Carlos Ivorra Castillo

TEORÍA DESCRIPTIVA DE CONJUNTOS

Mais la question beaucoup plus intéressante: peut-on nommer un ensemble non mesurable? reste entière.

H. Lebesgue

Índice General

Preámbulo

Los libros *Pruebas de consistencia* [PC], *Teoría descriptiva de conjuntos* [TD] y *Cardinales grandes* [CG] suponen al lector familiarizado con mi libro de *Teoría de conjuntos* [TC], en parte también con mi libro de *Topología* [T] y, en menor medida, con el de *Lógica matemática* [LM].

Más explícitamente, para seguir [PC], un lector familiarizado con [TC] pero no con [LM] debería asimilar al menos el Capítulo I de [LM] sobre lenguajes formales y, sobre todo, estudiar la axiomática de ZFC hasta el punto en que vea evidente que todos los resultados demostrados en [TC] a partir de los axiomas de NBG son demostrables (con los mismos argumentos, una vez establecidos con técnicas distintas los hechos más básicos) en ZFC. En particular esto supone familiarizarse con el uso informal de clases propias en ZFC. Para ello el lector puede revisar las secciones 3.2, 3.3 y 10.3 de [LM]. El capítulo I de [PC] está dedicado a discutir los principales conceptos y resultados que vamos a necesitar de [LM], con el fin de que un lector no familiarizado en profundidad con [LM] pueda seguir igualmente [PC] consultando [LM] de forma puntual cuando así se requiera. Las referencias a [T] en [PC] se dan principalmente en el capítulo VI y en algunos otros puntos aislados, en relación a aplicaciones concretas.

Por otra parte, en [CG] no hay ninguna referencia directa a [T] o a [LM], pero sí que hay una fuerte dependencia respecto a [TC].

En [TD] tampoco hay referencias a [LM], pero sí que requiere esencialmnte el capítulo VI de [T], dedicado a los espacios polacos, y también en parte de algunos resultados de [TC], sobre todo relacionados con la teoría de la medida, con cardinales y con el axioma de Martin.

En cuanto a las interdependencias entre [TD], [PC] y [CG], la tabla de la página siguiente muestra un posible orden de lectura simultánea.

En realidad, [TD] no requiere nada de los otros dos libros hasta la sección 4.7, donde se usan algunos resultados del capítulo II de [PC]. La dependencia con [PC] se vuelve más estrecha a partir del capítulo VI, donde se usan además algunos resultados del capítulo III de [CG]. Los capítulos X y XI requieren esencialmente resultados de [CG], sobre todo del capítulo VII.

Por su parte, [PC] depende de [TD] únicamente en los capítulos VI y IX, y de [CG] únicamente en la aplicación presentada en la sección 12.1 y en la prueba de la consistencia del axioma de los preórdenes propios en el capítulo XIII.

DESCRIPTIVA	CONSISTENCIA	CARDINALES
TD I	**PC I**	
Ctos. de Borel y analíticos	Preliminares	
TD II	**PC II**	**CG I**
Conjuntos proyectivos	Modelos de ZF	Ultrapotencias
TD III	**PC III**	**CG II**
Teoría de la recursión	Constructibilidad	Consistentes con L
TD IV	**PC IV**	**CG III**
La teoría efectiva	Extensiones genéricas	Indiscernibles de Silver
TD V	**PC V**	**CG IV**
Ctos. hiperaritméticos	Aplicaciones	Erdős y Ramsey
TD VI	**PC VI**	**CG V**
Pruebas de consistencia	Reales genéricos	Medibles
TD VII	**PC VII**	**CG VI**
Juegos infinitos	Extensiones iteradas	Débilmente medibles
TD VIII	**PC VIII**	**CG VII**
Grados de Wadge	La independencia de AE	Fuertes y superfuertes
TD IX	**PC IX**	**CG VIII**
Wadge Borel	El modelo de Solovay	Compactos, supercompactos
TD X	**PC X**	**CG IX**
La consistencia de ADP	El Tª de los ultrafiltros	Los mayores cardinales
TD XI	**PC XI**	**CG X**
La consistencia de AD	Extensiones propias	Iteraciones de Easton
	PC XII	**CG XI**
	Aplicaciones	La independencia de la HCS
	PC XIII	
	El axioma APP	

En cambio, [CG] depende esencialmente de los primeros capítulos de [PC]. El capítulo I puede leerse tras el capítulo II de [PC] (como indica la tabla) salvo la sección final 1.8, que requiere el capítulo III de [PC] (constructibilidad). Los capítulos IV y V de [PC] (sobre extensiones genéricas) se requieren ocasionalmente en el capítulo VI de [CG], pero no vuelven a ser necesarios hasta los capítulos X y XI, donde se requiere también el capítulo VII de [PC].

Por último, hay que señalar que, para entender plenamente las introducciones a [TD] y [CG] es necesario conocer algunos hechos básicos de [PC], hasta el capítulo III en algunos puntos.

Introducción

La teoría descriptiva de conjuntos consiste esencialmente en el estudio de conjuntos (subconjuntos de espacios topológicos, para ser más precisos) que resultan de aplicar un proceso de construcción a partir de conjuntos sencillos o que satisfacen una definición más o menos explícita, de modo que, en un sentido no muy preciso, pueden considerarse conjuntos "definibles", por oposición a conjuntos "arbitrarios" de los que no tenemos *a priori* información alguna sobre su estructura.

Los precedentes de la teoría descriptiva de conjuntos se remontan a finales del siglo XIX, cuando Cantor trataba de demostrar (o, en su caso, refutar) la hipótesis del continuo. En la práctica, todo se reducía a demostrar que todo subconjunto de $\mathbb{R}$ es numerable o bien tiene el cardinal del continuo, $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$. Cantor abordó el problema de formas muy diversas, y una de ellas fue estudiar primero los subconjuntos de $\mathbb{R}$ más sencillos para ir analizando progresivamente conjuntos más complejos.

Los subconjuntos más sencillos son sin duda los conjuntos abiertos, especialmente a la hora de calcular cardinales, pues todo abierto no vacío contiene un intervalo abierto, y es fácil ver que todo intervalo abierto se puede biyectar con $\mathbb{R}$ (mediante una aplicación continua, de hecho).

Cantor se propuso entonces estudiar los subconjuntos cerrados de $\mathbb{R}$. Ya no es cierto que todos tengan cardinal $\mathfrak{c}$, pues, por ejemplo, $\mathbb{Z}$ es un subconjunto cerrado numerable. No obstante, sucede que todo subconjunto cerrado de $\mathbb{R}$ es numerable o tiene cardinal $\mathfrak{c}$. Para llegar a esta conclusión estudió primero los cerrados que llamó *perfectos,* que en lenguaje moderno son los cerrados no vacíos sin puntos aislados, y demostró que todo cerrado perfecto contiene una copia del que ahora conocemos como conjunto (ternario) de Cantor, y esto a su vez implica que tiene cardinal $\mathfrak{c}$.

El caso de un cerrado arbitrario fue resuelto por un joven estudiante sueco llamado Ivar Otto Bendixson, que se lo comunicó a Cantor en una carta, en la que demostraba, basándose en ideas de Cantor, que todo cerrado puede descomponerse como unión de un cerrado perfecto (o vacío) y de un conjunto numerable. Por lo tanto, ningún cerrado podía servir de contraejemplo a la hipótesis del continuo.

Es en la demostración de este hecho, que hoy se conoce como teorema de Cantor-Bendixson, (publicada en 1883) donde podemos encontrar un argumento que nos aparecerá más adelante en este libro y que, por consiguiente, puede verse como uno de los primeros precedentes de la teoría descriptiva de conjuntos. Veamos un esbozo:

Dado un cerrado $C \subset \mathbb{R}$, consideramos su *conjunto derivado* C' (un concepto que había sido introducido por Cantor unos años atrás), que en términos modernos no es sino el conjunto de los puntos de acumulación de C. El hecho de que C sea cerrado se traduce en que $C' \subset C$. También había sido Cantor quien había observado que era posible definir una sucesión decreciente de conjuntos:

$$C = C^{(0)} \supset C^{(1)} \supset C^{(2)} \supset C^{(3)} \supset \cdots,$$

donde cada conjunto es el derivado del anterior, al igual que fue Cantor quien observó que a continuación se podía calcular

$$C^{(\infty)} = \bigcap_{n=0} C^{(n)},$$

y que a su vez esto permitía continuar la sucesión de conjuntos derivados:

$$C = C^{(0)} \supset C^{(1)} \supset C^{(2)} \supset \cdots \supset C^{(\infty)} \supset C^{(\infty+1)} \supset C^{(\infty+2)} \supset \cdots$$

Similarmente, se podía calcular

$$C^{(\infty+\infty)} = C^{(2\cdot\infty)} = \bigcap_{n=0}^{\infty} C^{(\infty+n)},$$

lo que a su vez permitía continuar de nuevo la sucesión con los derivados sucesivos de este conjunto, etc.

Ésta es la notación que usó Cantor en un principio para los conjuntos derivados (aunque la notación para la intersección es posterior), pero fue precisamente la generación de esta sucesión transfinita de conjuntos derivados la que le había llevado a introducir los números ordinales, y Bendixson conocía bien la teoría de ordinales, sobre la que Cantor ya había publicado varios trabajos en los que la exponía sistemáticamente. En particular, la notación "moderna" para el ordinal que Cantor había representado por ∞ era ω, y los convenios de la aritmética ordinal requerían escribir $\omega \cdot 2$ en lugar de $2 \cdot \infty$.

Así pues, el punto de partida de Bendixson fue la sucesión transfinita definida recurrentemente por

$$C^{(0)} = C, \qquad C^{(\alpha+1)} = C^{(\alpha)\prime}, \qquad C^{(\lambda)} = \bigcap_{\delta<\lambda} C^{(\delta)}.$$

Bendixson demostró que tiene que existir un ordinal numerable α tal que $C^{(\alpha+1)} = C^{(\alpha)}$. Entonces, $C^{(\alpha)}$ (un conjunto igual a su derivado) ha de ser un cerrado perfecto (o el conjunto vacío), mientras que cada diferencia $C^{(\beta+1)} \setminus C^{(\beta)}$, para $\beta < \alpha$ es un conjunto de puntos aislados, y la topología de $\mathbb{R}$ obliga a que sea numerable, al igual que la unión de todos ellos (puesto que α es numerable). Esto nos da la descomposición de Cantor-Bendixson.

Baire Cantor celebró el resultado, pero lo cierto es que no lo aprovechó. Para encontrar otro precedente de la teoría descriptiva de conjuntos hemos de dejar pasar 16 años y trasladarnos a Francia, donde, en 1899, René-Louis Baire defendió su tesis doctoral. Es conocido que el límite uniforme de una sucesión de funciones continuas es una función continua, así como que esto no es cierto en general para límites puntuales. Por ello Baire introdujo las que hoy se conocen como *funciones de Baire* a través de una recursión transfinita: Para $X \subset \mathbb{R}^n$, definió el conjunto de las funciones (de Baire) de clase 0 como el conjunto $B_0(X)$ de las funciones continuas $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ y, para cada ordinal numerable α, definió el conjunto de las funciones (de Baire) de clase α como el conjunto $B_\alpha(X)$ de las funciones que pueden obtenerse como límite puntual de una sucesión de funciones de las clases precedentes: $\bigcup\limits_{\beta<\alpha} B_\beta(X)$. Las funciones de Baire en X son los elementos de

$$B(X) = \bigcup_{\alpha<\omega_1} B_\alpha(X).$$

De este modo, la clase de las funciones de Baire en X es la menor familia de funciones reales definidas sobre X que contiene a las funciones continuas y es cerrada para límites puntuales. Como Cantor, Baire avistó un camino, pero no se decidió a seguirlo, pues en su tesis estudia únicamente las funciones de Baire de clase 0 y 1.

Lebesgue El primer trabajo que puede considerarse propiamente como "teoría descriptiva de conjuntos" en el sentido moderno es el titulado *"Sur les fonctions représentables analytiquement"*, publicado por Lebesgue[1] en 1905. Lebesgue define la clase de las funciones representables analíticamente como la menor familia de funciones (en un conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$) cerrada para proyecciones, sumas, productos y límites puntuales. No es difícil probar que se trata simplemente de la clase de las funciones de Baire. Sin embargo, Lebesgue emprendió un estudio sistemático de estas funciones. Definió esencialmente la misma jerarquía que Baire y demostró, por ejemplo, que es estrictamente creciente, es decir, que si $\alpha < \beta$ son dos ordinales numerables, entonces $B_\alpha(X) \subsetneq B_\beta(X)$. En el artículo de Lebesgue encontramos el uso sistemático de varias técnicas que aparecerán en este libro: conjuntos universales, el empleo del método diagonal de Cantor, etc.

Lebesgue estudió a su vez una clase de conjuntos introducida de forma más o menos vaga por Emile Borel en el curso de sus investigaciones sobre teoría de la medida y teoría de la probabilidad. En términos modernos, la σ-álgebra de Borel de un espacio topológico es la menor familia de subconjuntos $\mathcal{B}$ que contiene a los abiertos y que es cerrada para uniones e intersecciones numerables y para complementos. Siempre con notación moderna, $\mathcal{B}$ también puede describirse en términos de una jerarquía transfinita:

En la base tenemos la clase $\mathbf{\Sigma}^0_1$ de los conjuntos abiertos y la clase $\mathbf{\Pi}^0_1$ de los conjuntos cerrados (sus complementarios). En segundo lugar tenemos las clases $\mathbf{\Sigma}^0_2$ y $\mathbf{\Pi}^0_2$, la primera de las cuales contiene a las uniones numerables de cerrados (los conjuntos que los topólogos llaman F_σ) y la segunda a sus

[1] La frase citada en la página iii es la frase con la que Lebesgue termina este tratado.

complementarios, que son también las intersecciones numerables de abiertos (o conjuntos G_δ). En general, para cada ordinal numerable α, las clases $\boldsymbol{\Sigma}^0_\alpha$ y $\boldsymbol{\Pi}^0_\alpha$ constan, respectivamente, de las uniones e intersecciones numerables de conjuntos de las clases precedentes $\boldsymbol{\Pi}^0_\beta$ y $\boldsymbol{\Sigma}^0_\beta$, respectivamente. Puede probarse que en todo espacio métrico X se tienen las inclusiones siguientes:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=small]
 & \boldsymbol{\Sigma}^0_1 \arrow[dr, phantom, sloped, "\subset"] & & \boldsymbol{\Sigma}^0_2 \arrow[dr, phantom, sloped, "\subset"] & & \boldsymbol{\Sigma}^0_3 \arrow[dr, phantom, sloped, "\subset"] & & \cdots \\
\boldsymbol{\Delta}^0_1 \arrow[ur, phantom, sloped, "\subset"] \arrow[dr, phantom, sloped, "\subset"] & & \boldsymbol{\Delta}^0_2 \arrow[ur, phantom, sloped, "\subset"] \arrow[dr, phantom, sloped, "\subset"] & & \boldsymbol{\Delta}^0_3 \arrow[ur, phantom, sloped, "\subset"] \arrow[dr, phantom, sloped, "\subset"] & & \boldsymbol{\Delta}^0_4 \arrow[ur, phantom, sloped, "\subset"] \arrow[dr, phantom, sloped, "\subset"] & \\
 & \boldsymbol{\Pi}^0_1 \arrow[ur, phantom, sloped, "\subset"] & & \boldsymbol{\Pi}^0_2 \arrow[ur, phantom, sloped, "\subset"] & & \boldsymbol{\Pi}^0_3 \arrow[ur, phantom, sloped, "\subset"] & & \cdots
\end{tikzcd}$$

donde $\boldsymbol{\Delta}^0_n = \boldsymbol{\Sigma}^0_n \cap \boldsymbol{\Pi}^0_n$, de modo que, por ejemplo, $\boldsymbol{\Delta}^0_1$ es el álgebra de los subconjuntos abiertos cerrados del espacio X. La σ-álgebra de Borel es entonces

$$\mathcal{B} = \bigcup_{\alpha<\omega_1} \boldsymbol{\Sigma}^0_\alpha = \bigcup_{\alpha<\omega_1} \boldsymbol{\Pi}^0_\alpha = \bigcup_{\alpha<\omega_1} \boldsymbol{\Delta}^0_\alpha.$$

Lebesgue demostró que la clase $B_\alpha(X)$ coincide con la clase de las funciones $\boldsymbol{\Sigma}^0_{\alpha+1}$-medibles en X, es decir, la clase de las funciones $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ tales que si A es abierto en $\mathbb{R}$ entonces $f^{-1}[A]$ está en la clase $\boldsymbol{\Sigma}^0_{\alpha+1}$.

Lusin, Suslin, Alexandroff En 1914, un joven profesor ruso de 21 años, Nikolai Nikolaevich Lusin, a instancias de uno de sus maestros, Dimitri Dedorovich Egorov, se puso al frente de un grupo de investigación integrado por algunos estudiantes, entre los que destacaban Mikhail Yakovlevich Suslin (de 20 años) y Pavel Sergeevich Alexandroff (de 18 años). Dirigidos por el carismático Lusin, los miembros de "la Lusitania" —como pronto fue conocido jocosamente el grupo— promovieron la investigación en una de las ramas más recientes de la matemática: la teoría de conjuntos y funciones. Así, en 1915, Alexandroff demostró que todo conjunto de Borel (o B-conjunto, como lo solían llamar) puede construirse a partir de conjuntos cerrados de una forma mucho más simple que la descrita por Lebesgue, sin necesidad de recurrir a sucesiones transfinitas (hasta entonces consideradas como inevitables). A saber, dado un conjunto de Borel B, existe una familia de cerrados $\{C_s\}_{s\in\omega^{<\omega}}$, donde s recorre las sucesiones finitas de números naturales, de modo que

$$B = \bigcup_{x\in\omega^\omega} \bigcap_{n\in\omega} C_{x|_n},$$

donde ω es el conjunto de los números naturales y ω^ω el conjunto de las sucesiones de números naturales.

Suslin propuso que los conjuntos de esta forma se llamaran A-conjuntos, en honor de Alexandroff, al igual que los conjuntos de Borel se llamaban B-conjuntos en honor a Borel. Cuando Alexandroff comunicó a Lusin su descubrimiento, éste lo animó a investigar el recíproco, es decir, si todo A-conjunto es un B-conjunto. Mientras tanto, Suslin abordaba el problema de la cardinalidad de los conjuntos de Borel. Su propósito era generalizar el teorema de

Cantor-Bendixson y probar que todo conjunto de Borel no numerable tiene cardinal $\mathfrak{c}$. Alexandroff pasó el invierno con el problema de si los A-conjuntos son B-conjuntos, pero no llegó a ninguna conclusión.

Por otra parte, Lusin había sugerido a Suslin que se estudiara el trabajo original de Lebesgue de 1905, y el joven ruso no tardó en detectar un error. Lebesgue demostraba que toda función definida implícitamente por una ecuación analíticamente representable es analíticamente representable, y para ello se apoyaba en un lema que presentaba sin demostración, como algo evidente. Según dicho lema, la proyección de un conjunto de Borel es también un conjunto de Borel. Al tratar de justificar esta afirmación, Suslin terminó convenciéndose de que era falsa, y en el verano de 1916 encontró un ejemplo de proyección de un conjunto de Borel que no era a su vez un conjunto de Borel. Pero lo más significativo del caso era que dicho ejemplo lo había construido a partir de intervalos cerrados con la operación de Alexandroff, es decir, Suslin había encontrado un ejemplo de A-conjunto que no era un B-conjunto. Rápidamente puso sus conclusiones por escrito y se las presentó a Lusin. Ese momento fue presenciado por Waclaw Sierpinski, un matemático polaco que estaba asistiendo a los seminarios de Lusin en Moscú. Lusin analizó con mucho interés el escrito de Suslin y confirmó que era correcto. Los A-conjuntos terminaron siendo conocidos como conjuntos *analíticos,* y los primeros resultados sobre ellos fueron obtenidos por Suslin y Lusin en los meses siguientes.

Paralelamente, mientras Suslin había resuelto el problema que Alexandroff no había sido capaz de resolver, éste (al mismo tiempo, pero independientemente del alemán Felix Hausdorff) resolvió el problema de aquél: probó que todo conjunto de Borel no numerable posee un subconjunto perfecto, por lo que tiene cardinal $\mathfrak{c}$ y, consecuentemente, ningún conjunto de Borel puede ser un contraejemplo a la hipótesis del continuo. (Cantor se habría ilusionado si no fuera porque tenía entonces 71 años y ya estaba retirado. Vivía en la pobreza, pasando hambre a causa de la Primera Guerra Mundial, y moriría dos años después.)

En 1917 Suslin publicó un artículo en el que, entre otras cosas, probaba una elegante caracterización de los conjuntos de Borel: Un conjunto es de Borel si y sólo si es a la vez analítico y *coanalítico* (es decir, si tanto él como su complementario son analíticos). Por su parte, Suslin anunció ese mismo año otro resultado básico que demostraba que el teorema de Lebesgue era correcto a pesar del error en su prueba.

Durante ese año Rusia cambió traumáticamente un dictador de sangre demasiado azul por otro de sangre demasiado roja, y muchos universitarios consideraron prudente abandonar Moscú. Alexandroff fue encarcelado por un tiempo y Suslin y Lusin aceptaron sendos puestos en el Instituto Politécnico de Ivanovo, donde pasaron hambre, frío y otras penurias. La salud de Suslin nunca había sido muy buena. El 14 de junio de 1919, por prescripción médica, solicitó un permiso para retirarse hasta después del invierno a la casa de sus padres en Krasavka. Las autoridades le respondieron que le concedían como máximo un mes de vacaciones, por lo que el 20 de junio presentó su renuncia y marchó a Krasavka de todos modos. Allí murió de tifus en diciembre, con 24 años.

Sierpinski y los matemáticos polacos Al término de la Primera Guerra Mundial, Sierpinski regresó a Varsovia, donde en 1920 fundó junto con Stefan Mazurkiewicz la revista *Fundamenta Mathematicæ,* en cuyo primer número apareció un artículo póstumo de Suslin (en el que planteaba la famosa hipótesis de Suslin[2]). Durante los años siguientes, Lusin en Moscú y Sierpinski en Varsovia dirigieron los avances en la teoría descriptiva de conjuntos, a la que posteriormente se sumarían varios matemáticos rusos y, sobre todo, polacos (Banach, Kuratowski, Ulam, Tarski, etc.). Entre las contribuciones de la escuela de topólogos polacos cabe destacar el hecho de que, en lugar de trabajar en $\mathbb{R}^n$, desarrollaron la teoría descriptiva de conjuntos en una familia de espacios más generales (espacios topológicos completamente metrizables y separables). Las malas relaciones de la Unión Soviética con la Europa "capitalista" hicieron que su trabajo permaneciera prácticamente desconocido en Occidente y, cuando fue "descubierto" (gracias principalmente a los numerosos polacos que abandonaron su patria para huir primero de los nazis y luego de los comunistas), los espacios topológicos completamente metrizables y separables recibieron el nombre que aún conservan: *espacios polacos.*

La introducción de los espacios polacos confirió gran flexibilidad a la teoría. Por ejemplo, el más simple de los espacios polacos no triviales es el *espacio de Baire* $\mathcal{N} = \omega^\omega$ formado por las sucesiones de números naturales, considerado como producto de infinitas copias del espacio discreto ω con la topología producto usual. Así, el estudio de $\mathcal{N}$ es especialmente simple en comparación con el de otros espacios polacos y, al mismo tiempo, los resultados obtenidos para $\mathcal{N}$ pueden generalizarse a espacios polacos arbitrarios gracias a ciertos resultados generales, como que todo espacio polaco es imagen continua de $\mathcal{N}$, o que dos espacios polacos cualesquiera no numerables X e Y son Borel-isomorfos, es decir, existe una biyección $f : X \longrightarrow Y$ que hace corresponder las respectivas σ-álgebras de Borel. Otra conexión destacable entre $\mathcal{N}$ y $\mathbb{R}$ es que existe un homeomorfismo canónico entre $\mathcal{N}$ y el espacio de los números irracionales.

Conjuntos proyectivos En 1925 Lusin y Sierpinski dieron un gran paso al introducir la noción de *conjunto proyectivo.* Esta noción surge de forma natural tras haber demostrado que los conjuntos analíticos son precisamente las imágenes continuas de los conjuntos de Borel, de modo que toda imagen continua de un conjunto analítico es obviamente analítica (porque toda imagen continua de una imagen continua de un conjunto de Borel es obviamente una imagen continua de un conjunto de Borel). Con la notación moderna, la clase de los conjuntos analíticos (en un espacio polaco) se representa por $\mathbf{\Sigma}^1_1$, mientras que $\mathbf{\Pi}^1_1$ es la clase de sus complementarios, los conjuntos coanalíticos. A su vez, se define $\mathbf{\Delta}^1_1 = \mathbf{\Sigma}^1_1 \cap \mathbf{\Pi}^1_1$, que, según el teorema demostrado por Suslin, no es sino la σ-álgebra de Borel.

Notemos que existen conjuntos $\mathbf{\Pi}^1_1$ que no son analíticos, pues en caso contrario todo conjunto analítico tendría complementario analítico y sería de Borel. Por lo tanto, en principio, las imágenes continuas de los conjuntos coanalíticos

[2]Véase la sección 9.1 de mi libro de Teoría de Conjuntos.

no son necesariamente analíticas ni coanalíticas, sino que determinan una nueva clase de conjuntos, que hoy representamos por $\mathbf{\Sigma}^1_2$. La clase $\mathbf{\Sigma}^1_2$ es trivialmente cerrada para imágenes continuas, pero no así la clase $\mathbf{\Pi}^1_2$ de sus complementos, cuyas imágenes continuas determinan una nueva clase $\mathbf{\Sigma}^1_3$, y así sucesivamente. La clase de los conjuntos proyectivos es

$$P = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbf{\Sigma}^1_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbf{\Pi}^1_n.$$

Los conjuntos proyectivos reciben este nombre porque puede probarse que, en realidad, los conjuntos $\mathbf{\Sigma}^1_{n+1}$ de un espacio polaco X pueden obtenerse como proyecciones de conjuntos $\mathbf{\Pi}^1_n$ de un producto $X \times Y$, o incluso del producto concreto $X \times \mathcal{N}$. Las técnicas que Lebesgue había introducido para obtener los hechos básicos sobre la jerarquía de Borel se adaptaban fácilmente para la jerarquía proyectiva, de modo que Lusin no tuvo dificultades en demostrar que es estricta, es decir, que cada nueva clase contiene conjuntos "nuevos", que no están en la clase precedente, así como que, si definimos $\mathbf{\Delta}^1_n = \mathbf{\Sigma}^1_n \cap \mathbf{\Pi}^1_n$, tenemos las inclusiones

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & \subset & \mathbf{\Sigma}^1_1 & \subset & & \subset & \mathbf{\Sigma}^1_2 & \subset & & \subset & \mathbf{\Sigma}^1_3 & \subset & & \subset & \cdots \\
\mathbf{\Delta}^1_1 & & & & \mathbf{\Delta}^1_2 & & & & \mathbf{\Delta}^1_3 & & & & \mathbf{\Delta}^1_4 & & \\
 & \subset & \mathbf{\Pi}^1_1 & \subset & & \subset & \mathbf{\Pi}^1_2 & \subset & & \subset & \mathbf{\Pi}^1_3 & \subset & & \subset & \cdots
\end{array}$$

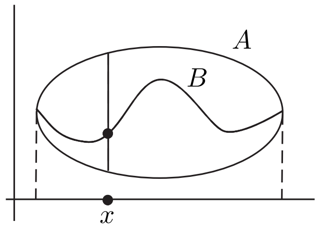
Sin embargo, Lusin no tardó en experimentar cierto escepticismo frente a la teoría descriptiva. Por ejemplo, él mismo había demostrado que todo conjunto analítico (y, por lo tanto, también todo conjunto coanalítico) es medible Lebesgue, pero el problema de si los conjuntos $\mathbf{\Sigma}^1_2$ eran medibles Lebesgue resistía todo ataque (lo más cerca a lo que pudo llegar es a demostrar que todo conjunto $\mathbf{\Sigma}^1_2$ es unión de $\aleph_1$ conjuntos de Borel, en particular, medibles Lebesgue, pero no pudo demostrar que la unión de $\aleph_1$ conjuntos medibles fuera necesariamente medible). Más aún, incluso el problema de si todo conjunto coanalítico no numerable contiene un subconjunto perfecto parecía inabordable.

En 1930 Lusin publicó el primer libro en que exponía de forma sistemática la teoría sobre los conjuntos analíticos: *"Leçons sur les ensembles analytiques et leurs applications"*. El propio Lebesgue aceptó la invitación para escribir el prólogo, en el que dijo:

> *El origen de todos los problemas descritos aquí ha resultado ser un burdo error en mi memoria sobre funciones representables analíticamente. ¡Simplemente estuve inspirado a la hora de cometerlo!*

Uniformización Pese a todo, aunque cada vez más lentamente, la teoría descriptiva seguía produciendo frutos. Por ejemplo, uno de los problemas que a la sazón se consideraban más complejos era el de la *uniformización*. Consideremos, por ejemplo, el caso de un subconjunto A de $\mathbb{R}^2$. Se dice que un conjunto

$B \subset A$ *uniformiza* A (respecto de la primera componente) si B tiene la misma proyección que A, pero, cada $x \in \mathbb{R}$ que sea proyección de un elemento de A es la proyección de un *único* elemento de B.



El axioma de elección implica que todo conjunto A es uniformizable por un subconjunto B, pero la cuestión era si, en caso de que A es un conjunto de Borel, o analítico, o coanalítico, etc., existe una uniformización del mismo tipo. Lusin había dado condiciones bajo las cuales un conjunto analítico puede ser uniformizado por otro conjunto analítico, pero dio por imposible probar algo parecido para conjuntos coanalíticos. Sin embargo, más optimista, Sierpinski planteaba ese mismo año el problema de si un conjunto $\mathbf{\Pi}^1_1$ (coanalítico) podía ser uniformizado por un conjunto $\mathbf{\Pi}^1_2$ o, al menos, por un conjunto proyectivo de la clase que fuera.

