K$ que son puntos.

Alternativamente, definimos la dimensión de un subconjunto $K \subset V$ como la dimensión de la variedad afín generada por $K$ (la intersección de todas las variedades afines en $V$ que contienen a $K$). Es claro entonces que los puntos extremos de $K$ son sus caras de dimensión 0.

**Teorema 11.73** *Sea $V$ un $\mathbb{R}$-espacio vectorial topológico, sea $K \subset V$ un compacto convexo no vacío, sea $\phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ lineal y sea $\alpha = \max \phi[K]$. Entonces $C = \{x \in K \mid \phi(x) = \alpha\}$ es una cara de $K$. Si $\phi|_K$ no es constante, es una cara propia.*

Demostración: Claramente $C$ es un cerrado convexo no vacío y si $x, y \in K$ y $0 < \lambda < 1$ cumplen que $(1-\lambda)x + \lambda y \in C$, entonces $(1-\lambda)\phi(x) + \lambda\phi(y) = \alpha$ y, por otra parte, $\phi(x) \leq \alpha$, $\phi(y) \leq \alpha$, lo que obliga a que $\phi(x) = \phi(y) = \alpha$, luego $x, y \in C$. Por lo tanto, $C$ es una cara de $K$ y, si $\phi$ no es constante en $K$, es claramente una cara propia. ■

**Teorema 11.74 (TU)** *Sea $V$ un $\mathbb{R}$-espacio vectorial topológio $K \subset V$ un compacto convexo. Si $C$ es una cara propia de $K$, entonces $C \subset \partial K$. Si $\mathring{K} \neq \varnothing$, entonces $\partial K$ es la unión de todas las caras propias de $K$.*

Demostración: Si $x \in C$, $y \in K \setminus C$, tenemos que $z = (1-\lambda)x + \lambda y \notin K$ si $\lambda < 0$, pues en caso contrario $x \in C$ sería un punto interior del segmento de extremos $z$, $y$, luego, al ser $C$ una cara, tendríamos que $y \in C$, contradicción. Por lo tanto, haciendo $\lambda = -1/n$ obtenemos una sucesión en $V \setminus K$ que converge a $x$, luego $x \in \partial K$.

Supongamos ahora que $x \in \partial K$, con lo que $x \notin \mathring{K}$. Por el primer teorema de separación, existe un hiperplano $H = \{u \in V \mid \phi(u) = \alpha\}$ que separa a $K$ de $\{x\}$. Necesariamente $x \in H$, pero no puede ser $K \subset H$, o $K$ tendría interior vacío. Por lo tanto $K \cap H$ es una cara estricta de $K$ que contiene a $x$. ■

En particular, $E(K) \subset \partial K$, aunque esto se prueba fácilmente de forma mucho más directa.

**Teorema 11.75** *Sea $V$ un $\mathbb{R}$-espacio vectorial, sea $K \subset V$ un compacto convexo y sea $C$ una cara de $K$. Entonces $B \subset C$ es una cara de $C$ si y sólo si es una cara de $K$. En particular $E(C) = E(K) \cap C$.*

Demostración: Supongamos que $B$ es una cara de $C$ y supongamos que $x$, $y \in K$ y $0 < \lambda < 1$ cumplen que $(1-\lambda)x + \lambda y \in B$. Entonces $(1-\lambda)x + \lambda y \in C$ y, como $C$ es una cara de $K$, se cumple que $x$, $y \in C$. A su vez, como $B$ es una cara de $C$, llegamos a que $x$, $y \in B$, luego $B$ es una cara de $K$.

Recíprocamente, si $B$ es una cara de $K$ y $(1-\lambda)x + \lambda y \in B$ con $x$, $y \in C$, también $x$, $y \in K$, luego $x$, $y \in B$ y por lo tanto $B$ es una cara de $C$. ■

**Teorema 11.76** *Sea $V$ un $\mathbb{R}$-espacio vectorial topológico de Hausdorff de dimensión finita, sea $K \subset V$ un convexo no vacío y sea $W \subset V$ la variedad afín generada por $K$. Entonces $K$ tiene interior no vacío en $W$.*

Demostración: No perdemos generalidad si suponemos que $0 \in K$. Entonces $W$ es el subespacio vectorial generado por $K$. Como $K$ es un generador de $W$, contiene una base, digamos $v_1, \ldots, v_{n-1}$. Así $\operatorname{co}(0, v_1, \ldots, v_n) \subset K \subset W$. Basta probar que $\operatorname{co}(0, v_1, \ldots, v_n)$ tiene interior no vacío en $W$. Ahora bien, componiendo con un isomorfismo, podemos suponer que $W = \mathbb{R}^n$ y que $v_1, \ldots, v_n$ es la base canónica, en cuyo caso

$$\operatorname{co}(0, v_1, \ldots, v_n) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1, \ldots, x_n \geq 0,\ x_1 + \cdots + x_n \leq 1\},$$

que claramente tiene interior no vacío. ■

**Teorema 11.77** *Si $V$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial topológico de Hausdorff de dimensión finita, $K \subset V$ es un compacto convexo no vacío y $C$ es una cara de estricta de $K$, entonces $\dim C < \dim K$.*

Demostración: No perdemos generalidad si suponemos que $0 \in C$. Entonces, las variedades afines generadas por $C$ y $K$ son los subespacios vectoriales que generan. Si tuvieran la misma dimensión serían iguales y, a través de un isomorfismo, podemos suponer que son $\mathbb{R}^n$. Así $K$ es un compacto de interior no vacío en $\mathbb{R}^n$ y $C$ es una cara que también tiene interior no vacío en $\mathbb{R}^n$, pero eso es imposible, pues $C \subset \partial K = \partial \mathring{K}$ y las fronteras de los abiertos tienen interior vacío (teorema 1.28). ■

Ahora podemos probar un resultado fundamental:

**Teorema 11.78 (Minkowski-Carathéodory)** *Sea $V$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial topológico de Hausdorff de dimensión finita y $K \subset V$ un compacto convexo. Entonces $K = \operatorname{co}(E(K))$.*

Demostración: Como todo $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita es también un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión finita, no perdemos generalidad si suponemos que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Lo probamos por inducción sobre $\dim K$. Si $\dim K = 0$, es que $K$ es un punto, y la conclusión es trivial. Supongamos que $\dim K = d$ y que el resultado es cierto para compactos de dimensión menor. No perdemos generalidad si suponemos que $0 \in K$ y, cambiando $V$ por la variedad afín generada por $K$ (que es un subespacio vectorial de $V$), podemos suponer que $\mathring{K} \neq \varnothing$.

Tenemos que probar que $K \subset \operatorname{co}(E(K))$. Tomamos $a \in K$ y supongamos en primer lugar que $a \in \partial K$. Por 11.74 existe una cara propia $C$ de $K$ tal que $a \in C$. Por 11.77 podemos aplicarle a $C$ la hipótesis de inducción, con lo que $a \in \operatorname{co}(E(C)) \subset \operatorname{co}(E(K))$, por 11.75.

Ahora supongamos que $a \in \mathring{K}$. Tomemos $x \in \partial K$. Como $K$ está acotado, la semirrecta $x + \alpha(a - x)$ (para $\alpha \geq 0$) tiene que cortar a $\partial K$ en otro punto $y = x + \alpha(a - x) \in \partial K$, con $\alpha > 1$, con lo que $a = (1 - \lambda)x + \lambda y$, con $\lambda = 1/\alpha$. Por la parte ya probada $x, y \in \operatorname{co}(E(K))$, luego también $a \in \operatorname{co}(E(K))$. ■

Este resultado es falso para espacios de dimensión infinita, pero basta una pequeña modificación para que siga siendo válido. En primer lugar demostramos en general la existencia de puntos extremos:

**Teorema 11.79 (AE)** *Sea $V$ un $\mathbb{R}$-espacio vectorial topológico localmente convexo y sea $C \subset V$ un subconjunto compacto convexo. Entonces, todo hiperplano soporte de $C$ contiene un punto extremo de $C$.*

DEMOSTRACIÓN: Una subvariedad afín en $V$ es un subconjunto de la forma $A = x + W$, donde $W$ es un subespacio vectorial de $V$. Diremos que $A$ *soporta* a $C$ si $C \cap A \neq \varnothing$ y para todo par de puntos $x, y \in C$, si existe $0 < \lambda < 1$ tal que $(1-\lambda)x+\lambda y \in A$, entonces para todo $0 \leq \lambda \leq 1$ se cumple que $(1-\lambda)x+\lambda y \in A$.

Notemos que si $H = \{v \in V \mid f(v) = \alpha\}$ es un hiperplano soporte de $C$, entonces soporta a $C$ en el sentido de la definición anterior,[3] pues si, por ejemplo, $C \subset \overline{V}_\alpha$ y $x, y \in C$ cumplen que existe $0 < \lambda < 1$ tal que $(1-\lambda)f(x)+\lambda f(y) = \alpha$, entonces $f(x) = \alpha = f(y)$, pues si, por ejemplo, $f(x) < \alpha$, sería

$$\alpha = (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y) < (1 - \lambda)\alpha + \lambda\alpha = \alpha.$$

Así pues, $x, y \in H$, que es convexo, luego $(1-\lambda)x+\lambda y \in H$ para todo $0 \leq \lambda \leq 1$.

Por otra parte, si $z \in V$ cumple que $\{z\}$ soporta a $C$, entonces $z$ es un punto extremo de $C$. En efecto, como $\{x\} \cap C \neq \varnothing$, tiene que ser $z \in C$, y si existen $x, y \in C$ y $0 \leq \lambda \leq 1$ tales que $x \neq y$ y $z = (1 - \lambda)x + \lambda y$, entonces $\lambda = 0, 1$, pues en caso contrario tendría que cumplirse que $x, y \in \{z\}$, con lo que serían $x = y$.

Fijado un hiperplano soporte $H$ de $C$, consideramos la familia $\mathcal{F}$ de todas las subvariedades afines cerradas en $V$ contenidas en $H$ que soportan a $C$. Es un conjunto no vacío porque contiene a $H$, y podemos considerar el orden parcial dado por $A \leq B$ si y sólo si $B \subset A$.

Vamos a probar que $\mathcal{F}$ cumple las hipótesis del lema de Zorn. Si $\mathcal{C} \subset \mathcal{F}$ está totalmente ordenado, es claro que $A_0 = \bigcap \mathcal{C}$ es una subvariedad afín cerrada en $V$. Más aún, la familia $\{A \cap C \mid A \in \mathcal{F}\}$ es una familia de cerrados en $C$ con la propiedad de la intersección finita, luego por la compacidad de $C$ tenemos que $A_0 \cap C \neq \varnothing$. Ahora es inmediato que $A_0$ soporta a $C$, luego $A_0 \in \mathcal{F}$ es una cota superior de $\mathcal{C}$.

[3]También es fácil probar que todo hiperplano cerrado que soporte a $C$ en el sentido de la definición anterior es un hiperplano soporte de $C$, pero no vamos a necesitar este hecho.

Por el lema de Zorn $\mathcal{F}$ contiene un elemento maximal $V_0$. Basta probar que es de la forma $V_0 = \{x_0\}$, pues entonces será un punto extremo de $C$ contenido en $H$. Aplicando una traslación podemos suponer que $V_0$ es un subespacio vectorial de $V$, y lo que tenemos que probar es que su dimensión no puede ser $\geq 1$.

Tenemos que $C_0 = C \cap V_0$ es un compacto convexo no vacío contenido en $V_0$, luego por el teorema 11.71 aplicado a $V_0$ (aquí usamos que, al tener dimensión $\geq 1$ contiene un hiperplano cerrado, por los teoremas de separación) tenemos que $C_0$ tiene un hiperplano soporte $H_0 \subset V_0$. Vamos a probar que $H_0 \in \mathcal{F}$, en contradicción con la maximalidad de $V_0$.

En efecto, tenemos que $H_0 \cap C \neq \varnothing$, y si $x$, $y \in C$ son puntos distintos tales que $(1-\lambda)x + \lambda y \in H_0 \subset V_0$, para cierto $0 < \lambda < 1$, entonces todo $0 \leq \lambda \leq 1$ cumple que $(1-\lambda)x + \lambda y \in V_0$ (porque $V_0 \in \mathcal{F}$), luego en particular, $x$, $y \in V_0 \cap C = C_0$ y, como $H_0$ soporta a $C_0$, tenemos que $(1-\lambda)x + \lambda y \in H_0$ para todo $0 \leq \lambda \leq 1$. ■

**Teorema 11.80 (Krein-Milman) (AE)** *Si $K$ es un subconjunto compacto convexo no vacío en un espacio vectorial topológico localmente convexo, entonces $K = \overline{\mathrm{co}}(E(K))$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $V$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial topológico localmente convexo. Podemos suponer que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, pues todo $\mathbb{C}$-espacio vectorial es también un $\mathbb{R}$-espacio vectorial en las mismas condiciones, y el hecho de que el teorema valga para la estructura de $\mathbb{R}$-espacio vectorial implica trivialmente que vale para la estructura de $\mathbb{C}$-espacio vectorial.

Sea $C \subset V$ un compacto convexo que podemos suponer no vacío, sea $E$ el conjunto de sus puntos extremos y sea $D = \overline{\mathrm{co}}(E) \subset C$, que también es un compacto convexo no vacío.

Si $f : V \longrightarrow \mathbb{R}$ es una aplicación lineal continua, tenemos que $f[C] = [\alpha, \beta]$ es un intervalo en $\mathbb{R}$ (tal vez con $\alpha = \beta$), y en la prueba del teorema 11.71 hemos observado que $H_0 = \{v \in V \mid f(v) = \alpha\}$ y $H_1 = \{v \in V \mid f(v) = \beta\}$ son hiperplanos soporte de $C$. Por el teorema anterior cada uno de ellos contiene un punto de $E$, luego $f[C] \subset f[D]$, ya que $f[D]$ es también un intervalo en $\mathbb{R}$ que contiene a $\alpha$ y a $\beta$. Por consiguiente, $f^{-1}[f[C]] \subset f^{-1}[f[D]]$, luego, por la observación tras el teorema 11.71, tenemos que

$$C = \bigcap_f f^{-1}[f[C]] \subset \bigcap_f f^{-1}[f[D]] = D.$$

■

El ejemplo A.59 muestra que el teorema anterior es falso si cambiamos la envoltura convexa cerrada por la mera envoltura convexa. A la hora de encontrar los puntos extremos de un compacto convexo, resulta útil el teorema siguiente:

**Teorema 11.81 (Milman) (AE)** *Si $V$ es un espacio vectorial topológico localmente convexo y $K \subset V$ es un compacto tal que $C = \overline{\mathrm{co}}(K)$ es compacto, entonces todo punto extremo de $C$ está en $K$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $x_0$ un punto extremo de $C$ y sea $U$ un entorno convexo cerrado de $x_0$. Como $K$ está cubierto por los abiertos $y + \mathring{U}$, con $y \in K$, existe un conjunto finito de puntos $y_1, \ldots, y_n \in K$ tales que $K \subset \bigcup_i (y_i + U)$. Sea $W_i = \overline{\mathrm{co}}(K \cap (y_i + U)) \subset C$.

Así $K \subset \bigcup_i W_i$, luego $\mathrm{co}(K) \subset \mathrm{co}\Big(\bigcup_i W_i\Big) \subset C$, pero es fácil ver que

$$\mathrm{co}\Big(\bigcup_i W_i\Big) = \{\sum_{i=1}^n \lambda_i w_i \mid w_i \in W_i,\ \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1\},$$

por lo que se trata de un conjunto compacto (imagen continua del compacto $A \times \prod_{i=1}^n W_i$, donde $A = \{\lambda \in \mathbb{R}^n \mid \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1\}$).

Por lo tanto, $C = \mathrm{co}\Big(\bigcup_i W_i\Big)$ y $x_0 = \sum_{i=1}^n \lambda_i w_i$, con $w_i \in W_i$. Pero, como $x_0$ es un punto extremo de $C$, es fácil concluir que existe un $i$ tal que $x_0 = w_i \in y_i + U$, luego $x_0 \in C + U$. Como $U$ recorre una base de entornos de 0,

$$x_0 \in \bigcap_U (C + U) = \overline{C} = C.$$

■

Conviene observar lo siguiente:

**Teorema 11.82** *Si $V$ es un espacio vectorial topológico localmente convexo de dimensión finita y $K \subset V$ es compacto, entonces* $\mathrm{co}(K)$ *también es compacto.*

DEMOSTRACIÓN: Si $K$ tiene dimensión finita como $\mathbb{K}$-espacio vectorial, también la tiene como $\mathbb{R}$-espacio vectorial. Sea $d$ esta dimensión, sea

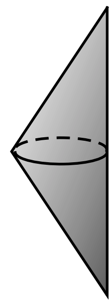
$$C = \{\lambda \in \mathbb{R}^{d+1} \mid \lambda_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^{d+1} \lambda_i = 1\}$$

y consideremos la aplicación $f : C \times K^{d+1} \longrightarrow \mathrm{co}(K)$ dada por

$$f(\lambda, x) = \sum_{i=1}^{d+1} \lambda_i x_i.$$

Claramente es continua, por B.7 es suprayectiva y $C \times K^{d+1}$ es compacto, luego $\mathrm{co}(K)$ también es compacto. ■

Sin embargo, el teorema anterior no permite deducir el teorema de Minkowski-Carathéodory a partir del teorema de Krein-Milman, pues en general $E(K)$ no tiene por qué ser cerrado. Basta considerar el doble cono de la figura, cuyos puntos extremos son los dos vértices y los puntos de la base distintos del que pasa por el segmento que une los vértices.



**Ejemplo** *Si $B = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 \leq 1\}$ es la bola unidad cerrada de $\mathbb{R}^n$, entonces $E(B) = \partial B = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 = 1\}$.*

En efecto, como la bola $B$ es compacta, por el teorema de Minkowski-Carathéodory tiene al menos un punto extremo $e$, y necesariamente $e \in \partial B$. Pero si $e' \in \partial B$, es fácil definir una isometría $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ que cumpla $f(e) = e'$ y entonces $f[B] = B$, de donde se sigue que $e'$ también es un punto extremo de $B$. ■

El ejemplo precedente no es válido para otras normas en $\mathbb{R}^n$. Por ejemplo, la bolas unitarias para las normas $\| \ \|_1$ o $\| \ \|_\infty$ en $\mathbb{R}^2$ son cuadradas, luego tienen únicamente cuatro puntos extremos.

El ejemplo A.53 muestra que la bola unitaria cerrada de un espacio $C(K)$ con $K$ compacto conexo tiene puntos extremos, pero no cumple el teorema de Krein-Milman (porque no es compacta). En cambio, en el ejemplo A.58 vemos que la bola unidad de $c_0$ no tiene puntos extremos.

Por último, el ejemplo A.65 permite demostrar que el axioma de elección es equivalente a una consecuencia de los teoremas de Alaoglu-Bourbaki y Krein-Milman. 119

## 11.6 Dualidad

**Definición 11.83** Si $V$ es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial topológico, podemos considerar su *dual algebraico* $V^* = L(V, \mathbb{K})$, que es espacio vectorial de todos los funcionales lineales en $V$, y su *dual topológico* $V' = \mathcal{L}(V, \mathbb{K})$, que es el subespacio formado por los funcionales lineales continuos.

La definición anterior es la generalización obvia de la definición análoga 9.63 para espacios normados. La diferencia es que cuando $V$ es un espacio normado tenemos definida una norma en $V'$ que convierte al dual en un espacio de Banach, mientras que en el caso de un espacio vectorial topológico arbitrario no tenemos definida ninguna topología en $V'$. En esta sección veremos que un espacio vectorial topológico y su dual determinan varias topologías de interés en uno y en otro.

Observemos en primer lugar que si $V$ tiene dimensión finita y es un espacio de Hausdorff, el teorema 11.14 nos da que $V' = V^*$, por lo que se trata de un espacio vectorial de la misma dimensión que $V$. En consecuencia, cualquier topología que definamos en $V'$ con la que sea un espacio vectorial topológico de Hausdorff será necesariamente la topología euclídea y $V'$ será topológicamente isomorfo a $V$.

Por ello, el único caso no trivial se da cuando $V$ tiene dimensión infinita. Por otro lado, el teorema A.72 muestra que en general puede suceder que $V' = 0$, mientras que el teorema de Hahn-Banach (véase el teorema 11.52) garantiza la existencia de muchos funcionales lineales continuos en $V'$ si $V$ es localmente convexo.

Conviene plantear un entorno de trabajo muy general:

Una *dualidad* entre dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales $V$ y $W$ es una aplicación bilineal regular $\langle\ ,\ \rangle : V \times W \longrightarrow \mathbb{K}$, es decir, una aplicación que cumpla las propiedades siguientes, para $v$, $v_1$, $v_2 \in V$, $w$, $w_1$, $w_2 \in W$, $\alpha \in \mathbb{K}$:

1. $\langle v_1 + v_2, w\rangle = \langle v_1, w\rangle + \langle v_2, w\rangle$,
2. $\langle v, w_1 + w_2\rangle = \langle v, w_1\rangle + \langle v, w_2\rangle$,
3. $\langle \alpha v, w\rangle = \langle v, \alpha w\rangle = \alpha\,\langle v, w\rangle$.
4. Si $\langle v, w\rangle = 0$ para todo $v \in V$, entonces $w = 0$.
5. Si $\langle v, w\rangle = 0$ para todo $w \in W$, entonces $v = 0$.

Un *par dual* es una terna $(V, W, \langle\ ,\ \rangle)$, donde $V$ y $W$ son $\mathbb{K}$-espacios vectoriales y $\langle\ ,\ \rangle$ es una dualidad entre ambos. En la práctica escribiremos simplemente $(V, W)$.

En general, una forma bilineal entre dos espacios vectoriales (es decir, una aplicación que cumpla las tres primeras propiedades de la definición) determina dos aplicaciones lineales

$$\phi_V : V \longrightarrow W^*, \qquad \phi_W : W \longrightarrow V^*$$

dadas por $\phi_V(v)(w) = \langle v, w\rangle$, $\phi_W(w)(v) = \langle v, w\rangle$. Las condiciones de regularidad (las dos últimas en la definición) nos garantizan que esas aplicaciones son inyectivas, de modo que cada $v \in V$ (resp. $w \in W$) puede identificarse con un funcional lineal en $W$ (resp. en $V$). Esto justifica que en la práctica usemos la notación $v(w) = \langle v, w\rangle = w(v)$, como si $v$ y $w$ fueran funciones, aunque en principio no tienen por qué serlo.

El par dual más simple que podemos formar es $(V, V^*)$, donde $V$ es cualquier $\mathbb{K}$-espacio vectorial y $V^*$ es su dual algebraico, con la dualidad determinada por $\langle v, f\rangle = f(v)$. En este caso los elementos de $V^*$ son ciertamente funciones (lineales) en $V$, y el monomorfismo $\phi_{V^*} : V^* \longrightarrow V^*$ es la identidad. En cambio, el monomorfismo $\phi_V : V \longrightarrow V^{**}$ es la inmersión natural de $V$ en su bidual, dada por la evaluación $\phi_V(v)(f) = f(v)$.

Más en general, podemos considerar pares duales $(V, W)$, donde $W$ es un subespacio vectorial de $V^*$, con la restricción de la dualidad del caso anterior. Para que dicha restricción sea realmente una dualidad es necesario y suficiente que $W$ separe puntos de $V$, es decir, que si $v_1$ y $v_2 \in V$ son dos puntos distintos, exista $f \in W$ tal que $f(v_1) \neq f(v_2)$. Por la linealidad, es fácil ver que esto equivale a que si $v \in V$ no es nulo, exista $f \in W$ tal que $f(v) \neq 0$.

**La topología débil** Si $(V, W)$ es un par dual, para cada $w \in W$ y cada $\epsilon > 0$, el conjunto

$$U(w, \epsilon) = \{v \in V \mid |w(v)| < \epsilon\} = w^{-1}[B_\epsilon(0)]$$

es absorbente y absolutamente convexo y la familia formada por las intersecciones finitas de conjuntos de esta forma cumple las condiciones del teorema 11.3.

En efecto, la propiedad 1 se cumple trivialmente y para las otras dos observamos que, para $\alpha \neq 0$,

$$U(w, \epsilon/2) + U(w, \epsilon/2) \subset U(w, \epsilon), \qquad \alpha U(w, \epsilon) = U(w, |\alpha|\epsilon).$$

En realidad, teniendo en cuenta que $U(w, \epsilon) = U(\epsilon^{-1}w, 1)$, podemos considerar únicamente conjuntos $U(w, 1)$.

Definimos la *topología débil* $\sigma(V, W)$ inducida en $V$ por un par dual como la única topología que convierte a $V$ en un espacio vectorial topológico para la cual las intersecciones finitas de conjuntos $U(w, \epsilon)$ (o $U(w, 1)$) forman una base de entornos de 0.

**Teorema 11.84** *Si $(V, W)$ es un par dual, entonces $V$ es un espacio vectorial topológico de Hausdorff localmente convexo con la topología débil $\sigma(V, W)$, y ésta es la menor topología en $V$ para la que los elementos de $W$, vistos como funcionales en $V$, son continuos. Más aún, se cumple que $W = V'$. Una familia de seminormas en $V$ que induce la topología $\sigma(V, W)$ está formada por las aplicaciones $p_w : V \longrightarrow \mathbb{R}$ dadas por $p_w(v) = |w(v)|$.*

Demostración: Por definición $V$ es un espacio vectorial topológico con la topología $\sigma(V, W)$. Además es un espacio de Hausdorff, pues para cada $v \in V$ existe un $w \in W$ tal que $w(v) \neq 0$, luego $v \notin U(w, |w(v)|)$.

Es inmediato comprobar que los abiertos $U(w, \epsilon)$ son convexos, por lo que $V$ es localmente convexo.

Las seminormas $p_w$ son continuas por el teorema 11.38, ya que los conjuntos $B_{p_w} = \{v \in V \mid |w(v)| < 1\}$ son entornos de 0. Más aún, las intersecciones finitas de estos conjuntos forman una base de entornos de 0, ya que

$$U(w, 1) = \{v \in V \mid |w(v)| < 1\} = B_{p_w}.$$

Por lo tanto, estas seminormas generan la topología débil.

Si $w \in W$, entonces, para todo $\epsilon > 0$, tenemos que $w^{-1}[B_\epsilon(0)]$ es abierto en $V$, luego $w$ es un funcional lineal continuo en 0, luego continuo en $V$. Por otra parte, si $\mathcal{T}$ es cualquier topología en $V$ respecto a la cual los funcionales en $W$ son continuos, entonces los conjuntos $w^{-1}[B_\epsilon(0)]$ tienen que ser abiertos en $\mathcal{T}$, y sus intersecciones finitas también, luego $\sigma(V, W) \subset \mathcal{T}$.

Claramente $W \subset V'$. Tomemos ahora $f \in V'$. Por el teorema 11.42 existen $w_1, \ldots, w_n \in W$ y un $M > 0$ tales que, para todo $v \in V$,

$$|f(v)| \leq M \max\{|w_i(v)| \mid i = 1, \ldots, n\}.$$

En particular, si $w_i(v) = 0$ para todo $i$, también $f(v) = 0$.

Si algún $w_i$ es combinación lineal de los demás, en particular se anula donde los demás se anulan, luego podemos eliminarlo si que deje de cumplirse la afirmación precedente. Equivalentemente, podemos suponer que los $w_i$ son linealmente independientes.

Sea $F : V \longrightarrow \mathbb{K}^n$ la aplicación lineal dada por $F(v) = (w_1(v), \ldots, w_n(v))$ y sea $N$ su núcleo. Por el teorema de isomorfía $F$ induce un monomorfismo $\bar{F} : V/N \longrightarrow \mathbb{K}^n$. En particular, $\dim V/N \leq n$, y también $\dim(V/N)^* \leq n$. Todas las $w_i$ se anulan en $N$, luego por hipótesis $f$ también, luego todas ellas definen funcionales lineales $\bar{w}_i, \bar{f} : V/N \longrightarrow \mathbb{K}$.

Los $\bar{w}_i$ siguen siendo linealmente independientes, pues si $\sum\limits_i \alpha_i \bar{w}_i = 0$, entonces, para todo $v \in V$, tenemos que

$$\sum_i \alpha_i w_i(v) = \sum_i \alpha_i \bar{w}_i(v + N) = 0,$$

luego $\sum\limits_i \alpha_i w_i = 0$, luego $\alpha_i = 0$ para todo $i$. Concluimos que $\dim V/N = n$ y que los funcionales $\bar{w}_i$ forman una base de $(V/N)^*$, luego existen escalares tales que $\bar{f} = \sum\limits_i \alpha_i \bar{w}_i$, de donde, igual que antes, $f = \sum\limits_i \alpha_i w_i \in W$. ■

**Nota** Por la simetría de la definición del concepto de par dual, es claro que igualmente podemos considerar la topología débil $\sigma(W, V)$ en $W$. ■

Así, cualquier espacio vectorial $V$ puede dotarse de estructura de espacio vectorial topológico de Hausdorff localmente convexo sin más que considerar en él la topología $\sigma(V, V^*)$. No obstante, los pares duales de más interés son los de la forma $(V, V')$, donde $V$ es un espacio vectorial topológico y $V'$ es su dual topológico.

Ahora bien, para que $(V, V')$ sea realmente un par dual es necesario que $V'$ separe puntos de $V$, para lo cual a su vez es necesario que $V$ sea un espacio de Hausdorff.

En efecto, si $V'$ separa puntos y $v \in V$ no es nulo, existe $f \in V'$ tal que $f(v) = \alpha \neq 0$, entonces $f^{-1}[B_{|\alpha|}(0)]$ es un entorno de 0 en el que no está $v$, por lo que $V$ es un espacio de Hausdorff.

En general, $V'$ no tiene por qué separar puntos en $V$ (puede ser incluso el espacio vectorial nulo), pero una condición suficiente para que lo haga es que $V$ sea localmente convexo, pues si $v \in V$ no es nulo, podemos definir $f_0 : \langle v \rangle \longrightarrow \mathbb{K}$ mediante $f_0(\alpha v) = \alpha$, de modo que $f_0$ es continua y $f_0(v) = 1$. Por 11.52 tenemos que $f_0$ se extiende a $f \in V'$ tal que $f(v) = 1$.

No obstante, la convexidad local no es necesaria, como muestran los espacios $\ell^p$ con $0 < p < 1$ (véase el teorema A.74 y las observaciones posteriores).

**Nota** En el resto de esta sección, cuando hablemos de *espacios vectoriales localmente convexos* se entenderá que nos referimos a espacios vectoriales topológicos de Hausdorff localmente convexos. ■

**Definición 11.85** Si $V$ es un espacio vectorial localmente convexo, llamaremos *topología débil* de $V$ o de $V'$ a las topologías débiles $\sigma(V, V')$ y $\sigma(V', V)$, respectivamente, asociadas al par dual $(V, V')$.

Usaremos la notación $V_\sigma$ y $V'_\sigma$ para referirnos a $V$ y $V'$ con sus topologías débiles correspondientes, mientras que cuando escribamos $V$ entenderemos que estamos considerando la topología original $\mathcal{T}$ de $V$.

Puesto que la topología débil es la menor que hace continuos los funcionales de $V'$, es inmediato que $\sigma(V, V') \subset \mathcal{T}$. Notemos, por otra parte, que el dual topológico de $V_\sigma$ es el mismo que el de $V$.

**Nota** Conviene tener presente que los pares duales en las condiciones de la definición anterior son totalmente generales, en el sentido de que si $(V, W)$ es un par dual arbitrario, siempre podemos dotar a $V$ con la topología $\sigma(V, W)$, y entonces $V$ es un espacio vectorial localmente convexo con $W = V'$. ■

En realidad la topología débil en un espacio dual es una topología que ya conocíamos:

**Teorema 11.86** *Si $V$ es un espacio vectorial topológico, entonces la topología de $V'_\sigma \subset \mathbb{K}^V$ no es sino la topología de la convergencia puntual, es decir, la topología inducida por la topología producto en $\mathbb{K}^V$.*

Demostración: Un entorno básico de 0 en $V'_\sigma$ es de la forma

$$\bigcap_{i=1}^{n} U(v_i, \epsilon) = \{f \in V' \mid f[\{v_1, \ldots, v_n\}] \subset B_\epsilon(0)\},$$

que es también un entorno básico de 0 para la topología de la convergencia puntual. ■

En principio, si $V$ es un espacio vectorial localmente convexo, $V$ puede tener más abiertos (luego más cerrados) que $V_\sigma$, pero sucede que ambos tienen los mismos cerrados convexos:

**Teorema 11.87 (AE)** *Si $V$ es un espacio vectorial topológico localmente convexo y $C \subset V$ es un conjunto convexo, entonces su clausura respecto de la topología original de $V$ es la misma que respecto de la topología débil.*

Demostración: Basta probar que ambas topologías tienen los mismos cerrados convexos. Ciertamente, todo cerrado débil es cerrado en la topología original (porque lo mismo vale para los abiertos) y si $C$ es un convexo cerrado respecto de la topología original, por 11.69 es intersección de semiespacios cerrados, y basta observar que los semiespacios cerrados son cerrados para la topología débil. En efecto, si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ se trata de conjuntos de la forma

$$E = \{v \in V \mid f(v) \leq \alpha\},$$

donde $f \in V'$, con lo que $f$ también es continua para la topología débil, lo cual implica que $E$ es cerrado para la topología débil. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ razonamos considerando a $V$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial y teniendo en cuenta que todo funcional $\mathbb{R}$-lineal continuo $f$ es la parte real de un funcional $\mathbb{C}$-lineal continuo[4] $\bar{f}$, que es también débilmente continuo, luego $f$ también es débilmente continuo, y llegamos a la misma conclusión. ■

[4]Basta definir $\bar{f}(v) = f(v) - if(iv)$.

Si $C$ no es convexo, el teorema anterior no se cumple necesariamente, como se pone de manifiesto en el ejemplo siguiente, que muestra además que en general la topología débil no coincide con la topología original:

**Ejemplo** *Si $V$ es un espacio normado de dimensión infinita, la clausura débil de la esfera unitaria $S = \{x \in V \mid \|x\| = 1\}$ es la bola $B = \{x \in V \mid \|x\| \leq 1\}$.*

Como la bola $B$ es cerrada para la norma y es convexa, también es cerrada para la topología débil, por el teorema anterior, por lo que $\overline{S} \subset B$, donde la clausura se toma en $V_\sigma$. Recíprocamente, si $x \in B$, un entorno básico de $x$ es de la forma $x + U$, donde

$$U = \{y \in V \mid |f_1(y)| < \epsilon, \ldots, |f_n(y)| < \epsilon\}.$$

Como $V$ tiene dimensión infinita, la intersección $N$ de los núcleos de los funcionales lineales $f_i$ no puede ser nula, pues la aplicación $F : V \longrightarrow \mathbb{R}^n$ dada por $F(y) = (f_1(y), \ldots, f_n(y))$ induce un monomorfismo $V/N \longrightarrow \mathbb{K}^n$, luego $V/N$ tiene dimensión finita, luego $N \neq 0$.

Por lo tanto podemos tomar $y \neq 0$ tal que $f_i(y) = 0$ para todo $i$. Entonces $x + \alpha y \in x + U$ para todo $\alpha > 0$, y podemos tomar $\alpha$ tal que $\|x + \alpha y\| = 1$, pues $\|x\| \leq 1$ y $\|\alpha y\| \leq \|x + \alpha y\| + \|x\|$, luego

$$\|x + \alpha y\| \geq \alpha\|y\| - \|x\|$$

que puede hacerse arbitrariamente grande, luego por continuidad existe un $\alpha \geq 0$ para el que la norma es 1. Así $x + \alpha y \in S \cap (x + U)$, luego $x \in \overline{S}$. ■

Ahora necesitamos un resultado técnico:

**Teorema 11.88** *Si $V$ y $W$ son espacios vectoriales topológicos y $H \subset \mathcal{L}(V, W)$ es un conjunto equicontinuo, entonces la clausura de $H$ en $W^V$ (para la topología producto) está contenida en $\mathcal{L}(V, W)$ y es equicontinua.*

Demostración: Dados $v_1, v_2 \in V$ y $\alpha, \beta \in K$, la aplicación $\phi : W^V \longrightarrow W$ dada por $\phi(f) = f(\alpha v_1 + \beta v_2) - \alpha f(v_1) - \beta f(v_2)$ es continua y se anula en $H$, luego también en su clausura, luego $\overline{H} \subset L(V, W)$.

Si probamos que $\overline{H}$ es equicontinuo, en particular $\overline{H} \subset \mathcal{L}(V, W)$. Si $U$ es un entorno de 0 en $W$, que podemos suponer cerrado, existe un entorno $G$ de 0 en $V$ tal que $f[G] \subset U$ para todo $f \in H$. Como la evaluación $v_x : W^V \longrightarrow W$ dada por $v_x(f) = f(x)$ es continua, si $x \in G$ tenemos que $v_x[\overline{H}] \subset \overline{v_x[H]} \subset U$, lo que implica que $\overline{H}$ es equicontinuo. ■

**Teorema 11.89 (Alaoglu-Bourbaki) (TU)** *Si $V$ es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial topológico, todo conjunto $H \subset V'_\sigma$ equicontinuo es relativamente compacto.*

Demostración: Consideramos $B_1(0) \subset K$. La equicontinuidad de $H$ implica que existe un entorno $U$ de 0 en $V$ tal que $|f(v)| \leq 1$ para todo $v \in U$ y todo $f \in H$. Si $v \in V$, existe un $\lambda_v > 0$ tal que $\lambda_v v \in U$, luego $|f(v)| \leq \lambda_v^{-1}$ para todo $f \in V'_\sigma$. Por lo tanto, $H \subset \prod\limits_{v \in V} \overline{B_{\lambda_v}(0)}$, y el producto es compacto, luego $\overline{H}$ también es compacto y, por el teorema anterior, $\overline{H} \subset V'_\sigma$ y la clausura de $H$ (respecto de la topología producto) es también la clausura en $V'_\sigma$ (pues topología débil es la restricción de la topología producto). ■

Notemos que por el teorema 11.57 si $V$ es tonelado todo subconjunto acotado de $V'_\sigma$ es equicontinuo, luego el teorema anterior implica que es relativamente compacto.

En particular, si $V$ es el dual de un espacio de Banach, como los espacios de Banach son tonelados, tenemos que todo subconjunto convexo cerrado y acotado $C \subset V$ es también cerrado y acotado en $V_\sigma$ (por 11.87 y porque todo conjunto acotado respecto de una topología lo es respecto de otra menos fina), luego es débilmente compacto, y el teorema de Krein-Milman implica que $C$ tiene puntos extremos (un hecho algebraico que no depende de ninguna topología).

Concluimos que si en un espacio de Banach $V$ hay un convexo cerrado y acotado sin puntos extremos, es imposible que $V$ sea el dual de otro espacio de Banach. En particular $V$ no puede ser reflexivo.

**Polares** Introducimos ahora un concepto fundamental para estudiar pares duales:

**Definición 11.90** Si $(V, W)$ es un par dual y $A \subset V$, definimos su *polar* como

$$A^\circ = \bigcap_{v \in A} \{w \in W \mid |\langle v, w\rangle| \leq 1\}.$$

**Ejemplo** Si $V$ es un espacio normado, tenemos que

$$V^\circ = \bigcap_{v \in V} \{f \in V' \mid |f(v)| \leq 1\} = \{v \in V' \mid \|f\| \leq 1\}$$

es la bola unitaria cerrada de $V'$. ■

Las propiedades siguientes son elementales:

**Teorema 11.91** *Si $(V, W)$ es un par dual, entonces:*

1. *Si $A \subset V$, se cumple que $A^\circ$ es absolutamente convexo y cerrado en $W_\sigma$.*
2. *Si $A \subset B \subset V$, entonces $B^\circ \subset A^\circ$.*
3. *Si $A \subset V$, entonces $A \subset A^{\circ\circ}$.*
4. *Si $\lambda \neq 0$, entonces $(\lambda A)^\circ = |\lambda|^{-1} A^\circ$.*
5. $(\bigcup_{i \in I} A_i)^\circ = \bigcap_{i \in I} A_i^\circ$.

Otro hecho básico es el siguiente:

**Teorema 11.92** *Si $V$ es un espacio vectorial topológico y $H \subset V^*$, entonces $H$ es equicontinuo si y sólo si $H^\circ$ es un entorno de 0, donde el polar se calcula respecto del par dual $(V, V^*)$.*

Demostración: Basta observar que

$$H^\circ = \bigcap_{f \in H} f^{-1}[\bar{B}_1(0)],$$

luego $\bigcap_{f \in H} f^{-1}[\bar{B}_\epsilon(0)] = \epsilon H^\circ$, y basta aplicar el teorema 11.53. ■

Notemos que en las condiciones del teorema anterior, de hecho $H \subset V'$ y $H^\circ$ es el mismo calculado respecto de $(V, V^*)$ o $(V, V')$.

Un hecho elemental, pero útil, es que los polares de los entornos de 0 respecto del par dual $(V, V^*)$ determinan el dual topológico $V'$:

**Teorema 11.93** *Sea $V$ un espacio vectorial topológico localmente convexo y sea $\mathfrak{U}$ una base de entornos de 0. Entonces $E' = \bigcup_{U \in \mathfrak{U}} U^\circ$, donde los polares se toman respecto del par dual $(V, V^*)$.*

Demostración: $f \in V^*$ es continua si y sólo si existe entorno $U \in \mathfrak{U}$ tal que $U \subset f^{-1}[\bar{B}_1(0)]$. En efecto, si da esta inclusión, entonces $\epsilon U \subset f^{-1}[\bar{B}_\epsilon(0)]$, por lo que $f$ es continua en 0, y el recíproco es inmediato. Pero esto equivale a que $|f(v)| \leq 1$ para todo $v \in U$, que a su vez equivale a que $f \in U^\circ$. ■

Ahora probamos el resultado fundamental sobre polaridad:

**Teorema 11.94 (del bipolar)** *Si $(V, W)$ es un par dual y $A \subset V$, entonces $A^{\circ\circ}$ es la $\sigma(V, W)$-clausura de la envoltura absolutamente convexa de $A$.*

Demostración: Llamemos $C$ a la $\sigma(V, W)$-clausura de la envoltura absolutamente convexa de $A$ (es decir, la intersección de todos los conjuntos absolutamente convexos que contienen a $A$). La inclusión $A \subset A^{\circ\circ}$ se da siempre y, como el bipolar es absolutamente convexo y $\sigma(V, W)$-cerrado, tenemos que $C \subset A^{\circ\circ}$.

Recíprocamente, si $v_0 \in V \setminus C$, por el segundo teorema de separación, considerando a $V$ como espacio vectorial real, existe una forma lineal continua $f : V \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $C \subset \{v \in V \mid f(v) \leq 1\}$, $f(v_0) > 1$. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, cambiamos $f$ por $\bar{f}(v) = f(v) - if(iv)$, que es $\mathbb{C}$-lineal y continua, y así en ambos casos (teniendo en cuenta que $C$ es equilibrado), tenemos que

$$C \subset \{v \in V \mid |f(v)| \leq 1\}, \qquad |f(v_0)| > 1.$$

(pues si $v \in C$, entonces $-v \in C$, luego $f(v) \leq 1$ y $-f(v) \leq 1$, luego $|f(v)| \leq 1$ y, en el caso complejo, también $iv \in C$, luego $|f(iv)| \leq 1$, luego $|f(v) - if(iv)| \leq 1$). Existe $w \in W$ tal que $f(v) = \langle v, w \rangle$, y entonces $w \in A^\circ$, lo que a su vez prueba que $v_0 \notin A^{\circ\circ}$. ■

Notemos que como $A^\circ$ siempre es absolutamente convexo y cerrado, podemos aplicarle el teorema del bipolar para concluir que $A^{\circ\circ\circ} = A^\circ$.

Veamos algunas aplicaciones. El teorema 11.92 implica inmediatamente que si $V$ es un espacio vectorial topológico y $\mathcal{U}$ es una base de entornos de 0, entonces $\mathcal{E} = \{U^\circ \mid U \in \mathcal{U}\}$ es una familia de conjuntos equicontinuos en $V^*$ tal que todo subconjunto de $V^*$ equicontinuo está contenido en un elemento de $\mathcal{E}$. El teorema del bipolar nos da el recíproco para espacios localmente convexos:

**Teorema 11.95** *Si $V$ es un espacio vectorial localmente convexo y $\mathcal{E}$ es una familia de subconjuntos equicontinuos de $V'$ tal que todo subconjunto equicontinuo de $V'$ está contenido en un elemento de $\mathcal{E}$, entonces $\mathcal{U} = \{H^\circ \mid H \in \mathcal{E}\}$ es una base de entornos de 0 en $V$.*

Demostración: Si $U$ es un entorno de 0 en $V$, que podemos suponer cerrado y absolutamente convexo (luego también débilmente cerrado, por 11.87), tenemos que $U^\circ \subset V'$ es equicontinuo, luego existe $H \in \mathcal{E}$ tal que $U^\circ \subset H$, luego $H^\circ \subset U^{\circ\circ} = U$. ■

Otro hecho relevante es el siguiente:

**Teorema 11.96** *Si $V$ es un espacio vectorial localmente convexo y $A \subset V$ es un tonel, entonces $A^\circ \subset V'_\sigma$ es acotado, y si $B \subset V'_\sigma$ es acotado, entonces $B^\circ \subset V$ es un tonel. Más aún, la polaridad establece una biyección entre los toneles de $V$ y los subconjuntos cerrados, acotados, absolutamente convexos de $V'_\sigma$.*

Demostración: Si $A \subset V$ es un tonel, ciertamente $A^\circ$ es cerrado y absolutamente convexo. Veamos que es acotado. Un entorno de 0 en $V'_\sigma$ es de la forma

$$U = \{f \in V' \mid |f(v_1)| < 1, \ldots, |f(v_n)| < 1\},$$

para ciertos $v_1, \ldots, v_n \in V$. Como $A$ es absorbente, existe un $\lambda > 0$ tal que $\lambda v_i \in A$, para $i = 1, \ldots, n$, luego si $f \in A^\circ$ se cumple que $|f(\lambda v_i)| \leq 1$, luego $|(\lambda/2)f(v_i)| \leq 1/2 < 1$, luego $(\lambda/2)f \in U$, luego $f \in (2/\lambda)U$, es decir, $A^\circ \subset (2/\lambda)U$, por lo que $A^\circ$ está acotado.

Supongamos ahora que $B \subset V'_\sigma$ es acotado y veamos que $B^\circ$ es un tonel, lo que se reduce a probar que es absorbente. Si $v \in V$, entonces

$$\{v\}^\circ = \{f \in V'_\sigma \mid |f(v)| \leq 1\}$$

es un entorno de 0 en $V'_\sigma$, luego existe un $\lambda > 0$ tal que $B \subset \lambda^{-1}\{v\}^\circ = \{\lambda v\}^\circ$, luego $\lambda v \in B^\circ$.

El teorema del bipolar (teniendo en cuenta que los cerrados convexos de $V$ son también débilmente cerrados) implica que las dos correspondencias son mutuamente inversas. ■

Como consecuencia:

**Teorema 11.97** *Un espacio vectorial topológico de Hausdorff localmente convexo es tonelado si y sólo si todo subconjunto acotado de $V'_\sigma$ es equicontinuo.*

Demostración: Una implicación es el teorema 11.57. Recíprocamente, si se cumple la condición del enunciado y $A$ es un tonel en $V$, entonces $A^\circ$ es acotado en $V'_\sigma$, por el teorema anterior, luego es equicontinuo por hipótesis, luego $A$ es un entorno de 0 por 11.92, luego $V$ es tonelado. ■

Sabemos que en un espacio normado, los conjuntos acotados no dependen realmente de la norma considerada, sino únicamente de la topología que ésta induce. Ahora podemos probar algo mucho más general, y es que los conjuntos acotados en un espacio vectorial topológico $V$ son los mismos para cualquier topología en $V$ que determine el mismo espacio dual topológico $V'$. Esto es consecuencia del apartado 4) del teorema siguiente:

**Teorema 11.98** *Sea $V$ un espacio vectorial topológico localmente convexo y sea $A \subset V$. Las condiciones siguientes son equivalentes:*

1. *$A$ está acotado.*
2. *El polar $A^\circ$ (respecto del par $(V, V')$) es absorbente.*
3. *Toda seminorma continua en $V$ está acotada en $A$.*
4. *Todo funcional continuo $f \in V'$ está acotado en $A$.*

Demostración: Veamos que 1) $\Leftrightarrow$ 3) Si $A$ está acotado y $p$ es una seminorma continua, por 11.38 sabemos que $U = \{v \in V \mid p(v) \leq 1\}$ es un entorno de 0, luego existe un $\lambda \in \mathbb{K}$ no nulo tal que $A \subset \lambda U$, de donde $p(v) \leq |\lambda|$ para todo $v \in A$.

Recíprocamente, si toda seminorma continua está acotada en $A$ y $U$ es un entorno de 0, que podemos suponer absolutamente convexo, tenemos que su funcional de Minkowski $p_U$ es una seminorma continua en $V$, luego $p_U[A]$ está acotado, digamos por $\lambda > 0$, lo que significa que para todo $v \in A$ se cumple que $p_U(v) < \lambda$, luego $v/\lambda \in U$ por 11.36, luego $A \subset \lambda U$ y, por consiguiente, $A$ está acotado.

Ahora veamos que 2) $\Leftrightarrow$ 4). Si $A^\circ$ es absorbente y $f \in V'$, existe un $\lambda > 0$ tal que $\lambda f \in A^\circ$, luego $|f(v)| \leq 1/\lambda$ para todo $v \in A$, luego $f$ está acotado en $A$. Recíprocamente, si se cumple 4) y $f \in V'$, existe un $\lambda > 0$ tal que $|f(v)| \leq \lambda$ para todo $v \in A$, luego si $|\alpha| \leq \epsilon = \lambda^{-1}$ se cumple que $|\alpha f(v)| \leq |\alpha|\lambda \leq 1$ para todo $v \in A$, luego $\alpha f \in A^\circ$ y $A^\circ$ es absorbente.

Las equivalencias precedentes eran consecuencias de las definiciones y el teorema 11.9 nos da que 1) $\Rightarrow$ 4). Veamos finalmente que 4) $\Rightarrow$ 3).

Sea $p$ una seminorma continua en $V$, sea $V_0 = \{v \in V \mid p(v) = 0\}$, que es un subespacio vectorial cerrado en $V$ y $p$ induce una norma en $V_P = V/V_0$. Sea $i : V \longrightarrow V_p$ la proyección canónica (que es continua considerando en $V_p$ la topología de la norma) y sea $A_p = i[A]$. Es claro que $p$ está acotada en $A$ si y sólo si $A_p$ está acotado en $V_p$ (respecto de la norma). Podemos ver $A_p \subset V_p \subset V_p''$, es decir, $A_p \subset \mathcal{L}(V_p', \mathbb{K})$, donde $V_p'$ es un espacio de Banach. Si $f \in V_p'$, entonces $i \circ f \in V'$, luego por hipótesis $(i \circ f)[A] = f[A_p]$ está acotado. El principio de acotación uniforme 9.62 implica entonces que $A_p$ está acotado en norma como subconjunto de $V_p''$, luego también como subconjunto de $V_p$, pues la inclusión es una isometría. ■

Esto hace que tenga interés determinar cuándo dos topologías en un espacio vectorial determinan el mismo dual topológico. Nos ocupamos de ello en el apartado siguiente.

**La topología de Mackey** Si $V$ es un espacio vectorial localmente convexo, podemos identificarlo con un subespacio de su bidual algebraico $V \subset L(V^*, \mathbb{K})$. Vamos a ver que existe una familia $\Sigma$ de subconjuntos de $V^*$ tal que la topología de $V$ es la relativa a $L_\Sigma(V^*, \mathbb{K})$, es decir, la topología de la convergencia uniforme en los conjuntos de $\Sigma$. Concretamente:

**Teorema 11.99** *Si $V$ es un espacio vectorial localmente convexo, entonces, visto como subespacio $V \subset L(V^*, \mathbb{K})$, su topología es la topología de la convergencia uniforme en los subconjuntos de $V^*$ equicontinuos.*

Demostración: La topología de la convergencia uniforme en los subconjuntos equicontinuos de $V^*$ tiene por base de entornos a las intersecciones finitas de los conjuntos $V(H; \epsilon B_1(0)) = V(\epsilon^{-1}H; B_1(0))$, con $H \subset V^*$ equicontinuo, pero como $\epsilon^{-1}H$ sigue siendo equicontinuo, podemos considerar únicamente conjuntos $V(H; B_1(0))$, y éstos son cerrados para intersecciones finitas, y no son sino los polares $H^\circ$, que son una base de entornos de 0 para $V$, según el teorema 11.95. ■

Esto puede precisarse más. En primer lugar observamos que si $H \subset V^*$ es equicontinuo, entonces $H^\circ$ es un entorno de 0 en $V$, por 11.92, luego contiene un entorno de 0 absolutamente convexo $U \subset H^\circ$, luego $H = H^{\circ\circ} \subset U^\circ$, que es un conjunto equicontinuo y absolutamente convexo.

Esto significa que, si llamamos $\Sigma$ al conjunto de todos los subconjuntos de $V^*$ que son equicontinuos y absolutamente convexos, la topología de la convergencia uniforme en los conjuntos equicontinuos es la misma que la topología de la convergencia uniforme en los conjuntos de $\Sigma$.

En segundo lugar, todo conjunto equicontinuo está formado por funciones continuas, luego, de hecho, cada $H \in \Sigma$ cumple $H \subset V'$, e igualmente $V \subset \mathcal{L}_\Sigma(V', \mathbb{K})$ y la topología inducida en $V$ desde $\mathcal{L}_\Sigma(V', \mathbb{K})$ es la misma que la inducida desde $L_\Sigma(V^*, \mathbb{K})$, es decir, la de $V$, según el teorema (los entornos básicos $V(H; B_1(0))$ son los mismos en ambos casos). Pero trabajando en $\mathcal{L}_\Sigma(V', \mathbb{K})$ podemos precisar las características de $\Sigma$, pues por el teorema de Alaoglu-Bourbaki sus elementos son relativamente compactos en $V'_\sigma$.

Para extraer consecuencias de estos hechos conviene considerar una nueva topología en las componentes de cada par dual:

**Definición 11.100** Si $(V, W)$ es un par dual, definimos la *topología de Mackey* en $V$ como la topología $\tau(V, W)$ de la convergencia uniforme en los subconjuntos absolutamente convexos $\sigma(W, V)$-compactos de $W$.

Si $V$ es un espacio vectorial localmente convexo, escribiremos $V_\tau$ y $V'_\tau$ para indicar que consideramos a $V$ o a $V'$ como espacio vectorial topológico con la topología de Mackey del par $(V, V')$. Como los puntos son convexos compactos, $\sigma(V, W) \subset \tau(V, W)$.

Ahora probamos un hecho crucial:

**Teorema 11.101** *Si $(V, W)$ es un par dual, el dual topológico de $V$ respecto de $\tau(V, W)$ es $W$.*

Demostración: Según el teorema 11.43, la topología $\tau(V, W)$ está generada por las seminormas $p_C(v) = \sup\limits_{w \in C} |\langle v, w\rangle|$, donde $C$ recorre los subconjuntos absolutamente convexos $\sigma(W, V)$-compactos de $W$.

Observemos que la restricción de $\sigma(V^*, V)$ a $W$ es $\sigma(W, V)$, por lo que $C$ también es $\sigma(V^*, V)$-compacto, luego $\sigma(V^*, V)$-cerrado en $V^*$.

Tenemos que una base de entornos $\mathcal{U}$ de 0 en $V$ respecto de $\tau(V, W)$ está formada por los conjuntos $\{v \in V \mid p_C(v) \leq 1\} = C^\circ$, y por el teorema del bipolar, $C^{\circ\circ} = C$, donde el segundo polar se calcula respecto de $(V, V^*)$, es decir, que en principio $C^{\circ\circ} \subset V^*$, pero como $C$ ya es absolutamente convexo y cerrado en $V^*$, la clausura de su envoltura absolutamente convexa es él mismo. El teorema 11.93 nos da entonces que $V' = \bigcup\limits_C C = W$. ■

Con esto ya podemos extraer consecuencias de la discusión posterior al teorema 11.99:

**Teorema 11.102 (Mackey-Arens)** *Si $(V, W)$ es un par dual y $\mathcal{T}$ es una topología en $V$, las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

1. *$(V, \mathcal{T})$ es un espacio vectorial localmente convexo tal que $V' = W$.*
2. *Existe una familia $\Sigma$ de subconjuntos de $W$ absolutamente convexos y $\sigma(W, V)$-relativamente compactos tal que $\bigcup \Sigma = W$ y, a través de la identificación $V \subset \mathcal{L}(W, \mathbb{K})$, se cumple que $\mathcal{T}$ es la topología de la convergencia uniforme en los conjuntos de $\Sigma$.*
3. *$\sigma(V, W) \subset \mathcal{T} \subset \tau(V, W)$.*

Demostración: 1) $\Rightarrow$ 2) Tras el teorema 11.99 hemos probado que, en las condiciones de 1), si llamamos $\Sigma$ a la familia de los subconjuntos de $W = V'$ equicontinuos y absolutamente convexos, se cumple que $\bigcup \Sigma = W$ (por 11.93), que todos ellos son relativamente compactos en $V'_\sigma$, es decir, respecto de la topología $\sigma(W, V)$, y que $\mathcal{T}$ es la topología heredada de $\mathcal{L}_\Sigma(W, \mathbb{K})$.

2) $\Rightarrow$ 3) Recordemos (véanse las observaciones tras la definición 2.50) que si $\Sigma$ es una familia de subconjuntos de $W$ y $\Sigma'$ es la familia de los subconjuntos de las uniones finitas de elementos de $\Sigma$, entonces la topología de la convergencia uniforme en los conjuntos de $\Sigma$ es la misma que la topología de la convergencia uniforme en los conjuntos de $\Sigma'$.

Así pues, si $\Sigma$ es la familia dada en 2), claramente $\Sigma'$ contiene a los conjuntos finitos, por lo que $\sigma(V,W) \subset \mathcal{T}$, y si $\Sigma_\tau$ es la familia de todos los subconjuntos convexos $\sigma(W,V)$-compactos de $W$, entonces $\Sigma \subset \Sigma'_\tau$, pues si $H \in \Sigma$ entonces $\overline{H} \in \Sigma_\tau$. Por lo tanto $\mathcal{T} \subset \tau(V,W)$.

3) $\Rightarrow$ 1) Si $\sigma(V,W) \subset \mathcal{T} \subset \tau(V,W)$, entonces $(V,\mathcal{T})$ es un espacio vectorial topológico de Hausdorff tal que $W \subset V'$ por la primera inclusión, y $V' \subset W$ por la segunda inclusión (y el teorema 11.101). ■

Así pues, en un par dual $(V,W)$, las topologías $\sigma(V,W)$ y $\tau(V,W)$ son la menor y la la mayor topología que podemos considerar en $V$ para que éste sea un espacio vectorial localmente convexo y además su dual topológico $V'$ sea precisamente $W$.

**Definición 11.103** Un espacio vectorial localmente convexo es un *espacio de Mackey* si su topología coincide con $\tau(V,V')$.

**Teorema 11.104** *Todo espacio tonelado y todo espacio bornológico (en particular todo espacio localmente convexo metrizable) es de Mackey.*

Demostración: Si $V$ es tonelado y $H \subset V'_\sigma$ es compacto, entonces está acotado y por 11.97 es equicontinuo, luego la topología de la convergencia uniforme sobre los conjuntos absolutamente convexos y compactos en $V'_\sigma$ (que es $\tau(V,V')$) está contenida en la topología de la convergencia uniforme en los subconjuntos equicontinuos de $V^*$ (que es la topología de $V$ por 11.99). La otra inclusión se da siempre.

Si $V$ es bornológico, un $\tau(V,V')$-entorno básico de 0 absorbe a los conjuntos acotados de $V$ (en principio, a los acotados para la topología $\tau(V,V')$, pero por 11.98 son los mismos que para la topología de $V$), luego son entornos de 0 para la topología de $V$. ■

**La topología fuerte** Si $(V,W)$ es un par dual, la topología de Mackey $\tau(V,W)$ es la máxima topología que podemos definir en $V$ de modo que los funcionales de $V^*$ que son continuos sean precisamente los de $W$, pero no es en modo alguno la máxima topología que podemos definir en $V$ compatible con su estructura algebraica.

**Definición 11.105** Si $(V,W)$ es un par dual, la *topología fuerte* $\beta(V,W)$ en $W$ es la topología de la convergencia uniforme en los subconjuntos acotados de $W$ (respecto de $\sigma(W,V)$ o cualquier otra topología para la que $V = W'$).

Si $V$ es un espacio vectorial topológico, usaremos la notación $V_\beta$ o $V'_\beta$ para referirnos a $V$ o $V'$ con la topología fuerte correspondiente.

Como todo conjunto $\sigma(W,V)$-compacto es $\sigma(W,V)$-acotado, tenemos que

$$\sigma(V,W) \subset \tau(V,W) \subset \beta(V,W).$$

**Teorema 11.106** *Si $V$ es un espacio vectorial localmente convexo, una base de entornos de $0$ de $V_\beta$ la forman los toneles de $V$. En particular, la topología de $V$ es la topología fuerte si y sólo si $V$ es tonelado.*

Demostración: Una base de entornos de 0 para $\beta(V, V')$ la forman los conjuntos

$$V(B; B_\epsilon(0)) = \bigcap_{f \in B} \{v \in V \mid |f(v)| \leq \epsilon\},$$

donde $\epsilon > 0$ y $B \subset V'$ es $\sigma(V', V)$-acotado, pero, como, claramente,

$$V(B; B_\epsilon(0)) = V(\epsilon^{-1}B; B_1(0))$$

y $\epsilon^{-1}B$ también está acotado, podemos considerar únicamente entornos de la forma $V(B; B_1(0)) = B^\circ$. Así pues, una base de entornos de 0 de $V_\beta$ la forman los duales de los conjuntos acotados de $V'_\sigma$. Pero el teorema 11.96 nos da que si $B \subset V'_\sigma$ es acotado, entonces $A = B^\circ$ es un tonel y, recíprocamente, si $A \subset V$ es un tonel, entonces $B = A^\circ$ es acotado en $V'_\sigma$ y, por el teorema del bipolar, $A = B^\circ$. ■

En particular, la topología de todo espacio topológico localmente convexo completamente metrizable es la topología fuerte. Por otra parte, según 11.25, si $V$ es un espacio normado, la topología en $V'$ inducida por la norma es la topología fuerte $\beta(V', V)$.

Notemos que el teorema 11.49 implica que si $V$ es bornológico, entonces $V'_\tau$ y $V'_\beta$ son espacios completos. En particular, el dual de un espacio normado es siempre un espacio de Banach, como ya se deducía de 9.61.

Si $V$ es un espacio vectorial localmente convexo, sabemos que el dual topológico de $V'_\sigma$ o $V'_\tau$ se identifica con $V$ a través de la inmersión $V \longrightarrow V'^*$. Sin embargo, esto ya no es necesariamente cierto si consideramos el dual fuerte $V'_\beta$. Todo funcional lineal $f : V' \longrightarrow \mathbb{K}$ que sea continuo respecto de $\sigma(V', V)$ lo es respecto de $\beta(V', V)$, pero el recíproco no es necesariamente cierto.

**El bidual** Cuando en un espacio vectorial localmente convexo $V$ consideramos la topología $\beta(V, V')$, el bidual $(V'_\beta)'$ no es necesariamente $V$, al contrario de lo que sucede si consideramos las otras topologías que hemos estudiado. Vamos a estudiar la situación.

**Definición 11.107** Si $V$ es un espacio vectorial localmente convexo, se llama *bidual* (topológico) de $V$ al dual topológico de $V'_\beta$, y se representa simplemente por $V'' = (V'_\beta)'$.

Al identificar $V$ con un subespacio de $(V')^*$ tenemos que

$$V = (V'_\sigma)' \subset V'' \subset V'^*.$$

**Teorema 11.108** *Si $V$ es un espacio vectorial localmente convexo, $V''$ es la unión de las $\sigma(V'^*, V')$-clausuras de los subcojuntos acotados de $V$.*

Demostración: Notemos que la topología que $\sigma(V'^*, V')$ induce en $V''$ es $\sigma(V'', V')$. El teorema 11.96 nos da que los polares $B^\circ$ respecto del par $(V, V')$ de los conjuntos si $B \subset V$ cerrados, acotados y absolutamente convexos son los toneles de $V'$, que son una base de entornos de 0 para la topología fuerte. Por otra parte, como $B \subset V$, es inmediato que $B^\circ$ es también el polar respecto de $(V'', V)$. En lo sucesivo todos los polares serán relativos a $(V'', V')$.

Si $z \in V''$, entonces $\{z\}^\circ$ es un entorno de 0 para $\beta(V', V)$, pues $z : V'_\beta \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua, luego $\{z\}$ es equicontinuo. Por consiguiente, existe $B \subset V$ cerrado, acotado, absolutamente convexo tal que $B^\circ \subset \{z\}^\circ$, luego $z \in \{z\}^{\circ\circ} \subset B^{\circ\circ}$. Como $B^{\circ\circ}$ es $\sigma(V'', V')$-cerrado y equicontinuo, pues $B^{\circ\circ\circ} = B^\circ = B^\circ$ es un entorno de 0 en $V'$ (teorema 11.92), el teorema de Alaoglu-Bourbaki nos da que $B^{\circ\circ}$ es $\sigma(V'', V')$-compacto, luego es la $\sigma(V'^*, V')$-clausura de $B$. (En principio, por el teorema del bipolar, es la $\sigma(V'', V')$-clausura de $B$, pero como es compacto, es cerrado en $V'^*$, luego también es la clausura en $V'^*$.) Así pues, $z$ está en la unión descrita en el enunciado.

Recíprocamente, si $B \subset V$ es acotado, tenemos que $B^\circ = B^\circ$ es un entorno de 0 en $V'_\beta$, luego $B^{\circ\circ}$ es equicontinuo y $\sigma(V'', V')$-cerrado, luego por Alaoglu-Bourbaki es $\sigma(V'', V')$-compacto, luego es cerrado en $V'^*$. Así, la $\sigma(V'^*, V')$ clausura de $B$ está contenida en la $\sigma(V'^*, V')$-clausura de $B^{\circ\circ}$, que es $B^{\circ\circ} \subset V''$.

■

En $V''$ podemos considerar varias topologías de interés. A menudo se llama *topología natural* en $V''$ a la topología de la convergencia uniforme en los subconjuntos equicontinuos de $V'$, porque, según el teorema 11.99, dicha topología induce en $V$ su topología original (notemos que los subconjuntos equicontinuos de $V'$ son los mismos que los de $V^*$).

Por otra parte, se llama *bidual fuerte* de $V$ al bidual $V''$ dotado de la topología fuerte $\beta((V'_\beta)', V'_\beta)$.

Un espacio vectorial localmente convexo es *semirreflexivo* si $V = V''$, es decir, si la inclusión $\phi : V \longrightarrow V''$ dada por $\phi_v(f) = f(v)$ es suprayectiva (con lo que, de hecho, es un isomorfismo de espacios vectoriales y un isomorfismo topológico si en $V''$ consideramos la topología natural).

Se dice que $V$ es *reflexivo* si $\phi : V \longrightarrow V''$ es un isomorfismo topológico cuando en $V''$ consideramos la topología fuerte. Esto equivale a que $V$ sea semirreflexivo y que su topología sea la topología fuerte $\beta(V, V')$.

En efecto, una base de entornos de 0 para $\beta(V, V')$ la forman los conjuntos $V(A; U)$, donde $U$ es un entorno de 0 en $\mathbb{K}$ y $A \subset V'$ es $\sigma(V', V)$-acotado, mientras que, supuesto que $V = V''$, una base de entornos de 0 para $\beta(V'', V')$ la forman los conjuntos del mismo tipo, pero donde $A$ es $\sigma(V', V'')$-acotado, pero $\sigma(V', V'') = \sigma(V', V)$.

Por consiguiente, el teorema 11.106 nos da que un espacio $V$ es reflexivo si y sólo si es tonelado y semirreflexivo.

En el caso de un espacio normado, el teorema 9.69 nos da que $V$ es reflexivo si y sólo si la inmersión natural $V \longrightarrow V''$ es una isometría (lo que en particular requiere que $V$ sea completo), por lo que la nueva definición de reflexividad coincide con la que ya teníamos.

**Teorema 11.109** *Si $V$ es un espacio vectorial localmente convexo, las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

1. *$V$ es semirreflexivo.*
2. *Todo funcional lineal $f : V' \longrightarrow \mathbb{K}$ continuo en $V'_\beta$ es continuo en $V'_\sigma$.*
3. *$V'_\tau$ es tonelado.*
4. *Todo subconjunto acotado de $V$ es $\sigma(V, V')$-relativamente compacto.*

Demostración: 1) $\Rightarrow$ 2) Tenemos que $f \in V'' = V = (V'_\sigma)'$.

2) $\Rightarrow$ 3) La hipótesis es que $(V'_\beta)' = (V'_\sigma)' = V$, es decir, que $\beta(V', V)$ es una topología en $V'$ respecto a la cual su dual es $V$, luego $\beta(V', V) \subset \tau(V', V)$, y la otra inclusión se da siempre. El teorema 11.106 nos da que $V'_\tau$ es tonelado.

3) $\Rightarrow$ 4) Si $A \subset V$ es acotado, entonces $A \subset A^{\circ\circ}$, y $A^\circ$ es un tonel en $V'_\sigma$, luego también en $V'_\tau$, luego es un entorno de 0 en $V'_\tau$, luego $A^{\circ\circ}$ (y $A$) es equicontinuo en $(V'_\tau)'$, por 11.92. El teorema de Alaoglu-Bourbaki nos da entonces que $A$ es $\sigma(V, V')$-relativamente compacto.

4) $\Rightarrow$ 1) Si $z \in V''$, por 11.108 existe $A \subset V$ acotado tal que $z \in \overline{A}$, donde la clausura se toma respecto de $\sigma(V'^*, V')$. Ahora bien, la clausura de $A$ respecto de $\sigma(V, V')$ es compacta, luego cambiando $A$ por dicha clausura podemos suponer que $A$ es $\sigma(V, V')$-compacto, pero $\sigma(V, V')$ es la topología inducida por $\sigma(V'^*, V')$ en $V$, luego $A$ es también $\sigma(V'^*, V')$-compacto, luego cerrado, luego $z \in A \subset V$ y $V'' = V$. ■

Así, si $V$ no es semirreflexivo, tenemos que $V'_\tau \neq V'_\beta$.

**Teorema 11.110** *Si $V$ es reflexivo, entonces $V'_\beta$ es reflexivo.*

Demostración: Si $V$ es reflexivo, el teorema anterior nos da que $V'_\beta = V'_\tau$ es tonelado. Si $A \subset V'_\beta$ está acotado, 11.96 nos da que $A^\circ$ es un tonel en $(V'_\beta)'_\sigma$, luego en $(V'_\beta)'_\beta = V$, que es tonelado, luego $A^\circ$ es un entorno de 0 en $V$, luego $A^{\circ\circ}$ es equicontinuo (al igual que $A$) en $V'_\sigma$, luego es $\sigma(V', V)$-relativamente compacto, luego $V'_\beta$ es semirreflexivo por el apartado 4) del teorema anterior (notemos que $(V'_\beta)' = (V'_\tau)' = V$), luego es reflexivo. ■

**Nota** No estamos en condiciones de poner (justificadamente) ejemplos de espacios localmente convexos reflexivos que no sean espacios de Banach. Los más destacables son el espacio $C^\infty(V)$ de las funciones infinitamente derivables en una variedad diferencial, o el espacio $\mathcal{H}(V)$ de funciones holomorfas en una variedad diferencial compleja, junto con sus duales fuertes respectivos. ■ 139

# Capítulo XII

# Espacios ordenados

Hemos visto que una métrica en un conjunto define una noción natural de "puntos de alrededor de un punto dado", lo que se traduce en que toda métrica induce de forma natural una topología. Hay otra forma igualmente natural de llegar a un concepto intuitivo de "puntos de alrededor", y es a partir de una relación de orden total.

Concretamente, si $X$ es un conjunto totalmente ordenado y $u \in X$, es natural considerar que todos los intervalos $]a,b[$ tales que $a < u < b$ contienen todos los puntos de $X$ que están "alrededor" de $u$. En realidad esto no es correcto del todo, porque si $u$ fuera, por ejemplo, el máximo de $X$, no habría ningún $b$ en las condiciones indicadas, y entonces los intervalos de la forma $]a,u] = ]a,+\infty[$ serían los entornos "naturales" de $u$. La situación es análoga si $u$ es el mínimo de $X$. El concepto de "subbase" nos permite introducir la topología de orden sin necesidad de hacer tales distinciones:

**Definición 12.1** Si $X$ es un conjunto totalmente ordenado, la *topología de orden* en $X$ es la topología que tiene por subbase a los intervalos de la forma

$$]-\infty,b[ \qquad \text{y} \qquad ]a,+\infty[\,,$$

para $a$, $b \in X$.

Es obvio que una intersección finita de tales intervalos es un intervalo del mismo tipo (si es que todos ellos son del mismo tipo) o bien $\varnothing$, o bien un intervalo abierto $]a,b[$, luego una base de la topología de orden la forman los intervalos abiertos

$$]-\infty,b[\,, \qquad ]a,+\infty[\,, \qquad ]a,b[\,.$$

Si $X$ no tiene máximo, todo intervalo de la forma $]a,+\infty[$ es unión de intervalos $]u,v[$, pues, dado $x \in ]a,+\infty[$, existe un $v > x$, luego $x \in ]a,v[ \subset ]a,+\infty[$. Similarmente ocurre con los intervalos $]-\infty,b[$ si $X$ no tiene mínimo. Por lo tanto, si $X$ no tiene máximo ni mínimo, una base de $X$ la forman por sí solos los intervalos abiertos $]a,b[$. En cambio, si $X$ tiene máximo $M$, a éstos hay que añadir los intervalos $]a,M] = ]a,+\infty[$, y si $X$ tiene mínimo $m$, para tener una base hay que añadir también los intervalos $[m,b[ = ]-\infty,b[$.

En lo sucesivo consideraremos a todo conjunto totalmente ordenado como espacio topológico con la topología de orden. Cuando hablemos de un *espacio (topológico) ordenado* nos referiremos a un espacio topológico cuya topología es la inducida por una relación de orden total prefijada.

En particular, la topología de orden en $\mathbb{R}$ recibe el nombre de *topología usual.*

Diremos que $C \subset X$ es *convexo* si cuando $x \leq z \leq y$ con $x$, $y \in C$, se cumple también que $z \in C$.

Es claro que los intervalos son convexos y el teorema [TC 2.41] afirma que $X$ es completo si y sólo si sus únicos subconjuntos convexos son los intervalos. Cuando trabajamos con espacios ordenados arbitrarios, los conjuntos convexos representan a veces el papel que en un espacio completo representarían los intervalos.

Es evidente que la intersección de subconjuntos convexos es convexa, por lo que si $A \subset X$, podemos definir su *envoltura convexa* $\operatorname{co}(A)$ como la intersección de todos los subconjuntos convexos de $X$ que contienen a $A$.

**Teorema 12.2** *Sea $X$ un espacio ordenado.*

1. *Si $A \subset X$, entonces $\operatorname{co}(A)$ está formada por los puntos $x \in X$ tales que existen puntos $a$, $b \in A$ que cumplen $a \leq x \leq b$.*
2. *La envoltura convexa de un abierto es abierta.*
3. *Si $A$, $B \subset X$ son conjuntos convexos disjuntos, entonces todo elemento de $A$ es menor que todo elemento de $B$ o viceversa.*
4. *Si $\{C_i\}_{i\in I}$ es una familia de subconjuntos convexos de $X$ y existe un punto $x \in \bigcap\limits_{i\in I} C_i$, entonces la unión $\bigcup\limits_{i\in I} X_i$ es convexa.*
5. *Todo abierto de $X$ se descompone en unión de abiertos convexos disjuntos dos a dos.*

Demostración: 1) Sea $C$ el conjunto descrito en el enunciado. Claramente $C \subset \operatorname{co}(A)$ y $A \subset C$. Si probamos que $C$ es convexo, tendremos también que $\operatorname{co}(A) \subset C$.

Ahora bien, si $x$, $y \in C$ y $x \leq z \leq y$, existen $a$, $b$, $a'$, $b' \in A$ tales que $a \leq x \leq b$, $a' \leq y \leq b'$, con lo que $a \leq z \leq b'$, luego $z \in C$.

2) Sea $U \subset X$ un abierto no vacío y sea $x \in \operatorname{co}(U)$. Si $x \in U$, entonces $x \in U \subset \operatorname{co}(U)$, luego la envoltura convexa es un entorno de $x$. Supongamos, pues, que $x \notin U$. Existen puntos $u$, $v \in U$ tales que $u < x < v$, luego se cumple que $x \in \,]u, v[\, \subset \operatorname{co}(U)$.

3) Tomemos $a \in A$, $b \in B$ y supongamos que $a < b$. Si $x \in A$ fuera $b < x$, entonces $a < b < x$, luego $b \in A$, contradicción. Así pues, todos los elementos de $A$ son menores que $b$. Si un elemento $x \in A$ fuera mayor que un elemento $y \in B$, tendríamos $y < x < b$, luego $x \in B$, contradicción.

4) Si $u, v \in \bigcup_{i \in I} X_i$ y $u \leq z \leq v$, pongamos que $u \in X_{i_1}$, $v \in X_{i_2}$. Si $z \leq x$, entonces $u \leq z \leq x$, luego $z \in X_{i_1}$, mientras que si $x \leq z$, entonces $x \leq z \leq v$, luego $z \in X_{i_2}$.

5) Consideramos en $U$ la relación dada por $x \sim y$ si y sólo si existe $C \subset U$ convexo tal que $x, y \in C$. Es reflexiva, pues $x \in \{x\} \subset U$, claramente simétrica, y es transitiva porque si $x, y \in C_1 \subset U$, $y, z \in C_2 \subset U$, entonces $C_1 \cup C_2$ es convexo por 3) y prueba que $x \sim z$.

Las clases de equivalencia son convexas, pues si $C$ es una de ellas y $x \leq z \leq y$ con $x, y \in C$, entonces existe un conjunto convexo $C' \subset U$ tal que $x, y \in C'$, luego $z \in C'$, luego $z \sim x$, luego $z \in C$.

Claramente, la clase de equivalencia de un $x \in U$ es el mayor subconjunto convexo de $U$ que contiene a $x$. Las clases de equivalencia son abiertas, pues si $x \in C$, como los intervalos abiertos son una base de $X$, existe un intervalo abierto $I$ tal que $x \in I \subset U$, luego $x \in I \subset C$, luego $C$ es entorno de todos sus puntos. ■ 7

---

**La topología relativa** Si $X$ es un espacio ordenado e $Y \subset X$, la relación de orden en $X$ se restringe a una relación de orden total en $Y$, pero la topología de orden en $Y$ no coincide necesariamente con la topología relativa.

Por ejemplo, sea $X = \mathbb{R}$ con la topología usual, y sea

$$Y = \{-1\} \cup \{1/n \mid n \in \mathbb{N} \land n \neq 0\}.$$

Si consideramos a $Y$ con la topología relativa, vemos que $\{-1\} = Y \cap ]-2, 0[$ es abierto. Pero no es abierto para la topología de orden de $Y$, pues, siendo $-1$ el mínimo de $Y$, no pertenece a ningún intervalo de la forma $]a, b[$ o $]a, +\infty[$, luego tendría que existir un $b \in Y$ tal que $-1 \in ]-\infty, b[ \subset \{-1\}$, pero no existe tal $b$, pues ciertamente $b = -1$ no cumple esto y un intervalo $]-\infty, 1/n[$ no está contenido en $\{-1\}$.

En vista de esto, cuando consideremos subconjuntos de conjuntos ordenados los consideraremos como espacios topológicos con la topología relativa, y no con la topología de orden.

De todos modos, se cumple lo siguiente:

**Teorema 12.3** *Si $X$ es un espacio ordenado y $Y \subset X$, entonces todo abierto de $Y$ para la topología de orden es abierto para la topología relativa respecto de la topología de orden de $X$. Si se cumple una de las condiciones siguientes:*

1. *$Y$ es convexo (en particular, un intervalo),*

2. *Si $u < v$ son dos puntos de $x$, existe un $y \in Y$ tal que $u < y < v$,*

*entonces ambas topologías coinciden.*

Demostración: Es claro que si $a \in Y$ entonces $]a, +\infty[^Y = ]a, \infty[^X \cap Y$, y lo mismo vale para intervalos $]-\infty, b[$, con $b \in Y$, luego todo abierto subbásico para la topología de orden de $Y$ es abierto para la topología relativa.

Respecto a la segunda parte, si $Y$ es convexo, cada abierto subbásico relativo $Y \cap \,]a, +\infty[$ es abierto para la topología de orden, pues, o bien es igual a $Y$, o bien existe un $y \in Y$ tal que $y \leq a$ y en este caso, si $x \in Y \cap \,]a, +\infty[$, tenemos que $y \leq a < x$, luego $a \in Y$ por convexidad, y $Y \cap ]a, +\infty[ \, = \,]a, +\infty[^Y$. Lo mismo vale para los intervalos $]-\infty, b[$, luego los abiertos subbásicos de la topología relativa son abiertos para la topología de orden, y esto implica que lo mismo vale para todos los abiertos.

Por otra parte, si se cumple la segunda condición, entonces $Y \cap \,]a, +\infty[$ es igualmente abierto para la topología de orden, pues si $u \in Y \cap ]a, +\infty[$, entonces $a < u$, luego existe un $y \in Y$ tal que $a < y < u$, luego

$$u \in \,]y, +\infty[^Y \subset Y \cap \,]a, +\infty[\,.$$

Así pues, de nuevo $Y \cap \,]a, +\infty[$ es abierto para la topología de orden y lo mismo vale para los intervalos $]-\infty, b[$, con lo que concluimos igualmente que la topología relativa es la topología del orden. ■

En particular, la topología usual $\mathbb{R}$ es la topología relativa inducida por la topología de orden en $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

En general, consideraremos como “topología usual” en los subconjuntos de $\mathbb{R}$ a la topología relativa (que es la inducida por la métrica usual), y ahora sabemos que coincide con la topología de orden en los conjuntos convexos y también en los conjuntos densos como $\mathbb{Q}$. 11

---

**Cerrados** Conviene observar el hecho siguiente:

**Teorema 12.4** *Si $X$ es un espacio ordenado, entonces la relación de orden, es decir, el conjunto $C = \{(x, y) \in X^2 \mid x \leq y\}$ es cerrado en $X^2$.*

Demostración: Sea $(x, y) \in X^2 \setminus C$, de modo que $y < x$. Distinguimos dos casos: si existe $y < u < x$, consideramos el abierto $U = \,]-\infty, u[\, \times \,]u, +\infty[$, que cumple $(y, x) \in U \subset X^2 \setminus C$. Si $]y, x[\, = \varnothing$, basta tomar $U = \,]-\infty, x[\, \times \,]y, +\infty[$. En ambos casos concluimos que $X^2 \setminus C$ es entorno de todos sus puntos, luego es abierto. ■

A su vez, la relación de orden estricto $A = \{(x, y) \in X^2 \mid x < y\}$ es abierta (pues —con un cambio de nombres en las variables— es el complementario de la relación de orden no estricto).

Los intervalos abiertos $]a, b[$ no forman una base de los espacios ordenados con máximo o mínimo elemento, lo que en principio obliga a menudo a contemplar aparte la posibilidad de que un punto considerado pueda ser el máximo o el mínimo del espacio. El teorema siguiente permite a veces evitar tales distinciones:

**Teorema 12.5** *Si $X$ es un espacio ordenado, existe otro espacio ordenado $X'$ sin máximo ni mínimo tal que $X \subset X'$ y $X$ es un intervalo abierto y cerrado en $X'$.*

Demostración: Si $X$ tiene máximo elemento $M$, podemos prolongar $X$ con una sucesión

$$M < x_0 < x_1 < x_2 < \cdots,$$

con lo que obtenemos un espacio ordenado $X'$ sin máximo en el que, claramente, $X = ]-\infty, M] = ]-\infty, x_0[$. Si $X$ tiene mínimo, razonamos análogamente. ■

14

---

**Clausuras y subconjuntos densos** En [TC 2.37] hemos definido un conjunto ordenado denso en sí mismo (o precontinuo) como un conjunto ordenado $X$ con la propiedad de que si $x < y$ son puntos de $X$, existe un $z \in X$ tal que $x < z < y$. Posteriormente, en [TC 2.42] hemos definido un subconjunto denso de un precontinuo $X$ como un conjunto $D \subset X$ tal que cuando $x < y$ son puntos de $X$, existe un $d \in D$ tal que $x < d < y$.

**Teorema 12.6** *Si $X$ es un precontinuo, entonces un subconjunto $D \subset X$ es denso respecto a la relación de orden si y sólo si lo es respecto de la topología de orden.*

Demostración: Si $D \subset X$ es denso para la topología y $x < y$ son dos puntos cualesquiera de $X$, entonces, al ser $X$ un precompacto, tenemos que $]x, y[$ es un abierto no vacío, luego contiene un punto de $d$, y esto implica que $D$ es denso respecto del orden.

Recíprocamente, si $D$ es denso respecto del orden y $U \subset X$ es un abierto no vacío, entonces $U$ contiene un intervalo abierto no vacío, que (usando que $X$ es un precontinuo), podemos tomar de la forma $]x, y[$ (en principio podría ser también de la forma $[x, y[$, donde $x$ es el mínimo de $X$ o de la forma $]x, y]$, donde $y$ es el máximo de $X$). Por la densidad de $D$ respecto del orden, el intervalo $]x, y]$ contiene un elemento de $D$, luego $D$ corta a $U$ y es denso respecto de la topología. ■

Ahora bien, en el teorema anterior es fundamental la hipótesis de que $X$ es denso en sí mismo. Por ejemplo, la hipótesis 2) en el teorema 12.3 no se cumple necesariamente por el hecho de que el conjunto $Y$ sea denso en $X$ en sentido topológico, sino que es necesario que sea denso respecto del orden. En tal caso es inmediato que $X$ es denso en sí mismo y, por consiguiente, que $Y$ también es denso respecto del orden, pero si $X$ no es denso en sí mismo e $Y$ únicamente es denso en sentido topológico, no es necesariamente cierto que la topología relativa en $Y$ coincida con la del orden, como concluye el teorema. En el apartado siguiente mostramos un contraejemplo.

Ahora probamos un resultado sobre convexidad en cuya demostración resulta natural considerar clausuras:

**Teorema 12.7** *En un espacio ordenado, la envoltura convexa de un cerrado es cerrada.*

Demostración: Sea $X$ un espacio ordenado y $A \subset X$ un cerrado. Si $x \in \overline{\mathrm{co}(A)} \setminus \mathrm{co}(A)$, entonces $x$ es menor que todos los elementos de $\mathrm{co}(A)$ o mayor que todos ellos. Supongamos el primer caso, pues el segundo se trata análogamente. Todo intervalo $[x, z[$ corta a $\mathrm{co}(A)$, luego existe un $y \in \mathrm{co}(A)$ tal que $x < y < z$, y a su vez existen $a, b \in A$ tales que $a \leq y \leq b$, luego $x < a \leq y < z$ (porque $x$ es menor que todos los elementos de $\mathrm{co}(A)$). Esto prueba que $x \in \overline{A} = A$, contradicción. ■ 17

---

**Continuidad** No hay ninguna caracterización particularmente provechosa de la continuidad de una aplicación entre espacios ordenados, más allá del hecho de que, como en general basta con que las antiimágenes de abiertos subásicos sean abiertas, para que una aplicación $f : X \longrightarrow Y$, donde $Y$ es un espacio ordenado, sea continua, basta con que las antiimágenes de los intervalos $]-\infty, b[$ y $]a, +\infty[$ sean abiertas.

Por otra parte, es evidente que las semejanzas entre espacios ordenados son homeomorfismos, al igual que las biyecciones decrecientes, pues unas y otras transforman intervalos abiertos en intervalos abiertos.

No obstante, una aplicación continua entre espacios ordenados (incluso un homeomorfismo) no necesita ser creciente o decreciente. Por ejemplo, cualquier biyección $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ es un homeomorfismo, y el lector también podrá definir sin dificultad homeomorfismos no monótonos de $[0, 1] \cup [2, 3]$ en sí mismo e incluso, afinando un poco más, de $\mathbb{Q}$ en sí mismo.

**Teorema 12.8** *Si $X$ es un espacio ordenado, las funciones $f, g : X \times X \longrightarrow X$ dadas por*

$$f(x, y) = \text{máx}\{x, y\}, \qquad g(x, y) = \text{mín}\{x, y\}$$

*son continuas.*

Demostración: Basta observar que $X \times X = C_1 \cup C_2$, donde

$$C_1 = \{(x, y) \in X^2 \mid x \leq y\}, \qquad C_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq y\},$$

y ambos conjuntos son cerrados, por el teorema 12.4. Pero $f|_{C_1} = p_2|_{C_1}$ y $f|_{C_2} = p_1|_{C_2}$, donde $p_1$ y $p_2$ son las proyecciones, que son continuas, luego las dos restricciones de $f$ son continuas y por la propiedad 10 de la página 26, $f$ es continua. El razonamiento para $g$ es análogo. ■

Como consecuencia, si $f, g : X \longrightarrow Y$ son dos funciones continuas e $Y$ es un espacio ordenado, también son continuas las funciones $f \vee g = \text{máx}\{f, g\}$ y $f \wedge g = \text{mín}\{f, g\}$, pues son las composiciones de la función $(f, g) : X \longrightarrow Y \times Y$ con las funciones del teorema anterior.

Terminamos este apartado discutiendo un ejemplo que tiene cierto interés. Para ello necesitamos introducir el orden lexicográfico en un producto de conjuntos ordenados:

**Definición 12.9** Si $X$ e $Y$ son conjuntos parcialmente ordenados, definimos el *orden lexicográfico* en $X \times Y$ como el orden dado por[1]

$$(x,y) \leq (x',y') \leftrightarrow x < x' \text{o bien } (x = x' \text{ y } y \leq y').$$

Es fácil ver que se trata de un orden parcial en $X \times Y$, y que es un orden total si tanto $X$ como $Y$ están totalmente ordenados.

Si $X$ e $Y$ son espacios ordenados, la topología inducida por el orden lexicográfico en $X \times Y$ no guarda relación alguna con la topología producto, así que es importante precisar cuál estamos considerando. Además, el orden lexicográfico no es conmutativo, en el sentido de que, en general, $X \times Y$ no es homeomorfo[2] a $Y \times X$.

Por ejemplo, es fácil ver que la aplicación $f : \{0,1\} \times \,]0,1[\, \longrightarrow \,]0,1[\, \cup \,]1,2[$ dada por $f(i,x) = i + x$ es una semejanza. En particular, ambos conjuntos son densos en sí mismos. Por el contrario, $]0,1[\, \times \{0,1\}$ no es denso en sí mismo, ya que no hay ningún elemento situado entre $(\alpha,0) < (\alpha,1)$. Veamos un ejemplo más sutil:

**Ejemplo** Consideramos $X = \mathbb{R} \times \{0,1\}$ con el orden lexicográfico (que, al igual que el ejemplo anterior, no es denso en sí mismo) y sea $Y = \mathbb{R} \times \{1\}$.

Se cumple que $Y$ es denso en $X$ en sentido topológico.

En efecto, si $U = \,](\alpha,i),(\beta,j)[$ es un abierto básico no vacío en $X$, tiene que ser $\alpha < \beta$, o en caso contrario $U = \varnothing$, y entonces podemos tomar un número real $\alpha < \gamma < \beta$ y se cumple que $(\gamma,1) \in U \cap Y$.

Sin embargo, $Y$ no es denso en $X$ respecto del orden, precisamente porque $X$ no es denso en sí mismo. Vamos a ver que esto se traduce en que no se cumple la conclusión del teorema 12.3, y la topología relativa $\mathcal{T}_r$ de $Y$ es distinta de la topología de orden $\mathcal{T}_o$.

Consideremos la biyección $f : \mathbb{R} \longrightarrow Y$ dada por $f(\alpha) = (\alpha,1)$. A través de ella podemos definir dos topologías en $\mathbb{R}$,

$$\mathcal{T}'_r = \{f^{-1}[U] \mid U \in \mathcal{T}_r\}, \qquad \mathcal{T}'_o = \{f^{-1}[U] \mid U \in \mathcal{T}_o\}.$$

Así, $f : (\mathbb{R}, \mathcal{T}'_r) \longrightarrow (Y, \mathcal{T}_r)$ y $f : (\mathbb{R}, \mathcal{T}'_o) \longrightarrow (Y, \mathcal{T}_o)$ son homeomorfismos, y basta ver que $(\mathbb{R}, \mathcal{T}'_r)$ y $(\mathbb{R}, \mathcal{T}'_o)$ no son homeomorfos entre sí.

Ahora bien, de la definición del orden lexicográfico se sigue inmediatamente que $f$ es una semejanza de conjuntos totalmente ordenados, luego $\mathcal{T}'_o$ es simplemente la topología usual de $\mathbb{R}$. Vamos a identificar la topología $\mathcal{T}'_r$.

[1]Lo definimos como es habitual en topología, es decir, de modo que las componentes de los pares se comparan de izquierda a derecha, exactamente igual que como se ordenan las palabras en los diccionarios, pero en teoría de conjuntos a veces es necesario considerar el caso opuesto, por ejemplo para definir (o caracterizar) el producto de ordinales.

[2]Alternativamente, el orden lexicográfico definido como lo hemos hecho puede dar lugar a un espacio no homeomorfo al que se obtiene si comparamos los pares de derecha a izquierda.

Una subbase de $X$ está formada por los intervalos $]-\infty,(\beta,j)[$ y $](\alpha,i),+\infty[$, luego una subbase de $\mathcal{T}_r$ está formada por los abiertos

$$]-\infty,(\beta,j)[\,\cap Y, \qquad ](\alpha,i),+\infty[\,\cap Y,$$

luego una subbase de $\mathcal{T}_r'$ está formada por las antiimágenes por $f$ de estos abiertos subbásicos. Vamos a calcularlas. Claramente:

$$f(\gamma)=(\gamma,1)\in\,]-\infty,(\beta,j)[\ \text{ si y sólo si } (\gamma,1)<(\beta,j) \text{ si y sólo si } \gamma<\beta,$$

luego $f^{-1}\big[]-\infty,(\beta,j)[\big]=\,]-\infty,\beta[$. Sin embargo,

$$f(\gamma)=(\gamma,1)\in\,](\alpha,i),+\infty[\ \text{ si y sólo si } (\alpha,i)<(\gamma,1),$$

lo cual sucede si y sólo si $\alpha<\gamma$ cuando $i=1$ o si y sólo si $\alpha\leq\gamma$ cuando $i=0$. Por lo tanto

$$f^{-1}\big[](\alpha,1),+\infty[\big]=\,]\alpha,+\infty[\,,\quad f^{-1}\big[](\alpha,0),+\infty[\big]=[\alpha,+\infty[\,.$$

De aquí se sigue que toda intersección finita (no vacía) de abiertos subbásicos es de una de las formas

$$]-\infty,\beta[\,,\qquad ]\alpha,+\infty[\,,\qquad [\alpha,+\infty[\,,\qquad ]\alpha,\beta[\,,\qquad [\alpha,\beta[\,.$$

Por lo tanto, estos intervalos son una base de $\mathcal{T}_r'$. Ahora bien, es fácil ver que cualquier intervalo de cualquiera de las cuatro primeras formas puede expresarse como unión de intervalos del quinto tipo. Por ejemplo,

$$]\alpha,\beta[\,=\bigcup_{\alpha<\alpha'<\beta}[\alpha',\beta[\,,$$

luego en realidad los intervalos de la forma $[\alpha,\beta[$ son por sí solos una base de la topología $\mathcal{T}_r'$.

En conclusión, vemos que $(\mathbb{R},\mathcal{T}_r')$ no es sino la recta de Sorgenfrey $S$, que ya hemos discutido brevemente en la introducción y que estudiamos con detalle en el ejemplo A.25. Allí se prueba, por ejemplo, que $S$ no tiene una base numerable, por lo que $S$ no es homeomorfa a $\mathbb{R}$. ■ 29

---

**Convergencia de sucesiones** La convergencia de sucesiones monótonas en un espacio ordenado tiene una caracterización muy simple en términos de la estructura de orden:

Una sucesión $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ en un conjunto totalmente ordenado $X$ es *monótona creciente* (resp. *decreciente*) si cuando $n\leq m$, se cumple $x_n\leq x_m$ $(x_m\leq x_n)$. Si cambiamos todas las desigualdades por desigualdades estrictas tenemos la definición de sucesión *estrictamente monótona.*

**Teorema 12.10** *Una sucesión $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ monótona creciente (resp. decreciente) en un espacio ordenado $X$ es convergente si y sólo si el conjunto $\{x_n\mid n\in\mathbb{N}\}$ tiene supremo (resp. ínfimo) y en tal caso el límite es dicho supremo (resp. ínfimo).*

Demostración: Probamos el teorema para el caso creciente, pues el otro caso es totalmente análogo. Supongamos que $l$ es el supremo de la sucesión, con lo que en particular, $x_n \leq l$ para todo índice $n$. Si se cumple $x_n = l$ para todo $n$, es obvio que la sucesión converge a $l$. En caso contrario $l$ no es el mínimo de $X$, luego un entorno básico de $l$ es de la forma $]u, v[$, donde $v$ puede ser un elemento de $X$ mayor que $l$ o bien $+\infty$ y, en cualquier caso, $u < l$. Por definición de supremo, existe un $n_0$ tal que $l < x_{n_0} \leq l$, y por la monotonía $l < x_0 \leq x_n \leq l$ para todo $n \geq n_0$, luego $x_n \in \,]u, v[$, lo que prueba la convergencia.

Recíprocamente, si la sucesión converge a $l$, tiene que ser $x_n \leq l$ para todo $n$, pues si hubiera un $n_0$ tal que $l < x_{n_0}$, entonces el entorno $]-\infty, x_{n_0}[$ de $l$ dejaría fuera a todos los términos de la sucesión a partir de $x_{n_0}$, en contra de la definición de convergencia. Por lo tanto, $l$ es una cota superior de $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Si hubiera otra cota inferior $c < l$, entonces la sucesión estaría fuera del entorno $]c, +\infty[$ de $l$, de nuevo en contra de la definición de convergencia. Por lo tanto $l$ es el supremo de la sucesión. ■

En particular, en un espacio ordenado completo, una sucesión monótona creciente converge si y sólo si está acotada superiormente, y una sucesión monótona decreciente converge si y sólo si está acotada inferiormente. A su vez, en un conjunto ordenado completo con máximo y mínimo, todas las sucesiones monótonas son convergentes.

El teorema siguiente permite reducir algunas cuestiones sobre convergencia al caso de sucesiones monótonas:

**Teorema 12.11** *Toda sucesión en un espacio ordenado contiene una subsucesión monótona.*

Demostración: Sea $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ una sucesión en un espacio ordenado. Sea $A$ el conjunto de las imágenes de la sucesión. Si $A$ es finito es obvio que $A$ tiene una subsucesión constante, luego monótona. Supongamos que $A$ es infinito.

Si todo subconjunto no vacío de $A$ tiene mínimo podemos tomar $x_0$ igual al mínimo de $A$, luego $x_1$ igual al mínimo de $A \setminus \{x_0\}$, luego $x_2$ igual al mínimo de $A \setminus \{x_0, x_1\}$, y así obtenemos puntos $x_0 < x_1 < x_2 < \cdots$, es decir, obtenemos un subconjunto de $A$ sin máximo.

Así pues, o bien existe un subconjunto de $A$ sin mínimo o bien existe un subconjunto de $A$ sin máximo. Los dos casos se tratan igual. Supongamos que hay un subconjunto de $A$ sin mínimo. Llamémoslo $B$.

Sea $a_{n_0}$ un elemento cualquiera de $B$. Como $B$ no tiene mínimo contiene infinitos términos de la sucesión bajo $a_{n_0}$, pero sólo un número finito de ellos tienen índice anterior a $n_0$, luego existe un cierto $a_{n_1}$ en $B$ de manera que $a_{n_1} < a_{n_0}$ y $n_0 < n_1$. Podemos repetir recurrentemente este proceso y obtener una subsucesión

$$a_{n_0} > a_{n_1} > a_{n_2} > a_{n_3} > a_{n_4} > a_{n_5} > \cdots$$

monótona decreciente. ■ 301

**Conexión** Existe una caracterización muy simple de los espacios ordenados conexos:

**Teorema 12.12** *Un espacio ordenado es conexo si y sólo si es un continuo, es decir, si y sólo si es denso en sí mismo y completo.*

DEMOSTRACIÓN: Es fácil ver que las condiciones son necesarias, pues si $X$ es un espacio ordenado que no es denso en sí mismo, eso significa que existen $a < b$ en $X$ tales que no existe ningún $x \in X$ que cumpla $a < x < b$, en cuyo caso $X = ]-\infty, b[\, \cup\, ]a, +\infty[$ es una descomposición de $X$ en abiertos disjuntos (convexos) no vacíos que prueba $X$ que es disconexo.

Similarmente, si $X$ no es completo, es que existe un subconjunto $A \subset X$ no vacío y acotado superiormente, pero sin supremo. Consideremos entonces los conjuntos $U = \{x \in X \mid \text{existe } a \in A\, x \leq a\}$ y $V = X \setminus U$. Claramente no son vacíos, (uno contiene a $A$ y el otro a las cotas superiores de $A$). Se cumple que $U$ es abierto, pues si $x \in U$, existe $a \in A$ tal que $x \leq a$, pero $a$ no puede ser el máximo de $A$, luego existe $a' \in A$ tal que $a < a'$, luego $x \in ]-\infty, a'[\, \subset U$. Pero $V$ también es abierto, pues si $x \in V$, como no puede ser la menor cota superior de $A$, existe $v < x$ tal que $v$ es cota superior de $A$, luego $x \in ]v, +\infty[\, \subset V$. Esto prueba que $X$ es disconexo. Notemos además que $U$ y $V$ son convexos.

Recíprocamente, supongamos que $X$ es denso en sí mismo y completo y vamos a probar que es conexo. Supongamos que $X = U \cup V$ es una descomposición de $X$ en abiertos disjuntos no vacíos. Pongamos que $u \in U$, $v \in V$ y, sin pérdida de generalidad, supongamos que $u < v$.

Sea $u_0 = \sup\{x \in U \mid x < v\}$. El supremo existe porque el conjunto no es vacío (contiene a $u$) y está acotado por $v$. Se cumple que $u_0 \in \overline{U}$, pues, si $u < u_0$, entonces no es el mínimo de $X$ y todo entorno de $u_0$ contiene un intervalo de la forma $]a, b[$ (tal vez con $b = +\infty$) con $a < u_0$, luego existe un $x \in U$ tal que $a \leq x \leq u_0$, luego $]a, b[\, \cap U \neq \varnothing$. Pero $U$ es cerrado, luego $u_0 \in U$.

Pero, por otra parte, se cumple que $]u_0, v[\, \subset V$, y análogamente concluimos que $u_0 \in \overline{V} = V$, con lo que $u_0 \in U \cap V$, contradicción. ■

Más aún:

**Teorema 12.13** *Si $X$ es un espacio ordenado conexo, sus subespacios conexos son los intervalos.*

DEMOSTRACIÓN: Por el teorema anterior tenemos que $X$ es completo y denso en sí mismo, lo cual vale igualmente para todos sus intervalos, luego son conexos (con la topología de orden, que coincide con la relativa, por 12.3).

Recíprocamente, si $Y \subset X$ no es un intervalo, por el teorema [TC 2.41] sabemos que existen $a < c < b$ en $X$ tales que $a, b \in Y$, pero $c \notin Y$, Entonces $U = ]-\infty, c[\, \cap Y$, $V = ]c, +\infty[\, \cap Y$ son abiertos disjuntos no vacíos en $Y$ tales que $Y = U \cup V$, luego $Y$ no es conexo. ■

En la prueba de 12.12 hemos demostrado algo ligeramente más fuerte de lo requerido y conviene destacarlo:

**Teorema 12.14** *Si $X$ es un espacio ordenado disconexo, existen abiertos cerrados convexos no vacíos $U$ y $V$ tales que $X = U \cup V$ y $U \cap V = \varnothing$.*

Demostración: Basta observar que los abiertos disjuntos construidos en la primera parte de la prueba de 12.12 son convexos. ■ 77

---

**Teorema 12.15** *Un espacio ordenado es totalmente disconexo si y sólo si es cerodimensional.*

Demostración: Sea $X$ un espacio ordenado totalmente disconexo. Por el teorema 12.5, podemos suponer que $X$ no tiene máximo ni mínimo (el espacio $X'$ construido allí es también totalmente disconexo y, si probamos que es cerodimensional, también lo será $X$). Sea $x \in {]a, b[}$ y vamos a probar que existe un abierto cerrado convexo $C$ tal que $x \in C \subset {]a, b[}$.

1) Supongamos en primer lugar que $x$ no tiene un inmediato anterior. Entonces $]a, x]$ es infinito y por hipótesis no es conexo, luego por el teorema 12.14 tenemos que $]a, x] = U_1 \cup U_2$, donde $U_1$ y $U_2$ son abiertos convexos disjuntos no vacíos en $]a, x]$, por lo que, debidamente ordenados (teorema 12.2), cumplen que todo punto de $U_1$ es menor que todo punto de $U_2$. En particular $x \in U_2 \subset {]a, b[}$.

Notemos que $U_1 = U_1 \cap {]a, x[}$ es abierto en $]a, x[$, luego en $X$, mientras que $U_2 \cap {]a, x[} \subset U_2$, lo que prueba que $U_2$ es entorno en $X$ de todos sus puntos salvo quizá de $x$.

1a) Si $x$ tiene un inmediato posterior $v$, entonces $U_2$ es abierto y cerrado en $X$, pues si $y \in U_2$, tenemos que $x \in {]y, x]} = {]y, v[} \subset U_2$, luego $U_2$ es un entorno de $x$, luego es abierto. Por otra parte, si $y \in X \setminus U_2$, o bien $y \in {]x, +\infty[} \subset X \setminus U_2$, o bien $y \leq x$, en cuyo caso, o bien $x \in U_1 \subset X \setminus U_2$, o bien $x < u$, para cierto $u \in U_1$, con lo que $x \in {]-\infty, u[} \subset X \setminus U_2$.

1b) Supongamos ahora que $x$ no tiene un inmediato posterior. Entonces, como antes, $[x, b[ = V_1 \cup V_2$, donde $V_1$ y $V_2$ son abiertos convexos no vacíos en $[x, b[$ tales que todo elemento de $V_1$ es menor que todo elemento de $V_2$, luego $x \in V_1$. En tal caso $x \in C = U_2 \cup V_1 \subset {]a, b[}$ y $C$ es claramente convexo y es abierto cerrado en $X$. En efecto, sabemos que $C$ es entorno de todos sus puntos salvo quizá de $x$, pero si $u \in U_2$, $v \in V_1$ con $u < x < v$, entonces $x \in {]u, v[} \subset C$, luego también es entorno de $x$. Por otra parte, si $y \in X \setminus C$, suponemos, por ejemplo, que $y < x$ (el caso contrario es análogo) y entonces, o bien se cumple $y \in U_1 \subset X \setminus C$, o bien $y < u$, para cierto $u \in U_1$, con lo que $x \in {]-\infty, u[} \subset X \setminus U_2$.

2) Supongamos ahora que $x$ tiene un inmediato anterior $u < x$, de modo que $]u, x[ = \varnothing$.

2a) Si $x$ no tiene un inmediato posterior, la situación es totalmente análoga a la del caso 1a).

2b) Si $x$ tiene un inmediato posterior $v > x$, de modo que $]x, v[ = \varnothing$, basta tomar $C = \{x\} = {]u, v[}$, que es convexo, abierto y cerrado en $X$. ■

En la prueba del teorema anterior hemos visto que todo espacio ordenado cerodimensional tiene una base formada por abiertos cerrados convexos. 85

---

**Teorema 12.16** *Un espacio ordenado es totalmente disconexo si y sólo si es fuertemente cerodimensional.*

Demostración: Sea $X$ un espacio ordenado totalmente disconexo. Por el teorema 12.15 es cerodimensional. Tenemos que probar que es fuertemente cerodimensional. Para ello basta tomar $A \subset U \subset X$, donde $A$ es cerrado y $U$ es abierto, y encontrar un abierto cerrado $A \subset C \subset U$.

Por 12.5 podemos suponer que $X$ no tiene máximo ni mínimo elemento. Por 12.2 podemos descomponer $U = \bigcup\limits_{i \in I} U_i$ en unión disjunta de abiertos convexos.

Veamos ahora que existe un abierto cerrado $V_i$ tal que $A \cap U_i \subset V_i \subset U_i$. Si $A \cap U_i = \varnothing$, basta tomar $V_i = \varnothing$. Supongamos, pues, que existe $x_i \in A \cap U_i$. Como $X$ es cerodimensional, podemos tomar un abierto cerrado convexo $V_0$ tal que $x_0 \in V_0 \subset U_i$.

1) Si $A \cap U_i$ no está acotado inferiormente en $U_i$, llamamos $V_1$ al conjunto de puntos $y \in U_i$ tales que existe $u \in U_0$ tal que $y \leq u$. Se cumple que $V_1$ es un abierto cerrado convexo tal que $A \cap U_i \cap \left]-\infty, x_i\right] \subset V_1 \subset U_i$.

En efecto, si $y \in V_1$, tenemos que $y \leq u \in U_0$, luego $y \in \left]a, b\right[ \subset U_i$, $u \in \left]a', b'\right[ \subset U_0$, luego $y \in \left]a, b'\right[ \subset V_1$. Esto prueba que $V_1$ es abierto.

Por otra parte si $y \in X \setminus V_1$, o bien $y$ es mayor que todos los puntos de $U_0$, o bien está por debajo de uno de ellos e $y \notin U_i$.

Como $U_0$ es convexo, el conjunto de los puntos mayores que todos los puntos de $U_0$ es $G = (X \setminus U_0) \cap \left]x_i, +\infty\right[$, luego es abierto y $G \subset X \setminus U_1$.

Si $y$ está bajo algún punto de $U_0$, pero $y \notin U_i$, como $U_0 \subset U_i$, necesariamente $y$ es menor que todos los puntos de $U_i$. Si $y \in \overline{U}_i$, entonces todo intervalo $\left[y, z\right[$ contendría un punto $y < u < z$, con $u \in U_i$, y por la hipótesis 1) existiría $a \in A \cap U_i$ tal que $y < a \leq u < z$, luego $y \in \overline{A} = A \subset U$, luego $y \in U_j \subset X \setminus V_1$. Esto prueba que $V_1$ es abierto y cerrado.

2) Supongamos ahora que $A \cap U_i$ está acotado inferiormente por $u' \in U_i$, necesariamente $u_0 \leq x_i$. Como $X$ es cerodimensional, podemos tomar un abierto cerrado convexo $u_0 \in U' \subset U_i$. Definimos $V_1 = \operatorname{co}(U' \cup U_0)$. Entonces $V_1$ es abierto y cerrado por ser la envoltura convexa de un abierto cerrado. También es claro que $A \cap U_i \cap \left]-\infty, x_i\right] \subset V_1 \subset U_i$.

Análogamente podemos construir otro abierto cerrado convexo $V_2$ tal que

$$A \cap U_i \cap \left[x_i, +\infty\right[ \subset V_2 \subset U_i.$$

Ahora basta tomar $V_i = V_1 \cup V_2$, con lo que $V_i$ es convexo y $A \cap U_i \subset V_i \subset U_i$. A su vez, llamamos $V = \bigcup\limits_{i \in I} V_i$, con lo que $A \subset V \subset U$, y $V$ es abierto. Sólo falta probar que también es cerrado.

En caso contrario tomamos $x \in \overline{V} \setminus V$. Podemos suponer que $x$ es un punto de acumulación de $V' = V \cap \left]-\infty, x\right[$ (la alternativa es que lo sea de $V \cap \left]x, +\infty\right[$ y se trata análogamente). Notemos que, al ser convexo, cada $V_i$ está a la izquierda o a la derecha de $x$ y $V'$ es la unión de los $V_i$ que están a la izquierda de $x$.

Si, de entre todos ellos, hubiera uno que estuviera a la derecha de los restantes, entonces $x$ estaría en la clausura de dicho $V_i$, lo cual es absurdo, porque $V_i$ es cerrado y $x \notin V$.

Así pues, para cada $V_i \subset V'$ existe otro $V_k$ situado a su derecha, pero entonces cada entorno de $x$ contiene infinitos $V_i$, luego en particular corta a $A$, pues $V_i \cap A \neq \varnothing$, pero entonces $x \in \overline{A} = A \subset V$, contradicción.

Con esto hemos probado que $V$ es un abierto cerrado que separa $A$ de $U$.

■ 168

---

**Compacidad** La compacidad tiene una caracterización muy simple en el caso de la topología de orden:

**Teorema 12.17** *Un conjunto totalmente ordenado no vacío es compacto si y sólo si es completo y tiene máximo y mínimo.*

Demostración: Sea $X$ un conjunto totalmente ordenado no vacío. Si no tiene máximo, entonces $\{]-\infty, x[\}_{x \in X}$ es un cubrimiento abierto que no admite un subcubrimiento finito, luego $X$ no es compacto. Por lo tanto, si $X$ es compacto tiene máximo, y análogamente se concluye que tiene mínimo.

Si $X$ no fuera completo el teorema [TC 2.41] nos permite descomponerlo como $X = A \cup B$, donde $A$ y $B$ son no vacíos, todo elemento de $A$ es menor que todo elemento de $B$, y además $A$ no tiene máximo y $B$ no tiene mínimo. Entonces

$$A = \bigcup_{a \in A} ]-\infty, a[\,, \qquad B = \bigcup_{b \in B} ]b, +\infty[\,,$$

lo que prueba que $A$ y $B$ son abiertos. Además los intervalos considerados forman un cubrimiento abierto de $X$ que no tiene un subcubrimiento finito. Por lo tanto, si $X$ es compacto, es completo.

Recíprocamente, supongamos que $X$ es completo y que tiene máximo $M$ y mínimo $m$. Podemos suponer que $m < M$, pues si $m = M$ entonces $X = \{m\}$ es obviamente compacto. Sea $\mathcal{C}$ un cubrimiento abierto de $X$ y sea $A$ el conjunto de los $x \in X$ tales que el intervalo $[m, x]$ admite un subcubrimiento finito. Sea $s = \sup A$ y sea $U \in \mathcal{C}$ tal que $s \in U$. No puede ser $s = m$, porque entonces existiría un $v \in X$ tal que $s \in [m, v[ \subset U$, y podríamos tomar un $U' \in \mathcal{C}$ tal que $v \in U'$, y entonces $[m, v] \subset U \cup U'$ implicaría que $s < v \in A$, en contradicción con que $s$ es cota superior de $A$.

Así pues, $m < s$, luego existe un $u < s$ tal que $]u, s] \subset U$. Por definición de supremo existe un $a \in A$ tal que $u < a \leq s$, luego existe $C \subset \mathcal{C}$ finito tal que $[m, a] \subset \bigcup C$, pero cambiando $C$ por $C \cup \{U\}$ tenemos, de hecho, que $[m, s] \subset \bigcup C$, luego $s \in A$.

Ahora basta probar que $s = M$, pero si fuera $s < M$ existiría un $v \in X$ tal que $s \in ]u, v[ \subset U$ y, tomando $U' \in \mathcal{C}$ tal que $v \in U'$ y añadiéndolo al conjunto finito $C$, obtendríamos que $[m, v] \subset \bigcup C$, con lo que $v \in A$, lo que contradice de nuevo a que $s$ es cota superior de $A$. ■

Más en general:

**Teorema 12.18** *Si $X$ es un conjunto totalmente ordenado completo, entonces un subconjunto de $X$ es compacto (con la topología relativa) si y sólo si es cerrado y acotado (superior e inferiormente), y en tal caso tiene máximo y mínimo.*

Demostración: Supongamos que $C \subset X$ es cerrado y acotado. Si $a$ es una cota inferior y $b$ es una cota superior, entonces $C \subset [a, b]$. La topología relativa de $[a, b]$ es la topología de orden y, como conjunto ordenado, $[a, b]$ es claramente completo. Por el teorema 12.17 tenemos que $[a, b]$ es compacto, y $C$ también lo es por ser cerrado en $[a, b]$.

Recíprocamente, si $C$ es compacto, entonces sabemos que es cerrado. Si no tuviera máximo $\{]-\infty, x[\}_{x\in X}$ sería un cubrimiento de $C$ que no admitiría un subcubrimiento finito, luego $C$ sí que tiene máximo, e igualmente se prueba que tiene mínimo. ■

De hecho, de aquí obtenemos una caracterización de la completitud:

**Teorema 12.19** *Un conjunto totalmente ordenado $X$ es completo si y sólo si todo subconjunto cerrado y acotado es compacto.*

Demostración: Si $X$ es completo y $C$ es un subespacio cerrado y acotado, entonces existen $a, b \in X$ tales que $C \subset [a, b]$. El subespacio $[a, b]$ es cerrado, luego es completo. Además el teorema 12.3 nos da que la topología relativa de $[a, b]$ es la de orden. Por el teorema anterior $[a, b]$ es compacto y, como $C$ es cerrado en $[a, b]$, también lo es.

Supongamos ahora que todo cerrado y acotado es compacto. Sea $A \subset X$ un conjunto no vacío y acotado superiormente. Sea $a \in A$ y $b \in X$ una cota superior. El intervalo $[a, b]$ es compacto (con la topología relativa, que es la de orden), luego el conjunto $A \cap [a, b]$ tiene supremo $c$. Obviamente $c$ es también el supremo de $A$ en $X$. ■ 94

---

**Axiomas de separación** Es inmediato que todo conjunto totalmente ordenado es un espacio de Hausdorff con la topología de orden. Más aún:

**Teorema 12.20 (AE)** *Todo conjunto totalmente ordenado es monótonamente normal.*

Demostración: Sea $X$ un conjunto totalmente ordenado. Si $X$ tiene máximo o mínimo elemento, podemos añadir infinitos términos por encima del máximo o por debajo del mínimo para pasar a un nuevo conjunto totalmente ordenado sin máximo ni mínimo del cual $X$ sea un intervalo, con lo que la topología de orden en $X$ es la topología relativa inducida desde la extensión. Como la monotonía normal es hereditaria, si el espacio extendido es monótonamente normal, también lo será $X$. Equivalentemente, podemos suponer que $X$ no tiene ni máximo ni mínimo.

Fijamos una buen orden $\leq^*$ en $X$, sin relación alguna con el orden que define la topología. Éste define a su vez una función de elección $E(A) = \min_{\leq^*} A$ sobre los subconjuntos no vacíos de $X$.

Vamos a definir una función $H(p,U)$ en las condiciones del teorema 5.22, pero según el teorema 5.23 basta definirla cuando $U$ recorre una base prefijada, luego podemos limitarnos al caso en que $U$ es un intervalo $]c,d[$. Si $p \in\ ]c,d[$, definimos

$$x(p,c) = \begin{cases} c & \text{si } ]c,p[\, = \varnothing, \\ E(]c,p[) & \text{si } ]c,p[\, \neq \varnothing, \end{cases} \qquad y(p,d) = \begin{cases} d & \text{si } ]p,d[\, = \varnothing, \\ E(]p,d[) & \text{si } ]p,d[\, \neq \varnothing. \end{cases}$$

A su vez, definimos $H(p,]c,d[) = ]x(p,c), y(p,d)[$.

Claramente se cumple que $p \in H(p,]c,d[) \subset\ ]c,d[$. Consideremos ahora dos intervalos $U = ]c,d[$, $V = ]e,f[$ y supongamos que $H(p,U) \cap H(q,V) \neq \varnothing$. Tenemos que probar que $p \in V$ o bien $q \in U$.

Pongamos que $z \in\ ]x(p,c), y(p,d)[\, \cap\, ]x(q,e), y(q,f)[$. Por simetría, podemos suponer que $x(p,c) \leq x(q,e)$.

Si $y(q,f) \leq y(p,d)$, entonces $]x(q,e), y(q,f)[\ \subset\ ]x(p,c), y(p,d)[$, con lo que $q \in G(p,U) \subset U$. Suponemos, pues, que $y(p,d) < y(q,f)$, con lo que tenemos:

$$x(p,c) \leq x(q,e) < z < y(p,d) < y(q,f).$$

Si $x(q,e) < p$, entonces $x(q,e) < p < y(p,d) < y(q,f)$, luego en este caso $p \in\ ]x(q,e), y(q,f)[\ \subset V$. Por lo tanto, podemos suponer que $p \leq x(q,e)$.

Igualmente, si $q < y(p,d)$, entonces $x(p,c) \leq x(q,e) < q < y(p,d)$, luego $q \in\ ]x(p,c), y(p,d)[\ \subset U$. Por lo tanto, podemos suponer que $y(p,d) \leq q$.

Si $p = x(q,e)$, tenemos $e \leq x(q,e) < z < y(p,d) \leq q$, luego $z \in\ ]e,q[\ \neq \varnothing$, luego por construcción $p = x(q,e) = E(]e,q[) \in\ ]e,q[\ \subset\ ]e,f[\ = V$.

Similarmente, si $q = y(p,d)$, entonces $p \leq x(q,e) < z < y(p,d) \leq d$, luego $z \in\ ]p,d[\ \neq \varnothing$, luego $q = y(p,d) = E(]p,d[) \in\ ]p,d[\ \subset\ ]c,d[\ = U$.

Por lo tanto, la situación es:

$$x(p,c) < p < x(q,e) < z < y(p,d) < q < y(q,f).$$

Por lo tanto, $x(q,e) \in\ ]p,z[\ \subset\ ]p,d[$ y $y(p,d)$ es por definición el mínimo de $]p,d[$, luego $y(p,d) \leq^* x(q,e)$.
Pero, igualmente, $y(p,d) \in\ ]z,q[\ \subset\ ]e,q[$ y $x(q,e)$ es el mínimo de $]e,q[$, luego $x(q,e) \leq^* y(p,d)$ y tendría que ser $x(q,e) = y(p,d)$, contradicción. ■

Por consiguiente, todo conjunto totalmente ordenado es hereditariamente colectivamente normal, y en particular hereditariamente colectivamente de Hausdorff y, más en particular, normal. 150

---

**Cardinales invariantes** Vamos a probar algunas relaciones entre cardinales invariantes válidas para conjuntos ordenados. Para la primera conviene introducir un cardinal invariante exclusivo de estos espacios:

**Definición 12.21** Si $X$ es un espacio ordenado, un *salto* en $X$ es un par ordenado $(a, b) \in X \times X$ tal que $a < b$ y $]a, b[ = \varnothing$. El *número de saltos* de $X$ es el cardinal $g(X)$ del conjunto de todos los saltos en $X$.

Notemos que $X$ es denso en sí mismo si y sólo si no tiene saltos, aunque en este caso adoptamos el convenio habitual por el cual $g(X) = \aleph_0$.

Obviamente, si $X$ es infinito, entonces $g(X) \leq |X|$.

**Teorema 12.22 (AE)** *Si $X$ es un conjunto ordenado, entonces*[3]

$$w(X) = nw(X) = d(X) + g(X).$$

*En particular $w(X) \leq |X|$ y, si $X$ es denso en sí mismo, $w(X) = d(X)$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $D \subset X$ un conjunto denso de cardinal $d(X)$ y sea $H$ el conjunto de los extremos de todos los saltos en $X$, con lo que $|H| \leq g(X)$.

Sea $\mathcal{B}$ el conjunto de todos los intervalos (finitos o infinitos) de extremos en $D \cup H$ más los conjuntos $\{d\}$, donde $d$ es un punto aislado de $X$ (con lo que $d \in D$). Claramente $|\mathcal{B}| \leq d(X) + h(X)$, y vamos a probar que $\mathcal{B}$ es una base de $X$, con lo que $w(X) \leq d(X) + h(X)$.

En efecto, si $x \in U \subset X$, donde $U$ es abierto, vamos a suponer que $x$ no es el máximo o el mínimo de $X$, si es que existen, pues el razonamiento en tal caso es una ligera variante del que vamos a dar. Entonces existen $a < x < b$ de modo que $x \in ]a, b[ \subset U$. Distinguimos cuatro casos:

1. Si $]a, x[ = \varnothing = ]x, b[$, entonces $x$ es un punto aislado, luego $\{x\} \in \mathcal{B}$ y $x \in \{x\} \subset U$.

2. Si $]a, x[ \neq \varnothing \neq ]x, b[$, entonces existen $a < d_1 < x < d_2 < b$ con $d_1$, $d_2 \in D$, luego $x \in ]d_1, d_2[ \subset U$ y el intervalo está en $\mathcal{B}$.

3. Si $]a, x[ \neq \varnothing = ]x, b[$, entonces existe $a < d_1 < x$ con $d_1 \in D$ y $b \in H$, luego $x \in ]d_1, b[ \subset U$ con $]d_1, b[ \in \mathcal{B}$.

4. Si $]a, x[ = \varnothing \neq ]x, b[$, se concluye análogamente.

Las desigualdades $d(X) \leq nw(X) \leq w(X)$ son válidas en espacios arbitrarios, luego basta probar que $g(X) \leq nw(X)$, pero esto se debe a que si $\mathcal{R}$ es una red en $X$ y $(a, b)$ es un salto, existe $R_{a,b} \in \mathcal{R}$ tal que $a \in R_{a,b} \cap ]-\infty, b[$, luego $a = \max R_{a,b}$, e igualmente existe un $R'_{a,b} \in \mathcal{R}$ tal que $b = \min R'_{a,b}$. Por lo tanto, la aplicación $(a, b) \mapsto (R_{a,b}, R'_{a,b})$ es inyectiva, lo que prueba que $g(X) \leq |\mathcal{R}|^2 = nw(X)$. ■

Si en $X = \mathbb{R} \times 2$ consideramos el orden lexicográfico, es fácil ver que $\mathbb{Q} \times \{0\}$ o $\mathbb{Q} \times \{1\}$ son subconjuntos densos numerables de $X$, luego $d(X) = \aleph_0$, pero claramente $g(X) = \mathfrak{c}$, por lo que $w(X) = \mathfrak{c}$.

Un hecho más elemental es el siguiente:

[3] Sólo se requiere AE para la desigualdad $g(X) \leq nw(X)$, luego no se requiere si $X$ es denso en sí mismo.

**Teorema 12.23 (AE)** *Si $X$ es un espacio ordenado, para todo punto $x \in X$ se cumple $\psi(x, X) = \chi(X, X)$, luego $\psi(X) \leq \chi(X)$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $\kappa = \psi(x, X)$ y sea $\{U_\alpha\}_{\alpha<\kappa}$ una familia de entornos de $x$ tal que $\bigcap\limits_{\alpha<\kappa} U_\alpha = \{x\}$.

Por simplicidad vamos a suponer que $x$ no es el máximo ni el mínimo de $X$, con lo que un abierto básico de $x$ es de la forma $]a, b[$, con $a < x < b$. En particular, cada $U_\alpha$ contiene un intervalo $]a_\alpha, b_\alpha[$, con $a_\alpha < x < b_\alpha$, y no perdemos generalidad si suponemos que $U_\alpha = ]a_\alpha, b_\alpha[$.

Dado cualquier otro intervalo $x \in ]a, b[$, tiene que existir un $\alpha < \kappa$ tal que $a \leq a_\alpha$, pues en caso contrario $a \in \bigcap\limits_{\alpha<\kappa} U_\alpha$. Igualmente, tiene que existir un $\beta < \kappa$ tal que $b_\beta \leq b$, luego $x \in U_\alpha \cap U_\beta \subset ]a, b[$. Esto prueba que los conjuntos $U_\alpha \cap U_\beta$, con $\alpha, \beta < \kappa$ son una base de entornos de $x$ de cardinal $\kappa$, luego $\chi(x, X) \leq \kappa = \psi(x, X)$. La otra desigualdad se cumple siempre. ■ 256

---

Como los espacios ordenados son monótonamente normales, cumplen las igualdades $c(X) = ch(X) = Lh(X)$ (por el teorema 8.20). El teorema siguiente es válido para espacios monótonamente normales, pero la prueba es más complicada:

**Teorema 12.24 (AE)** *Si $X$ es un espacio ordenado, entonces $d(X) = dh(X)$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $D$ un subespacio denso en $X$ con $|D| = d(X)$. Podemos suponer que $D$ contiene el máximo y el mínimo de $X$, si es que existen. Tomamos $Y \subset X$ y vamos a probar que $Y$ contiene un subconjunto denso de cardinal $d(X)$. Podemos suponer que $Y$ no contiene al máximo o al mínimo de $X$, si es que existen.

Para cada par de puntos $a < b$ en $D$ tales que $]a, b[ \cap Y \neq \varnothing$, elegimos un punto $y_{a,b} \in Y \cap ]a, b[$. Sea $E \subset Y$ el conjunto de todos los $y_{a,b}$ y sea $A$ el conjunto de los puntos aislados de $Y$.

Vamos a probar que $E \cup A$ es denso en $Y$. En efecto, si $U$ es un abierto en $Y$ y $U \cap A = \varnothing$, tomamos $y \in U$. Como no es el máximo ni el mínimo de $X$, existen $p$, $q \in X$ tales que $y \in ]p, q[ \cap Y \subset U$. Como $y \notin A$, uno de los abiertos $]p, y[ \cap Y$ o $]y, q[ \cap Y$ tiene que ser infinito. Supongamos que lo es el primero (el otro caso es análogo).

Entonces existen $a \in D$, $p' \in Y$ tales que $p < a < p' < y < q$, luego $y \in ]p', q[ \neq \varnothing$, luego existe un $b \in D$ tal que $p < a < p' < b < q$, luego $p' \in Y \cap ]a, b[$, luego está definido $y_{a,b} \in Y \cap ]a, b[ \subset Y \cap ]p, q[ \subset U$, luego $y_{a,b} \in E \cap U \neq \varnothing$.

Claramente $|E| \leq d(X)$, luego basta probar que $|A| \leq d(X)$. Para ello dividimos $A$ en cuatro subconjuntos disjuntos:

1. El conjunto $A_1$ formado por los puntos $y \in A$ que tienen inmediato anterior y posterior en $X$. Sus elementos son puntos aislados en $X$, luego $A_1 \subset D$ y así $|A_1| \leq |D|$.

2. El conjunto $A_2$ formado por los puntos $y \in A$ que no tienen un inmediato anterior o posterior en $X$. Para cada uno de ellos, existen $a_y < b_y$ en $D$ tales que $]a_y, b_y[ \cap Y = \{y\}$, luego la asignación $y \mapsto (a_y, b_y)$ es inyectiva, lo que prueba que $|A_2| \leq |D|$.

3. El conjunto $A_3$ de los puntos $y \in A$ que no tienen un inmediato anterior, pero sí un inmediato posterior, digamos $y < y^+$, entonces existe un $a_y \in D$ tal que $]a_y, y^+[ \cap Y = \{y\}$. La aplicación $y \mapsto a_y$ es inyectiva, pues si dos puntos $y < y'$ están en $A_3$, entonces $a_y < y < y^+ \leq y' < y'^+$, luego $\{y, y'\} \subset ]a_y, y'^+[ \cap Y$, luego $a_y \neq a_{y'}$. Por consiguiente, $|A_3| \leq |D|$.

4. El conjunto $A_4$ de los puntos que tienen un inmediato anterior, pero no un inmediato posterior. Razonando como en el caso anterior concluimos que $|A_4| \leq |D|$. ■

Más elemental es el hecho siguiente:

**Teorema 12.25 (AE)** *Si $X$ es un espacio ordenado, entonces $\chi(X) \leq c(X)$.*

Demostración: Sea $x \in X$ y vamos a probar que tiene una base de entornos de cardinal $\leq c(X)$. Si $x$ es aislado no hay nada que probar. Por simplicidad suponemos que $x$ no es el máximo o el mínimo de $X$, si es que los hay.

Si $x$ no tiene un inmediato anterior, construimos una sucesión estrictamente creciente $\{x_\alpha\}_{\alpha<\lambda}$ de puntos $x_\alpha < x$ como sigue: tomamos cualquier $x_0 < x$ y, supuesta definida $\{x_\delta\}_{\delta<\alpha}$, si existe un $y \in X$ que cumpla $x_\delta < y < x$ para todo $\delta < \alpha$, tomamos $y < x_\alpha < x$. Como no es posible construir así una sucesión de longitud mayor que $|X|$, tiene que existir un $\lambda \leq |X|^+$ tal que esté definida $\{x_\alpha\}_{\alpha<\lambda}$, pero $x = \sup\limits_{\alpha<\lambda} x_\alpha$, con lo que la construcción termina.

Ahora bien, por construcción, los intervalos $]x_\alpha, x_{\alpha+1}[$ son no vacíos y disjuntos dos a cos, luego de hecho $\lambda \leq c(X)$.

Similarmente, si $x$ no tiene un inmediato posterior, podemos construir una sucesión estrictamente decreciente $\{b_\alpha\}_{\alpha<\lambda'}$ tal que $x = \inf\limits_{\beta<\lambda'} b_\beta$ y $\lambda' \leq c(X)$.

Así, si $x$ no tiene inmediato anterior ni posterior, los intervalos $]a_\alpha, b_\beta[$ forman una familia de $c(X)$ entornos de $x$ cuya intersección es $x$, luego concluimos que $\psi(x, X) \leq c(X)$.