En 1831 el matemático ruso Petr Novikov encontró un conjunto cerrado (en particular, analítico) que no puede ser uniformizado por ningún conjunto analítico, y en 1935 probó que todo conjunto $\mathbf{\Pi}^1_1$ puede ser uniformizado por un conjunto $\mathbf{\Pi}^1_2$. Contra todo pronóstico, en 1937 apareció publicada una prueba de que, en realidad, todo conjunto $\mathbf{\Pi}^1_1$ admite una uniformización $\mathbf{\Pi}^1_1$. La sorpresa fue doble: por una parte porque a la sazón parecía imposible obtener algún resultado positivo sobre conjuntos $\mathbf{\Pi}^1_1$, y por otra porque la demostración vino del lejano oriente: se debe al matemático japonés Motokiti Kondô (1906-1980).

Gödel En 1938 el matemático austriaco[3] Kurt Gödel visitó por segunda vez el Instituto de Estudios Avanzados de Princeton, y allí anunció su demostración de la consistencia del axioma de elección y la hipótesis del continuo generalizada (basada en la construcción de la clase L de los conjuntos constructibles). En el mismo comunicado en que esbozaba la demostración, anunciaba también que el axioma de constructibilidad implica la existencia de un conjunto $\mathbf{\Delta}^1_2$ no medible Lebesgue, así como la de un conjunto $\mathbf{\Pi}^1_1$ no numerable sin subconjuntos perfectos. De este modo, todo apuntaba a que las dificultades que presentaba el estudio de los conjuntos proyectivos más allá de la clase de los conjuntos analíticos eran de la misma naturaleza que las que habían frustrado todos los intentos de Cantor por demostrar o refutar la hipótesis del continuo. Decimos "todo apuntaba" porque los argumentos de Gödel eran sólo la mitad de la solución. El trabajo de Gödel probaba que no se puede demostrar que $\mathfrak{c} > \aleph_1$ o que todo conjunto $\mathbf{\Pi}^1_1$ no numerable tiene un subconjunto perfecto, pero faltaba

[3]Gödel había nacido en lo que actualmente es territorio checo, pero entonces era parte del Imperio Austro-Húngaro.

probar que tampoco podía demostrarse lo contrario. No se disponía de ninguna justificación de que así tenía que ser, pero “todo apuntaba” a que así tenía que ser.

Kleene Era la segunda vez que Gödel revolucionaba el mundo de las matemáticas. Habían pasado siete años desde la publicación de sus celebérrimos teoremas de incompletitud, que habían creado una escuela de lógicos interesados en la teoría de la recursión, especialmente Alonzo Church, Alan Turing y Stephen C. Kleene. Mientras los primeros “mantuvieron los pies en la tierra” y se ocuparon estrictamente de cuestiones de computación, Kleene empezó a desarrollar una teoría mucho más abstracta, rica y sutil.

El concepto de partida era la noción de *función recursiva,* que informalmente es una función $f : \omega \longrightarrow \omega$ que puede ser calculada mediante un algoritmo o programa de ordenador. A su vez, un conjunto $A \subset \omega$ es *recursivo* si su función característica es recursiva, es decir, si existe un procedimiento efectivo para determinar si un número natural es o no un elemento de A. Una clase un poco más general es la de los conjuntos *recursivamente numerables,* que son los conjuntos para los que existe un procedimiento efectivo para enumerar sus elementos, lo cual no significa necesariamente que se pueda saber de antemano si un número dado aparecerá tarde o temprano en la enumeración. Con notación moderna, los subconjuntos de ω recursivamente numerables forman la clase Σ^0_1, sus complementarios la clase Π^0_1 y los conjuntos recursivos forman entonces la clase $\Delta^0_1 = \Sigma^0_1 \cap \Pi^0_1$, es decir, un conjunto es recursivo si y sólo si tanto él como su complementario son recursivamente numerables.

Kleene fue más allá y, tras generalizar trivialmente estas definiciones a subconjuntos de ω^r, definió los conjuntos Σ^0_{n+1} de ω^r como las proyecciones de los complementarios de los conjuntos Σ^0_n de $\omega^r \times \omega$, y llamó Π^0_n a dichos complementarios (aunque la notación que estamos empleando es posterior). Así obtuvo una jerarquía de subconjuntos de ω^r que satisface las inclusiones

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & \Sigma^0_1 & & & & \Sigma^0_2 & & & & \Sigma^0_3 & & & & \\
 & \subset & & \subset & & \subset & & \subset & & \subset & & \subset & & \subset & \cdots \\
\Delta^0_1 & & & & \Delta^0_2 & & & & \Delta^0_3 & & & & \Delta^0_4 & & \\
 & \subset & & \subset & & \subset & & \subset & & \subset & & \subset & & \subset & \cdots \\
 & & \Pi^0_1 & & & & \Pi^0_2 & & & & \Pi^0_3 & & & &
\end{array}$$

donde, como es habitual, $\Delta^0_n = \Sigma^0_n \cap \Pi^0_n$. A la clase

$$\mathrm{Ar} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Sigma^0_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Pi^0_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta^0_n$$

le dio el nombre de clase de los *conjuntos aritméticos.* Su primer trabajo significativo en esta dirección apareció en 1943. Cualquiera diría que Kleene estaba “traduciendo” al contexto de los números naturales los resultados de la teoría descriptiva de conjuntos, pero lo cierto es que desconocía por completo esta teoría. Kleene era un “lógico” y la teoría descriptiva de conjuntos era “topología”. Recíprocamente, publicado en plena Segunda Guerra Mundial, el artículo de

Kleene no llegó a manos de ningún matemático del este. De hecho, ese mismo año un matemático polaco llamado Andrej Mostowski obtenía independientemente, siguiendo otros métodos y otras motivaciones, varios de sus resultados. En 1944 Mostowski se graduó en una universidad clandestina que Sierpinski dirigía en Varsovia.

Paralelamente, Kleene llevó mucho más lejos su "teoría efectiva". Para ello extendió el concepto de función recursiva a funciones definidas sobre espacios de la forma $X = \omega^r \times \mathcal{N}^s$ (donde, para él, $\mathcal{N}$ no era "el espacio de Baire", sino simplemente el conjunto de las funciones $f : \omega \longrightarrow \omega$). La idea básica es que una función definida en dicho espacio es recursiva si $f(n_1, \ldots, n_r, x_1, \ldots, x_s)$ puede calcularse mediante un algoritmo efectivo a partir de los valores $n_1, \ldots, n_r$ y de las restricciones $x_1|_N, \ldots, x_x|_N$ para un número natural N suficientemente grande. A partir de aquí generalizó la definición de las clases Σ^0_n y Π^0_n para abarcar no sólo subconjuntos de los espacios ω^r, sino subconjuntos de los espacios $X = \omega^r \times \mathcal{N}^s$. Esto le permitió a su vez definir una nueva clase de subconjuntos de X, que en notación moderna es Σ^1_1, formada por las proyecciones de los conjuntos aritméticos de $X \times \mathcal{N}$. A su vez, esto permite definir los conjuntos Π^1_1 como los complementarios de los conjuntos Σ^1_1 y, en general, los conjuntos Σ^1_{n+1} de X como las proyecciones de los complementarios de los conjuntos Σ^1_n de $X \times \mathcal{N}$. Definiendo Π^1_n y Δ^1_n de la forma habitual, Kleene obtuvo así la clase de los conjuntos que llamó *analíticos,*

$$\mathrm{An} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Sigma^1_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Pi^1_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta^1_n,$$

donde el nombre se opone a los conjuntos aritméticos definidos previamente, aunque entra en conflicto con la definición de "conjunto analítico" de la teoría descriptiva de conjuntos "clásica". La nueva jerarquía de conjuntos analíticos satisface las consabidas inclusiones

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & \subset & \Sigma^1_1 & \subset & & \subset & \Sigma^1_2 & \subset & & \subset & \Sigma^1_3 & \subset & \quad \subset \cdots \\
\Delta^1_1 & & & & \Delta^1_2 & & & & \Delta^1_3 & & & & \Delta^1_4 \\
 & \subset & \Pi^1_1 & \subset & & \subset & \Pi^1_2 & \subset & & \subset & \Pi^1_3 & \subset & \quad \subset \cdots
\end{array}$$

De este modo, Kleene acercaba aún más, sin ser consciente de ello, su teoría efectiva a la teoría de los conjuntos proyectivos, pues los espacios $\omega^r \times \mathcal{N}^s$ son espacios polacos[4] y, de hecho, cada clase de Kleene está contenida en la clase correspondiente de Borel o de Lusin. No obstante, para Kleene el uso del espacio $\mathcal{N}$ era algo auxiliar, como medio para definir los subconjuntos analíticos de ω, que eran los que realmente le interesaban.

[4]Los espacios ω^r que había estudiado previamente también son espacios polacos, pero como tales son triviales, porque son discretos.

Addison El primero en poner de manifiesto explícitamente la analogía entre la teoría efectiva de Kleene y la teoría clásica sobre los conjuntos proyectivos fue John W. Addison jr., que preparó su tesis doctoral bajo la dirección de Kleene y la defendió en 1954. En dicha tesis presenta la siguiente tabla de analogías:

Teoría clásica	**Teoría efectiva**
$\mathbb{R}$, $\mathcal{N}$	ω
funciones continuas	funciones recursivas
conjuntos de Borel	conjuntos hiperaritméticos
conjuntos analíticos	conjuntos Σ^1_1
conjuntos proyectivos	conjuntos analíticos

Los *conjuntos hiperaritméticos* eran la última incorporación de Kleene a su teoría efectiva. En efecto, Kleene se dio cuenta de que sus conjuntos aritméticos son Δ^1_1, pero el recíproco no es cierto. No obstante, demostró que la jerarquía de los conjuntos aritméticos puede prolongarse a una jerarquía transfinita de clases de conjuntos (análoga a la jerarquía transfinita de las clases de Borel), y los conjuntos que aparecían en cualquier nivel de esta nueva jerarquía eran los que llamó hiperaritméticos, y así pudo demostrar que los conjuntos hiperaritméticos eran precisamente los conjuntos Δ^1_1, en perfecta analogía con el teorema que Suslin había demostrado en su día por el que identificaba los conjuntos de Borel y los conjuntos $\boldsymbol{\Delta}^1_1$. De este modo, en la analogía expuesta por Addison se puede precisar que los conjuntos aritméticos de Kleene se corresponden con los conjuntos de Borel de rango finito. Kleene publicó estos nuevos resultados en dos artículos que aparecieron en 1955. Por su parte, Mostowski había descubierto independientemente los conjuntos hiperaritméticos en 1951. La notación Σ, Π, Δ que venimos empleando (tanto para la teoría clásica como para la efectiva) fue introducida por Addison en 1959, en un trabajo en el que presentó las primeras demostraciones publicadas de los resultados que Gödel había anunciado once años atrás sobre la existencia de conjuntos $\boldsymbol{\Delta}^1_2$ no medibles Lebesgue y de conjuntos $\boldsymbol{\Pi}^1_1$ no numerables sin subconjuntos perfectos. De hecho, demostró que el axioma de constructibilidad permite resolver (de forma positiva o negativa según los casos) prácticamente todos los problemas que se habían resistido a los padres de la teoría clásica, generalizados sin restricciones a todas las clases de la jerarquía proyectiva.

Pero Addison demostró además que la relación entre la teoría efectiva y la teoría clásica no era una mera "analogía", sino que la primera era un refinamiento de la segunda: de los resultados de la teoría efectiva se podía deducir de forma inmediata resultados análogos para la teoría clásica. Para ello definió relativizaciones de las clases de Kleene: para cada $a \in \mathcal{N}$, Addison definió clases $\Sigma^0_n(a)$, $\Pi^0_n(a)$, $\Delta^0_n(a)$, $\Sigma^1_n(a)$, $\Pi^1_n(a)$, $\Delta^1_n(a)$, de modo que toda la teoría efectiva era válida con modificaciones triviales para las clases efectivas relativas y además

$$\boldsymbol{\Sigma}^1_n = \bigcup_{a \in \mathcal{N}} \Sigma^1_n(a),$$

e igualmente para las otras clases.

Solovay Como no podía ser de otro modo, la conexión entre la teoría clásica y la teoría efectiva resultó enriquecedora para ambas, pero especialmente la teoría efectiva realizó una contribución a la teoría clásica que iba a ser decisiva: permitió reducir problemas esencialmente topológicos a enunciados casi exclusivamente conjuntistas, en los que la topología quedaba relegada a un segundo plano, si no era eliminada totalmente. Esto posibilitó la aplicación de las técnicas conjuntistas sobre pruebas de consistencia a los problemas de la teoría descriptiva.

En 1963–1964 Paul Cohen publicó su prueba de la independencia del axioma de elección y la hipótesis del continuo de los axiomas de la teoría de conjuntos, es decir, demostró que la razón por la que Cantor no había logrado demostrar ni refutar su conjetura de que $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ era que tal afirmación no puede demostrarse ni refutarse a partir de los axiomas de ZFC (supuesto que éstos sean consistentes). Su demostración se basaba en la sofisticada técnica de las extensiones genéricas, ideada por él mismo a tal efecto, y que supuso una revolución en la lógica matemática mucho mayor que la iniciada por Gödel. En una conferencia impartida por Cohen en 1963 sugirió la posibilidad de que con su método pudiera probarse la consistencia de que, sin suponer el axioma de elección, todo subconjunto de $\mathbb{R}$ fuera medible Lebesgue. Entre los oyentes se encontraba un joven Robert Solovay, que al año siguiente había encontrado una demostración de este hecho. No obstante, la teoría de las extensiones genéricas se encontraba todavía en estado embrionario e incluso era algo confusa en algunos aspectos. Durante los años siguientes diversos matemáticos fueron depurándola y aplicándola a problemas relacionados principalmente con la aritmética cardinal. En 1966 Cohen publicó el libro *Set theory and the continuum hypothesis,* redactado a partir de un curso que había impartido en Harvard el año anterior, que fue la primera exposición sistemática de la teoría, y no fue hasta 1970 que Solovay publicó la versión definitiva de su demostración, que para entonces había crecido mucho.

En efecto, Solovay demostraba –entre otras cosas— la consistencia de ZF (sin el axioma de elección) más las afirmaciones siguientes:

a) El *principio de elecciones dependientes* (ED) (una versión débil del axioma de elección que basta para construir la medida de Lebesgue y desarrollar prácticamente toda la teoría descriptiva clásica).

b) Todo subconjunto de $\mathbb{R}$ es medible Lebesgue.

c) Todo subconjunto de $\mathbb{R}$ no numerable tiene un subconjunto perfecto.

Más aún, si en lugar de a) queremos el axioma de elección completo (AE), sólo tenemos que particularizar b) y c) a subconjuntos de $\mathbb{R}$ con una propiedad técnica, a saber, los "subconjuntos hereditariamente definibles mediante sucesiones de ordinales", propiedad que, en cualquier caso, poseen todos los conjuntos proyectivos. En definitiva, Solovay había demostrado la consistencia de ZFC con que todo subconjunto proyectivo de $\mathbb{R}$ sea medible Lebesgue y, en caso de ser no numerable, contenga un subconjunto perfecto.

Cardinales inaccesibles En realidad el teorema de Solovay que acabamos de discutir suponía una hipótesis crucial que no hemos mencionado y que ahora vamos a comentar. Entre las implicaciones del teorema de incompletitud de Gödel se encuentra que es imposible demostrar que la teoría de conjuntos es consistente. Más aún, si en ZFC pudiera demostrarse que ZFC es consistente, esto implicaría automáticamente que ZFC es contradictoria.

Por ello, toda prueba de consistencia es necesariamente una prueba de consistencia relativa. Por ejemplo, Gödel y Addison no demostraron la consistencia de que exista un conjunto $\boldsymbol{\Delta}_2^1$ no medible Lebesgue, sino que, si ZFC es consistente, también lo es ZFC + "existe un conjunto $\boldsymbol{\Delta}_2^1$ no medible Lebesgue", es decir, demostraron la consistencia de esta afirmación *relativa a* la consistencia de ZFC, que es lo máximo a lo que se puede aspirar. Por el mismo motivo, a lo máximo a lo que Solovay podía aspirar era a demostrar lo siguiente:

> *Si* ZFC *es consistente, entonces también lo es* ZFC + *" todo subconjunto proyectivo de* $\mathbb{R}$ *es medible Lebesgue y, si no es numerable, contiene un subconjunto perfecto".*

Combinando ambos resultados, esto supondría que si ZFC es consistente es imposible demostrar o refutar que todo conjunto proyectivo es medible Lebesgue etc., como Lusin ya había intuido.

Y sin embargo, no fue esto realmente lo que Solovay demostró, sino esto otro:

> *Si* ZFC + *"existe un cardinal inaccesible" es consistente, también lo es* ZFC + *"todo subconjunto proyectivo de* $\mathbb{R}$ *es medible Lebesgue y, si no es numerable, contiene un subconjunto perfecto".*

Los cardinales inaccesibles son los menores de los llamados "cardinales grandes" y su característica principal en lo que aquí nos ocupa es

> (1) *En* ZFC + *"existe un cardinal inaccesible" se puede demostrar la consistencia de* ZFC.

Esto no contradice al teorema de incompletitud, pero sí tendríamos una contradicción (o, mejor dicho, tendríamos que ZFC es contradictorio) si pudiéramos demostrar

> (2) *La consistencia de* ZFC *implica la consistencia de* ZFC + *"existe un cardinal inaccesible".*

pues entonces uniendo (1) y (2) tendríamos

> (3) *En* ZFC + *"existe un cardinal inaccesible" se puede demostrar la consistencia de* ZFC + *"existe un cardinal inaccesible".*

Entonces, por el teorema de incompletitud, tendríamos que ZFC + "existe un cardinal inaccesible" sería contradictoria y por (2) lo mismo le sucedería a ZFC.

En suma: si ZFC es consistente, (2) es falso, de modo que la hipótesis del teorema de Solovay, es decir, la consistencia de ZFC + "existe un cardinal inaccesible" no puede demostrarse ni siquiera suponiendo la consistencia de ZFC o, dicho con otras palabras: Solovay demostró su teorema a partir de una hipótesis estrictamente más fuerte que la consistencia de ZFC.

Naturalmente, esto lleva a plantearse si la hipótesis es realmente necesaria, es decir, si no se podría encontrar un argumento mejor que el de Solovay que permitiera llegar a la misma conclusión suponiendo únicamente la consistencia de ZFC.

Para el caso de los conjuntos sin subconjuntos perfectos la respuesta es relativamente simple. No es difícil demostrar que

> *Si todo subconjunto* $\mathbf{\Pi}^1_1$ *de* $\mathbb{R}$ *no numerable posee un subconjunto perfecto, entonces* $\aleph_1$ *es inaccesible en* L.

Así pues, la consistencia de que todo conjunto $\mathbf{\Pi}^1_1$ —no ya todo conjunto proyectivo— no numerable posea un subconjunto perfecto implica la consistencia de que exista un cardinal inaccesible. Por lo tanto, si el teorema de Solovay (al menos, la parte concerniente a subconjuntos perfectos) pudiera demostrarse a partir de la mera consistencia de ZFC, entonces a partir de ésta podríamos demostrar la consistencia de ZFC + "existe un cardinal inaccesible", lo cual, como ya hemos explicado, implicaría que ZFC es contradictorio. En suma, la hipótesis del teorema de Solovay no se puede rebajar.

En cuanto a la medibilidad, combinando un hecho demostrado por Lusin (a saber, que todo conjunto $\mathbf{\Sigma}^1_2$ es unión de $\aleph_1$ conjuntos de Borel) con el hecho de que AM($\aleph_1$) implica que la unión de $\aleph_1$ conjuntos medibles Lebesgue es medible Lebesgue, podemos concluir:

> *La consistencia de* ZFC *implica la consistencia de* ZFC + *"todo subconjunto* $\mathbf{\Sigma}^1_2$ *de* $\mathbb{R}$ *es medible Lebesgue".*

Sin embargo, Shelah demostró en 1984 que

> *Si todo subconjunto* $\mathbf{\Sigma}^1_3$ *de* $\mathbb{R}$ *es medible Lebesgue, entonces* $\aleph_1$ *es inaccesible en* L.

con lo que todo lo dicho para la propiedad de los subconjuntos perfectos se aplica igualmente a este caso.

El axioma de Determinación Desde principios del siglo XX, diversos matemáticos habían abordado algunos problemas en términos de "juegos", es decir, de planteamientos en los que dos o más jugadores realizan por turnos una sucesión de "jugadas" respetando unas "reglas de juego" con el objetivo de "ganar" una "partida". La cuestión principal que plantean este tipo de juegos es el estudio de posibles estrategias ganadoras para alguno de los jugadores. Un análisis de este tipo puede aplicarse a un "juego" propiamente dicho (desde casos triviales como el tres en raya hasta casos matemáticamente inabordables como el ajedrez) o bien puede ser una forma alegórica de abordar determinados problemas o situaciones. (Por ejemplo, en 1944 von Neumann y Morgensten usaron la teoría de juegos para modelizar determinados comportamientos de agentes económicos.)

En 1953 el matemático y economista David Gale, junto con Frank Stewart, estudió las conexiones con la lógica y la teoría de conjuntos de un juego infinito que llamaremos $J_X(A)$, donde X es un conjunto arbitrario (con al menos dos elementos, para evitar casos triviales) y $A \subset X^\omega$ (el "conjunto de apuesta") es un conjunto de sucesiones en X. El juego consiste en que dos jugadores I y II juegan por turnos un elemento de X: empieza I jugando x_0, luego II juega un x_1, y así sucesivamente. La partida se prolonga hasta "completar" una sucesión infinita $x \in X^\omega$. Si $x \in A$ el jugador I gana la partida, mientras que si $x \in X^\omega \setminus A$ el ganador es II.

Se dice que el juego $J_X(A)$ está *determinado* si uno de los dos jugadores tiene una estrategia ganadora, es decir, si cuenta con un criterio para determinar cada jugada en función de las jugadas anteriores de modo que, sean cuales sean las jugadas del adversario, acaba ganando la partida.

Gale y Stewart demostraron que, (considerando a X como espacio topológico discreto y a X^ω como espacio topológico con la topología producto) cuando el conjunto de apuesta es abierto o cerrado, el juego $J_X(A)$ está determinado. Por otro lado, demostraron que existen conjuntos A tales que el juego $J_\omega(A)$ no está determinado, si bien la prueba depende esencialmente del axioma de elección. Gale y Stewart dejaron abierto el problema de si todos los juegos cuyo conjunto de apuesta es de Borel están determinados.

Previamente, Mazur y Banach habían observado la conexión con cierto problema sobre la topología de los espacios polacos de que cierto juego infinito (que puede reducirse a un juego $J_\omega(A)$ estuviera determinado.

En 1955 Philip Wolfe demostró que los juegos $J_X(A)$ cuyo conjunto de apuestas es $\mathbf{\Sigma}^0_2(A)$ están determinados. Ciertamente, como paso para probar la conjetura de Gale-Stewart sobre la determinación de los juegos de Borel, era un paso minúsculo y, a pesar de que en los años siguientes no hubo ningún avance significativo en este problema, en 1962 los matemáticos polacos Jan Mycielski y Hugo Steinhaus tuvieron la audacia de proponer un axioma alternativo para la teoría de conjuntos:

> **Axioma de determinación (AD)** *Para todo $A \subset \mathcal{N}$, el juego $J_\omega(A)$ está determinado.*

Decimos "axioma alternativo" porque AD contradice al axioma de elección (como hemos indicado, éste implica que existen juegos no determinados), luego la teoría de conjuntos ZF + AD viene a ser a la teoría de conjuntos "estándar" dada por ZFC como una geometría no euclídea es a la geometría euclídea.

Ante la falta de motivos para temer lo contrario, Mycielski y otros matemáticos polacos pasaron a estudiar las consecuencias de AD suponiéndolo consistente con el principio de elecciones dependientes (ED) que, según hemos indicado al tratar sobre el teorema de Solovay, es una forma débil del axioma de elección que basta para desarrollar todo el análisis y toda la topología básica y toda la teoría descriptiva de conjuntos clásica. Así, en 1964, Mycielski y Swierczkowski por una parte, y Banach, Mazur y Davis por otra, demostraron que AD + ED implica que todo subconjunto de $\mathbb{R}$ es medible Lebesgue y que, si es no numerable, contiene un subconjunto perfecto. Por otra parte, Davis demostró la determinación de los juegos $\boldsymbol{\Sigma}^0_3$ (otro paso de pulga).

Durante la década de los 70 el estudio del Axioma de Determinación resultó especialmente fértil. La *guerra fría* afectaba cada vez menos a las comunicaciones internacionales entre matemáticos (al menos en temas tan inofensivos como la teoría de conjuntos) y así, desde Alexander Kechris y Yiannis N. Moschovakis en Grecia hasta Robert Solovay en los Estados Unidos, un amplio abanico de matemáticos fue descubriendo que AD implica una teoría de conjuntos exótica y fascinante, como una geometría no euclídea. Siguiendo esta analogía, el axioma de constructibilidad de Gödel ($V = L$) y el axioma de determinación (AD) son como la afirmación y la negación del axioma de las paralelas, pues determinan los problemas abiertos de la teoría descriptiva de conjuntos de formas mutuamente contradictorias. He aquí algunos ejemplos:[5]

$\boldsymbol{V = L}$	**AD**
Existe un conjunto Δ^1_2 no medible Lebesgue.	Todo conjunto es medible Lebesgue.
Existe un conjunto Π^1_1 no numerable sin subconjuntos perfectos.	Todo conjunto no numerable contiene un subconjunto perfecto.
Las clases $\boldsymbol{\Pi}^1_1$ y $\boldsymbol{\Sigma}^1_n$ para $n \geq 2$ tienen la propiedad de uniformización[6](y las demás no).	Las clases $\boldsymbol{\Pi}^1_{2n+1}$ y $\boldsymbol{\Sigma}^1_{2n+2}$ tienen la propiedad de uniformización (y las demás no).
$2^{\aleph_0} = \aleph_1$	Los cardinales $2^{\aleph_0}$ y $\aleph_1$ no son comparables (ninguno de ellos es menor o igual que el otro).
Todo conjunto es unión de $\aleph_1$ conjuntos de Borel	Un conjunto es unión de $\aleph_1$ conjuntos de Borel si y sólo si es $\boldsymbol{\Sigma}^1_2$.

En 1970 Donald A. Martin demostró la determinación de los juegos analíticos, aunque para ello tuvo que suponer la existencia de un cardinal medible, es decir, un cardinal grande que está mucho más arriba en la escala de cardinales grandes que los cardinales inaccesibles.[7] Por otro lado, cabe destacar que Martin no demostró que si existe un cardinal medible es consistente que los juegos

[5]Todas las propiedades se refieren a subconjuntos de un espacio polaco, excepto las relativas a la medida de Lebesgue, que requieren que el conjunto sea un subconjunto de $\mathbb{R}^n$, si bien son válidas también para medidas de Borel continuas (no nulas) en cualquier espacio polaco.

[6]Esto significa que cada conjunto de la clase correspondiente en un producto de espacios polacos puede uniformizarse por un conjunto de la misma clase.

[7]Esto significa que, por ejemplo, del mismo modo que suponiendo la consistencia de ZFC no podemos probar la consistencia de ZFC + "existe un cardinal inaccesible", ésta no permite probar a su vez la consistencia de que existan dos cardinales inaccesibles, y ésta no permite demostrar a su vez la consistencia de que existan infinitos cardinales inaccesibles, y ésta no permite demostrar a su vez la consistencia de que exista un cardinal de Mahlo, y ésta

$\mathbf{\Sigma}_1^1$ están determinados (lo cual sería un resultado formalmente análogo al teorema de Solovay que hemos discutido anteriormente), sino que demostró algo más fuerte: si existe un cardinal medible, los juegos $\mathbf{\Sigma}_1^1$ *están determinados.*

Finalmente, en 1975 Martin demostró (en ZFC, sin suponer axiomas adicionales sobre cardinales grandes ni de ningún otro tipo) que todos los juegos de Borel están determinados, tal y como Gale y Stewart habían conjeturado.

La consistencia de AD Quizá el lector sienta reticencias a considerar seriamente un axioma que contradice al axioma de elección, y supondrá que muchos matemáticos serán igual de reticentes. Ante esto hay una solución casi evidente, y es que el axioma de determinación se puede debilitar hasta hacerlo compatible con AE. Esto es lo que sucede cuando lo reducimos al

> **Axioma de Determinación Proyectiva (ADP):** *Si $A \subset \mathcal{N}$ es un conjunto proyectivo, entonces el juego $J_\omega(A)$ está determinado.*

En principio, no hay ninguna evidencia de que ADP contradiga al axioma de elección, y suponiendo ADP podemos demostrar gran parte de las consecuencias que hemos comentado sobre AD restringidas a conjuntos proyectivos, es decir, podemos probar que todo conjunto proyectivo es medible Lebesgue y que, si es no numerable, contiene un subconjunto perfecto, o que las clases proyectivas con la propiedad de uniformización son las mismas indicadas en la tabla precedente en la columna AD, etc., todo ello sin menoscabo del axioma de elección. En otras palabras, al suponer ADP estamos garantizando que los ejemplos molestos que pueden construirse con el axioma de elección (conjuntos no medibles Lebesgue, etc.) queden fuera del ámbito de la teoría descriptiva de conjuntos, es decir, no sean conjuntos proyectivos, mientras que AD supone expulsarlos del ámbito de la teoría de conjuntos en general, es decir, supone negar su existencia.

No obstante, hay razones para no escandalizarse de que AD contradiga al axioma de elección y no despreciar, por tanto, los resultados que pueden demostrarse a partir de él. Estas razones ya fueron presentadas por Mycielski y Steinhaus en el trabajo en el que propusieron AD como axioma, a pesar de que entonces, más que razones, eran esperanzas sin mucha evidencia que las soportara.

Siguiendo el paralelismo con las geometrías no euclídeas, el argumento es el equivalente a que estudiar la geometría Riemanniana (en la que no existen rectas paralelas) no tiene por qué verse como un ataque directo a Euclides, sino más bien como una forma conveniente de estudiar la geometría de una esfera, que es un objeto totalmente euclídeo. Para desarrollar esta idea recordemos en qué consiste esencialmente la demostración de Gödel de la consistencia de la hipótesis del continuo:

Gödel definió el concepto de "conjunto constructible" y demostró que la clase L de todos los conjuntos constructibles es un modelo de ZFC, es decir, que si

no permite demostrar a su vez la consistencia de que existan dos cardinales de Mahlo, y así sucesivamente con toda una cadena de cardinales que, en un punto intermedio, tiene a los cardinales medibles, pasando previamente por los cardinales débilmente compactos, cardinales de Ramsey, etc.

eliminamos todos los conjuntos que no son constructibles (o —si no queremos ser tan drásticos— si "sólo miramos" los conjuntos constructibles), los axiomas de ZFC (y todas sus consecuencias) siguen siendo ciertos: seguiremos viendo el conjunto vacío (porque es constructible), dados dos conjuntos constructibles seguiremos viendo a su unión (porque es constructible), etc., de modo que no echaremos en falta ninguno de los conjuntos que hemos "quitado de nuestra vista". Ahora bien, Gödel demostró que si sólo vemos los conjuntos constructibles la hipótesis del continuo es cierta. Así pues, un teorema que suponga la hipótesis del continuo puede ser una afirmación falsa sobre la clase V de todos los conjuntos, pero es, en cualquier caso, una afirmación verdadera (sin suponer la hipótesis del continuo) sobre la clase L de los conjuntos constructibles. (Compárese con el caso de la geometría Riemanniana: un teorema que suponga que no existen rectas paralelas es falso como afirmación sobre el espacio euclídeo, pero es verdadero como afirmación sobre los puntos de una esfera, entendiendo que la palabra "recta" ha de ser interpretada como "círculo máximo"[8], y, entendido así, es un teorema verdadero sobre el espacio euclídeo.)