Si $x$ no tiene inmediato anterior, pero sí inmediato posterior $x^*$, basta considerar los intervalos $]a_\alpha, x^*[$ y la conclusión es la misma, y lo mismo vale si $x$ tiene inmediato anterior, pero no inmediato posterior. (Si tiene inmediato anterior y posterior es aislado, y ya hemos descartado ese caso.) El teorema 12.23 nos da que $\chi(X) = \psi(X) \leq c(X)$. ■

Para enunciar el teorema siguiente necesitamos el concepto de árbol, que estudiamos en el capítulo IX de [TC], pero aquí sólo necesitamos las meras definiciones:

**Definición 12.26** Un *árbol* es un conjunto parcialmente ordenado $(A, \leq)$ tal que, para todo $x \in A$, el segmento $A_x^< = \{a \in A \mid a < x\}$ está bien ordenado.

Si $x \in A$, se llama *altura* de $x$ a $\mathrm{alt}_A x = \mathrm{ord} A_x^<$.

Si $\alpha \in \Omega$, se llama *nivel* $\alpha$-ésimo de $A$ al conjunto

$$\mathrm{Niv}_\alpha A = \{x \in A \mid \mathrm{alt}_A x = \alpha\}.$$

Se llama *altura* de $A$ al mínimo ordinal $\mathrm{alt} A = \alpha$ tal que $\mathrm{Niv}_\alpha A = \varnothing$. Es fácil ver que

$$\mathrm{alt} A = \bigcup_{x \in A} (\mathrm{alt}_A x + 1).$$

Dos elementos $x, y \in A$ son *compatibles* si $x \leq y \lor y \leq x$. En caso contrario se dice que son *incompatibles* y se representa por $x \perp y$.

Un subconjunto $C \subset A$ es una *cadena* si sus elementos son compatibles dos a dos, es decir, si está totalmente ordenado y, por consiguiente, bien ordenado.

Un subconjunto $C \subset A$ es una *anticadena* si sus elementos son incompatibles dos a dos. Claramente los niveles son anticadenas.

Si $\kappa$ es un cardinal infinito, un *$\kappa$-árbol de Suslin* es un árbol de altura $\kappa$ en el que todas las cadenas y anticadenas tienen cardinal menor que $\kappa$.

**Teorema 12.27 (AE)** *Sea $X$ un espacio ordenado y sea $\kappa = c(X)$. Entonces*

$$c(X) \leq d(X) \leq c(X)^+$$

*y si no existen $\kappa^+$-árboles de Suslin, $c(X) = d(X)$.*

DEMOSTRACIÓN: Fijemos un buen orden $\preceq$ en $X$. Para cada $x \in X$, sea $\mathcal{I}(x)$ el conjunto de todos los intervalos abiertos en $X$ a los que pertenece $x$ (esto incluye a los intervalos de la forma $[m, b[$ o $]a, M]$ si $X$ tiene un mínimo elemento $m$ o un máximo elemento $M$). Sea $D$ el conjunto de todos los $x \in X$ tales que existe $I \in \mathcal{I}(x)$ tal que $x = \min_\preceq I$.

Se cumple que $D$ es denso en $X$, pues si $I$ es un intervalo abierto no vacío, $d = \min_\preceq I$ cumple que $I \in \mathcal{I}(d)$ y $d \in I \cap D$.

Si $d \in D$, llamamos $I(d) = \bigcup\{I \in \mathcal{I}(d) \mid d = \min_\preceq I\}$. Así $I(d)$ es una unión de intervalos abiertos que contienen a $x$, luego es un abierto convexo de $X$.

En efecto, si $a < x < b$ con $a, b \in I(d)$, entonces $a \in I_1$, $b \in I_2$, para ciertos intervalos $I_1$ e $I_2$ que contienen a $d$. Por consiguiente $I = I_1 \cup I_2$ es un intervalo que contiene a $a$ y a $b$, luego también a $x \in I \subset I(d)$.

Observemos ahora que si $d, e \in D$ y $d \preceq e$, entonces $I(d) \cap I(e) = \varnothing$ o bien $I(e) \subset I(d)$.

En efecto, si $u \in I(d) \cap I(e)$, entonces $u \in I_1 \cap I_2$, donde $I_1$, $I_2$ son intervalos abiertos que tienen como mínimo elemento a $d$ y $e$, respectivamente. Por consiguiente, $I = I_1 \cup I_2$ es un intervalo abierto que tiene a $d$ como mínimo elemento.

Tomemos ahora $x \in I(e)$. Esto significa que $x \in J$, para cierto intervalo $J$ con $e$ como mínimo elemento. Como $e \in I \cap J$, tenemos que $I \cup J$ es un intervalo que tiene a $d$ como mínimo elemento, luego $x \in I \cup J \subset I(d)$.

Más aún, si $d \prec e$, entonces $d \notin I(e)$ (pues $d$ no puede estar en ningún intervalo que tenga a $e$ como mínimo elemento), luego las posibilidades son en realidad $I(d) \cap I(e) = \varnothing$ o bien $I(e) \subsetneq I(d)$.

Vamos a probar que $|D| \leq \kappa^+$ y que si no existen $\kappa^+$-árboles de Suslin, entonces $|D| \leq \kappa$. Esto prueba que $d(X) \leq \kappa^+$ en el primer caso y que $d(X) \leq \kappa$ en el segundo y con ello el teorema quedará probado, puesto que la desigualdad $c(X) \leq d(X)$ se da siempre.

Así pues, por reducción al absurdo, suponemos que $|D| \geq \kappa^{++}$, o bien que $|D| \geq \kappa^+$ y que no existen $\kappa^+$-árboles de Suslin. En ambos casos tenemos que $|D| \geq \kappa^+$.

Llamamos $E_0 = D$ y

$$D_0 = \{d \in E_0 \mid \bigwedge e \in E_0 \setminus \{d\}\, I(d) \not\subset I(e)\}.$$

Así, el conjunto $\{I(d) \mid d \in D_0\}$ es una familia de abiertos de $X$ disjuntos dos a dos, pues si $I(d) \cap I(e) \neq \varnothing$, por ejemplo con $d \prec e$, tiene que ser $I(e) \subset I(d)$, lo que contradice que $e \in D_0$.

Como $c(X) = \kappa$, tiene que ser $|D_0| \leq \kappa$. Llamamos $E_1 = D \setminus D_0$ y

$$D_1 = \{d \in E_1 \mid \bigwedge e \in E_1 \setminus \{d\}\, I(d) \not\subset I(e)\}.$$

En general, si hemos definido $\{D_\alpha\}_{\alpha<\beta}$, con $\beta < \kappa^+$ con $|D_\alpha| \leq \kappa$, definimos $E_\beta = D \setminus \bigcup\limits_{\alpha<\beta} D_\alpha$ y

$$D_\beta = \{d \in E_\beta \mid \bigwedge e \in E_\beta \setminus \{d\}\, I(d) \not\subset I(e)\}.$$

Nuevamente, $\{I(d) \mid d \in D_\beta\}$ es una familia de abiertos de $X$ disjuntos dos a dos, exactamente por el mismo argumento que hemos dado para $D_0$, luego $|D_\beta| \leq \kappa$.

Así tenemos definidas dos sucesiones $\{E_\beta\}_{\beta<\kappa^+}$ y $\{D_\beta\}_{\beta<\kappa^+}$, de manera que $|D_\beta| \leq \kappa$ y $E_\beta = D \setminus \bigcup\limits_{\alpha<\beta} D_\alpha$.

A partir de aquí consideramos el caso $|D| \geq \kappa^{++}$ y, como $\Big|\bigcup\limits_{\beta<\kappa^+} D_\beta\Big| \leq \kappa^+$, podemos tomar un punto $d \in D \setminus \bigcup\limits_{\beta<\kappa^+} D_\beta$.

Veamos que para cada $\beta < \kappa^+$ existe un $d_\beta \in D_\beta$ tal que $I(d) \subset I(d_\beta)$.

En efecto, tenemos que $d \in E_\beta \setminus D_\beta$, luego, por definición de $D_\beta$, existe un $d_\beta \in E_\beta \setminus \{d\}$ tal que $I(d) \subset I(d_\beta)$. Podemos tomar, concretamente, el mínimo $d_\beta$ que cumpla esto (respecto del buen orden $\preceq$). Nos falta probar que $d_\beta \in D_\beta$. Para ello tomamos un $e \in E_\beta \setminus \{d_\beta\}$, y tenemos que probar que $I(d_\beta) \not\subset I(e)$. Pero si fuera $I(d_\beta) \subset I(e)$, tendríamos también que $I(d) \subset I(e)$ y para que esto no contradiga la minimalidad de $d_\beta$, tiene que ser $e = d$, pero entonces $I(d_\beta) = I(d)$, lo cual es imposible, dado que $d_\beta \neq d$.

Con esto podemos probar que si $\alpha < \beta < \kappa^+$, se cumple que $I(d_\beta) \subsetneq I(d_\alpha)$.

En efecto, $d \in I(d_\alpha) \cap I(d_\beta) \neq \varnothing$, y además $d_\beta \in E_\beta \subset E_\beta \subset E_\alpha \setminus D_\alpha$, $d_\alpha \in D_\alpha \subset E_\alpha$. En particular, $d_\alpha \neq d_\beta$ y, por definición de $D_\alpha$, tiene que ser $I(d_\alpha) \not\subset I(d_\beta)$, luego necesariamente $I(d_\beta) \subset I(d_\alpha)$, y la inclusión es estricta porque $d_\beta \neq d_\alpha$.

En definitiva, $\{I(d_\alpha)\}_{\alpha<\kappa^+}$ es una sucesión estrictamente decreciente de abiertos convexos de $X$.

Ahora vamos a llegar a una sucesión análoga en el segundo caso. Para ello vamos a probar que el conjunto $A = \{I(d) \mid d \in \bigcup\limits_{\beta<\kappa^+} D_\beta\}$ es un árbol con la relación de orden dada por $p \leq q$ si y sólo si $q \subset p$. Más aún,

$$\mathrm{Niv}_\gamma(A) = \{I(d) \mid d \in D_\gamma\}.$$

Para ello basta probar que, si $\gamma < \kappa^+$, cada $I(d)$ con $d \in D_\gamma$ tiene por debajo exactamente un $I(d_\beta)$, con $d_\beta \in D_\beta$, para cada $\beta < \gamma$, y que $\alpha < \beta$ si y sólo si $I(d_\beta) \subsetneq I(d_\alpha)$.

Los argumentos son exactamente los mismos que hemos empleado en el caso anterior. Tenemos que $d \in E_\beta \subset E_\beta \setminus D_\beta$, luego por definición de $D_\beta$ existe un $d_\beta \in E_\beta \setminus \{d\}$ tal que $I(d) \subset I(d_\beta)$ y, si tomamos el mínimo $d_\beta$ que cumpla esto, como antes se razona que $d_\beta \in D_\beta$. Notemos que $d_\beta$ es único, pues los $I(d')$ con $d' \in D_\beta$ son disjuntos dos a dos, luego no puede haber dos que contengan a $I(d)$.

Si $\alpha < \beta < \gamma$ igual que en el caso anterior se prueba que $I(d_\beta) \subsetneq I(d_\alpha)$, y también se cumple el recíproco, pues si $I(d_\beta) \subsetneq I(d_\alpha)$, tiene que ser $\alpha < \beta$, ya que de lo contrario sería $\beta \leq \alpha$ y, por la implicación contraria, $I(d_\alpha) \subset I(d_\beta)$.

Falta probar que si $p \in A$ cumple $p < I(d)$, entonces $p = I(d_\beta)$, para un $\beta < \gamma$. En principio, $p = I(d^*)$, con $d^* \in D_\beta$, para cierto $\beta < \kappa^+$ y tenemos que $I(d) \subsetneq I(d^*)$. Si fuera $\gamma \leq \beta$, por la parte ya probada, existe un único $\hat{d} \in D_\gamma$ tal que $I(d^*) \subset I(\hat{d})$, luego $I(d) \subset I(\hat{d})$, con $d$, $\hat{d} \in D_\gamma$, luego $d = \hat{d}$, y entonces $I(d) \subsetneq I(d^*) \subset I(d)$, contradicción. Así pues, $\beta < \gamma$ y, por la unicidad, $d^* = d_\beta$.

Con esto hemos probado que, si $p = I(d)$, la aplicación $\gamma \longrightarrow A_p^<$ dada por $\beta \mapsto I(d_\beta)$ es una semejanza, luego $A$ es un árbol y $\mathrm{alt}(I(d)) = \gamma$, para cada $d \in D_\gamma$. Más aún, ahora es claro que $\mathrm{alt}(A) = \kappa^+$.

Supongamos que $I(d_1), I(d_2) \in A$ son incompatibles, con $d_i \in D_{\beta_i}$. Podemos suponer que $\beta_1 \leq \beta_2$. Entonces existe $d' \in D_{\beta_1}$ tal que $I(d_{\beta_2}) \subset I(d')$ y no puede ser $I(d_{\beta_1}) = I(d')$, o los elementos de partida serían compatibles, luego $I(d_{\beta_1}) \cap I(d') = \varnothing$, y también $I(d_{\beta_1}) \cap I(d_{\beta_2}) = \varnothing$.

Así pues, toda anticadena en $A$ está formada por abiertos de $X$ disjuntos dos a dos, luego todas las anticadenas tienen cardinal $< \kappa^+$. Como estamos suponeiendo que no existen $\kappa^+$-árboles de Suslin, concluimos que existe una cadena $C \subset A$ con $|C| = \kappa^+$. Si cambiamos $C$ por $\{p \in A \mid \bigvee q \in C\ p \leq q\}$, seguimos teniendo una cadena de cardinal $\kappa^+$, pero con la propiedad de que, para cada $\alpha < \kappa^+$, existe un único $d_\alpha \in D_\alpha$ tal que $I(d_\alpha) \in C$.

Por lo tanto, tenemos una sucesión $\{I(d_\alpha)\}_{\alpha<\kappa^+}$ estrictamente decreciente de abiertos convexos de $X$ exactamente igual que en el primer caso. El resto de la prueba vale de nuevo para ambos casos.

Tomamos $x_\alpha \in I(d_\alpha) \setminus I(d_{\alpha+1})$ y llamamos $L = \{x_\alpha \mid \alpha < \kappa^+\}$. Definimos a su vez $L_i = \{x_\alpha \mid x_\alpha < d_{\alpha+1}\}$, $L_r = \{x_\alpha \mid d_{\alpha+1} < x_\alpha\}$. Así $L = L_i \cup L_d$ y, como $|L| = \kappa^+$, al menos uno de los dos conjuntos $L_i$ o $L_d$ tiene que tener también cardinal $\kappa^+$.

Ahora observamos que si $x_\alpha \in L_i$ y $\alpha < \beta < \kappa^+$, entonces $x_\alpha < x_\beta$.

En efecto, tenemos que $x_\alpha \notin I(d_{\alpha+1})$, $d_{\alpha+1} \in I(d_{\alpha+1})$, $x_\alpha < d_{\alpha+1}$. Como $I(d_{\alpha+1})$ es convexo, $x_\alpha$ tiene que ser menor que todos los elementos de $I(d_{\alpha+1})$, y sucede que $x_\beta \in I(d_\beta) \subset I(d_{\alpha+1})$.

Similarmente, si $x_\alpha \in L_d$ y $\alpha < \beta < \kappa^+$, entonces $x_\beta < x_\alpha$.

Sea $C \subset \kappa^+$ un conjunto de cardinal $\kappa^+$ tal que $L_* = \{d_\alpha \mid \alpha \in C\}$, donde el asterisco es $i$ o $d$, de modo que $|L_*| = \kappa^+$. Lo que hemos probado es que la aplicación inyectiva $C \longrightarrow X$ dada por $\alpha \mapsto x_\alpha$ conserva el orden si se trata de $L_i$ o lo invierte si se trata de $L_d$. Pero $\operatorname{ord}(C) = \kappa^+$, luego componiendo con una semejanza tenemos una aplicación inyectiva $h : \kappa^+ \longrightarrow X$ que conserva o invierte el orden. Por lo tanto, los intervalos $]h(2\alpha), h(2\alpha+2)[$ o $]h(2\alpha+2), h(2\alpha)[$ (según el caso) son $\kappa^+$ abiertos no vacíos en $X$ disjuntos dos a dos, en contradicción con que $c(X) = \kappa$. ■

El esquema siguiente resume las desigualdades que hemos demostrado para los cardinales invariantes de los espacios ordenados:

$$\begin{tikzcd}
 & {|X|} & \\
 & w(X) = nw(X) \arrow[u] & \\
 & d(X) = dh(X) \arrow[u, "\text{denso}"'] & \\
 & c(X) = ch(X) = eh(X) = Lh(x) \arrow[u, "*"'] & \\
\chi(X) = \psi(X) \arrow[ur] & & L(X) \arrow[ul] \\
 & & e(X) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Para espacios densos en sí mismos, el teorema 12.22 nos da una igualdad adicional en la flecha que se indica. El asterisco está para recordar el teorema anterior, según el cual $d(X) \leq c(X)^+$, con lo que la desigualdad correspondiente a esa flecha es “casi” una igualdad.

La recta larga (ejemplo A.28) tiene todos estos invariantes iguales a $\aleph_1$ excepto $\chi(X) = \aleph_0$ y $|X| = \mathfrak{c}$, lo que muestra que puede ser $\chi(X) < c(X)$ y $w(X) < |X|$. El espacio $\omega_1 + 1$ (ejemplo A.31) cumple $L(X) < c(X)$, mientras que el espacio $\omega_1$ (ejemplo A.30) cumple $e(X) < L(X)$. 268

# Apéndice A

# Ejemplos de espacios topológicos

## A.1 Espacios que no son de Hausdorff

**Ejemplo A.1 (La topología del punto particular)** Si $X$ es un conjunto arbitrario y $p \in X$, la *topología del punto particular* $p$ en $X$ se define como la que tiene por abiertos a $\varnothing$ y a los subconjuntos de $X$ que contienen a $p$.

El caso más simple es el *espacio de Sierpiński* $S = \{0, 1\}$ con la topología $\mathcal{T} = \{\varnothing, \{1\}, \{0, 1\}\}$. Notemos que es conexo, e incluso arcoconexo.

1. **Cardinales invariantes** (para $X$ infinito):

| $w$ | $\chi$ | $d$ | $dh$ | $c$ | $e$ | $ch$ | $L$ | $Lh$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lvert X\rvert$ | $\aleph_0$ | $\aleph_0$ | $\lvert X\rvert$ | $\aleph_0$ | $\lvert X\rvert$ | $\lvert X\rvert$ | $\lvert X\rvert$ | $\lvert X\rvert$ |

   Notemos que $X \setminus \{p\}$ es cerrado y discreto, y que los abiertos $\{p, x\}$ con $x \in X$ forman un cubrimiento abierto que no admite subcubrimientos propios.

2. **Separación** *$X$ es un espacio $T_0$ y, si tiene más de un punto, no es $T_1$.*

   En efecto, es $T_0$ pues, dados dos puntos distintos $u$, $v \in X$, uno de ellos no será $p$, digamos $u \neq p$, y entonces $\{p, v\}$ es un abierto que contiene a $v$, pero no a $u$.

   En cambio, si $X$ tiene al menos dos puntos, no es $T_1$, pues, dado otro punto $q \in X$, $q \neq p$, no existe ningún abierto que contenga a $q$ y no a $p$. De hecho, como $p$ está en todos los abiertos no vacíos, se cumple que $\overline{\{p\}} = X$.

3. **Conexión** *$X$ es arcoconexo y localmente arcoconexo.*

En efecto, si $x \in X$, un arco $f : [0,1] \longrightarrow X$ que une $x$ con $p$ es el dado por

$$f(t) = \begin{cases} p & \text{si } t > 0, \\ x & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

4. **Compacidad** *$X$ es localmente compacto. Si $X$ es infinito no es compacto, ni numerablemente compacto, ni sucesionalmente compacto y, si es no numerable, no es de Lindelöf.*

   Es localmente compacto porque todo punto tiene un entorno finito. Si fuera compacto, numerablemente compacto o sucesionalmente compacto, también lo sería el espacio discreto $X \setminus \{p\}$.

**Ejemplo A.2 (La topología de las secciones iniciales)** Si $X$ es un conjunto parcialmente ordenado, la *topología de las secciones iniciales* en $X$ es la que tiene por base a los conjuntos de la forma

$$B_a = \{x \in X \mid x \leq a\}$$

para cada punto $a \in X$. Ciertamente estos conjuntos son base de una topología, pues su unión es $X$ y, si $x \in B_a \cap B_b$, entonces $x \in B_x \subset B_a \cap B_b$.

Aquí consideramos el caso particular $X = \mathbb{N}$ con el orden usual. Es fácil ver que en este caso los únicos abiertos son $\varnothing$, $X$ y los abiertos básicos.

Notemos que si $A \subset X$, entonces $\overline{A} = [\text{mín}\, A, +\infty[$, $A' = ]\text{mín}\, A, +\infty[$.

1. **Separación** *$X$ es un espacio $T_0$, pero no $T_1$.*

2. **Compacidad** *$X$ es localmente compacto y de Lindelöf, pero no numerablemente compacto.*

   En efecto, el cubrimiento $\{B_n\}_{n=0}^{\infty}$ no admite un subcubrimiento finito.

3. **Conexión** *$X$ es arcoconexo y localmente arcoconexo.*

   En efecto, $\{n, n+1\}$ es un espacio de Siermiński (ejemplo A.1), luego es arcoconexo, y así podemos encadenar arcos continuos que unan cada par de números consecutivos para unir cualquier par de números.

4. *Todo subconjunto no vacío de $X$ tiene un punto de acumulación.*

5. *Ningún subconjunto de $X$ tiene puntos de $\omega$-acumulación.*

   Basta observar que todo punto tiene entornos fintos. Así pues, los conceptos de "punto de acumulación" y "punto de $\omega$-acumulación" no coinciden en $X$.

6. *No se da la inclusión $X'' \subset X'$.*

   En efecto, $1 \in X'$, pero $1 \notin X''$.

**Ejemplo A.3 (La topología cofinita)** Si $X$ es un conjunto arbitrario, la *topología cofinita* en $X$ es la que tiene por abiertos al conjunto vacío y a los subconjuntos de $X$ con complementario finito (con lo que los cerrados son los subconjuntos finitos y $X$).

1. **Cardinales invariantes** (para $X$ infinito):

| $w$ | $\chi$ | $d$ | $dh$ | $c$ | $e$ | $ch$ | $L$ | $Lh$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lvert X\rvert$ | $\lvert X\rvert$ | $\aleph_0$ | $\aleph_0$ | $\aleph_0$ | $\aleph_0$ | $\aleph_0$ | $\aleph_0$ | $\aleph_0$ |

2. **Separación** *Si $X$ es infinito, es un espacio $T_1$ que no es $T_2$, pero si $X$ es finito, es discreto, luego cumple todos los axiomas de separación.*

3. **Compacidad** *$X$ es compacto y todo subconjunto de $X$ (tanto si es cerrado como si no) es compacto. También es sucesionalmente compacto.*

   Basta tener en cuenta que la topología relativa en cualquier subconjunto de $X$ es la topología cofinita, así como que, si $X$ es infinito, toda sucesión inyectiva converge a todos los puntos del espacio.

4. **Conexión** *Si $X$ es infinito, es conexo y localmente conexo.*

   Basta tener en cuenta que no hay abiertos disjuntos no vacíos.

5. *Si $|X| \geq \mathfrak{c}$, entonces $X$ es arcoconexo y localmente arcoconexo, pero si $|X| \leq \aleph_0$, entonces no lo es.*

   Basta tener en cuenta que una aplicación $f : [0,1] \longrightarrow X$ es continua si y sólo si sus fibras $f^{-1}[x]$ son cerradas, para cada $x \in X$, luego la existencia de aplicaciones continuas no constantes de $[0,1]$ en $X$ equivale a que $[0,1]$ pueda partirse en $\kappa$ cerrados disjuntos dos a dos, con $\kappa \leq |X|$, y en tal caso hay arcos que unen cualquier par de puntos de $X$ contenidos en cualquier abierto que los contenga a ambos.

   Si $\kappa \leq \aleph_0$ (o, más en general, si $\kappa < \mathfrak{m}$), no existen tales particiones, por [TC 8.48]. Por lo tanto, el axioma de Martin implica que $X$ es arcoconexo si y sólo si $|X| \geq \mathfrak{c}$, pero también es consistente que $\aleph_1 < \mathfrak{c}$ y que $X$ sea arcoconexo con $|X| = \aleph_1$.

**Ejemplo A.4 (La topología conumerable)** Si $X$ es un conjunto no numerable, la *topología conumerable* en $X$ es la que tiene por abiertos al conjunto vacío y a los subconjuntos de $X$ con complementario numerable (con lo que los cerrados son los subconjuntos numerables y $X$).

1. **Cardinales invariantes**

| $w$ | $\chi$ | $d$ | $dh$ | $c$ | $e$ | $ch$ | $L$ | $Lh$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lvert X\rvert$ | $\lvert X\rvert$ | $\aleph_1$ | $\aleph_1$ | $\aleph_0$ | $\aleph_0$ | $\aleph_0$ | $\aleph_0$ | $\aleph_0$ |

2. **Separación** *$X$ es un espacio $T_1$ que no es $T_2$.*

3. Toda intersección numerable de abiertos en $X$ es abierta ($X$ es un $P$-espacio).

4. **Compacidad** $X$ es de Lindelöf, pero no es compacto.

**Ejemplo A.5** Consideremos el espacio

$$X = \mathbb{R} \setminus \{1/n \mid n \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1, -1\}\}$$

y en él la relación de equivalencia $R$ dada por $x \, R \, y$ si y sólo si se da uno de los tres casos siguientes:

$$1.\ x = y \qquad 2.\ x, y \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \qquad 3.\ xy = 1.$$

En otras palabras,

$$R = \{(0,0)\} \cup (\mathbb{Z} \setminus \{0\})^2 \cup (\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\} \cap (X \times X)).$$

Notemos que la relación $R$ es cerrada en $X \times X$. Llamamos $Y = X/R$.

1. **Separación** *$Y$ es un espacio $T_1$, pero no $T_2$.*

   Llamamos $p : X \longrightarrow Y$ a la proyección en el cociente. Si $y \in Y$, entonces $p^{-1}[\{y\}]$ es finito o bien es $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$, luego en cualquier caso es cerrado, por lo que los puntos de $Y$ son cerrados.

   Sin embargo, vamos a ver que $p(0)$ y $p(1)$ no tienen entornos disjuntos.

   En efecto, si $[0] \in U$, $[1] \in V$, donde $U$ y $V$ son abiertos en $Y$, tenemos que $p^{-1}[U]$ es un entorno de 0 en $X$, luego existe un número real $\epsilon > 0$ tal que $]-\epsilon, \epsilon[\ \subset p^{-1}[U]$. Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $1/n < \epsilon$. Como $p(n) = p(1) \in V$, existe un $0 < \delta < 1$ tal que $]n - 2\delta, n + 2\delta[\ \subset p^{-1}[V]$, pero entonces $p(1/(n+\delta)) = p(n+\delta) \in V$ y, como $0 < 1/(n+\delta) < \epsilon$, también $p(1/(n+\delta)) \in U$, luego $U \cap V \neq \varnothing$.

**Ejemplo A.6 (La compactificación por un punto de $\mathbb{Q}$)** La compactificación de un espacio topológico por un punto está definida en 4.22. Notemos que justo antes hemos probado que $\mathbb{Q}$ no es localmente compacto. Consideramos aquí el espacio $X = \mathbb{Q}^\infty$.

1. **Separación** *$X$ es un espacio $T_1$, pero no $T_2$.*

   En efecto, los puntos $q \in \mathbb{Q}$ son cerrados porque sus complementarios son abiertos, ya que $\{q\}$ es compacto, y $\{\infty\}$ es cerrado por definición de la topología de $\mathbb{Q}^\infty$. Como $\mathbb{Q}$ no es localmente compacto, el teorema 4.23 implica que $X$ no es $T_2$.

2. **Compacidad** *$X$ es compacto, luego localmente compacto en sentido débil, pero no localmente compacto.*

   En efecto, $X$ es compacto por el teorema 4.23, pero ningún punto de $\mathbb{Q}$ tiene un entorno compacto contenido en el entorno $\mathbb{Q}$, luego $X$ no tiene una base de entornos compactos.

3. **Cardinales invariantes** $w(\mathbb{Q}^\infty) = \chi(\mathbb{Q}^\infty) = \chi(\infty, \mathbb{Q}^\infty) > \aleph_0$.

   En efecto, si $\infty$ tuviera una base numerable de entornos $\{U_n\}_{n=0}^\infty$, podemos tomarla decreciente. Sea $\{V_n\}_{n=0}^\infty$ una base numerable decreciente de entornos de 0. Como 0 no tiene entornos compactos, existe $x_n \in V_n \cap U_n$, y entonces la sucesión $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ converge tanto a 0 como a $\infty$, pero entonces $K = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ es compacto, luego $\mathbb{Q}^\infty \setminus K$ es un entorno de $\infty$ que no contiene puntos de la sucesión, luego no contiene a ningún $U_n$, contradicción.

## A.2 Espacios de Hausdorff no completamente regulares

**Ejemplo A.7** Vamos a construir un espacio de Hausdorff no regular. Para cada $x \in \mathbb{R}$ y cada número natural no nulo $i$, definimos

$$U_i(x) = \left]x - \frac{1}{i}, x + \frac{1}{i}\right[, \qquad Z = \{1/m \mid m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}.$$

Consideramos en el conjunto $X = \mathbb{R}$ la topología que tiene por base a los conjuntos de la forma $U_i^*(x) = U_i(x)$ para $x \neq 0$ y $U_i^*(0) = U_i(0) \setminus Z$.

Ciertamente, son la base de una topología, pues, como $x \in U_i^*(x)$, su unión es todo $\mathbb{R}$ y, si $z \in U_i^*(x) \cap U_j^*(y)$, o bien $x = y$, en cuyo caso, llamando $k = \min\{i, j\}$, tenemos que $z \in U_k^*(x) \subset U_i^*(x) \cap U_j^*(y)$, o bien $x \neq y$. En este caso, si además $x \neq 0 \neq y$, tenemos que $U_i^*(x) \cap U_j^*(x)$ es abierto en la topología usual de $\mathbb{R}$, luego existe un $k$ tal que $U_k(z) \subset U_i^*(x) \cap U_j^*(y)$ (porque los intervalos $U_k(z)$ son una base de entornos de $z$ para la topología usual), luego también $z \in U_k^*(z) \subset U_i^*(x) \cap U_j^*(y)$.

Finalmente, si, por ejemplo, $x = 0 \neq y$, o bien $z = 0$, en cuyo caso existe un $k$ tal que $U_k(0) \subset U_i(x) \cap U_j(y)$, en cuyo caso $z \in U_k^*(0) \subset U_i^*(x) \cap U_j^*(y)$, o bien $z \neq 0$, en cuyo caso es claro que podemos tomar un natural $k$ de modo que $U_k(z) \subset U_i(x) \cap U_j(y) \setminus Z$, con lo que también $z \in U_k^*(0) \subset U_i^*(x) \cap U_j^*(y)$.

Los conjuntos $\{U_i^*(x)\}_{i=1}^{\infty}$ forman una base de entornos abiertos de $x$, y es claro que puntos distintos tienen entornos básicos disjuntos, por lo que $X$ es un espacio de Hausdorff. Sin embargo, no es regular, pues el conjunto $Z$ es cerrado en $X$ y no está separado de $0 \in X \setminus Z$.

En efecto, $Z$ es cerrado, pues si $x \in X \setminus z$, claramente existe un $i$ tal que $U_i^*(x) \subset X \setminus Z$, pero $0 \in X \setminus Z$.

Por otra parte, si $0 \in U$ y $Z \subset V$, donde $U$, y $V$ son abiertos en $X$, existe un $i$ tal que $U_i^*(0) \subset U$, y entonces $y = 1/(i+1)$ cumple que $z \in Z \subset V$, luego existe un $j$ tal que $U_j^*(y) \subset V$ y claramente $U_i^*(0) \cap U_j^*(y) \neq \varnothing$, luego $U \cap V \neq \varnothing$. ■

**Ejemplo A.8** Vamos a construir un espacio hereditariamente colectivamente de Hausdorff no regular.

Concretamente, tomamos $X = [0, \omega_1]$, llamamos $p = \omega_1$ y consideramos la topología en la que un conjunto $U \subset X$ es abierto si y sólo si para cada

$\alpha \in U \cap \omega_1$, existe un abierto $V \subset \omega_1$ respecto de la topología de orden tal que $\alpha \in V \subset U$ y, si $p \in U$, entonces existe un c.n.a. $C \subset \omega_1$ tal que

$$U_C = \{\alpha + 1 \mid \alpha \in C\} \subset U.$$

Es inmediato comprobar que esto define ciertamente una topología en $X$, de modo que la topología relativa en $\omega_1$ es la topología de orden y una base de entornos abiertos de $p$ la forman los conjuntos $U_C \cup \{p\}$. (Notemos que son abiertos porque si $\alpha \in U_C$, entonces $\alpha$ es un ordinal sucesor, luego $\{\alpha\}$ es abierto en $\omega_1$, luego en $X$, luego $U_C$ es un entorno de $\alpha$.)

Si $C_0$ es el conjunto de los ordinales límite en $\omega_1$, tenemos que $C_0$ es cerrado (y no acotado) en $\omega_1$, luego también es cerrado en $X$, pues todos los entornos básicos de $p$ son disjuntos de $C$, ya que constan únicamente de ordinales sucesores (aparte de $p$).

Así, $p \notin C_0$, pero $p$ vamos a ver que $p$ no puede ser separado de $C_0$, con lo que $X$ no es un espacio regular.

Si $U$ y $V$ son abiertos disjuntos en $X$ tales que $p \in U$ y $C_0 \subset V$, podemos suponer que $U = \{p\} \cup U_C$, para cierto c.n.a. $C$, con lo que $U_C \cap V = \varnothing$. Sea $f : \omega_1 \longrightarrow \omega_1$ tal que $\delta < f(\delta) \in C$ y sea $C_1 = \{\lambda < \omega_1 \mid f[\lambda] \subset \lambda\}$, que es c.n.a. en $\omega_1$. Si $\lambda \in C_1 \subset V$, existe un $\delta < \lambda$ tal que $]\delta, \lambda] \subset V$, luego $\delta < \alpha = f(\delta) \in C \cap \lambda$, luego $\alpha + 1 \in U_C \cap V$, contradicción.

Veamos ahora que $X$ es hereditariamente colectivamente de Hausdorff, para lo cual tomamos un conjunto discreto $D \subset X$. Si $p \notin D$, es decir, si $D \subset \omega_1$, basta tener en cuenta que $D$ es hereditariamente colectivamente de Hausdorff, por el teorema 12.20, así que podemos suponer que $p \in D$. Sea $D_0 = D \setminus \{p\}$. Como $D$ es discreto, existe un c.n.a. $C_0 \subset \omega_1$ tal que $U_{C_0} \cap D_0 = \varnothing$.

Como $\omega_1$ es hereditariamente colectivamente de Hausdorff, para cada $\delta \in D_0$ existe un $\alpha_\delta < \delta$ tal que los abiertos $\{]\alpha_\delta, \delta]\}_{\delta \in D_0}$ son disjuntos dos a dos.

Si $\delta \in D_0$ es un ordinal sucesor, podemos suponer que $\delta = \alpha_\delta + 1$, de modo que $]\alpha_\delta, \delta] = \{\delta\}$, y en tal caso llamamos $\beta_\delta = \alpha_\delta$. Si $\delta \in D_0$ es un ordinal límite, llamamos $\beta_\delta = \alpha_\delta + 1$.

Así, los abiertos $\{]\beta_\delta, \delta]\}_{\delta \in D_0}$ son también disjuntos dos a dos, y su unión $U = \bigcup\limits_{\delta \in D_0} ]\beta_\delta, \delta]$ cumple que, para cada límite $\delta \in D_0$ tenemos $\alpha_\delta + 1 \notin U$.

Fijemos $\gamma < \omega_1$. Supongamos que el conjunto de los $\delta \in D_0$ que son ordinales límite está acotado por $\epsilon < \omega_1$. Entonces todo $\eta \in C_0$ que cumpla $\eta > \epsilon$ cumple que $\eta + 1 \notin U$, pues en caso contrario existe un $\delta \in D_0$ tal que $\eta + 1 \in ]\beta_\delta, \delta]$, luego $\epsilon < \eta < \delta$, luego $\delta$ es un ordinal sucesor, luego $\eta + 1 = \delta \in U_C \cap D_0 = \varnothing$.

Si, por el contrario, el conjunto de los ordinales límite $\delta \in D_0$ no está acotado en $\omega_1$, tampoco lo está el conjunto de los $\alpha_\delta$ correspondientes, luego podemos tomar un $\delta \in D_0$ tal que $\gamma < \eta = \alpha_\delta$, y así $\eta + 1 \notin U$.

Por consiguiente, podemos definir una función $f : \omega_1 \longrightarrow \omega_1$ tal que, para todo $\gamma < \omega_1$, se cumpla que $\gamma < f(\gamma)$ y $f(\gamma) + 1 \notin U$. Entonces el conjunto $C_1 = \{\lambda < \omega_1 \mid f[\lambda] \subset \lambda\}$ es c.n.a. en $\omega_1$, al igual que $C = C_0 \cap C_1$, y entonces $U_C \cap U = \varnothing$.

En efecto, si $\eta \in U_C \cap U$, tenemos que $\eta = \lambda + 1$, con $\lambda \in C$, luego existe un $\delta \in D_0$ tal que $\lambda + 1 \in ]\beta_\delta, \delta]$. No puede ser que $\delta$ sea un ordinal sucesor, pues entonces $\lambda + 1 = \delta \in U_{C_0} \cap D_0 = \varnothing$, luego $\delta$ es un ordinal límite y $\beta_\delta \leq \lambda$, pero $\beta_\delta = \alpha_\delta + 1$ es un ordinal sucesor, luego $\beta_\delta < \lambda < \delta$ y $\beta_\delta < f(\beta_\delta) < \lambda < \delta$, luego $f(\beta_\delta) + 1 \in \,]\beta_\delta, \delta] \subset U$, en contradicción con la construcción de $f$.

En definitiva, $\{]\beta_\delta, \delta]\}_{\delta \in D_0} \cup \{\{p\} \cup U_C\}$ es una familia de abiertos en $X$ disjuntos dos a dos que separa a los puntos de $D$.

**Ejemplo A.9** Veamos un ejemplo de $P$-espacio de Hausdorff no regular. Para ello llamamos $X_0 = [0, \omega_2]$ con la topología análoga a la considerada en el ejemplo precedente, es decir, la topología que restringida a $\omega_2$ es la topología de orden usual, pero en la que una base de entornos de $p = \omega_2$ la forman los conjuntos

$$U_C \cup \{p\} = \{\alpha + 1 \mid \alpha \in C\} \cup \{p\},$$

donde $C \subset \omega_2$ es un c.n.a. Pero ahora, llamamos $X$ al subespacio de $X_0$ que resulta de eliminar los ordinales límite de cofinalidad numerable (que son los puntos de $X_0$ que no son $P$-puntos).

Es claro entonces que $X$ es un $P$-espacio de Hausdorff, y falta comprobar que el argumento que prueba que $X_0$ no es regular vale igualmente para $X$. En efecto, vamos a ver que $p$ no puede separarse del cerrado $C_0$ formado por los ordinales límite de cofinalidad no numerable en $\omega_2$.

Notemos que, para todo c.n.a. $C \subset \omega_2$, se cumple que $U_C \subset X$, ya que $U_C$ está formado por ordinales sucesores, luego no contiene ninguno de los ordinales límite que hemos eliminado de $X_0$, luego los entornos básicos de $p$ son los mismos en $X$ que en $X_0$.

Si $U$ y $V$ son abiertos disjuntos en $X$ tales que $p \in U$ y $C_0 \subset V$, podemos suponer que $U = \{p\} \cup U_C$, para cierto c.n.a. $C$, con lo que $U_C \cap V = \varnothing$. Sea $f : \omega_2 \longrightarrow \omega_2$ tal que $\delta < f(\delta) \in C$ y sea $C_1 = \{\lambda < \omega_1 \mid f[\lambda] \subset \lambda\}$, que es c.n.a. en $\omega_2$.

Por [TC 6.13], el conjunto de ordinales límite de cofinalidad $\aleph_1$ es estacionario en $\omega_2$, luego existe $\lambda \in C_1$ tal que $\operatorname{cf} \lambda = \aleph_2$, y así $\lambda \in C_0 \subset V$, luego existe un $\delta < \lambda$ tal que $]\delta, \lambda] \cap X \subset V$, luego $\delta < \alpha = f(\delta) \in C \cap \lambda$, luego $\alpha + 1 \in U_C \cap V$, contradicción.

**Ejemplo A.10** Vamos a construir un ejemplo de aplicación $f : X \longrightarrow Y$ entre dos espacios de Hausdorff tal que existe $D \subset X$ denso donde $f|_D$ es continua, para cada filtro $F$ en $D$ convergente a $x \in X$ se cumple que $f[F]$ converge a $f(x)$ y, sin embargo, $f$ no es continua. Esto muestra que la hipótesis de regularidad en el teorema 1.59 no puede suprimirse.

Sea $Y$ un espacio de Hausdorff no regular, y sea $a \in Y$ un punto que no pueda separarse de un cerrado $Y \setminus U$. Equivalentemente, $U$ es un entorno de $a$ que no contiene ningún entorno cerrado de $a$. Llamemos $\mathcal{E}(a)$ al conjunto de todos los entornos de $a$ en $Y$.

Sea $Z = \mathcal{E}(a) \cup \{\infty\}$, donde $\infty$ es cualquier conjunto que no esté en $\mathcal{E}(a)$. Consideramos en $Z$ la topología en la que $U \subset Z$ es abierto si, en caso de que $\infty \in U$, existe $V \in \mathcal{E}(a)$ tal que $\{W \in \mathcal{E}(a) \mid W \subset V\} \subset U$.

Es fácil ver que $Z$ es ciertamente un espacio topológico en el que los elementos de $\mathcal{E}(a)$ son puntos aislados y en el que una base de entornos de $\infty$ está formada por los conjuntos

$$S(V) = \{W \in \mathcal{E}(a) \mid W \subset V\} \cup \{\infty\}.$$

Consideramos en $P = Z \times Y$ la topología en la que $U \subset P$ es abierto si y sólo si $U \setminus \{(\infty, a)\}$ es abierto en $Z \times Y$ con la topología producto y, si $(\infty, a) \in U$, entonces existe un $V \in \mathcal{E}(a)$ tal que $(\{\infty\} \times V) \cup ((S(V) \setminus \{\infty\}) \times Y) \subset U$.

Es fácil ver que $P$ es ciertamente un espacio topológico de Hausdorff con esta topología, de modo que la topología de $P \setminus \{(\infty, a)\}$ es la relativa a la topología producto de $Z \times Y$ y una base de entornos de $(\infty, a)$ la forman los conjuntos

$$E(V) = (\{\infty\} \times V) \cup ((S(V) \setminus \{\infty\}) \times Y),$$

con $V \in \mathcal{E}(a)$.

Sea $D = \{(V, y) \mid \mathcal{E}(a) \times Y \mid y \in V\} \subset P$ y sea $X = \overline{D}$. Vamos a probar que

$$X = \{(V, y) \in \mathcal{E}(a) \times Y \mid y \in \overline{V}\} \cup \{(\infty, a)\}.$$

En efecto, si $(V, y) \in P$, con $V \in \mathcal{E}(a)$, un entorno básico es de la forma $\{V\} \times W$, donde $W$ es un entorno de $y$ en $Y$. Este entorno corta a $D$ si y sólo si $W \cap V \neq \varnothing$, y esto sucede para todo entorno básico si y sólo si $y \in \overline{V}$.

Por otra parte, un punto $(\infty, y)$ con $y \neq a$ no está en $X$, pues podemos tomar entornos disjuntos $a \in V$, $y \in W$ en $Y$, y entonces $S(V) \times W$ es un entorno de $(\infty, y)$ que no corta a $D$. Finalmente, $(\infty, a) \in X$, porque si $V \in \mathcal{E}(a)$, entonces $(V, a) \in E(V) \cap D$.

Sea $f : X \longrightarrow Y$ la proyección en la segunda componente. Se cumple que $f|_D$ es continua, porque la topología de $D$ es la que hereda de la topología producto en $Z \times Y$, y las proyecciones son continuas respecto a la topología producto. Más aún, por el mismo motivo, $f$ es continua en $X \setminus \{(\infty, a)\}$, lo que se traduce en que si $F$ es un filtro en $D$ convergente a un punto de $X$ distinto de $(\infty, a)$, entonces $f[F]$ converge a su imagen en $Y$.

Consideremos ahora un filtro $F$ en $D$ que converja a $(\infty, a)$, y vamos a probar que $f[F]$ converge a $f(\infty, a) = a$, es decir, que $\mathcal{E}(a) \subset f[F]$. Sea $V \in \mathcal{E}(a)$. Entonces $E(V) \cap D \in F$ y $E(V) \cap D \subset f^{-1}[V]$, pues si $(W, x) \in E(V) \cap D$, entonces $f(W, x) = x \in W \subset V$, luego $f^{-1}[V] \in F$ y $V \in f[F]$.

Sin embargo, $f$ no es continua en $(\infty, a)$, pues $U \in \mathcal{E}(a)$, pero $f^{-1}[U]$ no es un entorno de $(\infty, a)$. Si lo fuera, existiría un $V \in \mathcal{E}(a)$ tal que $E(V) \cap X \subset f^{-1}[U]$, y entonces $\overline{V} \subset U$, pues si $v \in \overline{V}$, tenemos que $(V, v) \in E(V) \cap X$, luego $f(V, v) = v \in U$, y esto contradice la elección de $U$.

**Ejemplo A.11 (El espacio de Golomb)** Veamos un ejemplo de espacio de Hausdorff numerable y conexo. Supondremos que el lector conoce algunos conceptos y resultados básicos de la aritmética elemental.

Llamamos $X = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ y consideramos la topología que tiene por base a las progresiones aritméticas:

$$U_{a,b} = \{an + b \mid n \in \mathbb{N}\}$$

donde $\operatorname{mcd}(a, b) = 1$. Estos conjuntos forman una base porque la intersección de dos abiertos básicos o es vacía o es un abierto básico. En efecto, si existe $k = \operatorname{mín}(U_{a,b} \cap U_{a',b'})$, entonces $U_{a,b} \cap U_{a',b'}$ es la sucesión $\operatorname{mcm}(a, a')n + k$, y $\operatorname{mcm}(a, a')$ es primo con $k$, porque si un primo $p$ divide a ambos, entonces $p$ divide a $a$ o a $a'$, con lo que también divide a $b$ o a $b'$, y tenemos una contradicción.

La topología es de Hausdorff, pues si $u$, $v$ son números naturales no nulos, podemos tomar un primo $p$ mayor que ambos, y entonces $U_{p,u}$, $U_{p,v}$ son entornos disjuntos de $u$ y $v$.

Para probar que $X$ es conexo, suponemos que $X = U_1 \cup U_2$ es una descomposición en abiertos disjuntos no vacíos. Pongamos que $U_{a_i,b_i} \subset U_i$. Sea $a$ un múltiplo de $a_1$ y vamos a probar que está en $U_1$. Si, por el contrario, $a \in U_2$, tomamos un abierto básico $a \in U_{a',b'} \subset U_2$. Entonces $a = a'n + b'$ y, como $\operatorname{mcd}(a', b') = 1$, tiene que ser $\operatorname{mcd}(a, a') = 1$ y , como $a$ es múltiplo de $a_1$, también $\operatorname{mcd}(a_1, a') = 1$. La relación de Bezout nos da entonces que existen enteros $m_0$ y $n_0$ tales que $a_1m_0 - a'n_0 = 1$, luego también existen enteros $m$ y $n$ tales que $a_1m - a'n = b' - b_1$ o, equivalentemente, $k = a_1m + b_1 = a'n + b'$. Si $m$ o $n$ es negativo, sumando a ambos miembros un $ka_1a'$ suficientemente grande podemos conseguir valores positivos que cumplan lo mismo, y así $k \in U_{a_1,b_1} \cap U_{a',b'} \subset U_1 \cap U_2$, contradicción.

Así los múltiplos de $a_1$ están en $U_1$ e, igualmente, los múltiplos de $a_2$ están en $U_2$, pero entonces $a_1a_2 \in U_1 \cap U_2$, contradicción.

El teorema 5.70 implica que $X$ no es regular.

**Ejemplo A.12** Vamos a construir un espacio topológico regular no completamente regular.

Tomamos $X = \mathbb{R}^2 \cup \{\pm\infty\}$ y definimos: $\Delta = \{(a, a) \mid a \in \mathbb{R}\}$,

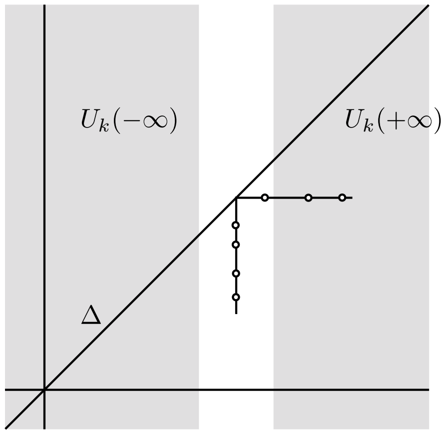
$$\Gamma_a = \{(x, a) \mid a \leq x \leq a + 3\} \cup \{(a, x) \mid a - 3 \leq x \leq a\},$$

$$U_k(+\infty) = \{+\infty\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > k\},$$
$$U_k(-\infty) = \{-\infty\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < -k\}.$$

Consideramos en $X$ la topología para la cual un conjunto $U$ es abierto si cumple las condiciones siguientes:

1. Si $(a, a) \in U$, existe un conjunto finito $F$ tal que $\Gamma_a \setminus F \subset U$.
2. Si $+\infty \in U$, existe un $k \in \mathbb{Z}$ tal que $U_k(+\infty) \subset U$.
3. Si $-\infty \in U$, existe un $k \in \mathbb{Z}$ tal que $U_k(-\infty) \subset U$.

Es fácil comprobar que los abiertos así definidos constituyen realmente una topología de Hausdorff en $X$ en la que los puntos de $X \setminus \Delta$ son aislados (es decir, $\{(x, y)\}$ es abierto y cerrado si $x \neq y$), una base de entornos abiertos cerrados de cada punto $(a, a) \in \Delta$ la forman los conjuntos $\Gamma_a \setminus F$, donde $F$ es finito y no contiene a $(a, a)$, una base de entornos abiertos de $+\infty$ la forman los conjuntos $U_k(+\infty)$, con $k \in \mathbb{Z}$ y una base de entornos (no abiertos) de $-\infty$ la forman los conjuntos $U_k(-\infty)$, con $k \in \mathbb{Z}$.




Notemos que $U_k(+\infty)$ es abierto, pero no cerrado, si bien

$$\overline{U_{k+3}(+\infty)} \subset U_k(+\infty).$$

Por otra parte, $U_k(-\infty)$ es un entorno cerrado de $-\infty$, pero no es abierto, sino que

$$U_{k+3}(-\infty) \subset \mathring{U}_k(-\infty).$$

De aquí se sigue que el espacio $X$ es regular, pues si $U$ es abierto y $p \in U$, existe un entorno básico de $p$ de manera que $p \in V \subset \overline{V} \subset U$. Más concretamente, si $p \neq \pm\infty$, sirve cualquier entorno básico (que es abierto y cerrado) de $p$ contenido en $U$, si $p = +\infty$ sirve cualquier $U_{k+3}(+\infty)$ tal que $U_k(+\infty) \subset U$ y si $p = -\infty$ sirve cualquier $U_k(-\infty) \subset U$.

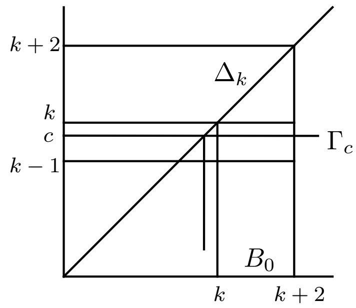
Ahora vamos a probar que toda aplicación continua $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ cumple $f(-\infty) = f(+\infty)$.

La clave está en que si $a \in \mathbb{R}$, entonces $Z_a = f^{-1}[\{f(a, a)\}]$ es un cero en $X$, luego es un cerrado $G_\delta$, luego contiene una intersección numerable de entornos básicos de $(a, a)$, es es un conjunto de la forma $\Gamma_a \setminus F$, donde $F$ es numerable. En otras palabras, $f$ toma el mismo valor $f(a, a)$ en todos los puntos de $\Gamma_a$ salvo a lo sumo en una cantidad numerable de ellos.

Vamos a probar que, para cada $k \in \mathbb{Z}$, la función $f$ toma un mismo valor constante en todos los puntos de $\Delta_k = \{(a, a) \mid k < a < k + 2\}$ salvo a lo sumo en una cantidad numerable de ellos.

Para ello fijamos un conjunto infinito numerable $C \subset ]k - 1, k[$ y llamamos $B = ]k, k + 2[$. Para cada $c \in C$, ya hemos señalado que $f$ toma el valor $f(c, c)$ en todos los puntos de $\Gamma_c$ salvo a lo sumo en una cantidad numerable, luego en particular $(b, c) \in Z_c$ para todo $b \in B \setminus N_c$, donde $N_c$ es numerable. También es numerable la unión $N = \bigcup\limits_{c \in C} N_c$. Llamamos $B_0 = B \setminus N$.

Vamos a probar que $f$ es constante en $\{(b, b) \mid b \in B_0\}$. Para ello suponemos que existen $b_1$, $b_2 \in B_0$ tales que $f(b_1, b_1) \neq f(b_2, b_2)$. Sean $V_1$ y $V_2$ entornos disjuntos de estas dos imágenes. Entonces $f^{-1}[V_i]$ es un entorno de $(b_i, b_i)$, luego contiene a $\Gamma_{b_i}$ salvo un número finito de puntos.




En particular, $f^{-1}[V_i] \cap (\{b_i\} \times C)$ es cofinito en $\{b_i\} \times C$. Por consiguiente, podemos tomar un mismo $c \in C$ tal que $(b_i, c) \in f^{-1}[V_i]$ y, como $b_i \in B_0$, tenemos que $b_i \notin N_c$, luego $(b_i, c) \in Z_c$, luego

$$f(b_1, c) = f(c, c) = f(b_2, c),$$

luego $f(c, c) \in V_1 \cap V_2 = \varnothing$.

Así tenemos que $f(a, a)$ toma un mismo valor para todo $k < a < k + 2$ salvo a lo sumo en una cantidad numerable de puntos, pero también para todo $k + 1 < a < k + 3$, luego el valor constante que $f$ toma en todos los puntos de $\Delta_k$ salvo en una cantidad numerable de ellos debe ser el mismo que toma en $\Delta_{k+1}$, y esto implica que $f$ toma un mismo valor $\alpha$ en todos los puntos de $\Delta$ salvo a lo sumo en una cantidad numerable de puntos.

A su vez, esto implica que $\pm\infty \in \overline{f^{-1}[\{\alpha\}]} = f^{-1}[\{\alpha\}]$, luego concluimos que $f(-\infty) = f(+\infty) = \alpha$.

**Ejemplo A.13** Ahora construiremos un espacio regular $X$ tal que las únicas funciones continuas $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ son las constantes.

Para ello probaremos lo siguiente:

> *Si $Z$ es un espacio regular, existe otro espacio regular $Q(Z)$ que contiene a $Z$ como subespacio y de manera que toda función continua $f : Q(Z) \longrightarrow \mathbb{R}$ es constante en $Z$.*

Sea $Q$ el espacio construido en el ejemplo anterior, que contiene dos puntos $\pm\infty$ tales que toda función continua $f : Q \longrightarrow \mathbb{R}$ cumple $f(-\infty) = f(+\infty)$. Consideramos el producto $Z \times Q$ con la topología respecto a la cual un conjunto $V \subset Z \times Q$ es abierto si y sólo si cumple:

1. Si $(z, x) \in V$, existe un entorno $U$ de $x$ en $Q$ tal que $\{z\} \times U \subset V$.
2. Si $(z, +\infty) \in V$, existe un entorno $U$ de $z$ en $Z$ tal que $U \times \{+\infty\} \subset V$.

Es claro que los abiertos así definidos constituyen una topología de Hausdorff en $Z \times Q$, respecto de la cual una base de entornos abiertos de cada punto $(z, x)$ con $x \neq +\infty$ la forman los segmentos $\{z\} \times U$, donde $U$ recorre una base de entornos de $x$ en $Q$, y una base de entornos abiertos de cada punto $(z, +\infty)$ la constituyen los conjuntos de la forma

$$V = \bigcup_{z' \in U} \{z'\} \times U_{z'},$$

donde $U$ es un entorno abierto de $z$ en $Z$ y cada $U_{z'}$ es un entorno abierto de $+\infty$ en $Q$.

Se cumple que $Z \times Q$ es regular, pues si $(z,x) \in V$, donde $V$ es abierto y $x \neq +\infty$, tomamos un entorno $U$ de $x$ en $Q$ tal que $\{z\} \times U \subset V$ y a su vez, por la regularidad de $Q$, otro entorno tal que $x \in W \subset \overline{W} \subset U$, con lo que $(z,x) \in \{z\} \times W \subset \overline{\{z\} \times W} \subset \{z\} \times U \subset V$. Si el punto es $(z,+\infty)$, podemos suponer que $V$ es de la forma indicada más arriba, y podemos tomar entornos $z \in W \subset \overline{W} \subset U$ y, para cada $z' \in W$, entornos $z' \in U^*_{z'} \subset \overline{U}^*_{z'} \subset U_{z'}$, con lo que

$$(z,+\infty) \in V^* = \bigcup_{z' \in W} \{z'\} \times U^*_{z'} \subset \overline{V}^* = \bigcup_{z' \in \overline{W}} \{z'\} \times \overline{U}^*_{z'} \subset V.$$

Sea $Q(Z) = (Z \times Q)/R$, donde $R$ es la relación de equivalencia que identifica los puntos del cerrado $Z \times \{-\infty\}$. Sea $\pi : Z \times Q \longrightarrow Q(Z)$ la proyección natural y llamemos $\infty \in Q(Z)$ al punto en que se identifican todos los puntos de $Z \times \{-\infty\}$.

La aplicación $\phi : Z \longrightarrow Q(Z)$ dada por $\phi(z) = [(z,+\infty)]$ es claramente inyectiva y continua, y es un homeomorfismo en su imagen, pues si $U$ es abierto en $Z$ y $W$ es cualquier entorno abierto de $+\infty$ en $X$ que no contenga a $-\infty$, entonces $U \times W$ es abierto en $Z \times Q$ y $\phi[U] = (U \times W) \cap \phi[Z]$ es abierto en $\phi[Z]$. Por lo tanto, podemos identificar a $Z$ con su imagen en $Q(Z)$, que es cerrada.

Veamos ahora que $Q(Z)$ es regular (y en particular de Hausdorff). Para ello tomamos un cerrado $C \subset Q(Z)$ y un punto $p \in Q(Z) \setminus C$. Si $p \neq \infty$, podemos cambiar $C$ por $C \cup \{\infty\}$ y suponer que $\infty \in C$.

Sea $(z,x)$ el único punto que cumple $\pi(z,x) = p \notin \pi^{-1}[C]$. Como $Z \times Q$ es regular, existen abiertos disjuntos tales que

$$(z,x) \in V_1, \qquad Z \times \{-\infty\} \subset \pi^{-1}[C] \subset V_2.$$

Entonces $\pi^{-1}[\pi[V_1]] = V_1$, pues $V_1 \cap (Z \times \{-\infty\}) = \varnothing$, luego $\pi[V_1]$ es abierto en $Q(X)$. Igualmente $\pi^{-1}[\pi[V_2]] = V_2$, porque $Z \times \{-\infty\} \subset V_2$, y así $\pi[V_2]$ también es abierto. Además $p \in \pi[V_1]$, $C \subset \pi[V_2]$ y los abiertos son disjuntos.

Si $p = \infty$, podemos sustituir $C$ por $C \cup Z$ y suponer que $Z \subset C$. En $Z \times Q$ tenemos los cerrados disjuntos $Z \times \{-\infty\} = \pi^{-1}[\infty]$ y $Z \times \{+\infty\} \subset \pi^{-1}[C]$. Observemos que si $z \in Z$, la aplicación $Q \longrightarrow Z \times Q$ dada por $x \mapsto (z,x)$ es continua, por lo que el conjunto $\{x \in Q \mid (z,x) \in C\}$ es cerrado en $Q$, y no contiene a $-\infty$, luego por la regularidad de $Q$ existen abiertos disjuntos $U_z$, $V_z$ tales que $-\infty \in U_z$, $\{x \in Q \mid (z,x) \in C\} \subset V_z$.

Entonces $U = \bigcup\limits_{z \in Z} U_z$ y $V = \bigcup\limits_{z \in Z} V_z$ son entornos disjuntos de $Z \times \{-\infty\}$ y $\pi^{-1}[C]$. Además $\pi^{-1}[\pi[U]] = U$ y $\pi^{-1}[\pi[V]] = V$, luego $\pi[U]$ y $\pi[V]$ son abiertos disjuntos que separan a $\infty$ y a $C$.

Consideremos ahora una aplicación continua $f : Q(Z) \longrightarrow \mathbb{R}$. Vamos a probar que todo $z \in Z$ cumple que $f(z) = f(\infty)$, con lo que $f$ es constante en $Z$.

En efecto, la aplicación $g : Q \longrightarrow Q(Z)$ dada por $g(x) = [(x,z)]$ es continua, luego también lo es $g \circ f$, luego por la construcción de $Q$ tenemos que $f(g(-\infty)) = f(g(+\infty))$, es decir, $f(\infty) = f(z)$.

Esto termina la construcción de $Q(Z)$. Ahora tomamos cualquier espacio regular $Z_0$ (por ejemplo, uno formado por un punto) y definimos $Z_{n+1} = Q(Z_n)$. Podemos suponer que se dan las inclusiones $Z_n \subset Z_{n+1}$, con lo que podemos formar la unión $X = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} Z_n$.

Consideramos en $X$ la topología respecto a la cual $U \subset X$ es abierto si y sólo si $U \cap Z_n$ es abierto en $Z_n$, para todo $n$. Es claro que tales conjuntos forman ciertamente una topología en $X$, y que la topología inducida desde $X$ en cada $Z_n$ es la topología que ya tenía $Z_n$. (Una inclusión se sigue de la propia definición de la topología de $X$ y, para la contraria, si $U_n$ es abierto en $Z_n$, existe un abierto $U_{n+1}$ en $Z_{n+1}$ tal que $U_{n+1} \cap Z_n = U_n$, e igualmente existe un $U_{n+2}$ en $Z_{n+2}$ tal que $U_{n+2} \cap Z_{n+1} = U_{n+1}$. De este modo obtenemos una sucesión de abiertos y $U = \bigcup\limits_{m \geq n} U_m$ es un abierto en $X$ tal que $U \cap Z_n = U_n$.)

Esto se traduce en que las inclusiones $Z_n \longrightarrow X$ son continuas, luego si $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua, cada restricción $f|_{Z_{n+1}}$ es constante en $Z_n$, luego $f$ es constante en todos los $Z_n$, luego es constante en $X$. ■

**Ejemplo A.14** Veamos un ejemplo de espacio de Hausdorff hereditariamente de Lindelöf no regular.

Tomamos $X = \mathbb{R}$ con la topología que tiene por base a los conjuntos de la forma $U \setminus N$, donde $U$ es abierto en $\mathbb{R}$ respecto de la topología usual y $N$ es numerable. Es inmediato comprobar que estos conjuntos constituyen ciertamente la base de una topología de Hausdorff en $X$.

Notemos que todo subconjunto numerable de $X$ es cerrado, por lo que $X$ no es separable. En particular $\mathbb{Q}$ es cerrado y, si $\xi$ es un número irracional, entonces $\xi$ no puede ser separado de $\mathbb{Q}$. En efecto, si hubiera abiertos disjuntos $\xi \in A_1$, $\mathbb{Q} \subset A_2$, podemos suponer que son básicos, pues $A_2$ contendrá una unión numerable de abiertos básicos que contiene a $\mathbb{Q}$, pero la unión numerable de abiertos básicos es un abierto básico. En suma, $A_1 = U_1 \setminus N_1$, $A_2 = U_2 \setminus N_2$, donde $U_1$, $U_2$ son abiertos en $\mathbb{R}$ y $N_1$, $N_2$ son numerables. Pero $U_2$ es un abierto denso, ya que contiene a $\mathbb{Q}$, luego $U_1 \cap U_2$ es un abierto en $\mathbb{R}$ no vacío, luego contiene un intervalo $]a, b[ \subset U_1 \cap U_2$, luego $]a, b[ \setminus (N_1 \cup N_2) \subset A_1 \cap A_2 = \varnothing$, contradicción.

Sea ahora $A \subset X$ y sea $\{A_i\}_{i \in I}$ un cubrimiento abierto de $A$, que podemos tomar formado por abiertos básicos. Sea $A_i = U_i \setminus N_i$, de modo que $U_i$ es abierto en $\mathbb{R}$ y $\mathbb{N}$ es numerable. Como $\mathbb{R}$ es hereditariamente de Lindelöf, $A$ puede cubrirse por una cantidad numerable de abiertos $\{U_i\}_{i \in I_0}$, y entonces $\{A_i\}_{i \in I_0}$ cubre a $A \setminus \bigcup\limits_{i \in I_0} N_i$, luego añadiendo al subcubrimiento una cantidad numerable de abiertos para cubrir los puntos de $A \cap \bigcup\limits_{i \in I_0} N_i$, obtenemos un subcubrimiento numerable.

**Ejemplo A.15** Sea $X = \beta\omega$, pero con la topología respecto de la cual $A \subset X$ es abierto si, cuando $p \in A \setminus \omega$, existe $B \in p$ tal que $B \subset A$.

1. *$\omega$ es un subespacio discreto denso en $X$ y $X\setminus\omega$ también es discreto.*

   DEMOSTRACIÓN: Todo entorno $A$ de $p\in X\setminus\omega$ contiene un abierto básico $p\cup B$, con $B\in p$, de modo que $A\cap\omega\neq\varnothing$.

   Por otra parte, $(p\cup B)\cap(X\setminus\omega)=\{p\}$, luego $X\setminus\omega$ es discreto.

2. **Separación** *$X$ es un espacio de Hausdorff no regular.*

   Si $p$, $q\in X\setminus\omega$ son puntos distintos, entonces, como son maximales, existe $A\in p\setminus q$, con lo que $B=\omega\setminus A\in q\setminus p$. Así, $A\cup\{p\}$ y $B\cup\{q\}$ son entornos disjuntos de $p$ y $q$.

   También es fácil separar $p\in X\setminus\omega$ de un $n\in\omega$, pues, como $p$ no es fijo, tenemos que $\omega\setminus n\in p$, luego $\{n\}$ y $\{p\}\cup\omega\setminus n$ son entornos disjuntos de $n$ y $p$.

   Para probar que no es regular observamos que si $A\in p\in X\setminus\omega$, entonces $\overline{A}^{\beta\omega}\subset\overline{\{p\}\cup A}$. En efecto, si $q\in\overline{A}^{\beta\omega}$, entonces $A\in q$. Si $q\in\omega$, necesariamente $q\in A\subset\{p\}\cup A$. Si $q\in X\setminus\omega$, un entorno básico de $q$ es de la forma $\{q\}\cup B$, con $B\in q$, luego $A\cap B\in q$, luego $A\cap B\neq\varnothing$, e igualmente $(\{q\}\cup B)\cap(\{p\}\cup A)\neq\varnothing$.

   Pero $\overline{A}^{\beta\omega}$ es homeomorfo a $\beta\omega$, por lo que las clausuras de los entornos de los puntos de $X\setminus\omega$ son no numerables, luego, dado $p\in U=\{p\}\cup A$, con $A\in p$, es imposible que exista un abierto $V$ tal que $p\in V\subset\overline{V}\subset\{p\}\cup A$, ya que $\overline{V}$ será no numerable.

3. **Conexión** *$X$ es extremadamente disconexo, pero no cerodimensional.*

   Sea $U$ abierto en $X$ y tomemos $p\in\overline{U}\setminus U$. Como los puntos de $\omega$ son abiertos, necesariamente $p\in X\setminus\omega$ y, para todo $A\in p$, tenemos que $(\{p\}\cup A)\cap U\neq\varnothing$, que es lo mismo que decir que $A\cap U\neq\varnothing$. De aquí se sigue que $\omega\setminus U\notin p$, pues este conjunto no puede cortar a $U$ y, como $p$ es un ultrafiltro, $\omega\cap U\in p$. A su vez, esto implica que $(\omega\cap U)\cup\{p\}$ es abierto, luego también lo es $U\cup\{p\}=U\cup((\omega\cap U)\cup\{p\})$. Como $U\cup\{p\}\subset\overline{U}$, tenemos que $\overline{U}$ es abierta.

   El teorema 5.3 implica que $X$ no es cerodimensional.

4. **Cardinales invariantes**

| $w$ | $\chi$ | $d$ | $dh$ | $c$ | $e$ | $ch$ | $L$ | $Lh$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2^{\mathfrak{c}}$ | $\mathfrak{u}$ | $\aleph_0$ | $2^{\mathfrak{c}}$ | $\aleph_0$ | $2^{\mathfrak{c}}$ | $2^{\mathfrak{c}}$ | $2^{\mathfrak{c}}$ | $2^{\mathfrak{c}}$ |

## A.3 Espacios completamente regulares

**Ejemplo A.16 (El espacio Fortissimo)** Sea $X$ un conjunto no numerable, fijamos $\infty\in X$ y consideramos en $X$ la topología por la que son abiertos todos los subconjuntos de $X\setminus\{\infty\}$ y los conjuntos que contienen a $\infty$ cuyo complementario es numerable.

El nombre se debe a que es una variante de los llamados *espacios de Fort,* que son las compactificaciones de Alexandroff de los espacios discretos.

1. **Separación** *El espacio $X$ es monótonamente normal (en particular $T_5$), pero no $T_6$.*

   En efecto, la función

   $$H(p,U) = \begin{cases} \{p\} & \text{si } p \neq \infty, \\ U & \text{si } p = \infty \end{cases}$$

   cumple las condiciones del teorema 5.22, luego $X$ es monótonamente normal, pero no es perfectamente normal porque $\{\infty\}$ no es $G_\delta$.

2. **Compacidad** *$X$ es un espacio de Lindelöf, pero no es compacto ni hereditariamente de Lindelöf.*

   En efecto, es claro que de todo cubrimiento abierto se puede extraer un subcubrimiento numerable, ya que el abierto que contenga a $\infty$ contiene a todo $X$ salvo a lo sumo una cantidad numerable de puntos. Pero si $C \subset X \setminus \infty$ es infinito numerable, entonces $\{X \setminus A\} \cup \{\{p\} \mid p \in A\}$ es un cubrimiento numerable de $X$ que no admite un subcubrimiento finito. Como $X \setminus \{\infty\}$ es discreto no numerable, no es de Lindelöf, luego $X$ no es hereditariamente de Lindelöf.

3. Notemos que si $D = X \setminus \{\infty\}$, entonces $\infty \in \overline{D}$, pero no existe ninguna sucesión en $D$ que converja a $\infty$, ya que si $\{d_n\}_{n=0}^{\infty}$ es cualquier sucesión en $D$, el conjunto $U = X \setminus \{d_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ es un entorno de $\infty$ que no contiene términos de la sucesión.

4. Notemos también que se trata de un $P$-espacio, es decir, que la intersección numerable de abiertos es abierta.

**Ejemplo A.17** Veamos un ejemplo de espacio numerable que no cumple el primer axioma de numerabilidad. Llamamos $X = (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \cup \{\infty\}$, con la topología para la cual $A \subset X$ es abierto si y sólo si $\infty \notin A$ o bien $(\{n\} \times \mathbb{N}) \setminus A$ es finito, para todo $n \in \mathbb{N}$.

1. **Compacidad** *$X$ es un espacio de Lindelöf.* (porque es numerable).

2. **Conexión** *$X$ es cerodimensional*

   En efecto, es claro que $X$ es $T_1$, todos los entornos de $\infty$ son abiertos cerrados, luego una base de $X$ formada por abiertos cerrados la constituyen los entornos de $\infty$ y los puntos $\{(a,b)\}$ de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

3. **Separación** *$X$ es perfectamente normal.*

   Como $X$ es cerodimensional, es regular (5.3), como es de Lindelöf, es normal (5.13) y es perfectamente normal porque todo abierto es numerable, luego es un $F_\sigma$, luego todo cerrado es un $G_\delta$.

4. $\chi(\infty, X) > \aleph_0$.

   Si $\{U_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una familia de entornos de $\infty$, llamamos $m_n$ al mínimo número natural tal que $(n, m_n) \in U_n$ y definimos

$$U = \{\infty\} \cup \bigcup_{n=0}^{\infty} ((U_n \cap (\{n\} \times \mathbb{N})) \setminus \{(n, m_n\}).$$

   Así $U$ es un entorno de $\infty$, pero $(n, m_n) \in U_n \setminus U$, por lo que $U$ no contiene a ningún $U_n$ y así la familia dada no es una base de entornos de $\infty$. Más precisamente:

5. $w(X) = \chi(X) = \chi(\infty, x) = \mathfrak{d}$.

   En efecto, sea $\{f_\alpha\}_{\alpha<\mathfrak{d}}$ una familia dominante en ${}^\omega\omega$, para cada par $(m, n) \in \omega \times \omega$, sea

$$f_\alpha^{m,n}(k) = \begin{cases} \text{máx}\{f_\alpha(k), m\} & \text{si } k \leq n, \\ f_\alpha(k) & \text{si } k > n. \end{cases}$$

   La familia $\mathcal{B}$ formada por todas las funciones $f_\alpha^{m,n}$ sigue teniendo cardinal $\mathfrak{d}$. Para cada $f \in \mathcal{B}$, sea $U_f = \{\infty\} \cup \bigcup\limits_{n\in\omega} (\{n\} \times (\omega \setminus f(n)))$.

   Claramente, $U_f$ es un entorno de $\infty$ y estos conjuntos forman una base de entornos. En efecto, si $A$ es cualquier entorno de $\infty$, podemos definir $f_A \in {}^\omega\omega$ mediante $f_A(n) = \text{mín}\{k \in \omega \mid (\{n\} \times \omega) \setminus A \subset \{n\} \times k\}$. Existe $\alpha < \mathfrak{d}$ tal que $f_A \leq^* f_\alpha$, luego existen $m$ y $n$ tales que $f_A \leq f_\alpha^{m,n}$, de donde a su vez se sigue que $U_f \subset A$.

   Similarmente se prueba que si $\{A_\alpha\}_{\alpha<\kappa}$ es una base de entornos de $\infty$, entonces las funciones $f_{A_\alpha}$ son una familia dominante, por lo que $\alpha \geq \mathfrak{d}$.

**Ejemplo A.18** Sea $X$ un conjunto infinito. Para cada sucesión finita $x_1, \ldots, x_n$ de puntos de $X$ definimos

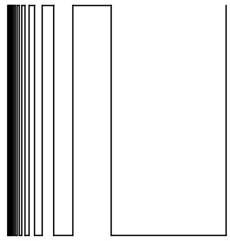
$$V(x_1, \ldots, x_n) = \Delta \cup \Big((X \times X) \setminus \bigcup_{i=1}^{n} \big((X \times \{x_i\}) \cup (\{x_i\} \times X)\big)\Big).$$

Es fácil ver que estos conjuntos son la base de una uniformidad $\mathcal{U}$ en $X$. Notemos que $2V(x_1, \ldots, x_n) = V(x_1, \ldots, x_n)$.

Puesto que $B_{V(x)}(x) = \{x\}$, vemos que $\mathcal{U}$ induce la topología discreta. Sin embargo, $\Delta \notin \mathcal{U}$ y por tanto $\mathcal{U}$ no es la uniformidad discreta. Así tenemos un ejemplo de dos uniformidades distintas que inducen la misma topología. Más aún, es claro que cualquier base de $\mathcal{U}$ tiene al menos el cardinal de $X$, luego si $X$ es no numerable tenemos una uniformidad no metrizable (por el teorema 2.27) que induce una topología metrizable.

### A.3.1 Espacios de números reales

**Ejemplo A.19 (El seno del topólogo (variante))** Consideremos el subespacio $X$ de $[0,1]^2$ que muestra la figura,[1] donde los segmentos verticales tienen su primera coordenada igual a $1/n$, para $n = 1, 2, 3, \ldots$



*$X$ es un subespacio arcoconexo de $[0,1]^2$ cuya clausura no es arcoconexa.*

Es fácil probar que se trata de un espacio arcoconexo (de hecho, es homeomorfo al intervalo $]0,1]$).

Por otra parte, $\overline{X} = X \cup (\{0\} \times [0,1])$. Para probar que la clausura no es arcoconexa demostraremos que un arco que empiece en el segmento $\{0\} \times [0,1]$ tiene necesariamente su imagen contenida en él, luego no puede conectar a ninguno de sus puntos con cualquier otro con primera coordenada $> 0$.

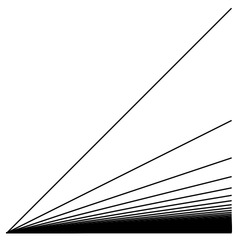
En efecto, sea $f : [0,1] \longrightarrow \overline{X}$, digamos $f(t) = (f_1(t), f_2(t))$, un arco tal que $f_1(0) = 0$ y vamos a ver que $f_1$ es constante. Supongamos que no lo es y consideremos la componente conexa de 0 en el cerrado $f_1^{-1}[\{0\}] \subset [0,1]$. Se trata de un intervalo cerrado (tal vez reducido a $\{0\}$), luego podemos considerar su extremo superior $t_0$. De este modo $f_1(t) = 0$ para todo $t \in [0, t_0]$, pero para todo $t_0 < t \leq 1$ existe un $t_0 < t' < t$ tal que $f_1(t) > 0$. Se cumple que $f_2(t_0) \neq 0$ o bien $f_2(t_0) \neq 1$. La prueba es análoga en ambos casos, por lo que supondremos que $f_2(t_0) < 1$. Por continuidad, existe un $\delta > 0$ tal que si $t_0 < t < t_0 + \delta$, entonces $f_2(t) < 1$. Tomemos $t_0 < t_1 < t_0 + \delta$ tal que $f_1(t_1) > 0$.

Podemos tomar $0 < x < f_1(t_1)$ tal que $X \cap (\{x\} \times [0,1]) = \{(x,1)\}$ (basta con que $(x,1)$ esté en uno de los infinitos segmentos horizontales de altura 1 que forman $X$ sin ser uno de sus extremos). Pero, por el teorema de los valores intermedios, $[0, f_1(t_1)] \subset f_1[[t_0, t_1]]$, luego existe $t_0 < t_2 < t_1 < t_0 + \delta$ tal que $f_1(t_2) = x$, pero, como $f(t_2) \in X$, tiene que ser $f_2(t_2) = 1$, contradicción.

Así pues, $\overline{X}$ tiene dos componentes arcoconexas, a saber $X$ y $\overline{X} \setminus X$, la primera de las cuales no es cerrada.

Notemos que $\overline{X}$ tampoco es es localmente conexo, pues es fácil ver que todo entorno suficientemente pequeño de un punto de $\overline{X} \setminus X$ tiene infinitas componentes conexas (contenidas en infinitos segmentos verticales).

**Ejemplo A.20 (El espacio escoba)** El *espacio escoba* $E$ es el subespacio de $\mathbb{R}^2$ que muestra la figura.



Es la unión del segmento que une $(0,0)$ con $(1,0)$ con todos los segmentos que unen $(0,0)$ con los puntos $(1, 1/n)$, para $n = 1, 2, 3, \ldots$

*$X$ es un espacio conexo no localmente conexo.*

Claramente es conexo, pues todos los puntos de $E$ están en la componente conexa del punto $(0,0)$ (de

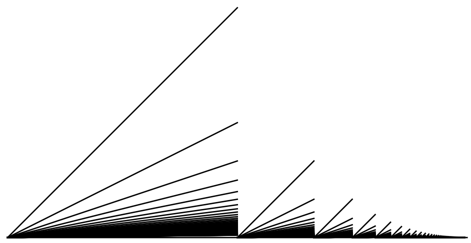
[1] El espacio conocido usualmente como "seno del topólogo" se define como la gráfica de la función $\operatorname{sen}(1/x)$, para $0 < x \leq 1$, a la que se añade el punto $(0,0)$.

hecho, es arcoconexo). Sin embargo, no es localmente conexo, pues todo entorno de $(1,0)$ que no contenga a $(0,0)$ es disconexo, luego $(1,0)$ no tiene una base de entornos conexos de 0.

Este ejemplo muestra también que si $f : X \longrightarrow Y$ es continua y suprayectiva y $X$ es localmente (arco)conexo, el espacio $Y$ no es necesariamente localmente conexo. Basta tomar $X = [0,1] \times \mathbb{N}$, $Y = E$ y como $f$ la aplicación que hace corresponder el segmento $[0,1] \times \{0\}$ con el segmento que une $(0,0)$ con $(1,0)$ y cada segmento $[0,1] \times \{n\}$, para $n > 0$, con el segmento que une $(0,0)$ con $(1,1/n)$.

**Ejemplo A.21 (Escobas encadenadas)** Otro ejemplo ilustrativo se forma con infinitas escobas dispuestas como indica la figura, donde la base de cada una es el segmento que une los puntos

$$(-1/k,0) \text{ y } (-1/(k+1),0),$$



y la base completa es el segmento que une $(-1,0)$ con $(0,0)$ (de modo que el $(0,0)$ no forma parte de ninguna de las escobas). Se trata igualmente de un espacio conexo que no es localmente conexo, pero su peculiaridad consiste en que el punto $(0,0)$ tiene una base de entornos conexos (la formada por las uniones de todas las escobas a partir de una dada junto con el punto $(0,0)$), pero no una base de entornos abiertos conexos. De hecho, el único entorno abierto conexo de $(0,0)$ es el espacio completo.

**Ejemplo A.22** Sea $X \subset \mathbb{R}^2$ el espacio formado por los segmentos $[0,1]\times\{1/n\}$, para $n = 1, 2, \ldots$ junto con $([0,1] \times \{0\}) \setminus \{(1/2,0)\}$.

1. **(Compacidad)** *$X$ es localmente compacto.*

   En efecto, cada segmento $[0,1] \times \{1/n\}$ es un entorno compacto de cualquiera de sus puntos, mientras que $X \cap ([0,b] \times \mathbb{R})$, para $0 < b < 1/2$ y $X \cap ([a,1] \times \mathbb{R})$, para $1/2 < b < 1$ son entornos compactos de los puntos de $([0,1] \times \{0\}) \setminus \{(1/2,0)\}$.

2. **(Conexión)** *Las componentes conexas de $X$ no coinciden con sus cuasicomponentes.*

   Es claro que las componentes conexas de $X$ son los segmentos $[0,1]\times\{1/n\}$ junto con $[0,1/2[\times\{0\}$ y $]1/2,1]\times\{0\}$. Sin embargo, una cuasicomponente de $X$ es $Q = ([0,1] \times \{0\}) \setminus \{(1/2,0)\}$, pues si $U$ es un abierto cerrado en $X$ que contiene, por ejemplo, a $(0,0)$, tiene que contener a todos los segmentos conexos $[0,1]\times\{1/n\}$ para todo $n$ suficientemente grande, luego $Q \subset \overline{U} = U$.

**Ejemplo A.23 ($\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ con la topología de cajas)** *Consideramos $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ con la topología de cajas, es decir, con la topología que tiene por base a los productos de abiertos $\prod\limits_{i\in\mathbb{N}} U_i$.*

1. *La sucesión* $\{x^n\}_{n=1}^\infty$ *dada por* $x_i^n = 1/n$ *no es convergente, a pesar de que cada coordenada lo es.*

   En efecto, es fácil ver que las proyecciones son continuas, luego si la sucesión converge, tiene que converger a (0). Sin embargo, el abierto $U = \prod_{i\in\mathbb{N}} \left]-1/(i+1), 1/(i+1)\right[$ es un entorno de (0) que no contiene a ningún término de la sucesión.

2. *La función* $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *dada por* $f(x) = (x)$ *no es continua, a pesar de que sus funciones coordenadas lo son.*

   Si lo fuera, la sucesión del apartado anterior sería convergente.

**Ejemplo A.24** Consideremos el espacio $X = \mathbb{R}/\mathbb{N}$, es decir, el espacio que resulta de identificar a un punto todos los números naturales o, más precisamente, el cociente obtenido a partir de la relación de equivalencia en $\mathbb{R}$ por la que dos puntos están relacionados si y sólo si son el mismo o ambos son números naturales.

Notemos que la proyección $p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}/\mathbb{N}$ es cerrada, pues si $A \subset \mathbb{R}$ es cerrado, entonces $p[A]$ es cerrado, ya que $p^{-1}[p[A]]$ es el propio $A$ o bien $A \cup \mathbb{N}$, y en ambos casos es cerrado.

1. **(Separación)** *$X$ es monótonamente normal.*

   Por el teorema 5.28.

2. **Compacidad** *$X$ no es localmente compacto.* Supongamos que $p(0)$ tiene un entorno compacto $K$. Entonces $p^{-1}[K]$ es un abierto en $\mathbb{R}$ que contiene a $\mathbb{N}$, luego contiene un conjunto de la forma $W = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [n - \epsilon_n, n + \epsilon_n]$, donde cada $\epsilon_n < 1/4$.

   Como $p^{-1}[p[W]] = W$, tenemos que $p[W] \subset K$ es cerrado en $\mathbb{R}/\mathbb{N}$, luego es compacto, por estar contenido en $K$. Sin embargo, si definimos

   $$U_m = \bigcup_{n<m} \left]n - 1/4, n + 1/4\right[ \cup \bigcup_{n\geq m} \left]n - \epsilon_n, n + \epsilon_n\right[,$$

   tenemos que $p^{-1}[p[U_m]] = U_m$, luego $p[U_m]$ es abierto en $\mathbb{R}/\mathbb{N}$ y por lo tanto $\{p[U_m]_{m=0}^\infty\}$ es un cubrimiento abierto de $p[W]$, pero no admite un subcubrimiento finito, ya que $p(n + \epsilon_n) \in p[U_m]$ si y sólo si $m > n$. Esto contradice que $p[W]$ sea compacto.

**Ejemplo A.25 (La recta de Sorgenfrey)** Se llama así al espacio topológico $S = \mathbb{R}$ con la topología que tiene por base a los intervalos de la forma $[\alpha, \beta[$. Es inmediato comprobar que estos intervalos son ciertamente la base de una topología en $\mathbb{R}$.

Todo intervalo $]\alpha, \beta[$ es abierto en $S$, pues

$$]\alpha, \beta[ = \bigcup_{\alpha<\gamma<\beta} [\gamma, \beta[\,.$$

Similarmente, son abiertos los intervalos $]-\infty, \beta[$, $]\alpha, +\infty[$, $[\alpha, +\infty[$, de donde se sigue a su vez que los intervalos de la forma $]-\infty, \alpha[$, $[\alpha, \beta[$, $[\alpha, +\infty[$ son de hecho abiertos y cerrados, mientras que los intervalos $]\alpha, \beta[$ o $]\alpha, +\infty[$ son abiertos, pero no cerrados.

1. *La recta $S$ es homeomorfa a un subespacio denso (respecto a la topología, no respecto al orden) de un espacio ordenado separable.*

   En efecto, en el ejemplo de la página 12 hemos visto que la recta $S$ es homeomorfa a $Y = \mathbb{R}\times\{1\}$ con la topología relativa inducida desde el espacio $\mathbb{R} \times \{0, 1\}$, considerado como espacio ordenado con el orden lexicográfico, y es fácil ver que $\mathbb{Q} \times \{0\}$ es denso en $\mathbb{R} \times \{0, 1\}$.

2. **Compacidad** *$S$ es hereditariamente de Lindelöf, pero no es localmente compacta, ni $\sigma$-compacta.*

   Para probar que es hereditariamente de Lindelöf usamos el teorema 4.49. Sea $\mathcal{U}$ una familia de abiertos de $S$ y sea $\mathcal{U}_0$ la familia de los interiores de los elementos de $\mathcal{U}$ respecto de la topología usual en $\mathbb{R}$. Como $\mathbb{R}$ tiene una base numerable, es hereditariamente de Lindelöf, luego existe una familia numerable $\mathcal{V}_0$ de $\mathcal{U}_0$ tal que $\bigcup \mathcal{V}_0 = \bigcup \mathcal{U}_0$. Sea $\mathcal{V}$ una subfamilia numerable de $\mathcal{U}$ tal que $\mathcal{V}_0$ esté formada por los interiores en $\mathbb{R}$ de sus elementos.

   Ahora bien, sucede que $A = \bigcup \mathcal{U} \setminus \bigcup \mathcal{U}_0$ es numerable, pues si $x \in A$, existe un $\epsilon_x > 0$ tal que $[x, \epsilon_x[ \subset U$, para cierto $U \in \mathcal{U}$, y entonces tenemos que $]x, x + \epsilon_x[ \subset \mathring{U} \subset \bigcup \mathcal{U}_0$, luego $]x, x + \epsilon_x[ \cap A = \varnothing$. Por consiguiente, $\{]x, x + \epsilon_x[\}_{x\in A}$ es una familia de abiertos en $\mathbb{R}$ disjuntos dos a dos. Como cada uno tiene que contener un número racional, $A$ tiene que ser numerable. Por consiguiente, si tomamos una subfamilia numerable $\mathcal{V}'$ de $\mathcal{U}$ que cubra a $A$, tenemos que $\mathcal{V} \cup \mathcal{V}'$ es un subcubrimiento numerable de $\mathcal{U}$.

   Si $S$ fuera $\sigma$-compacta, también lo sería $S \times S$, luego el producto sería un espacio de Lindelöf, pero en el ejemplo siguiente veremos que no lo es.

   Esto implica que la recta $S$ no es localmente compacta, pues según el teorema 4.51, en los espacios localmente compactos la propiedad de Lindelöf equivale a la $\sigma$-compacidad.

   Un argumento directo alternativo: Si $S$ fuera localmente compacta, algún abierto cerrado $[a, b[$ tendría que ser compacto, pero no lo es, pues la familia de abiertos $\{[a, c[ \mid a < c < b\}$ es un cubrimiento abierto que no admite subcubrimientos finitos.

3. **Separación** *$S$ es $T_6$ y monótonamente normal.*

   En efecto, $S$ es monótonamente normal porque es un subespacio de un espacio ordenado, y todo espacio ordenado es monótonamente normal. Al ser normal y hereditariamente de Lindelöf, es perfectamente normal, por el teorema 5.47.

4. En el ejemplo siguiente mostramos que $S \times S$ no es normal.

5. **Conexión** *S es cerodimensional.*

6. **Cardinales invariantes**

| $w$ | $\chi$ | $d$ | $dh$ | $c$ | $e$ | $ch$ | $L$ | $Lh$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathfrak{c}$ | $\aleph_0$ | $\aleph_0$ | $\aleph_0$ | $\aleph_0$ | $\aleph_0$ | $\aleph_0$ | $\aleph_0$ | $\aleph_0$ |

*S no tiene una base numerable.*

En el ejemplo siguiente vemos que $S \times S$ tiene un subconjunto discreto $D$ no numerable. Esto implica que $S \times S$ no tiene una base numerable (pues si la tuviera, también la tendría $D$, lo cual es imposible) y si la tuviera $S$, también la tendría $S \times S$. De hecho, precisando el argumento se llega a que el peso es exactamente $\mathfrak{c}$.

7. $S$ es hereditariamente separable.

En efecto, $S$ es un subespacio de un espacio ordenado separable $X$, pero, por 12.24, tenemos que $dh(X) = d(X) = \aleph_0$, luego también $dh(S) = \aleph_0$.

8. $e(S) = \aleph_0$ (pues $e(S) \leq L(S) = \aleph_0$).

9. *S es un espacio de Baire.*

Sea $\{D_n\}_{n=0}^{\infty}$ una familia de abiertos densos en $S$. Si $V_n$ es el interior de $D_n$ respecto a la topología usual en $\mathbb{R}$, entonces $V_n$ es denso en $\mathbb{R}$. En efecto, si $U$ es un abierto en $\mathbb{R}$, también es abierto en $S$, luego $U \cap D_n$ es un abierto no vacío en $S$, luego contiene un abierto básico $[a, b[ \neq \varnothing$, luego $\varnothing \neq ]a, b[ \subset U \cap V_n$.

Por lo tanto, $\bigcap\limits_{n=0}^{\infty} V_n$ es denso en $\mathbb{R}$, luego también lo es en $S$ (porque todo abierto no vacío en $S$ contiene un abierto no vacío de $\mathbb{R}$), luego $\bigcap\limits_{n=0}^{\infty} D_n$ también es denso.

10. *S no es Čech-completa.*

Sea $\{\mathcal{U}_n\}_{n=1}^{\infty}$ una familia de cubrimientos abiertos de $S$. Veamos que existen puntos $p$, $a_n \in S$ y abiertos $U_n \in \mathcal{U}_n$ tales que $[a_n, p[ \subset U_n$. Tomamos cualquier $U_1 \in \mathcal{U}_1$ y cualquier intervalo $[a_1, b_1[ \subset U_1$. Supuestos definidos $a_n$, $b_n$, como $\mathcal{U}_{n+1}$ es un cubrimiento, existe un $U_{n+1} \in \mathcal{U}_{n+1}$ tal que $]a_n, b_n[ \cap U_{n+1} \neq \varnothing$, y tomamos $[a_{n+1}, b_{n+1}[ \subset ]a_n, b_n[ \cap U_{n+1}$.

Como $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión decreciente de intervalos, existe un punto $p \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$. Así $[a_n, p[ \subset U_n$.

Llamamos $\mathcal{F}$ al conjunto de todos los cerrados de $S$ que contienen algún intervalo $[x, p[$, con $x < p$. Obviamente tiene la propiedad de la intersección finita y $[a_n, p[ \in \mathcal{F}$ está contenido en un abierto de $\mathcal{U}_n$. Si $S$ fuera Čech-completo con los cubrimientos dados, tendríamos que $\bigcap \mathcal{F} \neq \varnothing$, pero $\bigcap \mathcal{F} \subset \bigcap\limits_{x<p} [x, p[ = \varnothing$.

**Ejemplo A.26 (El plano de Sorgenfrey)** Se llama así al espacio $X = S \times S$, donde $S$ es la recta de Sorgenfrey. Su característica principal es que la diagonal

$$D = \{(x, -x) \mid x \in S\}$$

es un subespacio cerrado y discreto. En efecto, como es cerrada con la topología usual de $\mathbb{R}^2$, también lo es con la topología de $X$, que contiene a todos los abiertos (luego a todos los cerrados) de la topología usual. Pero además, $[x, x+1[^2 \cap S = \{x\}$, por lo que la topología de $D$ es la discreta.

1. **Cardinales invariantes**

| $w$ | $\chi$ | $d$ | $dh$ | $c$ | $e$ | $ch$ | $L$ | $Lh$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathfrak{c}$ | $\aleph_0$ | $\mathfrak{c}$ | $\mathfrak{c}$ | $\aleph_0$ | $\mathfrak{c}$ | $\mathfrak{c}$ | $\mathfrak{c}$ | $\mathfrak{c}$ |

2. **Separación** *$S \times S$ es un espacio $T_{3\frac{1}{2}}$, pero no es $T_4$ ni colectivamente de Hausdorff.*

   En efecto, $S \times S$ es completamente regular porque $S$ lo es, pero el lema de Jones 5.30 implica que no es normal, pues tiene a $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ como subconjunto denso numerable y contiene un subespacio cerrado discreto $D$ de cardinal $\mathfrak{c}$.

   Para ver que no es colectivamente de Hausdorff vamos a probar que la diagonal $D$ es un subespacio cerrado discreto cuyos puntos no se pueden separar colectivamente.

   En efecto, si $\{U_x\}_{x \in \mathbb{R}}$ fuera una familia de abiertos disjuntos dos a dos tal que $(x, -x) \in U_x$, no perdemos generalidad si suponemos que son abiertos básicos $U_x = [x, x + \epsilon_x[ \times [-x, -x + \epsilon_x[$, con $0 < \epsilon_x < 1$. Podemos descomponer

   $$\mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in \mathbb{R} \mid \epsilon_x > 1/n\},$$

   y como las uniones numerables de conjuntos numerables son numerables, tiene que existir un $n$ tal que el conjunto

   $$E = \{x \in \mathbb{R} \mid \epsilon_x > 1/n\}$$

   es no numerable. Similarmente,

   $$E = \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} (E \cap [m, m+1]),$$

   luego existe un $m \in \mathbb{Z}$ tal que $E \cap [m, m+1]$ es no numerable. Por compacidad, $E \cap [m, m+1]$ tiene un punto de acumulación, y podemos tomar $x_1$, $x_2 \in E \cap [m, m+1]$ tales que $|x_1 - x_2| < 1/(2n)$. Entonces, si $x_1 < x_2$, es claro que $(x_1 + 1/(2n), -x_1) \in U_{x_1} \cap U_{x_2} \neq \varnothing$.

3. **Compacidad** *$S \times S$ no es un espacio de Lindelöf.*

   En efecto, podemos cubrirlo por los abiertos

   $$]-\infty, x[ \times ]-\infty, -x[, \qquad [x, +\infty[ \times [-x, +\infty[,$$

   y no podemos extraer un subcubrimiento numerable, pues cada punto $(x, -x)$ está en un único abierto.

## A.3.2 Espacios ordenados

**Ejemplo A.27 (El orden lexicográfico en $[0,1]^2$)** Sea $I = [0,1]$ el intervalo unitario y sea $X = I \times I$ considerado como espacio ordenado con el orden lexicográfico. Observemos que es denso en sí mismo, pues si $(u,v) < (u',v')$, o bien $u < u'$, en cuyo caso podemos tomar un número $u < w < u'$, con lo que $(u,v) < (w,v) < (u',v')$, o bien $u = u'$ y $v < v'$, en cuyo caso existe $v < w < v'$, y entonces se cumple $(u,v) < (u,w) < (u',v')$.

Notemos también que $X$ tiene mínimo $(0,0)$ y máximo $(1,1)$. Además es completo, pues si $A \subset X$, podemos tomar el supremo $s$ de la proyección $p_1[A]$. Si no existe ningún par $(s,v) \in A$, entonces $(s,0)$ es el supremo de $A$, mientras que en caso contrario podemos tomar el supremo $t$ del conjunto $\{v \in I \mid (s,v) \in A\}$, y $(s,t)$ es el supremo de $A$.

1. **Cardinales invariantes**

| $w$ | $\chi$ | $d$ | $dh$ | $c$ | $e$ | $ch$ | $L$ | $Lh$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathfrak{c}$ | $\aleph_0$ | $\mathfrak{c}$ | $\mathfrak{c}$ | $\mathfrak{c}$ | $\aleph_0$ | $\mathfrak{c}$ | $\aleph_0$ | $\mathfrak{c}$ |

   Notemos que $U_x = \{(x,y) \mid 1/4 < y < 3/4\}$ es una familia de abiertos no vacíos disjuntos dos a dos.

2. **Compacidad** *$X$ es un espacio de Hausdorff compacto.*

   Por el teorema 12.17.

3. **Conexión** *$X$ es conexo y localmente conexo, pero no arcoconexo.*

   Es conexo por el teorema 12.12 y localmente conexo por 12.13, pues todo punto tiene una base de entornos formada por intervalos, que son conexos.

   Sin embargo, no es arcoconexo, pues no puede existir un arco que una $(0,0)$ con $(1,1)$. Si existiera, su imagen, al ser conexa, sería un intervalo, pero entonces sería todo $X$. Tendríamos, pues, una aplicación continua $f : I \longrightarrow X$, pero esto es imposible, pues los intervalos $](u,0),(u,1)[$ son abiertos disjuntos dos a dos, para todo $u \in I$, luego sus antiimágenes tendrían que ser también abiertos (no vacíos) en $I$ disjuntos dos a dos, pero no puede haber una cantidad no numerable de tales abiertos, ya que cada uno de ellos debe contener un número racional.

**Ejemplo A.28 (La recta larga)** Se llama así al espacio $X = \omega_1 \times [0,1[$ con la topología inducida por el orden lexicográfico. Llamaremos $a_\alpha = (\alpha,0) \in X$. Claramente $X$ tiene mínimo $a_0$ y no tiene máximo. Si le añadimos el par $a_{\omega_1} = (\omega_1,0)$ como máximo elemento tenemos la *recta larga cerrada* $\overline{X}$. Es claro que ambos conjuntos totalmente ordenados son densos en sí mismos.

1. *$X$ y $\overline{X}$ son conjuntos totalmente ordenados completos, luego son espacios ordenados conexos.*

   En efecto, si $A \subset X$ no es vacío y está acotado superiormente por $(\alpha,x)$, podemos tomar el supremo $\alpha_0$ de la proyección $p_1[A] \subset \alpha$. Si no existe ningún $t$ tal que $(\alpha_0, t) \in A$, entonces $(\alpha_0, 0)$ es el supremo de $A$. En caso contrario, tomamos el supremo $t_0$ del conjunto $\{t \in [0,1] \mid (\alpha_0, t) \in A\}$. Si $t_0 < 1$, entonces $(\alpha_0, t_0)$ es el supremo de $A$. Si $t_0 = 1$ el supremo es $(\alpha_0 + 1, 0)$. La completitud de $X$ implica inmediatamente la de $\overline{X}$.

2. *Si $a, b \in X$, el intervalo $[a, b]$ es semejante (luego homeomorfo) a $[0, 1]$ y por lo tanto $]a, b[$ es semejante (luego homeomorfo) a $]0, 1[$.*

   Basta probar que si $b \in X$, el intervalo $[\bar{0}, b[$ es semejante a $[0, 1[$, pues la semejanza se puede extender a otra $[\bar{0}, b] \longrightarrow [0, 1]$, que a su vez se restringirá a otra $[a, b] \longrightarrow [t, 1]$, que a su vez se puede componer con otra semejanza para obtener una semejanza $[a, b] \longrightarrow [0, 1]$, que a su vez se puede restringir a los intervalos abiertos.

   A su vez, podemos suponer que $b = (\alpha, 0)$ con $\alpha > 0$, pues si $b = (\alpha, t)$ con $t > 0$, o bien $\alpha = 0$, en cuyo caso la proyección $[\bar{0}, b[ \longrightarrow [0, t[$ es una semejanza, y a su vez $[0, t[$ es semejante a $[0, 1[$, o bien $\alpha > 0$ y, si el resultado es cierto para $b_0 = (\alpha, 0)$, una semejanza $[\bar{0}, b_0[ \longrightarrow [0, 1[$ se extiende a otra $[\bar{0}, b[ \longrightarrow [0, 1 + t[$ mediante $(\alpha, s) \mapsto 1 + s$, y es claro que $[0, 1 + t[$ es semejante a $[0, 1[$.

   Si el resultado es falso, sea $\alpha > 0$ el mínimo ordinal tal que, llamando $b = (\alpha, 0)$, no se cumple que $[\bar{0}, b[$ es semejante a $[0, 1[$. Si $\alpha = \beta + 1$, o bien $\beta = 0$, en cuyo caso tenemos una contradicción, pues la proyección $[\bar{0}, b[ \longrightarrow [0, 1[$ es claramente una semejanza, o bien $\beta > 0$, en cuyo caso, llamando $b_0 = (\beta, 0)$, existe una semejanza $[\bar{0}, b_0[ \longrightarrow [0, 1[$ que se extiende a $[\bar{0}, b[ \longrightarrow [0, 2[$ mediante $(\beta, t) \mapsto 1 + t$, y claramente $[0, 2[$ es semejante a $[0, 1[$.

   Finalmente, si $\alpha$ es un ordinal límite, tomamos una sucesión $\{\delta_n\}_{n \in \omega}$ cofinal creciente[2] en $\alpha$ tal que $\delta_0 = 0$. Llamando $b_n = (\delta_n, 0)$, para cada $n \geq 1$ existe una semejanza $[\bar{0}, b_n[ \longrightarrow [0, 1[$. Si $b_{n-1}$ se corresponde con $t$, de aquí obtenemos una semejanza $[b_{n-1}, x_n[ \longrightarrow [t, 1[$, que se transforma fácilmente en una semejanza

   $$[b_{n-1}, b_n[ \longrightarrow \left[1 - \tfrac{1}{n}, 1 - \tfrac{1}{n+1}\right[.$$

   Combinando estas semejanzas obtenemos una semejanza $[\bar{0}, b[ \longrightarrow [0, 1[$, y tenemos una contradicción.

   Sin embargo, la recta larga $X$ no es homeomorfa a $[0, 1[$, pues los intervalos $]a_\alpha, a_{\alpha+1}[$ son no vacíos y disjuntos dos a dos, luego $X$ no puede contener un conjunto denso numerable, al contrario que $[0, 1[$.

3. *$X$ es arcoconexo y localmente arcoconexo*

[2]Este concepto se introduce en la sección 5.4 de [TC], pero lo que estamos afirmando aquí es completamente elemental, a saber, que existe una sucesión $\{\delta_n\}_{n\in\omega}$ estrictamente creciente y no acotada en $\alpha$. Basta tomar una biyección $f : \omega \longrightarrow \alpha$ y definir $\delta_n$ como el menor ordinal mayor que todos los $\delta_m$ precedentes y mayor que $f(n)$.

En efecto, la segunda parte se debe a que todo punto de $X$ distinto de $\bar{0}$ tiene un entorno abierto homeomorfo a $]0,1[$ y $\bar{0}$ tiene un entorno abierto homeomorfo a $[0,1[$, y estos espacios son localmente arcoconexos.

4. *La recta larga cerrada $\overline{X}$ es conexa, pero no es arcoconexa ni localmente arcoconexa, pues todo arco de origen $a_{\omega_1}$ es constante.*

   (Tenemos así otro ejemplo de subespacio arcoconexo cuya clausura ya no es arcoconexa.)

   En efecto, si $f : [0,1] \longrightarrow \overline{X}$ es un arco tal que $f(0) = a_{\omega_1}$ su imagen debe ser conexa, luego un intervalo. Si dicho intervalo no se reduce a $\{a_{\omega_1}\}$, podemos tomar $a \in X$ tal que $[a_\alpha, a_{\omega_1}] \subset f[[0,1]]$. Entonces $\{f^{-1}\big[]a_\delta, a_{\delta+1}[\big]\}_{\alpha<\delta<\omega_1}$ sería una familia no numerable de abiertos no vacíos disjuntos dos a dos en $[0,1]$, lo cual es imposible, pues cada uno de ellos tendría que contener un número racional.

**Ejemplo A.29 (La circunferencia larga)** Sea $C$ el conjunto que resulta de añadir a la recta larga $X$ que acabamos de estudiar todos los pares $(\omega_1, t)$, con $t \in [0,1[$, siempre con el orden lexicográfico. Es fácil ver que sigue siendo un conjunto totalmente ordenado completo. La *circunferencia larga* es el espacio $C$ con la topología que tiene por base los intervalos $]a,b[$, con $a, b \in C$ junto con los conjuntos de la forma

$$[[a,b]] = ]-\infty, a[\cup]b, +\infty[ = [a_0, a[\cup]b, +\infty[, \qquad \text{con } a_0 < a < b.$$

Es fácil comprobar que estos conjuntos son ciertamente la base de una topología[3] en $C$.

Observemos que los intervalos $[a_0, b[$ son abiertos respecto de la topología de orden, pero ya no lo son en $C$. Los entornos básicos de $a_0$ son ahora los conjuntos $[[a,b]]$. Así pues, no todo abierto en la topología de orden lo es en $C$, pero esta discrepancia desaparece en $C \setminus \{a_0\}$, cuyos abiertos para la topología de orden son todos abiertos en $C$ y viceversa. En otras palabras, la topología que $C$ induce en $C \setminus \{a_0\}$ es la topología inducida por el orden lexicográfico.

Similarmente, si $a_{\omega_1} < b$, tenemos que $[[a,b]] \cap \overline{X} = [a_0, a[$, luego $C$ también induce en $\overline{X}$ la topología de orden.

*La circunferencia larga es arcoconexa y localmente conexa, pero no localmente arcoconexa.*

En efecto, la aplicación $f : [0,1] \longrightarrow C$ dada por

$$f(t) = \begin{cases} (\omega_1, t) & \text{si } 0 \leq t < 1, \\ a_0 & \text{si } t = 1 \end{cases}$$

es continua, pues una base de entornos de un punto $(\omega_1, t)$, con $t > 0$, la forman los intervalos $]a,b[$, donde $a = (\omega_1, t_0) < (\omega_1, t) < (\omega_1, t_1) = b$, cuyas antiimágenes son los intervalos abiertos $]t_0, t_1[$, mientras que una base de entornos de

[3] No se trata de un espacio ordenado, por lo que este ejemplo no corresponde realmente a esta sección, pero lo incluimos aquí por su estrecha conexión con el ejemplo precedente.

$a_{\omega_1} = (\omega_1, 0)$ la forman los intervalos con $a < a_{\omega_1} < (\omega_1, t) = b$, cuyas antiimágenes son los intervalos abiertos $[0, t[$, y una base de entornos de $a_0$ la forman los conjuntos $[[a, b]]$ con $a < a_{\omega_1} < (\omega_1, t) = b$, cuyas antiimágenes son los intervalos abiertos $]t, 1]$.

Así pues, hay un arco que une $a_{\omega_1}$ con $a_0$. Claramente, de él podemos obtener arcos que unan $a_{\omega_1}$ con cualquier punto $(\omega_1, t) \in C \setminus X$ y, como $a_0$ puede conectarse por un arco con cualquier punto de $X$, concluimos que $C$ es arcoconexa, pero sigue sin ser localmente arcoconexa, porque todo entorno de $a_{\omega_1}$ contenido en $C \setminus \{a_0\}$ contiene puntos $a_\alpha$, con $\alpha < \omega_1$, que no pueden conectarse con $a_{\omega_1}$ mediante un arco, por el mismo argumento empleado en el caso de la recta larga.

En cambio, $C$ sí que es localmente conexa, ya que todo punto de $C \setminus \{a_0\}$ tiene una base de entornos formada por intervalos, que son conexos respecto de la topología de orden. En cuanto a $a_0$, una comprobación rutinaria muestra que la aplicación $f : ]-1, 1[ \longrightarrow [[a_1, a_{\omega_1}]]$ dada por

$$f(t) = \begin{cases} (0, t) & \text{si } 0 \leq t < 1, \\ (\omega_1, 1 - t) & \text{si } -1 < t < 0 \end{cases}$$

es un homeomorfismo entre un intervalo (localmente conexo) y un entorno de $a_0$, por lo que $a_0$ también tiene una base de entornos conexos. ■

**Ejemplo A.30 ($[\mathbf{0}, \boldsymbol{\omega}_\mathbf{1}[$)** Sea ahora $X = \omega_1$ con la topología de orden. Notemos que todos los ordinales son conjuntos totalmente ordenados completos.

1. **Cardinales invariantes**

| $w$ | $\chi$ | $d$ | $dh$ | $c$ | $e$ | $ch$ | $L$ | $Lh$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\aleph_1$ | $\aleph_0$ | $\aleph_1$ | $\aleph_1$ | $\aleph_1$ | $\aleph_0$ | $\aleph_1$ | $\aleph_1$ | $\aleph_1$ |

2. **Compacidad** $\omega_1$ *es un espacio localmente compacto y sucesionalmente compacto (luego numerablemente compacto y pseudocompacto), pero no compacto (luego tampoco de Lindelöf).*

   En efecto, como no tiene máximo elemento, el teorema 12.17 nos da que no es compacto, pero es localmente compacto, pues cada punto $\alpha$ tiene el entorno compacto $[0, \alpha]$.

   Es sucesionalmente compacto, pues por el teorema 12.11 toda sucesión tiene una subsucesión monótona, y por 12.10 ésta converge a su supremo o a su mínimo. (En el caso de que la sucesión sea monótona creciente, hay que observar que su supremo no puede ser $\omega_1$, pues se trata de una unión numerable de ordinales numerables, luego es un ordinal numerable y pertenece a $\omega_1$.)

3. En realidad $\omega_1$ cumple una propiedad más fuerte que la pseudocompacidad, y es que toda función continua $f : \omega_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ es constante en un intervalo $]\alpha, \omega_1[$.

En efecto, si $C_1$ y $C_2$ son cerrados disjuntos en $\omega_1$, sólo uno de ellos puede ser no acotado, pues la intersección de cerrados no acotados en un ordinal es cerrada no acotada [TC 6.4], luego sus clausuras en $[0, \omega_2]$ son disjuntas (son los mismos conjuntos $C_i$ salvo que uno de ellos sea no acotado, en cuyo caso $\overline{C}_i = C_i \cup \{\omega_1\}$). El teorema 5.36 implica entonces que $\omega_1$ está $C^*$-sumergido en $[0, \omega_2]$ (lo cual es lo mismo que decir que está $C$-sumergido, porque $\omega_1$ es pseudocompacto).

Ahora, si $f : \omega_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función continua y su (única) extensión continua a $[0, \omega_1]$ cumple $f(\omega_1) = r$, entonces existe un ordinal $\alpha < \omega_1$ tal que $f|_{]\alpha,\omega_1[} = r$.

En efecto, para cada natural $n \geq 1$, existe un $\alpha_n$ tal que si $\alpha > \alpha_n$ entonces $|f(\alpha) - r| < 1/n$, y basta tomar $\alpha = \sup\limits_n \alpha_n < \omega_1$.

4. En particular, $\beta\omega_1 = \omega_1 + 1$, de modo que la compactificación de Stone-Čech coincide en este caso con la compactificación de Alexandroff.

   Basta tener en cuenta que $\omega_1 + 1 = [0, \omega_1]$ es compacto y que $\omega_1$ es denso en $\omega_1 + 1$, y está $C^*$-sumergido, pues esto caracteriza a la compactificación de Stone-Čech.

**Ejemplo A.31** $(\boldsymbol{[0, \omega_1]})$ Consideramos el espacio $X = [0, \omega_1] = \omega_1 + 1$, con la topología de orden.

1. **Cardinales invariantes**

| $w$ | $\chi$ | $d$ | $dh$ | $c$ | $e$ | $ch$ | $L$ | $Lh$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\aleph_1$ | $\aleph_1$ | $\aleph_1$ | $\aleph_1$ | $\aleph_1$ | $\aleph_0$ | $\aleph_1$ | $\aleph_0$ | $\aleph_1$ |

2. **Separación** *$X$ es monótonamente normal (luego $T_5$), pero no $T_6$.*

   Es monótonamente normal por ser un espacio ordenado, pero no es perfectamente normal, pues el subconjunto $\Lambda$ formado por todos los ordinales límite es cerrado en $X$ (de hecho, es el conjunto $X'$ de los puntos de acumulación de $X$), pero no es un $G_\delta$, pues todo abierto $U_n$ que contenga a $\omega_1$ contiene un intervalo $]\alpha_n, \omega_1]$, luego una intersección numerable de tales abiertos contiene un intervalo $]\alpha, \omega_1]$, donde $\alpha = \bigcup\limits_n \alpha_n < \omega_1$, luego la intersección no puede ser igual a $\Lambda$.

3. **Compacidad** *$X$ es compacto y sucesionalmente compacto, pero no hereditariamente de Lindelöf.*

   Es compacto por 12.17, pues se trata de un espacio ordenado completo con máximo y mínimo. La compacidad sucesional se sigue del ejemplo A.30. No es hereditariamente de Lindelöf porque contiene a $[0, \omega_1[$, que no es de Lindelöf.

**Ejemplo A.32** $(\boldsymbol{P(\kappa)})$ Si $\kappa$ es un cardinal regular no numerable, llamamos $P(\kappa)$ al subespacio del espacio ordenado $\kappa + 1$ que resulta de eliminar los ordinales límite de cofinalidad numerable. Notemos que $P(\aleph_1)$ coincide con el espacio Fortissimo (ejemplo A.16).

1. *$P(\kappa)$ es un $P$-espacio.*

   Basta observar que es el conjunto de todos los $P$-puntos de $\kappa + 1$.

2. *Si $\kappa \geq \aleph_2$, entonces $P(\kappa) \setminus \{\kappa\}$ no es realcompacto.*

   Sea $F$ el $z$-filtro formado por todos los ceros que contienen un intervalo $]\alpha, \kappa[ \cap X$, para $\alpha < \kappa$. Obviamente es real, pero no converge, pues si $\alpha \in X$, entonces el entorno $\alpha + 1$ no contiene ningún elemento de $F$.

**Ejemplo A.33 ($\boldsymbol{P(\aleph_2) \times P(\aleph_1) \setminus \{(\omega_2, \omega_1)\}}$)** Este espacio es un ejemplo de $P$-espacio completamente regular que no es normal.

En efecto, es un $P$-espacio porque es un subespacio de un producto de dos $P$-espacios, y la prueba de que no es normal es análoga a la correspondiente a la placa de Tychonoff (ejemplo A.34).

**Ejemplo A.34 (La placa de Tychonoff)** Se llama así al espacio producto $X = [0, \omega_1] \times [0, \omega]$. La *placa perforada de Tychonoff* es el subespacio abierto $X_0 = X \setminus \{(\omega_1, \omega)\}$.

1. **Compacidad** *$X$ es un espacio de Hausdorff compacto y $X_0$ es localmente compacto, pero no compacto.*

   Ciertamente $X$ es un espacio de Hausdorff compacto porque sus dos factores lo son (teorema 12.17). Como $X_0$ es abierto en $X$ (pero no cerrado), tenemos que $X_0$ es un espacio de Hausdorff localmente compacto no compacto.

2. **Separación** *$X_0$ es $T_{3\frac{1}{2}}$, pero no $T_4$.*

   Concretamente, vamos a probar que los cerrados disjuntos

   $$A = [0, \omega_1[ \times \{\omega\}, \qquad B = \{\omega_1\} \times [0, \omega[$$

   no pueden separarse por abiertos.

   En efecto, supongamos que $A \subset U$, $B \subset V$, donde $U$ y $V$ son abiertos en $X_0$. Para cada $n < \omega$ tenemos que $(\omega_1, n) \in B \subset V$, luego existe un $\delta_n < \omega_1$ tal que $[\delta_n, \omega_1] \times \{n\} \subset V$. El ordinal $\delta = \bigcup\limits_n \delta_n$ es numerable, luego $\delta < \omega_1$ y $[\delta, \omega_1] \times [0, \omega[ \subset V$. Pero entonces resulta que $(\delta, \omega) \in U \cap \overline{V}$, de donde $U \cap V \neq \varnothing$.

3. **Conexión** *$X$ y $X_0$ son cerodimensionales, luego no todo espacio cerodimensional es normal.*

**Ejemplo A.35** Vamos a construir espacios de Baire cuyo producto no es un espacio de Baire. Para cada $f \in {}^\omega\omega_1$, sea $f^* = \sup f[\omega] < \omega_1$. Para cada $A \subset \omega_1$, sea $A^* = \{f \in {}^\omega\omega_1 \mid f^* \in A\}$.

Si $A \subset \omega_1$ es no numerable, entonces $A^*$ es denso en ${}^\omega\omega_1$.

En efecto, una base de ${}^\omega\omega_1$ la forman los conjuntos $[s] = \{f \in {}^\omega\omega_1 \mid s \subset f\}$, para cada $s \in \omega_1^{<\omega}$. Si, concretamente, $s \in {}^n\omega_1$, podemos tomar $\alpha \in A$ tal que $s[n] \subset \alpha$. Sea $f \in {}^\omega\omega_1$ dada por $f|_n = s$ y $f(k) = \alpha$ para todo $k \geq n$. Así $f \in [s] \cap A^*$.

Ahora veamos que si $A \subset \omega_1$ es estacionario, entonces $A^*$ es un espacio de Baire.

Sea $\{V_i\}_{i\in\omega}$ una familia de abiertos densos en $A^*$ y sea $U_i$ abierto en ${}^\omega\omega_1$ tal que $V_i = U_i \cap [A^*]$. Como $A^*$ es denso en ${}^\omega\omega_1$, lo mismo vale para todos los abiertos $U_i$.

Por lo tanto, para cada $s \in \omega_1^{<\omega}$, se cumple que $[s] \cap U_i$ es un abierto no vacío, luego existe un $t \in \omega_1^{<\omega}$ tal que $s \subset t$ y $[t] \subset U_i$. Para cada $\delta < \omega_1$, el conjunto $\delta^{<\omega}$ es numerable, luego podemos definir $h_i : \omega_1 \longrightarrow \omega_1$ tal que si $s \in \delta^{<\omega}$ existe $t \in f_i(\delta)^{<\omega}$ tal que $s \subset t$ y $[t] \subset U_i$. Entonces, el conjunto $C_i = \{\delta < \omega_1 \mid f_i[\delta] \subset \delta\}$ es c.n.a. en $\omega_1$ (por [TC 6.7]), y tiene la propiedad de que si $\delta \in C_i$ es un ordinal límite y $s \in \delta^{<\omega}$, entonces existe un $t \in \delta^{<\omega}$ tal que $s \subset t$ y $[t] \subset U_i$.

Fijemos un $s \in {}^\omega\omega_1$. Como $A$ es estacionario, podemos tomar un ordinal límite $\delta \in A$ que esté en todos los $C_i$ y $s \in \delta^{<\omega}$. Sea $\{\alpha_n\}_{n<\omega}$ una sucesión cofinal creciente en $\delta$ y definimos como sigue una sucesión $\{s_n\}_{n<\omega}$ en $\delta^{<\omega}$:

Elegimos $s_0 \in \delta^{<\omega}$ tal que $s \subset s_0$ y $[s_0] \subset U_0$. Extendiéndola un poco más podemos exigir que $\alpha_0$ esté en la imagen de $s_0$. Supuesta definida $s_n$, tomamos $s_{n+1} \in \delta^\omega$ tal que $s_n \subset s_{n+1}$, $[s_{n+1}] \subset U_{n+1}$, $n+1$ esté en el dominio de $s_{n+1}$ y $\alpha_{n+1}$ esté en su imagen.

Así obtenemos una función $f = \bigcup\limits_{n<\omega} s_n : \omega \longrightarrow \delta$ suprayectiva, luego tenemos que $f^* = \delta \in A$, luego $f \in A^*$.

Por otra parte, $f \in [s_n] \subset U_n$, para todo $n < \omega$, luego $f \in A^* \cap \bigcap\limits_{n\in\omega} V_n$, luego la intersección de los abiertos densos dados es densa.

Por [TC 6.17] podemos tomar dos conjuntos disjuntos $A_1$ y $A_2$ estacionarios en $\omega_1$. Vamos a probar que $A_1^* \times A_2^*$ no es un espacio de Baire.

Para cada $n < \omega$, sea

$$U_n = \{(f, g) \in {}^\omega\omega_1 \times {}^\omega\omega_1 \mid \max\{f(n), g(n)\} < \min\{f^*, g^*\}\}.$$

Vamos a probar que $U_n$ es abierto denso en ${}^\omega\omega_1 \times {}^\omega\omega_1$. Si $(f, g) \in U_n$, existen $m_1$, $m_2 \in \omega$ tales que $f(m_1) > \max\{f(n), g(n)\}$, $g(m_2) > \max\{f(n), g(n)\}$. Entonces $(f, g) \in [f|_{n+m_1+1}] \times [g|_{n+m_2+1}] \subset U_n$, luego $U_n$ es abierto.

Para probar que $U_n$ es denso tomamos un abierto básico $[s] \times [t]$ y tomamos $f$, $g \in {}^\omega\omega_1$ que extiendan a $s$ y $t$ de modo que, sobre algún número natural, tomen un valor mayor que $f(n)$ y $g(n)$. Así $(f, g) \in ([s] \times [t]) \cap U_n$.

Consideremos ahora $V_n = U_n \cap (A_1^* \times A_2^*)$. Como $A_1^* \times A_2^*$ es denso en ${}^\omega\omega_1 \times {}^\omega\omega_1$, tenemos que $V_n$ es un abierto denso en $A_1^* \times A_2^*$. Sin embargo,

$\bigcap\limits_{n<\omega} V_n = \varnothing$, pues si $(f,g) \in \bigcap\limits_{n<\omega} V_n$, entonces $f^* \neq g^*$ (porque $A_1 \cap A_2 = \varnothing$), y no perdemos generalidad si suponemos que $f^* < g^*$. Entonces existe un $n \in \omega$ tal que $f^* \leq g(n)$, luego $\max\{f(n), g(n)\} = g(n) \geq f^* = \min\{f^*, g^*\}$, luego $(f,g) \notin V_n$.

Observemos que los espacios $A^*$ son metrizables por el teorema de metrización de Bing 9.21, pues los abiertos básicos $[s] \cap A^*$, con $s \in {}^n\omega_1$, forman una partición de $A^*$, luego son una familia discreta.

### A.3.3 La compactificación de Stone-Čech

**Ejemplo A.36 ($\beta\omega$)** Vamos a estudiar aquí la compactificación de Stone-Čech del espacio discreto numerable $\omega$.

Teniendo en cuenta los teoremas 7.21 y 7.23, así como que los ceros en $\omega$ son todos sus subconjuntos, podemos ver a $\beta\omega$ como el conjunto de todos los ultrafiltros en $\omega$, de modo que cada $n \in \omega$ se identifica con el ultrafiltro fijo que genera.

Llamaremos $\omega^* = \beta\omega \setminus \omega$, que está formado por todos los ultrafiltros libres en $\omega$ y es cerrado en $\beta\omega$, pues $\omega$ es localmente compacto.

1. *Para cada $A \subset \omega$, su clausura es $\overline{A} = \{p \in \beta\omega \mid A \in p\}$ y es abierta y cerrada en $\beta\omega$, y estas clausuras constituyen una base de $\beta\omega$.*

   En efecto, en principio, de acuerdo con 7.21, una base de $\beta\omega$ la forman los complementarios de dichas clausuras, pero como $\omega = A \cup (\omega \setminus A)$, tomando clausuras vemos que $\beta\omega \setminus \overline{A} = \overline{\omega \setminus A}$, por lo que las clausuras $\overline{A}$ son abiertas y cerradas, y ellas mismas son una base de $\beta\omega$.

   Esto se traduce en que $\beta\omega$ es también el espacio de Stone del álgebra de Boole $\mathcal{P}\omega$ ([TC 7.12, 7.14]). La aplicación $A \mapsto \overline{A}$ es un isomorfismo de álgebras de Boole entre $\mathcal{P}\omega$ y el álgebra de abiertos cerrados de $\beta\omega$.

2. *La aplicación $A \mapsto A^* = \overline{A} \cap \omega^* = \overline{A} \setminus A$ induce un epimorfismo de $\mathcal{P}\omega$ en el álgebra de abiertos cerrados del resto $\omega^*$, cuyo núcleo es el ideal* fin *de los subconjuntos finitos de $\omega$. Los conjuntos $A^*$ son una base de $\omega^*$.*

   Observemos que $\omega^*$ está formado por los ultrafiltros libres de $\omega$, es decir, los ultrafiltros que contienen al filtro fin$^*$ de los conjuntos cofinitos. Basta aplicar el teorema [TC 7.20].

3. *$\beta\omega$ es extremadamente disconexo.*

   Esto es consecuencia del teorema 7.14, o también de [TC 7.32].

4. $|\beta\omega| = |\omega^*| = 2^{\mathfrak{c}}$.

   Por [TC 7.22], aunque podemos dar también una prueba topológica: puesto que $\omega$ es denso en $\beta\omega$, tenemos que $d(\beta\omega) = \aleph_0$, y 8.3 nos da que $|\beta\omega| \leq 2^{\mathfrak{c}}$.

   Por otra parte, el cubo ${}^{\mathfrak{c}}2$ es separable por 8.7, luego una biyección de $\omega$ en un subconjunto denso numerable de este cubo (que es continua, porque $\omega$

es discreto) se extiende a una aplicación $\beta\omega \longrightarrow {}^{\mathfrak{c}}2$ continua y suprayectiva (pues la imagen tiene que ser densa y cerrada). Esto nos da la desigualdad $|\beta\omega| \geq 2^{\mathfrak{c}}$.

5. $w(\beta\omega) = w(\omega^*) = \mathfrak{c}$.

Ya hemos visto que $\beta\omega$ tiene por base a sus abiertos-cerrados, que forman un álgebra isomorfa a $\mathcal{P}\omega$, lo que prueba que $w(\beta\omega) \leq \mathfrak{c}$.

Por otra parte, si $A$, $B$ son subconjuntos infinitos de $\omega$ con intersección finita, entonces $A^* \cap B^* = (A \cap B)^* = \varnothing$, pero $A^*$ y $B^*$ son dos abiertos no vacíos. Por lo tanto, si $\{A_\alpha\}_{\alpha<\mathfrak{c}}$ es una familia casi disjunta de subconjuntos de $\omega$ [TC 8.17], tenemos que $\{A^*_\alpha\}_{\alpha<\mathfrak{c}}$ es una familia de abiertos en $\omega^*$ disjuntos dos a dos, luego $\mathfrak{c} \leq c(\omega^*) \leq w(\omega^*) \leq w(\beta\omega) \leq \mathfrak{c}$.

6. **Cardinales invariantes**

| | $w$ | $\chi$ | $d$ | $dh$ | $c$ | $e$ | $ch$ | $L$ | $Lh$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\beta\omega$ | $\mathfrak{c}$ | $\mathfrak{u}$ | $\aleph_0$ | $\mathfrak{c}$ | $\aleph_0$ | $\aleph_0$ | $\mathfrak{c}$ | $\aleph_0$ | $\mathfrak{c}$ |
| $\omega^*$ | $\mathfrak{c}$ | $\mathfrak{u}$ | $\mathfrak{c}$ | $\mathfrak{c}$ | $\mathfrak{c}$ | $\aleph_0$ | $\mathfrak{c}$ | $\aleph_0$ | $\mathfrak{c}$ |

El cardinal $\mathfrak{u}$ es un cardinal característico del continuo, que se define como el menor cardinal de una base de un ultrafiltro libre (lo cual equivale trivialmente a que es el menor cardinal de una base de entornos de un punto de $\omega^*$). Puede probarse que $\mathfrak{b} \leq \mathfrak{u}$. La desigualdad, más débil, $\mathfrak{p} \leq \mathfrak{u}$ se deduce inmediatamente del hecho siguiente:

7. *Toda intersección no vacía de menos $\mathfrak{p}$ abiertos en $\omega^*$ (en particular todo $G_\delta$ no vacío en $\omega^*$) tiene interior no vacío.*

En efecto, sea $\{U_\alpha\}_{\alpha<\kappa}$, con $\kappa < \mathfrak{p}$ una familia de abiertos en $\omega^*$ y sea $p \in \bigcap\limits_{\alpha<\kappa} U_\alpha$. Podemos tomar un abierto básico $p \in \overline{A}^*_\alpha \subset U_\alpha$, para cierto $A_\alpha \subset \omega$. Entonces la familia $\{A_\alpha\}_{\alpha<\kappa}$ tiene la propiedad fuerte de la intersección finita, pues, si $I \subset \kappa$ es finito, tenemos que

$$p \in \bigcap_{\alpha\in I} A^*_\alpha = (\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha)^* \neq \varnothing,$$

luego la intersección $\bigcap\limits_{\alpha\in I} A_\alpha$ es infinita. Por consiguiente, la familia $\{A_\alpha\}_{\alpha<\kappa}$ tiene una pseudointersección $A$, lo que se traduce en que

$$\varnothing \neq A^* \subset \bigcap_{\alpha<\kappa} A^*_\alpha \subset \bigcap_{\alpha<\kappa} U_\alpha.$$

El teorema 3.30 implica que $\beta\omega$ no contiene sucesiones convergentes no triviales. En realidad podemos probar algo más fuerte:

8. Si $S \subset \beta\omega$ es un conjunto numerable discreto, entonces $\overline{S}$ es homeomorfo a $\beta\omega$.

En efecto, si $S = \{s_n \mid n \in \omega\}$, por hipótesis existen abiertos $U_n$ tales que $U_n \cap S = \{s_n\}$. Por la regularidad de $\beta\omega$ podemos tomar abiertos $s \in V_n \subset \overline{V}_n \subset U_n$, de modo que $W_n = U_n \setminus \bigcup\limits_{m<n} \overline{V}_m$, y así $W_n \cap S = \{s_n\}$, pero además los $W_n$ son disjuntos dos a dos. Sea $A = \bigcup\limits_{n\in\omega} W_n \cap \omega$.

Si $f : S \longrightarrow [0,1]$, definimos $f_0 : A \longrightarrow [0,1]$ de modo que si $k \in W_n \cap \omega$, entonces $f_0(k) = f(s_n)$.

Notemos que $A$ está $C^*$-sumergido en $\omega$, luego en $\beta\omega$, luego en $\overline{A}$, luego $f_0$ se extiende a una función continua $\bar{f} : \overline{A} \longrightarrow [0,1]$. Como

$$s_n \in \overline{W}_n = \overline{W_n \cap \omega} \subset \overline{A},$$

tenemos que $S \subset \overline{A}$, luego $\overline{S} \subset \overline{A}$. Además $f_0$ es constante igual a $f(s_n)$ en $W_n \cap \omega$, que es denso en $\overline{W}_m$, luego $\bar{f}$ es constante igual a $f(s_n)$ en $\overline{W}_n$, y en particular $\bar{f}(s_n) = f(s_n)$, luego $\bar{f}|_{\overline{S}}$ es una extensión continua de $f$, lo que prueba que $S$ está $C^*$-sumergido en $\overline{S}$ y, por consiguiente, que $\overline{S}$ es la compactificación de Stone-Čech de $S$.