Similarmente, Mycielski y Steinhaus conjeturaron que "debería de haber" un modelo interno de ZF + ED + AD, y que lo deseable sería que contuviera a todos los números reales. Solovay apuntó como posible candidato a $L(\mathcal{N})$, es decir, a la menor clase propia transitiva que contiene al espacio de Baire $\mathcal{N}$ y es un modelo de ZF. Es fácil demostrar (en ZFC) que los axiomas de ZF son verdaderos en $L(\mathcal{N})$ (es decir, que siguen siendo verdaderos si decidimos que "conjunto" signifique específicamente "conjunto en $L(\mathcal{N})$"), y lo mismo sucede con ED, mientras que AE es verdadero en $L(\mathcal{N})$ si y sólo si $\mathcal{N}$ admite un buen orden que pertenezca a $L(\mathcal{N})$. Así, aunque supongamos AE, con ello podemos demostrar que $\mathcal{N}$ admite un buen orden, pero dicho buen orden no está necesariamente en $\mathcal{N}$. Esto abría la posibilidad de que, suponiendo la existencia de un cardinal grande "suficientemente grande", pudiera demostrarse en ZFC que el axioma de determinación es verdadero en $L(\mathcal{N})$.

La primera demostración de la consistencia de AD la publicó Martin en 1980, suponiendo la existencia de uno de los cardinales grandes más altos en la escala de cardinales grandes (un cardinal I2). En 1984 Woodin, suponiendo la existencia de un cardinal aún mayor (un cardinal I0, el más alto en la escala hoy en día, por cuya consistencia algunos no apostarían mucho) demostró que AD es verdadero en $L(\mathcal{N})$. Finalmente, en 1988 Martin y Steel publicaron una demostración de este mismo resultado cuya hipótesis era algo más débil que la existencia de un cardinal supercompacto (que está algo por arriba de los cardinales medibles en la escala de cardinales grandes, pero que puede considerarse ya una "hipótesis razonable").

Posteriormente, Woodin demostró que la hipótesis de Martin y Steel es necesaria, en el sentido de que la consistencia de AD implica la consistencia de dicha hipótesis, con lo que tenemos realmente una equivalencia.

[8]En realidad es necesario identificar cada par de puntos antípodas para que no haya pares de puntos por los que pasen infinitas rectas. Este tecnicismo oscurece la analogía, pero es irrelevante para lo que aquí nos ocupa.

El modelo $L(\mathcal{N})$ Según lo dicho en el párrafo anterior, $L(\mathcal{N})$ resulta ser (supuesta la existencia de los cardinales grandes adecuados) el "modelo natural" de ZF + ED + AD. Este modelo contiene a todos los números reales, así como a todos los subconjuntos proyectivos de $\mathcal{N}$ o $\mathbb{R}$ y muchos más. Así pues, el hecho de que AD implique que todo subconjunto de $\mathbb{R}$ es medible Lebesgue (en contradicción con el axioma de elección), se puede reinterpretar como que todo subconjunto de $\mathbb{R}$ que pertenezca a $L(\mathcal{N})$ es medible Lebesgue (lo cual, no sólo no contradice en absoluto al axioma de elección, sino que además nos proporciona una clase muy amplia de conjuntos medibles Lebesgue mayor con diferencia a la de los conjuntos proyectivos). En general, todo teorema demostrado en ZF + ED + AD, aunque contradiga al axioma de elección y muchos matemáticos lo consideren por ello "falso", puede interpretarse como un teorema sobre los conjuntos de $L(\mathcal{N})$ y, visto así ya no contradice al axioma de elección. Otro ejemplo: el hecho de que AD implique que los cardinales $2^{\aleph_0}$ y $\aleph_1$ no son comparables (en contradicción con el axioma de elección) significa simplemente que ninguna de las aplicaciones inyectivas $\aleph_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ —que existen por el axioma de elección— pertenece a $L(\mathcal{N})$, lo cual "no tiene nada de malo", pero hace que alguien que sólo vea los conjuntos de $L(\mathcal{N})$ "piense" que $2^{\aleph_0}$ y $\aleph_1$ no son comparables.

Estas consideraciones hacen que los matemáticos que trabajan en teoría descriptiva de conjuntos y acostumbren a dar AD por supuesto casi sin mencionarlo explícitamente no consideren que están renegando del axioma de elección, sino más bien que están estudiando la clase $L(\mathcal{N})$, al igual que otros matemáticos estudian, por ejemplo, el conjunto $\mathbb{R}^n$.

Capítulo I

Conjuntos de Borel y Analíticos

En este primer capítulo descompondremos la σ-álgebra de Borel de un espacio polaco en una jerarquía transfinita de conjuntos de complejidad creciente, y a continuación presentaremos los dos primeros peldaños de la jerarquía de los conjuntos proyectivos, que introduciremos en el capítulo siguiente.

En el estudio de los espacios polacos representan un papel destacado el espacio de Baire $\mathcal{N} = {}^\omega\omega$ y el espacio de Cantor $\mathcal{C} = {}^\omega 2$. Por ello dedicamos la primera sección a presentar una descripción útil de los cerrados de estos espacios y, más en general, de las potencias numerables de espacios discretos.

1.1 Espacios de sucesiones

Si X es un conjunto arbitrario, lo podemos considerar como espacio topológico con la topología discreta. Ésta es completamente metrizable. Además X es separable —y, por consiguiente, un espacio polaco— si y sólo si X es finito o numerable. Vamos a considerar el espacio X^ω formado por todas las sucesiones en X, considerado como espacio topológico con la topología producto. Teniendo en cuenta que una base de X la forman los subconjuntos con un punto, resulta que una base de X^ω la forman los conjuntos

$$B_s = \{x \in X \mid x|_n = s\},$$

para cada $n \in \omega$ y cada $s \in X^n$.

Observemos que estos abiertos básicos son también cerrados, pues

$$X^\omega \setminus B_s = \bigcup_{t \in X^n \setminus \{s\}} B_t.$$

Por lo tanto X^ω es lo que se llama un espacio topológico *cero-dimensional* (es decir, un espacio con una base formada por abiertos-cerrados).

Para que X^ω sea un espacio polaco necesitamos que X sea finito o numerable, pero en esta sección trabajaremos en el caso general, sin esta hipótesis de numerabilidad.

Llamaremos $X^{<\omega} = \bigcup\limits_{n\in\omega} X^n$ al conjunto de sucesiones finitas en X. Para cada sucesión $s \in X^{<\omega}$ llamaremos *longitud* de s a su dominio, y lo representaremos por $\ell(s)$. Si $s, t \in X^{<\omega}$, representaremos por $s^\frown t$ a la sucesión que resulta de prolongar s con t. Abreviaremos $s^\frown x = s^\frown\{(0, x)\}$.

Un *árbol* A en un conjunto X es un conjunto $A \subset X^{<\omega}$ tal que si $s \in A$ y $n < \ell(s)$, entonces $x|_n \in A$. A veces llamaremos *nodos* a los elementos de un árbol. Consideraremos a todo árbol como conjunto parcialmente ordenado por la inclusión, de modo que $s \leq t$ será equivalente a $s \subset t$. Diremos también en este caso que t *extiende* a s.

Un *camino* en un árbol A en un conjunto X es una sucesión $x \in X^\omega$ tal que $\bigwedge n \in \omega\ x|_n \in A$. Representaremos por $[A]$ el conjunto de todos los caminos en el árbol A.

Una *rama* de un árbol A es un subconjunto totalmente ordenado de A maximal respecto de la inclusión. Es claro que una rama r no puede tener más de un elemento de cada longitud n, así como que si contiene a un nodo s ha de contener a sus restricciones. Por ello, las ramas finitas de un árbol A son de la forma $\{s_n\}_{n<m+1}$, donde $\ell(s_n) = n$ y s_m es un *nodo terminal* de A, es decir, un nodo que no puede extenderse propiamente a otro nodo de longitud mayor. Puesto que, para cada $n < m$, se ha de cumplir que $s_n = s_m|_n$, resulta que las ramas finitas de un árbol se corresponden biunívocamente con sus nodos terminales.

Similarmente, las ramas infinitas de un árbol A se corresponden biunívocamente con los caminos en A, pues cualquier de ellas es necesariamente de la forma $\{s_n\}_{n\in\omega}$, con $\ell(s_n) = n$, y determina el camino

$$x = \bigcup_{n\in\omega} s_n \in [A],$$

que cumple $\bigwedge n \in \omega\ x|_n = s_n$. Recíprocamente, cada camino $x \in [A]$ determina la rama infinita $\{x|_n\}_{n\in\omega}$. Por este motivo a los caminos de un árbol los llamaremos habitualmente ramas infinitas.

Un árbol A está *bien podado* si no tiene nodos terminales, es decir, si todos sus nodos se pueden extender a otros de altura mayor, lo cual equivale a su vez a que todo nodo esté contenido en una rama infinita.

Un árbol A es *perfecto* si todo nodo $s \in A$ admite dos extensiones incompatibles s_1 y s_2, es decir, extensiones tales que $s_1(n) \neq s_2(n)$ para cierto n en su dominio común.

Un árbol A está *finitamente ramificado* si cada uno de sus nodos tiene un número finito de extensiones inmediatamente posteriores (es decir, de longitud una unidad mayor).

Diremos que un subconjunto de un espacio topológico es *perfecto* si es cerrado, no vacío y no tiene puntos aislados. (En particular, diremos que un espacio topológico no vacío es *perfecto* si no tiene puntos aislados.)

Teorema 1.1 *Sea X un conjunto.*

a) Los cerrados en X^ω son los conjuntos de la forma $[A]$, donde A es un árbol en X que podemos tomar bien podado.

b) Sea $A \neq \varnothing$ un árbol bien podado en X. Entonces

1. El cerrado $[A]$ es perfecto si y sólo si el árbol A lo es.

2. $[A]$ es compacto si y sólo si A está finitamente ramificado.

Demostración: a) Si A es un árbol en X, tenemos que $[A]$ es cerrado en X^ω, pues si $x \in X^\omega \setminus [A]$, existe un $n \in \omega$ tal que $x|_n \notin A$, de manera que $x \in B_{x|_n} \subset X^\omega \setminus A$, luego $X^\omega \setminus A$ es abierto.

Consideremos ahora un cerrado $C \subset X^\omega$ y llamemos

$$A = \{x|_n \mid x \in C \land n \in \omega\}.$$

Claramente A es un árbol bien podado y $C \subset [A]$. Tomemos ahora $x \in [A]$ y veamos que está en C. Para cada $n \in \omega$, sabemos que $x|_n \in A$, luego existe un $y \in C$ tal que $x|_n = y|_n$, luego $y \in B_{x|_n} \cap C \neq \varnothing$. Como los abiertos $\{B_{x|_n}\}_{n\in\omega}$ forman una base de entornos de x en X^ω, esto implica que $x \in \overline{C} = C$.

b) 1. Si $x \in [A]$ es un punto aislado, entonces existe un entorno básico $B_{x|_n}$ tal que $B_{x|_n} \cap [A] = \{x\}$, pero entonces $x|_n$ no puede tener extensiones incompatibles en A, ya que se extenderían a dos ramas infinitas distintas en $B_{x|_n} \cap [A]$, luego A no es perfecto.

Recíprocamente, si $[A]$ es perfecto y $s \in A$ de longitud n, vamos a probar que s admite extensiones incompatibles. Sea $x \in [A]$ una extensión de s (que existe porque A está bien podado). Como x no es un punto aislado de $[A]$, no puede ocurrir que $B_{x|_n} \cap [A] = \{x\}$, luego podemos tomar $y \in B_{x|_n} \cap [A]$ tal que $y \neq x$, pero $x|_n = y|_n = s$, luego existe un $m > n$ tal que $x|_m, y|_m \in A$ son extensiones incompatibles de s.

b) 2. Supongamos que A es finitamente ramificado pero que $[A]$ tiene un cubrimiento abierto que no admite un subcubrimiento finito. Llamemos $s_1, \ldots, s_n \in X^1$ a los sucesores de $\varnothing$ en A. Entonces

$$[A] = \bigcup_{i=1}^{n} \{x \in [A] \mid x|_1 = s_i\}.$$

Si cada uno de estos conjuntos pudiera cubrirse por un número finito de abiertos del cubrimiento, lo mismo valdría para $[A]$, luego existe un s_1 de longitud 1 tal que $A_{s_1} = \{x \in [A] \mid x|_1 = s_1\}$ no puede cubrirse por un número finito de abiertos del cubrimiento dado. Similarmente

$$A_{s_1} = \bigcup_{i=1}^{n} \{x \in [A] \mid x|_2 = t_i\},$$

donde $t_1, \ldots, t_n$ son los sucesores de s_1 en A (el número n no tiene por qué ser el mismo que el anterior). Nuevamente razonamos que ha de haber un $s_2 \supset s_1$ tal que $A_{s_2} = \{x \in [A] \mid x|_2 = s_2\}$ no puede cubrirse por un número finito de abiertos del cubrimiento dado. Repitiendo el argumento obtenemos[1] una rama infinita $\{s_n\}_{n\in\omega}$ en A tal que $A_{s_i} = \{x \in [A] \mid x|_i = s_i\}$ no puede cubrirse por un número finito de abiertos del cubrimiento. Sea

$$x = \bigcup_{i\in\omega} s_i \in [A].$$

Podemos tomar un abierto V en el cubrimiento dado tal que $x \in V$. Sea $n \in \omega$ tal que $x \in B_{x|_n} \subset V$. Entonces $A_{x|_n} \subset B_{x|_n} \subset V$ y tenemos una contradicción.

Recíprocamente, sea $s \in A$ un nodo de longitud m. Si s tuviera infinitos sucesores inmediatos, digamos[2] $\{s_n\}_{n\in\omega}$, podemos tomar caminos $x_n \in [A]$ tales que $s_n \subset x_n$. Así $x_n \in B_{s_n}$ y $x_n \notin B_t$ para cualquier $t \in X^{m+1}$ distinto de los s_n. Por lo tanto,

$$\{B_{s_n} \mid n \in \omega\} \cup \{B_t \mid t \in X^{m+1} \wedge \bigwedge n \in \omega\ t \neq s_n\}$$

es un cubrimiento abierto de $[A]$ del que no puede extraerse ningún subcubrimiento finito, luego $[A]$ no es compacto. ■

Veamos ahora que las aplicaciones entre árboles inducen aplicaciones continuas entre sus cerrados asociados.

Definición 1.2 Sean A y B dos árboles en un conjunto X. Una aplicación $\phi : A \longrightarrow B$ es *monótona* si $s \subset t$ implica $\phi(s) \subset \phi(t)$. Si ϕ es monótona definimos

$$Z(\phi) = \{x \in [A] \mid \lim_n \ell(\phi(x|_n)) = \infty\}.$$

Para cada $x \in Z(\phi)$ definimos

$$\phi^*(x) = \bigcup_{n\in\omega} \phi(x|_n) \in [B].$$

Diremos que ϕ es *propia* si $Z(\phi) = [A]$.

Teorema 1.3 *En las condiciones anteriores, $Z(\phi)$ es un G_δ en $[A]$, la aplicación $\phi^* : Z(\phi) \longrightarrow [B]$ es continua. Recíprocamente, si $f : G \longrightarrow [B]$ es continua y $G \subset [A]$ es un G_δ, existe $\phi : A \longrightarrow B$ monótona tal que $f = \phi^*$.*

Demostración: Tenemos que

$$x \in Z(\phi) \leftrightarrow \bigwedge n \in \omega \bigvee m \in \omega\ \ell(\phi(x|_m)) \geq n,$$

luego $Z(\phi) = \bigcap_{n\in\omega} U_n$, donde U_n es el abierto

$$U_n = \{x \in [A] \mid \bigvee m \in \omega\ \ell(\phi(x|_m)) \geq n\}.$$

[1]Esto es una aplicación directa de ED.

[2]Aquí usamos que todo conjunto infinito posee un subconjunto numerable.

Por lo tanto, $Z(\phi)$ es un G_δ. Para probar que ϕ^* es continua tomamos un abierto básico en $[B]$, que será de la forma $V_t = [B] \cap B_t$, y observamos que

$$\phi^{*-1}[V_t] = \bigcup\{B_s \cap [A] \mid s \in A \wedge t \subset \phi(s)\}$$

es abierto en $[A]$.

Para probar el recíproco podemos suponer que $G \neq \varnothing$. Sea $G = \bigcap\limits_{n\in\omega} U_n$, donde $\{U_n\}_{n\in\omega}$ es una sucesión de abiertos en $[A]$ que podemos tomar decreciente y con $U_0 = [A]$. Para cada $s \in A$, sea $k_s \in \omega$ definido como el mayor $k \leq \ell(s)$ tal que $B_s \cap [A] \subset U_k$ (notemos que $k = 0$ cumple siempre esta condición).

Definimos $\phi(s)$ como la mayor sucesión $t \in B$ de longitud $\leq k_s$ tal que $f[B_s \cap G] \subset B_t$ si $B_s \cap G \neq \varnothing$, y en caso contrario tomamos $\phi(s) = \phi(s|_m)$, donde $m < \ell(s)$ es el mayor natural tal que $B_{s|_m} \cap G \neq \varnothing$.

Observemos que si $f[B_s \cap G] \subset B_t \cap B_{t'}$, necesariamente $t \subset t'$ o $t' \subset t$, luego existe un máximo t que cumple lo requerido en el primer caso.

Claramente, si $s \subset s'$, entonces $k_s \leq k_{s'}$ y $\phi(s) \subset \phi(s')$, luego ϕ es monótona.

Si $x \in G$, entonces $\lim\limits_n k_{x|_n} = \infty$, pues para todo $m \in \omega$ existe un $n \geq m$ tal que $x \in B_{x|_n} \cap [A] \subset U_m$, luego $k_{x|_n} \geq m$. También $\lim\limits_n \ell(\phi(x|_n)) = \infty$, pues para todo $m \in \omega$ existe un $n \in \omega$ tal que $k_{x|_n} \geq m$ y $\varnothing \neq f[B_{x|_n} \cap G] \subset B_{f(x)|_m}$, luego $\ell(\phi(x|_n)) \geq m$. Esto prueba que $G \subset Z(\phi)$. Más aún, $\phi(x|_n) \subset f(x)|_m$, lo que prueba que $\phi^*(x) = f(x)$.

Por último, si $x \in Z(\phi)$, entonces $\lim\limits_n \ell(\phi(x|_n)) = \infty$, luego $\lim\limits_n k_{x|_n} = \infty$, pues $\ell(\phi(x|_n)) \leq k_{x|_n}$. Por lo tanto, para cada $m \in \omega$ existe un n tal que $k_{x|_n} \geq m$, y entonces $x \in B_{x|_n} \cap [A] \subset U_m$, luego $x \in G$. ■

Veamos una aplicación:

Teorema 1.4 *Sea X un conjunto que admite un buen orden y $S \subset T \subset X^\omega$ dos cerrados no vacíos en X^ω. Entonces existe una retracción $r : T \longrightarrow S$, es decir, una aplicación continua que restringida a S es la identidad.*

Demostración: Sea $T = [A]$ y $S = [B]$, donde A y B son árboles bien podados en X. Concretamente,

$$A = \{x|_n \mid x \in T \wedge n \in \omega\}, \qquad B = \{x|_n \mid x \in S \wedge n \in \omega\},$$

con lo que $B \subset A$. Vamos a construir una aplicación $\phi : A \longrightarrow B$ monótona y propia tal que $\phi(t) = t$ para todo $t \in B$. Es claro entonces que $r = \phi^*$ será la retracción que buscamos.

Definimos $\phi(s)$ por recursión sobre la longitud de s. Tomamos $\phi(\varnothing) = \varnothing$ y, si está definido $\phi(s) \in B$, para cada $x \in X$ tal que $s^\frown x \in A$, definimos $\phi(s^\frown x) = s^\frown x$ si $s^\frown x \in B$ y $\phi(s^\frown x) = \phi(s)^\frown y$, donde $y \in X$ es cualquier elemento[3] que cumpla que $\phi(s)^\frown y \in B$, que existe porque B está bien podado. ■

[3] Aquí usamos el buen orden de X para tomar el mínimo y que cumpla lo exigido.

1.2 La jerarquía de Borel

Definición 1.5 Si X es un espacio metrizable, definimos

$$\mathbf{\Sigma}^0_1(X) = \{A \mid A \text{ es abierto en } X\}, \qquad \mathbf{\Pi}^0_1(X) = \{A \mid A \text{ es cerrado en } X\}$$

y, para cada ordinal $\alpha > 1$, definimos recurrentemente

$$\mathbf{\Sigma}^0_\alpha(X) = \{\bigcup_{n\in\omega} A_n \mid \bigwedge n \in \omega\ A_n \in \bigcup_{0<\beta<\alpha} \mathbf{\Pi}^0_\beta(X)\},$$

$$\mathbf{\Pi}^0_\alpha = \{X \setminus A \mid A \in \mathbf{\Sigma}^0_\alpha(X)\} = \{\bigcap_{n\in\omega} A_n \mid \bigwedge n \in \omega\ A_n \in \bigcup_{0<\beta<\alpha} \mathbf{\Sigma}^0_\beta(X)\}.$$

Finalmente, para cada $\alpha > 0$ definimos

$$\mathbf{\Delta}^0_\alpha(X) = \mathbf{\Sigma}^0_\alpha(X) \cap \mathbf{\Pi}^0_\alpha(X).$$

Cuando no haya confusión posible escribiremos $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha, \mathbf{\Pi}^0_\alpha, \mathbf{\Delta}^0_\alpha$, sin indicar explícitamente el espacio X.

En particular tenemos que $\mathbf{\Delta}^0_1$ es la familia de los subconjuntos abiertos y cerrados de X, $\mathbf{\Sigma}^0_1$ es la familia de los abiertos, $\mathbf{\Pi}^0_1$ la de los cerrados, $\mathbf{\Sigma}^0_2$ es la familia de las uniones numerables de cerrados, es decir, los conjuntos F_σ, y $\mathbf{\Pi}^0_2$ es la familia de las intersecciones numerables de abiertos (los conjuntos G_δ).

El teorema siguiente nos da las relaciones básicas entre estas clases de conjuntos:

Teorema 1.6 *Si X es un espacio metrizable, se dan las inclusiones siguientes:*

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & \mathbf{\Sigma}^0_1 & & & & \mathbf{\Sigma}^0_2 & & & & \mathbf{\Sigma}^0_3 & & \\
 & \subset & & \subset & & \subset & & \subset & & \subset & & \subset & \cdots \\
\mathbf{\Delta}^0_1 & & & & \mathbf{\Delta}^0_2 & & & & \mathbf{\Delta}^0_3 & & & & \mathbf{\Delta}^0_4 \\
 & \subset & & \subset & & \subset & & \subset & & \subset & & \subset & \cdots \\
 & & \mathbf{\Pi}^0_1 & & & & \mathbf{\Pi}^0_2 & & & & \mathbf{\Pi}^0_3 & &
\end{array}$$

Es decir, si $0 < \alpha < \beta$, entonces $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha \cup \mathbf{\Pi}^0_\alpha \subset \mathbf{\Delta}^0_\beta$.

Demostración: La inclusión $\mathbf{\Pi}^0_1 \subset \mathbf{\Pi}^0_2$ equivale a que todo cerrado es un conjunto G_δ. Esto es cierto (en un espacio metrizable), porque todo cerrado A puede expresarse como intersección numerable de abiertos de este modo:

$$A = \overline{A} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in X \mid d(x, A) < 1/n\}.$$

De $\mathbf{\Pi}^0_1 \subset \mathbf{\Pi}^0_2$ se sigue inmediatamente que $\mathbf{\Sigma}^0_1 \subset \mathbf{\Sigma}^0_2$.

Ahora es inmediato que si $1 \leq \alpha \leq \beta$ entonces $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha \subset \mathbf{\Sigma}^0_\beta$. En efecto, si $\beta = 2$ ya lo tenemos probado y, si $\beta > 2$, podemos suponer que $\alpha > 1$, pues si probamos que $\boldsymbol{\Sigma}^0_2 \subset \boldsymbol{\Sigma}^0_\beta$ tendremos también la inclusión para $\alpha = 1$. Así pues, si $1 < \alpha \leq \beta$ y $A \in \boldsymbol{\Sigma}^0_\alpha$, entonces A es unión numerable de elementos de

$$\bigcup_{0<\delta<\alpha} \boldsymbol{\Pi}^0_\delta \subset \bigcup_{0<\delta<\beta} \boldsymbol{\Pi}^0_\delta,$$

luego $A \in \boldsymbol{\Sigma}^0_\beta$.

A su vez, ahora es inmediato que si $0 < \alpha \leq \beta$ entonces $\boldsymbol{\Pi}^0_\alpha \subset \boldsymbol{\Pi}^0_\beta$. Por otra parte, si $0 < \alpha < \beta$, de la propia definición se sigue que $\boldsymbol{\Sigma}^0_\alpha \subset \boldsymbol{\Pi}^0_{\alpha+1} \subset \boldsymbol{\Pi}^0_\beta$, así como que $\boldsymbol{\Pi}^0_\alpha \subset \boldsymbol{\Sigma}^0_{\alpha+1} \subset \boldsymbol{\Sigma}^0_\beta$, luego $\boldsymbol{\Sigma}^0_\alpha \cup \boldsymbol{\Pi}^0_\alpha \subset \boldsymbol{\Delta}^0_\beta$. ■

Aunque hemos definido las clases anteriores para ordinales cualesquiera, a continuación probamos que sólo tienen interés para ordinales numerables:

Teorema 1.7 *Si X es un espacio metrizable y $\alpha \geq \omega_1$, entonces*

$$\boldsymbol{\Sigma}^0_\alpha = \boldsymbol{\Sigma}^0_\alpha = \boldsymbol{\Delta}^0_\alpha = \boldsymbol{\Delta}^0_{\omega_1} = \boldsymbol{\Sigma}^0_{\omega_1} = \boldsymbol{\Pi}^0_{\omega_1} = \bigcup_{0<\delta<\omega_1} \boldsymbol{\Delta}^0_\delta$$

es la σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}(X)$.

Demostración: Sea $\mathcal{B} = \bigcup\limits_{0<\delta<\omega_1} \boldsymbol{\Delta}^0_\delta = \bigcup\limits_{0<\delta<\omega_1} \boldsymbol{\Sigma}^0_\delta = \bigcup\limits_{0<\delta<\omega_1} \boldsymbol{\Pi}^0_\delta$.

Notemos que si $\{A_n\}_{n\in\omega}$ es una familia de elementos de $\mathcal{B}$, entonces su unión está en $\mathcal{B}$. En efecto, en principio existe un $\delta_n < \omega_1$ tal que $A_n \in \boldsymbol{\Pi}^0_{\delta_n}$ y, como ω_1 es regular, $\delta = \sup\{\delta_n \mid n \in \omega\} < \omega_1$, luego

$$\bigcup_{n\in\omega} A_n \in \boldsymbol{\Sigma}^0_{\delta+1} \subset \mathcal{B}.$$

También es evidente que $\mathcal{B}$ contiene a los complementarios de sus elementos, luego es una σ-álgebra de subconjuntos de X. Como contiene a los abiertos, $\mathcal{B}(X) \subset \mathcal{B}$.

Por otro lado, una simple inducción demuestra que $\boldsymbol{\Sigma}^0_\alpha \cup \boldsymbol{\Pi}^0_\alpha \subset \mathcal{B}(X)$, pues esto es trivial para $\alpha = 0$ y $\mathcal{B}$ está cerrada para complementos y uniones numerables. Por lo tanto $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}(X)$ y tenemos la igualdad.

Por definición, $\boldsymbol{\Sigma}^0_{\omega_1}$ es la familia de uniones numerables de elementos de $\mathcal{B}$, pero, como $\mathcal{B}$ es una σ-álgebra, resulta que $\boldsymbol{\Sigma}^0_{\omega_1} = \mathcal{B}$, luego también $\boldsymbol{\Pi}^0_{\omega_1} = \mathcal{B}$. A partir de aquí, una simple inducción sobre α demuestra que si $\alpha \geq \omega_1$ se cumple que $\boldsymbol{\Sigma}^0_\alpha = \boldsymbol{\Pi}^0_\alpha = \mathcal{B}$. ■

Observemos que la jerarquía de Borel es trivial en los espacios numerables. En efecto, si X es numerable, hay dos posibilidades: o bien X es discreto, en cuyo caso $\boldsymbol{\Delta}^0_1 = \mathcal{P}X$ y todas las clases de Borel son iguales, o bien X no es discreto, con lo que no todo punto es abierto y tenemos inclusiones estrictas

$$\begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=small]
& \boldsymbol{\Sigma}^0_1 \arrow[dr, phantom, sloped, "\subsetneq"] & \\
\boldsymbol{\Delta}^0_1 \arrow[ur, phantom, sloped, "\subsetneq"] \arrow[dr, phantom, sloped, "\subsetneq"] & & \boldsymbol{\Delta}^0_2 = \mathcal{P}X \\
& \boldsymbol{\Pi}^0_1 \arrow[ur, phantom, sloped, "\subsetneq"] &
\end{tikzcd}$$

pero la jerarquía termina en $\mathbf{\Delta}_2^0$, pues todo subconjunto de X es unión numerable de puntos (cerrados). En particular, si X es numerable tenemos que $\mathcal{B}(X) = \mathcal{P}X$. Veremos que la situación es completamente distinta en el caso de los espacios polacos no numerables. Para ello necesitamos demostrar algunas propiedades de la jerarquía de Borel.

Teorema 1.8 *Si X es un espacio metrizable y $0 < \alpha < \omega_1$, entonces $\mathbf{\Sigma}_\alpha^0$ es cerrado para uniones numerables, $\mathbf{\Pi}_\alpha^0$ es cerrado para intersecciones numerables, $\mathbf{\Sigma}_\alpha^0$ y $\mathbf{\Pi}_\alpha^0$ son ambos cerrados para uniones e intersecciones finitas y, por consiguiente, $\mathbf{\Delta}_\alpha^0$ es un álgebra de subconjuntos de X.*

Demostración: La primera parte del teorema es inmediata. Para la segunda, observamos que se cumple si $\alpha = 1$, pues toda intersección finita de abiertos es abierta y toda unión finita de cerrados es cerrada.

Supongamos que se cumple para $\beta < \alpha$ y sean $A, B \in \mathbf{\Sigma}_\alpha^0$. Entonces

$$A = \bigcup_{n\in\omega} A_n, \qquad B = \bigcup_{n\in\omega} B_n,$$

donde $A_n \in \mathbf{\Pi}_{\alpha_n}^0$, $B_n \in \mathbf{\Pi}_{\beta_n}^0$, con $\alpha_n, \beta_n < \alpha$. Entonces

$$A \cap B = \bigcup_{m,n\in\omega} (A_m \cap B_n) \in \mathbf{\Sigma}_\alpha^0,$$

pues $A_m \cap B_n \in \mathbf{\Pi}_{\alpha_m \cup \beta_n}^0$.

El hecho de que $\mathbf{\Sigma}_\alpha^0$ esté cerrada para intersecciones finitas implica inmediatamente que $\mathbf{\Pi}_\alpha^0$ lo está para uniones finitas. La propiedad de las clases $\mathbf{\Delta}_\alpha^0$ también es inmediata. ■

Conviene introducir una notación general para tratar con las clases que hemos introducido:

Definición 1.9 Una *clase de conjuntos* en una clase $\mathcal{X}$ de espacios topológicos es una aplicación $\mathbf{\Gamma}$ que a cada espacio topológico $X \in \mathcal{X}$ le asigna un conjunto $\mathbf{\Gamma}(X) \subset \mathcal{P}X$. Llamaremos *clase dual* de $\mathbf{\Gamma}$ a la clase $\neg\mathbf{\Gamma}$ dada por

$$\neg\mathbf{\Gamma}(X) = \{A \subset X \mid X \setminus A \in \mathbf{\Gamma}(X)\}.$$

La *clase ambigua* de $\mathbf{\Gamma}$ es la clase $\mathbf{\Delta} = \mathbf{\Gamma} \cap \neg\mathbf{\Gamma}$.

Así, por ejemplo, $\mathbf{\Sigma}_\alpha^0$, $\mathbf{\Pi}_\alpha^0$, $\mathbf{\Delta}_\alpha^0$ o $\mathcal{B}$ son clases de conjuntos sobre los espacios topológicos metrizables. Las dos primeras son mutuamente duales, la tercera es la clase ambigua de cualquiera de las dos, y la cuarta es su propia clase dual y su propia clase ambigua.

Aplicaciones medibles Una aplicación $f : X \longrightarrow Y$ entre dos espacios de $\mathcal{X}$ es $\mathbf{\Gamma}$-medible si para todo abierto A de Y se cumple que $f^{-1}(A) \in \mathbf{\Gamma}(X)$.

Así, las aplicaciones $\mathbf{\Sigma}_1^0$-medibles entre espacios metrizables son simplemente las aplicaciones continuas.

Observemos que si $f : X \longrightarrow Y$ es una aplicación entre espacios metrizables y B es una base numerable de Y, para que f sea $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha$-medible basta con que para todo $A \in B$ se cumpla que $f^{-1}[A] \in \mathbf{\Sigma}^0_\alpha(X)$.

En efecto, todo abierto de Y puede expresarse en la forma $A = \bigcup\limits_{n\in\omega} A_n$, con $A_n \in B$, con lo que $f^{-1}[A] = \bigcup\limits_{n\in\omega} f^{-1}[A_n] \in \mathbf{\Sigma}^0_\alpha$.

Teorema 1.10 *Si $f : X \longrightarrow Y$ es una aplicación $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha$-medible, con $0 < \alpha < \omega_1$, para cada $\beta < \omega_1$ y cada $A \in \mathbf{\Sigma}^0_{1+\beta}(Y)$, se cumple que $f^{-1}[A] \in \mathbf{\Sigma}^0_{\alpha+\beta}(X)$.*

DEMOSTRACIÓN: Lo probamos por inducción sobre β. Para $\beta = 0$ se cumple por la definición de $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha$-medibilidad. Supuesto cierto para todo $\delta < \beta$, tomamos un conjunto $A \in \mathbf{\Sigma}^0_{1+\beta}(Y)$, que será de la forma $A = \bigcup\limits_{n\in\omega} A_n$, con $A_n \in \mathbf{\Pi}^0_{1+\delta_n}(Y)$, con $\delta_n < \beta$. Por hipótesis de inducción,

$$f^{-1}[A_n] = X \setminus f^{-1}[Y \setminus A_n] \in \mathbf{\Pi}^0_{\alpha+\delta_n}(X),$$

luego $f^{-1}[A] = \bigcup\limits_{n\in\omega} f^{-1}[A_n] \in \mathbf{\Sigma}^0_{\alpha+\beta}(X)$. ■

Así, toda antiimagen por una aplicación continua de un conjunto $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha$, $\mathbf{\Pi}^0_\alpha$ o $\mathbf{\Delta}^0_\alpha$ pertenece a la misma clase. Esto se expresa diciendo que las clases de Borel son cerradas para *sustituciones continuas.*

En general, si $\mathbf{\Gamma}$ es una clase de conjuntos con la propiedad de que para toda función continua (medible Borel, etc.) $f : X \longrightarrow Y$ y todo $A \in \mathbf{\Gamma}(Y)$ se cumple que $f^{-1}[A] \in \mathbf{\Gamma}(X)$, se dice que $\mathbf{\Gamma}$ es *cerrada para sustituciones continuas, de Borel,* etc.

Teorema 1.11 *Una función $f : X \longrightarrow Y$ entre espacios metrizables con Y separable es medible Borel si y sólo si es $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha$-medible para un $1 \leq \alpha < \omega_1$.*

DEMOSTRACIÓN: Una implicación es inmediata. Para la otra, tomamos una base $\{U_n\}_{n\in\omega}$ de la topología de Y. Para cada $n \in \omega$, se cumple que $f^{-1}[U_n] \in \mathcal{B}(X)$, luego existe un $\alpha_n < \omega_1$ tal que $f^{-1}[U_n] \in \mathbf{\Sigma}^0_{\alpha_n}(X)$. Como ω_1 es regular, existe $\alpha < \omega_1$ tal que $f^{-1}[U_n] \in \mathbf{\Sigma}^0_\alpha$, para todo $n \in \omega$, luego f es $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha$-medible. ■

El teorema siguiente se demuestra sin dificultad por inducción sobre α:

Teorema 1.12 *Sea Y un espacio metrizable y X un subespacio. Entonces los conjuntos $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha(X)$ (resp. $\mathbf{\Pi}^0_\alpha(X)$) son los de la forma $A \cap X$, donde $A \in \mathbf{\Sigma}^0_\alpha(Y)$ (resp. $\mathbf{\Pi}^0_\alpha(Y)$).*

En particular, $\mathcal{B}(X) = \{B \in \mathcal{B}(Y) \mid B \subset X\}$.

Nota No es cierto que todo $A \in \mathbf{\Delta}^0_\alpha(X)$ sea de la forma $A = B \cap X$, para cierto $B \in \mathbf{\Delta}^0_\alpha(Y)$. Basta pensar en el caso en que $X = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ e $Y = \mathbb{R}$. Se cumple que $\mathbf{\Delta}^0_1(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ es infinito, mientras que $\mathbf{\Delta}^0_1(\mathbb{R}) = \{\varnothing, \mathbb{R}\}$, porque $\mathbb{R}$ es conexo. Si X e Y son espacios polacos, es fácil ver que el resultado es cierto para $\alpha \geq 3$, y no es trivial que también se cumple para $\alpha \geq 2$ (teorema 1.21). ■

Conjuntos universales Ya estamos en condiciones de probar que, tal y como habíamos anunciado, todas las inclusiones del teorema 1.6 son estrictas en el caso de espacios polacos no numerables. Para ello nos apoyaremos en el concepto siguiente:

Definición 1.13 Diremos que un conjunto $U \subset Y \times X$ es Y-*universal* para $\mathbf{\Gamma}(X)$ si $U \in \mathbf{\Gamma}(Y \times X)$ y, llamando $U_y = \{x \in X \mid (y, x) \in U\}$, se cumple que $\mathbf{\Gamma}(X) = \{U_y \mid y \in Y\}$.

Teorema 1.14 *Si X es un espacio metrizable separable, entonces, para cada ordinal $1 \leq \alpha < \omega_1$ existe un conjunto $\mathcal{C}$-universal para $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha(X)$ y un conjunto $\mathcal{C}$-universal para $\mathbf{\Pi}^0_\alpha(X)$.*

DEMOSTRACIÓN: Lo probamos por inducción sobre α. Sea $\{B_n\}_{\in\omega}$ una base numerable de X y definimos

$$U = \{(y, x) \in \mathcal{C} \times X \mid \bigvee n \in \omega (y(n) = 0 \land x \in B_n)\}.$$

Notemos que $U \in \mathbf{\Sigma}^0_1(\mathcal{C} \times X)$ (es decir, es abierto), pues si $(y, x) \in U$ y $n \in \omega$ cumple la definición, entonces $(y, x) \in B_{y|_{n+1}} \times B_n \subset U$. Además, para cada $y \in \mathcal{C}$, tenemos que

$$U_y = \bigcup \{B_n \mid y(n) = 0\},$$

con lo que es evidente que $\{U_y \mid y \in \mathcal{C}\} = \mathbf{\Sigma}^0_1(X)$, es decir, que U es universal para $\mathbf{\Sigma}^0_1(X)$.

En general, si U es universal para $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha(X)$, es fácil ver que $(\mathcal{C} \times X) \setminus U$ es universal para $\mathbf{\Pi}^0_\alpha(X)$.

Supongamos construidos conjuntos U_δ universales para $\mathbf{\Pi}^0_\delta(X)$, para todo ordinal $\delta < \alpha < \omega_1$. Podemos tomar ordinales $\delta_n < \alpha$ tales que $\delta_n \leq \delta_{n+1}$ y $\alpha = \sup\{\delta_n + 1 \mid n \in \omega\}$. Fijamos un homeomorfismo $\mathcal{C} \cong \mathcal{C}^\omega$ que a cada $y \in \mathcal{C}$ le hace corresponder una sucesión $\{y_n\}_{n\in\omega}$. Definimos

$$U = \{(y, x) \in \mathcal{C} \times X \mid \bigvee n \in \omega \ (y_n, x) \in U_{\delta_n}\}.$$

Consideramos la proyección n-sima $p_n : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ que cumple $p_n(y) = y_n$ y la identidad I en X, de modo que

$$U = \bigcup_{n\in\omega} (p_n \times I)^{-1}[U_{\delta_n}] \in \mathbf{\Sigma}^0_\alpha(\mathcal{C} \times X).$$

Para cada $y \in \mathcal{C}$, tenemos que

$$U_y = \bigcup_{n\in\omega} (U_{\delta_n})_{y_n},$$

y, como cada conjunto $\mathbf{\Pi}^0_\delta$ con $\delta < \alpha$ es de la forma $(U_{\delta_n})_{y_n}$ para un n suficientemente grande, es claro que U_y recorre todos los conjuntos $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha(X)$, luego U es universal para $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha(X)$. ■

Con esto podemos probar que la jerarquía de Borel no es trivial:

Teorema 1.15 *Si X es un espacio polaco no numerable, para cada $1 \leq \alpha < \omega_1$ se cumple que $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha \neq \mathbf{\Pi}^0_\alpha$ y, por consiguiente, $\mathbf{\Delta}^0_\alpha \subsetneq \mathbf{\Sigma}^0_\alpha \subsetneq \mathbf{\Delta}^0_{\alpha+1}$, e igualmente con $\mathbf{\Pi}^0_\alpha$.*

Demostración: Por los teoremas [T 6.18] y [T 6.23], tenemos que X contiene un subespacio homeomorfo a $\mathcal{C}$. Si $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha(X) = \mathbf{\Pi}^0_\alpha(X)$, entonces, por 1.12, tenemos que $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha(\mathcal{C}) = \mathbf{\Pi}^0_\alpha(\mathcal{C})$. Vamos a ver que esto es imposible. Para ello tomamos un conjunto U $\mathcal{C}$-universal para $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha(\mathcal{C})$. Definimos $A = \{y \in \mathcal{C} \mid (y,y) \notin U\}$, que es la antiimagen de $(\mathcal{C} \times \mathcal{C}) \setminus U$ por la aplicación diagonal $\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C} \times \mathcal{C}$, luego $A \in \mathbf{\Pi}^0_\alpha(\mathcal{C}) = \mathbf{\Sigma}^0_\alpha(\mathcal{C})$, pero entonces debería existir un $y \in \mathcal{C}$ tal que $A = U_y$, pero esto es imposible.

Si fuera $\mathbf{\Delta}^0_\alpha = \mathbf{\Sigma}^0_\alpha$, tendríamos $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha \subset \mathbf{\Pi}^0_\alpha$ y, recíprocamente, si $A \in \mathbf{\Pi}^0_\alpha$, entonces $X \setminus A \in \mathbf{\Sigma}^0_\alpha \subset \mathbf{\Pi}^0_\alpha$, luego $A \in \mathbf{\Sigma}^0_\alpha$ y tendríamos $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha = \mathbf{\Pi}^0_\alpha$.

Similarmente, si $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha = \mathbf{\Delta}^0_{\alpha+1}$, entonces $\mathbf{\Pi}^0_\alpha \subset \mathbf{\Sigma}^0_\alpha$ y la inclusión opuesta se razona igual que antes. ■

Nota Observemos que si $\lambda < \omega_1$ es un ordinal límite, se cumple

$$\bigcup_{\delta<\lambda} \mathbf{\Sigma}^0_\delta = \bigcup_{\delta<\lambda} \mathbf{\Pi}^0_\delta = \bigcup_{\delta<\lambda} \mathbf{\Delta}^0_\delta,$$

y ahora podemos probar que esta unión está estrictamente contenida en $\mathbf{\Delta}^0_\lambda$. En efecto, sea X un espacio polaco y sea $\{X_n\}_{n\in\omega}$ una familia de abiertos en X disjuntos dos a dos. Sea $\{\delta_n\}_{n<\omega}$ una sucesión cofinal en λ y sea $A_n \subset X_n$ tal que $A_n \in \mathbf{\Sigma}^0_{\delta_n+1} \setminus \mathbf{\Sigma}^0_{\delta_n}$. Entonces $A = \bigcup_{n\in\omega} A_n \in \mathbf{\Delta}^0_\lambda \setminus \bigcup_{\delta<\lambda} \mathbf{\Delta}^0_\delta$. ■

Observemos ahora que no existen conjuntos universales para $\mathbf{\Delta}^0_\alpha$:

Teorema 1.16 *Si $\mathbf{\Gamma}$ es una clase de conjuntos cerrada para sustituciones continuas y que sea autodual, es decir, que coincida con su clase dual, entonces, para todo espacio X, no existe un conjunto X-universal para $\mathbf{\Gamma}(X)$.*

Demostración: Si U fuera un conjunto U-universal para $\mathbf{\Gamma}(X)$ definimos $A = \{x \in X \mid (x,x) \notin U\}$, que está en $\mathbf{\Gamma}(X)$ porque $\mathbf{\Gamma}$ es cerrada para sustituciones continuas y $(X \times X) \setminus U \in \mathbf{\Gamma}(X \times X)$ porque $\mathbf{\Gamma}$ es autodual. Pero entonces debería existir un $x \in X$ tal que $U_x = A$, lo cual es absurdo. ■

1.3 Propiedades estructurales

Vamos a probar algunas propiedades de las clases de la jerarquía de Borel. Para ello introducimos algunas definiciones.

Definición 1.17 Sea $\mathbf{\Gamma}$ una clase de conjuntos.

- $\mathbf{\Gamma}$ tiene la *propiedad de separación* si cuando $A, B \in \mathbf{\Gamma}(X)$, $A \cap B = \varnothing$, existe un $C \in \mathbf{\Delta}(X)$ tal que $A \subset C$ y $B \cap C = \varnothing$.

- $\mathbf{\Gamma}$ tiene la *propiedad de separación generalizada* si para toda sucesión $\{A_n\}_{n\in\omega}$ de conjuntos en $\mathbf{\Gamma}(X)$ tal que $\bigcap\limits_{n\in\omega} A_n = \varnothing$, existe una sucesión $\{C_n\}_{n\in\omega}$ de conjuntos de $\mathbf{\Delta}(X)$ tal que $A_n \subset C_n$ y $\bigcap\limits_{n\in\omega} C_n = \varnothing$.

- $\mathbf{\Gamma}$ tiene la *propiedad de reducción* si cuando $A, B \in \mathbf{\Gamma}(X)$ existen conjuntos $A^*, B^* \in \mathbf{\Gamma}(X)$ tales que $A^* \subset A$, $B^* \subset B$, $A^* \cup B^* = A \cup B$ y $A^* \cap B^* = \varnothing$.

- $\mathbf{\Gamma}$ tiene la *propiedad de reducción generalizada* si cuando $\{A_n\}_{n\in\omega}$ es una sucesión de conjuntos en $\mathbf{\Gamma}(X)$ existe una sucesión $\{A_n^*\}_{n\in\omega}$ de conjuntos en $\mathbf{\Gamma}(X)$ disjuntos dos a dos tales que $A_n^* \subset A_n$ y $\bigcup\limits_{n\in\omega} A_n = \bigcup\limits_{n\in\omega} A_n^*$.

- $\mathbf{\Gamma}$ tiene la *propiedad de uniformización numérica* si para todo $R \in \mathbf{\Gamma}(X\times\omega)$ existe $R^* \in \mathbf{\Gamma}(X \times \omega)$ tal que $R^* \subset R$ y $\bigwedge x \in p_X[R] \overset{1}{\bigvee} n \in \omega\ (x, n) \in R^*$.

Observemos que la propiedad de separación se deduce de la propiedad de separación generalizada sin más que completar una sucesión A_1, A_2 de dos conjuntos disjuntos con $A_n = X$ para $n > 2$, mientras que la propiedad de reducción se deduce de la propiedad de reducción generalizada sin más que completar una sucesión A_1, A_2 con $A_n = \varnothing$ para $n > 2$.

Para estudiar estas propiedades sobre las clases de la jerarquía de Borel conviene observar que éstas cumplen la propiedad siguiente:

Diremos que una clase $\mathbf{\Gamma}$ es *razonable* si una sucesión $\{A_n\}_{n\in\omega}$ tiene todos sus elementos en $\mathbf{\Gamma}(X)$ si y sólo si $\bigcup\limits_{n\in\omega} A_n \times \{n\} \in \mathbf{\Gamma}(X \times \omega)$.

Teorema 1.18 *Sea $\mathbf{\Gamma}$ una clase de subconjuntos definida sobre espacios topológicos metrizables de modo que cada $\mathbf{\Gamma}(X)$ contenga a los abiertos cerrados de X, sea cerrada para sustituciones continuas y uniones e intersecciones finitas y para uniones o intersecciones numerables. Entonces $\mathbf{\Gamma}$ es razonable.*

Demostración: Sea $\{A_n\}_{n\in\omega}$ una sucesión de subconjuntos de un espacio X y sea $A = \bigcup\limits_{n\in\omega} A_n \times \{n\}$.

Si cada A_n está en $\mathbf{\Gamma}(X)$, entonces $B_n = A_n \times \omega \in \mathbf{\Gamma}(X \times \omega)$ por ser una antiimagen continua de A_n. Igualmente, $C_n = X \times \{n\} \in \mathbf{\Gamma}(X \times \omega)$ porque $\{n\}$ es abierto cerrado en ω y C_n es una antiimagen continua, luego $A_n \times \{n\} = B_n \cap C_n \in \mathbf{\Gamma}(X \times \omega)$. Si $\mathbf{\Gamma}$ es cerrado para uniones numerables, entonces concluimos que $A \in \mathbf{\Gamma}(X \times \omega)$. En caso contrario usamos que

$$(X \times \omega) \setminus A = \bigcup_{n\in\omega} (X \setminus A_n) \times \{n\}.$$

Como en este caso $\mathbf{\Gamma}$ es cerrado para intersecciones numerables, resulta que $\neg\mathbf{\Gamma}$ es cerrado para sustituciones continuas, para uniones numerables y para intersecciones finitas, luego el mismo razonamiento anterior nos permite concluir que $(X \times \omega) \setminus A \in \neg\mathbf{\Gamma}$, luego $A \in \mathbf{\Gamma}$ igualmente.

Recíprocamente, si $A \in \mathbf{\Gamma}(X \times \omega)$, usamos que la inclusión $i_n : X \longrightarrow X \times \omega$ dada por $i_n(x) = (x, n)$ es continua, y $A_n = i_n^{-1}[A]$. ■

En particular, todas las clases $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha$ y $\mathbf{\Pi}^0_\alpha$ son razonables y esto a su vez implica que $\mathbf{\Delta}^0_\alpha$ también lo es.

Teorema 1.19 *Sea $\mathbf{\Gamma}$ una clase de conjuntos definida sobre los espacios polacos.*

a) Si $\mathbf{\Gamma}$ tiene la propiedad de reducción, entonces $\neg\mathbf{\Gamma}$ tiene la propiedad de separación.

b) Si $\mathbf{\Gamma}$ es cerrada para uniones numerables y tiene la propiedad de reducción generalizada, entonces $\neg\mathbf{\Gamma}$ tiene la propiedad de separación generalizada.

c) Si $\mathbf{\Gamma}$ es razonable, entonces $\mathbf{\Gamma}$ tiene la propiedad de reducción generalizada si y sólo si tiene la propiedad de uniformización numérica.

d) Si $\mathbf{\Gamma}$ es cerrada para sustituciones continuas y existe un conjunto $\mathcal{C}$-universal para $\mathbf{\Gamma}(\mathcal{C})$, entonces $\mathbf{\Gamma}$ no puede tener a la vez la propiedad de reducción y separación.

Demostración: a) Dados $A, B \in \neg\mathbf{\Gamma}$ disjuntos, existen $A^* \subset X \setminus A$, $B^* \subset X \setminus B$ tales que A^*, $B^* \in \mathbf{\Gamma}$, $A^* \cup B^* = X$ y $A^* \cap B^* = \varnothing$. Así, $B^* = X \setminus A^* \in \mathbf{\Delta}$ separa A y B.

b) Sea $\{A_n\}_{n\in\omega}$ una sucesión en $\neg\mathbf{\Gamma}$ con intersección vacía. Entonces existen conjuntos $B_n^* \subset X \setminus A_n$ en $\mathbf{\Gamma}$ disjuntos dos a dos tales que $\bigcup\limits_{n\in\omega} B_n^* = X$. Es claro que los conjuntos $C_n = X \setminus B_n^* \in \mathbf{\Gamma}$ separan la sucesión dada.

c) Supongamos que $\mathbf{\Gamma}$ tiene la propiedad de uniformización numérica, sea $\{A_n\}_{n\in\omega}$ una sucesión en $\mathbf{\Gamma}(X)$ y sea $A = \bigcup\limits_{n\in\omega} A_n \times \{n\} \in \mathbf{\Gamma}(X \times \omega)$. Sea $A^* \subset A$ una uniformización en $\mathbf{\Gamma}(X \times \omega)$. Sea

$$A_n^* = \{x \in X \mid (x, n) \in A^*\},$$

de modo que $A^* = \bigcup\limits_{n\in\omega} A_n^* \times \{n\}$. Como $\mathbf{\Gamma}$ es razonable, $A_n^* \in \mathbf{\Gamma}(X)$ y estos conjuntos reducen la sucesión dada.

Supongamos ahora que $\mathbf{\Gamma}$ cumple la propiedad de reducción generalizada y sea $A \in \mathbf{\Gamma}(X \times \omega)$. Sea $A_n = \{x \in X \mid (x, n) \in A\}$, de modo que se cumple $A = \bigcup\limits_{n\in\omega} A_n \times \{x\}$. Como $\mathbf{\Gamma}$ es razonable, $A_n \in \mathbf{\Gamma}(X)$.

Por la propiedad de reducción generalizada, existen $A_n^* \subset A_n$ en $\mathbf{\Gamma}(X)$ disjuntos dos a dos y tales que $\bigcup\limits_{n\in\omega} A_n^* = \bigcup\limits_{n\in\omega} A_n$. Entonces $A^* = \bigcup\limits_{n\in\omega} A_n^* \times \{n\}$ está en $\mathbf{\Gamma}(X \times \omega)$ y uniformiza a A.

d) Sea $U \subset \mathcal{C}\times\mathcal{C}$ un conjunto $\mathcal{C}$-universal para $\mathbf{\Gamma}$. Fijemos un homeomorfismo $\mathcal{C} \cong \mathcal{C}^2$, que a cada $x \in \mathcal{C}$ le haga corresponder un par (x_0, x_1). Definimos

$$U^0 = \{(x, y) \in \mathcal{C}^2 \mid (x_0, y) \in U\}, \quad U^1 = \{(x, y) \in \mathcal{C}^2 \mid (x_1, y) \in U\}.$$

Así $U^0, U^1 \in \mathbf{\Gamma}(\mathcal{C} \times \mathcal{C})$ (pues son antiimágenes continuas de U) y forman un *par universal,* es decir, dados $A, B \in \mathbf{\Gamma}(\mathcal{C})$, existe un $x \in \mathcal{C}$ tal que $U^0_x = A$ y $U^1_x = B$.

Si $\mathbf{\Gamma}$ tiene la propiedad de reducción, sean $U^{0*} \subset U^0$, $U^{1*} \subset U^1$ reducciones del par U^0, U^1. Si además $\mathbf{\Gamma}$ tiene la propiedad de separación, podemos separar las reducciones por un $V \in \mathbf{\Delta}$. Veamos ahora que V es $\mathcal{C}$-universal para $\mathbf{\Delta}(\mathcal{C})$, con lo que tendremos una contradicción con el teorema 1.16.

En efecto, dado un $A \in \mathbf{\Delta}(\mathcal{C})$, existe un $x \in \mathcal{C}$ tal que $U^0_x = A$, $U^1_x = \mathcal{C} \setminus A$. Veamos que $V_x = A$. Para ello observamos que

$$U^{0*}_x \subset U^0_x = A, \qquad U^{1*}_x \subset U^1_x = \mathcal{C} \setminus A, \qquad U^{0*}_x \cup U^{1^*}_x = U^0_x \cup U^1_x = \mathcal{C},$$

luego también $U^{0*}_x = A$, $U^{1*}_x = \mathcal{C} \setminus A$. Por otra parte, $U^{0*}_x \subset V_x$, $U^{1^*}_x \cap V_x = \varnothing$, luego $V_x = A$. Además, todo $V_x \in \mathbf{\Delta}(\mathcal{C})$ porque $\mathbf{\Gamma}$ es cerrada para sustituciones continuas. ■

Teorema 1.20 *Sobre la clase de los espacios metrizables, para todo $\alpha > 1$, la clase $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha$ tiene la propiedad de uniformización numérica y la propiedad de reducción generalizada, pero no la propiedad de separación; la clase $\mathbf{\Pi}^0_\alpha$ tiene la propiedad de separación generalizada, pero no la propiedad de reducción. En espacios cero-dimensionales esto es cierto también para $\alpha = 1$.*

Demostración: Por el teorema anterior, basta probar que $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha$ tiene la propiedad de uniformización numérica. Sea, pues, $R \in \mathbf{\Sigma}^0_\alpha(X \times \omega)$ con $\alpha > 1$. Entonces $R = \bigcup\limits_{n\in\omega} R_n$, donde $R_n \in \mathbf{\Pi}^0_{\delta_n}(X \times \omega)$, para cierto $\delta_n < \alpha$. Fijemos una biyección $\langle\ ,\ \rangle : \omega \times \omega \longrightarrow \omega$. Representaremos su inversa por $k \mapsto (k_0, k_1)$. Definimos

$$Q = \{(x, k) \in X \times \omega \mid (x, k_1) \in R_{k_0}\}, \qquad Q^* = \{(x, k) \in Q \mid \bigwedge l < k\ (x, l) \notin Q\}.$$

Finalmente, sea $R^* = \{(x, n) \in X \times \omega \mid \bigvee i \in \omega\ (x, \langle i, n\rangle) \in Q^*)\}$. Es fácil ver que R^* uniformiza a R. Sólo hemos de probar que $R^* \in \mathbf{\Sigma}^0_\alpha(X \times \omega)$. Para ello observamos en primer lugar que

$$R^* = \bigcup_{i\in\omega} \{(x, n) \in X \times \omega \mid (x, \langle i, n\rangle) \in Q^*)\},$$

luego basta probar que cada conjunto de la unión está en $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha(X \times \omega)$, pero cada uno de ellos es una antiimagen continua de Q^*, luego basta comprobar que $Q^* \in \mathbf{\Sigma}^0_\alpha(X \times \omega)$. A su vez,

$$Q^* = \bigcup_{k\in\omega} \{x \in X \mid (x, k) \in Q^*\} \times \{k\}$$

y, como $\mathbf{\Sigma}^1_\alpha$ es razonable, basta probar que cada $Q^{*k} = \{x \in X \mid (x, k) \in Q^*\}$ está en $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha(X)$. A su vez,

$$Q^{*k} = Q^k \cap \bigcap_{l<k} (X \setminus Q^l),$$

donde $Q^k = \{x \in X \mid (x,k) \in Q\}$, y basta probar que $Q^k, X \setminus Q^k \in \mathbf{\Sigma}^0_\alpha(X)$. Ahora bien, Q^k es una antiimagen continua de R_{k_0}, luego

$$Q^k \in \mathbf{\Pi}^0_{\delta_{k_0}}(X) \subset \mathbf{\Sigma}^0_\alpha(X), \qquad X \setminus Q^k \in \mathbf{\Sigma}^0_{\delta_{k_0}}(X) \subset \mathbf{\Sigma}^0_\alpha(X).$$

Si X es cero-dimensional y $\alpha = 1$, entonces $X \times \omega$ es cero-dimensional, podemos descomponer R en unión numerable de abiertos cerrados R_n y toda la demostración vale igualmente. ■

Veamos algunas aplicaciones:

Teorema 1.21 *Sean $X \subset Y$ espacios metrizables. Si $1 < \alpha < \omega_1$, los conjuntos de $\mathbf{\Delta}^0_\alpha(X)$ son los de la forma $A \cap X$, donde $A \in \mathbf{\Delta}^0_\alpha(Y)$. Si Y es cero-dimensional, también es cierto para $\alpha = 1$.*

Demostración: Sea $B \in \mathbf{\Delta}^0_\alpha(X)$. Entonces existen conjuntos $S \in \mathbf{\Sigma}^0_\alpha(Y)$ y $T \in \mathbf{\Pi}^0_\alpha(Y)$ tales que $B = S \cap X = T \cap X$. Como S, $Y \setminus T \in \mathbf{\Sigma}^0_\alpha(Y)$, podemos reducirlos a $S^* \subset S$, $T^* \subset Y \setminus T$ de modo que S^* y T^* son disjuntos y $X \subset S \cup (Y \setminus T) = S^* \cup T^*$. Se cumple que

$$B \subset S^* \cap X \subset (Y \setminus T^*) \cap X \subset T \cap X = B,$$

luego $B = S^* \cap X$. ■

Definición 1.22 Dada una familia $\{A_n\}_{n\in\omega}$ de subconjuntos de un conjunto X, definimos

$$\liminf_n A_n = \bigcup_{n\in\omega} \bigcap_{m\geq n} A_m, \qquad \text{lím sup}_n = \bigcap_{n\in\omega} \bigcup_{m\geq n} A_m.$$

Así, el límite inferior contiene a los elementos que pertenecen a casi todos los A_n y el límite superior a los elementos que pertenecen a infinitos A_n. Claramente

$$\liminf_n A_n \subset \limsup_n A_n.$$

Si se da la igualdad, definimos $\lim_n A_n = \liminf_n A_n = \limsup_n A_n$. Notemos que esto equivale a que $\chi_A = \lim_n \chi_{A_n}$.