9. *Todo cerrado infinito en $\beta\omega$ y todo abierto no vacío en $\omega^*$ contiene una copia de $\beta\omega$, luego su cardinal es $2^{\mathfrak{c}}$.*

   Si $C \subset \omega$ es cerrado infinito, por 5.4 contiene un subespacio discreto, cuya clausura es homeomorfa a $\beta\omega$. Si $U \subset \omega^*$ es un abierto no vacío, contiene un abierto-cerrado básico no vacío, luego la conclusión es la misma.

   En particular, $\omega^*$ no tiene puntos aislados.

   El punto siguiente prueba que el producto de espacios extremadamente disconexos no tiene por qué ser extremadamente disconexo:

10. *$\beta\omega \times \beta\omega$ no es extremadamente disconexo. En particular, no es $\beta(\omega \times \omega)$ (que es homeomorfo a $\beta\omega$).*

    En efecto, consideramos el abierto $\Delta = \{(n,n) \mid n \in \omega\} \subset \beta\omega \times \beta\omega$ y vamos a ver que $\overline{\Delta} = \{(p,p) \mid p \in \beta\omega\}$.

    Si $(p,q) \in \beta\omega \times \beta\omega$, los entornos básicos de $(p,q)$ son de la forma $\overline{A} \times \overline{B}$, con $A \in p$, $B \in q$, luego $(p,q) \in \overline{\Delta}$ si y sólo si para todo $A \in p$ y todo $B \in q$, existe un $n \in \omega$ tal que $(n,n) \in \overline{A} \times \overline{B}$, lo que equivale a que $n \in A \cap B \neq \varnothing$. Pero esto sólo sucede si $p = q$, pues en caso contrario, siempre hay un $A \in p$ tal que $\omega \setminus A \in q$.

    Ahora basta observar que la clausura $\overline{\Delta}$ no es abierta, pues si $p \in \omega^*$, un entorno básico de $(p,p)$ es de la forma $\overline{A} \times \overline{A}$, con $A \in p$, que contiene infinitos pares fuera de $\overline{\Delta}$.

    El punto siguiente prueba que un cerrado en un espacio extremadamente disconexo no tiene por qué ser extremadamente disconexo:

11. $\omega^*$ *no es extremadamente disconexo.*

    Nos basamos en el ejemplo siguiente, A.37. En él probamos que el espacio $\Pi$ no es normal, por lo que podemos tomar dos cerrados disjuntos $A$, $B \subset \Pi$ que no pueden separarse por abiertos. Lo mismo vale para $A_0 = A \setminus \omega$ y $B_0 = B \setminus \omega$, pues si existieran abiertos disjuntos $U$, $V$ en $\Pi$ tales que $A_0 \subset U$, $B_0 \subset V$, entonces los conjuntos $U \cup (A \cap \omega)$ y $V \cup (B \cap \omega)$ serían también abiertos disjuntos y separarían a $A$ y $B$. Equivalentemente, podemos suponer que $A$, $B \subset \Pi \setminus \omega \subset \omega^*$.

    El espacio $\Pi \setminus \omega$ se obtiene tomando una familia de $\mathfrak{c}$ abiertos disjuntos dos a dos en $\omega^*$ y eligiendo un punto de cada uno ellos. Sean $U_0$ y $V_0$ la unión de los abiertos de $\omega^*$ cuyos puntos seleccionados están en $A$ y en $B$, respectivamente. Estos conjuntos son abiertos disjuntos en $\omega^*$, pero no en $\beta\omega$, por lo que si los cortamos con $\Pi$ sólo obtenemos abiertos disjuntos en $D = \Pi \setminus \omega$, que es un espacio discreto, con lo que no tenemos nada. Ahora bien, si $\omega^*$ fuera extremadamente disconexo, tendríamos que $\overline{U}_0$ y $\overline{V}_0$ serían abiertos-cerrados disjuntos en $\omega^*$, luego (por el punto 2) serían de la forma $U^*$ y $V^*$, para ciertos $U$, $V \subset \omega$ que podemos tomar disjuntos (a lo sumo podrían tener intersección finita, y en tal caso podríamos quitarla). Ahora sí, $\overline{U} \cap \Pi$ y $\overline{V} \cap \Pi$ son abiertos-cerrados en $\Pi$ que separan a $A$ y $B$.

**Ejemplo A.37 (El espacio $\Pi$)** Sea $\mathcal{A}$ una familia casi disjunta en $\mathcal{P}\omega$ de cardinal $\mathfrak{c}$, es decir, una familia de $\mathfrak{c}$ subconjuntos infinitos de $\omega$ con intersecciones finitas. Así los conjuntos $A^*$, con $A \in \mathcal{A}$ son abiertos en $\omega^* = \beta\omega \setminus \omega$ disjuntos dos a dos. Elegimos puntos $d_A \in A^*$, llamamos $D = \{d_A \mid A \in \mathcal{A}\}$ y definimos $\Pi = \omega \cup D \subset \beta\omega$.

1. **Separación** $\Pi$ *es completamente regular, pero no es normal.*

   Obviamente $\Pi$ es completamente regular, porque es un subespacio de $\beta\omega$. Sin embargo, el lema de Jones 5.30 implica que $\Pi$ no es normal, pues $D$ es un subespacio cerrado discreto de cardinal $\mathfrak{c}$ y $\omega$ es un subconjunto denso de cardinal $2^{\aleph_0}$.

2. **Conexión** $\Pi$ *es extremadamente disconexo.*

   Basta tener en cuenta el teorema 5.41, Si $D \subset \Pi$ es denso, necesariamente $\omega \subset D$, luego $D$ toda $f \in C^*(D)$ se restringe a $\omega$, se extiende a $\beta\omega$ y la restricción a $\Pi$ de la extensión es una extensión continua de $f$.

**Ejemplo A.38** Vamos probar que existen dos espacios numerablemente compactos cuyo producto no es numerablemente compacto. En la construcción obtendremos un ejemplo de espacio numerablemente compacto que no es Čech-completo.

Sea $\omega^* = \beta\omega \setminus \omega$. Como $w(\omega^*) = \mathfrak{c}$, el número de abiertos de $\omega^*$ es a lo sumo $2^{\mathfrak{c}}$, luego lo mismo vale para el número de cerrados. Sea $\{C_\alpha\}_{\alpha<\kappa}$, con $\kappa \leq 2^{\mathfrak{c}}$ una enumeración de todos los cerrados infinitos de $\omega^*$. Cada $C_\alpha$ contiene un subespacio numerable discreto, por el teorema 5.4, luego por el punto 8 del ejemplo A.36 tenemos que $C_\alpha$ contiene una copia de $\beta\omega$, luego $|C_\alpha| = 2^{\mathfrak{c}}$.

Así, podemos definir sucesiones $\{x_\alpha\}_{\alpha<\kappa}$, $\{y_\alpha\}_{\alpha<\kappa}$ de puntos de $\omega^*$ distintos dos a dos y de modo que $x_\alpha$, $y_\alpha \in C_\alpha$. En efecto, supuesto que la sucesión está definida para $\alpha < \beta$, sólo tenemos que tomar dos puntos distintos $x_\beta$, $y_\beta$ en $H_\beta \setminus (\{x_\alpha \mid \alpha < \beta\} \cup \{y_\alpha \mid \alpha < \beta\})$, lo cual es posible porque el cardinal del conjunto que restamos es menor que el de $H_\beta$. Así obtenemos dos conjuntos disjuntos $X = \{x_\alpha \mid \alpha < \kappa\}$, $Y = \{y_\alpha \mid \alpha < \kappa\}$ en $\omega^*$ que cortan a todos los cerrados infinitos de $\omega^*$.

Vamos a probar que $X_0 = \omega \cup X$, $Y_0 = \omega \cup Y$ son espacios numerablemente compactos.

Para ello basta probar que todo conjunto infinito numerable $A \subset X_0$ tiene un punto de acumulación en $X_0$. Por el teorema 5.4, podemos suponer que $A$ es discreto, con lo que $\overline{A}$ es homeomorfo a $\beta\omega$, luego $\overline{A} \setminus A$ es un compacto no numerable, al igual que $\overline{A} \setminus (A \cup \omega) \subset \omega^*$ Por la construcción de $X$ existe $p \in X \cap (\overline{A} \setminus (A \cup \omega))$, luego $p$ es un punto de acumulación de $A$ en $X_0$.

Finalmente veamos que $X_0 \times Y_0$ no es numerablemente compacto. Para ello consideramos $N = \{(n, n) \mid n \in \omega\} \subset X_0 \times Y_0 \subset \beta\omega \times \beta\omega$. Más concretamente, $N \subset \Delta = \{p, p) \mid p \in \beta\omega\}$, y $\Delta$ es cerrado, luego si $N$ tuviera un punto de acumulación en $X_0 \times Y_0$, estaría en $\Delta$, es decir, sería de la forma $(p, p)$, pero, como $X \cap Y = \varnothing$, esto sólo es posible si $(p, p) \in \omega \times \omega$, pero esto es absurdo, porque los puntos de $\omega \times \omega$ son aislados.

Veamos ahora que $X$ (que también es numerablemente compacto, porque es cerrado en $X_0$) no es Čech-completo. Notemos que $X$ es denso en $\omega^*$, pues corta a todos los abiertos-cerrados no vacíos, luego $\omega^*$ es una compactificación de $X$. Si $X$ fuera Čech-completo, sería un $G_\delta$ en $\omega^*$. Pongamos que $X = \bigcap\limits_{n\in\omega} U_n$. Entonces $\omega^* \setminus U_n$ es un cerrado que no corta a $X$, luego por construcción es finito, luego $\omega^* \setminus X = \bigcup\limits_{n\in\omega} (\omega^* \setminus U_n)$ es numerable, lo cual es imposible, porque $Y \subset \omega^* \setminus X$.

**Ejemplo A.39 (El ejemplo de Dowker)** Vamos a construir un espacio topológico normal cerodimensional que no es fuertemente cerodimensional.

Sea $I = [0, 1]$ y consideremos en $I$ la relación de equivalencia dada por $x \sim y$ si y sólo si $x - y \in \mathbb{Q}$. Las clases de equivalencia son numerables, luego hay $2^{\aleph_0}$ de ellas. Elegimos un conjunto $\{X_\alpha\}_{\alpha<\omega_1}$ de $\aleph_1$ clases de equivalencia distintas de $I \cap \mathbb{Q}$. Sea $S_\alpha = I \setminus \bigcup\limits_{\alpha\leq\beta} X_\beta$.

Veamos que $S_\alpha$ es cerodimensional. En efecto, $S_\alpha \subset I \setminus X_0$ y $X_0$ es denso en $I$, por lo que $S_\alpha$ no contiene ningún intervalo (que no se reduzca a un punto). Tomemos $p \in {]a, b[} \cap S_\alpha$. Como los intervalos $]a, p[$ y $]p, b[$ no están contenidos en $S_\alpha$, podemos tomar puntos $a < x < p < y < b$, con $x$, $y \in \mathbb{R} \setminus S_\alpha$. Entonces $p \in {]x, y[} \cap S_\alpha \subset {]a, b[} \cap S_\alpha$ y $]x, y[ \cap S_\alpha$ es abierto cerrado en $S_\alpha$.

Consideramos ahora los subespacios siguientes de $(\omega_1 + 1) \times I$:

$$M_\alpha = \bigcup_{\gamma\leq\alpha} (\{\gamma\} \times S_\gamma), \quad M = \bigcup_{\alpha<\omega_1} M_\alpha, \quad M^+ = M \cup (\{\omega_1\} \times I).$$

1. *$M$ es denso en $M^+$.*

   Basta tener en cuenta que $\omega_1 \times \mathbb{Q} \subset M$.

2. *$M_\alpha$ es cerodimensional.*

   En efecto, es un subespacio del espacio cerodimensional $\omega_1 \times S_\alpha$.

3. *$M$ es cerodimensional*

   Como $M_\alpha = M \cap ((\alpha+1) \times I)$ y $\alpha + 1$ es abierto y cerrado en $\omega_1 + 1$, tenemos que $M_\alpha$ es abierto y cerrado en $M$. Por lo tanto, al unir una base de abiertos cerrados de cada $M_\alpha$, obtenemos una base de abiertos cerrados de $M$.

4. *$M_\alpha$ es normal.*

   Como $M_\alpha \subset (\alpha+1) \times I$, vemos que $M_\alpha$ es regular y tiene una base numerable, luego el teorema 5.66 nos da que es metrizable, luego normal.

5. *$M^+$ es normal.*

   Sean $F_1$ y $F_2$ cerrados disjuntos en $M^+$. Entonces $F_1 \cap (\{\omega_1\} \times I)$ y $F_2 \cap (\{\omega_1\} \times I)$ son cerrados disjuntos en $(\omega_1 + 1) \times I$, luego existen abiertos disjuntos $U_1'$, $U_2'$ en $(\omega_1 + 1) \times I$ tales que $F_i \cap (\{\omega_1\} \times I) \subset U_i'$.

   Sea $F_i'$ cerrado en $(\omega_1 + 1) \times I$ tal que $F_i = F_i' \cap M^+$. Entonces

   $$F_i \cap (\{\omega_1\} \times I) = F_i' \cap (\{\omega_1\} \times I) = \bigcap_{\alpha<\omega_1} (F_i' \cap ([\alpha, \omega_1] \times I)) \subset U_i',$$

   luego por 4.11 existe un $\alpha < \omega_1$ tal que $F_i' \cap ([\alpha + 1, \omega_1] \times I) \subset U_i'$, con lo que $F_i \cap (M^+ \setminus M_\alpha) \subset U_i' \cap M^+$.

   Para cada $\gamma < \alpha$, como $M_\gamma$ es normal, podemos separar $F_i \cap M_\gamma$ por abiertos disjuntos $U_i^\gamma$ en $M_\gamma$, pero $M_\gamma$ es abierto en $M^+$, luego llamando $U_i = (U_i' \cap M^+) \cup \bigcup\limits_{\gamma<\alpha} U_i^\gamma$ tenemos que $U_1$ y $U_2$ son abiertos disjuntos en $M^+$ tales que $F_i \subset U_i$.

6. *Cerrados disjuntos en $M$ tienen clausuras disjuntas en $M^+$.*

   Sean $F_1$ y $F_2$ cerrados en $M$ y supongamos que $(\omega_1, r) \in \overline{F}_1 \cap \overline{F}_2$. Entonces $r$ está a lo sumo en una de las clases $X_\alpha$, luego existe un $\alpha_0$ tal que $r \in S_\alpha$ para todo $\alpha \geq \alpha_0$.

   Definimos como sigue dos sucesiones $\{(\alpha_n, x_n)\}_{n=1}^\infty$, $\{(\beta_n, y_n)\}_{n=1}^\infty$ en $F_1$ y $F_2$, respectivamente. Supuestos definidos $(\alpha_{n-1}, x_{n-1})$ y $(\beta_{n-1}, x_{n-1})$, como

   $$U_n = [\alpha_{n-1} + 1, \omega_1] \times ]r - 1/n, r + 1/n[ \cap M^+$$

   es un entorno de $(\omega_1, r)$, existe $(\alpha_n, x_n) \in U_n \cap F_1$ y, considerando

   $$V_n = [\alpha_n + 1, \omega_1] \times ]r - 1/n, r + 1/n[ \cap M^+,$$

podemos tomar $(\beta_n, y_n) \in V_n \cap F_2$. De este modo

$$\alpha_0 < \alpha_1 < \beta_1 < \alpha_2 < \beta_2 < \cdots$$

y $\lim_n x_n = \lim_n y_n = r$. Pero, si llamamos $\gamma = \sup_n \alpha_n = \sup_n \beta_n$, tenemos que $(\gamma, r) \in S_\gamma$, de donde a su vez $(\gamma, r) \in F_1 \cap F_2$.

7. *$M$ es normal*

   Si $F_1$ y $F_2$ son cerrados disjuntos en $M$, entonces $\overline{F}_1$ y $\overline{F}_2$ son cerrados disjuntos en $M^+$, que ya hemos visto que es normal, luego las intersecciones con $M$ de dos abiertos en $M^+$ que separen las clausuras son dos abiertos en $M$ que separan a los cerrados dados.

8. *$M$ está $C^*$-sumergido en $M^+$.*

   Basta aplicar el teorema 5.36. Dos ceros disjuntos en $M$ tienen clausuras disjuntas en $M^+$, que es normal, luego dichas clausuras son ceros.

Así pues, $M \subset M^+ \subset \beta M^+$ y, como $M$ es denso y está $C^*$-sumergido en $M^+$, también es denso y está $C^*$-sumergido en $\beta M^+$, de donde concluimos que $\beta M = \beta M^+$. Pero entonces $\beta M$ contiene al compacto conexo $\{\omega_1\} \times I$, luego no es cerodimensional. El teorema 7.14 nos da entonces que $M$ no es fuertemente cerodimensional.

### A.3.4 Espacios conjuntistas

**Ejemplo A.40 (c2)** Sea $X = \{0,1\}^I$, donde $I$ es el conjunto de todas las sucesiones estrictamente crecientes de números naturales.

1. **Compacidad** *$X$ es un espacio compacto no sucesionalmente compacto ni hereditariamente de Lindelöf.*

   Es compacto por el teorema de Tychonoff. Para probar que no es sucesionalmente compacto consideramos los conjuntos

   $$E_n = \{t \in I \mid \text{existe } k \in \mathbb{N} \text{ tal que } t_{2k+1} = n\}$$

   y sea $f_n \in X$ tal que $f_n(t) = 1$ si y sólo si $t \in E_n$. Vamos a probar que $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión en $X$ sin subsucesiones convergentes. Sea $\{f_{n_k}\}_{k=0}^{\infty}$ una subsucesión. Entonces $t = \{n_k\}_{k=0}^{\infty} \in A$ y, para todo $k \in \mathbb{N}$, tenemos que $t \in E_{n_{2k+1}}$, luego $f_{n_{2k+1}}(t) = 1$. Igualmente, $f_{n_{2k}}(t) = 0$, luego la sucesión $\{f_{n_k}(t)\}_{k=0}^{\infty}$ no es convergente en $\{0,1\}$, luego $\{f_{n_k}\}_{k=0}^{\infty}$ no es convergente en $X$.

   No es hereditariamente de Lindelöf porque si lo fuera sería $T_6$, por el teorema 5.47, y a continuación vemos que ni siquiera es $T_5$:

2. **Separación** *$X$ es $T_4$, pero no $T_5$.*

   Ciertamente $X$ es normal porque es compacto, pero, por el teorema 5.63, tenemos que $X$ contiene un subespacio homeomorfo al plano de Sorgenfrey $S \times S$ (ejemplo A.26), que no es normal, luego $X$ no es hereditariamente normal.

**Ejemplo A.41 ($^\kappa 2$)** Vamos a calcular los cardinales invariantes principales del cubo de Cantor $X = {}^\kappa 2$.

| $w$ | $\chi$ | $d$ | $dh$ | $c$ | $e$ | $ch$ | $L$ | $Lh$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\kappa$ | $\kappa$ | $\log\kappa$ | $\kappa$ | $\aleph_0$ | $\aleph_0$ | $\kappa$ | $\aleph_0$ | $\kappa$ |

Por $\log\kappa$ hay que entender el menor cardinal $\mu$ tal que $2^\mu \geq \kappa$.

El peso y el carácter nos los da el teorema 8.6. Más precisamente, éste nos da que todos los puntos de $X$ tienen carácter $\kappa$.

Las funciones características $\{\chi_{\{\alpha\}}\}_{\alpha<\kappa}$ forman claramente un subespacio discreto de $X$ (pero no es cerrado, porque la sucesión nula está en su clausura), por lo que $\kappa \leq ch(X) \leq Lh(X) \leq w(X) = \kappa$.

A su vez, $\kappa = ch(X) \leq dh(X) \leq w(X) = \kappa$. Como $X$ es compacto, obviamente es un espacio de Lindelöf, luego $L(X) = \aleph_0$. La celularidad numerable nos la da el teorema 8.24 y, por otra parte, $e(X) \leq L(X) = \aleph_0$.

El teorema 8.7 nos da que $d(X) \leq \log\kappa$ y, por 8.3 es $\kappa = w(X) \leq 2^{d(X)}$, luego $d(X) \geq \log\kappa$.

**Ejemplo A.42** Consideramos el espacio $X = \mathbb{N}^{\omega_1}$.

*$X$ es $T_{3\frac{1}{2}}$, pero no $T_4$.*

Obviamente $X$ es completamente regular, pues $\mathbb{N}$ lo es. Para probar que no es normal consideramos, para $i = 0, 1$, los cerrados $H_i$ formados por las funciones $f : \omega_1 \longrightarrow \mathbb{N}$ que toman a lo sumo una vez cada valor natural distinto de $i$ y vamos a ver que no pueden ser separados por abiertos.

Consideremos dos abiertos $H_i \subset U_i$ y veamos que no pueden ser disjuntos. Por el teorema de Hewitt-Marczewski-Pondiczery 8.7, $X$ tiene un subespacio denso numerable $D$ y sea $D_i = D \cap U_i$. El teorema 1.22 nos da que $\overline{D}_i = \overline{U}_i$.

Para cada $d \in D_i$, sea $I_d \subset \omega_1$ finito tal que

$$B_d = \{f \in X \mid f|_{I_d} = d|_{I_d}\} \subset U_i.$$

Sea $D_i \subset V_i = \bigcup\limits_{d\in D_i} B_d \subset U_i$, con lo que $\overline{V}_i = \overline{U}_i$.

Sea $I = \bigcup\limits_{d\in D_0\cup D_1} I_d \subset \omega_1$, que es un conjunto numerable, luego podemos tomar un ordinal $I \subset \alpha < \omega_1$. Para cada $d \in D_i$, tenemos que $B_d = A_d \times \mathbb{N}^{\omega_1\setminus\alpha}$, para cierto abierto $A_d \subset \mathbb{N}^\alpha$. Por lo tanto, $V_i = A_i \times \mathbb{N}^{\omega_1\setminus\alpha}$, con $A_i = \bigcup\limits_{d\in D_i} A_d$, luego $\overline{U}_i = \overline{V}_i = \overline{A}_i \times \mathbb{N}^{\omega_1\setminus\alpha}$.

Sea $\phi : \alpha \longrightarrow \mathbb{N}$ inyectiva y, para $i = 0, 1$, definamos

$$x_i(\delta) = \begin{cases} \phi(\delta) & \text{si } \delta < \alpha, \\ i & \text{si } \delta \in \omega_1 \setminus \alpha, \end{cases}$$

de modo que $x_i \in H_i \subset \overline{U}_i$, luego $\phi = x_i|_\alpha \in \overline{A}_i$, es decir, $\phi \in \overline{A}_1 \cap \overline{A}_2$, luego $x_0 \in U_0 \cap \overline{U}_1$, luego $U_0 \cap U_1 \neq \varnothing$.

*$X$ no es Čech-completo*

Sea $\mathbb{N}^\infty$ la compactificación de Alexandroff de $\mathbb{N}$. Claramente $K = (\mathbb{N}^\infty)^{\omega_1}$ es una compactificación de $X$. Basta probar que $X$ no es $G_\delta$ en ella.

Supongamos, por el contrario, que $X = \bigcap\limits_{n=0}^{\infty} U_n$, donde cada $U_n$ es abierto en $K$. Fijemos cualquier $f \in X$ y tomemos abiertos básicos $f \in B_n \subset U_n$, es decir, abiertos de la forma $B_n = \{s \in K \mid s|_{J_n} = f|_{J_n}\}$, donde $J_n \subset \omega_1$ es finito. Sea $\alpha < \omega_1$ tal que $\bigcup\limits_{n=0}^{\infty} J_n \subset \alpha$. Entonces, la función $g \in K$ dada por $g|_\alpha = f|_\alpha$ y $g(\beta) = \infty$ para $\alpha \leq \beta < \omega_1$ cumple $g \in \bigcap\limits_{n=0}^{\infty} U_n \setminus X$, contradicción.

**Ejemplo A.43 (El espacio de Mrowka)** Sea $\mathcal{A}$ una familia casi disjunta maximal en $\mathcal{P}\omega$, es decir, una familia de subconjuntos infinitos de $\omega$ con intersecciones finitas maximal respecto de la inclusión. Definimos $\Psi = \mathcal{A} \cup \omega$, con la topología en la que $U \subset \Psi$ es abierto si, cuando $A \in U \cap \mathcal{A}$, existe $F \subset \omega$ finito tal que $A \setminus F \subset U$. Claramente estos conjuntos forman una topología en $\Psi$.

Vamos a probar que $\Psi$ es pseudocompacto, pero no es numerablemente compacto, luego no es normal.

1. *$\Psi$ es un espacio de Hausdorff, 1AN*

   Notemos que los puntos de $\omega$ son aislados, y que una base de entornos de $A \in \Psi \setminus \omega$ la forman los conjuntos $\{A\} \cup (A \setminus F)$, donde $F \subset A$ es finito.

   Así, si $A, B \in \Psi \setminus \omega$, tomando $F = A \cap B$, tenemos que $\{A\} \cup (A \setminus F)$ y $\{B\} \cup (B \setminus F)$ son entornos disjuntos de $A$ y $B$.

   Por otra parte, si $n \in \omega$, entonces $\{n\}$ y $\{A\} \cup (A \setminus \{n\})$ son entornos disjuntos de $\{A\}$ y $\{n\}$.

2. *$\Psi$ es localmente compacto (luego completamente regular), pero no numerablemente compacto.*

   Los entornos básicos de los puntos $A \in \Psi \setminus \omega$ son compactos, pues todo abierto que contenga a $A$ contiene a todo el entorno salvo un número finito de números naturales. Entonces $\Psi$ es completamente regular por 5.56.

   Por otra parte, $\Psi \setminus \omega$ es infinito, cerrado y discreto en $\Psi$, por lo que $\Psi$ no es numerablemente compacto.

   Todo lo probado hasta aquí no requiere que la familia $\mathcal{A}$ sea maximal, pero esta hipótesis es necesaria para el apartado siguiente:

3. *$\Psi$ es pseudocompacto.*

   Supongamos que $f : \Psi \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función continua no acotada. Como $\omega$ es denso en $\Psi$, necesariamente $f$ no está acotada en $\omega$, luego podemos tomar una sucesión $\{x_n\}_{n\in\omega}$ en $\omega$ tal que tanto $\{x_n\}_{n\in\omega}$ como $\{|f(x_n)|\}_{n\in\omega}$ sean estrictamente crecientes y tiendan a $+\infty$.

   Sea $B = \{x_n \mid n \in \omega\}$. Si $B \in \mathcal{A}$, entonces $\lim\limits_n x_n = B$, pero $\{f(x_n)\}_{n\in\omega}$ no converge a $f(B)$, lo cual es absurdo. Por lo tanto, $B \notin \mathcal{A}$, pero por la maximalidad de $\mathcal{A}$ esto significa que existe $A \in \mathcal{A}$ tal que $C = B \cap A$ es infinito. Pero $C$ determina una subsucesión de $\{x_n\}_{n\in\omega}$ convergente a $C$ cuyas imágenes por $f$ tienden igualmente a $\infty$, por lo que no convergen a $f(C)$, y tenemos igualmente una contradicción.

4. $\Psi$ *no es normal.*

   Por el teorema 4.82.

**Ejemplo A.44 (El ejemplo G de Bing)** Vamos a construir un espacio hereditariamente normal que no es colectivamente de Hausdorff.

Sea $P$ un conjunto infinito, sea $Q = \mathcal{P}$ y sea $G = 2^Q$. Para cada $p \in P$, sea $\chi_p : Q \longrightarrow 2$ su función característica (dada por $\chi_p(q) = 1$ si y sólo si $p \in q$). Sea $G_P = \{\chi_p \mid p \in P\} \subset G$. Consideramos en $G$ la topología que tiene por base a los abiertos de la topología producto en $2^Q$ y a los conjuntos $\{x\}$ con $x \in G \setminus G_P$. Es trivial que estos conjuntos forman la base de una topología de Hausdorff en $G$.

Como todos los puntos de $G\setminus G_P$ son aislados, tenemos que $G\setminus G_P$ es abierto en $G$, luego $G_P$ es cerrado. Vamos a probar que es discreto. Para cada $p \in P$, podemos considerar el abierto (respecto de la topología producto en $2^Q$, luego en $G$):

$$W_p = \{f \in G \mid f(\{p\}) = 1,\ f(P \setminus \{p\}) = 0\}.$$

Claramente $W_p \cap G_P = \{\chi_p\}$, luego, en efecto, $G_P$ es discreto.

Sin embargo, ahora probamos que no existen abiertos disjuntos $\{U_p\}_{p\in P}$ en $G$ tales que $U_p \cap G_p = \{\chi_p\}$, por lo que $G$ no es colectivamente de Hausdorff.

Si $p \in P$, como $\{\chi_p\}$ no es abierto básico, tiene que existir un abierto $V_p$ para la topología producto de $2^Q$ tal que $\chi_p \in V_p \subset U_p$, pero $2^Q$ cumple la condición de cadena numerable, por ser un producto de espacios separables (teorema 8.24), luego tienen que existir puntos $p \neq p'$ tales que $V_p \cap V_{p'} \neq \varnothing$, luego $U_p \cap U_{p'} \neq \varnothing$.

Veamos ahora que $G$ es hereditariamente normal. Tomamos dos conjuntos $A, B \subset G$ tales que $\overline{A} \cap B = A \cap \overline{B} = \varnothing$ y vamos a distinguir dos casos.

1) Si $A \subset G\setminus G_P$ o $B \subset G\setminus G_P$, podemos suponer sin pérdida de generalidad que se da la primera inclusión. Entonces todos los puntos de $A$ son aislados en $G$, luego $A$ es abierto y así los abiertos $U = A$, $V = G \setminus \overline{A}$ separan a $A$ y $B$.

2) Supongamos ahora que $A \cap G_P \neq \varnothing \neq B \cap G_P$. Definimos

$$q_1 = \{p \in P \mid \chi_p \in A\}, \qquad q_2 = \{p \in P \mid \chi_p \in B\},$$

que son subconjuntos de $P$ disjuntos no vacíos. A su vez, definimos

$$U_1 = \{f \in G \mid f(q_1) = 1,\ f(q_2) = 0\}, \quad U_2 = \{f \in G \mid f(q_1) = 0,\ f(q_2) = 1\}.$$

Claramente $U_1$ y $U_2$ son abiertos disjuntos en $G$ y $A \cap G_P \subset U_1$, $B \cap G_P \subset U_2$.

Por otra parte, $A \backslash G_P$ y $B \backslash G_P$ son abiertos, pues están formados por puntos aislados, luego

$$V_1 = ((A \setminus G_P) \cup U_1) \setminus \overline{B}, \quad V_2 = ((B \setminus G_P) \cup U_2) \setminus \overline{A}$$

son abiertos disjuntos que separan a $A$ y $B$.

Puede probarse que $G$ no es perfectamente normal, pero Bing dio otro ejemplo (el ejemplo $H$) de espacio con las mismas características que $G$, pero que además es perfectamente normal.

**Ejemplo A.45 (El espacio George de Fleissner)** Veamos ahora un ejemplo de espacio hereditariamente normal, colectivamente de Hausdorff, pero no colectivamente normal.

Llamamos $G_\beta = 2^{\mathcal{P}\beta}$, $\mathcal{G} = \bigcup\limits_{\beta<\omega_1} G_\beta$.

Si $\alpha < \beta < \omega_1$, llamamos $f_{\beta,\alpha} : \mathcal{P}\beta \longrightarrow 2$ a la función característica de $\{\alpha\}$ en $\mathcal{P}\beta$. Sea $Y_\alpha = \{f_{\beta,\alpha} \mid \alpha < \beta < \omega_1\}$ y sea $X = \bigcup\limits_{\alpha<\omega_1} Y_\alpha$.

Consideramos a $\mathcal{G}$ como espacio topológico (George) con la topología que tiene por subbase a los conjuntos siguientes:

1. $\{p\}$, para todo $p \in \mathcal{G} \setminus X$,

2. $V_U = \bigcup\limits_{\beta \in U} G_\beta$, para todo abierto $U \subset \omega_1$,

3. $V(A, e) = \bigcup\limits_{\beta<\omega_1} \{f \in G_\beta \mid f(A(\beta)) = e\}$, donde $e \in 2$ y $A : \omega_1 \longrightarrow \mathcal{P}\omega_1$ es una función que cumple las propiedades siguientes:

   (a) $A(\beta) \subset \beta$, para todo $\beta < \omega_1$,

   (b) $H_\alpha = \{\beta < \omega_1 \mid \alpha \in A(\beta)\}$ es abierto-cerrado en $\omega_1$.

Si restringimos a $G_\beta$ los abiertos subbásicos nos quedan los conjuntos:

1. $\{p\}$, para todo $p \in \mathcal{G}_\beta \setminus Y_\beta$,

2. $G_\beta$ o $\varnothing$,

3. $\{f \in G_\beta \mid f(A) = e\}$, donde[4] $e \in 2$ y $A \in \mathcal{P}\beta$.

Los conjuntos de tipo 3) son los abiertos subbásicos para la topología producto en $G_\beta = 2^{\mathcal{P}\beta}$, de donde deducimos que la topología que $G_\beta$ hereda de $\mathcal{G}$ es la definida en el ejemplo anterior con $P = \beta$ (cuando $\beta$ es infinito, y es la topología discreta para $\beta$ finito).

[4]Aquí usamos que todo $A_0 \in \mathcal{P}\beta$ puede extenderse a una función $A$ tal que $A(\beta) = A_0$ y que cumpla las propiedades (a) y (b). Basta definir $\alpha \in A(\beta')$ si y sólo si $\alpha \in A \cap \beta'$.

Si restringimos a $Y_\alpha$ los abiertos subbásicos nos quedan los conjuntos

1. $\varnothing$,

2. $\{f_{\beta,\alpha} \mid \beta \in U\}$, para todo abierto $U \subset \omega_1$,

3. $\{f_{\beta,\alpha} \mid \beta \in H_\alpha\}$ o $\{f_{\beta,\alpha} \mid \beta \notin H_\alpha\}$, donde $H_\alpha$ es abierto-cerrado en $\omega_1$.

En efecto, para el tercer caso tenemos que $f_{\beta,\alpha} \in V(A,e)$ si y sólo si $f_{\beta,\alpha}(A(\beta)) = e$, si y sólo si $\alpha \notin A(\beta)$ o $\alpha \in A(\beta)$ según si $e = 0, 1$, lo cual equivale a $\beta \notin H_\alpha$ o $\beta \in H_\alpha$, respectivamente.

Por consiguiente, la biyección $\omega_1 \setminus \alpha \longrightarrow Y_\alpha$ dada por $\beta \mapsto f_{\beta,\alpha}$ hace corresponder los abiertos subbásicos de $Y_\alpha$ con los abiertos $U \cap (\omega_1 \setminus \alpha)$, para todo abierto $U$ de $\omega_1$, y con ciertos abiertos cerrados $H_\alpha$ (o sus complementarios). Como los abiertos $U \cap (\omega_1 \setminus \alpha)$ son ya de por sí una base de $\omega_1 \setminus \alpha$, concluimos que cada $Y_\alpha$ es homeomorfo al espacio ordenado $\omega_1 \setminus \alpha$.

Más adelante necesitaremos una consecuencia más fina del análisis que acabamos de hacer:

$(*)$ *Si $f_{\beta,\alpha} \in V(A,e)$, existe un $\alpha \leq \rho < \beta$ tal que para todo $\rho < \delta \leq \beta$ se cumple $f_{\delta,\alpha} \in V(A,e)$.*

En efecto, hemos visto que, para $\alpha < \delta$, se cumple $f_{\delta,\alpha} \in V(A,e)$ si y sólo si $\delta \in \omega_1 \setminus H_\alpha$ (si $e = 0$) o si y sólo si $\beta \in H_\alpha$ (si $e = 1$). Si $f_{\beta,\alpha} \in V(A,e)$, tenemos que $\beta$ cumple el caso correspondiente y, como ambos conjuntos son abiertos, existe un $\alpha \leq \rho < \beta$ tal que $\beta \in\, ]\rho, \beta+1[\, \subset \omega_1 \setminus H_\alpha$, o bien $\beta \in\, ]\rho, \beta+1[\, \subset H_\alpha$, según el caso, y claramente $\rho$ cumple lo pedido.

Veamos ahora que $\{Y_\alpha \mid \alpha < \omega_1\}$ es una familia discreta de cerrados en $\mathcal{G}$. Esto significa que si $I \subset \omega_1$, entonces $Y_I = \bigcup\limits_{\alpha \in I} Y_\alpha$ es cerrado.

Tomamos $x \in \mathcal{G} \setminus Y_I$. Si $x \in G \setminus X$, entonces $x \in \{x\} \subset \mathcal{G} \setminus Y_I$, donde $\{x\}$ es abierto. Supongamos, pues, que $x = f_{\beta_0,\alpha_0}$, con $\alpha_0 \in \omega_1 \setminus I$. Definimos

$$A(\beta) = \begin{cases} \{\alpha_0\} & \text{si } \alpha_0 < \beta, \\ \varnothing & \text{si } \beta \leq \alpha_0, \end{cases}$$

que claramente cumple los requisitos para definir un abierto subbásico $V(A,1)$, pues $H_{\alpha_0} = \,]\alpha_0, \omega_1[$ y $H_\alpha = \varnothing$ si $\alpha \neq \alpha_0$. Veamos que

$$x = f_{\beta_0,\alpha_0} \in V(A,1) \subset \mathcal{G} \setminus Y_I.$$

Ciertamente, $f_{\beta_0,\alpha_0}(A(\beta_0)) = 1$, pues esto equivale a que $\alpha_0 \in A(\beta_0)$ y, si $f_{\beta,\alpha} \in Y_I$, entonces $\alpha \neq \alpha_0$, luego $\alpha \notin A(\beta)$, luego $f_{\beta,\alpha}(A(\beta)) = 0$, luego $f_{\beta,\alpha} \notin V(A,1)$.

El hecho de que los conjuntos $V_U$ sean abiertos, aplicado a $U = \omega_1 \setminus \{\beta\}$, implica que $G_\beta$ es cerrado en $\mathcal{G}$ y, como $G_\beta$ es $T_1$, concluimos que $\mathcal{G}$ es $T_1$ (cada punto es cerrado en un $G_\beta$, que a su vez es cerrado en $\mathcal{G}$).

A continuación probamos que $\mathcal{G}$ es hereditariamente normal. Como ya hemos probado que es $T_1$, sólo falta probar que si $\overline{A}_1 \cap A_2 = A_1 \cap \overline{A}_2 = \varnothing$, podemos separarlos por abiertos. Distinguimos casos como en el ejemplo anterior:

1) Si $A_1 \subset \mathcal{G} \setminus X$ o $A_2 \subset \mathcal{G} \setminus X$, podemos suponer que se da la primera inclusión, con lo que $A_2$ es abierto en $\mathcal{G}$, luego basta tomar $U_1 = A_1$ y $U_2 = \mathcal{G} \setminus \overline{A}_1$ para separar los dos conjuntos.

2) Si $A_1 \cap X \neq \varnothing \neq A_2 \cap X$, basta encontrar abiertos disjuntos tales que $A_1 \cap X \subset U_1$, $A_2 \cap X \subset U_2$, pues en tal caso

$$V_1 = ((A_1 \setminus X) \cup U_1) \setminus \overline{A}_2, \qquad V_2 = ((A_2 \setminus X) \cup U_2) \setminus \overline{A}_1$$

son abiertos disjuntos que separan $A_1$ y $A_2$. Por lo tanto, no perdemos generalidad si suponemos que $A_1$, $A_2 \subset X$.

Por el teorema 12.16, tenemos que $\omega_1 \setminus \alpha$ es fuertemente cerodimensional, luego lo mismo vale para $Y_\alpha$. Por lo tanto, existe un abierto cerrado $U_\alpha$ en $Y_\alpha$ tal que $A_1 \cap Y_\alpha \subset U_\alpha$, $A_2 \cap Y_\alpha \subset Y_\alpha \setminus U_\alpha$.

Sea $H_\alpha = \{\beta \in \omega_1 \setminus \alpha \mid f_{\beta,\alpha} \in U_\alpha\}$, que es el abierto cerrado en $\omega_1 \setminus \alpha$ (luego en $\omega_1$) que se corresponde con $U_\alpha$ a través del homeomorfismo $\beta \mapsto f_{\beta,\alpha}$. Sea $A(\beta) = \{\alpha < \beta \mid \beta \in H_\alpha\}$. Así tenemos una función $A$ que define abierto $V(A, e)$, ya que los conjuntos $H_\alpha$ asociados a $A$ son precisamente los abiertos-cerrados $H_\alpha$ a partir de los cuales hemos definido $A$.

Se cumple que $A_1 \subset V(A, 1)$, $A_2 \subset V(A, 0)$. En efecto, si $f_{\beta\alpha} \in A_1$, entonces $f_{\beta,\alpha} \in A_1 \cap Y_\alpha \subset U_\alpha$, luego $\beta \in H_\alpha$, luego $\alpha \in A(\beta)$, luego $f_{\beta,\alpha}(A(\beta)) = 1$, luego $f_{\beta,\alpha} \in V(A, 1)$. Igualmente se prueba la segunda inclusión. Claramente, los abiertos $V(A, e)$, para $e = 0, 1$ son disjuntos, luego ya tenemos separados los conjuntos $A_i$.

Seguidamente probamos que $\mathcal{G}$ es colectivamente de Hausdorff. Sea $D \subset \mathcal{G}$ un subconjunto cerrado y discreto. Entonces $D \cap X$ es abierto en $D$, luego existe un abierto $U$ en $\mathcal{G}$ tal que $D \cap X = D \cap U$. Si encontramos abiertos disjuntos dos a dos $\{U_x\}_{x \in D \cap X}$ tales que $x \in U_x$, podemos suponer que $U_x \subset U$, con lo que, para cada $x \in D \setminus X$, tendremos que $x \notin U$, luego llamando $U_x = \{x\}$ tenemos que $\{U_x\}_{x \in D}$ sigue siendo una familia de abiertos disjuntos dos a dos que separa a los puntos de $D$. Así pues, podemos suponer que $D \subset X$.

Entonces $D \cap Y_\alpha$ es cerrado y discreto en $Y_\alpha$, luego es finito, pues un subconjunto cerrado infinito en $\omega_1 \setminus \alpha$ contiene un compacto infinito, luego un punto de acumulación. Por consiguiente, podemos definir $h : \omega_1 \longrightarrow \omega_1$ de modo que si $f_{\beta,\alpha} \in D$, entonces $\beta < h(\alpha)$.

Por [TC 6.7], el conjunto $C = \{\gamma < \omega_1 \mid h[\gamma] \subset \gamma\}$ es cerrado no acotado, luego por [TC 6.5] existe una función normal $p : \omega_1 \longrightarrow \omega_1$ tal que $p[\omega_1] = C$.

Si $f_{\beta,\alpha} \in D$, tenemos que $\alpha < \beta < h(\alpha)$, luego $\beta \notin C$. Si $\eta \in \omega_1$ es el menor ordinal tal que $\beta < p(\eta)$, por la normalidad de $p$ no puede ser que $\eta$ sea un ordinal límite, luego $\eta = \delta + 1$, y entonces $p(\delta) < \beta < p(\delta + 1)$.

Así pues, si llamamos $U_\delta = \,]p(\delta), p(\delta + 1)[$, tenemos que $f_{\beta,\alpha} \in G_\beta$, con $\beta \in U_\delta$, es decir, que $f_{\beta,\alpha} \in V_{U_\delta}$ y, en general, hemos probado que $D \subset \bigcup\limits_{\delta < \omega_1} V_{U_\delta}$.

Ahora bien, si $f_{\beta,\alpha} \in V_{U_\delta}$, entonces $\alpha < \beta < p(\delta+1)$, luego $X \cap V_{U_\delta}$ es numerable, y en particular $D \cap V_{U_\delta}$ es un subconjunto numerable y discreto en el abierto $V_{U_\delta}$. Además, los abiertos $V_{U_\delta}$ son disjuntos dos a dos.

Por el teorema 5.5, existen abiertos disjuntos dos a dos (que podemos tomar contenidos en $V_{U_\delta}$) que separan los puntos de $D \cap V_{U_\delta}$, y al unir estas familias de abiertos obtenemos una familia de abiertos en $\mathcal{G}$ disjuntos dos a dos que separan los puntos de $D$.

Veamos finalmente que $\mathcal{G}$ no es colectivamente normal, para lo cual basta probar que la familia discreta de cerrados $\{Y_\alpha\}_{\alpha<\omega_1}$ no puede ser separada. Para ello consideramos abiertos $\{V_\alpha\}_{\alpha<\omega_1}$ tales que $Y_\alpha \subset V_\alpha$. Para cada $\alpha < \beta < \omega_1$, sea $B_{\beta,\alpha}$ un abierto básico tal que $f_{\beta,\alpha} \in B_{\beta,\alpha} \subset V_\alpha$.

Cada $B_{\beta,\alpha}$ es intersección finita de abiertos subbásicos, necesariamente de los tipos 2) y 3). Pero la intersección de abiertos de tipo 2) es de tipo 2), luego, reduciendo $B_{\beta,\alpha}$ si es preciso, podemos suponer que es la intersección de un único abierto de tipo 2) de la forma $V_{]\rho_{\beta,\alpha},\beta+1[}$, con $\alpha \leq \rho_{\beta,\alpha} < \beta$, y de un número finito $n_{\beta,\alpha}$ de abiertos de tipo 3). Por la propiedad $(*)$ que hemos probado antes, aplicada a dicho número finito de abiertos, aumentando $\rho_{\beta,\alpha}$, podemos suponer que si $\rho_{\beta,\alpha} < \delta \leq \beta$, entonces $f_{\delta,\alpha} \in B_{\beta,\alpha}$.

La aplicación $\beta \mapsto \rho_{\beta,\alpha}$ es regresiva en $\omega_1 \setminus \alpha$, luego por [TC 6.15] existe un $\rho_\alpha < \omega_1$ tal que el conjunto $E_\alpha = \{\beta \in \omega_1 \setminus \alpha \mid \rho_{\beta,\alpha} = \rho_\alpha\}$ es estacionario en $\omega_1$. En particular es no numerable, luego existe $n_\alpha$ y $E'_\alpha \subset E_\alpha$ no numerable, tal que $n_{\beta,\alpha} = n_\alpha$ para todo $\beta \in E'_\alpha$. A su vez, existe un $n \in \omega$ tal que $n_\alpha = n$ para infinitos $\alpha < \omega_1$. Sea $k = 2^n + 1$ y tomemos ordinales $\{\alpha_i\}_{i<k}$ distintos dos a dos de modo que $n_{\alpha_i} = n$, para todo $i < k$. Sea $\rho_{\alpha_i} < \delta < \omega_1$, para todo $i < \omega$. Como $E'_{\alpha_i}$ no está acotado, podemos tomar $\beta_i \in E'_{\alpha_i}$ tal que $\rho_{\beta_i,\alpha_i} = \rho_{\alpha_i} < \delta < \beta_i$, de donde $f_{\delta,\alpha_i} \in B_{\beta_i,\alpha_i} \cap G_\delta$. Además, $B_{\beta_i,\alpha_i}$ es intersección de $n_{\beta_i,\alpha_i} = n_{\alpha_i} = n$ abiertos subbásicos de tipo 3), para todo $i < k$.

Esto significa que $B_{\beta_i,\alpha_i} \cap G_\delta = \bigcap\limits_{j<n} \{f \in G_\delta \mid f(A_j(\delta)) = e_j\} \neq \varnothing$, donde puede haber conjuntos repetidos. Equivalentemente,

$$B_{\beta_i,\alpha_i} \cap G_\delta = B(s_i) = \{f \in G_\delta \mid f|_{I_i} = s_i\},$$

donde $I_i \subset \mathcal{P}\beta$ cumple $|I_i| \leq n$ y $s_i \in 2^{I_i}$. Podemos considerar en $G_\delta = 2^{\mathcal{P}\delta}$ la medida de Haar unitaria, determinada por que $m(B(s_i)) = 1/2^{|I_i|} \geq 1/2^n$. Si estos $k = 2^n + 1$ conjuntos fueran disjuntos dos a dos, su unión mediría al menos $(2^n+1)/2^n > 1$, lo cual es absurdo, luego existen dos índices $i$, $j$ tales que $B_{\beta_i,\alpha_i} \cap B_{\beta_j,\alpha_j} \neq \varnothing$, con lo que $V_{\alpha_i} \cap V_{\alpha_j} \neq \varnothing$.

Es interesante observar además que $\chi(\mathcal{G}) = \mathfrak{c}$. Para probarlo observamos que todo abierto básico que contenga a un punto $f_{\beta,\alpha}$ puede expresarse como intersección finita de abiertos subbásicos de la forma siguiente (intersección de uno de tipo 2) y otro de tipo 3)):

$$V_{]\epsilon,\eta[} \cap V(A,e) = \bigcup_{\epsilon<\beta<\eta} \{f \in G_\beta \mid f(A(\beta)) = e\},$$

y un abiertos de este tipo depende únicamente de la restricción de $A$ a $]\epsilon, \eta[$, que a su vez está determinada por los abiertos-cerrados $H_\alpha \cap ]\epsilon, \eta[$, para $\alpha < \eta$. Por lo tanto, el número de entornos subbásicos de este tipo es a lo sumo $\mathfrak{c}$ (hay a lo sumo $\mathfrak{c}$ asignaciones $\alpha \mapsto H_\alpha \cap ]\epsilon, \eta[$, y cada una de ellas determina dos abiertos, según si $e = 0, 1$). Por lo tanto, las intersecciones finitas de entornos subbásicos de un mismo $f_{\beta,\alpha}$ son como máximo $\mathfrak{c}$, luego $\chi(f_{\beta,\alpha}, \mathcal{G}) \leq \mathfrak{c}$.

Para probar la desigualdad opuesta basta ver que $\chi(f_{\beta,\alpha}, G_\beta) \geq \mathfrak{c}$, pero los entornos de $f_{\beta,\alpha}$ en $G_\beta$ no son sino sus entornos para la topología producto en $2^{\mathcal{P}\beta}$, luego basta aplicar 8.6.

**Ejemplo A.46** Bajo el supuesto de que existe un cardinal medible $\kappa$, vamos a construir un espacio extremadamente disconexo completamente regular $X$ sin puntos aislados cuyo producto por cualquier espacio de Hausdorff extremadamente disconexo $Y$ con $|Y| < \kappa$ es extremadamente disconexo.

Sea $\kappa$ un cardinal infinito (de momento no necesitamos que sea medible) y sea $U$ un ultrafiltro libre en $\kappa$. Llamamos $X = {}^{<\omega}\kappa$ y consideramos en $X$ la topología por la que $A \subset X$ es abierto si para todo $s \in A$,

$$\{\alpha \in \kappa \mid s^\frown\alpha \in A\} \in U$$

(donde $s^\frown\alpha$ es la sucesión que resulta de prolongar $s$ con el término $\alpha$).

Es inmediato comprobar que así hemos definido realmente una topología en $X$. Veamos que $X$ es extremadamente disconexo. Para ello tomamos un abierto $A$ y tenemos que probar que $\overline{A}$ es abierto, es decir, que si $s \in \overline{A}$, entonces $\{\alpha \in \kappa \mid s^\frown\alpha \in \overline{A}\} \in U$.

Distinguimos dos casos. Si $s \in A$, entonces

$$\{\alpha \in \kappa \mid s^\frown\alpha \in A\} \subset \{\alpha \in \kappa \mid s^\frown\alpha \in \overline{A}\}$$

y el primer conjunto está en $U$, luego el segundo también. Si $s \notin A$ y no se cumple lo requerido, tendríamos que $S = \{\alpha \in \kappa \mid s^\frown\alpha \notin \overline{A}\} \in U$. Para cada $\alpha \in S$, tomamos un abierto $A_\alpha$ tal que $s^\frown\alpha \in A_\alpha$ y $A_\alpha \cap A = \varnothing$. Entonces

$$V = \{s\} \cup \bigcup_{\alpha \in S} A_\alpha$$

es un entorno de $s$ disjunto de $A$, contradicción.

Notemos que $X$ es $T_1$, pues si $s \in X$ y $t \in X \setminus \{s\}$, entonces

$$\{\alpha \in \kappa \mid t^\frown\alpha \in X \setminus \{s\}\} = \kappa \in U$$

salvo si $s = t^\frown\alpha_0$, en cuyo caso el conjunto es $\kappa \setminus \{\alpha_0\}$, que también está en $U$, porque se trata de un ultrafiltro libre.

Ahora probamos que $X$ es cerodimensional, con lo que de hecho será completamente regular. Pongamos que $s \in A \subset X$, donde $A$ es abierto. Definimos $V_0 = \{s\}$ y, supuesto definido $V_n$, llamamos $V_{n+1}$ al conjunto de sucesiones finitas de la forma $t^\frown\alpha \in A$, con $t \in V_n$ y $\alpha \in \kappa$ y $V = \bigcup_{n \in \omega} V_n$. Claramente $s \in V \subset A$. Basta probar que $V$ es abierto y cerrado.

Para probar que $V$ es abierto observamos que si $t \in V$, existe un $n$ tal que $t \in V_n$, y entonces,

$$\{\alpha \in \kappa \mid t^\frown\alpha \in V\} = \{\alpha \in \kappa \mid t^\frown\alpha \in V_{n+1}\} = \{\alpha \in \kappa \mid t^\frown\alpha \in A\} \in U.$$

Para probar que es cerrado tomamos $r \in X \setminus V$. Distinguimos dos casos, según si $r$ extiende o no a $s$.

Si $r$ extiende a $s$, sea $W$ el conjunto de todas las extensiones de $r$, que obviamente es un entorno abierto de $r$. Vamos a probar que es disjunto de $V$. En caso contrario, sea $t \in W \cap V_n$ con $n$ mínimo. No puede ser $n = 0$ ni $r = t$, luego $r \subsetneq t$ y así $t = t_0{}^\frown\alpha$, con $r \subset t_0$, pero entonces $t_0 \in W \cap V_{n-1}$, en contradicción con la minimalidad de $n$.

Si $r$ no extiende a $s$, llamamos $W$ al conjunto de todas las extensiones de $r$ que no extienden a $s$. Como todos los elementos de $V$ extienden a $s$, es claro que $W \cap V = \varnothing$, pero tenemos que probar que $W$ es abierto. Sea $t \in W$. Si $t$ no está contenido en $s$, entonces ninguna extensión de $t$ extiende a $s$, luego

$$\{\alpha \in \kappa \mid t^\frown\alpha \in W\} = \kappa \in U.$$

Si, por el contrario $r \subset t \subsetneq s$, existe un $\alpha_0 < \kappa$ tal que $s^\frown\alpha_0 \subset s$, y entonces

$$\{\alpha \in \kappa \mid t^\frown\alpha \in W\} = \kappa \setminus \{\alpha_0\} \in U.$$

Esto prueba que $V$ es abierto-cerrado y que $X$ es cerodimensional.

Es inmediato que todo abierto no vacío es infinito, luego $X$ no tiene puntos aislados y, en particular, no es discreto.

Ahora probamos que si $U$ es $\mu$-completo, entonces la intersección de menos de $\mu$ abiertos de $X$ es abierta. En efecto, sea $\mathcal{A}$ una familia de menos de $\mu$ abiertos de $X$ y sea $s \in \bigcap\mathcal{A}$. Para cada $A \in \mathcal{A}$, sea $S_A = \{\alpha \in \kappa \mid s^\frown\alpha \in A\} \in U$. Por la completitud de $U$, tenemos que $S = \bigcap\limits_{A\in\mathcal{A}} S_A \in U$, y entonces

$$S \subset \{\alpha \in \kappa \mid s^\frown\alpha \in \textstyle\bigcap\mathcal{A}\} \in U.$$

Finalmente suponemos que $U$ es $\kappa$-completo, es decir, que se trata de una medida en $\kappa$, y sea $Y$ cualquier espacio extremadamente disconexo con $|Y| < \kappa$. Vamos a probar que $X \times Y$ es extremadamente disconexo.

Sea $A \subset X \times Y$ un abierto y sea $(p, q) \in \overline{A}$. Para cada $y \in Y$, consideramos $A_y = \{x \in X \mid (x, y) \in U\}$, que es un abierto en $X$, luego $\overline{A}_y$ es abierto y cerrado y

$$G = \bigcap_{p\notin\overline{A}_y} (X \setminus \overline{A}_y) \cap \bigcap_{p\in\overline{A}_y} \overline{A}_y$$

es un abierto-cerrado tal que $p \in G$. Entonces $B = (G\times Y) \cap A$ es un abierto tal que $(p, q) \in \overline{B}$ (pues si $A_0$ es un entorno de $(p, q)$, también lo es $A_0 \cap (G \times Y)$, luego corta a $A$). Por lo tanto, $q = p_2(p, q) \in p_2[\overline{B}] \subset \overline{p_2[B]}$, y la proyección $p_2[B]$ es abierta, luego $H = \overline{p_2[B]}$ también lo es.

Basta probar que $(p, q) \in G \times H \subset \overline{A}$. Supongamos, por el contrario, que existe $(x, y) \in G \times H$ tal que $(x, y) \notin \overline{A}$. Entonces existen abiertos $A_0$, $B_0$ en $X$ e $Y$ tales que $(x, y) \in A_0 \times B_0$ y $(A_0 \times B_0) \cap A = \varnothing$. Como $y \in \overline{p_2[B]}$, existe $z \in B_0 \cap p_2[B]$. Sea $w$ tal que $(w, z) \in B$. Entonces $w \in G \cap \overline{A}_z$, luego $p \in \overline{A}_z$, luego $G \subset \overline{A}_z$, luego $(x, z) \in \overline{A}_z \times \{z\} \subset \overline{A}$, luego $(x, z) \in \overline{A} \cap (A_0 \times B_0)$, luego $A \cap (A_0, B_0) \neq \varnothing$, contradicción.

## A.4 Grupos topológicos

**Ejemplo A.47 ($\mathbf{LG(2, \mathbb{R})}$)** Representaremos las cuádruplas $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ en forma de matrices:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

y consideramos el producto

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc' & cb' + dd' \end{pmatrix}.$$

Es fácil comprobar que es asociativo[5] y que tiene por elemento neutro a la matriz identidad

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

No todas las matrices tienen una matriz inversa, pero las que la tienen forman un grupo llamado $\mathrm{LG}(2, \mathbb{R})$ (*grupo lineal general* de dimensión 2). Es fácil ver que está formado por las matrices que cumplen[6] $ad - bc \neq 0$, en cuyo caso la inversa viene dada por

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Es claro que el producto en $\mathrm{LG}(2, \mathbb{R})$ y la aplicación $A \mapsto A^{-1}$ son continuas respecto de la topología relativa que $\mathrm{LG}(2, \mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^4$ hereda de $\mathbb{R}^4$, por lo que es un grupo topológico con dicha topología. Más aún, como está definido por la condición $ad - bc \neq 0$ es claramente abierto en $\mathbb{R}^4$, luego es localmente compacto.

Una base de entornos de $I$ lo forman los conjuntos $U_\epsilon$ formados por las matrices que cumplen

$$|a - 1| < \epsilon, \quad |d - 1| < \epsilon, \quad |b| < \epsilon, \quad |c| < \epsilon.$$

[5] Como probablemente sabrá el lector, cada matriz se corresponde con la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $f(x, y) = (ax + cy, bx + dy)$, de modo que el producto de matrices es la matriz de la composición de las aplicaciones asociadas. La asociatividad de la composición implica entonces la asociatividad del producto.

[6] Para comprobar que la condición es necesaria basta ver que la aplicación determinante $\det(a, b, c, d) = ad - bc$ cumple $\det(AB) = \det(A) \det(B)$, por lo que si existe $A^{-1}$ tiene que ser $\det(A) \det(A^{-1}) = \det(I) = 1$.

Un subgrupo destacado de $\mathrm{LG}(2,\mathbb{R})$ es el conjunto $\mathrm{LE}(2,\mathbb{R})$ (el *grupo lineal especial*) formado por las matrices que cumplen $ad-bc=1$, que es cerrado en $\mathbb{R}^4$ (y en $\mathrm{LG}(2,\mathbb{R})$), luego también es localmente compacto.

Vamos a considerar a su vez el subgrupo $G \subset \mathrm{LG}(2,\mathbb{R})$ formado por las matrices de la forma

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1/a \end{pmatrix},$$

con $a>0$. Como está determinado por la condición $c=0$, es cerrado, luego localmente compacto. Vamos a probar que las uniformidades $\mathcal{U}_G^d \neq \mathcal{U}_G^i$.

Llamemos $U_\epsilon$ a lo que en principio es $U_\epsilon \cap G$, es decir, el conjunto de las matrices de $G$ que cumplen $|a-1|<\epsilon$, $|1/a-1|<\epsilon$, $|b|<\epsilon$. Claramente estos conjuntos forman una base de entornos abiertos equilibrados de $I$.

Supongamos que $\mathcal{U}_G^i \subset \mathcal{U}_G^d$. Entonces existe $0<\epsilon<1$ tal que $V_{U_\epsilon}^d \subset V_{U_1}^i$. Consideremos ahora las matrices

$$x=\begin{pmatrix} \epsilon/2 & 1 \\ 0 & 2/\epsilon \end{pmatrix}, \qquad y=\begin{pmatrix} \epsilon/2 & 0 \\ 0 & 2/\epsilon \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$xy^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & \epsilon/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in U_\epsilon,$$

luego $(x,y)\in V_{U_\epsilon}^d \subset V_{U_1}^i$, luego $y^{-1}x \in U_1$, pero en realidad

$$y^{-1}x=\begin{pmatrix} 1 & 2/\epsilon \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \notin U_1.$$

Esto prueba que $\mathcal{U}_G^i \not\subset \mathcal{U}_G^d$ y el hecho de que $\mathcal{U}_G^i \neq \mathcal{U}_G^d$ implica claramente que lo mismo vale para los grupos $\mathrm{LE}(2,\mathbb{R})$ y $\mathrm{LG}(2,\mathbb{R})$.

Por otra parte, como son grupos localmente compactos, el teorema 10.49 implica que $G=\hat{G}^{id}=\hat{G}^i=\hat{G}^d=\hat{G}$.

**Ejemplo A.48** Vamos a construir un grupo topológico $G$ que no es completo respecto de sus uniformidades izquierda o derecha, pero que sí que lo es respecto de su uniformidad bilátera.

Si $I=[0,1]$, el conjunto $C(I,I)$ de todas las funciones continuas de $I$ en $I$ es un subespacio cerrado de $C(I,\mathbb{R})$, que es un espacio de Banach con la norma dada por $\|x\|_\infty=\sup\{|x(t)| \mid t\in[0,1]\}$. Notemos que $C(I,I)$ no es un subespacio vectorial, por lo que no es un espacio de Banach, pero es un espacio métrico completo con la distancia dada por $d(x,y)=\|x-y\|_\infty$.

En $C(I,I)$ tenemos definida la ley de composición interna determinada por la composición de aplicaciones, que es continua, como consecuencia de la relación obvia $\|x_1\circ y_1 - x_2\circ y_2\|_\infty \leq \|y_1-y_2\|_\infty$.

Sea $G\subset C(I,I)$ el grupo de todos los homeomorfismos $x:[0,1]\longrightarrow[0,1]$, donde el producto es la composición de aplicaciones.

Se cumple que es un grupo topológico, pues ya sabemos que el producto es continuo y a continuación probamos que también lo es la aplicación $x \mapsto x^{-1}$.

Fijado $x_0 \in G$, como $x_0^{-1}$ es uniformemente continua, dado $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que si $|s - s'| < \delta$, entonces $|x_0^{-1}(s) - x_0^{-1}(s')| < \epsilon$. Sea $x \in G$ tal que $\|x - x_0\|_\infty < \delta$. Dado $s_0 \in [0,1]$, sean $t_0 = x_0^{-1}(s_0)$, $t_1 = x^{-1}(s_0)$ y $s_1 = x_0(t_1)$. Tenemos que $|s_1 - s_0| = |x_0(t_1) - x(t_1)| < \delta$, luego $|x_0^{-1}(s_1) - x_0^{-1}(s_0)| < \epsilon$, pero esto es lo mismo que $|x^{-1}(s_0) - x_0^{-1}(s_0)| < \epsilon$, luego $\|x^{-1} - x_0^{-1}\|_\infty < \epsilon$.

Observemos que una base de entornos equilibrados de 1 está formada por los conjuntos
$$U_\epsilon = \{x \in G \mid \|x - 1\|_\infty < \epsilon\}.$$
(Son equilibrados, pues si $x \in U_\epsilon$, tenemos que $|x(t) - t| < \epsilon$ para todo $t \in [0,1]$, luego cambiando $t$ por $x^{-1}(t)$ resulta que $|t - x^{-1}(t)| < \epsilon$ para todo $t \in [0,1]$, luego $x^{-1} \in U_\epsilon$.)

Ahora observamos que $(x, y) \in V^i_{U_\epsilon}$ si y sólo si $x^{-1}y \in U_\epsilon$, lo que a su vez equivale a que, para todo $t \in [0,1]$, se cumpla
$$|y(x^{-1}(t)) - t| = |y(x^{-1}(t)) - x(x^{-1}(t))| < \epsilon,$$
y esto equivale a que $|y(t) - x(t)| < \epsilon$, es decir, a que $\|y - x\|_\infty < \epsilon$. Por lo tanto, la uniformidad izquierda $\mathcal{U}^i_G$ no es sino la uniformidad inducida por la norma. En cambio, $(x, y) \in V^d_{U_\epsilon}$ equivale a que $\|y^{-1} - x^{-1}\|_\infty < \epsilon$, y vamos a ver que esto corresponde a una uniformidad diferente.

Para cada $n \geq 2$, definimos
$$x_n(t) = \begin{cases} \frac{2t}{n} & \text{si } 0 \leq t \leq 1/2, \\ -1 + \frac{2}{n} + t\left(2 - \frac{2}{n}\right) & \text{si } \frac{1}{2} < t \leq 1. \end{cases}$$

Dado $\epsilon > 0$, tomamos $n_0 \geq 4/\epsilon$ y observamos que para todo $n \geq n_0$ y todo $p \in \mathbb{N}$ se cumple:

- Para $0 \leq t \leq 1/2$
$$|x_{n+p}(t) - x_n(t)| = \frac{2tp}{n(n+p)} \leq \frac{2}{n_0} \leq \epsilon,$$

- Para $1/2 \leq t \leq 1$
$$|x_{n+p}(t) - x_n(t)| = \frac{2p}{n(n+p)} + \frac{2tp}{n(n+p)} \leq \frac{4}{n_0} \leq \epsilon.$$

Por lo tanto, $\|x_{n+p} - x_n\| < \epsilon$, lo que prueba que $\{x_n\}_{n=2}^\infty$ es una sucesión de Cauchy para la norma o, equivalentemente, para la uniformidad izquierda de $G$. En cambio, para la uniformidad derecha tenemos que
$$x_{2n}^{-1}(1/2n) - x_n^{-1}(1/2n) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4},$$

luego $\|x_{2n}^{-1} - x_n^{-1}\|_\infty \geq 1/4$, luego $(x_{2n}, x_n) \notin V^d_{U_{1/4}}$ para ningún $n$, luego la sucesión $\{x_n\}_{n=2}^\infty$ no es de Cauchy para la uniformidad derecha de $G$. Al no ser de Cauchy, no es convergente, luego la uniformidad izquierda tiene una sucesión de Cauchy no convergente, luego $G_i$ no es completo, luego $G_d$ tampoco lo es.