Teorema 1.23 *Si X es un espacio metrizable y $A \subset X$, entonces para todo ordinal $1 < \alpha < \omega_1$, se cumple que $A \in \mathbf{\Delta}^0_{\alpha+1}(X)$ si y sólo si $A = \lim_n A_n$ para cierta sucesión $\{A_n\}_{n\in\omega}$ en $\mathbf{\Delta}^0_\alpha(X)$. Si X es cero-dimensional, también se cumple para $\alpha = 1$. Si α es un ordinal límite, la sucesión puede tomarse en $\bigcup_{\delta<\alpha} \mathbf{\Delta}^0_\alpha(X)$.*

Demostración: Si $A \in \mathbf{\Delta}^0_{\alpha+1}$, entonces $A = \bigcup_{n\in\omega} F_n$, $X \setminus A = \bigcup_{n\in\omega} G_n$, donde F_n, $G_n \in \mathbf{\Pi}^0_\alpha$. Podemos suponer que $F_n \subset F_{n+1}$, $G_n \subset G_{n+1}$. Por la propiedad de separación, existe $A_n \in \mathbf{\Delta}^0_\alpha$ tal que $F_n \subset A_n$ y $G_n \cap A_n = \varnothing$. Es fácil ver que

$$A \subset \liminf_n A_n \subset \limsup_n A_n \subset A.$$

Recíprocamente, si $A = \lim\limits_n A_n$ con $A_n \in \mathbf{\Delta}^0_\alpha$, entonces $A_n \in \mathbf{\Sigma}^0_\alpha(X)$, luego

$$\bigcup_{m\geq n} A_m \in \mathbf{\Sigma}^0_\alpha \rightarrow \bigcap_{m\geq n} (X \setminus A_n) \in \mathbf{\Pi}^0_\alpha \rightarrow \bigcup_{n\in\omega} \bigcap_{m\geq n} (X \setminus A_n) \in \mathbf{\Sigma}^0_{\alpha+1}$$

$$\rightarrow \bigcap_{n\in\omega} \bigcup_{m\geq n} A_n = A \in \mathbf{\Pi}^0_{\alpha+1}$$

e igualmente se prueba que $A \in \mathbf{\Sigma}^0_{\alpha+1}$, luego $A \in \mathbf{\Delta}^0_{\alpha+1}$.

Si α es un ordinal límite, sólo hemos de refinar la primera parte de la prueba. Expresamos ahora

$$A = \bigcup_{n\in\omega} B_n = \bigcap_{m\in\omega} C_n, \qquad B_n \in \mathbf{\Pi}^0_\alpha,\ C_m \in \mathbf{\Sigma}^0_\alpha.$$

Podemos suponer que $B_n \subset B_{n+1}$ y $C_{m+1} \subset C_m$. A su vez,

$$B_n = \bigcap_{k\in\omega} B_{n,k}, \qquad C_m = \bigcup_{k\in\omega} C_{m,k}, \qquad B_{n,k},\ C_{m,k} \in \bigcup_{\delta<\alpha} \mathbf{\Delta}^0_\delta.$$

Podemos suponer que $B_{n,k+1} \subset B_{n,k}$, $C_{m,k} \subset C_{m,k+1}$. Definimos

$$A_k = \bigcup_{n=0}^{k} (B_{n,k} \cap \bigcap_{m=0}^{n} C_{m,k}) \in \bigcup_{\delta<\alpha} \mathbf{\Delta}^0_\delta.$$

Vamos a probar que $A = \lim\limits_k A_k$. Para ello probamos las inclusiones

$$A \subset \liminf_k A_k \subset \limsup_k A_k \subset A.$$

Si $x \in A$, entonces $x \in B_{n_0}$, luego $x \in B_{n_0,k}$ para todo $k \in \omega$. Por otra parte, $x \in C_m$, luego existe un k_0 tal que $x \in C_{m,k}$ para todo $k \geq k_0$. Este k_0 depende de m, pero podemos tomar el mismo para todo $m \leq n_0$ y exigir además que $k_0 \geq n_0$. Así, si $k \geq k_0$, tenemos que $x \in B_{n_0,k} \cap \bigcap\limits_{m=0}^{n_0} C_{m,k}$, luego $x \in \liminf\limits_k A_k$.

Por otra parte, si $x \notin A$, entonces $x \notin C_{m_0}$, luego $x \notin C_{m_0,k}$ para todo $k \in \omega$. Además $x \notin B_n$, luego $x \notin B_{n,k}$ para todo $k \geq k_0$, donde k_0 depende de n, pero podemos tomar el mismo para todo $n \leq m_0$ y exigir que $k_0 \geq m_0$. Así, si $k \geq k_0$ tenemos que, para todo $n \leq k$, se cumple que $x \notin B_{n,k} \cap \bigcap\limits_{m=0}^{n} C_{m,k}$, ya que, o bien $n \leq m_0$, en cuyo caso $x \notin B_{n,k}$, o bien $n \geq m_0$, en cuyo caso $x \notin C_{m_0,k}$. Por lo tanto, $x \notin A_k$ y así $x \notin \limsup\limits_k A_k$. ■

1.4 La jerarquía de Baire

En esta sección presentamos el análisis de Lebesgue de las funciones de Baire, o analíticamente representables (véase la introducción). Recordemos que Baire definió recurrentemente las que hoy se conocen como funciones de Baire de clase α como los límites puntuales de sucesiones de funciones de Baire de clase $< \alpha$, tomando como funciones de clase 0 las funciones continuas, pero, aunque esta definición resulta adecuada si hablamos de funciones con valores en $\mathbb{R}$, para espacios más generales requiere una corrección en el nivel $\alpha = 1$:

Definición 1.24 Una aplicación $f : X \longrightarrow Y$ entre espacios metrizables es de la *clase de Baire* 1 si para todo abierto U en Y se cumple que $f^{-1}[U]$ es un F_σ en X. Llamaremos $B_1(X, Y)$ al conjunto de todas las funciones de Baire de clase 1 de X en Y.

De este modo:

Teorema 1.25 *Sea $\{f_n\}_{n\in\omega}$ una sucesión de funciones continuas $f_n : X \longrightarrow Y$ entre espacios metrizables separables que converja puntualmente a una función $f = \lim\limits_n f_n$. Entonces $f \in B_1(X, Y)$.*

Demostración: Como la clase $\mathbf{\Sigma}^1_2(X)$ de los subconjuntos F_σ de X es cerrada para uniones numerables e intersecciones finitas, basta probar que las antiimágenes de los intervalos $]-\infty, a[$ y $]a, +\infty[$ son F_σ en X. Ahora bien, los conjuntos

$$f^{-1}\big[]-\infty, a[\big] = \bigcup_{n\in\omega}\bigcap_{m\geq n}\{x \in X \mid f_m(x) \leq a - \tfrac{1}{n}\},$$

$$f^{-1}\big[]a, +\infty[\big] = \bigcup_{n\in\omega}\bigcap_{m\geq n}\{x \in X \mid f_m(x) \geq a + \tfrac{1}{n}\},$$

son claramente F_σ. ■

El recíproco no es cierto en general. Por ejemplo, si $X = \mathbb{R}$, $Y = \{0, 1\}$ y $f = \chi_{[0,1]}$, es fácil ver que $f \in B_1(X, Y)$, pero no es límite puntual de funciones continuas. No obstante:

Teorema 1.26 (Lebesgue-Hausdorff-Banach) *Si X es un espacio metrizable separable y $f \in B_1(X, \mathbb{R})$, entonces f es el límite puntual de una sucesión de funciones continuas.*

Demostración: Fijemos un homeomorfismo $h : \mathbb{R} \longrightarrow\,]0, 1[$. Es evidente que $f \circ h \in B_1(X, \mathbb{R})$. Veamos que basta probar que $f \circ h = \lim\limits_n g_n$, donde cada $g_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función continua.

No pedimos que la imagen de g_n esté contenida en $]0, 1[$, pero basta tomar

$$g_n' = (g_n \vee \frac{1}{n}) \wedge (1 - \frac{1}{n}),$$

que es también una función continua con imagen en $]0, 1[$ y $\lim\limits_n g_n' = f \circ h$. Entonces, $f = \lim\limits_n (g_n' \circ h^{-1})$ y las funciones $g_n' \circ h^{-1}$ son continuas.

Así pues, podemos suponer que $f : \mathbb{R} \longrightarrow]0,1[$. Para cada $n \geq 2$ y para $i = 0, \ldots, n-2$, definimos $A_i^n = f^{-1}\big[\,]\frac{i}{n}, \frac{i+2}{n}[\,\big] \in \mathbf{\Sigma}_2^0(X)$, de modo que

$$\bigcup_{i=0}^{n-2} A_i^n = X.$$

Como $\mathbf{\Sigma}_2^1(X)$ tiene la propiedad de reducción generalizada, existen $B_i^n \subset A_i^n$ disjuntos dos a dos en $\mathbf{\Delta}_2^0(X)$ cuya unión es X. Es claro entonces que

$$g_n = \sum_{i=0}^{n-2} \frac{i}{n}\, \chi_{B_i^n} \in B_1(X, \mathbb{R}),$$

y $f = \lim\limits_n g_n$, donde el límite es uniforme. En efecto, dado $x \in X$, existe un único i tal que $x \in B_i^n$, en cuyo caso $i/n < f(x) < (i+2)/n$, mientras que $g_n(x) = i/n$, luego $|f(x) - g_n(x)| < 2/n$, para todo $x \in X$. La demostración se termina aplicando los dos teoremas siguientes. ■

Teorema 1.27 *Sea X un espacio metrizable separable y $g_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$ una sucesión de funciones continuas que converge uniformemente a una función f. Si cada g_n es límite puntual de funciones continuas, lo mismo le sucede a f.*

Demostración: Tomando una subsucesión podemos exigir que

$$\|f - g_n\|_\infty < \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Así, llamando $h_n = g_{n+1} - g_n$, tenemos que $\|h_n\|_\infty < 2^{-n}$ y $f = g_0 + \sum\limits_{n=0}^{\infty} h_n$, donde la serie converge uniformemente, ya que sus sumas parciales son las funciones g_n. Basta probar que la serie es límite puntual de funciones continuas, y sabemos que cada h_n lo es. Sea $h_n = \lim\limits_n u_i^n$, donde cada u_i^n es continua. Cambiando u_i^n por

$$-\frac{1}{2^n} \vee \left(\frac{1}{2^n} \wedge u_i^n\right)$$

se sigue cumpliendo que la sucesión converge a h_n y además $\|u_i^n\|_\infty \leq 2^{-n}$, con lo que podemos definir

$$r_i = \sum_{n=0}^{\infty} u_i^n,$$

que es una función continua por el teorema de mayoración de Weierstrass. Basta probar que $f = \lim\limits_i r_i$. Para ello fijamos un $x \in X$ y un $\epsilon > 0$. Existe un $n_0 \in \omega$ tal que

$$\sum_{n > n_0} 2^{-n} < \frac{\epsilon}{3} \quad \text{y} \quad \sum_{n > n_0} h_n(x) < \frac{\epsilon}{3}.$$

La primera desigualdad implica que, para todo $i \in \omega$,

$$\left|\sum_{n > n_0} u_i^n(x)\right| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Así,

$$\left| r_i(x) - \sum_{n=0}^{\infty} h_n(x) \right| < \frac{2\epsilon}{3} + \sum_{n=0}^{n_0} |u_i^n(x) - h_n(x)|$$

y, tomando i suficientemente grande, el último término se puede hacer también menor que $\epsilon/3$. ∎

Teorema 1.28 *Sea X un espacio metrizable y $A \in \mathbf{\Delta}_2^0(X)$. Entonces χ_A puede expresarse como límite puntual de una sucesión de funciones continuas.*

Demostración: Sea $A = \bigcup_{n\in\omega} F_n$, $X \setminus A = \bigcup_{n\in\omega} H_n$, donde F_n y H_n son cerrados. Podemos suponer que $F_n \subset F_{n+1}$ y $H_n \subset H_{n+1}$.

Como $F_n \cap H_n = \varnothing$, el lema de Urysohn[4] nos da una función $h_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $h_n|_{F_n} = 1$ y $h_n|_{H_n} = 0$. Claramente $\chi_A = \lim\limits_n h_n$. ∎

Ejercicio: Demostrar que 1.26 es válido también para $B_1(X, \mathbb{R}^n)$ y $B_1(X, \mathbb{C}^n)$.

Seguidamente presentamos la jerarquía completa de las funciones de Baire:

Definición 1.29 Sean X e Y espacios topológicos metrizables. Para cada ordinal $1 < \alpha < \omega_1$, definimos $B_\alpha(X,Y)$ como el conjunto de funciones $f : X \longrightarrow Y$ que se expresan como límite puntual de una sucesión de funciones pertenecientes a $\bigcup_{\delta<\alpha} B_\delta(X,Y)$.

Las funciones de $B_\alpha(X,Y)$ se llaman *funciones de Baire de clase α.* Las *funciones de Baire* son las funciones de

$$B(X,Y) = \bigcup_{1\leq\alpha<\omega_1} B_\alpha(X,Y).$$

Claramente, si $1 \leq \alpha < \omega_1$, se da la inclusión $B_\alpha(X,Y) \subset B_\beta(X,Y)$. Llamaremos $B_0(X,Y)$ al conjunto de las aplicaciones continuas de X en Y, a las que llamaremos también *funciones de Baire de clase* 0. El teorema 1.25 nos da que

$$B_0(X,Y) \subset B_1(X,Y) \subset \cdots,$$

y, más aún que todo límite puntual de funciones de $B_0(X,Y)$ está en $B_1(X,Y)$, si bien —como hemos visto— el recíproco no es cierto en general. Cuando dicho recíproco es cierto (en particular, si $Y = \mathbb{R}^n$), la clase $B(X,Y)$ de las funciones de Baire resulta ser la menor clase de funciones que contiene a las funciones continuas y que es cerrada para límites puntuales, y entonces reciben también el nombre de *funciones analíticamente representables.*

[4]El lema de Urysohn es trivial para el caso de espacios métricos: afirma que si A y B son cerrados disjuntos, existe una función (real) continua que vale 1 en A y 0 en B. Basta tomar

$$f(x) = \frac{d(x,B)}{d(x,A) + d(x,B)}.$$

Ejercicio: Demostrar que cada conjunto $B_\alpha(X,\mathbb{R})$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^X$, y un subanillo y un retículo (es decir, que si $f, g \in B_\alpha(X,\mathbb{R})$ también $f \wedge g$, $f \vee g \in B_\alpha(X,\mathbb{R})$).

En el conjunto de funciones $f : X \longrightarrow Y$ tenemos definida una jerarquía de funciones:

$$\mathbf{\Sigma}^0_1\text{-medibles} \subset \mathbf{\Sigma}^0_2\text{-medibles} \subset \cdots \subset \mathbf{\Sigma}^0_\alpha\text{-medibles} \subset \cdots \subset \mathcal{B}\text{-medibles},$$

para todo $1 \leq \alpha < \omega_1$. Las inclusiones son estrictas cuando las inclusiones $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha(X) \subsetneq \mathbf{\Sigma}^0_\beta(X)$ lo son (en particular si X es un espacio polaco no numerable). En efecto podemos tomar un conjunto $A \in \mathbf{\Sigma}^0_\beta(X) \setminus \mathbf{\Sigma}^0_\alpha(X)$ y, fijados dos puntos p_0, $p_1 \in Y$, definimos la función

$$\chi_A(x) = \begin{cases} p_1 & \text{si } x \in A, \\ p_0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

de modo que, para todo $C \subset Y$ se cumple que $\chi_A^{-1}[C] \in \{\varnothing, A, X \setminus A, X\}$, luego χ_A es $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha$-medible, pero no $\mathbf{\Sigma}^0_\beta$-medible.

Si comparamos con la jerarquía de Baire, observamos que $B_0(X,Y)$ es la clase de las funciones $\mathbf{\Sigma}^0_1$-medibles y que $B_1(X,Y)$ es la clase de las funciones $\mathbf{\Sigma}^0_2$-medibles. En general:

Teorema 1.30 (Lebesgue-Hausdorff-Banach) *Sean X, Y espacios metrizables con Y separable. Para todo ordinal $\alpha < \omega_1$, la clase $B_\alpha(X,Y)$ coincide con la clase de las funciones $\mathbf{\Sigma}^0_{\alpha+1}$-medibles. En particular, las funciones de Baire son las funciones medibles Borel.*

Demostración: Veamos que toda función de $B_\alpha(X,Y)$ es $\mathbf{\Sigma}^0_{\alpha+1}$-medible por inducción sobre α. Para $\alpha = 0$ y $\alpha = 1$ es cierto por definición. Si el resultado es cierto para todo $\delta < \alpha$, tomemos $f \in B_\alpha(X,Y)$, de modo que existe una sucesión $\{f_n\}_{n\in\omega}$ de funciones en $\bigcup\limits_{\delta<\alpha} B_\delta(X,Y)$ que converge puntualmente a f.

Fijemos una base numerable B de Y. Si $U \subset Y$ es abierto y $x \in X$, entonces

$$f(x) \in U \leftrightarrow \bigvee V \in B(\overline{V} \subset U \wedge \bigvee k \in \omega \bigwedge n \in \omega(n \geq k \rightarrow f_n(x) \in \overline{V})).$$

Por lo tanto,

$$f^{-1}[U] = \bigcup_{V\in B, \overline{V}\subset U} \bigcup_{k\in\omega} \bigcap_{n\geq k} (X \setminus f_n^{-1}[Y \setminus \overline{V}]) = \bigcup_{V\in B, \overline{V}\subset U} \bigcup_{k\in\omega} X \setminus \bigcup_{n\geq k} f_n^{-1}[Y \setminus \overline{V}].$$

Por hipótesis de inducción, para cada $n \in \omega$ existe un $\delta_n < \alpha$ tal que f_n es $\mathbf{\Sigma}^0_{\delta_n+1}$-medible, luego

$$f_n^{-1}[Y \setminus \overline{V}] \in \mathbf{\Sigma}^0_{\delta_n+1}(X), \quad X \setminus \bigcup_{n\geq k} f_n^{-1}[Y \setminus \overline{V}] \in \mathbf{\Pi}^0_{\delta_n+1}(X)$$

y $f^{-1}[U] \in \mathbf{\Sigma}^0_{\alpha+1}(X)$. Por lo tanto, f es $\mathbf{\Sigma}^0_{\alpha+1}$-medible.[5]

Ahora demostramos que toda función $\mathbf{\Sigma}^0_{\alpha+1}$-medible es una función de Baire de clase α, también por inducción sobre α. En principio, el resultado es cierto por definición para $\alpha = 0, 1$. Así pues, podemos suponer que $\alpha > 1$ y hemos de probar que si f es $\mathbf{\Sigma}^0_{\alpha+1}$-medible, entonces es límite puntual de una sucesión de funciones de Baire de clase menor que α.

Sin embargo, vamos a demostrar algo mas general. En el supuesto de que el espacio X sea cero-dimensional el argumento que presentamos es válido incluso cuando $\alpha = 1$, de modo que vamos a probar de paso que el teorema 1.26 es válido para $B_1(X, Y)$ cuando X es cero-dimensional e Y es separable. En definitiva, suponemos que $\alpha > 1$ o bien que $\alpha \geq 1$ y X es cero-dimensional.

Empezamos suponiendo que $Y = \{0, 1\}$, de modo que $f = \chi_A$, para cierto conjunto A. Que f sea $\mathbf{\Sigma}^0_{\alpha+1}$-medible equivale entonces a que $A \in \mathbf{\Delta}^0_{\alpha+1}(X)$. Por 1.23 tenemos que existe una sucesión $\{A_n\}_{n\in\omega}$ de funciones de $\mathbf{\Delta}^0_\alpha(X)$ tales que $\chi_A = \lim\limits_n \chi_{A_n}$.

Si $\alpha = \beta+1$, entonces, como χ_{A_n} es $\mathbf{\Sigma}^0_{\beta+1}$-medible, por hipótesis de inducción está en $B_\beta(X, Y)$, luego $\chi_A \in B_\alpha(X, Y)$. Si α es un ordinal límite, entonces 1.23 nos asegura que podemos tomar cada A_n en $\bigcup\limits_{\delta<\alpha} \mathbf{\Delta}^0_\delta(X)$, con lo que χ_{A_n} es $\mathbf{\Sigma}^0_{\delta+1}$-medible, luego está en $B_\delta(X, Y)$ y también $\chi_A \in B_\alpha(X, Y)$.

El argumento precedente se generaliza al caso en que Y es finito, digamos $Y = k$. Llamemos $A^i = f^{-1}[i]$, de modo que los conjuntos A^i son disjuntos dos a dos, su unión es X y están en $\mathbf{\Delta}^0_{\alpha+1}(X)$. Como en el caso anterior, $A^i = \lim\limits_n A^i_n$, para ciertos conjuntos $\mathbf{\Delta}^0_\alpha(X)$ (o $\mathbf{\Delta}^0_\delta(X)$ con $\delta < \alpha$ si α es un ordinal límite). Observamos entonces que si definimos

$$\tilde{A}^i_n = A^i_n \setminus \bigcup_{j<i} A^j_n,$$

se sigue cumpliendo que $A^i = \lim\limits_n \tilde{A}^i_n$, los conjuntos $\tilde{A}^i_n$ siguen estando en $\mathbf{\Delta}^0_\alpha(X)$ (o por debajo, si α es límite) y además $\tilde{A}^0_n, \ldots, \tilde{A}^{k-1}_n$ son disjuntos dos a dos. Por ello podemos definir $f_n : X \longrightarrow Y$ como la función que toma el valor i en $\tilde{A}^i_n$, de modo que, claramente, $f = \lim\limits_n f_n$ y, como en el caso anterior, se razona que $f \in B_\alpha(X, Y)$.

Notemos que si Y es finito, d es una distancia en Y y $f, g : X \longrightarrow Y$ cumplen que $d(f(x), g(x)) \leq a$ para todo $x \in X$, si $f = \lim\limits_n f_n$, $g = \lim\limits_n g_n$ y las funciones f_n, g_n son $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha$-medibles, existen funciones g'_n que son también $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha$-medibles, de modo que $g = \lim\limits_n g'_n$ y además $d(f_n(x), g'_n(x)) \leq a$ para todo $x \in X$.

[5] Más aún, en la prueba se ve que si α es un ordinal límite podemos concluir que f es, de hecho, $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha$-medible. El mismo argumento muestra que las funciones medibles respecto de una σ-álgebra son cerradas para límites puntuales.

En efecto, basta definir

$$g'_n(x) = \begin{cases} g_n(x) & \text{si } d(f_n(x), g_n(x)) \leq a, \\ f_n(x) & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Se cumple que g'_n es $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha$-medible, pues

$$F = \{x \in X \mid d(f_n(x), g_n(x)) \leq a\} \in \mathbf{\Delta}^0_\alpha(X),$$

pues es una unión finita de conjuntos de la forma

$$\{x \in X \mid f_n(x) = i \wedge g_n(x) = i'\} = f_n^{-1}[\{i\}] \cap g_n^{-1}[\{i'\}],$$

donde (i, i') recorre todos los pares que cumplen $d(i, i') \leq a$. Por lo tanto, también $g'^{-1}_n[i] = (g_n^{-1}[i] \cap F) \cup (f_n^{-1}[i] \cap (X \setminus F)) \in \mathbf{\Delta}^0_\alpha(X)$.

Consideremos finalmente el caso general en que Y es un espacio métrico separable arbitrario. Por el teorema [T 6.5] tenemos que Y es homeomorfo a un subespacio del cubo de Hilbert $\mathbb{H}$, que es compacto. Podemos considerar en Y la restricción de la distancia de $\mathbb{H}$, y de este modo Y es precompacto, es decir, se puede cubrir con un número finito de bolas abiertas de radio arbitrariamente pequeño. Concretamente, para cada $k \in \omega$, sea $Y^k \subset Y$ finito tal que

$$Y = \bigcup_{y \in Y^k} B_{2^{-k}}(y).$$

Podemos suponer que $Y^k \subset Y^{k+1}$. Como $f^{-1}[B_{2^{-k}}(y)] \in \mathbf{\Sigma}^0_{\alpha+1}(X)$ (para $y \in Y^k$) y estos conjuntos cubren X, por la propiedad de reducción existen conjuntos $A^k_y \in \mathbf{\Delta}^0_{\alpha+1}(X)$, disjuntos dos a dos, tales que $A^k_y \subset B_{2^{-k}}(y)$ y $X = \bigcup\limits_{y \in Y^k} A^k_y$.

Así la función $f^k : X \longrightarrow Y^k$ que vale y sobre A^k_y es $\mathbf{\Sigma}^0_{\alpha+1}$-medible, luego, por el caso finito ya probado, existen funciones $f^k_n : X \longrightarrow Y^k$ en $B_{\delta_{n,k}}(X, Y^k)$, para ciertos $\delta_{n,k} < \alpha$, tales que $f^k = \lim\limits_n f^k_n$.

Como $d(f(x), f^k(x)) \leq 2^{-k}$, se cumple que $d(f^k(x), f^{k+1}(x)) \leq 2 \cdot 2^{-k}$, luego, por la observación hecha anteriormente, podemos exigir que

$$d(f^k_n(x), f^{k+1}_n(x)) \leq 2 \cdot 2^{-k},$$

con lo que $d(f^k_n(x), f^{k'}_n(x)) \leq 2 \sum\limits_{i=k}^{\infty} 2^{-i}$, para $k \leq k'$.

Finalmente, definimos $f_k = f^k_k \in B_{\delta_k}(X, Y)$, para cierto $\delta_k < \alpha$, y es fácil ver que $f = \lim\limits_k f_k$, luego $f \in B_\alpha(X, Y)$. ■

1.5 Conjuntos analíticos

Suslin definió los conjuntos analíticos como los que pueden obtenerse a partir de conjuntos de Borel mediante la operación de Suslin descrita en la sección 6.2 de [T]. Sin embargo, aquí vamos a dar una definición mucho más práctica. El teorema 1.37 demuestra que la definición que adoptamos aquí es equivalente a la original de Suslin.

Definición 1.31 Sea X un espacio polaco. Un subconjunto $A \subset X$ es *analítico* si existe un espacio polaco Y, una aplicación continua $f : Y \longrightarrow X$ y un conjunto de Borel $B \in \mathcal{B}(Y)$ tal que $f[B] = A$.

En otras palabras, los conjuntos analíticos son las imágenes continuas de los conjuntos de Borel. En particular, vemos que todo conjunto de Borel es analítico.

También es inmediato que si $X \subset Y$ son espacios polacos, entonces los subconjuntos analíticos de X son los subconjuntos analíticos de Y contenidos en X.

Veamos a continuación que la definición de conjunto analítico se puede restringir bastante sin perder generalidad:

Teorema 1.32 *Sea X un espacio polaco y $A \subset X$, A. Las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

a) A es analítico.

b) $A = \varnothing$ o bien existe una función continua $f : \mathcal{N} \longrightarrow X$ tal que $f[\mathcal{N}] = A$.

c) Existe un cerrado $C \subset \mathcal{N} \times X$ tal que $A = \pi_X[C]$ (donde π_X es la proyección en el segundo factor).

d) Existe un espacio polaco Y y un subconjunto de Borel $B \subset Y \times X$ tal que $A = \pi[B]$.

Demostración: a) $\rightarrow$ b) Sea $f : Y \longrightarrow X$ una función continua y sea $B \in \mathcal{B}(Y)$ tal que $f[B] = A$. Por el teorema [T 6.27] podemos considerar una topología más fina en Y respecto a la cual B es abierto y cerrado. En particular B es un espacio polaco con dicha topología. Por el teorema [T 6.8] existe una aplicación continua y suprayectiva $g : \mathcal{N} \longrightarrow B$, en principio respecto a la topología refinada de B, pero, evidentemente, g también es continua respecto de la topología original. Basta considerar $g \circ f$.

b) $\rightarrow$ c) Sea $C = \{(x, f(x)) \mid x \in \mathcal{N}\}$, que es cerrado en $\mathcal{N} \times X$ porque es la antiimagen de la diagonal por la aplicación continua $\mathcal{N} \times X \longrightarrow X \times X$ inducida por f y la identidad. Evidentemente $A = \pi_X[C]$.

c) $\rightarrow$ d) $\rightarrow$ a) son triviales. ■

Teorema 1.33 *La intersección numerable y la unión numerable de conjuntos analíticos en un espacio polaco es un conjunto analítico.*

Demostración: Sea X un espacio polaco y $\{A_n\}_{n\in\omega}$ una familia de subconjuntos analíticos. Sea $f_n : \mathcal{N} \longrightarrow X$ una aplicación continua tal que $f_n[\mathcal{N}] = A_n$. Con estas aplicaciones podemos formar una aplicación continua $f : \omega\times\mathcal{N} \longrightarrow X$ dada por $f(n, x) = f_n(x)$, cuya imagen es la unión $\bigcup\limits_{n\in\omega} A_n$, que es, por tanto, analítica.

Sea ahora $Z = \{x \in \mathcal{N}^\omega \mid \bigwedge mn \in \omega\ f_m(x_m) = f_n(x_n)\}$. Se cumple que Z es cerrado, pues si $x \in \mathcal{N}^\omega \setminus Z$ existen $m, n \in \omega$ tales que $f_m(x_m) \neq f_n(x_n)$, luego podemos tomar entornos disjuntos U_m y U_n en X de ambos puntos, con lo que $f_m^{-1}[U_m] \times f_n^{-1}[U_n] \times \mathcal{N}^{\omega\setminus\{m,n\}}$ es un entorno de x en $\mathcal{N}^\omega$ disjunto con Z.

Definimos $f : Z \longrightarrow X$ mediante $f(x) = f_0(x_0)$, que claramente es una aplicación continua y $f[Z] = \bigcap\limits_{n\in\omega} A_n$. Por lo tanto, la intersección es analítica.

■

Es evidente que toda imagen continua de un conjunto analítico es analítica. No obstante, podemos probar algo más general:

Teorema 1.34 *Sea $f : X \longrightarrow Y$ una aplicación medible Borel entre dos espacios polacos. Si $A \subset X$ es analítico, entonces $f[A]$ es analítico en Y, y si $B \subset Y$ es analítico, entonces $f^{-1}[B]$ es analítico en X.*

Demostración: Tenemos que $f[A]$ es la proyección del conjunto

$$F = \{(x, y) \in X \times Y \mid x \in A \wedge f(x) = y\}.$$

Como, evidentemente, las imágenes continuas de los conjuntos analíticos son analíticas, basta probar que F es analítico. Ahora bien, $F = G_f \cap (A \times Y)$, donde

$$G_f = \{(x, y) \in X \times Y \mid y = f(x)\}$$

es la gráfica de f (conjuntistamente, es la propia aplicación f vista como subconjunto de $X \times Y$).

Se cumple que G_f es un conjunto de Borel, pues se trata de la antiimagen de la diagonal por la aplicación $X \times Y \longrightarrow Y \times Y$ dada por $(x, y) \mapsto (f(x), y)$, y esta aplicación es medible Borel. (La antiimagen de un abierto básico $U \times V$ es $f^{-1}[U] \times V = p_X^{-1}[U] \cap (X \times V)$, que es un conjunto de Borel en $X \times Y$.)

Por otra parte, $A \times Y$ es analítico en $X \times Y$, ya que si $f : \mathcal{N} \longrightarrow X$ es una aplicación continua tal que $f[\mathcal{N}] = A$, entonces f induce una aplicación continua $\mathcal{N} \times Y \longrightarrow X \times Y$ cuya imagen en $A \times Y$. Esto prueba que $f[A]$ es analítico.

El caso de $f^{-1}[B]$ es análogo, pues lo podemos expresar como la proyección del conjunto

$$F' = \{(x, y) \in X \times Y \mid y \in B \wedge f(x) = y\}.$$

■

En particular, todo isomorfismo de Borel entre dos espacios polacos hace corresponder biunívocamente los conjuntos analíticos de ambos espacios.

Según indicábamos al principio de la sección, Suslin definió los conjuntos analíticos como los que pueden obtenerse a partir de los conjuntos de Borel mediante la operación de Suslin descrita en la sección 6.2 de [T]. Más precisamente:

Definición 1.35 *Si X es un conjunto y $\Gamma \subset \mathcal{P}X$, llamaremos $S(\Gamma)(X)$ a la clase de todos los conjuntos de la forma $A = S(F)$, para todo esquema de Suslin $F : \omega^{<\omega} \longrightarrow \Gamma$. Similarmente, si $\mathbf{\Gamma}$ es una clase de conjuntos definida sobre una familia de espacios topológicos, tenemos definida la clase $S(\mathbf{\Gamma})$.*

En estos términos, vamos a probar que la clase de los conjuntos analíticos es $S(\mathbf{\Pi}^0_1) = S(\mathcal{B})$. Antes conviene probar lo siguiente:

Teorema 1.36 *Si X es un conjunto y $\Gamma \subset \mathcal{P}X$, entonces $S(S(\Gamma)) = S(\Gamma)$.*

Demostración: La inclusión $S(\Gamma) \subset S(S(\Gamma))$ es trivial. (Basta considerar esquemas de Suslin constantes.) Supongamos que $A = S(F)$, donde, para cada $s \in \omega^{<\omega}$, $F_s = S(G_s)$, donde $G_{s,t} \in \Gamma$. Así pues:

$$x \in A \leftrightarrow \bigvee y \in \mathcal{N} \bigwedge n \in \omega\ x \in F_{y|_n}$$

$$\leftrightarrow \bigvee y \in \mathcal{N} \bigwedge n \in \omega \bigvee z \in \mathcal{N} \bigwedge m \in \omega\ x \in G_{y|_n, z|_m}$$

$$\leftrightarrow \bigvee y \in \mathcal{N} \bigvee z \in \mathcal{N}^\omega \bigwedge nm \in \omega\ x \in G_{y|_n, z_n|_m}.$$

Fijamos una biyección $\langle\ ,\ \rangle : \omega \times \omega \longrightarrow \omega$. Representaremos su inversa por $k \mapsto (k_0, k_1)$. A partir de aquí, definimos una biyección $\mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{N} \times \mathcal{N}^\omega$ mediante $u \mapsto (u^1, u^2)$, donde

$$u^1(n) = u(2n+1), \qquad u^2_n(i) = u(2\langle n, i\rangle).$$

Entonces

$$x \in A \leftrightarrow \bigvee u \in \mathcal{N} \bigwedge k \in \omega\ x \in G_{u^1|_{k_0}, u^2_{k_0}|_{k_1}}.$$

Ahora bien, por la construcción de las u^i es claro que, para cada $k \in \omega$, existe un $r_k \in \omega$ tal que las sucesiones $u^1|_{k_0}, u^2_{k_0}|_{k_1}$ dependen únicamente de $u|_{r_k}$. Podemos tomar la sucesión $\{r_k\}_{k\in\omega}$ creciente con $r(0) = 0$, y entonces podemos definir dos funciones $\phi, \psi : \omega^{<\omega} \longrightarrow \omega^{<\omega}$ tales que si $r_k \leq \ell(s) < r_{k+1}$ entonces $\phi(s)$ y $\psi(s)$ sean las sucesiones $u^1|_{k_0}, u^2_{k_0}|_{k_1}$ para cualquier $u \in B_{s|_{r_k}}$. Así, llamando $H_s = G_{\phi(s),\psi(s)}$, tenemos que

$$x \in A \leftrightarrow \bigvee u \in \mathcal{N} \bigwedge k \in \omega\ x \in H_{u|_k}.$$

Por lo tanto, $A = S(H)$, donde H es un esquema de Suslin en Γ. ■

Ahora ya podemos dar varias caracterizaciones de interés de los conjuntos analíticos:

Teorema 1.37 *Sea X un espacio polaco y $A \subset X$. Las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

a) A es analítico.

b) $A = S(F)$, *donde* $F : \omega^{<\omega} \longrightarrow \mathcal{P}X$ *es un esquema de Suslin cerrado que cumple la condición de los diámetros, es decreciente (es decir, que si* $s \subset t$ *entonces* $F_t \subset F_s$*) y (si* $A \neq \varnothing$*) tal que* $F_s \neq \varnothing$ *para todo* s.

c) Lo mismo que b), pero con F *abierto en lugar de cerrado.*

d) $A = S(F)$, *donde* F *es un esquema de Suslin analítico.*

e) $A = S(F)$, *donde* F *es un esquema de Suslin analítico decreciente con la propiedad de los diámetros,* $F_\varnothing = A$, $F_s = \bigcup\limits_{n\in\omega} F_{s^\frown n}$ *y, para todo* $x \in \mathcal{N}$, $\bigcap\limits_{n\in\omega} F_{x|_n} \neq \varnothing$.

Demostración: a) $\rightarrow$ b). Podemos suponer que $A \neq \varnothing$. Existe entonces una aplicación continua $f : \mathcal{N} \longrightarrow X$ tal que $f[\mathcal{N}] = A$. Definimos $F_s = \overline{f[B_s]}$. Así F es un esquema de Suslin cerrado, decreciente y sus conjuntos son no vacíos. También cumple la condición de los diámetros, pues si $x \in \mathcal{N}$, dado $\epsilon > 0$, existe un s tal que $x \in B_s \subset f^{-1}[B_{\epsilon/2}(f(x))]$, luego, si $n_0 = \ell(s)$, $s = x|_{n_0}$ y, para todo $n \geq n_0$, $f[B_{x|_n}] \subset f[B_{x|_{n_0}}] \subset B_{\epsilon/2}(f(x))$, luego el diámetro de $F_{x|_n}$ es $\leq \epsilon$.

Sólo falta probar que $A = S(F)$. Ahora bien, si $x \in \mathcal{N}$, entonces claramente $f(x) \in \bigcap\limits_{n\in\omega} F_{x|_n}$, luego $A \subset S(F)$ y recíprocamente, si $y \in S(F)$, existe un $x \in \mathcal{N}$ tal que $y \in \bigcap\limits_{n\in\omega} F_{x|_n}$, luego, para cada $n \in \omega$, existe un $x_n \in B_{x|_n}$ tal que $d(f(x_n), y) < 1/n$, con lo que $\lim\limits_n x_n = x$, luego $f(x) = \lim\limits_n f(x_n) = y$, luego $y \in A$.

b) $\rightarrow$ c). Sea d una distancia en X. Para cada $s \in \omega^n$ definimos

$$F'(s) = \{x \in X \mid d(x, F(s)) < 1/n\}.$$

Así F' es un esquema de Suslin abierto que cumple las mismas propiedades que F. Sólo hemos de probar que $S(F) = S(F')$. Dado $x \in \mathcal{N}$, es evidente que

$$\{p\} = \bigcap_{n\in\omega} F(x|_n) \subset \bigcap_{n\in\omega} F'(x|_n).$$

Si la intersección de la derecha contiene un punto q, entonces $p, q \in F'(x|_n)$ para todo n y, como los diámetros tienden a 0, ha de ser $p = q$. Por lo tanto, se da la igualdad y

$$S(F) = \bigcup_{x\in\mathcal{N}} \bigcap_{n\in\omega} F(x|_n) = \bigcup_{x\in\mathcal{N}} \bigcap_{n\in\omega} F'(x|_n) = S(F').$$

Obviamente c) $\rightarrow$ d). Veamos que d) $\rightarrow$ a).

Supongamos en primer lugar que F es un esquema de Suslin cerrado. Entonces el conjunto

$$C = \{(y, x) \in \mathcal{N} \times X \mid \bigwedge n \in \omega\, x \in F(y|_n)\}$$

es cerrado en $\mathcal{N} \times X$, pues si $(y, x) \in (\mathcal{N} \times X) \setminus C$, existe un $n \in \omega$ tal que $x \in U = X \setminus F(y|_n)$, con lo que $(y, x) \in B_{y|_n} \times U \subset (\mathcal{N} \times X) \setminus C$. Además, es claro que $A = \pi_X(C)$, luego A es analítico por el teorema 1.32.

Si llamamos d') a la afimración d) para esquemas cerrados, tenemos probado a) $\leftrightarrow$ d'), lo cual equivale a que la clase de los conjuntos analíticos es $S(\mathbf{\Pi}^0_1)$, y el teorema 1.36 implica entonces que también es $S(S(\mathbf{\Pi}^0_1))$, que es equivalente a a) $\leftrightarrow$ d).

Por último, e) $\to$ d) y para probar a) $\to$ e) consideramos una aplicación continua $f : \mathcal{N} \longrightarrow X$ como en la prueba de a) $\to$ b) y definimos $F_s = f[B_s]$ (sin tomar clausuras). Entonces F es un esquema de Suslin analítico, la prueba de que $A = S(F)$ es válida igualmente y el resto es inmediato. ■

Nota Si X es un espacio polaco cero-dimensional, todo subconjunto analítico de X es de la forma $S(F)$, donde F es un esquema de Suslin abierto cerrado. En efecto, basta observar que $\mathbf{\Sigma}^0_1 \subset S(\mathbf{\Delta}^0_1)$, luego

$$S(\mathbf{\Sigma}^0_1) \subset S(S(\mathbf{\Delta}^0_1)) = S(\mathbf{\Delta}^0_1) \subset S(\mathbf{\Sigma}^0_1),$$

y por el teorema anterior $S(\mathbf{\Sigma}^0_1)$ es la clase de los conjuntos analíticos. ■

Seguidamente demostramos un resultado fundamental:

Teorema 1.38 (Teorema de separación de Lusin) *Sea X un espacio polaco y sean P y Q dos subconjuntos analíticos de X disjuntos entre sí. Entonces existe un conjunto de Borel $C \subset X$ tal que $P \subset C$ y $Q \cap C = \varnothing$.*

DEMOSTRACIÓN: Diremos que dos subconjuntos de X son *separables* si satisfacen el teorema. Es evidente que si $P = \bigcup\limits_{m\in\omega} P_m$ y $Q = \bigcup\limits_{n\in\omega} Q_n$ son disjuntos y cada par P_m, Q_n es separable por un conjunto de Borel $C_{m,n}$, entonces P y Q son separables por $\bigcup\limits_{m\in\omega} \bigcap\limits_{n\in\omega} C_{m,n}$.

Sean $f : \mathcal{N} \longrightarrow X$ y $g : \mathcal{N} \longrightarrow X$ aplicaciones continuas tales que $f[\mathcal{N}] = A$, $g[\mathcal{N}] = B$. Para cada $s \in \omega^{<\omega}$, llamemos $P_s = f[B_s]$, $Q_s = g[B_s]$. Así

$$P_s = \bigcup_{m\in\omega} P_{s^\frown m}, \qquad Q_s = \bigcup_{n\in\omega} Q_{s^\frown n}.$$

Por lo tanto, si $P = P_\varnothing$ y $Q = Q_\varnothing$ no son separables, existen $s_1, t_1 \in \omega^1$ tales que P_{s_1} y Q_{t_1} no son separables. A su vez, existen s_2, $t_2 \in \omega^2$ que extienden a s_1 y t_1 respectivamente tales que P_{s_2} y Q_{t_2} no son separables. Procediendo de este modo obtenemos $x, y \in \mathcal{N}$ tales que $P_{x|_n}$ y $Q|_{y|_n}$ no son separables para ningún n.

Como $f(x) \in P$ y $g(y) \in Q$, se cumple que $f(x) \neq g(y)$, luego podemos tomar abiertos disjuntos U y V en X tales que $f(x) \in U$, $g(y) \in V$, pero entonces existe un $n \in \omega$ tal que $P_{x|_n} = f[B_{x|_n}] \subset U$ y $Q_{y|_n} = g[B_{y|_n}] \subset V$, luego U separa a $P_{x|_n}$ y $Q_{y|_n}$, contradicción. ■

Para enunciar más convenientemente las consecuencias de este teorema conviene introducir la notación siguiente:

Definición 1.39 Llamaremos $\mathbf{\Sigma}_1^1$ a la clase de los subconjuntos analíticos de los espacios polacos. Llamaremos $\mathbf{\Pi}_1^1 = \neg\mathbf{\Sigma}_1^1$ a la clase de los conjuntos *coanalíticos,* es decir, los complementarios de los conjuntos analíticos, mientras que $\mathbf{\Delta}_1^1 = \mathbf{\Sigma}_1^1 \cap \mathbf{\Delta}_1^1$ será la clase de los conjuntos que son simultáneamente analíticos y coanalíticos.

Las clases que acabamos de definir son el principio de la jerarquía proyectiva que introduciremos en el capítulo siguiente. La consecuencia principal del teorema de Lusin es la siguiente:

Teorema 1.40 (Suslin) *Los subconjuntos de un espacio polaco que son a la vez analíticos y coanalíticos son los conjuntos de Borel, es decir,* $\mathbf{\Delta}_1^1 = \mathcal{B}$.

En efecto, si A es $\mathbf{\Delta}_1^1$, basta aplicar el teorema 1.38 a A y $X \setminus A$.

Teniendo esto en cuenta, lo que afirma el teorema de Lusin es que la clase $\mathbf{\Sigma}_1^1$ tiene la propiedad de separación. En realidad satisface una propiedad más fuerte aún que la propiedad de separación generalizada:

Teorema 1.41 *Si* $\mathbf{\Gamma}$ *es una clase conjuntos en espacios polacos cerrada para uniones numerables e intersecciones finitas y tiene la propiedad de separación, entonces tiene la propiedad de* σ*-separación, es decir, si* $\{A_n\}_{n\in\omega}$ *es una familia de conjuntos de* $\mathbf{\Gamma}$ *disjuntos dos a dos, existe una familia* $\{B_n\}_{n\in\omega}$ *de conjuntos de* $\mathbf{\Delta}$ *disjuntos dos a dos tal que* $A_n \subset B_n$*, para todo* n.

DEMOSTRACIÓN: Llamamos $A'_n = \bigcup\limits_{i\neq n} A_i \in \mathbf{\Gamma}$. Por la propiedad de separación existe $E_n \in \mathbf{\Delta}$ tal que $A_n \subset E_n$ y $A'_n \cap E_n = \varnothing$. Definimos $B_0 = E_0$ y $B_n = E_n \setminus \bigcap\limits_{i<n} B_i$. Claramente los conjuntos B_n cumplen lo pedido. ■

En particular, la clase $\mathbf{\Sigma}_1^1$ tiene la propiedad de σ-separación. Veamos algunas aplicaciones de las propiedades de separación de los conjuntos analíticos:

Teorema 1.42 *Sea* $f : X \longrightarrow Y$ *una aplicación entre espacios polacos. Las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

a) f *es medible Borel.*

b) La gráfica $G_f = \{(x,y) \in X \times Y \mid y = f(x)\}$ *es un conjunto de Borel.*

c) G_f *es un conjunto analítico.*

En particular, si f *es biyectiva y medible Borel, es un isomorfismo de Borel.*

DEMOSTRACIÓN: La implicación a) $\rightarrow$ b) la hemos visto en la demostración de 1.34 y b) $\rightarrow$ c) es evidente. Supongamos c), es decir, que la gráfica G_f es analítica, y sea $A \in \mathcal{B}(Y)$. Entonces

$$x \in f^{-1}[A] \leftrightarrow \bigvee y((x,y) \in G_f \cap (X \times A)) \leftrightarrow \neg\bigvee y((x,y) \in G_f \cap (X \times (Y \setminus A))).$$

La primera equivalencia muestra que $f^{-1}[A]$ es analítico, pues es la proyección de un conjunto analítico de $X \times Y$, mientras que la segunda muestra que es coanalítico, pues es el complementario de la proyección de otro conjunto analítico de $X \times Y$. Por el teorema anterior $f^{-1}[A]$ es un conjunto de Borel, luego f es medible Borel. ■

Notemos que todavía no hemos demostrado que existen conjuntos analíticos que no son de Borel. Posponemos la prueba de este hecho hasta la sección 2.1, donde obtendremos un resultado más general. Sin embargo, aunque —como veremos— las imágenes continuas de conjuntos de Borel no son necesariamente conjuntos de Borel, sí que lo son cuando la aplicación continua es inyectiva:

Teorema 1.43 *Sea $f : X \longrightarrow Y$ una aplicación continua entre espacios polacos y $B \subset X$ un conjunto de Borel tal que $f|_B$ sea inyectiva. Entonces $f[B]$ es un conjunto de Borel.*

DEMOSTRACIÓN: Veamos en primer lugar que podemos suponer que $X = \mathcal{N}$ y que B es cerrado. Para ello aplicamos el teorema [T 6.27], en virtud del cual X admite una topología más fina de espacio polaco en la que B es abierto cerrado y, en particular, un espacio polaco. Por el teorema [T 6.9] existe un cerrado $C \subset \mathcal{N}$ y una biyección continua $g : C \longrightarrow B$, que seguirá siendo continua (como aplicación $g : C \longrightarrow X$) si en X consideramos la topología original (menos fina). De este modo, $g \circ f : \mathcal{N} \longrightarrow Y$ es continua, es inyectiva restringida a C y $(g \circ f)[C] = f[B]$.

Por lo tanto, podemos suponer que tenemos $f : \mathcal{N} \longrightarrow Y$ continua y que B es cerrado en $\mathcal{N}$. Por el teorema 1.1 tenemos que $B = [R]$, para un cierto árbol bien podado $R \subset \omega^{<\omega}$. Llamamos $R_n = R \cap \omega^n$, es decir, el conjunto de los nodos de R de altura n.

Vamos a definir una aplicación $A : [R] \longrightarrow \mathcal{B}(Y)$ (como un esquema de Suslin de Borel, pero definido únicamente sobre $[R]$). Tomamos $A(\varnothing) = Y$. Para $n > 0$, consideramos los conjuntos $\{f[B_s \cap B]\}_{s \in R_n}$, que forman una familia numerable de conjuntos analíticos en Y disjuntos dos a dos. Puesto que el teorema 1.41 se aplica a la clase $\mathbf{\Sigma}^1_1$, existen conjuntos de Borel $\{C_s\}_{s \in R_n}$ disjuntos dos a dos tales que $f[B_s \cap B] \subset C_s$. Definimos

$$A(s) = A(s|_{n-1}) \cap C_s \cap \overline{f[B_s \cap B]}.$$

Una simple inducción muestra que $f[B_s \cap B] \subset A(s) \subset \overline{f[B_s \cap B]}$.

Si $x \in B$ y $n \in \omega$, entonces $x|_n \in R_n$ y $x \in B_{x|_n} \cap B$, luego $f(x) \in A(x|_n)$ y así $f(x) \in \bigcap\limits_{n \in \omega} A(x|_n)$. Recíprocamente, si $y \in Y$ está en la intersección, ha de ser $y = f(x)$, pues, en caso contrario, existe un abierto U en Y tal que $y \in U$, $f(x) \notin \overline{U}$. Entonces $x \notin f^{-1}[\overline{U}]$, luego existe un n tal que $B_{x|_n} \cap f^{-1}[\overline{U}] = \varnothing$. A su vez, $f[B_{x|_n} \cap B] \cap U = \varnothing$, luego $\overline{f[B_{x|_n} \cap B]} \cap U = \varnothing$, pero esto es falso, pues $y \in A(x|_n) \cap U \subset \overline{f[B_{x|_n} \cap B]} \cap U$. Así pues,

$$f[B] = \bigcup_{x \in [R]} \bigcap_{n \in \omega} A(x|_n) = \bigcap_{n \in \omega} \bigcup_{s \in R_n} A(s),$$

donde la segunda igualdad se debe a que si $s, t \in R_n$ son distintos entre sí, $A(t)$ y, por consiguiente, todos los conjuntos $A(t^\frown n)$, son disjuntos con $A(s)$. La última expresión muestra que $f[B]$ es un conjunto de Borel, ya que cada $A(s)$ lo es y las uniones son numerables. ■

Recordemos que una medida de Borel en un espacio polaco X es simplemente una medida $\mu : \mathcal{B}(X) \longrightarrow [0, +\infty]$. Por [T B.15], toda medida de Borel se puede extender a una medida completa $\mu : \mathcal{M}_\mu \longrightarrow [0, +\infty]$, donde $\mathcal{M}_\mu$ es la σ-álgebra formada por las uniones de conjuntos de Borel y subconjuntos de conjuntos de Borel nulos. Cuando hablamos de conjuntos medibles respecto de una medida de Borel nos referimos a conjuntos de $\mathcal{M}_\mu$, que no son necesariamente conjuntos de Borel.

Según [T 6.36], toda medida de Borel σ-finita en un espacio polaco es regular, en el sentido de que todo conjunto μ-medible A cumple

$$\mu(A) = \sup\{\mu(F) \mid K \subset A \text{ es compacto}\} = \text{ínf}\{\mu(U) \mid A \subset U \text{ es abierto}\}.$$

Definición 1.44 Si X es un espacio polaco y $A \subset X$, diremos que A es *universalmente medible* si es medible para toda medida de Borel en X.

Trivialmente, todo conjunto de Borel es universalmente medible, y ahora vamos a probar que los conjuntos analíticos y, por consiguiente, los coanalíticos, también lo son. Nos basaremos en un resultado general que nos permitirá demostrar también que los conjuntos analíticos y coanalíticos tienen la propiedad de Baire:

Teorema 1.45 *Sea $\mathbb{B}$ una σ-álgebra en un conjunto X y supongamos que para cada $A \in \mathcal{P}X$ existe un $\hat{A} \in \mathbb{B}$ tal que*

a) $A \subset \hat{A}$.

b) Si $A \subset B \in \mathbb{B}$, todo subconjunto de $\hat{A} \setminus B$ está en $\mathbb{B}$.

Entonces $S(\mathbb{B}) = \mathbb{B}$.

Demostración: Sea $F : \omega^{<\omega} \longrightarrow \mathbb{B}$ un esquema de Suslin. Podemos suponer que es decreciente, pues si definimos $F'_s = \bigcap\limits_{t \subset s} F_t$, obtenemos un nuevo esquema de Suslin en $\mathbb{B}$ que es decreciente y $S(F') = S(F)$.

Definimos

$$F^s = \bigcup_{x \in B_s} \bigcap_{n \in \omega} F_{x|_n} \subset F_s.$$

Claramente, $F^\varnothing = S(F)$ y $F^s = \bigcup\limits_{n \in \omega} F^{s^\frown n}$. Sea $\hat{F}^s$ según el enunciado. Notemos que $\hat{F}^s \cap F_s \in \mathbb{B}$ cumple las mismas propiedades a) y b), luego podemos suponer que $\hat{F}^s \subset F_s$. Definimos $G_s = \hat{F}^s \setminus \bigcup\limits_{n \in \omega} \hat{F}^{s^\frown n}$. Teniendo en cuenta que $F^s = \bigcup\limits_{n \in \omega} F^{s^\frown n} \subset \bigcup\limits_{n \in \omega} \hat{F}^{s^\frown n} \in \mathbb{B}$, por b), todo subconjunto de G_s está en $\mathbb{B}$, luego todo subconjunto de $G = \bigcup\limits_{s \in \omega^{<\omega}} G_s$ está en $\mathbb{B}$.

Vamos a probar que $\hat{F}^{\varnothing} \setminus F^{\varnothing} \subset G$. Con esto tendremos probado el teorema, pues entonces $\hat{F}^{\varnothing} \setminus F^{\varnothing} \in \mathbb{B}$ y también $S(F) = F^{\varnothing} \in \mathbb{B}$.

Tomamos, pues, $x \in \hat{F}^{\varnothing} \setminus F^{\varnothing}$. Observemos que, en general, si $x \in \hat{F}^{s} \setminus G$, entonces $x \notin G_s$, luego existe un $n \in \omega$ tal que $x \in \hat{F}^{s^\frown n} \setminus G$.

Así pues, si fuera $x \notin G$, podríamos definir recurrentemente un $y \in \mathcal{N}$ tal que $x \in \hat{F}^{y|_n} \subset F_{y|_n}$, luego $x \in \bigcup\limits_{n\in\omega} F_{y|_n} \subset S(F) = F^{\varnothing}$, contradicción. ■

Como primera aplicación:

Teorema 1.46 *Si X es un espacio polaco, el álgebra* $\mathrm{Ba}(X)$ *de los subconjuntos de X con la propiedad de Baire es cerrada para la operación de Suslin y, en particular, contiene a todos los subconjuntos analíticos de X.*

Demostración: Sólo hemos de probar que $\mathrm{Ba}(X)$ cumple las hipótesis del teorema 1.45. Fijemos una base numerable $\{U_n\}_{n\in\omega}$. Dado $A \subset X$, sea

$$A' = \{x \in X \mid \bigwedge n \in \omega (x \in U_n \rightarrow U_n \cap A \text{ no es de primera categoría})\}.$$

Se cumple que A' es cerrado, pues si $x \notin A'$, existe un $n \in \omega$ tal que $x \in U_n$ y $U_n \cap A$ es de primera categoría, y entonces $x \in U_n \subset X \setminus A'$.

Ahora observamos que $A \setminus A'$ es la unión de todos los conjuntos $U_n \cap A$ que son de primera categoría, luego $A \setminus A'$ es de primera categoría. Por lo tanto, $\hat{A} = A \cup A' = A' \cup (A \setminus A')$ es unión de un cerrado y un conjunto de primera categoría, luego $\hat{A} \in \mathrm{Ba}(X)$ y ciertamente $A \subset \hat{A}$.

Finalmente, si $A \subset B \in \mathrm{Ba}(X)$, tenemos que $P = \hat{A} \setminus B \in \mathrm{Ba}(X)$. Vamos a probar que es de primera categoría. Existe un abierto U tal que $P \mathbin{\Delta} U$ es de primera categoría. Si P no es de primera categoría, entonces $U \neq \varnothing$, y $U \setminus P$ es de primera categoría (en particular, $U_n \cap P \neq \varnothing$). Tomando un abierto menor no vacío, existe un $n \in \omega$ tal que $U_n \setminus P$ es de primera categoría. Como $U_n \cap A \subset U_n \setminus P$, también $U_n \cap A$ es de primera categoría. Por otra parte, existe un $x \in U_n \cap P \subset U_n \cap A'$, pero esto implica que $U_n \cap A$ no es de primera categoría, y tenemos una contradicción.

Finalmente, todos los subconjuntos de $\hat{A} \setminus B$ son de primera categoría, luego tienen la propiedad de Baire. ■

Teorema 1.47 *Sea X un espacio polaco y μ una medida de Borel en X. Entonces, el álgebra $\mathcal{M}_\mu$ de los conjuntos μ-medibles es cerrada para la operación de Suslin, y en particular contiene a todos los subconjuntos analíticos de X.*

Demostración: Por el teorema [TC 7.60] existe una medida unitaria μ' en X con los mismos conjuntos medibles, por lo que no perdemos generalidad si suponemos que μ es finita. Basta comprobar que $\mathcal{M}_\mu$ cumple las hipótesis del teorema 1.45.