Veamos ahora que $G$ sí que es completo con la uniformidad bilátera.

Para ello observemos que la uniformidad bilátera es metrizable por el teorema 2.27, ya que una base de la uniformidad la constituyen los conjuntos $V_{U_{1/n}}$, para $n = 1, 2, \ldots$ Por lo tanto, para probar la completitud podemos considerar sucesiones de Cauchy.

Si $\{z_n\}_{n=0}^\infty$ es una sucesión de Cauchy para la uniformidad bilátera, también es de Cauchy para las uniformidades izquierda y derecha y, como $C(I, I)$ es completo, existen funciones continuas $x, y : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ tales que $\{z_n\}_{n=0}^\infty$ converge uniformemente a $x$ y $\{z_n^{-1}\}_{n=0}^\infty$ converge uniformemente a $y$.

Pero la continuidad de la composición en $C(I, I)$ nos da que $\{z_n \circ z_n^{-1}\}_{n=0}^\infty$ converge a $x \circ y$, pero se trata de la sucesión constante igual a la identidad, luego $x \circ y = 1$. Igualmente concluimos que $y \circ x = 1$, luego $y = x^{-1}$ y resulta que $x \in G$, luego $\{z_n\}_{n=0}^\infty$ converge a $x$ en $G$. ■

**Ejemplo A.49** Vamos a construir un grupo topológico completo $G$ que no es completo respecto de la uniformidad inferior $\mathcal{U}_G^{id}$.

Sea $T$ un conjunto no numerable. En $T^T$ consideramos la uniformidad (de Hausdorff) $\mathcal{U}$ que tiene por base las bandas

$$V_S = \{(x, y) \in T^T \times T^T \mid x|_S = y|_S\},$$

donde $S$ recorre los subconjuntos numerables $S \subset T$. Vamos a probar que $T^T$ es completo con esta uniformidad.

Sea $F$ un filtro de Cauchy en $T^T$. Para cada $S \subset T$ numerable, existe un $A_S \in F$ tal que $d(A_S) < V_S$, lo que significa que existe $x_S : S \longrightarrow T$ tal que $x|_S = x_S$, para todo $x \in A_S$. Si $S_1 \subset S_2 \subset T$ son dos subconjuntos numerables, como $A_{S_1} \cap A_{S_2} \in F$, la intersección es no vacía, lo cual se traduce en que $x_{S_2}|_{S_1} = x_{S_1}$. Por lo tanto, las funciones $x_S$ se extienden a una única función $x \in T^T$. Vamos a probar que $x \in \bigcap\limits_{A \in F} \overline{A}$, con lo que $x$ será un punto adherente de $F$ y, al ser éste un filtro de Cauchy, convergerá a $x$.

Fijado $A \in F$, un entorno básico de $x$ es de la forma $B_{V_S}(x)$, para cierto $S \subset T$ numerable, pero $A \cap A_S \in F$, luego existe un $y \in A \cap A_S \subset A \cap B_{V_S}(x)$, luego $x \in \overline{A}$.

Sea ahora $H \subset T^T$ el conjunto de todas las aplicaciones biyectivas $T \longrightarrow T$, que es un grupo tomando como producto la composición de aplicaciones. Vamos a ver que es un grupo topológico con la topología inducida desde $T^T$.

Para probar que el producto es continuo en un punto $(x_0, y_0) \in H \times H$, tomamos $S \subset T$ numerable y consideramos $S' = x_0[S]$, que también es un subconjunto numerable de $T$. Así, si $(x, y) \in B_{V_S}(x_0) \times B_{S'}(y_0)$, entonces

$x \circ y \in B_{V_S}(x_0 \circ y_0)$, pues, para todo $\alpha \in S$, tenemos que $x(\alpha) = x_0(\alpha) \in S'$, luego también $y(x(\alpha)) = y_0(x_0(\alpha))$.

Para probar que $x \mapsto x^{-1}$ es continua en $x_0 \in H$ tomamos $S \subset T$ numerable y llamamos $S' = x_0^{-1}[S]$. Así, si $x \in B_{V_{S'}}(x_0)$, se cumple que $x^{-1} \in B_{V_S}(x_0^{-1})$, pues si $\alpha \in S$, tenemos que $x_0^{-1}(\alpha) \in S'$, luego $x(x_0^{-1}(\alpha)) = x_0(x_0^{-1}(\alpha)) = \alpha$, luego $x_0^{-1}(\alpha) = x^{-1}(\alpha)$.

Ahora observamos que la uniformidad derecha $U_H^d$ coincide con la inducida por $\mathcal{U}$. En efecto, un entorno básico de 1 en $H$ es $U = B_{V_S}(1)$, luego una banda básica de $U_H^d$ es la banda $V_U^d$ dada por $(x, y) \in V_U^d$ si y sólo si $xy^{-1} \in B_{V_S}(1)$, lo cual equivale a que $y^{-1}(x(\alpha)) = \alpha$, para todo $\alpha \in S$, que a su vez equivale a que $x|_S = y|_S$, es decir, a que $(x, y) \in V_S \cap (H \times H)$.

Finalmente consideramos $G = \{x \in H \mid \{\alpha \in T \mid x(\alpha) \neq \alpha\}$ es finito$\}$. Claramente es un subgrupo normal de $H$. Veamos que es cerrado en $T^T$. Para ello tomamos $x \in \overline{G} \subset T^T$. Entonces $x$ es inyectiva, pues si $\alpha \neq \beta$ son dos elementos de $T$, existe un $y \in B_{V_{\{\alpha,\beta\}}}(x) \cap G$, de modo que $y$ es biyectiva, luego $x(\alpha) = y(\alpha) \neq y(\beta) = x(\beta)$. Además $S = \{\alpha \in T \mid x(\alpha) \neq \alpha\}$ es finito, pues en caso contrario contendría un conjunto infinito numerable $S_0 \subset S$, pero entonces existiría $y \in B_{V_S}(x) \cap G$, lo cual es absurdo, pues $y(\alpha) = x(\alpha) \neq \alpha$ para todo $\alpha \in S_0$ contradice que $y \in G$.

Finalmente, como $x$ es inyectiva y fija a los puntos de $T \setminus S$, tiene que ser $x[S] \subset S$ y, como $S$ es finito, de hecho $x[S] = S$, luego $x$ es biyectiva, y así $x \in G$.

Esto implica que $G$ es un grupo topológico completo, ya que $\mathcal{U}_H^d$ es la restricción de $U_G^d$, que a su vez es la restricción de $\mathcal{U}$, que es una uniformidad completa en $T^T$, luego $G_d$ es completo por ser un subespacio uniforme cerrado de un espacio uniforme completo.

Hasta aquí hemos trabajado con un conjunto no numerable $T$ arbitrario. A partir de este momento fijamos $T = \omega_1$ y vamos a probar que $G$ no es completo respecto de la uniformidad inferior $\mathcal{U}_G^{id}$.

Para cada $\alpha \in T$, definimos $x_\alpha \in G$ mediante

$$x_\alpha(\beta) = \begin{cases} \alpha & \text{si } \beta = 0, \\ 0 & \text{si } \beta = \alpha, \\ \beta & \text{si } \beta \neq 0, \alpha. \end{cases}$$

Veamos que la base de filtro $\mathcal{B} = \{\{x_\alpha \mid \alpha > \alpha_0\} \mid \alpha_0 \in \omega_1\}$ es de Cauchy. Un entorno básico de 1 en $G$ es $U = B_{V_S}(1)$, donde $S \subset \omega_1$ es numerable, y una banda básica de $G_{id}$ es

$$V_U^{id} = \{(x, y) \in G \times G \mid \text{existen } u, u' \in U \text{ tales que } xu = u'y\}$$

Vamos a probar que $\mathcal{B}$ contiene un elemento de diámetro menor que $V_U^{id}$. Basta tomar $\alpha_0 < \omega_1$ tal que $S \subset \alpha_0$ y considerar $\{x_\alpha \mid \alpha > \alpha_0\}$. En efecto, si tomamos $\alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2$, definimos $u \in G$ mediante

$$u(\alpha) = \begin{cases} \alpha_1 & \text{si } \alpha = \alpha_2, \\ \alpha_2 & \text{si } \alpha = \alpha_1, \\ \alpha & \text{si } \alpha \neq \alpha_1, \alpha_2. \end{cases}$$

Claramente $u \in U$, y basta probar que $x_{\alpha_1} \circ u = u \circ x_{\alpha_2}$, pues entonces $d(x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}) < V_U^{id}$. En efecto,

$$(x_{\alpha_1} \circ u)(0) = u(x_{\alpha_1}(0)) = u(\alpha_1) = \alpha_2 = x_{\alpha_2}(0) = x_{\alpha_2}(u(0)) = (u \circ x_{\alpha_2})(0),$$

$$(x_{\alpha_1} \circ u)(\alpha_1) = u(0) = 0 = x_{\alpha_2}(\alpha_2) = x_{\alpha_2}(u(\alpha_1)) = (u \circ x_{\alpha_2})(\alpha_1),$$

$$(x_{\alpha_1} \circ u)(\alpha_2) = u(\alpha_1) = \alpha_2 = x_{\alpha_2}(\alpha_1) = x_{\alpha_2}(u(\alpha_2)) = (u \circ x_{\alpha_2})(\alpha_2),$$

y, si $\alpha \neq 0$, $\alpha_1$, $\alpha_2$,

$$(x_{\alpha_1} \circ u)(\alpha) = u(x_{\alpha_1}(\alpha)) = u(\alpha) = \alpha = x_{\alpha_2}(\alpha) = x_{\alpha_2}(u(\alpha)) = (u \circ x_{\alpha_2})(\alpha).$$

Con esto queda probado que $\mathcal{B}$ es una base de filtro de Cauchy en $G_{id}$, pero no es convergente, pues la proyección $p_0 : T^T \longrightarrow T$ es continua, ya que es localmente constante (es constante en cada entorno $B_{V_{\{0\}}}(x_0)$). Si $\mathcal{B}$ convergiera en $G$, también lo haría $p_0[\mathcal{B}]$ en $\omega_1$, pero

$$p_0[\{x_\alpha \mid \alpha > \alpha_0\}] = ]\alpha_0, \omega_1[\,,$$

luego $]\alpha_0, \omega_1[ \in p_0[\mathcal{B}]$, para todo $\alpha_0 < \omega_1$, luego $\bigcap\limits_{A \in p_0[\mathcal{B}]} \overline{A} = \varnothing$, luego $p_0[\mathcal{B}]$ no tiene puntos de acumulación en $\omega_1$. ■

**Ejemplo A.50** Veamos un ejemplo de grupo topológico que no es localmente precompacto, pero que sí que lo es respecto de su uniformidad inferior.

Sea $T$ un conjunto infinito considerado como espacio uniforme discreto y en $T^T$ consideramos la uniformidad producto, es decir, la que tiene por base a las bandas

$$V_S = \{(x, y) \in T^T \times T^T \mid x|_S = y|_S\},$$

donde $S$ recorre los subconjuntos finitos $S \subset T$. Sea $G \subset T^T$ el conjunto de las aplicaciones biyectivas $x : T \longrightarrow T$, que es un grupo con la composición de aplicaciones. Veamos que es un grupo topológico (de Hausdorff).

Para probar que el producto es continuo en un punto $(x_0, y_0) \in G \times G$, tomamos $S \subset T$ finito y consideramos $S' = x_0[S]$, que también es un subconjunto finito de $T$. Así, si $(x, y) \in B_{V_S}(x_0) \times B_{S'}(y_0)$, entonces $x \circ y \in B_{V_S}(x_0 \circ y_0)$, pues, para todo $\alpha \in S$, tenemos que $x(\alpha) = x_0(\alpha) \in S'$, luego también $y(x(\alpha)) = y_0(x_0(\alpha))$.

Para probar que $x \mapsto x^{-1}$ es continua en $x_0 \in G$ tomamos $S \subset T$ finito y llamamos $S' = x_0^{-1}[S]$. Así, si $x \in B_{V_{S'}}(x_0)$, se cumple que $x^{-1} \in B_{V_S}(x_0^{-1})$, pues si $\alpha \in S$, tenemos que $x_0^{-1}(\alpha) \in S'$, luego $x(x_0^{-1}(\alpha)) = x_0(x_0^{-1}(\alpha)) = \alpha$, luego $x_0^{-1}(\alpha) = x^{-1}(\alpha)$.

Veamos que $G$ no es localmente precompacto, es decir, que si $S \subset T$ es finito, la bola

$$B_S = B_{V_S}(1) = \{x \in G \mid x|_S = 1|_S\}$$

no es precompacta. Para ello fijamos $t \in T \setminus S$, llamamos $S' = T \setminus (S \cup \{t\})$ y, para cada $s \in S'$, definimos $x_s \in G$ mediante

$$x_s(u) = \begin{cases} t & \text{si } u = s, \\ s & \text{si } u = t, \\ u & \text{si } u \neq s, t. \end{cases}$$

Entonces, si $s, s' \in S'$ son distintos entre sí, $(B_{V_{\{t\}}} x_s) \cap (B_{V_{\{t\}}} x_{s'}) = \varnothing$, pues los elementos del primer conjunto cumplen $x(s) = t$, mientras que los del segundo cumplen $x(s') = t$. Por consiguiente, si llamamos $A = \{x_s \mid s \in S'\} \subset B_{V_s}(1)$, tenemos que $V^d_{\{t\}} \cap (A \times A) = \Delta$, luego $A$ es uniformemente discreto y el teorema 4.66 implica que $B_{V_S}(1)$ no es precompacto en $G_d$.

Ahora veamos que $G_{id}$ sí que es precompacto. Para ello fijamos un entorno de 1, digamos $B_S = \{x \in G \mid x|_S = 1|_S\}$, donde $S \subset T$ es finito, y vamos a encontrar un conjunto finito $K \subset G_{id}$ tal que $G_{id} = V^{id}_{U_S}[K]$.

Sea $S' \subset T \setminus S$ un conjunto del mismo cardinal de $S$ y sea

$$K = \{x \in G \mid x|_{T \setminus (S \cup S')} = 1|_{T \setminus (S \cup S')}\}.$$

Claramente es un conjunto finito. Vamos a ver que cumple lo requerido. Explícitamente, hemos de probar que $G_{id} = B_S K B_S$. Para ello tomamos cualquier $x \in G_{id}$. Entonces existe $u \in B_S$ tal que $u[x^{-1}[S] \setminus S] \subset S'$. Así tenemos una unión disjunta

$$(x^{-1}[S] \cap S) \cup (u[x^{-1}[S] \setminus S]) \subset S \cup S'$$

y, por otra parte, podemos descomponer $S$ en unión disjunta:

$$S = (S \cap x[S]) \cup (S \setminus x[S]) = x[x^{-1}[S] \cap S] \cup (u^{-1} \circ x)[u[x^{-1}[S] \setminus S]].$$

Por lo tanto, existe un $y \in K$ tal que

$$y|_{x^{-1}[S] \cap S} = x|_{x^{-1}[S] \cap S}, \qquad y|_{u[x^{-1}[S] \setminus S]} = (u^{-1} \circ x)|_{u[x^{-1}[S] \setminus S]}.$$

Sea $v = y^{-1} \circ u^{-1} \circ x$, de modo que $x = u \circ y \circ v$ y basta probar que $v \in B_S$. En efecto, si $s \in S \cap x[S]$, entonces $y^{-1}(s) = x^{-1}(s) \in S$, luego

$$v(s) = x(u^{-1}(y^{-1}(s))) = x(x^{-1}(s)) = s,$$

y si $s \in S \setminus x[S] = (u^{-1} \circ x)[u[x^{-1}[S] \setminus S]]$, entonces

$$v(s) = (u^{-1} \circ x)(y^{-1}(s)) = (u^{-1} \circ x)((u^{-1} \circ x)^{-1}(s)) = s.$$

**Ejemplo A.51** Veamos un caso de grupo topológico de Hausdorff localmente compacto que no es unimodular. Concretamente, consideramos el subgrupo de $\mathrm{LG}(2,\mathbb{R})$ (ejemplo A.47) formado por las matrices

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

con $a$, $b \in \mathbb{R}$, $a > 0$.

Claramente $G$ es homeomorfo a $\mathbb{R}^2$, a través del homeomorfismo que lleva a cada matriz como la anterior al par $(a, b)$. A través de este homeomorfismo, el producto en $G$ se transforma en

$$(a, b)(c, d) = (ac, ad + b).$$

Equivalentemente, podemos considerar que $G = \mathbb{R}^2$ con esta operación de grupo. Llamaremos $d : G \longrightarrow \,]0, +\infty[$ al homomorfismo dado por $d(a, b) = a$. Vamos a probar que una medida de Haar izquierda en $G$ viene dada por

$$\mu(A) = \int_A \frac{1}{d(x)^2}\, dm(x),$$

donde $m$ es la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^2$ Por B.31 sabemos que se trata de una medida de Borel, y por 5.76 es regular, claramente no nula. Sólo tenemos que probar que es invariante por traslaciones izquierdas.

Para ello observamos que si $A \subset G$ es un conjunto de Borel, $g = (a, b)$ y $h = (c, d)$, entonces

$$gh = (ac, ad + b) = (c, d)\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + (0, b) = h\begin{pmatrix} d(g) & 0 \\ 0 & d(g) \end{pmatrix} + (0, b),$$

o también

$$gh = (a, b)\begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = g\begin{pmatrix} d(h) & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aplicamos el teorema 10.79:

$$\mu(gA) = \int_{gA} \frac{1}{d(x)^2}\, dm(x) = d(g)^2 \int_A \frac{1}{d(gt)^2}\, dm(t) = \mu(A).$$

Esto prueba que $\mu$ es una medida de Haar izquierda. En cambio,

$$\mu(Ah) = \int_{Ah} \frac{1}{d(x)^2}\, dm(x) = d(h) \int_A \frac{1}{d(th)^2}\, dm(t) = \frac{1}{d(h)}\mu(A).$$

Por consiguiente, la función modular de $G$ es $\Delta(x) = d(x)^{-1}$, luego $G$ no es unimodular.

## A.5 Espacios vectoriales topológicos

**Ejemplo A.52** Sea $\kappa$ un cardinal no numerable y sea $X \subset \mathbb{R}^\kappa$ el subespacio formado por los elementos con a lo sumo una cantidad numerable de coordenadas no nulas. Vamos a probar que $X$ es un espacio vectorial topológico sucesionalmente completo que no es completo.

Demostración: No es completo porque no es cerrado en $\mathbb{R}^\kappa$, ya que de hecho es denso. Por otra parte, toda sucesión de Cauchy $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ en $X$ converge a un punto $x \in \mathbb{R}^\kappa$, pero de hecho $x \in X$, pues si $J_n \subset \kappa$ es el conjunto numerable de índices correspondientes a coordenadas no nulas de $x_n$, entonces $J = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} J_n$ es numerable y, como $\{x_{n,j}\}_{n=0}^\infty$ converge a $x_j$, tenemos que $x_j = 0$ para todo $j \in \kappa \setminus J$. Por lo tanto la sucesión converge en $X$.

**Ejemplo A.53 (Los espacios $C(K, \mathbb{K})$)** *Si $K$ es un espacio compacto, sabemos (teorema 4.9) que $C(K, \mathbb{K})$ es un espacio de Banach con la norma supremo $\|f\| = \max\{|f(x)| \mid x \in K\}$.*

Vamos a probar que el conjunto de los puntos extremos de su bola cerrada unitaria $B = \{f \in C(K, \mathbb{K}) \mid \|f\| \leq 1\}$ es $E(B) = \{f \in B \mid f[K] \subset S^1\}$, donde $S^1 = \{z \in \mathbb{K} \mid |z| = 1\}$.

Si $f[K] \subset S^1$ y $f = (1-\lambda)g + \lambda h$, con $g$, $h \in B$ y $0 < \lambda < 1$, entonces, para todo $x \in K$ tenemos que $f(x) = (1-\lambda)g(x) + \lambda h(x)$, pero $|f(x)| = 1$ y $f(x)$ es un punto extremo de la bola unidad cerrada de $\mathbb{K}$ (por el ejemplo anterior si $\mathbb{K} = \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ o trivialmente si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$). Por consiguiente, tiene que ser $g(x) = h(x)$, luego $g = h$, luego $f \in E(B)$.

Recíprocamente, supongamos que $f \in B$ cumple que $|f(x)| < 1$ para cierto $x \in K$ y vamos a ver que no es un punto extremo. Tomemos $0 < \epsilon < 1 - |f(x)|$. Por continuidad existe un entorno abierto $U$ de $x$ tal que $|f(y)| < 1 - \epsilon$ para todo $y \in U$. Tomemos $z \in U$. Por el lema de Urysohn existe $\alpha : K \longrightarrow [0, 1]$ continua tal que $\alpha(z) = 1$ y $\alpha|_{K \setminus U} = 0$. Sea $g = \epsilon\alpha \in B$ y observemos que, para $y \in U$, se cumple que

$$|(f \pm g)(y)| = |f(y) \pm \epsilon\alpha(y)| < 1 - \epsilon + \epsilon = 1,$$

mientras que si $y \in K \setminus U$ es $|(f \pm g)(y)| = |f(y)| \leq 1$. Esto prueba que $\|f \pm g\| \leq 1$, luego $f \pm g \in B$ y $f = \frac{1}{2}(f+g) + \frac{1}{2}(f-g)$ (y $f + g \neq f - g$), luego $f$ no es un punto extremo. ∎

En particular, si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ y $K$ es conexo, tenemos que los únicos puntos extremos de $B$ son las funciones constantes $\pm 1$, luego $\overline{\mathrm{co}}(E(B))$ contiene únicamente funciones constantes. Si $K$ tiene más de un punto, esto implica que $B \neq \overline{\mathrm{co}}(E(B))$. No se cumple el teorema de Krein-Milman porque $B$ no es compacto.

**Ejemplo A.54 (Los espacios $\ell^1$, $\ell^2$ y $\ell^\infty$)** *Veamos tres ejemplos destacados de espacios normados completos:*

**Definición A.55** Se definen los espacios de sucesiones $\ell^1$, $\ell^2$ y $\ell^\infty$ como

$$\ell^1 = \{x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \sum_{n=0}^{\infty} |x_n| < +\infty\}, \quad \ell^2 = \{x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2 < +\infty\},$$

$$\ell^\infty = \{x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \sup\{|x_n| \mid n \in \mathbb{N}\} < +\infty\}.$$

**Teorema A.56** *Los tres espacios $\ell^1$, $\ell^2$ y $\ell^\infty$ son espacios normados completos con las normas dadas por*

$$\|x\|_1 = \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|, \qquad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2}, \qquad \|x\|_\infty = \sup\{|x_n| \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

*Más aún, $\ell^2$ es un espacio de Hilbert con el producto escalar dado por*

$$x \cdot y = \sum_{n=0}^{\infty} x_n \bar{y}_n.$$

Demostración: Es fácil comprobar que $\ell^1$ y $\ell^2$ son subespacios vectoriales de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ y que son espacios normados con las normas indicadas. En el caso de $\ell^2$ no es evidente que sea un subespacio vectorial. Empezaremos demostrando que si $x$, $y \in \ell^2$, la serie que define el producto es convergente.

Para ello basta probar que es absolutamente convergente. Ahora bien, si llamamos $A = \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2$ y $B = \sum_{n=0}^{\infty} |y_n|^2$ y suponemos que $A \neq 0 \neq B$, entonces

$$\left(\frac{|x_n|}{A} - \frac{|y_n|}{B}\right)^2 = \frac{|x_n|^2}{A^2} + \frac{|y_n|^2}{B^2} - 2\frac{|x_n||y_n|}{AB} \geq 0,$$

luego

$$\frac{|x_n||y_n|}{AB} \leq \frac{1}{2A}|x_n|^2 + \frac{1}{2B}|y_n|^2,$$

luego

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x_n||y_n|}{AB} \leq 1,$$

luego $\sum_{n=0}^{\infty} |x_n \bar{y}_n| \leq AB$. Observemos que si $A = 0$ o $B = 0$ una de las sucesiones es idénticamente nula y la conclusión es trivial.

Ahora ya es fácil probar que $\ell^2$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Lo único que no es trivial es que la suma de dos elementos de $\ell^2$ está en $\ell^2$, pero

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x_n + y_n|^2 \leq \sum_{n=0}^{\infty} (|x_n| + |y_n|)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (|x_n|^2 + |y_n|^2 + 2|x_n||y_n|)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2 + \sum_{n=0}^{\infty} |y_n|^2 + 2\sum_{n=0}^{\infty} |x_n \bar{y}_n| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2 + \sum_{n=0}^{\infty} |y_n|^2 + \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2 \sum_{n=0}^{\infty} |y_n|^2,$$

luego la serie asociada a la suma es convergente.

Una vez probada la convergencia de la serie que define al producto se concluye sin dificultad que éste es ciertamente un producto escalar en $\ell^2$, que es, por consiguiente, un espacio prehilbertiano y la norma correspondiente es la indicada en el enunciado.

Vamos a probar que $\ell^2$ es completo. La prueba para $\ell^1$ es más simple, pues consiste en suprimir los cuadrados y las raíces cuadradas del argumento, y la prueba para $\ell^\infty$ es aún más simple, pues consiste en sustituir las sumas por supremos. Dejamos ambos casos a cargo del lector.

Sea $\{x^n\}_{n=0}^\infty$ una sucesión de Cauchy en $\ell^2$. Dado $\epsilon > 0$, existe un $n_0$ tal que si $m, n \geq n_0$ entonces

$$|x_i^n - x_i^m| \leq \|x^n - x^m\|_2 < \epsilon.$$

Esto implica que las sucesiones $\{x_i^n\}_{i=0}^\infty$ son de Cauchy en $\mathbb{K}$, luego son convergentes, luego podemos tomar $x_i = \lim\limits_i x_i^n \in \mathbb{K}$. Estos límites determinan una sucesión $x \in \mathbb{K}^\mathbb{N}$. Vamos a probar que está en $\ell^2$. Tenemos que

$$\sum_{i=0}^N |x_i^n - x_i^m|^2 \leq \sum_{i=0}^\infty |x_i^n - x_i^m|^2 = \|x^n - x^m\|_2^2 < \epsilon,$$

siempre que $m, n \geq n_0$. Haciendo tender $m$ a infinito queda

$$\sum_{i=0}^N |x_i^n - x_i|^2 \leq \epsilon^2. \qquad (*)$$

Por la desigualdad triangular en $\mathbb{K}^N$ tenemos que

$$\sqrt{\sum_{i=0}^N |x_i|^2} \leq \sqrt{\sum_{i=0}^N |x_i^n - x_i|^2} + \sqrt{\sum_{i=0}^N |x_i^n|^2} \leq \epsilon + \|x^n\|_2.$$

Así pues, las sumas parciales de $\sum\limits_{i=0}^\infty |x_i|^2$ están acotadas, luego la serie converge y $x \in \ell^2$. Más aún, haciendo tender $N$ a infinito en $(*)$ queda $\|x^n - x\|_2^2 \leq \epsilon^p$, para todo $n \geq n_0$, luego $\lim\limits_n x_n = x$. ■

Si identificamos a $\mathbb{K}^n$ con las sucesiones que toman el valor 0 a partir de su término $n+1$, tenemos que $\mathbb{K}^n \subset \ell^p$, para $p = 1, 2, \infty$, y las normas que $\ell^1$, $\ell^2$ y $\ell^\infty$ inducen en $\mathbb{K}^n$ son las que ya habíamos definido. En particular, esto implica que las normas de $\ell^1$ y $\ell^\infty$ no derivan de un producto escalar.

Observemos que $\phi : C(\beta\omega, \mathbb{K}) \longrightarrow \ell^\infty$ dada por $\phi(f) = f|_\omega$ es una isometría, lo que nos da una prueba indirecta de que $\ell^\infty$ es un espacio de Banach.

Esto nos permite particularizar el ejemplo A.53 para concluir que los puntos extremos de la bola derrada unitaria de $\ell^\infty$ son las sucesiones que cumplen $|x_i| = 1$, para todo $i$, aunque también es fácil probarlo directamente.

**Teorema A.57** *Si $B$ es la bola cerrada unitaria de $\ell^1$, entonces*

$$E(B) = \{\alpha e_i \mid i \in \omega, |\alpha| = 1\},$$

*donde $e_i$ es la sucesión que tiene todos los términos nulos menos el i-ésimo, que vale* 1.

DEMOSTRACIÓN: Si $\alpha e_i = (1-\lambda)x + \lambda y$, con $0 < \lambda < 1$, entonces tenemos también que $\alpha = (1-\lambda)x_i + \lambda y_i$, con $|x_i|$, $|y_i| \leq 1$, pero $\alpha$ es un punto extremo de la bola cerrada unitaria de $\mathbb{K}$, luego tiene que ser $x_i = y_i = \alpha$. Ahora bien, como $\|x\|_1$, $\|y\|_1 \leq 1$ y ya tienen una coordenada de módulo 1, tiene que ser $x = y = \alpha e_i$. Por lo tanto, $\alpha e_i \in E(B)$.

Por otra parte, si $x \in B$ cumple $\|x\|_1 = 1$ y tiene al menos dos componentes no nulas, digamos $x_i \neq 0 \neq x_j$, tomamos $\epsilon < |x_i|, |x_j|$ y definimos $y$, $z$ como las sucesiones que coinciden con $x$ salvo que

$$y_i = x_i\Big(1 + \frac{\epsilon}{|x_i|}\Big), \quad y_j = x_j\Big(1 - \frac{\epsilon}{|x_j|}\Big),$$

$$z_i = x_i\Big(1 - \frac{\epsilon}{|x_i|}\Big), \quad y_j = x_j\Big(1 + \frac{\epsilon}{|x_j|}\Big).$$

Es inmediato que $\|y\|_1 = \|z\|_1 = \|x\|_1 = 1$, y $x = (1/2)y + (1/2)z$, luego $x \notin E(B)$.

Así pues, todo $x \in E(B)$ tiene una única componente no nula y, como tiene que ser $\|x\|_1 = 1$, necesariamente $x = x_i e_i$, para un cierto $i$. ■

**Ejemplo A.58** Se llama $c_0$ al subespacio de $\ell^\infty$ formado por todas las sucesiones convergentes a 0.

Es fácil ver que $c_0$ es cerrado en $\ell^\infty$, por lo que se trata de un espacio de Banach. También es fácil calcular su dual:

**Teorema A.59** *La aplicación $\phi : \ell^1 \longrightarrow (c_0)'$ dada por $\phi(x)(y) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} x_i y_i$ es una isometría.*

DEMOSTRACIÓN: Notemos que

$$|\phi(x)(y)| \leq \sum_{i=0}^{\infty} |x_i y_i| \leq \|y\|_\infty \sum_{i=0}^{\infty} |x_i| = \|x\|_1 \|y\|_\infty.$$

Esto prueba que la serie que define a $\phi(x)(y)$ converge absolutamente, así como que $\|\phi(x)\| \leq \|x\|_1$. Podemos tomar $y_i \in \mathbb{K}$ tal que $|y_i| = 1$ y $x_i y_i = |x_i|$ (sólo hay que distinguir si $x_i = 0$ o no). Así

$$\phi(x)(\sum_{i=0}^{n} y_i e_i) = \sum_{i=0}^{n} |x_i| \leq \|\phi(x)\|,$$

luego $\|x\|_1 \leq \|\phi(x)\|$ y $\phi$ es una inmersión isométrica. Para probar que es suprayectiva tomamos $f \in (c_0)'$ y, como en el teorema anterior, $f(x) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} x_i f(e_i)$.

Si tomamos $x_i f(e_i) = |f(e_i)|$, entonces

$$f(\sum_{i=0}^{n} x_i e_i) = \sum_{i=0}^{n} |f(e_i)| \leq \|f\|,$$

luego $y = \{f(e_i)\}_{i=0}^{\infty} \in \ell^1$ y $f = \phi(y)$. ∎

Notemos que a través de las identificaciones $(c_0)'' = (\ell^1)' = \ell^\infty$, la inmersión natural $i : c_0 \longrightarrow \ell^\infty$ no es sino la inclusión, pues $i_x(y) = y(x) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i y_i$, luego, visto como elemento de $\ell^\infty$, tenemos que $i_x = x$. Vemos así que $c_0$ es un espacio de Banach no reflexivo.

Por otro lado, $c_0$ no es el dual de otro espacio de Banach. Si lo fuera, según las observaciones tras el teorema de Alaoglu-Bourbaki, su bola unitaria cerrada $B$ tendría puntos extremos, pero no los tiene, pues si $x \in B$, como es una sucesión convergente a 0, existe un $n$ tal que $|x_n| < 1/2$. Definimos entonces $y$, $z \in B$ como las sucesiones idénticas a $x$ salvo que $y_n = x - 1/2$, $z_n = x + 1/2$. Así $x = (1/2)y + (1/2)z$, luego $x$ no es un punto extremo. Esto nos da una prueba alternativa de que $c_0$ no es reflexivo.

Recíprocamente, como $\ell^1$ sí que es el dual de un espacio de Banach, su bola cerrada unitaria $B$ es débilmente compacta, luego por el teorema de Krein-Milman $B = \overline{\mathrm{co}}\, E(B)$.

Pero el conjunto $V \subset \ell^1$ formado por las sucesiones finalmente nulas es un subespacio vectorial de $\ell^1$ y el teorema A.57 nos da que $E(B) \subset V$, luego $\mathrm{co}\, E(B) \subset V \cap B \subsetneq B$.

Esto prueba que la clausura es necesaria en el enunciado del teorema de Krein-Milman.

**Ejemplo A.60 (Medidas signadas finitamente aditivas)** Si $X$ es un conjunto cualquiera, una *medida signada finitamente aditiva* en $\mathcal{P}X$ es una aplicación $\mu : \mathcal{P}X \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\mu(\varnothing) = 0$ y si $A$, $B \in \mathcal{P}X$ son conjuntos disjuntos, entonces $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$.

Una *medida signada* en $\mathcal{P}X$ es una medida signada finitamente aditiva que además cumple que si $\{A_n\}_{n\in\omega}$ es una sucesión de subconjuntos de $X$ disjuntos dos a dos, entonces

$$\mu(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n),$$

donde la serie es absolutamente convergente. Notemos que, según estas definiciones, una medida signada finitamente aditiva no es necesariamente una medida signada. Equivalentemente, las medidas signadas son lo que podríamos llamar "medidas signadas numerablemente aditivas", pero entendemos que si, no se especifica nada sobre la aditividad, es que hablamos de medidas numerablemente aditivas y no meramente finitamente aditivas.

Similarmente, una *medida (finitamente aditiva)* es una medida signada (finitamente aditiva) que toma valores en $[0, +\infty[$. Nuevamente nos encontramos con que, según estas definiciones, una medida (finitamente aditiva) es un caso particular de medida signada (finitamente aditiva), y no al revés.

Una medida (de cualquiera de los tipos que estamos considerando) está *acotada* si

$$\|\mu\| = \sup\{|\mu(A)| \mid A \in \mathcal{P}X\} < +\infty.$$

El número $\|\mu\|$ se llama *variación total* de $\mu$. Notemos que toda medida (finitamente aditiva) está acotada, pues todo conjunto $A \subset X$ cumple

$$\mu(A) \leq \mu(X) = \|\mu\|.$$

Sólo las medidas signadas pueden no estar acotadas.

Llamamos $M(X)$ al conjunto de todas medidas signadas finitamente aditivas acotadas en $\mathcal{P}X$, mientras que $M_+(X)$ será el subconjunto formado por todas las medidas finitamente aditivas.

Podríamos considerar medidas definidas en álgebras de Boole o $\sigma$-álgebras arbitrarias, pero sólo vamos a necesitar el caso de medidas en álgebras de la forma $\mathcal{P}X$.

Observamos que $M(X)$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^{\mathcal{P}X}$, y es un espacio normado tomando como norma la aplicación $\|\mu\|$ que hemos definido.

Si $\mu \in M(X)$, definimos su *parte positiva* y su *parte negativa* como las aplicaciones $\mu^+$, $\mu^- : \mathcal{P}X \longrightarrow [0, +\infty[$ dadas por

$$\mu^+(A) = \sup\{\mu(B) \mid B \subset A\}, \qquad \mu^-(A) = \sup\{-\mu(B) \mid B \subset A\}.$$

Notemos que todos los supremos son finitos, pues si $B \subset A$, entonces

$$\pm\mu(B) \leq |\mu(B)| \leq \|\mu\|.$$

**Teorema A.61** *Si $\mu \in M(X)$, entonces $\mu^+$, $\mu^- \in M_+(X)$, y son numerablemente aditivas si $\mu$ lo es.*

Demostración: Como $\varnothing \subset A$, es claro que $\mu^+(A) \geq 0$, $\mu^-(A) \geq 0$. También es inmediato que $\mu^+(\varnothing) = \mu^-(\varnothing) = 0$.

Si $A$, $B \in \mathcal{P}X$ son disjuntos y $C \subset A \cup B$, entonces

$$\mu(C) = \mu(C \cap A) + \mu(C \cap B) \leq \mu^+(A) + \mu^+(B),$$

luego $\mu^+(A \cup B) \leq \mu^+(A) + \mu^+(B)$.

Sea $\epsilon > 0$ y tomemos $A_1 \subset A$, $B_1 \subset B$ tales que

$$\mu(A_1) > \mu^+(A) - \epsilon/2, \quad \mu(B_1) > \mu^+(B) - \epsilon/2.$$

Si $C = A_1 \cup B_1$, tenemos que

$$\mu^+(A \cup B) \geq \mu(C) = \mu(A_1) + \mu(B_1) > \mu^+(A) + \mu^+(B) - \epsilon$$

y, como esto vale para todo $\epsilon > 0$, tiene que ser $\mu^+(A \cup B) = \mu^+(A) + \mu^+(B)$.

Si $\mu$ es numerablemente aditiva, podemos razonar igualmente con una sucesión $\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$ de subconjuntos de $X$ disjuntos dos a dos. En la segunda parte tomamos $B_n \subset A_n$ de modo que $\mu(A_n) > \mu^+(B_n) + \epsilon/2^{n+1}$ y llegamos a la misma conclusión.

Como $\mu^- = (-\mu)^+$, tenemos también que $\mu^-$ es una medida (finitamente aditiva). Por último:

$$\begin{aligned}\mu^+(A) - \mu(A) &= \sup\{\mu(B) - \mu(A) \mid B \subset A\} = \sup\{-\mu(A \setminus B) \mid B \subset A\} \\ &= \sup\{-\mu(C) \mid C \subset A\} = \mu^-(A),\end{aligned}$$

luego $\mu = \mu^+ - \mu^-$. ■

**Definición A.62** Si $\mu \in M(X)$, definimos $|\mu| = \mu^+ + \mu^-$, que claramente es una medida finitamente aditiva en $X$, y es numerablemente aditiva si $\mu$ lo es. Además $|\mu|(X) = \|\mu\|$.

En efecto, si $A \subset X$ cumple $\mu(A) \geq 0$, entonces

$$|\mu(A)| = \mu(A) \leq \mu^+(X) \leq \mu^+(X) + \mu^-(X) = |\mu|(X).$$

Igualmente, si $\mu(A) \leq 0$ tenemos que

$$|\mu(A)| = -\mu(A) \leq \mu^-(X) \leq \mu^+(X) + \mu^-(X) = |\mu|(X).$$

Tomando el supremo resulta que $\|\mu\| \leq |\mu|(X)$. Dado $\epsilon > 0$, podemos tomar $A \subset X$ tal que $\|\mu\| < |\mu(A)| + \epsilon$. Tanto si $\mu(A) \geq 0$ como si $\mu(A) \leq 0$ tenemos que

$$\|\mu\| < |\mu(A)| + \epsilon \leq \mu^+(X) + \mu^-(X) + \epsilon = |\mu|(X) + \epsilon,$$

luego tenemos la igualdad $\|\mu\| = |\mu|(X)$. ■

Sea $B(X)$ el conjunto de todas las funciones acotadas $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$. En B.44 hemos definido la integral de una función $f \in B(X)$ respecto a una medida finitamente aditiva, y es fácil ver que

$$\int_X f\, d(\mu_1 + \mu_2) = \int_X f\, d\mu_1 + \int_X f\, d\mu_2, \qquad \int_X f\, d\alpha\mu = \alpha \int_X f\, d\mu,$$

para $\alpha \geq 0$. (Se comprueba inmediatamente cuando $f$ es una función simple y se generaliza trivialmente al caso general.) Ahora podemos extender la definición a medidas signadas finitamente aditivas mediante

$$\int_X f\, d\mu = \int_X f\, d\mu^+ - \int_X f\, d\mu^-.$$

**Teorema A.63** *Si $X$ es un conjunto, la aplicación $\phi : M(X) \longrightarrow B(X)'$ dada por*

$$\phi(\mu)(f) = \int_X f\, d\mu$$

*es una isometría de espacios normados. En particular $M(X)$ es un espacio de Banach.*

DEMOSTRACIÓN: Claramente $\phi$ es lineal. Además,

$$|\phi(\mu)(f)| = \left|\int_X f\,d\mu^+ - \int_X f\,d\mu^-\right| \leq \int_X |f|\,d\mu^+ + \int_X |f|\,d\mu^-$$

$$\leq \|f\|_\infty \left(\int_X d\mu^+ + \int_X d\mu^-\right) = \|f\|(\mu^+(X) + \mu^-(X)) = \|f\|_\infty\|\mu\|,$$

por lo que $\phi(\mu) \in B(X)'$ y $\|\phi(\mu)\| \leq \|\mu\|$. De hecho se da la igualdad, pues, dado $\epsilon > 0$, podemos tomar $A \subset X$ tal que $\|\mu\| < |\mu(A)| + \epsilon$. Sea $\delta = \pm 1$ de modo que $|\mu(A)| = \delta\mu(A)$. Entonces $\|\delta\chi_A\|_\infty = 1$ y

$$\phi(\mu)(\delta\chi_A) = \delta\int_X \chi_A\,d\mu = \delta\mu(A) = |\mu(A)| > \|\mu\| - \epsilon,$$

luego $\|\mu\| - \epsilon < |\phi(\mu)(\delta\chi_A)| \leq \|\phi(\mu)\| \leq \|\mu\|$ para todo $\epsilon > 0$, luego tiene que ser $\|\phi(\mu)\| = \|\mu\|$ y así tenemos que $\phi$ es una inmersión isométrica. Sólo falta ver que es suprayectiva, pero si $u \in B(X)'$, podemos definir $\mu(A) = u(\chi_A)$, y claramente se trata de una medida finitamente aditiva en $X$, pues si $A$ y $B$ son disjuntos, entonces $\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B$.

Además $\mu$ está acotada, pues si $A \subset X$, tenemos que

$$|\mu(A)| = |u(\chi_A)| \leq \|u\|\|\chi_A\|_\infty = \|u\|,$$

luego $\|\mu\| \leq \|u\|$. Por otra parte,

$$\phi(\mu)(\chi_A) = \int_X \chi_A\,d\mu = \mu(A) = u(\chi_A),$$

luego $\phi(\mu)$ y $u$ coinciden sobre las funciones características. Por linealidad coinciden sobre todas las funciones simples y por continuidad sobre todas las funciones de $B(X)$, ya que el subespacio de las funciones simples es denso en $B(X)$. Así pues, $\phi(\mu) = u$. ■

Si consideramos el caso particular en que $X = \omega$, tenemos que $B(X) = \ell^\infty$ y, hemos probado que $(\ell^\infty)'$ es isométrico al espacio $M(\omega)$ de las medidas signadas finitamente aditivas en $\omega$.

Componiendo la inmersión natural en el bidual $i : \ell^1 \longrightarrow (\ell^1)''$ con la isometría $(\ell^1)'' \longrightarrow (\ell^\infty)'$ inducida por la del teorema A.74 y con la isometría inversa $(\ell^\infty)' \longrightarrow M(\omega)$ de la dada por el teorema anterior, obtenemos una inmersión isométrica $i^* : \ell^1 \longrightarrow M(\omega)$.

Explícitamente, si $y \in \ell^1$, tenemos que $i(y)(x) = x(y)$, pero cada $x \in (\ell^1)'$ se identifica con un $x \in \ell^\infty$, de modo que $i(y)(x) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} x_i y_i$. A su vez, esta aplicación $i(y)$, vista como elemento de $(\ell^\infty)'$, se corresponde con una medida $\mu = i^*(y)$ dada por

$$\mu(A) = i(y)(\chi_A) = \sum_{i=0}^{\infty} \chi_A(i) y_i = \sum_{i\in A} y_i.$$

A partir de esta expresión es inmediato que $\mu = i^*(y)$ es una medida signada numerablemente aditiva en $\omega$. Recíprocamente, si $\mu \in M(\omega)$ es una medida signada (numerablemente aditiva), el funcional lineal $\phi(\mu) \in (\ell^\infty)'$ que define es

$$\phi(\mu)(x) = \int_\omega x\, d\mu = \sum_{i=0}^{\infty} \int_{\{i\}} x\, d\mu = \sum_{i=0}^{\infty} x_i y_i,$$

donde $y_i = \mu(\{i\})$. Haciendo actuar $\phi(\mu)$ sobre $\{\text{signo}(y_i)\}_{i\in\omega}$ obtenemos que $y \in \ell^1$, con lo que $\mu = i^*(y)$.

En definitiva, vemos que la inmersión $i^* : \ell^1 \longrightarrow M(\omega)$ tiene por imagen el subespacio de las medidas signadas (numerablemente aditivas).

Usando el teorema de los ultrafiltros podemos concluir que $i^*$ no es suprayectiva, por lo que $\ell^1$ no es un espacio reflexivo. En efecto, basta considerar un ultrafiltro no principal $U$ en $\omega$, que determina la medida finitamente aditiva dada por

$$\mu_U(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } A \in U, \\ 0 & \text{si } A \notin U. \end{cases}$$

Como todos los puntos tienen medida nula, no puede ser numerablemente aditiva, así que no está en la imagen de $i^*$.

**Ejemplo A.64 (El ejemplo de Erdős)** Sea $X = \ell^1(\mathbb{Q})$ el conjunto de todas las sucesiones $x = \{x_n\}_{n=1}^\infty$ de números racionales que pertenecen a $\ell^1$.

1. **(Conexión)** *$X$ es totalmente disconexo, pero no cerodimensional.*

   En efecto, $X$ es totalmente disconexo, pues si $x$, $y \in X$ son dos puntos distintos, existe un índice $n$ tal que $x_n \neq y_n$ y no perdemos generalidad si suponemos que $x_n < y_n$. Si tomamos un número irracional $x_n < \alpha < y_n$, entonces $U = \{x \in X \mid x_n < \alpha\}$ es claramente un abierto cerrado en $X$ (porque las proyecciones son continuas para la topología inducida por la norma) y $x \in U$, $y \notin U$, luego $y \notin Q(x)$, luego $Q(x) = \{x\}$ y en particular $C(x) = \{x\}$.

   Por otra parte, vamos a ver que ningún entorno de 0 que cumpla $U \subset B_1(0)$ es abierto y cerrado, con lo que $X$ no será cerodimensional. Para ello vamos a construir una sucesión $\{r_n\}_{n=1}^\infty$ de números racionales $\geq 0$ tal que

   $$x_n = (r_1, \ldots, r_n, 0, 0, \ldots) \in U, \qquad d(x_n, X \setminus U) \leq 1/n.$$

   Claramente $r_1 = 0$ cumple lo requerido. Supuestos definidos $r_1, \ldots, r_{n-1}$, consideramos los puntos

   $$z_i = (r_1, \ldots, r_{n-1}, i/n, 0, 0, \ldots)$$

   Como $z_0 \in U$, mientras que $z_n \in X \setminus B_1(0) \subset X \setminus U$, existe un $i < n$ tal que $z_i \in U$ y $z_{i+1} \notin U$. Tomamos entonces $r_n = i/n$, de modo que $x_n = z_i \in U$ y, como $z_{i+1} \in X \setminus U$ y $\|z_{i+1} - z_i\|_1 = 1/n$, también $d(x_n, X \setminus U) \leq 1/n$.

Puesto que $\sum_{i=1}^{n}|r_i|<1$, se cumple que $\sum_{i=1}^{\infty}|r_i|\leq 1$, luego $x=\{r_n\}_{n=1}^{\infty}\in X$. Es claro que $x=\lim_n x_n\in\overline{U}$, pero también $d(x,X\setminus U)=0$, pues

$$d(x,X\setminus U)\leq d(x,x_n)+d(x_n,X\setminus U)$$

y los dos sumandos tienden a 0. Por lo tanto $x\in\overline{X\setminus U}$, y así $x\in\partial U\neq\varnothing$, luego $U$ no es abierto cerrado.

**Ejemplo A.65** Sea $A=\bigcup_{i\in I}A_i$ una unión disjunta de conjuntos no vacíos. Para cada $i\in I$, consideramos[7]

$$\ell^1(A_i)=\{x\in\mathbb{R}^{A_i}\mid \sum_{t\in A_i}|x(t)|<+\infty\},\ \ell^\infty(A_i)=\{y\in\mathbb{R}^{A_i}\mid \sup_{t\in A_i}|y(t)|<+\infty\},$$

que son espacios normados con las normas dadas, respectivamente, por

$$\|x\|_1=\sum_{t\in A_i}|x(t)|\qquad \|y\|_\infty=\sup_{t\in A_i}|y(t)|.$$

Sean

$$V=\prod_{i\in I}^{\ell^\infty}\ell^1(A_i)=\{x\in\mathbb{R}^A\mid \sup_{i\in I}\|x|_{A_i}\|_1<+\infty\},$$

$$W=\prod_{i\in I}^{\ell^1}\ell^\infty(A_i)=\{y\in\mathbb{R}^A\mid \sum_{i\in I}\|y|_{A_i}\|_\infty<+\infty\},$$

que también son espacios normados con las normas

$$\|x\|_\infty=\sup_{i\in I}\|x|_{A_i}\|_1,\qquad \|y\|_1=\sum_{i\in I}\|y|_{A_i}\|_\infty.$$

Vamos a ver que el dual $V'$ es isométrico a un subespacio de $W$, a saber, a

$$W_0=\{y\in W\mid \text{ para todo } \epsilon>0\ \{t\in A\mid |x(t)|>\epsilon\} \text{ es finito}\}.$$

Notemos primero que si $y\in W$, el conjunto $A_n(y)=\{t\in A\mid |y(t)|>1/n\}$ es finito, luego $A(y)=\{t\in A\mid y(t)\neq 0\}$ es numerable (es la unión de los anteriores).

Definimos $\phi:V\longrightarrow W_0'$ mediante

$$\phi(x)(y)=\sum_{t\in A}x(t)y(t).$$

Por la observación precedente, la serie tiene sólo una cantidad numerable de términos no nulos. De acuerdo con las observaciones tras el teorema 9.58, para que la convergencia tenga sentido sin haber especificado ninguna ordenación, tenemos que probar que es absolutamente convergente. Ahora bien, usando el

[7] En todas las sumas que consideramos a continuación hay que entender que la convergencia presupone que a lo sumo una cantidad numerable de términos son no nulos, en cuyo caso la suma se define como la suma de dicha cantidad numerable de términos.

teorema 9.59 (restringiéndonos a la cantidad numerable de sumandos no nulos) es fácil justificar que

$$\sum_{t\in A} |x(t)||y(t)| = \sum_{i\in I} \sum_{t\in A_i} |(x(t)||y(t)|,$$

en el sentido de que la primera serie converge si y sólo si lo hacen todas las series sobre $A_i$, así como la serie formada por las sumas de todas ellas. Pero

$$\sum_{t\in A_i} |x(t)||y(t)| \leq \|y|_{A_i}\|_\infty \sum_{t\in A_i} |x(t)| \leq \|x|_{A_i}\|_1 \, \|y|_{A_i}\|_\infty,$$

por lo que todas estas series convergen, y a su vez

$$\sum_{t\in A} |x(t)||y(t)| \leq \sum_{i\in I} \sum_{t\in A_i} \|x|_{A_i}\|_1 \, \|y|_{A_i}\|_\infty \leq \|x\|_\infty \sum_{t\in A_i} \|y|_{A_i}\|_\infty = \|x\|_\infty \|y\|_1.$$

Esto no sólo prueba la convergencia de la serie, sino también que

$$|\phi(x)(y)| \leq \|x\|_\infty \|y\|_1,$$

de donde $\phi(x)$, que obviamente es un funcional lineal, además es continuo y $\|\phi(x)\| \leq \|x\|_\infty$. A su vez, esto nos da que $\phi$ (que también es obviamente lineal), es un operador continuo y $\|\phi\| \leq 1$.

También es inmediato que $\phi$ es inyectivo, pues si $\phi(x) = 0$, entonces se cumple $x(t) = \phi(x)(e_t) = 0$ para todo $t$, donde $e_t \in W_0$ es la sucesión que tiene únicamente un 1 en la posición $t$, luego $x = 0$.

Para probar que $\phi$ es suprayectivo probamos en primer lugar que si $y \in W_0$, entonces

$$y = \lim_n \sum_{t\in A_n(y)} y(t)e_t.$$

En efecto,

$$\Big\| y - \sum_{t\in A_n(y)} y(t)e_t \Big\|_1 = \sum_{i\in I} \Big\| y|_{A_i} - \sum_{t\in A_n^i(y)} y(t)e_t \Big\|,$$

donde $A_n^i(t) = A_n(y) \cap A_i$. La convergencia de la serie que define $\|y\|_1$ implica que, dado $\epsilon > 0$, existe un $I_0 \subset I$ finito tal que

$$\sum_{i\in I\setminus I_0} \|y|_{A_i}\|_\infty < \frac{\epsilon}{2},$$

lo que a su vez implica que

$$\sum_{i\in I\setminus I_0} \Big\| y|_{A_i} - \sum_{t\in A_n^i(y)} y(t)e_t \Big\|_\infty \leq \sum_{i\in I\setminus I_0} \|y|_{A_i}\|_\infty < \frac{\epsilon}{2},$$

pues las normas en el miembro izquierdo lo son de sucesiones que difieren de las sucesiones $y|_{A_i}$ únicamente en que algunos de sus términos se han cambiado por ceros, luego son menores o iguales.

Por otra parte, si tomamos un número natural $n_0$ tal que $1/n_0 < \epsilon/(2|I_0|)$, entonces para todo $i \in I_0$ y cada $n \geq n_0$ tenemos que

$$\Big\| y|_{A_i} - \sum_{t\in A_n^i(y)} y(t)e_t \Big\|_\infty \leq \frac{1}{n} < \frac{\epsilon}{2|I_0|},$$

luego

$$\sum_{i\in I_0} \Big\| y|_{A_i} - \sum_{t\in A_n^i(y)} y(t)e_t \Big\|_\infty < \frac{\epsilon}{2},$$

y en total

$$\Big\| y - \sum_{t\in A_n(y)} y(t)e_t \Big\|_1 = \sum_{i\in I} \Big\| y|_{A_i} - \sum_{t\in A_n^i(y)} y(t)e_t \Big\|_\infty < \epsilon.$$

Por lo tanto, si $f \in W_0'$, tenemos que

$$f(y) = \lim_n \sum_{t\in A_n(y)} y(t)f(e_t) = \sum_{t\in A} y(t)f(e_t).$$

Sea $x \in \mathbb{R}^A$ dado por $x(t) = f(e_t)$. Si probamos que $x \in L$, tendremos que $f = \phi(f)$ y $\phi$ será suprayectivo. Vamos a ver, de hecho, que $\|x\|_\infty \leq \|f\|$.

Para ello basta probar que, si $i \in I$, entonces $\|x|_{A_i}\|_1 \leq \|f\|$. Si, por el contrario,

$$\sum_{t\in A_i} |f(e_t)| > \|f\|,$$

podemos tomar $F \subset A_i$ finito tal que $\sum\limits_{t\in F} |f(e_t)| > \|f\|$. Tomemos $y = \sum\limits_{t\in F} \pm e_t$, donde el signo se elige, para cada $t$, de modo que $\pm f(e_t) > 0$.

Así $\|y|_{A_i}\|_\infty = 1$ y, para cualquier otro índice $j \neq i$, tenemos $\|y|_{A_j}\|_\infty = 0$, luego $\|y\|_1 = 1$ y

$$f(y) = \sum_{t\in F} \pm f(e_t) = \sum_{t\in F} |f(e_t)| > \|f\|,$$

pero $f(y) = |f(y)| \leq \|f\|\|y\|_1 = \|f\|$, y tenemos una contradicción.

Por lo tanto $x \in L$ y $\|x\| \leq \|f\|$. Con esto queda probado que $\phi$ es un isomorfismo, pero vamos a ver que es una isometría. Dado $x \in L$, ya sabemos que $\|\phi(x)\| \leq \|x\|_\infty$. Veamos la desigualdad opuesta. Dado $\epsilon > 0$, podemos tomar $F \subset A_i$ finito tal que

$$\sum_{t\in A_i\setminus F} |x(t)| < \epsilon.$$

Sea $y = \sum\limits_{t\in F} \pm e_t$, donde los signos se eligen de forma que $\pm x(t) > 0$. Así $\|y\|_1 \leq 1$ y

$$\phi(x)(y) = \sum_{t\in F} \pm x(t) = \sum_{t\in F} |x(t)| \geq \sum_{t\in A_i} |x(t)| - \epsilon,$$

luego $\|\phi(x)\| \geq \|x|_{A_i}\|_1 - \epsilon$ y, como esto vale para todo $\epsilon > 0$, de hecho tenemos que $\|x|_{A_i}\|_1 \leq \|\phi(x)\|$, luego $\|x\|_\infty \leq \|\phi(x)\|$.

Con esto tenemos probado que $L$ es el dual de un espacio normado. En particular el teorema 9.61 nos da que $L$ es un espacio de Banach.

Vamos a determinar los puntos extremos de su bola cerrada unitaria

$$K = \{x \in \mathbb{R}^A \mid \sup_{i \in I} \|x|_{A_i}\|_1 \leq 1\}.$$

Concretamente, vamos a probar que $e \in K$ es un punto extremo si y sólo si para cada $i \in I$ existe un único $t \in A_i$ tal que $e(t) \neq 0$ y, dicho $t$ cumple, de hecho, que $|e(t)| = 1$.

En efecto, si fuera $e(t) = 0$ para todo $t \in A_i$, entonces fijamos un $t \in A_i$ y consideramos $y$, $z \in L$ que coincidan con $e$ salvo en $t$, donde $y(t) = 1$, $z(t) = -1$. Es claro entonces que $y$, $z \in K$, $y \neq z$ y $e = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z$, con lo que $e$ no es un punto extremo.

Por otra parte, si existen $t_1 \neq t_2 \in A_i$ tales que $e(t_1) \neq 0 \neq e(t_2)$, entonces podemos definir $y$, $z \in K$ que coincidan con $e$ salvo en $t_1$, $t_2$, donde

$$y(t_1) = e(t_1)(1 + |e(t_2)|), \qquad y(t_2) = e(t_2)(1 - |e(t_1)|),$$

$$z(t_1) = e(t_1)(1 - |e(t_2)|), \qquad z(t_2) = e(t_2)(1 + |e(t_1)|).$$

Nuevamente es fácil comprobar que ciertamente $y$, $z \in K$, $y \neq z$ y $e = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z$.

Si $t \in A_i$ es el único índice con $e(t) \neq 0$, entonces, como $e|_{A_i}$ es claramente un punto extremo de la bola unitaria de $\ell^1(A_i)$, tiene que ser $|e(t)| = \|e|_{A_i}\|_1 = 1$.

Recíprocamente, si un punto $e \in K$ cumple estas condiciones, entonces es un punto extremo, pues si $e = (1 - \lambda)y + \lambda z$, con $y$, $z \in K$, $0 < \lambda < 1$, $y \neq z$, tiene que existir un $i \in I$ tal que $y|_{A_i} \neq z|_{A_i}$. Sea $t \in A_i$ el índice para el que $|e(t)| = 1$. Entonces

$$\pm 1 = (1 - \lambda)y(t) + \lambda z(t), \qquad |y(t)| \leq 1, \quad |z(t)| \leq 1,$$

pero los puntos extremos de $[-1, 1]$ son $\pm 1$, luego tiene que ser $y(t) = z(t) = e(t)$. Pero, como $\|y|_{A_i}\|_1 = \|z|_{A_i}\|_1 = 1$, esto implica que $y(t') = z(t') = 0$ para todo $t' \in A_i \setminus \{t\}$, luego $y|_{A_i} = z|_{A_i}$, contradicción.

De este ejemplo extraemos una equivalencia geométrica del axioma de elección debida a Bell y Fremlin:

> *El axioma de elección es equivalente a que la bola cerrada unitaria del espacio dual de todo espacio normado tiene al menos un punto extremo.*

En efecto, si suponemos AE, el teorema de Alaoglu-Bourbaki nos da que la bola cerrada unitaria del espacio dual de un espacio normado es débilmente compacta, y el teorema de Krein-Milman implica que tiene un punto extremo. Recíprocamente, dada cualquier familia $\{A_i\}_{i \in I}$ de conjuntos no vacíos disjuntos dos a dos, hemos probado (sin usar más que las formas débiles habituales del axioma de elección, todas ellas consecuencias del principio de elecciones dependientes) que el espacio $L$ es el dual de un espacio normado y que un punto extremo $e$ de su bola cerrada unitaria determina una función de elección en $\{A_i\}_{i\in I}$, a saber, la que a cada $i$ le asigna el único $t \in A_i$ tal que $e(t) \neq 0$.

**Ejemplo A.66** Sea $K$ un espacio compacto, sea $W = C_p(K)$ (es decir, $C(K)$ con la topología de la convergencia puntual) y sea $V = W'_\sigma$. Entonces $V$ es un espacio vectorial topológico localmente convexo que no es tonelado ni bornológico.

En efecto, sea $U \subset W$ la bola unidad del espacio de Banach $C(K)$. Se cumple que $U$ es acotada en $W_\beta$, pues un entorno básico de cero es un tonel $T$ en $W$, que también es un tonel en $C(K)$, pues la topología de $W$ es menos fina, pero $C(K)$ es un espacio de Banach, luego es tonelado, así que $T$ es un entorno de 0 en $C(K)$, luego existe un $\lambda > 0$ tal que $U \subset \lambda T$.

Por otra parte $U$ no es equicontinuo en $V'$. Si lo fuera, su polar

$$U^\circ = \{f \in V \mid |f(w)| \leq 1 \text{ para todo } w \in W\}$$

sería un entorno de 0 en $V = W'_\sigma$ (teorema 11.92), luego existirían $w_1, \ldots, w_n \in W$ tales que

$$\bigcap_{i=1}^{n} \{f \in V \mid |f(w_i)| < \epsilon\} \subset U^\circ.$$

Ahora bien, es claro que $U$ contiene una base de $W$, luego $U \not\subset \langle w_1, \ldots, w_n \rangle$ o de lo contrario $W$ tendría dimensión finita. Por lo tanto, podemos tomar $w \in U \setminus \langle w_1, \ldots, w_n \rangle$ y por 11.52 existe $f \in V$ tal que $f(w) > 1$ y $f(w_i) = 0$, lo que contradice la inclusión precedente.

Como $U$ es acotado en $V'_\sigma$ pero no equicontinuo, 11.97 nos da que $V$ no es tonelado.

Pero $U^\circ$ es absolutamente convexo y absorbe a los conjuntos acotados en $V = W'_\sigma$, pues si $B \subset W'_\sigma$ es acotado, entonces 11.96 nos da que $T = B^\circ$ es un tonel en $W$, luego un entorno de 0 en $W_\beta$ y, como $U$ está acotado en $W_\beta$, existe un $\lambda > 0$ tal que $U \subset \lambda T$, luego $\lambda^{-1}T^\circ = (\lambda T)^\circ \subset U^\circ$, luego $B \subset B^{\circ\circ} = T^\circ \subset \lambda U^\circ$.

Si $V$ fuera bornológico, $U^\circ$ sería un entorno de 0, pero ya hemos visto que no lo es. Por lo tanto, $V$ tampoco es bornológico.

**Ejemplo A.67 (Los espacios $L^p$ con $0 < p \leq 1$)** Fijado un espacio medida $X$ y un número real $p > 0$, definimos $\mathcal{L}^p$ como el conjunto de todas las funciones medibles[8] $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ tales que

$$\int_X |f|^p \, d\mu < +\infty.$$

[8]Aunque no lo vamos a necesitar, podemos sustituir $\mathbb{R}$ por $\mathbb{C}$ sin más que definir que una función $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ es medible (resp. integrable) si y sólo si lo son las funciones $\operatorname{Re} f$, $\operatorname{Im} f$, y definiendo a su vez

$$\int_X f \, d\mu = \int_X \operatorname{Re} f \, d\mu + i \int_X \operatorname{Im} f \, d\mu.$$

Definimos $\| \ \|_p : \mathcal{L}^p \longrightarrow \mathbb{R}$ mediante

$$\|f\|_p = \int_X |f|^p \, d\mu.$$

Los espacios $\mathcal{L}^p$ que tienen realmente interés en el análisis funcional son los correspondientes a $p \geq 1$. Por ejemplo, observemos que $\mathcal{L}_1$ no es sino el conjunto de todas las funciones integrables en $X$, que claramente es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^X$. Sin embargo, aquí nos va a interesar únicamente el caso $0 < p < 1$, porque proporciona ejemplos de espacios vectoriales topológicos que no son localmente convexos. Trataremos también el caso $p = 1$ porque ello no supone ningún esfuerzo adicional.

En el caso $p = 1$ es inmediato que $\| \ \|_1$ es una seminorma en $\mathcal{L}^1$. Para trabajar con una norma podemos considerar el conjunto

$$V = \{f \in \mathcal{L}^p \mid \|f\|_p = 0\} = \{f \in \mathcal{L}^p \mid \int_X |f|^p \, d\mu = 0\},$$

que no es sino el conjunto de todas las funciones medibles $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ que son nulas salvo a lo sumo en un conjunto nulo, por lo que no depende de $p$ y es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^X$.

Definimos $L^1 = \mathcal{L}^1/V$, que es un espacio vectorial cuyos elementos son clases de equivalencia de funciones integrables en $X$, de modo que dos funciones determinan la misma clase si y sólo si coinciden en todo $X$ salvo a lo sumo en un conjunto nulo. A su vez, definimos

$$\| \ \|_1 : L^p \longrightarrow \mathbb{R}$$

mediante $\|[f]\|_1 = \|f\|_1$ y es claro que se trata de una norma en $L^1$.

Veamos lo que sucede en el caso $0 < p < 1$. En primer lugar demostramos que, para funciones medibles cualesquiera (no necesariamente en $\mathcal{L}^p$) y para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, se cumplen las relaciones

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p, \qquad \|\alpha f\|_p = |\alpha|^p \|f\|_p.$$

La segunda es inmediata, y para probar la primera basta ver que si $a, b \geq 0$ son números reales, entonces

$$(a + b)^p \leq a^p + b^p,$$

pues de aquí deducimos que $|f(x)+g(x)|^p \leq (|f(x)|+|g(x)|)^p \leq |f(x)|^p+|g(x)|^p$, e integrando obtenemos la desigualdad requerida.

Podemos suponer que $a, b > 0$, pues el caso contrario es trivial, y a su vez que $0 < b < a$. Necesitamos aplicar un resultado del cálculo diferencial de funciones de una variable real, concretamente el teorema del valor medio aplicado a la función $h(x) = x^p$, que nos da que existe un número real $b < a < \xi < a + b$ tal que

$$(a + b)^p - a^p = h(a + b) - h(a) = h'(\xi)b = p\xi^{p-1}b \leq pb^{p-1}b \leq b^p,$$

donde hemos usado que $0 < p < 1$.

Ahora es inmediato que $\mathcal{L}^p$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^X$, y podemos definir igualmente $L^p = \mathcal{L}^p/V$, así como la aplicación $\| \ \|_p : L^p \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $\|[f]\|_p = \|f\|_p$, donde no importa la elección del representante de la clase de equivalencia. Notemos que $\|[f]\|_p = 0$ si y sólo si $f$ es nula salvo en un conjunto nulo, si y sólo si $[f] = 0$.

En la práctica escribiremos simplemente $f$ en lugar de $[f]$ para referirnos a los elementos de $L^p$.

Si $0 < p < 1$, no es cierto que $\| \ \|_p$ sea una seminorma en $\mathcal{L}^p$ (ni que la aplicación que induce en $L^p$ sea una norma) debido a que en la relación $\|\alpha f\|_p = |\alpha|^p \|f\|_p$ "sobra" el exponente $p$. No obstante, es inmediato que

$$d_p(f,g) = \|f-g\|_p$$

es una pseudométrica en $\mathcal{L}^p$ que induce una distancia en $L^p$. Vamos a probar que en este caso $L^p$, aunque no sea un espacio normado, es igualmente un espacio vectorial topológico.

En efecto, tenemos que

$$d_p(f+g,a+b) = \|f-a+g-b\|_p \leq \|f-a\|_p + \|g-b\|_p = d_p(f,a) + d_p(g,b),$$

de donde se sigue la continuidad de la suma en $(a,b)$. Similarmente,

$$d_p(\alpha f, \alpha_0 a) = \|\alpha f - \alpha a + \alpha a - \alpha_0 a\|_p \leq |\alpha|^p d_p(f,a) + |\alpha - \alpha_0|^p \|a\|_p,$$

de modo que, dado $\epsilon > 0$, basta tomar $0 < \delta < 1$ tal que

$$\delta \leq \delta^p < \frac{\epsilon}{|\alpha_0|^p + \|a\|_p + 1},$$

y así, si $|\alpha - \alpha_0| < \delta$ y $d_p(f,a) < \delta$, se cumple que

$$|\alpha|^p \leq |\alpha - \alpha_0|^p + |\alpha_0|^p < |\alpha_0|^p + 1,$$

luego

$$d_p(\alpha f, \alpha_0 a) < \frac{|\alpha|^p \epsilon}{|\alpha_0|^p + \|a\|_p + 1} + \frac{\|a\|_p \epsilon}{|\alpha_0|^p + \|a\|_p + 1} < \epsilon,$$

y esto prueba que el producto es continuo en $(\alpha_0, a)$.

**El espacio $L^2$** En el caso $p \geq 1$ conviene definir en realidad

$$\|f\|_p = \left( \int_X |f|^p \, d\mu \right)^{1/p},$$

lo cual no altera la definición de $\mathcal{L}^p$, pero así es posible demostrar igualmente que se cumple $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$, y además es claro que $\|\alpha f\|_p = |\alpha| \|f\|_p$, por lo que $\| \ \|_p$ resulta ser una seminorma en $\mathcal{L}^p$ que induce a su vez una norma en $L^p$.

Según ya hemos señalado, son estos espacios normados $L^p$, para $p \geq 1$, los que realmente tienen interés en el análisis funcional. No vamos a estudiarlos aquí, pero observemos que el caso $p = 2$ es particularmente simple.

En efecto, es fácil demostrar que si $f,\, g \in \mathcal{L}^2$, entonces $fg \in \mathcal{L}^1$. Basta partir de la desigualdad $ab \leq (1/2)a^2 + (1/2)b^2$ (que equivale a $(a-b)^2 \geq 0$), aplicada a

$$a = \frac{|f(x)|}{\|f\|_2}, \quad b = \frac{|g(x)|}{\|g\|_2},$$

con lo que obtenemos

$$\frac{|f(x)g(x)|}{\|f\|_2\|g\|_2} \leq \frac{1}{2}\,\frac{|f(x)|^2}{\|f\|_2^2} + \frac{1}{2}\,\frac{|g(x)|^2}{\|g\|_2^2}.$$

Al integrar resulta que

$$\frac{\|fg\|_1}{\|f\|_2\|g\|_2} \leq 1,$$

es decir, que $\|fg\|_1 \leq \|f\|_2\|g\|_2$. Esto es un caso particular de la desigualdad de Hölder.

Ahora podemos definir un producto en $\mathcal{L}^2$ mediante

$$f \cdot g = \int_X fg\, d\mu,$$

que a su vez induce un producto escalar en $L^2$ que lo convierte en un espacio prehilbertiano cuya norma asociada es precisamente $\|\ \|_2$. ■

Veamos un caso trivial de espacios $L^p$:

**Ejemplo:** $\mathbb{R}^n$ Consideremos el caso en que $X = \{1, \ldots, n\}$ y $\mu : \mathcal{P}X \longrightarrow [0, n]$ es la medida dada por $\mu(A) = |A|$. Es inmediato comprobar que todas las funciones $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ son integrables, así como que

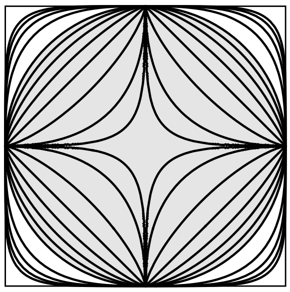
$$\int_X f\, d\mu = \sum_{i=1}^n f(i),$$

de donde se sigue que $\mathcal{L}^p = \mathbb{R}^X = \mathbb{R}^n$. Además, como el único conjunto nulo es $\varnothing$, sucede que $V = \{f \in \mathcal{L}^p \mid \|f\|_p = 0\} = \{0\}$, de donde resulta que cada clase de equivalencia en $L^p$ tiene un único elemento, por lo que también podemos identificar $L^p = \mathbb{R}^n$. Expresando los elementos de $L^p$ como $n$-tuplas en lugar de como funciones tenemos que

$$\|x\|_p = \sum_{i=1}^n |x_i|^p$$

por lo que $\|\ \|_1$ es la norma que ya habíamos definido en la sección 9.3 (y lo mismo vale para $\|\ \|_2$ definida con el exponente $1/2$).

La figura muestra las bolas unitarias en $\mathbb{R}^2$ para varias "normas" $\|\ \|_p$ (incluyendo las que no son realmente normas). El cuadrado exterior es la bola para $p = \infty$, mientras que el que une los puntos medios de los lados de ésta corresponde a $p = 1$. Las interiores a este cuadrado (que no son convexas) corresponden a valores $p < 1$, mientras que las exteriores (convexas) corresponden a $p > 1$. La circunferencia sombreada corresponde a $p = 2$. ■



El teorema siguiente generaliza el ejemplo anterior:

**Teorema A.68** *Si $X$ es un espacio medida tal que $\mu$ toma sólo un número finito de valores, entonces $L^p$ tiene dimensión finita, luego es topológicamente isomorfo a un espacio $\mathbb{R}^n$.*

Demostración: Es claro que si $\mu = 0$ entonces $L^p = 0$, así que suponemos que existen conjuntos de medida positiva. En todo conjunto medible $Y$ de medida positiva podemos tomar $A \subset Y$ tal que $\mu(A) > 0$ tome el menor valor posible, y entonces $A$ es un átomo.

Si $A_1$ es un átomo en $X$ y $X \setminus A_1$ no es nulo, contiene un átomo $A_2$, si $X \setminus (A_1 \cup A_2)$ no es nulo, contiene un átomo $A_3$, pero este proceso no puede continuar indefinidamente, o $\mu$ tomaría infinitos valores. Por lo tanto, al cabo de un número finito de pasos, tenemos que llegar a un conjunto nulo y, si lo unimos a cualquiera de los átomos que hemos obtenido, concluimos que $X = \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ es una unión disjunta de átomos.

Ahora observamos que si $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es medible, es constante en cada $A_i$ salvo en un conjunto de medida nula. Tenemos que

$$A_i = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} (f^{-1}[[n, n+1]] \cap A_i),$$

luego existe un único $n$ tal que el intervalo $I_0 = [a_0, b_0] = [n, n+1]$ cumple que $\mu(f^{-1}[I_0] \cap A_i) = \mu(A_i)$. Sea $c_0 = (a_0 + b_0)/2$.

Si $\mu(f^{-1}[c_0] \cap A_i) = \mu(A_i)$, ya tenemos que $f$ es constante en $A_i$ salvo en un conjunto nulo. En caso contrario, sólo uno de los intervalos $I = [a_0, c_0]$ o $I = [c_0, b_0]$ cumple que $\mu(f^{-1}[I] \cap A_i) = \mu(A_i)$, y llamamos $I_1 = [a_1, b_1]$ a dicho intervalo. Procediendo del mismo modo obtenemos una sucesión decreciente de intervalos $\{[a_n, b_n]\}_{n=0}^{\infty}$ tal que $\mu(f^{-1}[[a_n, b_n]] \cap A_i) = \mu(A_i)$, e igualmente,

$$\mu(f^{-1}[\bigcap_{n=0}^{\infty} [a_n, b_n]] \cap A_i) = \mu(\bigcap_{n=0}^{\infty} f^{-1}[[a_n, b_n]] \cap A_i) = \mu(A_i),$$

pero la primera intersección se reduce a un punto $a \in \mathbb{R}$, luego $f$ es constante igual a $a$ en un conjunto de medida $\mu(A_i)$.

Esto significa que la aplicación $\mathbb{R}^n \longrightarrow L^p$ que a cada $x \in \mathbb{R}^n$ le asigna la clase de la función que en $A_i$ toma el valor $x_i$ es biyectiva, y claramente es un isomorfismo de espacios vectoriales, luego $L^p$ es un espacio vectorial topológico de Hausdorff de dimensión finita, luego, según el teorema 11.11, es topológicamente isomorfo a $\mathbb{R}^n$. ■

**Ejemplo: Los espacios $\ell^p$** El ejemplo más simple no trivial de espacios $L^p$ se obtiene considerando en $\mathbb{N}$ la medida de cómputo (introducida tras la definición B.11), respecto a la cual las funciones $x : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ integrables son las que determinan series $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ absolutamente convergentes. En este caso el espacio $\mathcal{L}^p$ se representa por $\ell^p$:

$$\ell^p = \{x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p < +\infty\}.$$

Como la medida de cómputo tampoco determina conjuntos nulos distintos del conjunto vacío, también podemos identificar $L^p$ con $\mathcal{L}^p$ en este caso, y para ambos se emplea la notación $\ell^p$. En particular,

$$\|x\|_p = \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p$$

(donde en el caso $p > 1$ hay que añadir un exponente $1/p$). En particular, $\ell^1$ y $\ell^2$ son los espacios introducidos en el ejemplo A.55. ■

El teorema siguiente generaliza a A.56:

**Teorema A.69** *Si $X$ es un espacio medida y $p > 0$, entonces $L^p$ es un espacio vectorial topológico completo.*

Demostración: Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en $L^p$. Basta probar que tiene una subsucesión convergente. Extrayendo una subsucesión podemos suponer que $\|f_{n+1} - f_n\|_p < 2^{-n}$. Sea

$$g_k = \sum_{n=1}^{k} |f_{n+1} - f_n|, \quad g = \sum_{n=1}^{\infty} |f_{n+1} - f_n|.$$

Claramente $\|g_k\|_p < 1$ y aplicando el lema de Fatou a $\{g_k^p\}_{k=1}^{\infty}$ concluimos que $\|g\|_p \leq 1$. En particular $g(x) < +\infty$ salvo en un conjunto de medida nula. Así pues, la serie

$$f(x) = f_1(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \big(f_{n+1}(x) - f_n(x)\big)$$

converge absolutamente salvo en un conjunto nulo. Definamos $f(x) = 0$ en los puntos donde no converja. Teniendo en cuenta quiénes son las sumas parciales de la serie, es claro que, salvo en un conjunto nulo,

$$f(x) = \lim_n f_n(x)$$

Veamos que $f \in L^p$ y que es el límite en $L^p$ de la sucesión dada. Dado $\epsilon > 0$ existe un $k$ tal que si $m$, $n \geq k$ entonces $\|f_n - f_m\|_p < \epsilon$. Por el lema de Fatou tenemos

$$\int_X |f - f_m|^p \, d\mu \leq \underline{\lim_n} \int_X |f_n - f_m|^p \, d\mu \leq \epsilon^p.$$

Esto significa que $\|f - f_m\|_p \leq \epsilon$, de donde $\|f\|_p \leq \|f_k\| + \epsilon$ y por lo tanto $f \in L^p$. También es claro ahora que $f$ es el límite en $L^p$ de la sucesión dada.

■

En la prueba del teorema anterior hemos visto lo siguiente:

**Teorema A.70** *Toda sucesión que converge en un espacio $L^p$ a una función $f$, tiene una subsucesión que converge puntualmente a $f$ salvo en un conjunto nulo.*

En particular $L^1$ es un espacio de Banach y $L^2$ es un espacio de Hilbert.

El ejemplo A.59 muestra que $\ell^1$ es el dual de $c_0$, mientras que el teorema siguiente prueba que no se cumple un hecho análogo para medidas no atómicas:

**Teorema A.71** *Si $X$ es un espacio medida no atómico, la bola cerrada unitaria de $L^p$ no tiene puntos extremos.*

DEMOSTRACIÓN: Si $f$ fuera un punto extremo, tendría que cumplir $\|f\| = 1$. Por el teorema B.36 sabemos que $\nu(A) = \int_X |f| \, d\mu$ es una medida no atómica en $X$, luego por [TC 7.62] existe $A \subset X$ tal que

$$\int_A |f| \, d\mu = \frac{1}{2}.$$

Ahora basta definir $g = 2f\chi_A$, $h = 2f\chi_{X\setminus A}$, de modo que $\|g\|_1 = \|h\|_1 = 1$ y $f = (1/2)g + (1/2)h$, luego $f$ no es un punto extremo. ■

Las observaciones tras el teorema de Alaoglu-Bourbaki implican que, en las condiciones del teorema anterior $L^1$ no es el dual de un espacio de Banach.

La razón por la que hemos introducido los espacios $L^p$ con $0 < p < 1$ es que cumplen el teorema siguiente:

**Teorema A.72** *Si $X$ es un espacio medida no atómico y $0 < p < 1$, entonces el único funcional lineal continuo $\phi : L^p \longrightarrow \mathbb{R}$ es la aplicación nula.*[9]

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que $\phi \neq 0$. Entonces $\phi$ es suprayectiva, luego existe $f \in L^p$ tal que $\phi(f) \geq 1$. Consideramos la medida $\nu(A) = \int_A |f|^p \, d\mu$, que es no atómica por B.36. El teorema [TC 7.62] nos da la existencia de un conjunto $A_0 \subset X$ tal que

$$\int_A |f|^p \, d\mu = \frac{1}{2} \int_X |f|^p \, d\mu.$$

[9]Este teorema usa AE porque se apoya en [TC 7.62], pero para casos particulares, como $X = [0, 1]$ con la medida de Lebesgue, la aplicación de [TC 7.62] puede sustituirse por un argumento elemental que no requiere AE.

Sea $A_1 = X \setminus A_0$ y sea $g_i = f\chi_{A_i}$, de modo que $f = g_0 + g_1$, $|f|^p = |g_0|^p + |g_1|^p$,

$$\int_X |g_0|^p \, d\mu = \int_{A_0} |f|^p \, d\mu = \frac{1}{2}\int_X |f|^p \, d\mu,$$

luego también

$$\int_X |g_1|^p \, d\mu = \frac{1}{2}\int_X |f|^p \, d\mu.$$

Como $\phi(f) \geq 1$, tiene que ser $\phi(g_i) \geq 1/2$ para algún $i = 0, 1$. Llamamos $f_1 = 2g_i$, con lo que $\phi(f_1) \geq 1$ y

$$\int_X |f_1|^p \, d\mu = 2^p \int_X |g_i|^p \, d\mu = 2^{p-1}\int_X |f|^p \, d\mu.$$

Repitiendo el proceso obtenemos una sucesión $\{f_n\}_{n=0}^\infty$ tal que $\phi(f_n) \geq 1$ y

$$d(f_n, 0) = \int_X |f_n|^p \, d\mu = (2^{p-1})^n \int_X |f|^p \, d\mu \longrightarrow 0,$$

con lo que debería ser $\lim\limits_n \phi(f_n) = 0$ y tenemos una contradicción. ■

El teorema de Hahn-Banch implica que, en las condiciones del teorema anterior, $L^p$ no es localmente convexo. Notemos que el teorema anterior no se aplica a los espacios $\ell^p$, pero éstos (siempre para $0 < p < 1$) tampoco son localmente convexos, de todos modos:

**Teorema A.73** *Si $X$ es un espacio medida y $0 < p < 1$, entonces $L^p$ es localmente convexo si y sólo si $\mu$ toma un número finito de valores.*

DEMOSTRACIÓN: Por el teorema A.68, si $\mu$ toma un número finito de valores entonces $L^p$ es topológicamente isomorfo a $\mathbb{K}^n$, luego es localmente convexo. Supongamos ahora que $\mu$ toma infinitos valores.

Por el teorema 12.11, podemos tomar una sucesión $\{Y_i\}_{i=0}^\infty$ de conjuntos medibles de medida finita tal que la sucesión $\{\mu(Y_i)\}_{i=0}^\infty$ sea monótona estricta. Si es estrictamente decreciente, cambiándola por $\{Y_0 \setminus Y_i\}_{i=0}^\infty$ podemos suponer que es estrictamente creciente. Pasando a una subsucesión podemos suponer que $\sum\limits_{i=0}^{k} \mu(Y_i) < \mu(Y_{k+1})$, luego cambiando $Y_k$ por $\bigcup\limits_{i=0}^{k} Y_i$ podemos suponer que $Y_i \subset Y_{i+1}$, y llamando $A_i = Y_{i+1} \setminus Y_i$ obtenemos una sucesión $\{A_i\}_{i=0}^\infty$ de conjuntos medibles disjuntos dos a dos tales que $\mu(A_i) > 0$.

Dado $\epsilon > 0$, sea $f_i = (\epsilon/\mu(A_i))^{1/p}\chi_{A_i}$, de modo que $\int_X |f_i|^p \, d\mu = \epsilon$, lo que equivale a que $d(f_i, 0) = \epsilon$.

Por otra parte, sea $g_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} f_i$. Como las funciones $f_i$ son no nulas en conjuntos disjuntos, es claro que

$$\int_X |g_n|^p \, d\mu = \frac{1}{n^p}\sum_{i=1}^{n}\int_X |f_i|^p \, d\mu = \epsilon n^{1-p},$$

luego $d(g_n, 0) = \epsilon n^{1-p}$.

Así, si $L^p$ fuera localmente convexo, la bola $B_1(0)$ contendría un entorno de 0 convexo $U$, el cual contendría una bola $B_{2\epsilon}(0) \subset U \subset B_1(0)$, luego $f_i \in U$ para todo $i$, luego por convexidad $g_n \in U \subset B_1(0)$ para todo $n$, pero, como $0 < p < 1$, tomando un $n$ suficientemente grande podemos hacer que $d(g_n, 0) = \epsilon n^{1-p} > 1$, con lo que tenemos una contradicción. ■

Veamos ahora que el dual de $\ell^p$ dista mucho de ser nulo:

**Teorema A.74** *Si $0 < p \leq 1$, la aplicación $\phi : \ell^\infty \longrightarrow (\ell^p)'$ dada por*

$$\phi(x)(y) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i y_i$$

*es un isomorfismo y se convierte en una isometría si en $(\ell^p)'$ consideramos la norma dada por*

$$\|f\| = \sup\{|f(y)| \mid \|y\|_p \leq 1\} = \sup\{|f(y)| \mid \|y\|_p = 1\}.$$

Demostración: Observemos en primer lugar que $\ell^p \subset \ell^1$ y $\|y\|_1 \leq \|y\|_p^{1/p}$.

En efecto, si $y \in \ell^p$, tenemos que $|y_i| \leq \|y\|_p^{1/p}$, luego $\|y\|_p^{-1/p}|y_i| \leq 1$ y, como la función $a^x$ es decreciente cuando $0 < a < 1$, tenemos que

$$\|y\|_p^{-1/p}|y_i| \leq \|y\|_p^{-1}|y_i|^p,$$

luego al sumar resulta que $\|y\|_p^{-1/p}\|y\|_1 \leq 1$.

Ahora observamos que la serie que define a $\phi(x)(y)$ es absolutamente convergente, pues

$$|\phi(x)(y)| \leq \sum_{i=0}^{\infty} |x_i y_i| \leq \|x\|_\infty \sum_{i=0}^{\infty} |y_i| \leq \|x\|_\infty \|y\|_1 \leq \|x\|_\infty \|y\|_p^{1/p}.$$

Es claro que $\phi(x)$ es un funcional lineal. Para probar que es continuo basta ver que lo es en 0, pero dado $\epsilon > 0$, basta tomar $\delta = (\epsilon/\|x\|_\infty)^p$ y así, si $\|y\|_p < \delta$, se cumple que $|\phi(x)(y)| < \epsilon$.

Es obvio que $\phi$ es lineal e inyectiva. Para probar que es suprayectiva tomamos $f \in (\ell^p)'$ y definimos $x_i = f(e_i)$, donde $e_i$ es la sucesión que tiene un 1 en la posición $i$-ésima y los demás términos nulos. Dado $y \in \ell^p$, tenemos que

$$\|y - \sum_{i=0}^{n} y_i e_i\|_p = \|\sum_{i=n+1}^{\infty} y_i\|_p = \sum_{i=n+1}^{\infty} |y_i|^p \to 0,$$

luego $y = \sum\limits_{i=0}^{\infty} y_i e_i$ y, por la continuidad de $f$,

$$f(y) = \sum_{i=0}^{\infty} y_i f(e_i) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i y_i.$$

Si probamos que $x \in \ell^\infty$, tendremos que $f = \phi(x)$. Ahora bien, si $x$ no estuviera acotado, podríamos formar una subsucesión $\{x_{i_k}\}_{k=0}^\infty$ tal que $|x_{i_k}| \geq 2^k$. Consideramos entonces $y = \sum\limits_{i=0}^{\infty} \operatorname{signo}(x_{i_k})(1/2^k)e_{i_k}$. Claramente,

$$\|y\|_p = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{pk}} = \frac{1}{1-1/2^p},$$

luego $y \in \ell^p$, pero $x_{i_k}y_{i_k} \geq 1$, luego la serie $\sum\limits_{i=0}^{\infty} x_i, y_i$ no puede converger, y tenemos una contradicción.

Con esto tenemos probado que $\phi$ es un isomorfismo. Además,

$$|x_i| = |\phi(x)(e_i)| \leq \sup\{|\phi(x)(y)| \mid \|y\|_p = 1\} \leq$$

$$\sup\{|\phi(x)(y)| \mid \|y\|_p \leq 1\} \leq \|x\|_\infty,$$

luego $\|\phi(x)\| = \|x\|_\infty$, y el hecho de que la norma que hemos definido en $(\ell^p)'$ se corresponda a través de $\phi$ con la norma de $\ell^\infty$ prueba que es realmente una norma con la que $(\ell^p)'$ se convierte en un espacio de Banach. ■

Vemos así que $(\ell^p)'$ separa puntos en $\ell^p$, por lo que $(\ell^p, (\ell^p)')$ es un par dual aunque $\ell^p$ no sea localmente convexo. Es fácil ver que la topología inducida por la norma en $(\ell^p)'$ es la topología fuerte $\beta((\ell^p)', \ell^p)$, es decir, la topología de la convergencia uniforme en los subconjuntos acotados de $\ell^p$.

# Apéndice B

# Preliminares algebraicos y analíticos

Recogemos en este apéndice los resultados que necesitamos para el estudio de los grupos y espacios vectoriales topológicos, espacios normados, etc. Partimos de los conceptos básicos presentados en la sección 1.7 de [TC]. En particular, allí se introducen las estructuras de anillo y cuerpo.

## B.1 Grupos y espacios vectoriales

**Definición B.1** Un *grupo* es un par $(G, \cdot)$, donde $G$ es un conjunto y $\cdot$ es una ley de composición interna en $G$ que cumple las propiedades siguientes:

1. $g_1(g_2g_3) = (g_1g_2)g_3$,
2. Existe $1 \in G$ tal que $g \cdot 1 = 1 \cdot g = g$,
3. Para cada $g \in G$ existe $g^{-1} \in G$ tal que $gg^{-1} = g^{-1}g = 1$,

donde $g$, $g_1$, etc. son elementos arbitrarios de $G$. Si además se cumple

4. $g_1g_2 = g_2g_1$

se dice que el grupo es *abeliano.*

Notemos que el elemento neutro 1 es único, pues si hubiera otro $1'$, tendríamos que $1 = 1 \cdot 1' = 1'$. El inverso $g^{-1}$ de cada elemento también lo es, pues si hubiera otro $g^*$, sería

$$g^{-1} = g^{-1} \cdot 1 = g^{-1}gg^* = 1 \cdot g^* = g^*.$$

Normalmente escribiremos $G$ en lugar de $(G, \cdot)$, sobrentendiendo que $\cdot$ representa la operación del grupo, que será distinta en cada caso. No obstante, para grupos abelianos es frecuente usar también la *notación aditiva,* consistente en representar por $+$ la operación, por 0 al elemento neutro y por $-x$ al inverso (en cuyo caso es más habitual llamarlo *opuesto*).

**Definición B.2** Si $K$ es un cuerpo, un *espacio vectorial* sobre $K$ es una terna $(V, +, \cdot)$, donde $+ : V \times V \longrightarrow V$ es una ley de composición interna en $V$ y $\cdot : K \times V \longrightarrow V$ es lo que se denomina una *ley de composición externa*,[1] de modo que se cumplan las propiedades siguientes:

1. $(v_1 + v_2) + v_3 = v_1 + (v_2 + v_3)$,
2. $v_1 + v_2 = v_2 + v_1$,
3. Existe un elemento $0 \in V$ tal que $v + 0 = v$ para todo $v \in V$,
4. Para todo $v \in V$ existe $-v \in V$ tal que $v + (-v) = 0$,
5. $\alpha(v_1 + v_2) = \alpha v_1 + \alpha v_2$,
6. $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$,
7. $\alpha(\beta v) = (\alpha\beta)v$,
8. $1 \cdot v = v$,

donde $v, v_1$, etc. son vectores arbitrarios y $\alpha, \beta$, etc. son escalares arbitrarios.

Observemos que las cuatro primeras propiedades expresan que $(V, +)$ es un grupo abeliano, lo cual implica en particular que el elemento neutro 0 y los opuestos $-v$ son únicos. Como en el caso de los grupos, escribiremos $V$ en lugar de $(V, +, \cdot)$. He aquí algunas consecuencias inmediatas de la definición:

1. Se cumple que $0 \cdot v = 0$ y $\alpha \cdot 0 = 0$.

   En efecto, $0 \cdot v = (0 + 0) \cdot v = 0 \cdot v + 0 \cdot v$, luego, sumando $-(0 \cdot v)$ a ambos miembros, resulta que $0 \cdot v = 0$. La segunda igualdad se prueba de forma análoga.

2. Se cumple que $-v = (-1) \cdot v$, pues
$$v + (-1)v = 1 \cdot v + (-1) \cdot v = (1 - 1) \cdot v = 0 \cdot v = 0.$$

3. Si $\alpha v = 0$, o bien $\alpha = 0$, o bien $v = 0$.

   En efecto, si $\alpha \neq 0$, entonces $v = \alpha^{-1}\alpha v = \alpha^{-1}0 = 0$.

**Ejemplos** Si $A$ es un anillo (en particular si es un cuerpo) es claro que $(A, +)$ es un grupo abeliano. Si $K$ es un cuerpo y $K^* = K \setminus \{0\}$, entonces $(K^*, \cdot)$ es también un grupo abeliano y $(K, +, \cdot)$ es también un $K$-espacio vectorial.

[1] Aunque en este caso la operación recibe el nombre de *producto por un escalar*, porque en este contexto es habitual llamar *vectores* a los elementos de $V$ y *escalares* a los elementos de $K$.

Si $K$ es un cuerpo y $\{V_i\}_{i\in I}$ es una familia de $K$-espacios vectoriales, es claro que el producto cartesiano $\prod_{i\in I} V_i$ es también un $K$-espacio vectorial con las operaciones definidas componente a componente, es decir,

$$(v_i)_{i\in I} + (v'_i)_{i\in I} = (v_i + v'_i)_{i\in I}, \qquad \alpha(v_i)_{i\in I} = (\alpha v_i)_{i\in I}.$$

En particular, si todos los espacios vectoriales $V_i$ son un mismo espacio $V$, tenemos una estructura de espacio vectorial en el conjunto $V^I$ de todas las aplicaciones $f : I \longrightarrow V$. En estos términos, las operaciones vienen dadas por

$$(f + g)(i) = f(i) + g(i), \qquad (\alpha f)(i) = \alpha\, f(i).$$

Si tomamos como $I$ el conjunto $I_n = \{1, \ldots, n\}$, tenemos el espacio $V^n$ y, si representamos sus elementos como $n$-tuplas, las operaciones se expresan en la forma

$$(v_1, \ldots, v_n) + (v'_1, \ldots, v'_n) = (v_1 + v'_1, \ldots, v_n + v'_n),$$
$$\alpha(v_1, \ldots, v_n) = (\alpha v_1, \ldots, \alpha v_n).$$

En particular tenemos una estructura de espacio vectorial en los productos $K^n$. El lector debería conocer la interpretación geométrica de $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, que permite identificar a estos espacios vectoriales con los puntos de una recta, de un plano o del espacio, respectivamente.

De forma completamente análoga podemos dotar de estructura de grupo al producto cartesiano $\prod_{i\in I} G_i$ de una familia de grupos, o al conjunto $G^I$ de las aplicaciones de un conjunto $I$ en un grupo (cambiando las sumas por productos en la construcción anterior si queremos emplear la notación multiplicativa y prescindiendo del producto por escalares). ■

**Subestructuras, homomorfismos y cocientes** Ahora desarrollamos paralelamente en los contextos de la teoría de grupos y de la teoría de espacios vectoriales los conceptos de subgrupo / subespacio vectorial y los de homomorfismo de grupos y de espacios vectoriales (aplicaciones lineales):

**Definición B.3** Un *subgrupo* $H$ de un grupo $G$ es un subconjunto que cumple:

1. $1 \in H$.
2. Si $h_1$, $h_2 \in H$, $h_1h_2 \in H$.
3. Si $h \in H$, $h^{-1} \in H$.

De aquí se sigue inmediatamente que $H$ admite una estructura de grupo con la restricción de la operación de $G$.

Un *subespacio vectorial* $W$ de un $K$-espacio vectorial $V$ es un subconjunto que cumple:

1. $0 \in W$.
2. Si $w_1$, $w_2 \in W$, $w_1 + w_2 \in W$.
3. Si $w \in W$ y $\alpha \in K$, $\alpha w \in W$.

De aquí se sigue inmediatamente que $W$ admite una estructura de espacio vectorial con las restricciones de las operaciones de $V$.

Notemos que todo grupo $G$ admite siempre como subgrupos al propio $G$ y al subgrupo trivial $1 = \{1\}$ y, análogamente, todo espacio vectorial $V$ admite siempre como subespacios vectoriales al propio $V$ y al subespacio nulo $0 = \{0\}$.

Una aplicación $f : G \longrightarrow H$ entre dos grupos es un *homomorfismo de grupos* si cumple $f(g_1g_2) = f(g_1)f(g_2)$ para todo $g_1,\, g_2 \in G$.

De aquí se sigue que $f(1) = 1$, pues $f(1) = f(1 \cdot 1) = f(1)f(1)$, y por lo tanto $f(1) = 1$.

Igualmente, $f(g^{-1}) = f(g)^{-1}$, pues

$$f(g)f(g^{-1}) = f(gg^{-1}) = f(1) = 1,$$

luego $f(g^{-1}) = f(g)^{-1}$.

También es fácil ver que si $f : G \longrightarrow H$ es un homomorfismo de grupos, $G_0$ es un subgrupo de $G$ y $H_0$ es un subgrupo de $H$, entonces $f[G_0]$ es un subgrupo de $H$ y $f^{-1}[H_0]$ es un subgrupo de $G$.

En particular, se definen el *núcleo* y la *imagen* de un homomorfismo $f$ como

$$\mathrm{N}(f) = f^{-1}[\{1\}], \quad \mathrm{Im}\, f = f[G],$$

que son subgrupo de $G$ y $H$, respectivamente.

Un homomorfismo de grupos es un *monomorfismo, epimorfismo* o *isomorfismo* de grupos si es, respectivamente, inyectivo, suprayectivo o biyectivo.

Se comprueba sin dificultad que la composición de homomorfismos de grupos es un homomorfismo de grupos, así como que el inverso de un isomorfismo es un isomorfismo.

Una aplicación $f : V \longrightarrow W$ entre dos $K$-espacios vectoriales es *lineal* si:

1. $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$, para $v_1,\, v_2 \in V$.
2. $f(\alpha v) = \alpha f(v)$, para $v \in V$ y $\alpha \in K$.

Las aplicaciones lineales son también homomorfismos de grupos, luego cumplen $f(0) = 0$. En este caso, la propiedad $f(-v) = -f(v)$ es consecuencia directa de la propiedad 2.

También es fácil ver que si $f : V \longrightarrow W$ es lineal, $V_0$ es un subespacio de $V$ y $W_0$ es un subespacio de $W$, entonces $f[V_0]$ es un subespacio de $W$ y $f^{-1}[W_0]$ es un subespacio de $V$.

En particular, se definen el *núcleo* y la *imagen* de una aplicación lineal $f$ como

$$\mathrm{N}(f) = f^{-1}[\{0\}], \quad \mathrm{Im}\, f = f[V],$$

que son subgrupo de $V$ y $W$, respectivamente.

Una aplicación lineal es un *monomorfismo, epimorfismo* o *isomorfismo* de espacios vectoriales si es, respectivamente, inyectiva, suprayectiva o biyectiva.

Se comprueba sin dificultad que la composición de aplicaciones lineales es lineal, así como que el inverso de un isomorfismo es un isomorfismo.

**Espacios de aplicaciones lineales** Si llamamos $L(V, W)$ al conjunto de todas las aplicaciones lineales entre dos $K$-espacios vectoriales $V$ y $W$, es fácil comprobar que se trata de un subespacio vectorial del espacio $W^V$ de todas las aplicaciones de $V$ en $W$. ■

**Congruencias** Todo subgrupo $H$ de un grupo $G$ determina dos relaciones de equivalencia en $G$, la *congruencia por la izquierda* y *por la derecha módulo* $H$, dadas por:

$$g_1 \equiv_i g_2 \ (\text{mód } H) \leftrightarrow g_1^{-1}g_2 \in H, \qquad g_1 \equiv_d g_2 \ (\text{mód } H) \leftrightarrow g_1g_2^{-1} \in H.$$

Es fácil comprobar que la clase de equivalencia de $g$ para la congruencia izquierda es $gH$, mientras que su clase de equivalencia para la congruencia derecha es $Hg$. Obviamente, si $G$ es un grupo abeliano las dos relaciones coinciden y tenemos una única relación de congruencia módulo $H$, pero en general no tiene por qué ser así.

Se dice que un subgrupo $H$ de un grupo $G$ es *normal* si la congruencia izquierda módulo $H$ coincide con la congruencia derecha. Esto equivale a que $gH = Hg$ para todo $g \in G$, o también a que $g^{-1}Hg = H$ para todo $g \in G$.

Es costumbre escribir $h^g = g^{-1}hg$, y se dice que $h^g$ es el *conjugado* de $h$ por $g$. Notemos que la conjugación $h \mapsto h^g$ es un isomorfismo del grupo $G$ en sí mismo. En estos términos, un subgrupo $H$ es normal si $H^g = H$, es decir, si es invariante por conjugación.

Obviamente, los subgrupos impropios 1 y $G$ son subgrupos normales de $G$.

Representaremos por $(G/H)_i$ y $(G/H)_d$ los conjuntos cociente respecto de la congruencia izquierda y derecha, respectivamente. Cuando $H$ sea normal escribiremos simplemente $G/H$.

Observemos que la aplicación $f : (G/H)_i \longrightarrow (G/H)_d$ dada por $gH \mapsto Hg^{-1}$ es biyectiva. En particular, un cociente es finito si y sólo si lo es el otro.

En efecto, la aplicación está bien definida, pues si $g_1H = g_2H$, entonces $g_1^{-1}g_2 \in H$, luego también $g_2^{-1}g_1 \in H$, luego $Hg_1^{-1} = Hg_2^{-1}$. Igualmente se prueba que es inyectiva, y obviamente es suprayectiva.

Observemos que si $f : G \longrightarrow H$ es un homomorfismo de grupos y $N$ es un subgrupo normal de $H$, entonces $f^{-1}[N]$ es un subgrupo normal de $G$.

En efecto, si $n \in f^{-1}[N]$ y $g \in G$, entonces $f(n^g) = f(n)^{f(g)} \in N^{f(g)} = N$, luego $n^g \in f^{-1}[N]$.

En particular, el núcleo $\mathrm{N}(f) = f^{-1}[1]$ es un subgrupo normal de $G$.

**Cocientes** Si $H$ es un subgrupo normal de $G$, el cociente $G/H$ adquiere estructura de grupo con la operación dada por $(Hg_1)(Hg_2) = Hg_1g_2$.

Lo único que no es inmediato es que la operación está bien definida, en el sentido de que si $Hg_1 = Hg_1'$ y $Hg_2 = Hg_2'$, entonces $Hg_1g_2 = Hg_1'g_2'$. En efecto:

$$g_1g_2(g_1'g_2')^{-1} = g_1g_2g_2'^{-1}g_1'^{-1} = (g_1g_1'^{-1})g_1'(g_2g_2'^{-1})g_1'^{-1} = h_1h_2^{g_1'^{-1}} \in H.$$

La comprobación de que la operación cumple la definición de grupo es inmediata.[2] La proyección $p : G \longrightarrow G/H$ es claramente un epimorfismo de grupos.

Si $W$ es un subespacio vectorial de un espacio vectorial $V$, en particular es un subgrupo, trivialmente normal, porque $V$ es un grupo abeliano, luego tenemos definido el grupo cociente $V/W$, pero éste admite una estructura de espacio vectorial sin más que definir $\alpha(v + W) = \alpha v + W$.

De nuevo, la definición es correcta, porque si $v_1 + W = v_2 + W$, entonces $v_1 - v_2 \in W$, luego $\alpha(v_1 - v_2) \in W$ y $\alpha v_1 + W = \alpha v_2 + W$, y a partir de ahí es inmediato que se cumple la definición de espacio vectorial y la proyección $p : V \longrightarrow V/W$ es un epimorfismo de espacios vectoriales.

**Teorema B.4 (Teorema de isomorfía)** *Si $f : G \longrightarrow H$ es un homomorfismo de grupos, existe un único isomorfismo $\bar{f} : G/\operatorname{N}(f) \longrightarrow \operatorname{Im} f$ que hace conmutativo el diagrama*

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & H \\
G/\operatorname{N}(f) \arrow[r, "\bar{f}"'] & \operatorname{Im} f \arrow[u, "i"']
\end{tikzcd}$$

Demostración: Basta definir $\bar{f}(\operatorname{N}(f)g) = f(g)$. La definición es correcta, porque si $g_1 g_2^{-1} \in \operatorname{N}(f)$, entonces $f(g_1 g_2^{-1}) = 1$, luego $f(g_1) = f(g_2)$. La comprobación de que es un isomorfismo de grupos es trivial. ■

El teorema de isomorfía vale igualmente para espacios vectoriales, y entonces el isomorfismo es de hecho un isomorfismo de espacios vectoriales.

**Bases y dimensión en espacios vectoriales** Remitimos al apéndice A de [TC] para una discusión de los conceptos de base y dimensión en espacios vectoriales. Notemos en particular el resultado siguiente:

**Teorema B.5** *Todo $K$-espacio vectorial de dimensión $n$ es isomorfo a $K^n$.*

Demostración: Sea $V$ un espacio vectorial de dimensión $n$, sea $v_1, \ldots, v_n$ una base de $V$ y sea $f : K^n \longrightarrow V$ la única aplicación lineal que cumple $f(e_i) = v_i$, donde $e_1, \ldots, e_n$ es la base canónica de $K^n$. Esto significa que $f(x) = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n$. La unicidad de la expresión de los elementos de $V$ como combinaciones lineales de la base dada implica que $f$ es biyectiva, luego es un isomorfismo de $K$-espacios vectoriales. ■

[2] Notemos que la condición de que $H$ sea un subgrupo normal es necesaria, pues si la operación está bien definida, $h \in H$ y $g \in G$, tenemos que $(Hg^{-1})(Hh) = (Hg^{-1})(H1)$, luego $Hg^{-1}h = Hg^{-1}$, luego $g^{-1}hg \in H$, luego $H^g \subset H$, e igualmente $H^{g^{-1}} \subset H$, que equivale a $H \subset H^g$.

**Variedades afines** Si $V$ es un $K$-espacio vectorial, una *variedad afín* en $V$ es un conjunto de la forma $A = v + W$, donde $W$ es un subespacio vectorial de $V$.

Notemos que $W$ está unívocamente determinado por $A$, pues $W = A - x$, para cualquier $x \in A$. En efecto, todo $x \in A$ es de la forma $x = v + w$, con $w \in W$, por lo que $A - x = W + x - x - w = W - w = W$.

Esto nos permite definir la *dimensión* de una variedad afín como la dimensión de su subespacio vectorial asociado. Conviene considerar a $\varnothing$ como variedad afín (de dimensión $-1$). Con este convenio se cumple que la intersección de cualquier familia de variedades afines en un espacio vectorial $V$ es una variedad afín.

En efecto, si $\mathcal{F}$ es una familia de variedades afines en $V$ y $A = \bigcap \mathcal{F}$, o bien $A = \varnothing$, en cuyo caso es una variedad afín por definición, o bien existe $v \in A$, en cuyo caso $A - v = \bigcap\limits_{W \in \mathcal{F}} (W - v)$, que es un subespacio vectorial de $V$, por ser intersección de subespacios. Por lo tanto $A$ es una variedad afín.

## B.2 Conjuntos convexos

Recordemos nuestro convenio de usar la letra $\mathbb{K}$ para referirnos indistintamente a $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. En esta sección consideraremos únicamente espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$.

**Definición B.6** Si $V$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, un conjunto $C \subset V$ es *convexo* si cuando $x, y \in C$ y $0 \leq \lambda \leq 1$, se cumple que $(1 - \lambda)x + \lambda y \in C$.

En $\mathbb{R}^n$, cuando $\lambda$ recorre el intervalo $[0, 1]$, la expresión $(1-\lambda)x+\lambda y$ recorre el segmento de extremos $x$ e $y$, por lo que la interpretación geométrica de la convexidad es que un conjunto es convexo cuando al unir con un segmento dos cualesquiera de sus puntos no nos salimos del conjunto.

Notemos que el conjunto vacío cumple trivialmente la definición de convexidad, al igual que $V$ o, más en general, cualquier subespacio vectorial de $V$. También se sigue inmediatamente de la definición que las imágenes y las antiimágenes de conjuntos convexos por aplicaciones lineales son convexas.

También es inmediato que la intersección de cualquier familia de subconjuntos convexos de $V$ es convexa, por lo que si $A \subset V$ es un subconjunto cualquiera, podemos definir su *envoltura convexa* como la intersección $\operatorname{co}(X)$ de todos los subconjuntos convexos de $V$ que contienen a $A$, y es, por consiguiente, el menor subconjunto convexo de $V$ que contiene a $A$. Podemos encontrar una expresión explícita para sus elementos:

**Teorema B.7 (Carathéodory)** *Si $V$ es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y $A \subset V$, entonces $\operatorname{co}(A)$ está formado por los vectores de la forma $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i a_i$, donde $a_i \in A$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$ y $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$. Más aún, si $V$ tiene dimensión finita $d$ sobre $\mathbb{R}$, podemos tomar $n \leq d + 1$.*

Demostración: Llamemos $C$ al conjunto de todos los elementos de $V$ de la forma indicada. Veamos que todos ellos están en $\mathrm{co}(A)$ por inducción sobre $n$. Para $n = 1$ es trivial, pues son elementos de $A$ y, si vale para $n$ y tenemos un elemento de la forma $\sum\limits_{i=1}^{n+1} \lambda_i a_i$, llamamos $\lambda = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i$ y, si $\lambda > 0$, podemos expresar

$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i a_i = \lambda \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i/\lambda) a_i + (1-\lambda) a_n,$$

donde $\sum\limits_{i=1}^{n} (\lambda_i/\lambda) \in \mathrm{co}(A)$ por hipótesis de inducción y la expresión completa está en $\mathrm{co}(A)$ por definición de conjunto convexo. Si $\lambda = 0$ la expresión coincide con $a_{n+1}$, que está en $A \subset \mathrm{co}(A)$.

Así pues, $C \subset \mathrm{co}(A)$, y es claro que $A \subset C$. Recíprocamente, es inmediato comprobar que $C$ cumple la definición de conjunto convexo, pues si tenemos

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i, \quad \sum_{i=1}^{n} \mu_i b_i \in C$$

y $0 \leq \lambda \leq 1$ (notemos que no perdemos generalidad por tomar el mismo $n$ para las dos expresioens), entonces

$$(1-\lambda) \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i + \lambda \sum_{i=1}^{n} \mu_i b_i \in C,$$

pues

$$(1-\lambda) \sum_{i=1}^{n} \lambda_i + \lambda \sum_{i=1}^{n} \mu_i = 1 - \lambda + \lambda = 1.$$

Por lo tanto, $\mathrm{co}(A) \subset C$ y tenemos la igualdad.

Supongamos ahora que $V$ tiene dimensión $d$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial y, dado $a \in \mathrm{co}(A)$, consideremos una expresión $a = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i a_i$ con $n$ mínimo y supongamos que $n \geq d+2$.

Necesariamente, los puntos $a_i$ son distintos dos a dos, y $a_n - a_1, \ldots, a_2 - a_1$ son al menos $d+1$ vectores distintos, luego son linealmente dependientes, es decir, existen escalares $\alpha_i \in \mathbb{R}$, no todos nulos, tales que

$$\sum_{i=2}^{n} \alpha_i (a_i - a_1) = 0.$$

Llamando $\alpha_1 = -\sum\limits_{i=2}^{n} \alpha_i$, tenemos que

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i = 0, \qquad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 0,$$

y no todos los $\alpha_i$ son nulos. Reordenando los vectores podemos suponer que $\alpha_n \neq 0$ y que $\lambda_n/\alpha_n$ es el menor de todos los cocientes $\lambda_i/\alpha_i$ con $\alpha_i \neq 0$. Entonces

$$a = \sum_{i=1}^{n-1} \left( \lambda_i - \frac{\lambda_n}{\alpha_n} \alpha_i \right) a_i + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\lambda_n}{\alpha_n} \alpha_i a_i + \lambda_n a_n,$$

pero los dos últimos términos suman 0 y $\beta_i = \lambda_i - (\lambda_n/\alpha_n)\alpha_i \geq 0$ por la minimalidad de $\lambda_n/\alpha_n$. Además

$$\sum_{i=1}^{n-1} \beta_i = \lambda_n + \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i - (\lambda_n + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\lambda_n}{\alpha_n}\alpha_i) = 1 - \frac{\lambda_n}{\alpha_n}(\alpha_n + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i) = 1,$$

luego la expresión

$$a = \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i a_i, \qquad \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i = 1$$

contradice la minimalidad de $n$. ■

**Teorema B.8** *Si $V$ es un espacio vectorial y $A$, $B \subset V$, entonces*

$$\operatorname{co}(A + B) = \operatorname{co}(A) + \operatorname{co}(B).$$

DEMOSTRACIÓN: Un punto de $\operatorname{co}(A + B)$ es de la forma

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i \in \operatorname{co}(A) + \operatorname{co}(B).$$

Recíprocamente, si

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i \in \operatorname{co}(A) \qquad \sum_{j=1}^{n} \mu_j b_j \in \operatorname{co}(B),$$

entonces

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i + \sum_{j=1}^{n} \mu_j b_j = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \sum_{j=1}^{n} \mu_j a_i + \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \mu_j b_j = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \lambda_i \mu_j (a_i + b_j)$$

está en $\operatorname{co}(A + B)$, pues $\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \lambda_i \mu_j = 1$. ■

## B.3 Medidas

El concepto de "medida" axiomatiza las nociones intuitivas de "longitud", "área" o "volumen" de una figura geométrica. Por desgracia, no es posible asignar de forma razonable un "volumen" a todos los subconjuntos de un conjunto dado, ni siquiera en el caso de $\mathbb{R}^n$. Ello nos obliga a considerar familias de subconjuntos en las que sí que es posible hacerlo y que, a la vez, sean lo suficientemente amplias para trabajar cómodamente en ellas:

**Definición B.9** Una *$\sigma$-álgebra* en un conjunto $X$ es una familia $\mathcal{A}$ de subconjuntos de $X$ que cumpla las propiedades siguientes:

1. $\varnothing$, $X \in \mathcal{A}$,
2. Si $A \in \mathcal{A}$, entonces $X \setminus A \in \mathcal{A}$,
3. Si $\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una familia de elementos de $\mathcal{A}$, entonces $\bigcup\limits_{n=0}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

Notemos que las propiedades 2) y 3) implican que, en las condiciones de 3), también se cumple que $\bigcap\limits_{n=0}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

Una *medida* en una $\sigma$-álgebra $\mathcal{A}$ es una aplicación $\mu : \mathcal{A} \longrightarrow [0, +\infty]$ que cumpla las propiedades siguientes:

1. $\mu(\varnothing) = 0$,
2. Si $\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una familia de elementos de $\mathcal{A}$ disjuntos dos a dos, entonces

$$\mu\Big(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\Big) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n),$$

donde hay que entender que la suma toma el valor $+\infty$ si alguno de sus términos es $+\infty$ o, en caso contrario, si la sucesión de sumas parciales converge a $+\infty$.

Un *espacio medida* es una terna $(X, \mathcal{A}, \mu)$, donde $X$ es un conjunto, $\mathcal{A}$ una $\sigma$-álgebra en $X$ y $\mu$ una medida en $\mathcal{A}$. Los elementos de $\mathcal{A}$ se llaman *conjuntos medibles.* Los conjuntos de medida 0 se llaman también *conjuntos nulos.*

Notemos que en toda $\sigma$-álgebra podemos definir la *medida nula,* respecto de la cual todos los conjuntos son nulos.

Si $X$ es un espacio medida y $E$ es un subconjunto medible, entonces los subconjuntos medibles de $E$ forman una $\sigma$-álgebra de subconjuntos de $E$ y la medida de $X$ restringida a esta $\sigma$-álgebra es una medida en $E$. En lo sucesivo consideraremos a todos los subconjuntos medibles de los espacios medida como espacios medida de esta manera.

**Nota** Las $\sigma$-álgebras que hemos introducido aquí son un caso particular de álgebras de Boole en el sentido de [TC 7.1], y las medidas son un caso particular de las definidas en [TC 7.57]. El teorema siguiente es un caso particular de [TC 7.58], pero repetimos las demostraciones por completitud. ■

En lo sucesivo adoptaremos el convenio según el cual, si $a \in \mathbb{R}$, entonces $a + \infty = +\infty + \infty = +\infty$.

**Teorema B.10** *$\mu$ una medida en una $\sigma$-álgebra $\mathcal{A}$ sobre un conjunto $X$.*

1. *Si $A$ y $B$ son conjuntos medibles disjuntos $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$.*
2. *Si $A \subset B$ son medibles entonces $\mu(A) \leq \mu(B)$.*
3. *Si $A \subset B$ son medibles y $\mu(A) < +\infty$, entonces $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$.*
4. *Si $A$ y $B$ son medibles entonces $\mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B)$.*
5. *Si $\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$ son medibles y $\bigcup\limits_{n=0}^{\infty} A_n$ también lo es, entonces*

$$\mu\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n).$$

6. *Si* $\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$ *y* $\bigcup\limits_{n=0}^{\infty} A_n$ *son medibles y cada* $A_n \subset A_{n+1}$*, entonces*

$$\mu\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right) = \sup_n \mu(A_n).$$

7. *Si* $\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$ *y* $\bigcap\limits_{n=0}^{\infty} A_n$ *son medibles, cada* $A_{n+1} \subset A_n$ *y* $\mu(A_0) < +\infty$*, entonces*

$$\mu\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n\right) = \operatorname{ínf}_n \mu(A_n).$$

Demostración: 1) se sigue de la definición de medida aplicada a la sucesión de conjuntos medibles disjuntos $A$, $B$, $\varnothing$, $\varnothing, \ldots$

2) Se sigue de 1) aplicado a $B = A \cup (B \setminus A)$.

3) Si $\mu(B \setminus A) = +\infty$ es trivial, y en caso contrario se sigue de 1).

4) $\mu(A \cup B) = \mu(A \cup (B \setminus A)) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \leq \mu(A) + \mu(B)$.

5) Definimos $B_n = A_n \setminus \bigcup\limits_{i=0}^{n-1} A_i$ (entendiendo que $B_0 = A_0$), de modo que $B_n \in \mathcal{A}$, $\bigcup\limits_{n=0}^{\infty} B_n = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ y los conjuntos $B_n$ son disjuntos dos a dos. Por consiguiente,

$$\mu\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(B_n) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n).$$

6)) En este caso basta definir $B_n = A_n \setminus A_{n-1}$, con lo que

$$\mu\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(B_n) = \mu(A_0) + \lim_k \sum_{n=1}^{k} (\mu(A_n) - \mu(A_{n-1}))$$

$$= \lim_k \mu(A_k) = \sup_k \mu(A_k),$$

donde la última igualdad se debe a que la sucesión $\mu(A_k)$ es monótona creciente.

7) Aplicamos la propiedad anterior a los conjuntos $B_n = A_0 \setminus A_n$. Así $\bigcup\limits_{n=0}^{\infty} B_n = A_0 \setminus \bigcap\limits_{n=0}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$, luego

$$\mu(A_0) \setminus \mu\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} B_n\right) = \sup_n \mu(B_n) = \mu(A_0) - \operatorname{ínf}_n \mu(A_n),$$

de donde se sigue la conclusión. ■

**Definición B.11** Una medida es *finita* (resp. $\sigma$-finita) si $\mu(X) < +\infty$ (resp. si $X$ es unión numerable de conjuntos de medida finita), lo cual equivale a que todos los conjuntos medibles tengan medida finita (resp. sean unión numerable de conjuntos de medida finita).

**Ejemplo: La medida de cómputo** La aplicación $m : \mathcal{P}\mathbb{N} \longrightarrow [0, +\infty]$ dada por

$$\mu(A) = \begin{cases} |A| & \text{si } A \text{ es finito,} \\ +\infty & \text{si } A \text{ es infinito,} \end{cases}$$

es claramente una medida $\sigma$-finita en $\mathbb{N}$ respecto a la que todo subconjunto de $\mathbb{N}$ es medible y en la que $\varnothing$ es el único conjunto de medida nula. ■

**Unicidad de medidas** Presentamos ahora un resultado que nos permitirá probar varios resultados de unicidad de medidas:

**Definición B.12** Una familia $\mathcal{D}$ de subconjuntos de un conjunto $X$ es una *clase de Dynkin* si cumple las propiedades siguientes:

1. $X \in \mathcal{D}$.
2. Si $E$, $F \in \mathcal{D}$ con $E \subset F$, entonces $F \setminus E \in \mathcal{D}$.
3. Si $\{E_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión creciente en $\mathcal{D}$, entonces $\bigcup\limits_{n=0}^{\infty} E_n \in \mathcal{D}$.

Es inmediato que la intersección de una familia de $\sigma$-álgebras (resp. sistemas de Dynkin) en un conjunto $X$ es una $\sigma$-álgebra (resp. sistema de Dynkin), por lo que si $\Sigma \subset \mathcal{P}X$, podemos definir la *$\sigma$-álgebra generada* (resp. el *sistema de Dynkin generado*) *por* $\Sigma$ en $X$ como la intersección de todas las $\sigma$-álgebras (resp. todos los sistemas de Dynkin) en $X$ que contienen a $\Sigma$, y es la menor $\sigma$-álgebra (resp. el menor sistema de Dynkin) en $X$ que contiene a $\Sigma$.

**Teorema B.13 (Dynkin)** *Sea $X$ un conjunto y $\Sigma$ una familia de subconjuntos de $X$ cerrada para intersecciones finitas. Entonces el sistema de Dynkin generado por $\Sigma$ coincide con la $\sigma$-álgebra generada por $\sigma$.*

Demostración: Sea $\mathcal{D}$ el sistema de Dynkin generado por $\Sigma$. Como la $\sigma$-álgebra generada por $\Sigma$ es obviamente un sistema de Dynkin, necesariamente contiene a $\mathcal{D}$. Si probamos que $\mathcal{D}$ es una $\sigma$-álgebra, tendremos la igualdad.

Veamos en primer lugar que $\mathcal{D}$ es cerrado para intersecciones finitas. Para ello definimos $\mathcal{D}_1 = \{E \in \mathcal{D} \mid \text{para todo } D \in \Sigma,\ E \cap D \in \mathcal{D}\}$. Claramente $\Sigma \subset \mathcal{D}_1$ y es un sistema de Dynkin, como se sigue fácilmente de las igualdades

$$(F \setminus E) \cap D = (F \cap D) \setminus (E \cap D), \qquad \Big(\bigcup_{n=0}^{\infty} E_n\Big) \cap D = \bigcup_{n=0}^{\infty} (E_n \cap D).$$

Por consiguiente, $\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}$, y con esto hemos probado que si $D \in \Sigma$ y $E \in \mathcal{D}$, entonces $D \cap E \in \mathcal{D}$. A continuación definimos

$$\mathcal{D}_2 = \{E \in \mathcal{D} \mid \text{para todo } D \in \mathcal{D},\ E \cap D \in \mathcal{D}\}.$$

Por el paso precedente, $\Sigma \subset \mathcal{D}_2$ y es claro igualmente que $\mathcal{D}_2$ es un sistema de Dynkin, luego $\mathcal{D}_2 = \mathcal{D}$, lo que implica que $\mathcal{D}$ es cerrado para intersecciones finitas, luego también para uniones finitas (ya que es cerrado para complementos).

Si $\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$ es cualquier sucesión de elementos de $\mathcal{D}$, definimos

$$E_n = \bigcup_{i=0}^{n} A_n \in \mathcal{D},$$

con lo que $\{E_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión creciente en $\mathcal{D}$, y así

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=0}^{\infty} E_n \in \mathcal{D}.$$

Esto prueba que $\mathcal{D}$ es una $\sigma$-álgebra. ■

Veamos una aplicación:

**Teorema B.14** *Sea $\Sigma$ una familia de subconjuntos de $X$ cerrada para intersecciones finitas y sea $\mathcal{A}$ la $\sigma$-álgebra generada por $\Sigma$. Sean $\mu$ y $\nu$ dos medidas en $\mathcal{A}$ que coincidan en $\Sigma$ y de modo que exista una sucesión creciente $\{C_n\}_{n=0}^{\infty}$ en $\mathcal{A}$ de conjuntos de medida finita para ambas medidas tal que $X = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} C_n$. Entonces $\mu = \nu$.*

Demostración: Supongamos en primer lugar que las medidas $\mu$ y $\nu$ son finitas. Es fácil ver entonces que el conjunto $\mathcal{D} = \{A \in \mathcal{A} \mid \mu(A) = \nu(A)\}$ es un sistema de Dynkin que contiene a $\Sigma$, luego por el teorema anterior $\mathcal{D} = \mathcal{A}$ y $\mu = \nu$.

En el caso general, definimos medidas finitas en la $\sigma$-álgebra $\mathcal{A} \cap \mathcal{P}C_n$ mediante $\mu_n(A) = \mu(A \cap C_n)$, $\nu_n(A) = \nu(A \cap C_n)$. Por la parte ya probada $\mu_n = \nu_n$, pero entonces

$$\mu(A) = \mu\Big(\bigcup_{n=0}^{\infty}(A \cap C_n)\Big) = \lim_n \mu(A \cap C_n) = \lim_n \mu_n(A) =$$

$$\lim_n \nu_n(A) = \lim_n \nu(A \cap C_n) = \nu\Big(\bigcup_{n=0}^{\infty}(A \cap C_n)\Big) = \nu(A),$$

luego $\mu = \nu$ igualmente. ■

**Medidas completas** Una medida $\mu$ en una $\sigma$-álgebra $\mathcal{A}$ en un conjunto $X$ es *completa* si todo subconjunto de un conjunto nulo es medible (y, por consiguiente, nulo). Toda medida se puede completar en el sentido siguiente:

**Teorema B.15** *Si $(X, \mathcal{A}, \mu)$ es un espacio medida, entonces el conjunto $\mathcal{A}_\mu$ formado por todos los $A \subset X$ tales que existen $E, F \in \mathcal{A}$ de modo que $E \subset A \subset F$ y $\mu(F \setminus E) = 0$ es una $\sigma$-álgebra en $X$ que contiene a $\mathcal{A}$ y $\mu$ admite una única extensión a una medida completa $\bar{\mu}$ en $\mathcal{A}_\mu$. Más aún, si $(X, \mathcal{B}, \nu)$ es un espacio medida completo tal que $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ y $\nu|_{\mathcal{A}} = \mu$, entonces $\mathcal{A}_\mu \subset \mathcal{B}$ y $\nu|_{\mathcal{A}_\mu} = \bar{\mu}$.*

Demostración: Si $E \subset A \subset F$, entonces $X \setminus F \subset X \setminus A \subset X \setminus E$, y $(X \setminus E) \setminus (X \setminus F) = F \setminus E$, de donde se sigue que si $A \in \mathcal{A}_\mu$, también $X \setminus A \in \mathcal{A}_\mu$.

Si $\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$ son elementos de $\mathcal{A}_m$, tenemos conjuntos de $\mathcal{A}$ de manera que $E_n \subset A_n \subset F_n$ con $\mu(F_n \setminus E_n) = 0$. Entonces $\bigcup\limits_{n=0}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}_\mu$, pues

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} E_n \subset \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \subset \bigcup_{n=0}^{\infty} F_n$$

y

$$\mu\Big(\bigcup_{n=0}^{\infty} F_n \setminus \bigcup_{n=0}^{\infty} E_n\Big) \leq \mu\Big(\bigcup_{n=0}^{\infty} (F_n \setminus E_n)\Big) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \mu(F_n \setminus E_n) = 0.$$

Esto prueba que $\mathcal{A}_\mu$ es una $\sigma$-álgebra, que claramente contiene a $\mathcal{A}$. Observemos que si $E \subset A \subset F$ según la definición de $\mathcal{A}_\mu$, entonces $\mu(E) = \mu(F)$. Más aún, si $B \subset A$ es medible, entonces $\mu(B) \leq \mu(E)$, luego

$$\mu(E) = \sup\{\mu(B) \mid B \in \mathcal{A},\ B \subset A\}.$$

Esto implica que el valor $\mu(E) = \mu(F)$ depende únicamente de $A$, luego podemos definir $\bar{\mu} : \mathcal{A}_\mu \longrightarrow [0, +\infty]$ mediante $\bar{\mu}(A) = \mu(E) = \mu(F)$. Esta aplicación extiende a $\mu$, pues si $A \in \mathcal{A}$, podemos tomar $E = A = F$. En particular $\bar{\mu}(\varnothing) = 0$. Si $\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una familia de conjuntos de $\mathcal{A}_\mu$ disjuntos dos a dos, tomamos los correspondientes $E_n \subset A_n \subset F_n$ y observamos que los $E_n$ son disjuntos dos a dos. Además hemos visto que $\bigcup\limits_{n=0}^{\infty} E_n$ atestigua que $\bigcup\limits_{n=0}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}_\mu$, luego

$$\bar{\mu}\Big(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\Big) = \mu\Big(\bigcup_{n=0}^{\infty} E_n\Big) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(E_n) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n).$$

Así pues, $\bar{\mu}$ es una medida, y es fácil ver que es completa y que es la única extensión posible de $\mu$ a $\mathcal{A}_\mu$.

Si $(X, \mathcal{B}, \nu)$ cumple las condiciones del enunciado y $A \in \mathcal{A}_\mu$, existen conjuntos $E \subset A \subset F$ en las condiciones del enunciado, con lo que $E, F \in \mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ y $A = E \cup (A \setminus E)$, con $A \setminus E \subset F \setminus E \in \mathcal{B}$. Como $\nu$ es completa, de hecho $A \setminus E \in \mathcal{B}$ y $\nu(A \setminus E) = 0$, luego $A \in \mathcal{B}$ y $\nu(A) = \nu(E) + \nu(A \setminus E) = \nu(A)$. ■

**Medidas exteriores** Una forma habitual de construir medidas es a partir de medidas exteriores en el sentido siguiente:

**Definición B.16** Una aplicación $\mu^* : \mathcal{P}X \longrightarrow [0, +\infty]$ es una *medida exterior* en $X$ si cumple las propiedades siguientes:

1. $\mu^*(\varnothing) = 0$.
2. Si $A \subset B \subset X$, entonces $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$.
3. Si $\{A_k\}_{k=0}^{\infty}$ es una sucesión de subconjuntos de $X$, entonces

$$\mu^*\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k\right) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \mu^*(A_k).$$

La clave está en que toda medida exterior se restringe a una medida sobre el álgebra adecuada:

Si $\mu^*$ es una medida exterior en un conjunto $X$, llamaremos *conjuntos $\mu^*$-medibles* a los conjuntos $A \subset X$ tales que, para todo $B \subset X$, se cumple que $\mu^*(B) = \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \setminus A)$.

Notemos que siempre se cumple que

$$\mu^*(B) = \mu^*((B \cap A) \cup (B \setminus A)) \leq \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \setminus A).$$

La medibilidad equivale a la desigualdad opuesta.