Por [T B.18] podemos extender μ (restringida a $\mathcal{B}(X)$) a una medida exterior μ^* sobre $\mathcal{P}X$. Concretamente, μ^* viene dada por

$$\mu^*(A) = \inf\{\sum_{k=0}^{\infty} \mu(A_k) \mid A_k \in \mathcal{B}(X),\ A \subset \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k\}.$$

Así, para todo $A \subset X$, existe un conjunto $A_n \in \mathcal{B}(X)$ tal que $A \subset A_n$ y $\mu(A_n) - \mu^*(A) < 1/n$. De hecho, usando la regularidad de μ, podemos sustituir A_n por un abierto que lo contenga, con lo que puede tomarse abierto. El G_δ dado por $\hat{A} = \bigcap\limits_{n\in\omega} A_n$ cumple que $\mu(\hat{A}) = \mu^*(A)$.

Ciertamente $A \subset \hat{A}$ y, si $A \subset B \in \mathcal{M}_\mu$, entonces $\mu(\hat{A} \setminus B) = 0$, pues en caso contrario existiría un conjunto de Borel $C \subset \hat{A} \setminus B \subset \hat{A} \setminus A$ con $\mu(C) > 0$, pero esto es imposible, porque entonces $A \subset \hat{A} \setminus C \subset \hat{A}$ y $\mu^*(A) \leq \mu(\hat{A} \setminus C) < \mu(\hat{A})$. Por consiguiente, por la completitud de la medida, todo subconjunto de $\hat{A} \setminus B$ es μ-medible. ■

Así pues, los conjuntos analíticos (y los coanalíticos) son universalmente medibles. Veamos ahora que que los conjuntos analíticos cumplen también la propiedad de los subconjuntos perfectos. Para ello necesitamos un resultado auxiliar:

Teorema 1.48 *Sea X un espacio polaco y $A \subset X$ un conjunto no numerable. Entonces existen abiertos disjuntos U_0 y U_1 tales que $U_i \cap A$ es no numerable, para $i = 0, 1$.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que el resultado es falso. Para cada $n \in \omega$, sea $\{U_{n,m}\}_{m\in\omega}$ una familia de bolas abiertas de radio $1/(n+1)$ que cubra todo el espacio X. No puede ocurrir que $U_{n,m} \cap A$ sea numerable para todo m, pues entonces A sería numerable. Así pues, existe una bola abierta U_n de radio $1/(n+1)$ tal que $U_n \cap A$ es no numerable. Sea $A_n = A \setminus \overline{U}_n$. Si A_n fuera no numerable, entonces $V = X \setminus \overline{U}_n$ sería un abierto disjunto de U_n con $V \cap A$ no numerable, luego, por la hipótesis de reducción al absurdo, A_n ha de ser numerable. Pero

$$A \setminus \bigcup_{n\in\omega} A_n = \bigcap_{n\in\omega} \overline{U}_n$$

y, como el diámetro de los U_n tiende a 0, la intersección contiene a lo sumo un punto, luego A es numerable, y tenemos una contradicción. ■

Teorema 1.49 *Si X es un espacio polaco y $A \subset X$ es un subconjunto analítico no numerable, entonces A contiene un subconjunto perfecto.*

DEMOSTRACIÓN: Por [T 6.8] existe una aplicación continua $f : \mathcal{N} \longrightarrow X$ con $f[\mathcal{N}] = A$.

Observemos en primer lugar que si $V \subset \mathcal{N}$ es abierto y $f[V]$ es no numerable, entonces existen dos abiertos disjuntos W_0 y W_1 contenidos en V tales que $f[W_i]$ es no numerable, para $i = 0, 1$. En efecto, por el teorema anterior existen abiertos disjuntos U_0 y U_1 en X tales que $f[V] \cap U_i \neq \varnothing$, por lo que basta tomar $W_i = f^{-1}[U_i] \cap V$.

Aplicando repetidamente este resultado[6] podemos construir una aplicación $t : 2^{<\omega} \longrightarrow \omega^{<\omega}$ que cumpla las propiedades siguientes:

[6]Como todo abierto es unión numerable de abiertos básicos, los abiertos U_i pueden tomarse básicos, con lo que no hace falta AE para elegirlos.

a) $t_\varnothing = \varnothing$.

b) $s \subset s' \to t_s \subset t_{s'}$.

c) $f[B_{t_s}]$ es no numerable.

d) $f[B_{t_s\frown 0}] \cap f[B_{t_s\frown 1}] = \varnothing$.

Sea $g : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{N}$ la aplicación dada por $g(x) = \bigcup\limits_{n\in\omega} t_{x|_n}$. Claramente, g es continua, y $g \circ f : \mathcal{C} \longrightarrow X$ es inyectiva. Como $\mathcal{C}$ es compacto, la imagen de esta aplicación es un cerrado no numerable contenido en A. Como todo cerrado no numerable contiene un subconjunto perfecto, lo mismo le sucede a A. ■

1.6 Conjuntos coanalíticos

Estudiamos ahora los conjuntos $\mathbf{\Pi}^1_1$, es decir, los conjuntos coanalíticos. De las propiedades que hemos demostrado para la clase $\mathbf{\Sigma}^1_1$ se sigue inmediatamente que $\mathbf{\Pi}^1_1$ es cerrada para uniones e intersecciones numerables y para sustituciones continuas, así como que los conjuntos coanalíticos son universalmente medibles y tienen la propiedad de Baire.

En esta sección daremos demostraciones "clásicas" (topológicas) de algunas propiedades adicionales de los conjuntos coanalíticos que volveremos a demostrar en el capítulo IV mediante técnicas "efectivas" (conjuntistas) alternativas.

Empezaremos presentando un concepto similar al de esquema de Suslin que nos será más conveniente para lo que vamos a hacer. La idea básica no usar como índices los elementos de $\omega^{<\omega}$ sino los números diádicos:

Definición 1.50 Llamaremos $\mathcal{D} \subset \,]0,1[$ al conjunto de los *números diádicos,* es decir, los números racionales de la forma $d = m/2^n$, donde $m, n \in \omega$ y $0 < m < 2^n$. Lo consideraremos como conjunto ordenado con el orden $\preceq$ opuesto al orden usual en $\mathbb{Q}$.

Claramente, el conjunto $\mathcal{D}$ cumple las hipótesis del teorema de Cantor [TC 2.39], por lo que es semejante a $\mathbb{Q}$.

Si $d = m/2^n$ es un número diádico, el número natural m puede expresarse de forma única en base 2 como $m = \sum\limits_{i=0}^{k} 2^{m_i}$, donde $0 \leq m_0 < \cdots < m_k < n$, con lo que todo número diádico se expresa en forma única como

$$d = \sum_{i=0}^{k} 2^{-n_i}, \qquad 0 < n_0 < \cdots < n_k.$$

Definimos $\mathcal{D}_k$ como el conjunto de los números diádicos cuyo desarrollo en serie de esta forma tiene longitud k (empezando en 0). Así, $\mathcal{D} = \bigcup\limits_{k\in\omega} \mathcal{D}_k$.

Hemos invertido el orden usual en $\mathbb{Q}$ porque, de este modo, cada conjunto $\mathcal{D}_k$ está bien ordenado. En efecto, si $A \subset \mathcal{D}_k$ no es vacío, tomamos un elemento

$a = \sum_{i=0}^{k} 2^{-n_i} \in A$ con n_0 mínimo. De entre todos los elementos de A con dicho n_0 mínimo, consideramos los que tienen n_1 mínimo, y así sucesivamente. El único a que tiene todos los exponentes mínimos en este sentido es el mínimo de A (máximo con el orden usual).

Por otro lado, definimos el orden parcial $\sqsubseteq$ en $\mathcal{D}$ mediante

$$\sum_{i=0}^{k} 2^{-n_i} \sqsubseteq \sum_{i=0}^{l} 2^{-m_i} \leftrightarrow k \leq l \land \bigwedge i \leq k \; n_i = m_i.$$

Claramente, si $r \in \mathcal{D}_k$, $s \in \mathcal{D}_l$ y $r \sqsubseteq s$, entonces $k \leq l$ y $r \leq s$. Además, si $s \in \mathcal{D}$, el conjunto $\{r \in \mathcal{D} \mid r \sqsubseteq s\}$ es finito.

Una *criba* en un conjunto X es una aplicación $\Phi : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{P}X$. Para cada $x \in X$, definimos

$$M_x(\Phi) = \{r \in \mathcal{D} \mid x \in \Phi(r)\}$$

y a su vez llamamos

$$C(\Phi) = \{x \in X \mid (M_x(\Phi), \preceq) \text{ no está bien ordenado}\}.$$

Equivalentemente, $x \in C(\Phi)$ si y sólo si existe una sucesión $\{r_n\}_{n\in\omega}$ de elementos de $\mathcal{D}$ estrictamente creciente (respecto del orden usual en $\mathbb{Q}$) tal que $\bigwedge n \in \omega \; x \in \Phi(r_n)$.

Una criba es *monótona* si $\bigwedge rs \in \mathcal{D}(r \sqsubseteq s \rightarrow \Phi(s) \subset \phi(r))$.

Diremos que una criba Φ en un espacio topológico X es abierta, cerrada, de Borel, etc. si los conjuntos $\Phi(r)$ son abiertos, cerrados, de Borel, etc.

Necesitamos el siguiente resultado auxiliar:

Teorema 1.51 *Sea Φ una criba monótona en un conjunto X. Entonces se cumple que $x \in C(\Phi)$ si y sólo si existe una sucesión $\{r_n\}_{n\in\omega}$ estrictamente creciente respecto de $\sqsubseteq$ de elementos de $\mathcal{D}$ tal que $\bigwedge n \in \omega \; x \in \Phi(r_n)$.*

Demostración: Como $r \sqsubset s \rightarrow r < s$, una implicación es trivial. Supongamos ahora que existe una sucesión $\{r_n\}_{n\in\omega}$ en $\mathcal{D}$ estrictamente creciente para el orden usual en $\mathbb{Q}$ y tal que $x \in \Phi(r_n)$. Llamemos $r = \sup_n r_n \leq 1$. Podemos desarrollarlo en base 2 como

$$r = \sum_{i=0}^{\infty} 2^{-m_i}, \qquad 0 < m_0 < m_1 < \cdots$$

Notemos que si r admite una expresión de este tipo con un número finito de sumandos, siempre podemos desarrollar el último de ellos como suma de una serie geométrica de razón $1/2$, con lo que obtenemos igualmente una expresión infinita.

Definimos $s_n = \sum_{i=0}^{n} 2^{-m_i}$. De este modo $\{s_n\}_{n\in\omega}$ es estrictamente creciente para $\sqsubseteq$. Basta probar que $x \in \Phi(s_n)$, para lo cual a su vez, por la monotonía de Φ, basta probar que, para cada $n \in \omega$, existe un $k \in \omega$ tal que $s_n \sqsubseteq r_k$.

Como $s_n < r$, existe un k tal que $s_n < r_k < r$. Sea $r_k = \sum\limits_{i=0}^{l} 2^{-j_i}$, donde $0 < j_0 < \cdots < j_l$. Veamos que $j_i = m_i$ para todo $i \leq m = \min\{n, l\}$. Por reducción al absurdo, suponemos que existe un $p \leq m$ tal que $j_p \neq m_p$. Tomemos el menor p posible. Si $j_p < m_p$, entonces

$$r = \sum_{i<p} 2^{-m_i} + \sum_{i=p}^{\infty} 2^{-m_i} \leq \sum_{i<p} 2^{-j_i} + 2^{-m_p+1} \leq \sum_{i<p} 2^{-j_i} + 2^{-j_p} \leq r_k,$$

contradicción. Si, por el contrario $m_p < j_p$, entonces

$$r_k = \sum_{i<p} 2^{-m_i} + \sum_{i=p}^{l} 2^{-j_i} \leq \sum_{i<p} 2^{-m_i} + 2^{-j_p+1} \leq \sum_{i<p} 2^{-m_i} + 2^{-m_p} = s_p \leq s_n,$$

contradicción. Así pues, hemos probado que $s_n \sqsubseteq r_k$ o bien $r_k \sqsubseteq s_n$, pero, como $s_n < r_k$, se ha de dar el primer caso. ■

Con esto estamos en condiciones de demostrar que las cribas son hasta cierto punto equivalentes a los esquemas de Suslin. Para ello observamos que la aplicación $s : \mathcal{D} \longrightarrow \omega^{<\omega} \setminus \{\varnothing\}$ que a cada $r = \sum\limits_{i=0}^{k} 2^{-n_i}$ (donde $0 < n_0 < \cdots < n_k$) le hace corresponder $s_r = \{n_i - n_{i-1} - 1\}_{i=0}^{k}$ (entendiendo que $n_{-1} = 0$) es biyectiva y, más aún, es una semejanza entre $(\mathcal{D}, \sqsubseteq)$ y $(\omega^{<\omega} \setminus \{\varnothing\}, \subset)$.

Teorema 1.52 *Sea X un espacio topológico y $Z \subset X$. Entonces, $Z = S(A)$, para un esquema de Suslin decreciente A (abierto, cerrado, de Borel, etc.) si y sólo si $Z = C(\Phi)$ para una criba monótona Φ (abierta, cerrada, de Borel, etc.)*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos en primer lugar que $Z = S(A)$ y, para cada $r \in \mathcal{D}$ definimos $\Phi(r) = A_{s_r}$. Así Φ es una criba monótona (y es abierta, cerrada, etc. si A lo es). Veamos que $S(A) = C(\Phi)$.

Si $x \in S(A)$, entonces existe un $y \in \mathcal{N}$ tal que $\bigwedge n \in \omega\ x \in A_{y|_n}$. Llamamos r_n al único número diádico que cumple $y|_n = s_{r_n}$, de modo que la sucesión $\{r_n\}_{n\in\omega}$ es estrictamente creciente y $x \in \Phi(r_n)$, luego $x \in C(\Phi)$.

Supongamos ahora que $x \in C(\Phi)$. Por el teorema anterior existe una sucesión $\{r_n\}_{n\in\omega}$ en $\mathcal{D}$ estrictamente creciente para $\sqsubseteq$ tal que $x \in \Phi(r_n)$. Entonces, s_{r_n} es una sucesión estrictamente creciente en $\omega^{<\omega}$, luego $y = \bigcup\limits_{n\in\omega} s_{r_n} \in \mathcal{N}$ y, como A es decreciente, $\bigwedge n \in \omega\ y \in A_{y|_n}$, es decir, $x \in S(A)$.

Supongamos ahora que $Z = C(\Phi)$, para una cierta criba monótona Φ. Definimos entonces $A_\varnothing = X$ y, para $s \in \omega^{<\omega} \setminus \{\varnothing\}$, será $s = s_r$, para un único $r \in \mathcal{D}$, con lo que podemos definir $A_s = \Phi(r)$. De este modo, A es un esquema de Suslin decreciente (abierto, cerrado, etc. si lo es Φ). Como se cumple que $\Phi(r) = A_{s_r}$, la parte ya probada nos da que $S(A) = C(\Phi)$. ■

En particular, si X es un espacio polaco, los subconjuntos analíticos de X son los de la forma $C(\Phi)$, donde Φ es una criba monótona y cerrada en X. Los conjuntos coanalíticos son de la forma $X \setminus C(\Phi)$.

Más adelante demostraremos que la condición de monotonía puede suprimirse, es decir, que las cribas cerradas no necesariamente monótonas también determinan conjuntos analíticos. No obstante, para probarlo necesitamos algunos resultados previos sobre conjuntos definidos por cribas cerradas. Así pues, a partir de aquí suponemos que Φ es una criba cerrada, pero no necesariamente monótona, en un espacio polaco X y llamamos $C = X \setminus C(\Phi)$. Según estamos advirtiendo, esto equivale a suponer que C es un conjunto coanalítico, pero aún no estamos en condiciones de probarlo. Por definición de $C(\Phi)$ tenemos que

$$x \in C \leftrightarrow (M_x(\Phi), \preceq) \text{ está bien ordenado.}$$

Para cada ordinal $\alpha < \omega_1$ definimos

$$A_\alpha(\Phi) = \{x \in X \mid \operatorname{ord}(M_x(\Phi), \preceq) = \alpha\},$$

donde $\operatorname{ord}(M_x(\Phi), \preceq) = \alpha$ ha de entenderse como que $(M_x(\Phi), \preceq)$ está bien ordenado y su ordinal es α. Así, C se descompone como unión disjunta

$$C = \bigcup_{\alpha<\omega_1} A_\alpha(\Phi).$$

Vamos a probar que cada $A_\alpha(\Phi)$ es un conjunto de Borel. Más aún, si llamamos

$$B_\alpha(\Phi) = \bigcup_{\delta<\alpha} A_\delta(\Phi) = \{x \in X \mid \operatorname{ord}(M_x(\Phi), \preceq) < \alpha\},$$

se cumple que

a) Si $n \in \omega$, entonces $B_n(\Phi)$ es G_δ.

b) Si $\lambda < \omega_1$ es un ordinal límite, entonces $B_\lambda(\Phi)$ es $\mathbf{\Sigma}^0_\lambda$,

c) Si $\alpha = \lambda + n + 1$, donde λ es un ordinal límite y $n \in \omega$, entonces $B_\alpha(\Phi)$ es $\mathbf{\Pi}^0_{\lambda+1}$.

(Notemos que el hecho de que los conjuntos $B_\alpha(\Phi)$ sean de Borel implica que los $A_\alpha(\Phi)$ también lo son, pues $A_\alpha(\Phi) = B_{\alpha+1}(\Phi) \setminus B_\alpha(\Phi)$.)

En efecto, dado $n \in \omega$, tenemos que $x \in B_n(\Phi)$ si y sólo si x pertenece a menos de n conjuntos $\Phi(r)$, luego $x \notin B_n(\Phi)$ si y sólo si existen $r_1, \ldots, r_n \in \mathcal{D}$ distintos dos a dos tales que $x \in \Phi(r_1) \cap \cdots \cap \Phi(r_n)$. La intersección es cerrada y los subconjuntos de $\mathcal{D}$ con n elementos son una cantidad numerable, luego $X \setminus B_n(\Phi)$ es un F_σ y $B_n(\Phi)$ es un G_δ.

Supongamos ahora que $\alpha < \omega_1$ es infinito y que, para toda criba cerrada Φ y todo $\delta < \alpha$ se cumple a), b) y c).

Si $\alpha = \lambda$ es un ordinal límite, entonces

$$B_\lambda(\Phi) = \bigcup_{\delta<\lambda} B_\delta(\Phi) \in \mathbf{\Sigma}^0_\lambda.$$

Supongamos finalmente que $\alpha = \lambda + n + 1$. Para cada $r \in \mathcal{D}$, definimos

$$\Phi_r(s) = \begin{cases} \Phi(s) & \text{si } s \prec r, \\ \varnothing & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Así:

$$M_x(\Phi_r) = \{s \in M_x(\Phi) \mid s \prec r\},$$

es decir, que los conjuntos $M_x(\Phi_r)$, para $r \in M_x(\Phi)$ son los segmentos iniciales de $M_x(\Phi)$. Por consiguiente, $x \in B_\alpha(\Phi)$ si y sólo si, para todo $r \in M_x(\Phi)$, el conjunto $M_x(\Phi_r)$ está bien ordenado y su ordinal es menor que $\lambda + n$. Equivalentemente:

$$B_\alpha(\Phi) = \bigcap_{r \in M_x(\Phi)} B_{\lambda+n}(\Phi_r).$$

Por hipótesis de inducción $B_{\lambda+n}(\Phi_r) \in \mathbf{\Pi}^0_{\lambda+1}$, luego también $B_\alpha(\Phi) \in \mathbf{\Pi}^0_{\lambda+1}$.

En particular hemos demostrado el teorema siguiente:

Teorema 1.53 *Todo conjunto coanalítico en un espacio polaco es unión de $\aleph_1$ conjuntos de Borel.*

En particular:

Teorema 1.54 (AC) *Todo conjunto coanalítico en un espacio polaco tiene cardinal $\leq \aleph_1$ o bien $\mathfrak{c}$.*

Así pues, mientras un conjunto analítico sólo puede tener cardinal numerable o igual a $\mathfrak{c}$, para los conjuntos coanalíticos tenemos, en principio, una tercera posibilidad, y es que tengan cardinal $\aleph_1$.

Introducimos ahora un conjunto coanalítico especialmente relevante:

Definición 1.55 Llamamos $\mathbf{BO} = \{A \subset \mathcal{D} \mid (A, \preceq) \text{ está bien ordenado}\}$ y, para cada $\alpha < \omega_1$, definimos $\mathbf{BO}_\alpha = \{A \in \mathbf{BO} \mid \operatorname{ord}(A, \preceq) = \alpha\}$.

Así, $\mathbf{BO} = \bigcup\limits_{\alpha<\omega_1} \mathbf{BO}_\alpha$, la unión es disjunta, y cada $\mathbf{BO}_\alpha \neq \varnothing$. En efecto, esto último se debe a que $\mathbb{Q}$ (y, por consiguiente, $\mathcal{D}$) posee subconjuntos bien ordenados de cualquier ordinal numerable. Para probarlo basta aplicar el teorema de Cantor [TC 2.39] a $\alpha \times \mathbb{Q}$ con el orden lexicográfico, lo que nos da que $\alpha \times \mathbb{Q}$ es semejante a $\mathbb{Q}$.

Fijando una biyección $d : \omega \longrightarrow \mathcal{D}$ podemos identificar cada subconjunto de $\mathcal{D}$ con un subconjunto de ω y éste a su vez con su función característica en $\mathcal{C} = 2^\omega$. De este modo, podemos considerar que $\mathbf{BO}$, $\mathbf{BO}_\alpha \subset \mathcal{C}$. Más precisamente, cada $x \in \mathcal{C}$ se corresponde con el conjunto

$$A_x = \{r \in \mathcal{D} \mid x(d^{-1}(r)) = 1\}$$

y, en estos términos, $x \in \mathbf{BO}$ si y sólo si $(A_x, \preceq)$ está bien ordenado.

Teorema 1.56 $\mathbf{BO} \in \mathbf{\Pi}_1^1(\mathcal{C})$.

DEMOSTRACIÓN: Tenemos que $x \notin \mathbf{BO}$ si y sólo si $(A_x, \preceq)$ no está bien ordenado, lo cual equivale a que exista una sucesión decreciente $\{r_n\}_{n\in\omega}$ de elementos de A_x. Si llamamos $y(n) = d^{-1}(r_n)$, el hecho de que r_n esté en A_x equivale a que $x(y_n)) = 1$. Por lo tanto:

$$x \notin \mathbf{BO} \leftrightarrow \bigvee y \in \mathcal{N} \bigwedge n \in \omega \ (x(y(n)) = 1 \wedge d(y(n+1)) \prec d(y(n))),$$

luego $\mathcal{C} \setminus \mathbf{BO}$ es la proyección del conjunto

$$C = \{(x, y) \in \mathcal{C} \times \mathcal{N} \mid \bigwedge n \in \omega \ (x(y(n)) = 1 \wedge d(y(n+1)) \prec d(y(n)))\},$$

luego basta ver que C es cerrado. A su vez, C es la intersección de los conjuntos

$$C_n = \{(x, y) \in \mathcal{C} \times \mathcal{N} \mid x(y(n)) = 1 \wedge d(y(n+1)) \prec d(y(n))\},$$

que son cerrados, pues, si $(x, y) \notin \mathcal{C} \times \mathcal{N}$, o bien $x(y(n)) = 0$, en cuyo caso

$$(x, y) \in B_{x|_{y(n)+1}} \times B_{y|_{n+1}} \subset C_n,$$

o bien $d(y(n)) \preceq d(y(n+1))$, en cuyo caso $(x, y) \in \mathcal{C} \times B_{y|_{n+1}} \subset C_n$. ■

Definimos la criba abierta cerrada Φ en $\mathcal{C}$ dada por

$$\Phi(r) = \{x \in \mathcal{C} \mid x(d^{-1}(r)) = 1\}.$$

Observamos que

$$M_x(\Phi) = \{r \in \mathcal{D} \mid x \in \Phi(r)\} = \{r \in \mathcal{D} \mid x(d^{-1}(r)) = 1\} = A_x.$$

Por consiguiente, $x \in C(\Phi)$ si y sólo si $M_x(\Phi) = A_x$ no está bien ordenado, si y sólo si $x \notin \mathbf{BO}$. Equivalentemente, $\mathbf{BO} = \mathcal{C} \setminus C(\Phi)$. Además, $A_\alpha(\Phi) = \mathbf{BO}_\alpha$.

Esto implica que los conjuntos $\mathbf{BO}_\alpha$ son de Borel en $\mathcal{C}$, y son disjuntos dos a dos (y no vacíos). Esto nos da cierta información sobre el cardinal de la σ-álgebra de Borel de un espacio polaco (sin suponer el axioma de elección):

Teorema 1.57 *Si X es un espacio polaco no numerable, $|\mathcal{B}(X)| \geq \aleph_1$.*

DEMOSTRACIÓN: Por el teorema [T 6.33] basta probarlo para $\mathcal{C}$, y claramente la aplicación $\alpha \mapsto \mathbf{BO}_\alpha$ es una aplicación $\omega_1 \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{C})$ inyectiva. ■

La propiedad más significativa del conjunto $\mathbf{BO}$ es la dada por el teorema siguiente:

Teorema 1.58 *Sea X un espacio polaco, sea Φ una criba de Borel en X y sea $A = C(\Phi)$. Entonces existe una aplicación $f : X \longrightarrow \mathcal{C}$ medible Borel tal que $A_\alpha(\Phi) = f^{-1}[\mathbf{BO}_\alpha]$ para todo $\alpha < \omega_1$. En particular $X \setminus A = f^{-1}[\mathbf{BO}]$, luego A es analítico.*

DEMOSTRACIÓN: Definimos $f(x)(n) = 1$ si y sólo si $x \in \Phi(d(n))$. Así

$$A_{f(x)} = \{r \in \mathcal{D} \mid f(x)(d^{-1}(r)) = 1\} = \{r \in \mathcal{D} \mid x \in \Phi(r)\} = M_x(\Phi).$$

Por lo tanto,

$$x \in A_\alpha(\Phi) \leftrightarrow \operatorname{ord}(M_x(\Phi), \preceq) = \alpha \leftrightarrow \operatorname{ord}(A_{f(x)}, \preceq) = \alpha \leftrightarrow f(x) \in \mathbf{BO}_\alpha,$$

es decir, $A_\alpha(\Phi) = f^{-1}[\mathbf{BO}_\alpha]$. Hemos de probar que f es medible Borel. Ahora bien, si $s \in 2^n$, entonces

$$f^{-1}[B_s] = \bigcap_{s(m)=1} \Phi(d(m)) \cap \bigcap_{s(m)=0} (X \setminus \Phi(d(m))) \in \mathcal{B}(X).$$

■

Observemos que si la criba del teorema anterior es abierta cerrada, entonces los conjuntos $f^{-1}[B_s]$ son abiertos cerrados, luego f es, de hecho, una aplicación continua.

Ahora podemos demostrar un hecho que habíamos anunciado más arriba:

Teorema 1.59 *Un subconjunto A de un espacio polaco X es analítico si y sólo si $A = C(\Phi)$, para cierta criba de Borel Φ en X, que puede tomarse monótona y cerrada.*

En el capítulo siguiente demostraremos (teorema 2.11) que existen conjuntos analíticos que no son de Borel (o, equivalentemente, conjuntos analíticos que no son coanalíticos, y viceversa), si bien los ejemplos que daremos serán un tanto sofisticados. Admitiendo este hecho, podemos demostrar que **BO** proporciona otro ejemplo, sólo que mucho más simple.

Teorema 1.60 *El conjunto $\mathbf{BO} \subset \mathcal{C}$ es coanalítico, pero no analítico.*

DEMOSTRACIÓN: Si fuera analítico, sería de Borel, y por el teorema 1.58 todos los conjuntos coanalíticos serían de Borel (y los analíticos también). ■

1.7 Representaciones en términos de árboles

Vamos a obtener unas expresiones para conjuntos $\mathbf{\Sigma}_1^1$ y $\mathbf{\Sigma}_2^1$ que nos serán útiles más adelante.

Si $X = X_1 \times \cdots \times X_s$ es un producto cartesiano arbitrario, un árbol R en X, según lo convenido en la sección 1.1, es un subconjunto de $X^{<\omega}$. Cada elemento de $X^{<\omega}$ es una sucesión $\{(x_i^1, \ldots, x_i^s)\}_{i<n}$, donde $x_j^i \in X_j$, pero una sucesión de este tipo determina y está completamente determinada por la s-tupla de sucesiones $(\{x_i^1\}_{i<n}, \ldots, \{x_i^s\}_{i<n})$. Así tenemos así definida una biyección natural $\phi : X^{<\omega} \longrightarrow S$, donde

$$S = \{(t_1, \ldots, t_s) \in X_1^{<\omega} \times \cdots \times X_s^{<\omega} \mid \ell(t_1) = \cdots = \ell(t_s)\}.$$

Si $t = (t_1, \ldots, t_s) \in S$, llamaremos $\ell(t) \in \omega$ a la longitud de cualquiera de sus componentes y, si $m \leq \ell(t)$, llamaremos $t|_m = (t_1|_m, \ldots, t_s|_m)$. De este modo, si $t \in X^{<\omega}$, tenemos que $\ell(t) = \ell(\phi(t))$ y $\phi(t|_m) = \phi(t)|_m$.

Más aún, si definimos en S el orden parcial dado por

$$t \leq t' \leftrightarrow t_1 \subset t'_1 \wedge \cdots \wedge t_s \subset t'_s$$

(y en $X^{<\omega}$ consideramos el orden parcial dado por la inclusión), entonces, para todo $t_1, t_2 \in X^{<\omega}$, se cumple que $t_1 \leq t_2 \leftrightarrow \phi(t_1) \leq \phi(t_2)$.

Diremos que R es un *árbol s-dimensional* en un producto $X_1 \times \cdots \times X_s$ si $R \subset S \wedge \bigwedge t \in R \bigwedge m < \ell(t)\, r|_m \in R$.

Claramente, un conjunto $R \subset X^{<\omega}$ es un árbol en X si y sólo si $\phi[R]$ es un árbol s-dimensional en $X_1 \times \cdots \times X_s$.

Por otra parte, cada $x \in X^\omega$ es una sucesión $x = \{(x_n^1, \ldots, x_n^s)\}_{n<\omega}$ que determina y está determinada por la s-tupla $(\{x_n^1\}_{n<\omega}, \ldots, \{x_n^s\}_{n<\omega})$, con lo que tenemos otra biyección $\psi : X^\omega \longrightarrow X_1^\omega \times \cdots \times X_s^\omega$.