**Teorema B.17** *Si $\mu^*$ es una medida exterior en un conjunto $X$, el conjunto $\mathcal{M}$ de todos los subconjuntos de $X$ que son $\mu^*$-medibles es una $\sigma$-álgebra, y la restricción $\mu$ de $\mu^*$ a $\mathcal{M}$ es una medida completa.*

Demostración: Trivialmente $\varnothing$, $X \in \mathcal{M}$. También es claro que si $A \in \mathcal{M}$ entonces $X \setminus A \in \mathcal{M}$. Sean $A, B \in \mathcal{M}$ y $C \subset X$ arbitrario. Entonces

$$\mu^*(C) = \mu^*(C \cap A) + \mu^*(C \setminus A), \qquad \mu^*(C \setminus A) = \mu^*((C \setminus A) \cap B) + \mu^*(C \setminus (A \cup B)),$$

luego

$$\begin{aligned} \mu^*(C) &= \mu^*(C \cap A) + \mu^*((C \setminus A) \cap B) + \mu^*(C \setminus (A \cup B)) \\ &\geq \mu^*(C \cap (A \cup B)) + \mu^*(C \setminus (C \cup B)), \end{aligned}$$

donde hemos usado que $C \cap (A \cup B) = (C \cap A) \cup ((C \setminus A) \cap B)$. Esto prueba que $A \cup B \in \mathcal{M}$.

Supongamos ahora que $\{A_k\}_{k=0}^{\infty}$ es una familia de conjuntos $\mu^*$-medibles disjuntos dos a dos y $S_m = \bigcup\limits_{k=0}^{m} A_k$. Entonces, para todo $A \subset X$, se cumple que

$$\mu^*(A \cap S_m) = \sum_{k=0}^{m} \mu^*(A \cap A_k).$$

En efecto, lo probamos por inducción sobre $m$. Para $m = 0$ es trivial. Sabemos que $S_{m+1} \in \mathcal{M}$, luego

$$\mu^*(A \cap S_{m+1}) = \mu^*(A \cap S_{m+1} \cap S_m) + \mu^*((A \cap S_{m+1}) \setminus S_m)$$

$$= \mu^*(A \cap S_m) + \mu^*(A \cap A_{m+1}) = \sum_{k=0}^{m} \mu^*(A \cap A_k) + \mu^*(A \cap A_{m+1})$$

$$= \sum_{k=0}^{m+1} \mu^*(A \cap A_k).$$

De aquí deducimos a su vez que

$$\mu^*(A \cap \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^*(A \cap A_k).$$

En efecto, llamando $S = \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k$, como $S_m \subset S$,

$$\mu^*(A \cap S) \geq \mu^*(A \cap S_m) = \sum_{k=0}^{m} \mu^*(A \cap A_k),$$

luego la serie converge y $\mu^*(A \cap S) \geq \sum_{k=0}^{\infty} \mu^*(A \cap A_k)$. La desigualdad opuesta se da por definición de medida exterior.

A su vez de aquí obtenemos que $\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k \in \mathcal{M}$. En efecto, si $A \subset X$ es arbitrario,

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap S_m) + \mu^*(A \setminus S_m) \geq \sum_{k=0}^{m} \mu^*(A \cap A_k) + \mu^*(A \setminus S).$$

Como esto vale para todo $m$,

$$\mu^*(A) \geq \sum_{k=0}^{\infty} \mu^*(A \cap A_k) + \mu^*(A \setminus S) = \mu^*(A \cap S) + \mu^*(A \setminus S).$$

No hemos probado todavía que $\mathcal{M}$ es una $\sigma$-álgebra porque estamos suponiendo que los $A_k$ son disjuntos dos a dos, pero, si no lo son, definimos $B_k = A_k \setminus \bigcup_{i=0}^{k-1} A_i \in \mathcal{M}$ y, por el caso ya probado para conjuntos disjuntos, tenemos que

$$\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k = \bigcup_{k=0}^{\infty} B_k \in \mathcal{M}.$$

Haciendo $A = X$ en la igualdad

$$\mu^*(A \cap \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^*(A \cap A_k)$$

ya demostrada, concluimos que $\mu^*$ se restringe a una medida $\mu$ en $\mathcal{M}$.

Que $\mu$ sea completa significa que si $A \in \mathcal{M}$, $B \subset A$ y $\mu(A) = 0$, entonces $B \in \mathcal{M}$. En efecto, tenemos que $\mu^*(B) = 0$, y entonces es $\mu^*$-medible, pues, para todo $C \subset X$, tenemos que $\mu^*(C \cap B) + \mu^*(C \setminus B) \leq \mu^*(B) + \mu^*(C) = \mu^*(C)$. ■

Recíprocamente, toda medida determina una medida exterior:

**Teorema B.18** *Si $\mu : \mathcal{A} \longrightarrow [0, +\infty[$ es una medida en una $\sigma$-álgebra $\mathcal{A}$ de subconjuntos de $X$, entonces la aplicación $\mu^* : \mathcal{P}X \longrightarrow [0, +\infty]$ dada por*

$$\mu^*(A) = \text{ínf}\{\sum_{k=0}^{\infty} \mu(A_k) \mid A_k \in \mathcal{A},\ A \subset \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k\}$$

*es una medida exterior en $X$.*

Demostración: Claramente $\mu^*(\varnothing) = 0$ y si $A \subset B \subset X$ se cumple que $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$.

Sea $\{A_k\}_{k=0}^{\infty}$ una sucesión de subconjuntos de $X$ tal que $\mu^*(A_k) < +\infty$ para todo $k$. Dado $\epsilon > 0$ podemos tomar una sucesión $\{A_m^k\}_{m=0}^{\infty}$ en $\mathcal{A}$ tal que $A_k \subset \bigcup\limits_{m=0}^{\infty} A_m^k$ y

$$\sum_{m=0}^{\infty} \mu(A_m^k) < \mu^*(A_k) + \frac{\epsilon}{2^k}.$$

Al unir estas sucesiones para todo $k$ obtenemos un cubrimiento de $\bigcup\limits_{k=0}^{\infty} A_k$ del que deducimos que

$$\mu^*(\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \mu^*(A_k) + \epsilon,$$

para todo $\epsilon > 0$, luego se cumple la desigualdad sin $\epsilon$ y $\mu^*$ es una medida exterior. (Para sucesiones con algún $k$ tal que $\mu^*(A_k) = +\infty$ la desigualdad es trivial.)

Si $A \in \mathcal{A}$, como $A \subset A$, tenemos que $\mu^*(A) \leq \mu(A)$.

Si $A \subset \bigcup\limits_{k=0}^{\infty} A_k$, con $A_k \in \mathcal{A}$, definimos

$$B_k = (A_k \cap A) \setminus \bigcup_{i<k} (A_i \cap A) \in \mathcal{A}.$$

Claramente, los $B_k$ son disjuntos dos a dos y $A = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} B_k$. Como $\mu$ es una medida,

$$\mu(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu(B_k) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \mu(A_k)$$

y, como esto vale para todo cubrimiento de $A$, tenemos que $\mu(A) \leq \mu^*(A)$, luego $\mu^*$ extiende a $\mu$. ■

**Nota** El teorema anterior vale igualmente con la misma prueba si suponemos únicamente que $\mathcal{A}$ es un *anillo* de subconjuntos de $X$, es decir, que $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}X$, $\varnothing \in A$ y si $A, B \in \mathcal{A}$, entonces $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B \in \mathcal{A}$. En la definición de medida en un anillo se exige que si $\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una familia de elementos de $\mathcal{A}$ disjuntos dos a dos tal que $A = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} A_n \in A$, entonces $\mu(A) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \mu(A_n)$. ■

Como consecuencia:

**Teorema B.19 (Caratheodory)** *Toda medida $\mu : \mathcal{A} \longrightarrow [0, +\infty[$ en un anillo $\mathcal{A}$ de subconjuntos de $X$ se extiende a una medida completa $\bar{\mu} : \mathcal{M} \longrightarrow [0, +\infty]$ definida sobre cierta $\sigma$-álgebra $\mathcal{M}$ en $X$ que contiene a $\mathcal{A}$.*

Demostración: Consideramos la medida exterior $\mu^*$ dada por B.18, que extiende a $\mu$ y sea $\mathcal{M}$ su $\sigma$-álgebra de conjuntos medibles. Sólo hemos de probar que $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$. Para ello tomamos $A \in \mathcal{A}$ y $B \subset X$ arbitrario. Sea $\{A_k\}_{k=0}^{\infty}$ una familia de elementos de $A$ tales que $A \subset \bigcup\limits_{k=0}^{\infty} A_k$.

Entonces $B \cap A \subset \bigcup\limits_{k=0}^{\infty} (A_k \cap A)$ y $B \setminus A \subset \bigcup\limits_{k=0}^{\infty} (A_k \setminus A)$, luego

$$\mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \setminus A) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \mu(A_k \cap A) + \sum_{k=0}^{\infty} \mu(A_k \setminus A) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu(A_k),$$

porque $\mu$ es una medida. Como esto vale para todo cubrimiento de $A$, resulta que

$$\mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \setminus A) \leq \mu^*(A),$$

luego $A \in \mathcal{M}$. ■

**Funciones medibles** En el apartado siguiente introduciremos la integral respecto de una medida de una función con valores en $\mathbb{R}$, para lo cual necesitamos restringirnos a una clase de funciones que garantizan la medibilidad de diversos conjuntos definidos a partir de ellas:

**Definición B.20** Si $X$ es un espacio medida e $Y$ es un espacio topológico, una aplicación $f : X \longrightarrow Y$ es *medible* si las antiimágenes por $f$ de los abiertos de $Y$ son conjuntos medibles.

Como las antiimágenes conservan las operaciones conjuntistas es muy fácil probar que los conjuntos de $Y$ cuyas antiimágenes son medibles forman una $\sigma$-álgebra, que en el caso de una función medible contiene a los abiertos, luego contendrá a todos los conjuntos de Borel, es decir, una aplicación es medible si y sólo si las antiimágenes de los conjuntos de Borel son conjuntos medibles. El siguiente caso particular nos interesará especialmente:

**Teorema B.21** *Una aplicación $f : X \longrightarrow [-\infty, +\infty]$ es medible si y sólo si lo son todos los conjuntos $f^{-1}\big[]x, +\infty]\big]$, para todo $x \in \mathbb{R}$.*

Demostración: Ya hemos comentado que los conjuntos con antiimagen medible forman una $\sigma$-álgebra $\mathcal{A}$. Hemos de ver que $\mathcal{A}$ contiene a los abiertos de $[-\infty, +\infty]$. Por hipótesis contiene a los intervalos $]x, +\infty]$, luego también a sus complementarios $[-\infty, x]$. Todo intervalo $[-\infty, x[$ es intersección numerable de los intervalos $[-\infty, x + 1/n]$, luego también está en $\mathcal{A}$. De aquí se sigue que $\mathcal{A}$ contiene también a los intervalos $]x, y[\, = \,]x, +\infty] \cap [-\infty, y[$. Finalmente, todo abierto de $[-\infty, +\infty]$ se expresa como unión numerable de intervalos abiertos, luego está en $\mathcal{A}$. ■

Es claro que la composición de una función medible con una función continua es una función medible. Esto nos da, por ejemplo, que si $f : X \longrightarrow [-\infty, +\infty]$ es medible, también lo es $|f|$ y $\alpha f$ para todo número real $\alpha$, así como $1/f$ si $f$ no se anula.

Para probar resultados análogos cuando intervienen dos funciones (suma de funciones medibles, etc.) usaremos la observación siguiente:

*Si los espacios $Y$, $Z$ tienen bases numerables (como $[-\infty, +\infty]$ y sus subespacios) y $u : X \longrightarrow Y$, $v : X \longrightarrow Z$ son aplicaciones medibles, entonces la aplicación $u \times v : X \longrightarrow Y \times Z$ dada por $(u \times v)(x) = \big(u(x), v(x)\big)$ es medible.*

Basta observar que los productos de abiertos básicos $A \times B$ forman una base numerable de $Y \times Z$, luego todo abierto de $Y \times Z$ es unión numerable de estos conjuntos, por lo que es suficiente que sus antiimágenes sean medibles, pero $(u \times v)^{-1}[A \times B] = u^{-1}[B] \cap v^{-1}[C]$.

Ahora, por ejemplo, si $u, v : X \longrightarrow \mathbb{R}$ son aplicaciones medibles, también lo son $u + v$, $uv$, $u \wedge v$, $u \vee v$, pues son la composición de $u \times v$ con la suma, el producto, el mínimo o el máximo, que son continuas.

En el caso de funciones medibles $u, v : X \longrightarrow [-\infty, +\infty]$, es claro que $u \wedge v$ y $u \vee v$ son igualmente medibles, pero para el caso de la suma y el producto tenemos el problema de que no es posible extender la suma y el producto de modo que sean continuas en los puntos $(+\infty, -\infty)$, $(-\infty, +\infty)$ en el caso de la suma y en los puntos $(\pm\infty, 0)$, $(0, \pm\infty)$ en el caso del producto. Hacemos esto: definimos $u + v$ de modo que $+\infty - \infty = 0$ (por ejemplo) y ahora observamos lo siguiente:

*Sea $u : X \longrightarrow Y$ una función medible, $A$ un subconjunto medible de $X$ e $y \in Y$. Entonces la función $v : X \longrightarrow Y$ que coincide con $u$ fuera de $A$ y toma el valor $y$ en $A$ es medible.*

La razón es que

$$v^{-1}[B] = \begin{cases} u^{-1}[B] & \text{si } y \notin B \\ u^{-1}[B] \cup A & \text{si } y \in B \end{cases}$$

Así, dadas $u, v : X \longrightarrow [-\infty, +\infty]$ medibles tales que donde una vale $+\infty$ la otra no vale $-\infty$, las modificamos para que valgan 0 donde toman valores infinitos, las sumamos y obtenemos una función medible, luego modificamos la suma para que tome el valor $\infty$ adecuado donde deba tomar dichos valores (claramente en un conjunto medible), con lo que obtenemos una función medible. Igualmente con el producto.

Otra consecuencia del teorema sobre el producto cartesiano de funciones medibles es que si tenemos dos funciones medibles $u, v : X \longrightarrow [-\infty, +\infty]$, los conjuntos del estilo de $\big\{x \in X \mid u(x) < v(x)\big\}$ son medibles (por ejemplo en este caso se trata de la antiimagen por $u \times v$ del abierto $\big\{(x, y) \mid x < y\big\}$).

Si $f : X \longrightarrow [-\infty, +\infty]$ es una función medible, definimos las funciones $f^+ = f \vee 0$ y $f^- = -(f \wedge 0)$, llamadas *parte positiva* y *parte negativa* de $f$, respectivamente.

Tenemos que si $f$ es medible también lo son $f^+$ y $f^-$. El recíproco es cierto porque claramente $f = f^+ - f^-$. Además $|f| = f^+ + f^-$.

Seguidamente probaremos que la medibilidad se conserva al tomar límites. Si $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión de números reales, conviene definir su *límite superior* (resp. *inferior* como el supremo (resp. ínfimo) en $\overline{\mathbb{R}}$ del conjunto de sus puntos adherentes. Lo representaremos mediante $\overline{\lim\limits_n}\, a_n$ (resp. $\underline{\lim\limits_n}\, a_n$). Una sucesión converge si y sólo si tiene un único punto adherente (su límite), por lo que $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ converge si y sólo si $\overline{\lim\limits_n}\, a_n = \underline{\lim\limits_n}\, a_n$ y entonces

$$\overline{\lim_n}\, a_n = \underline{\lim_n}\, a_n = \lim_n a_n.$$

Sin embargo, los límites superior e inferior existen para cualquier sucesión de números reales, aunque no sea convergente.

Veamos que

$$\overline{\lim_n}\, a_n = \inf_{k\geq 0} \sup_{n\geq k} a_n, \quad \underline{\lim_n}\, a_n = \sup_{k\geq 0} \inf_{n\geq k} a_n.$$

En efecto, sea $p > -\infty$ un punto adherente de $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$. Dado $x < p$ y $k \geq 0$, existe un $n \geq k$ tal que $a_n \in\, ]x, +\infty[$, luego $x \leq \sup\limits_{n\geq k} a_n$. Como esto vale para todo $x < p$, concluimos que $p \leq \sup\limits_{n\geq k} a_n$, y lo mismo vale trivialmente si $p = -\infty$. Como el límite superior es el supremo de estos $p$, tenemos que $\overline{\lim\limits_n}\, a_n \leq \inf\limits_{k\geq 0} \sup\limits_{n\geq k} a_n$.

Llamemos $L = \inf\limits_{k\geq 0} \sup\limits_{n\geq k} a_n$. Si $L < +\infty$ y $]u, v[$ es un entorno de $L$, existe un $k \geq 0$ tal que $u < L \leq \sup\limits_{n\geq k} a_n < v$, luego existe un $n \geq k$ tal que $u < a_n < v$, es decir, $a_n \in\, ]u, v[$, lo que prueba que $L$ es un punto adherente de la sucesión, luego $L \leq \overline{\lim\limits_n}\, a_n$. Modificando ligeramente el argumento vemos que la conclusión se cumple también si $L = +\infty$. La otra igualdad se prueba análogamente. ■

Si $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión de funciones $f_n : X \longrightarrow [-\infty, +\infty]$, definimos puntualmente las funciones $\sup\limits_n f_n$, $\inf\limits_n f_n$, $\underline{\lim\limits_n}\, f_n$ y $\overline{\lim\limits_n}\, f_n$. Si la sucesión converge puntualmente, las dos últimas funciones coinciden con la función límite puntual $\lim\limits_n f_n$.

**Teorema B.22** *Si las funciones $f_n$ son medibles, también lo son las funciones $\sup\limits_n f_n$, $\inf\limits_n f_n$, $\overline{\lim\limits_n}\, f_n$ y $\underline{\lim\limits_n}\, f_n$.*

Demostración: Claramente

$$\big(\sup_n f_n\big)^{-1}\big[]x, +\infty]\big] = \bigcup_{n=0}^{\infty} f_n^{-1}\big[]x, +\infty]\big],$$

es medible. Igualmente se prueba con ínfimos y de aquí se deducen los resultados sobre límites superiores e inferiores. En particular, el límite puntual de una sucesión de funciones medibles es una función medible. ■

Notemos que si $X = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} E_n$ es una descomposición de $X$ en subconjuntos medibles (no necesariamente disjuntos), entonces $f : X \longrightarrow Y$ es medible si y sólo si lo son todas las funciones $f|_{E_n}$, pues si $f$ es medible y $G$ es un abierto en $Y$, $(f|_{E_n})^{-1}[G] = f^{-1}[G] \cap E_n$, luego $(f|_{E_n})^{-1}[G]$ es medible, y si las $f|_{E_n}$ son medibles, entonces $f^{-1}[G] = (f|_{E_n})^{-1}[G]$, luego también es medible.

Si $E$ es un subconjunto de $X$, su función característica $\chi_E$ es medible si y sólo si lo es $E$.

**La integral de Lebesgue** Pasamos ya a definir la integral de una función respecto de una medida. Empezamos definiéndola sobre una clase restringida de funciones y a continuación la generalizaremos a otras mayores.

**Definición B.23** Una función *simple* en un espacio medida $X$ es una función medible $s : X \longrightarrow [0, +\infty[$ que sólo toma un número finito de valores $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Si llamamos $A_i = s^{-1}[\alpha_i]$, entonces los conjuntos $A_i$ son medibles disjuntos y $s = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}$.

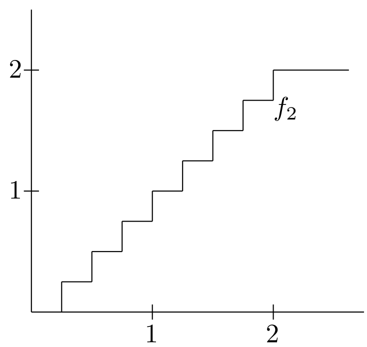
La base de nuestra construcción de la integral será el teorema siguiente:

**Teorema B.24** *Si $X$ es un espacio medida y $f : X \longrightarrow [0, +\infty]$ es una función medible, entonces existe una sucesión $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ de funciones simples en $X$ tal que*

$$0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \cdots \leq f \quad y \quad f = \lim_n s_n.$$

Demostración: Para cada número natural $n > 0$ y cada $t \in \mathbb{R}$ existe un único $k = k_n(t) \in \mathbb{N}$ tal que $k/2^n \leq t < (k+1)/2^n$. Sea $f_n : [0, +\infty] \longrightarrow [0, +\infty]$ dada por

$$f_n(t) = \begin{cases} k_n(t)/2^n & \text{si } 0 \leq t < n \\ n & \text{si } n \leq t \leq +\infty \end{cases}$$




La figura muestra la función $f_2$. Claramente $f_n$ toma un número finito de valores y

$$f_1 \leq f_2 \leq f_3 \leq \cdots \leq I,$$

donde $I$ es la función identidad $I(t) = t$. Como $t - 1/2^n < f_n(t) \leq t$ para $0 \leq t \leq n$, es claro que $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge puntualmente a $I$.

Sea $s_n = f \circ f_n$. Claramente $s_n$ toma un número finito de valores (a lo sumo los que toma $f_n$) y las antiimágenes de estos valores son las antiimágenes por $f$ de los intervalos donde los toma $f_n$, luego son conjuntos medibles. Además

$$0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \cdots \leq f,$$

luego las funciones $s_n$ son simples y, tomando límites, es obvio que la sucesión converge puntualmente a $f$. ■

**Definición B.25** Sea $X$ un espacio medida y $s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}$ una función simple en $X$. Definimos la *integral* de $s$ en $X$ como

$$\int_X s\, d\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i) \in [0, +\infty],$$

con el convenio de que $+\infty \cdot 0 = 0$.

Si $E$ es un subconjunto medible de $X$, entonces $s|_E = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i \cap E}$, donde las funciones características se toman ahora sobre $E$. Por lo tanto

$$\int_E s|_E\, d\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i\, \mu(A_i \cap E).$$

Por otro lado $s\chi_E = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i \cap E}$ (con las funciones características en $X$), luego concluimos que

$$\int_E s|_E\, d\mu = \int_X s\chi_E\, d\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, \mu(A_i \cap E).$$

En la práctica identificaremos cada función en $E$ con su extensión a $X$ que toma el valor 0 fuera de $E$. En particular, si $s : X \longrightarrow [-\infty, +\infty]$, identificaremos $s|_E$ con $s\chi_E$. La igualdad de integrales precedente prueba que a efectos de integración es equivalente considerar $s|_E$ como función en $E$ o $s\chi_E$ como función en $X$.

Ahora necesitamos el siguiente resultado técnico, que después generalizaremos notablemente.

**Teorema B.26** *Sea $X$ un espacio medida.*

1. *Sea $s$ una función simple en $X$. Para cada subconjunto medible $E$ de $X$ definimos $\nu(E) = \int_E s\, d\mu$. Entonces $\nu$ es una medida en $X$.*
2. *Si $s$ y $t$ son funciones simples en $X$ se cumple*

$$\int_X (s + t)\, d\mu = \int_X s\, d\mu + \int_X t\, d\mu.$$

Demostración: 1) Sea $s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}$. Claramente $\nu(\varnothing) = 0$. Sea $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$ una unión disjunta de conjuntos medibles. Entonces

$$\begin{aligned} \nu(E) &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i \cap E) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_i \cap E_j) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i \cap E_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \nu(E_j). \end{aligned}$$

2) Sean $s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}$ y $t = \sum_{j=1}^{m} \beta_j \chi_{B_j}$. Llamemos $E_{ij} = A_i \cap B_j$. Así, tanto $s$ como $t$ son constantes en los conjuntos $E_{ij}$ ($s$ toma el valor $\alpha_i$ y $t$ el valor $\beta_j$). Por lo tanto

$$\int_{E_{ij}} (s+t)\, d\mu = (\alpha_i + \beta_j)\mu(E_{ij}) = \alpha_i \mu(E_{ij}) + \beta_j \mu(E_{ij}) = \int_{E_{ij}} s\, d\mu + \int_{E_{ij}} t\, d\mu.$$

Como los conjuntos $E_{ij}$ son disjuntos dos a dos y su unión es $X$, la parte 1) nos da que la igualdad se cumple para integrales en $X$. ■

En particular notamos que si $s \leq t$ son funciones simples en un espacio medida $X$, entonces $t - s$ también es una función simple y

$$\int_X s\, d\mu \leq \int_X s\, d\mu + \int_X (t-s)\, d\mu = \int_X t\, d\mu.$$

En particular se cumple que

$$\int_X t\, d\mu = \sup\Big\{\int_X s\, d\mu \mid s \text{ es una función simple, } s \leq t\Big\}.$$

Esto hace consistente la siguiente definición:

**Definición B.27** Sea $X$ un espacio medida y $f : X \longrightarrow [0, +\infty]$ una función medible. Definimos la *integral* de $f$ como

$$\int_X f\, d\mu = \sup\Big\{\int_X s\, d\mu \mid s \text{ es una función simple, } s \leq f\Big\} \in [0, +\infty].$$

Observemos que si $E$ es un subconjunto medible de $X$, si $s$ es una función simple en $E$ por debajo de $f|_E$, su extensión a $X$ (nula fuera de $E$) es una función simple bajo $f\chi_E$, y la restricción a $E$ de una función simple en $X$ bajo $f\chi_E$ es una función simple en $E$ bajo $f|_E$. De aquí se sigue que

$$\int_E f\, d\mu = \int_X f\chi_E\, d\mu,$$

pues ambas integrales son el supremo del mismo conjunto de números reales.

Las propiedades siguientes son inmediatas a partir de la definición:

**Teorema B.28** *Sea $X$ un espacio medida y $E$ un subconjunto medible de $X$.*

1. *Si $0 \leq f \leq g$ son funciones medibles en $X$, entonces $\int_X f\, d\mu \leq \int_X g\, d\mu$.*
2. *Si $f \geq 0$ es una función medible en $X$ y $A \subset B$ son subconjuntos medibles de $X$, entonces $\int_A f\, d\mu \leq \int_B f\, d\mu$.*
3. *Si $f \geq 0$ es una función medible en $X$ y $f|_E = 0$, entonces $\int_E f\, d\mu = 0$ (aunque sea $\mu(E) = +\infty$).*

4. *Si $f \geq 0$ es una función medible en $X$ y $\mu(E) = 0$, entonces $\int_E f\,d\mu = 0$ (aunque sea $f|_E = +\infty$).*

5. *Si $f \geq 0$ es una función medible y $\int_X f\,d\mu = 0$, entonces el conjunto $\{x \in X \mid f(x) > 0\}$ es nulo.*

Demostración: Probamos únicamente la última afirmación. Para ello consideramos los conjuntos

$$A_n = \{x \in X \mid f(x) \geq 1/n\}.$$

Claramente $0 = \int_X f\,d\mu \geq \int_{A_n} f\,d\mu \geq \frac{1}{n}\mu(A_n) \geq 0$, luego todos los conjuntos $A_n$ son nulos, y también su unión, que es el conjunto del enunciado. ■

El resultado siguiente es uno de los más importantes del cálculo integral:

**Teorema B.29 (de la convergencia monótona de Lebesgue)** *Sea $X$ un espacio medida y $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones medibles en $X$ tal que*

$$0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \cdots \leq f \quad y \quad f = \lim_n f_n.$$

*Entonces $f$ es medible y*

$$\int_X f\,d\mu = \lim_n \int_X f_n\,d\mu.$$

Demostración: Por el teorema anterior $\int_X f_n\,d\mu \leq \int_X f_{n+1}\,d\mu$. Toda sucesión monótona creciente en $[0, +\infty]$ converge a su supremo, luego existe $\alpha = \lim\limits_n \int_X f_n\,d\mu \in [0, +\infty]$.

Sabemos que $f$ es medible por ser límite puntual de funciones medibles. De nuevo por el teorema anterior $\int_X f_n\,d\mu \leq \int_X f\,d\mu$, luego $\alpha \leq \int_X f\,d\mu$.

Sea $s$ una función simple $s \leq f$ y sea $0 < c < 1$. Definimos

$$E_n = \{x \in X \mid f_n(x) \geq cs(x)\}, \quad \text{para } n = 1, 2, 3, \ldots$$

Claramente $E_1 \subset E_2 \subset E_3 \subset \cdots$, son conjuntos medibles y, según veremos enseguida, $X = \bigcup\limits_n E_n$.

En efecto, si $x \in X$ y $f(x) = 0$, entonces $x \in E_1$ y si, por el contrario, $f(x) > 0$ entonces $cs(x) < s(x) \leq f(x)$, luego $x \in E_n$ para algún $n$. Claramente

$$\int_X f_n\,d\mu \geq \int_{E_n} f_n\,d\mu \geq c \int_{E_n} s\,d\mu.$$

Ahora aplicamos el teorema B.26 y el hecho de que la medida de la unión de una sucesión creciente de conjuntos es el supremo de las medidas, con lo que obtenemos

$$\alpha = \lim_n \int_X f_n\,d\mu \geq c \lim_n \int_{E_n} s\,d\mu = c \int_X s\,d\mu.$$

Como esto es cierto para todo $c < 1$ podemos concluir que $\alpha \geq \int_X s\, d\mu$ para toda función simple $s \leq f$, luego tomando el supremo de estas integrales resulta $\alpha \geq \int_X f\, d\mu$, con lo que tenemos la igualdad buscada. ■

El teorema de la convergencia monótona permite en particular reducir propiedades de la integral de funciones no negativas a propiedades de funciones simples, como ilustra el teorema siguiente, que muestra que la integral conserva las sumas, incluso las infinitas.

**Teorema B.30** *Sea $X$ un espacio medida y sea $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ una sucesión de funciones no negativas medibles en $X$. Entonces*

$$\int_X \sum_{n=1}^\infty f_n\, d\mu = \sum_{n=1}^\infty \int_X f_n\, d\mu.$$

DEMOSTRACIÓN: Probaremos en primer lugar que si $f$ y $g$ son medibles y no negativas, entonces

$$\int_X (f+g)\, d\mu = \int_X f\, d\mu + \int_X g\, d\mu.$$

Tomamos dos sucesiones monótonas $\{s_n\}_{n=1}^\infty$ y $\{t_n\}_{n=1}^\infty$ de funciones simples convergentes a $f$ y $g$ respectivamente (existen por el teorema B.24).

Por el teorema B.26 sabemos que $\int_X (s_n + t_n)\, d\mu = \int_X s_n\, d\mu + \int_X t_n\, d\mu$ y, tomando límites, el teorema de la convergencia monótona nos da la igualdad buscada. En el caso general sabemos, por lo que acabamos de probar, que

$$\int_X \sum_{n=1}^k f_n\, d\mu = \sum_{n=1}^k \int_X f_n\, d\mu \quad \text{para } k = 1, 2, 3, \ldots$$

Las funciones $\sum\limits_{n=1}^k f_n$ forman una sucesión monótona de funciones medibles, luego por el teorema de la convergencia monótona

$$\int_X \sum_{n=1}^\infty f_n\, d\mu = \sum_{n=1}^\infty \int_X f_n\, d\mu.$$

■

Generalizamos ahora la primera parte del teorema B.26.

**Teorema B.31** *Sea $X$ un espacio medida y $f : X \longrightarrow [0, +\infty]$ una función medible. Para cada subconjunto medible $E$ de $X$ definimos $\nu(E) = \int_E f\, d\mu$. Entonces $\nu$ es una medida en $X$.*

DEMOSTRACIÓN: Claramente $\nu(\varnothing) = 0$. Sea $E = \bigcup\limits_{n=1}^\infty E_n$ una unión disjunta de conjuntos medibles. Es claro que $f\chi_E = \sum\limits_{n=1}^\infty f\chi_{E_n}$. Aplicando el teorema anterior queda $\nu(E) = \sum\limits_{n=1}^\infty \nu(E_n)$. ■

Después necesitaremos el hecho siguiente:

**Teorema B.32 (Lema de Fatou)** *Sea $X$ un espacio medida y sea $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ una sucesión de funciones medibles no negativas en $X$. Entonces*

$$\int_X \underline{\lim_n} f_n \, d\mu \leq \underline{\lim_n} \int_X f_n \, d\mu.$$

DEMOSTRACIÓN: Sea $g_k = \inf\limits_{n\geq k} f_n$. Entonces $g_k \leq f_n$ para $n \geq k$, luego $\int_X g_k \, d\mu \leq \inf\limits_{n\geq k} \int_X f_n \, d\mu$. Además las funciones $g_k$ forman una sucesión monótona creciente que converge a $\underline{\lim\limits_n} f_n$, luego por el teorema de la convergencia monótona

$$\int_X \underline{\lim_n} f_n \, d\mu = \lim_k \int_X g_k \, d\mu = \sup_{k\geq 1} \int_X g_k \, d\mu \leq \sup_{k\geq 1} \inf_{n\geq k} \int_X f_n \, d\mu = \underline{\lim_n} \int_X f_n \, d\mu.$$

■

Ahora extendemos la integral a funciones medibles no necesariamente mayores o iguales que 0.

**Definición B.33** Sea $X$ un espacio medida y $f : X \longrightarrow [-\infty, +\infty]$ una función medible. Entonces $f^+$ y $f^-$ son funciones medibles no negativas y $f = f^+ - f^-$. Diremos que $f$ es *integrable Lebesgue* en $X$ si tanto $\int_X f^+ \, d\mu$ como $\int_X f^- \, d\mu$ son finitas. En tal caso definimos la *integral de Lebesgue* de $f$ como

$$\int_X f \, d\mu = \int_X f^+ \, d\mu - \int_X f^- \, d\mu \in \mathbb{R}.$$

Si una función $f$ es no negativa, entonces $f^- = 0$ y su integral es la que ya teníamos definida.

Cuando en lugar de "$f$" se indica la expresión que define a $f(x)$ y ésta tiene otros parámetros $f(x, y)$, se indica la variable de integración escribiendo

$$\int_X f(x, y) \, d\mu(x).$$

Las propiedades siguientes son todas inmediatas a partir de los resultados que ya hemos demostrado.

**Teorema B.34** *Sea $X$ un espacio medida y sean $f$, $g : X \longrightarrow [-\infty, +\infty]$ funciones medibles.*

1. *$f$ es integrable si y sólo si $\int_X |f| \, d\mu < +\infty$, y en tal caso*

$$\left| \int_X f \, d\mu \right| \leq \int_X |f| \, d\mu.$$

2. *Si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, y $f$, $g$ son integrables, entonces $\alpha f + \beta g$ es integrable y*

$$\int_X (\alpha f + \beta g) \, d\mu = \alpha \int_X f \, d\mu + \beta \int_X g \, d\mu.$$

3. *Si* $f \leq g$ *y ambas son integrables, entonces* $\int_X f\,d\mu \leq \int_X g\,d\mu$.

4. *Si* $E$ *es un subconjunto medible de* $X$ *y* $f$ *es integrable en* $X$*, entonces* $f$ *es integrable en* $E$ *y* $\int_E f\,d\mu = \int_X f\chi_E\,d\mu$. *En particular,* $\mu(E) = \int_E 1\,d\mu$.

5. *Si* $E$ *y* $F$ *son subconjuntos medibles disjuntos de* $X$*, entonces la función* $f$ *es integrable en* $E \cup F$ *si y sólo si lo es en* $E$ *y en* $F$ *y, en tal caso,*

$$\int_{E\cup F} f\,d\mu = \int_E f\,d\mu + \int_F f\,d\mu.$$

6. *Si* $E$ *es un subconjunto medible de* $X$ *y* $f|_E = 0$*, entonces* $\int_E f\,d\mu = 0$.

7. *Si* $E$ *es un subconjunto nulo de* $X$*, entonces* $\int_E f\,d\mu = 0$.

8. *Si* $f$ *es integrable en* $X$*, entonces el conjunto de los puntos donde* $f$ *toma los valores* $\pm\infty$ *es nulo.*

9. *Si* $|f| \leq g$ *y* $g$ *es integrable entonces* $f$ *también lo es.*

10. *Toda función medible y acotada sobre un conjunto de medida finita es integrable.*

La propiedad 5) sale de aplicar el teorema B.31 a las partes positiva y negativa de $f$, la propiedad 9) se deduce de 1) y 10) se deduce de 9).

Veamos ahora un teorema de convergencia válido para funciones medibles arbitrarias.

**Teorema B.35 (de la convergencia dominada de Lebesgue)** *Sea* $X$ *un espacio medida y sean* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *funciones medibles de* $X$ *en* $[-\infty, +\infty]$ *que convergen puntualmente a una función* $f$*. Si existe una función integrable* $g : X \longrightarrow [-\infty, +\infty]$ *tal que* $|f_n| \leq g$ *para todo* $n$*, entonces* $f$ *es integrable y*

$$\int_X f\,d\mu = \lim_n \int_X f_n\,d\mu.$$

Se dice que las funciones $f_n$ están dominadas por $g$.

Demostración: Claramente $|f| \leq g$, luego $f$ es integrable. Puesto que $|f_n - f| \leq 2g$, podemos aplicar el lema de Fatou a las funciones no negativas $2g - |f_n - f|$, con lo que obtenemos que

$$\int_X 2g\,d\mu \leq \varliminf_n \int_X (2g - |f_n - f|)\,d\mu = \int_X 2g\,d\mu + \varliminf_n \int_X (-|f_n - f|)\,d\mu.$$

Es fácil ver que el signo negativo sale del límite, pero cambiando éste por un límite superior, así $-\varlimsup_n \int_X |f_n - f|\,d\mu \geq 0$, o sea, $\varlimsup_n \int_X |f_n - f|\,d\mu \leq 0$.

Pero es obvio que $0 \leq \varliminf_n \int_X |f_n - f|\, d\mu \leq \varlimsup_n \int_X |f_n - f|\, d\mu = 0$, luego los límites superior e inferior coinciden, luego $\lim_n \int_X |f_n - f|\, d\mu = 0$. Ahora aplicamos que

$$\left| \int_X f_n\, d\mu - \int_X f\, d\mu \right| = \left| \int_X (f_n - f)\, d\mu \right| \leq \int_X |f_n - f|\, d\mu,$$

de donde se sigue el teorema. ■

**Ejemplo: La medida de cómputo** Consideremos en $\mathbb{N}$ la medida de cómputo $m$ definida tras B.11. Como todo subconjunto de $\mathbb{N}$ es medible, todas las funciones $a : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ son medibles, y son simplemente las sucesiones $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$. Si todos los términos de la sucesión están en $[0, +\infty[$, entonces una sucesión de funciones simples en los términos del teorema B.24 es la dada por

$$s_n = \sum_{i=0}^{n} a_i \chi_{\{i\}}$$

y claramente

$$\int_{\mathbb{N}} s_n\, dm = \sum_{i=0}^{n} a_i.$$

El teorema de la convergencia monótona de Lebesgue nos da entonces que

$$\int_{\mathbb{N}} a\, dm = \lim_n \int_{\mathbb{N}} s_n\, dm = \lim_n \sum_{i=0}^{n} a_i = \sum_{i=0}^{\infty} a_i.$$

Una sucesión arbitraria $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$ es integrable si y sólo si $\sum\limits_{i=0}^{\infty} |a_i| < +\infty$, es decir, si y sólo si la serie $\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i$ es absolutamente convergente y en tal caso, separando los términos positivos de los negativos, es fácil ver que igualmente

$$\int_{\mathbb{N}} a\, dm = \sum_{i=0}^{\infty} a_i.$$

Así pues, las sumas de series absolutamente convergentes pueden verse un caso particular de la integral de Lebesgue. ■

Un *átomo* en un espacio medida $X$ es un conjunto $A \subset X$ tal que $\mu(A) > 0$ y todo subconjunto medible $B \subset A$ cumple $\mu(B) = 0$ o bien $\mu(B) = \mu(A)$. Una medida es *no atómica* si no tiene átomos.

Vamos a usar el teorema [TC 7.62], que afirma que toda medida no atómica toma todos los valores reales entre 0 y $\mu(X)$. Necesitaremos también el resultado siguiente:

**Teorema B.36** *Si $X$ es un espacio medida no atómico y $f : X \longrightarrow [0, +\infty]$ es una función integrable, la medida $\nu$ definida en el teorema* B.31 *es no atómica.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que $\nu$ tiene un átomo $A$, de modo que se cumple que $\int_A f\,d\mu = \epsilon > 0$ y si $B \subset A$ es medible, entonces $\int_V f\,d\mu = 0, \epsilon$. Entonces $A$ también es un átomo para la medida definida por $f\chi_A$, luego no perdemos generalidad si suponemos que $f|_{X\setminus A} = 0$.

Sea $0 \leq s \leq f$ una función simple, digamos $s = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}$. El hecho de que $f$ sea integrable (es decir, de que sea medible con integral finita), implica que $\mu(A_i) < +\infty$.

Si $\{B_k\}_{k=0}^{\infty}$ es una sucesión decreciente de conjuntos medibles tales que $\lim_k \mu(B_k) = 0$, entonces $\mu(\bigcap\limits_k B_k) = 0$, de donde $\nu(\bigcap\limits_k B_k) = 0$ y por B.10 también $\lim_k \nu(B_k) = 0$.

Por lo tanto, si $\mu(A_i) > 0$, como $\mu$ es no atómica, por [TC 7.62] podemos construir una sucesión $\{B_k\}_{k=0}^{\infty}$ en las condiciones anteriores contenida en $A_i$, luego existe un $B_i \subset A_i \subset A$ medible tal que $\nu(B_i) < \epsilon$, luego $\nu(B_i) = 0$, porque $A$ es un átomo de medida $\epsilon$. Esto hace que $\int_{B_i} f\,d\mu = 0$, luego también $\int_{B_i} s\,d\mu = 0$, luego $\alpha_i \mu(A_i) = 0$, y esto vale igualmente si $\mu(A_i) = 0$.

Por consiguiente, $\int_X s\,d\mu = 0$ para toda función simple $0 \leq s \leq f$, y el teorema B.24 junto con el teorema de la convergencia monótona nos da que $\int_X f\,d\mu = 0$, contradicción. ■

**Producto de medidas** Si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son $\sigma$-álgebras en los conjuntos $X$ e $Y$, respectivamente, llamaremos $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ a la $\sigma$-álgebra en $X \times Y$ generada por los productos $A \times B$ de conjuntos $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{B}$.

Si $E \subset X \times Y$ y $f : X \times Y \longrightarrow Z$, usaremos las notaciones

$$E_x = \{y \in Y \mid (x, y) \in E\}, \qquad E^y = \{x \in X \mid (x, y) \in E\},$$

y llamaremos $f_x : Y \longrightarrow Z$, $f^y : X \longrightarrow Z$ a las funciones dadas por

$$f_x(y) = f(x, y) = f^y(x).$$

**Teorema B.37** *Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ dos $\sigma$-álgebras en los conjuntos $X$ e $Y$, respectivamente y sea $(x, y) \in X \times Y$.*

1. *Si $E \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ entonces $E_x \in \mathcal{B}$ y $E^y \in \mathcal{A}$.*
2. *Si $f : X \times Y \longrightarrow [-\infty, +\infty]$ es una función medible respecto de $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$, entonces $f_x$ es $\mathcal{B}$-medible y $f^y$ es $\mathcal{A}$-medible.*

DEMOSTRACIÓN: 1) Sea $\mathcal{C}$ el conjunto de todos los $E \subset X \times Y$ tales que $E_x \in \mathcal{B}$. Claramente $\mathcal{C}$ contiene a todos los productos $A \times B$ con $A \in \mathcal{A}$ y $B \in \mathcal{B}$, y además es una $\sigma$-álgebra, como se ve sin más que tener en cuenta que

$$Y \setminus E_x = ((X \times Y) \setminus E)_x, \qquad \bigcup_{n=0}^{\infty} (E_n)_x = \Big(\bigcup_{n=0}^{\infty} E_n\Big)_x.$$

Por consiguiente, $\mathcal{A} \times \mathcal{B} \subset \mathcal{C}$, y esto nos da la conclusión. Igualmente se razona con $E^y$.

2) es consecuencia de 1), pues $f_x^{-1}[U] = f^{-1}[U]_x$, $(f^y)^{-1}[U] = f^{-1}[U]^y$. ■

**Teorema B.38** *Si $(X,\mathcal{A},\mu)$, $(Y,\mathcal{B},\nu)$ son espacios medida $\sigma$-finitos, para todo $E\in\mathcal{A}\times\mathcal{B}$ y todo par $(x,y)\in X\times Y$ se cumple que las funciones $x\mapsto\nu(E_x)$, $y\mapsto\mu(E^Y)$ son medibles.*

Demostración: Supongamos en primer lugar que la medida $\nu$ es finita. Sea $\mathcal{C}$ el conjunto de todos los $E\in\mathcal{A}\times\mathcal{B}$ tales que la función $x\mapsto\nu(E_x)$ es medible (notemos que la función está bien definida por el teorema anterior). Si $A\in\mathcal{A}$, $B\in\mathcal{B}$, entonces $\nu((A\times B)_x)=\nu(B)\chi_A(x)$, luego $A\times B\in\mathcal{C}$.

Si probamos que $\mathcal{C}$ es una $\sigma$-álgebra, necesariamente $\mathcal{C}=\mathcal{A}\times\mathcal{B}$ y el teorema quedará probado (en el caso en que $\nu$ es finita). Puesto que el conjunto $\Sigma$ de productos $A\times B$ con $A\in\mathcal{A}$, $B\in\mathcal{B}$ es cerrado para intersecciones finitas, el teorema B.13 nos da que el sistema de Dynkin generado por $\Sigma$ es $\mathcal{A}\times\mathcal{B}$, luego basta probar que $\mathcal{C}$ es un sistema de Dynkin, ya que entonces tendrá que ser $\mathcal{C}=\mathcal{A}\times\mathcal{B}$ y el teorema quedará probado (en el caso en que $\nu$ es finita). Ahora bien, para ello basta tener en cuenta las igualdades:

$$\nu((F\setminus E)_x)=\nu(F_x)-\nu(E_x),\qquad \nu\Big(\Big(\bigcup_{n=0}^{\infty}E_n\Big)_x\Big)=\lim_n\nu((E_n)_x).$$

En el caso general, sea $\{D_n\}_{n=0}^{\infty}$ una sucesión de subconjuntos de $Y$ de medida finita tal que $Y=\bigcup\limits_{n=0}^{\infty}D_n$. Podemos tomarla creciente. Definimos medidas finitas $\nu_n$ en $D_n$ mediante $\nu_n(A)=\nu(A\cap D_n)$, y por la parte ya probada las funciones $x\mapsto\nu_n(E_x)$ son medibles (respecto del álgebra $\mathcal{A}\cap\mathcal{P}D_n$), luego también respecto de $\mathcal{A}$. Pero $\nu(E_x)=\lim\limits_n\nu_n(E_x)$, luego $x\mapsto\nu(E_x)$ también es medible. La prueba para $y\in Y$ es análoga. ■

**Teorema B.39** *Si $(X,\mathcal{A},\mu)$, $(Y,\mathcal{B},\nu)$ son espacios medida $\sigma$-finitos, existe una única medida $\mu\times\nu$ en $\mathcal{A}\times\mathcal{B}$ tal que, para cada $A\in\mathcal{A}$ y cada $B\in\mathcal{B}$, se cumple que*

$$(\mu\times\nu)(A\times B)=\mu(A)\nu(B).$$

*Más aún, si $E\in\mathcal{A}\times\mathcal{B}$, entonces*

$$(\mu\times\nu)(E)=\int_X\nu(E_x)\,d\mu(x)=\int_Y\nu(E^y)\,d\nu(y).$$

Demostración: En virtud del teorema anterior, podemos definir

$$(\mu\times\nu)_1(E)=\int_X\nu(E_x)\,d\mu(x),\qquad(\mu\times\nu)_2(E)=\int_Y\nu(E^y)\,d\nu(y).$$

Son dos medidas en $\mathcal{A}\times\mathcal{B}$, pues claramente $(\mu\times\nu)_1(\varnothing)=0$ y si $\{E_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión en $\mathcal{A}\times\mathcal{B}$ formada por conjuntos disjuntos dos a dos, los conjuntos $\{(E_n)_x\}_{n=0}^{\infty}$ también son disjuntas dos a dos y, usando B.30,

$$(\mu\times\nu)_1\Big(\bigcup_{n=0}^{\infty}E_n\Big)=\int_X\sum_{n=0}^{\infty}\nu((E_n)_x)\,d\mu(x)=$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_X\nu((E_n)_x)\,d\mu(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(\mu\times\nu)_1(E_n).$$

Igualmente se razona con $(\mu \times \nu)_2$. Es claro que

$$(\mu \times \nu)_1(A \times B) = \mu(A)\nu(B) = (\mu \times \nu)_2(A \times B).$$

El teorema B.14 implica ahora que $(\mu \times \nu)_1 = (\mu \times \nu)_2$, así como la unicidad indicada en el enunciado. ■

La medida $\mu \times \nu$ determinada por el teorema anterior se denomina *medida producto* de las medidas $\mu$ y $\nu$.

**Teorema B.40 (Tonelli)** *Sean $(X, \mathcal{A}, \mu)$, $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ espacios medida $\sigma$-finitos y sea $f : X \times Y \longrightarrow [0, +\infty]$ una función medible respecto de $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$. Entonces:*

1. *Las funciones*

$$x \mapsto \int_Y f_x(y)\, d\nu(y), \qquad y \mapsto \int_X f^y(x)\, d\mu(x)$$

*son medibles.*

2. $\displaystyle\int_{X\times Y} f\, d(\mu \times \nu) = \int_X \int_Y f(x, y)\, d\nu(y) d\mu(x) = \int_Y \int_X f(x, y)\, d\mu(x)\, d\nu(y).$

Demostración: Notemos que las funciones $f_x$, $f^y$ son medibles por el teorema B.37, por lo que las integrales de 1) están bien definidas. Si $f = \chi_E$, con $E \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$, entonces el teorema B.38 nos da 1) y el teorema B.39 nos da 2). De aquí se sigue que la conclusión es válida igualmente para funciones simples.

En general existe una sucesión creciente de funciones simples $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ que converge puntualmente a $f$. Entonces es claro que $\{(s_n)_x\}_{n=1}^{\infty}$ converge puntualmente a $f_x$ y, por el teorema de la convergencia monótona concluimos que

$$\lim_n \int_Y (s_n)_x\, d\nu = \int_Y f_x\, d\nu.$$

Como las funciones simples cumplen 1) tenemos que las funciones $\int_Y (s_n)_x\, d\nu$ son medibles y

$$\int_{X\times Y} s_n\, d(\mu \times \nu) = \int_X \left( \int_Y (s_n)_x\, d\nu \right) d\mu.$$

Consecuentemente el límite $\int_Y f_x\, d\nu$ es medible y aplicando el teorema de la convergencia monótona a los dos miembros de la igualdad anterior queda

$$\int_{X\times Y} f\, d(\mu \times \nu) = \int_X \lim_n \left( \int_Y (s_n)_x\, d\nu \right) d\mu = \int_X \left( \int_Y f_x\, d\nu \right) d\mu.$$

La otra igualdad se prueba análogamente. ■

Para funciones integrables arbitrarias tenemos el teorema siguiente:

**Teorema B.41 (Teorema de Fubini)** *Sean $X$ e $Y$ dos espacios medida con medidas $\sigma$-finitas $\mu$ y $\nu$ y sea $f : X \times Y \longrightarrow \mathbb{R}$ una función integrable. Entonces:*

1. *La función $f_x$ es integrable para casi todo $x \in X$ (es decir, salvo para valores de $x$ que pertenecen a un conjunto nulo) y la función $f^y$ es integrable para casi todo $y \in Y$.*

2. *Las funciones*[3]

$$\int_Y f_x \, d\nu \quad \text{(como función de } x\text{)} \quad \text{e} \quad \int_X f_y \, d\mu \quad \text{(como función de } y\text{)}$$

*están definidas y son integrables para casi todo $x \in X$ y casi todo $y \in Y$, respectivamente, y se cumple*

$$\int_{X\times Y} f \, d(\mu \times \nu) = \int_X \left( \int_Y f_x \, d\nu \right) d\mu = \int_Y \left( \int_X f_y \, d\mu \right) d\nu.$$

Demostración: Descomponemos $f = f^+ - f^-$, con lo que, por hipótesis, $f^+$ y $f^-$ son integrables. Por el teorema anterior, la integrabilidad de $f^+$ significa que

$$\int_{X\times Y} f^+ d(\mu \times \nu) = \int_X \left( \int_Y f_x^+ \, d\nu \right) d\mu < +\infty,$$

luego $\int_Y f_x^+ \, d\nu$ ha de ser finita salvo a lo sumo en un conjunto nulo[4], y lo mismo el válido para $\int_Y f_x^- \, d\nu$. Salvo para los puntos $x$ en la unión de estos dos conjuntos nulos, tenemos que la integral

$$\int_Y f_x \, d\nu = \int_Y f_x^+ \, d\nu - \int_Y f_x^- \, d\nu$$

está definida y es finita, es decir, que la función $\int_Y f_x \, d\nu$ es integrable. Además

$$\int_{X\times Y} f \, d(\mu \times \nu) = \int_{X\times Y} f^+ \, d(\mu \times \nu) - \int_{X\times Y} f^- \, d(\mu \times \nu)$$

$$= \int_X \left( \int_Y f_x^+ \, d\nu \right) d\mu - \int_X \left( \int_Y f_x^- \, d\nu \right) d\mu = \int_X \left( \int_Y f_x \, d\nu \right) d\mu.$$

La otra parte de c) es análoga. ■

[3]Notemos que los integrandos están definidos salvo en un conjunto nulo, pero tiene sentido considerar igualmente la integral, pues podemos dar al integrando cualquier valor en dicho conjunto nulo sin que ello altere el valor de la integral.

[4]En general, si $\int_X f \, d\mu = 0$ con $f \geq 0$, tiene que ser $f = 0$ salvo en un conjunto nulo, pues en caso contrario consideramos los conjuntos $X_n = \{x \in X \mid f(x) > 1/n\}$ y alguno de ellos tiene que tener medida positiva, y entonces la integral es al menos $\mu(X_n)/n > 0$.

## B.4 Medidas finitamente aditivas

Vamos a probar que es posible definir una integral respecto a medidas finitamente aditivas y acotadas. Por simplicidad nos restringiremos al único caso que nos va a interesar, que es el de medidas definidas sobre un álgebra de la forma $\mathcal{P}X$.

**Definición B.42** Si $X$ es un conjunto, una medida finitamente aditiva (y acotada) en $\mathcal{P}X$ es una aplicación $\mu : \mathcal{P}X \longrightarrow [0, +\infty[$ tal que $\mu(\varnothing) = 0$ y, cuando $A$, $B \in \mathcal{P}X$ son conjuntos disjuntos, se cumple que $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$.

Sea $B(X)$ el conjunto de todas las funciones $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ acotadas, es decir, que es un espacio de Banach con la norma dada por

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| \mid x \in X\}.$$

Consideramos en $B(X)$ la relación de orden parcial dada por

$$f \leq g \leftrightarrow \bigwedge x \in X\ f(x) \leq g(x).$$

Una *función simple* es una función $f \in B(X)$ que toma un número finito de valores.

Si llamamos $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ a los valores no nulos que toma $f$ y $X_i = f^{-1}[\alpha_i]$, entonces $f = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{X_i}$, donde $\chi_{X_i}$ a la función característica de $X_i$, es decir, la función dada por

$$\chi_{X_i}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in X_i, \\ 0 & \text{si } x \notin X_i. \end{cases}$$

y la expresión es única si exigimos que los conjuntos $X_i$ sean disjuntos y los $\alpha_i$ distintos dos a dos. Recíprocamente, toda función de esta forma es simple.

Sea $X$ un conjunto y $\mu$ una medida finitamente aditiva en $\mathcal{P}X$. Para cada función simple $s = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{X_i}$, definimos su *integral* respecto de $\mu$ como

$$\int_X s\, d\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(X_i).$$

**Teorema B.43** *Sea $X$ un conjunto, $\mu$ una medida finitamente aditiva en $\mathcal{P}X$, sean $s$, $t$ funciones simples y $\alpha$, $\beta \in \mathbb{R}$. Entonces*

$$\int_X (\alpha s + \beta t)\, d\mu = \alpha \int_X s\, d\mu + \beta \int_X t\, d\mu.$$

Demostración: Sean $s = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{X_i}$, $t = \sum\limits_{j=1}^{m} \beta_j \chi_{Y_j}$. Llamamos $X_{ij} = X_i \cap Y_j$ y completamos estos conjuntos con

$$X_{i0} = X_i \setminus \bigcup_{j=1}^{m} Y_j, \qquad X_{0j} = Y_j \setminus \bigcup_{i=1}^{n} X_i, \qquad X_{00} = \varnothing.$$

Así, conviniendo además en que $\alpha_0 = \beta_0 = 0$:

$$\alpha s + \beta t = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} \alpha\alpha_i \chi_{X_{ij}} + \sum_{j=0}^{m}\sum_{i=0}^{n} \beta\beta_j \chi_{X_{ij}} = \sum_{ij}(\alpha\alpha_i + \beta\beta_j)\chi_{X_{ij}},$$

luego

$$\int_X (\alpha s + \beta t)\, d\mu = \sum_{i,j}(\alpha\alpha_i + \beta\beta_j)\,\mu(X_{ij}) = \alpha \sum_{i,j}\alpha_i \mu(X_{ij}) + \beta \sum_{i,j}\beta_j \mu(X_{ij})$$

$$= \alpha \sum_{i=1}^{n}\alpha_i \sum_{j=0}^{m}\mu(X_{ij}) + \beta \sum_{j=1}^{m}\beta_j \sum_{i=0}^{n}\mu(X_{ij}) = \alpha \sum_{i=1}^{n}\alpha_i \mu(X_i) + \beta \sum_{j=1}^{m}\beta_j \mu(Y_j)$$

$$= \alpha \int_X s\, d\mu + \beta \int_X t\, d\mu.$$ ■

Observemos que si una función simple cumple $s \geq 0$, por la propia definición de integral tenemos que $\int_X s\, d\mu \geq 0$, luego si $s \leq t$, entonces $t - s \geq 0$ (y es una función simple, porque toma un número finito de valores), luego tenemos que $\int_X t\, d\mu - \int_X s\, d\mu \geq 0$ o, equivalentemente, $\int_X s\, d\mu \leq \int_X t\, d\mu$.

**Definición B.44** Sea $X$ un conjunto y $\mu$ una medida y finitamente aditiva en $\mathcal{P}X$. Si $f \in B(X)$, definimos

$$\int_X f\, d\mu = \sup\{\int_X s\, d\mu \mid s \in B(X) \land s \text{ es una función simple} \land s \leq f\}.$$

Notemos que, como $f$ está acotada, digamos $-M \leq f \leq M$, siempre existe una función simple $M\chi_X \leq f$.

La observación previa a la definición implica que si $f$ es simple esta integral coincide con la que ya teníamos definida.

**Teorema B.45** *Si $f \in B(X)$ y $\epsilon > 0$, existe una función simple $s \leq f$ tal que $f - s \leq \epsilon$.*

Demostración: Pongamos que $f[X] \subset [a, b[$ y consideremos un número natural $N$ tal que $(b-a)/N < \epsilon$. Entonces los conjuntos

$$Y_n = \left[a + \frac{n(b-a)}{N}, a + \frac{(n+1)(b-a)}{N}\right[,$$

para $n < N$ forman una partición de $[a, b[$, luego los conjuntos $X_n = f^{-1}[Y_n]$ forman una partición de $X$ y la función

$$s = \sum_{n<N}\left(a + \tfrac{n(b-a)}{N}\right)\chi_{X_n}$$

cumple lo pedido. ■

Notemos que, en las condiciones del teorema anterior, $\|f - s\|_\infty \leq \epsilon$, por lo que el teorema implica que las funciones simples forman un subespacio vectorial denso de $B(X)$.

Por otra parte,

$$\int_X f\,d\mu - \int_X s\,d\mu \leq \epsilon.$$

En efecto, si $u \leq f$ es una función simple, entonces $u - s \leq f - s \leq \epsilon$, luego

$$\int_X u\,d\mu - \int_X s\,d\mu \leq \int_X u - s\,d\mu \leq \int_X \epsilon\,d\mu = \epsilon,$$

luego $\int_X u\,d\mu \leq \int_X s\,d\mu + \epsilon$ y, tomando supremos, $\int_X f\,d\mu \leq \int_X s\,d\mu + \epsilon$.

**Teorema B.46** *Si $\mu$ es una medida finitamente aditiva en $X$ y $f$, $g \in B(X)$, entonces*

$$\int_X (f+g)\,d\mu = \int_X f\,d\mu + \int_X g\,d\mu.$$

Demostración: Dado $\epsilon > 0$, sean $s \leq f$, $t \leq g$ funciones simples tales que $f - s \leq \epsilon/4$, $f - g \leq \epsilon/4$, de donde a su vez $(f+g) - (s+t) \leq \epsilon/2$. Por la observación precedente al teorema

$$\left|\int_X f + g\,d\mu - \int_X f\,d\mu - \int_X g\,d\mu\right| \leq \left|\int_X f + g\,d\mu - \int_X s + t\,d\mu\right|$$

$$+\left|\int_X f\,d\mu - \int_X s\,d\mu\right| + \left|\int_X g\,d\mu - \int_X t\,d\mu\right| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} = \epsilon.$$

Como esto vale para todo $\epsilon > 0$, tiene que darse la igualdad del enunciado. ■

Veamos finalmente las propiedades básicas de la integral respecto a medidas finitamente aditivas:

**Teorema B.47** *Sea $X$ un conjunto, $\mu$ una medida unitaria finitamente aditiva en $\mathcal{P}X$, $f$, $g \in B(X)$ y $\alpha$, $\beta \in \mathbb{R}$. Entonces*

1. $\displaystyle\int_X (\alpha f + \beta g)\,d\mu = \alpha \int_X f\,d\mu + \beta \int_X g\,d\mu.$

2. *Si $f \geq 0$ entonces* $\displaystyle\int_X f\,d\mu \geq 0.$

3. $\displaystyle\left|\int_X f\,d\mu\right| \leq \int_X |f|\,d\mu.$

4. *Si $A \subset X$, entonces* $\displaystyle\int_X \chi_A\,d\mu = \mu(A).$

Demostración: Observemos en primer lugar que si $f \leq g$, entonces toda $s \leq f$ simple cumple $s \leq g$, luego $\int_X s\,d\mu \leq \int_X g\,d\mu$, luego $\int_X f\,d\mu \leq \int_X g\,d\mu$.

a) Por el teorema anterior, basta probar que

$$\int_X \alpha f\,d\mu = \alpha \int_X f\,d\mu.$$

Vamos a suponer que $\alpha < 0$, pues el caso $\alpha > 0$ es más sencillo. Si $s \leq f$ es una función simple, entonces $\alpha s \geq \alpha f$, luego, por la monotonía que hemos probado al principio de la prueba $\alpha \int_X s\, d\mu = \int_X \alpha s\, d\mu \geq \int_X \alpha f\, d\mu$, luego

$$\int_X s\, d\mu \leq \frac{1}{\alpha} \int_X \alpha f\, d\mu,$$

y esto vale para toda $s \leq f$ simple, luego

$$\int_X f\, d\mu \leq \frac{1}{\alpha} \int_X \alpha f\, d\mu,$$

luego $\alpha \int_X f\, d\mu \geq \int_X \alpha f\, d\mu$. Ahora, si $s \leq \alpha f$ es una función simple, entonces $(1/\alpha)s \geq f$, luego

$$\frac{1}{\alpha} \int_X s\, d\mu \geq \int_X f\, d\mu, \quad \text{luego} \quad \int_X s\, d\mu \leq \alpha \int_X f\, d\mu,$$

y esto para todo $s \leq \alpha f$ simple, luego $\int_X \alpha f\, d\mu \leq \alpha \int_X f\, d\mu$.

b) Como $0 = \chi_\varnothing$ es una función simple, si $f \geq 0$, por la propia definición de integral $0 = \int_X \chi_\varnothing\, d\mu \leq \int_X f\, d\mu$.

c) Basta tener en cuenta que $-|f| \leq f \leq |f|$, luego por la monotonía que hemos probado y la linealidad,

$$-\int_X |f|\, d\mu \leq \int_X f\, d\mu \leq \int_X |f|\, d\mu,$$

de donde se sigue la desigualdad del enunciado.

d) Por definición de integral de una función simple. ■

# Bibliografía


[1] Alas, O.T., Wilson, R.G. *When is a Compact Space Sequentially Compact?* Topology Proceedings, 29 (2) (2005), 327–335.

[2] Bell, J.L., Fremlin, D.H. A geometric form of the axiom of choice, Fundamenta Mathematicae, 77 (1972) 167–170.

[3] Bourbaki, N. *General Toplogy,* Addison Wesley (1966).

[4] Ciesielski, K.C., Wojciechowski, J. *Cardinality of regular spaces admitting only constant continuous functions,* Topology Proceedings, 47 (2016) 313–329.

[5] Cohn, D.L. *Measure Theory,* Birkhäuser (2013).

[6] Engelking, R. *General Topology,* Heldermann (1989).

[7] Fleissner, W.G. *A Normal Collectionwise Hausdorff non Collectionwise Normal Space,* General Topology and its Applications, 6 (1976), 57–64

[8] Gantner, T.E. *A Regular Space on which every Continuous Real-Valued Function is Constant,* The American Mathematical Monthly, 78 (1971), 52–53.

[9] GJ Gillman, L., Jerison, M. *Rings of Continuous Functions,* Van Nostrand (1960).

[10] HJ Hajnal, A., Juhász, I. Some Remarks on a Property of Topological Cardinal Functions, Acta Mathematica Academiae Scientiarum Huncaricae, 20 (1969), 25–37.

[11] Heath, R.W., Lutzer, D.J., Zenor, P.L. *Monotonically normal spaces,* Transactions of the American Mathematical Society, 178 (1973), 481–493.

[12] Jameson, G.J.O. *Topology and Normed Spaces,* Chapman and Hall (1974).

[13] Kunen, K. y Vaughan, J.E. (editores) *Handbook of Set-Theoretic Topology,* North Holland, Amsterdam, 1984.

[14] MARDEŠIĆ, S., PAPIĆ, P. *Continuous images of ordered compacta,* Glasnik Mat. 17 (1962), 3–25.

[15] MOODY, P.J. *A construction that yields a nonacyclic monotonically normal space,* Topology and its Applications, 44 (1992), 263–269.

[16] NAGY, Z.S., PURISCH, S. *When Hereditarily Colectionwise Hausdorffness Implies Regularity* en Steprāns, J, Watson S (Eds.) *Set Theory and its Applications* Springer (1969) 128–134.

[17] OXTOBY, J.C. *Measure and Category,* Springer 1980.

[18] ROELCKE, W., DIEROLF, S. *Uniform Structures on Topological Groups and their Quotients.* Mc. Graw Hill (1981).

[19] SCHAEFER, H.H., *Topological Vector Spaces,* Springer (1971).

[20] STEEN, L.A., SEEBACH, J.A., *Counterexamples in Topology,* Holt, Rinehart and Winston Inc.(1970).

[21] SZYMAŃSKY, A. *Products and Measurable Cardinals,* Supplemento ai Rendiconti del Circolo Matematico di Parlermo II (11) (1985) 105–112.

[22] VAN DOUWEN, E.K. *The Integers and Topology,* en [13].

[23] WILANSKY, A. *Topology for Analysis,* Ginn and Company (1970).

[24] WOHOFSKY, W. *On the existence of p-points and other ultrafilters in the Stone-Čech compactification of* $\mathbb{N}$*,* Diploma Thesis, Vienna University of Technology, Viena, 2008.

# Índice de Materias