Claramente, si R es un árbol en X y $R' = \phi[R]$, el conjunto $[R] \subset X^\omega$ de sus caminos (o ramas infinitas) se corresponde a través de ψ con el conjunto

$$[R'] = \{x \in X_1^\omega \times \cdots \times X_s^\omega \mid \bigwedge n \in \omega\ x|_n \in R'\},$$

donde $x|_n = (x_1|_n, \ldots, x_s|_n)$.

Todas estas consideraciones nos permiten identificar S con $X^{<\omega}$ y, a su vez, identificar los árboles en X con los árboles s-dimensionales en X. De este modo, en lo sucesivo, cuando digamos, por ejemplo, que $x \in X^{<\omega}$, donde X es un producto cartesiano, se entenderá que x no es una sucesión en X sino una s-tupla de sucesiones, cuando digamos que R es un árbol en X, se entenderá que R es un árbol multidimensional, etc.

En particular, si $X = Y^s$, estamos identificando X^ω con $(Y^\omega)^s$ y, más particularmente aún, podemos identificar $\mathcal{N}^s$ con $(\omega^s)^\omega$.

Consideremos un producto cartesiano $X \times Y$ (donde, como hasta ahora, $X = X_1 \times \cdots \times X_s$, aunque sin excluir el caso en que $s = 1$). Si R es un árbol en $X \times Y$, podemos considerar el conjunto de sus caminos $[R] \subset X^\omega \times Y^\omega$, así como la proyección $p[R] \subset X^\omega$. Concretamente:

$$p[R] = \{x \in X^\omega \mid \bigvee y \in Y^\omega \ \bigwedge n \in \omega\ (x|_n, y|_n) \in R\}.$$

Adoptaremos el convenio de que, cuando R es un árbol en un producto finito de al menos dos conjuntos, $p[R]$ representa siempre la proyección en la que se elimina únicamente la última componente.

Si $s \in X^n$, llamaremos

$$R_s = \{t \in Y^n \mid (s, t) \in R\}.$$

A su vez, para cada $x \in X^\omega$, definimos $R_x = \bigcup\limits_{n\in\omega} R_{x|_n}$, que claramente es un árbol en Y. Concretamente,

$$t \in R_x \leftrightarrow (x|_{\ell(t)}, t) \in R.$$

Con todo esto obtenemos la caracterización siguiente de los subconjuntos analíticos de $\mathcal{N}^s$:

Teorema 1.61 *Si $s \geq 1$, un subconjunto $A \subset \mathcal{N}^s$ es analítico si y sólo si existe un árbol R en ω^{s+1} tal que, para todo $x \in \mathcal{N}^s$, se cumple*

$$x \in A \leftrightarrow \bigvee y \in \mathcal{N} \bigwedge n \in \omega\, y|_n \in R_x \leftrightarrow R_x \textit{ no está bien fundado,}$$

donde al decir que R_x no está bien fundado hay que entender que es respecto de la relación inversa a la inclusión.

Demostración: Si A es analítico, el teorema 1.32 nos da que existe un cerrado $C \subset \mathcal{N}^{s+1}$ tal que $A = p[C]$. Identificando $\mathcal{N}^{s+1} = ({}^\omega\omega \times \cdots \times {}^\omega\omega)$ con $(\omega^{s+1})^\omega$, el teorema 1.1 nos da que C es de la forma $C = [R]$, donde R es un árbol en ω^{s+1}, que a su vez puede identificarse con un árbol multidimensional. Concretamente, tenemos que

$$x \in A \leftrightarrow \bigvee y \in \mathcal{N}\ (x, y) \in C \leftrightarrow \bigvee y \in \mathcal{N} \bigwedge n \in \omega\ (x|_n, y|_n) \in R,$$

luego R cumple lo requerido. El recíproco vale igualmente: un árbol R en estas condiciones define un cerrado C tal que $A = p[C]$. ■

De aquí deducimos a su vez una representación (aunque en este caso no es una caracterización, es decir, una equivalencia) de los conjuntos $\mathbf{\Sigma}^1_2$.

Teorema 1.62 *Si $s \geq 1$, y $A \subset \mathcal{N}^s$ es $\mathbf{\Sigma}^1_2$, existe un árbol R en $\omega^s \times \omega_1$ tal que $A = p[R]$, es decir,*

$$x \in A \leftrightarrow \bigvee y \in {}^\omega\omega_1 \bigwedge n \in \omega\, (x|_n, y|_n) \in R \leftrightarrow R_x \textit{ no está bien fundado.}$$

Demostración: Por definición, $A = p[B]$, donde $B \subset \mathcal{N}^{s+1}$ es $\mathbf{\Pi}^1_1$. Por el teorema anterior existe un árbol R' en ω^{s+2} tal que

$$x \in A \leftrightarrow \bigvee y \in \mathcal{N}\ R'_{(x,y)} \text{ está bien fundado.}$$

Si $R'_{(x,y)}$ está bien fundado, podemos considerar el rango: $\rho : R'_{(x,y)} \longrightarrow \Omega$, que es una aplicación que conserva el orden:

$$\bigwedge rs \in R'_{(x,y)} (r \subsetneq s \rightarrow \rho(s) < \rho(r)).$$

Además, como $R'_{(x,y)} \subset \omega^{<\omega}$ es numerable, de hecho $\rho : R'_{(x,y)} \longrightarrow \omega_1$. Extendemos ρ a una aplicación $\rho : \omega^{<\omega} \longrightarrow \omega_1$ y consideramos a su vez la aplicación $f : \omega \longrightarrow \omega_1$ dada por $f(n) = \rho(s_n)$, donde $\{s_n\}_{n\in\omega}$ es cualquier enumeración prefijada de $\omega^{<\omega}$. De este modo tenemos que

$$\bigwedge mn \in \omega (s_m, s_n \in R'_{(x,y)} \wedge s_m \subsetneq s_n \rightarrow f(n) < f(m)).$$

Recíprocamente, si existe $f : \omega \longrightarrow \omega_1$ que cumpla esta propiedad, entonces $R_{(x,y)}$ está bien fundado y $x \in A$. En definitiva, los elementos de A son los que cumplen

$$\bigvee y \in \mathcal{N} \bigvee f \in {}^{\omega}\omega_1 \bigwedge mn \in \omega (s_m, s_n \in R'_{(x,y)} \land s_m \subsetneqq s_n \to f(n) < f(m)).$$

Ahora definimos un árbol R'' en $\omega^{s+1} \times \omega_1$ mediante

$$(s, t, h) \in R'' \leftrightarrow \bigwedge mn < \ell(h)(s_m, s_n \in R'[s, t] \to h(n) < h(m)),$$

donde

$$R'[s, t] = \{u \in \omega^{<\omega} \mid \ell(u) \leq \ell(s) = \ell(t) \land (s|_{\ell(u)}, t|_{\ell(u)}, u) \in R'\}.$$

Es claro entonces que

$$x \in A \leftrightarrow \bigvee y \in \mathcal{N} \bigvee f \in {}^{\omega}\omega_1 \bigwedge n \in \omega \ (x|_n, y|_n, f|_n) \in R''.$$

Para terminar fijamos una biyección $i : \omega \times \omega_1 \longrightarrow \omega_1$, que a su vez induce biyecciones $\omega^{<\omega} \times \omega_1^{<\omega} \longrightarrow \omega_1^{<\omega}$ y ${}^{\omega}\omega \times {}^{\omega}\omega_1 \longrightarrow {}^{\omega}\omega_1$. A través de ellas podemos transformar R'' en un árbol R en $\omega \times \omega_1$, de modo que

$$x \in A \leftrightarrow \bigvee y \in {}^{\omega}\omega_1 \bigwedge n \in \omega \ (x|_n, y|_n) \in R.$$ ■

Aunque todavía hemos de demostrar más propiedades básicas de los conjuntos analíticos y coanalíticos, pero antes conviene introducir la jerarquía de Lusin de los conjuntos proyectivos, de lo que nos ocupamos en el capítulo siguiente.

Capítulo II

Conjuntos Proyectivos

Las clases $\boldsymbol{\Sigma}_1^1$ y $\boldsymbol{\Pi}_1^1$ de los conjuntos analíticos y coanalíticos en un espacio polaco X son los primeros peldaños de la jerarquía de los conjuntos proyectivos de X, que introducimos y estudiamos en este capítulo.

2.1 La jerarquía proyectiva

Aunque todavía hemos de demostrar más propiedades básicas de los conjuntos analíticos y coanalíticos, conviene introducir antes la jerarquía proyectiva, de la que $\boldsymbol{\Sigma}_1^1$ y $\boldsymbol{\Pi}_1^1$ son los primeros peldaños:

Definición 2.1 Para cada espacio polaco X y cada $n \in \omega \setminus \{0\}$, definimos inductivamente las clases (de Lusin) $\boldsymbol{\Sigma}_n^1(X)$ y $\boldsymbol{\Pi}_n^1(X)$ como sigue:

- $\boldsymbol{\Sigma}_1^1(X) = \{A \subset X \mid A \text{ es analítico}\}$.
- $\boldsymbol{\Pi}_n^1(X) = \{X \setminus A \mid A \in \boldsymbol{\Sigma}_n^1(X)\}$.
- $\boldsymbol{\Sigma}_{n+1}^1(X) = \{\pi_X[A] \mid A \in \boldsymbol{\Pi}_n^1(X \times \mathcal{N})\}$.

Definimos además $\boldsymbol{\Delta}_n^1 = \boldsymbol{\Sigma}_n^1 \cap \boldsymbol{\Pi}_n^1$.

Claramente, las clases $\boldsymbol{\Sigma}_1^1$, $\boldsymbol{\Pi}_1^1$ y $\boldsymbol{\Delta}_1^1$ son las que ya teníamos definidas. En particular $\boldsymbol{\Delta}_1^1$ es la clase de los conjuntos de Borel. Las clases de Lusin satisfacen las mismas inclusiones que la jerarquía de Borel:

Teorema 2.2 *Si X es un espacio polaco, se dan las inclusiones siguientes:*

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & \subset & \boldsymbol{\Sigma}_1^1 & \subset & & \subset & \boldsymbol{\Sigma}_2^1 & \subset & & \subset & \boldsymbol{\Sigma}_3^1 & \subset & & \subset & \cdots \\
\boldsymbol{\Delta}_1^1 & & & & \boldsymbol{\Delta}_2^1 & & & & \boldsymbol{\Delta}_3^1 & & & & \boldsymbol{\Delta}_4^1 & & \\
 & \subset & \boldsymbol{\Pi}_1^1 & \subset & & \subset & \boldsymbol{\Pi}_2^1 & \subset & & \subset & \boldsymbol{\Pi}_3^1 & \subset & & \subset & \cdots
\end{array}$$

Demostración: Si $A \in \mathbf{\Sigma}_1^1(X)$, existe un cerrado $C \subset X \times \mathcal{N}$ tal que $A = \pi_X[C]$, pero $C \in \mathcal{B}(X \times \mathcal{N}) \subset \mathbf{\Pi}_1^1(\mathcal{N} \times X)$, luego $A \in \mathbf{\Sigma}_2^1(X)$, es decir, tenemos la inclusión $\mathbf{\Sigma}_1^1 \subset \mathbf{\Sigma}_2^1$. En general, de la inclusión $\mathbf{\Sigma}_n^1 \subset \mathbf{\Sigma}_{n+1}^1$ se sigue que $\mathbf{\Pi}_n^1 \subset \mathbf{\Pi}_{n+1}^1$ y de aquí a su vez que $\mathbf{\Sigma}_{n+1}^1 \subset \mathbf{\Sigma}_{n+2}^1$.

Si $A \in \mathbf{\Pi}_n^1(X)$, entonces $A \times \mathcal{N} \in \mathbf{\Pi}_n^1(X \times \mathcal{N})$. Esto es un caso particular del teorema siguiente 2.4: las antiimágenes continuas de conjuntos de cualquiera de las clases de Lusin están en la misma clase. Naturalmente, demostraremos 2.4 sin apoyarnos en el teorema que estamos demostrando.

Aceptando esto, concluimos que $A = \pi_X(A \times \mathcal{N}) \in \mathbf{\Sigma}_{n+1}^1(X)$, luego tenemos la inclusión $\mathbf{\Pi}_n^1 \subset \mathbf{\Sigma}_{n+1}^1$. Tomando complementarios obtenemos a su vez que $\mathbf{\Sigma}_n^1 \subset \mathbf{\Pi}_{n+1}^1$.

Las inclusiones concernientes a las clases $\mathbf{\Delta}_n^1$ son ahora inmediatas. ■

Definición 2.3 Se llaman subconjuntos *proyectivos* de un espacio polaco X a los elementos de

$$\boldsymbol{P}(X) = \bigcup_{n \in \omega} \mathbf{\Sigma}_n^1(X) = \bigcup_{n \in \omega} \mathbf{\Pi}_n^1(X) = \bigcup_{n \in \omega} \mathbf{\Delta}_n^1(X).$$

Los teoremas siguientes recogen las propiedades básicas de las clases de Lusin:

Teorema 2.4 *Las antiimágenes por funciones medibles Borel (en particular, continuas), las uniones numerables y las intersecciones numerables de conjuntos* $\mathbf{\Sigma}_n^1$ *(resp.* $\mathbf{\Pi}_n^1$*) son conjuntos* $\mathbf{\Sigma}_n^1$ *(resp.* $\mathbf{\Pi}_n^1$*). Los conjuntos* $\mathbf{\Delta}_n^1$ *forman una* σ*-álgebra.*

Demostración: Veamos primero el caso de las antiimágenes medibles. Para $\mathbf{\Sigma}_n^1$ lo tenemos probado (teorema 1.34). Si se cumple para $\mathbf{\Sigma}_n^1$, se cumple trivialmente para $\mathbf{\Pi}_n^1$, pues, dada una función medible Borel $f : X \longrightarrow Y$ y un conjunto $A \in \mathbf{\Pi}_n^1(Y)$, tenemos que $Y \setminus A \in \mathbf{\Sigma}_n^1(Y)$, luego, por hipótesis de inducción, $X \setminus f^{-1}[A] = f^{-1}[Y \setminus A] \in \mathbf{\Sigma}_n^1(X)$, luego $f^{-1}[A] \in \mathbf{\Pi}_n^1(X)$.

Si se cumple para $\mathbf{\Pi}_n^1$ y $A \in \mathbf{\Sigma}_{n+1}^1(Y)$, entonces existe un $B \in \mathbf{\Pi}_n^1(Y \times \mathcal{N})$ tal que $A = \pi_Y[B]$. Si $f : X \longrightarrow Y$ es medible Borel, también lo es la aplicación inducida $f^* : X \times \mathcal{N} \longrightarrow Y \times \mathcal{N}$, luego $f^{*-1}[B] \in \mathbf{\Pi}_n^1(X \times \mathcal{N})$, con lo que $A' = \pi_X[f^{*-1}[B]] \in \mathbf{\Sigma}_{n+1}^1(X)$. Ahora basta observar que $A' = f^{-1}[A]$. En efecto:

$$x \in A' \leftrightarrow \bigvee y \in \mathcal{N}\ (x, y) \in f^{*-1}[B] \leftrightarrow \bigvee y \in \mathcal{N}\ (f(x), y) \in B \leftrightarrow f(x) \in A.$$

Por el teorema 1.33 sabemos que $\mathbf{\Sigma}_1^1$ es cerrado para uniones e intersecciones numerables. Es inmediato que si vale para $\mathbf{\Sigma}_n^1$ también vale para $\mathbf{\Pi}_n^1$. Supongamos ahora que vale para $\mathbf{\Pi}_n^1$ y sea $\{A_n\}_{n \in \omega}$ una familia de conjuntos en $\mathbf{\Sigma}_{n+1}^1(X)$. Entonces $A_n = \pi_Y[C_n]$, con $C_n \in \mathbf{\Pi}_n^1(X \times \mathcal{N})$. Por consiguiente,

$$\pi_X[\bigcup_{n \in \omega} C_n] = \bigcup_{n \in \omega} \pi_X[C_n] = \bigcup_{n \in \omega} A_n \in \mathbf{\Sigma}_{n+1}^1(X).$$

Fijando un homeomorfismo $\mathcal{N} \cong \mathcal{N}^\omega$ que a cada $y \in \mathcal{N}$ le asigne una sucesión $(y_n)_{n\in\omega}$, vemos que

$$x \in \bigcap_{n\in\omega} A_n \leftrightarrow \bigwedge n \in \omega \bigvee a \in \mathcal{N}\ (x,a) \in C_n \leftrightarrow \bigvee y \in \mathcal{N}^\omega \bigwedge n \in \omega\ (x, y(n)) \in C_n$$

$$\leftrightarrow \bigvee y \in \mathcal{N} \bigwedge n \in \omega\ (x, y_n) \in C_n \leftrightarrow x \in \pi_X[U],$$

donde

$$\begin{aligned} U &= \{(x,y) \in X \times \mathcal{N} \mid \bigwedge n \in \omega\ (x,y_n) \in C_n\} \\ &= \bigcap_{n\in\omega} \{(x,y) \in X \times \mathcal{N} \mid\ (x,y_n) \in C_n\} \\ &= \bigcap_{n\in\omega} (I \times p_n)^{-1}[\{(x,y) \in X \times \mathcal{N} \mid (x,y) \in C_n\}] \\ &= \bigcap_{n\in\omega} (I \times p_n)^{-1}[C_n] \in \mathbf{\Pi}^1_n(X \times \mathcal{N}), \end{aligned}$$

luego $\bigcap\limits_{n\in\omega} A_n \in \mathbf{\Sigma}^1_{n+1}(X)$. ■

En particular, un isomorfismo de Borel entre dos espacios polacos determina isomorfismos entre sus respectivas σ-álgebras $\mathbf{\Delta}^1_n$, así como entre sus álgebras de conjuntos proyectivos.

Hemos definido los conjuntos $\mathbf{\Sigma}^1_{n+1}(X)$ como las proyecciones de conjuntos $\mathbf{\Pi}^1_n(X \times \mathcal{N})$, pero en realidad todas las imágenes de conjuntos $\mathbf{\Pi}^1_n$ por cualquier aplicación continua, o simplemente medible Borel, son $\mathbf{\Sigma}^1_{n+1}$, tal y como muestra el teorema siguiente:

Teorema 2.5 *Las imágenes de los conjuntos $\mathbf{\Sigma}^1_n$ por funciones medibles Borel (en particular, continuas) son $\mathbf{\Sigma}^1_n$, mientras que las imágenes de los conjuntos $\mathbf{\Pi}^1_n$ son los conjuntos $\mathbf{\Sigma}^1_{n+1}$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $f : X \longrightarrow Y$ una aplicación medible Borel. En la prueba del teorema 1.34 hemos visto que su gráfica

$$G_f = \{(x,y) \in X \times Y \mid y = f(x)\}$$

es un conjunto de Borel en $X \times Y$. Por otra parte, el teorema [T 6.8] nos da una aplicación $g : \mathcal{N} \longrightarrow X$ continua y suprayectiva, con la que podemos construir a su vez una aplicación $h : Y \times \mathcal{N} \longrightarrow X \times Y$ continua y suprayectiva.

Si $A \in \mathbf{\Pi}^1_n(X)$, tenemos que

$$B = \{(x, f(x) \mid x \in A\} = (A \times Y) \cap G_f \in \Pi^1_n(X \times Y),$$

luego $C = h^{-1}[B] \in \mathbf{\Pi}^1_n(Y \times \mathcal{N})$, luego $\pi_Y[C] \in \mathbf{\Sigma}^1_{n+1}(Y)$. Pero $\pi_Y[C] = f[A]$. En efecto:

$$y \in \pi_Y[C] \leftrightarrow \bigvee x \in \mathcal{N}\ (y,x) \in C \leftrightarrow \bigvee x \in \mathcal{N}\ (g(x), y) \in B$$

$$\leftrightarrow \bigvee x \in X\ (x,y) \in B \leftrightarrow y \in f[A].$$

Con esto queda probada la parte del enunciado sobre conjuntos $\mathbf{\Pi}^1_n$. El caso $\mathbf{\Sigma}^1_1$ es el teorema 1.34 y, para $n > 1$, tenemos que los conjuntos $\mathbf{\Sigma}^1_n$ son las imágenes de los conjuntos $\mathbf{\Pi}^1_{n-1}$ por aplicaciones medibles Borel, luego las imágenes de los conjuntos $\mathbf{\Sigma}^1_n$ por aplicaciones medibles Borel son también imágenes de conjuntos $\mathbf{\Pi}^1_{n-1}$ por aplicaciones medibles Borel, luego son $\mathbf{\Sigma}^1_n$. ■

El teorema anterior se puede precisar ligeramente:

Teorema 2.6 *Sea $f : X \longrightarrow Y$ una aplicación inyectiva y medible Borel entre espacios polacos.*

a) Si $A \in \mathcal{B}(X)$, entonces $f[A] \in \mathcal{B}(Y)$.

b) Si $A \in \mathbf{\Pi}^1_n(X)$, entonces $f[A] \in \mathbf{\Pi}^1_n(Y)$.

Demostración: a) Sea $G = G(f) \subset X \times Y$ la gráfica de f, que por 1.42 es un conjunto de Borel. La inyectividad de f se traduce en que la proyección $\pi_Y : X \times Y \longrightarrow Y$ cumple que $\pi_Y|_G$ es inyectiva, luego, por 1.43 tenemos que $f[A] = \pi_Y[\pi_X^{-1}[A] \cap G] \in \mathcal{B}(Y)$.

b) Basta observar que $f[A] = f[X] \cap (Y \setminus f[X \setminus A])$. Por una parte, tenemos que $f[X] \in \Delta^1_1 \subset \mathbf{\Pi}^1_n$ por el apartado anterior y, por otra parte, $f[X \setminus A] \in \mathbf{\Sigma}^1_1$ por el teorema anterior, luego $f[A] \in \mathbf{\Pi}^1_n$. ■

En [TC B.12] hemos probado que si existe una base de Hamel (una base de $\mathbb{R}$ como $\mathbb{Q}$-espacio vectorial), entonces existe un subconjunto de $\mathbb{R}$ no medible Lebesgue. Ahora podemos precisar un poco más:

Teorema 2.7 *Si existe una base de Hamel de clase $\mathbf{\Sigma}^1_n$, entonces existe un subconjunto de $\mathbb{R}$ de clase $\mathbf{\Sigma}^1_n$ no medible Lebesgue. En particular, una base de Hamel no puede ser un conjunto analítico.*

Demostración: Si B es una base de Hamel de clase $\mathbf{\Sigma}^1_n$ y $b \in B$, como $\{b\}$ es un conjunto de Borel, resulta que $B_0 = B \setminus \{b\}$ es también $\mathbf{\Sigma}^1_n$. En la prueba del teorema [TC B.12] se ve que el conjunto $A = \langle B_0 \rangle$ (es decir, el $\mathbb{Q}$-subespacio vectorial de $\mathbb{R}$ generado por B_0) no es medible Lebesgue. Basta ver que este conjunto es $\mathbf{\Sigma}^1_n$. Ahora bien, para cada $s \in \mathbb{Q}^n$, podemos definir $f_s : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ mediante $f_s(t) = \sum\limits_{i<n} s(i)t(i)$, con lo que $A = \bigcup\limits_{s \in \mathbb{Q}^{<\omega}} f_s[B_0]$ y cada f_s es una aplicación lineal, luego continua. Así pues, A es unión numerable de conjuntos $\mathbf{\Sigma}^1_n$, luego es $\mathbf{\Sigma}^1_n$. ■

Teorema 2.8 *Si $X \subset Y$ son espacios polacos, entonces los subconjuntos $\mathbf{\Sigma}^1_n$, $\mathbf{\Pi}^1_n$ o $\mathbf{\Delta}^1_n$ de X son los subconjuntos de Y de la misma clase contenidos en X.*

Demostración: Teniendo en cuenta que la inclusión $i : X \longrightarrow Y$ es continua, el teorema 2.4 implica que todo subconjunto de X que está en una de las clases proyectivas de Y, está en la clase correspondiente de X. Veamos ahora que, para cada par de espacios $X \subset Y$, se cumple que $\mathbf{\Sigma}^1_n(X) \subset \mathbf{\Sigma}^1_n(Y)$ y $\mathbf{\Pi}^1_n(X) \subset \mathbf{\Pi}^1_n(Y)$.

Para $\mathbf{\Sigma}_1^1$ se deduce inmediatamente de la definición de conjunto analítico.

Si $\mathbf{\Sigma}_n^1(X) \subset \mathbf{\Sigma}_n^1(Y)$ y $A \in \mathbf{\Pi}_n^1(X)$, entonces $X \setminus A \in \mathbf{\Sigma}_n^1(Y)$ y, como $X \in \mathbf{\Pi}_2^0(Y) \subset \mathbf{\Delta}_1^1(Y)$, concluimos que $Y \setminus A = (Y \setminus X) \cup (X \setminus A) \in \mathbf{\Sigma}_n^1(Y)$, luego $A \in \mathbf{\Pi}_n^1(Y)$.

Si $\mathbf{\Pi}_n^1(X) \subset \mathbf{\Pi}_n^1(Y)$ para todo par de espacios $X \subset Y$ y $A \in \mathbf{\Sigma}_{n+1}^1(X)$, entonces existe un $B \in \mathbf{\Pi}_n^1(X \times \mathcal{N}) \subset \mathbf{\Pi}_n^1(Y \times \mathcal{N})$ tal que $A = \pi_X[B] = \pi_Y[B]$, luego $A \in \mathbf{\Sigma}_{n+1}^1(Y)$.

A partir de aquí, el resultado para las clases $\mathbf{\Delta}_n^1$ es trivial. ■

Aunque hemos definido los conjuntos proyectivos a partir de proyecciones respecto de productos con $\mathcal{N}$. Sucede que es equivalente considerar proyecciones respecto de productos por $\mathcal{C}$:

Teorema 2.9 *Si X es un espacio polaco y $B \in \mathbf{\Sigma}_{n+1}^1(X)$, existe un conjunto $A \in \mathbf{\Pi}_n^1(X \times \mathcal{C})$ tal que $B = \pi_X[A]$. Esto también es válido para $B \in \mathbf{\Sigma}_1^1(X)$ con $A \in \mathbf{\Delta}_1^0(X \times \mathcal{C})$.*

Demostración: La clave es el teorema [T 6.21], que nos da una aplicación $f : \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{C}$ que es un homeomorfismo en su imagen, la cual, a su vez, induce una aplicación $g : X \times \mathcal{N} \longrightarrow X \times \mathcal{C}$ que también es un homeomorfismo en su imagen. Si $B \in \mathbf{\Sigma}_{n+1}^1(X)$, por definición existe un $A_0 \in \mathbf{\Pi}_n^1(X \times \mathcal{N})$ (resp. cerrado, si $n = 0$) tal que $B = \pi_X[A]$. Entonces, $A = g[A_0]$ es $\mathbf{\Pi}_n^1$ en la imagen de g, luego también en $X \times \mathcal{C}$, por 2.8 (resp. es $\mathbf{\Delta}_1^0$, si $n = 0$), y claramente $X = \pi_X[A]$. ■

Por último demostramos que la jerarquía proyectiva es estricta, de modo que, en particular, hay conjuntos analíticos que no son de Borel. La técnica es la misma que hemos empleado para la jerarquía de Borel, es decir, construir conjuntos universales.

Teorema 2.10 *Para cada espacio polaco X existe un conjunto $\mathcal{C}$-universal para $\mathbf{\Sigma}_n^1(X)$ y un conjunto $\mathcal{C}$-universal para $\mathbf{\Pi}_n^1(X)$.*

Demostración: Por el teorema 1.14, existe un cerrado $V \subset \mathcal{C} \times \mathcal{N} \times X$ $\mathcal{C}$-universal para $\mathbf{\Pi}_1^0(\mathcal{N} \times X)$. Sea

$$U = \{(u, x) \in \mathcal{C} \times X \mid \bigvee y \in \mathcal{N}\ (u, y, x) \in V\}.$$

Como U es la proyección de un cerrado, se cumple que $U \in \mathbf{\Sigma}_1^1(\mathcal{C} \times X)$ y es $\mathbf{\Sigma}_1^1$-universal para $\mathbf{\Sigma}_1^1(X)$, pues si $A \in \mathbf{\Sigma}_1^1(X)$, existe un cerrado $C \subset \mathcal{N} \times X$ tal que $A = \pi_X[C]$, pero dicho cerrado será de la forma $C = V_u$, para cierto $u \in \mathcal{C}$, y entonces es claro que $A = U_u$.

Si $V \subset \mathcal{C} \times X$ es un conjunto $\mathcal{C}$ universal para $\mathbf{\Sigma}_n^1(X)$, es claro que su complementario $U = (\mathcal{C} \times X) \setminus V$ es universal para $\mathbf{\Pi}_n^1(X)$ y, si V es $\mathcal{C}$-universal para $\mathbf{\Pi}_n^1(X)$, el conjunto U construido a partir de V como en el caso $\mathbf{\Sigma}_1^1$ es $\mathcal{C}$-universal para $\mathbf{\Sigma}_{n+1}^1(X)$, exactamente con la misma prueba. ■

El teorema siguiente se demuestra con el argumento de 1.15 tomado palabra por palabra (usando 2.8 en lugar de 1.12):

Teorema 2.11 *Si X es un espacio polaco no numerable, para cada $1 \leq n < \omega$ se cumple que $\mathbf{\Sigma}^1_n \neq \mathbf{\Pi}^1_n$ y, por consiguiente, $\mathbf{\Delta}^1_n \subsetneq \mathbf{\Sigma}^1_n \subsetneq \mathbf{\Delta}^0_{n+1}$, e igualmente con $\mathbf{\Pi}^1_n$.*

2.2 Buenos órdenes proyectivos

El axioma de elección implica que todo conjunto X admite un buen orden E, pero, en el caso en que X es un espacio polaco no numerable, ¿puede ser $E \subset X \times X$ un conjunto de Borel, o analítico, o, en general, proyectivo? Vamos a obtener algunos resultados a este respecto.

Ante todo, si X e Y son espacios polacos no numerables, existe un isomorfismo de Borel $f : X \longrightarrow Y$, y la aplicación $f \times f : X \times X \longrightarrow Y \times Y$ también es un isomorfismo de Borel. Por lo tanto, existe un buen orden proyectivo en X si y sólo si existe un buen orden proyectivo (de la misma clase $\mathbf{\Sigma}^1_n$, $\mathbf{\Pi}^1_n$ o $\mathbf{\Delta}^1_n$) en Y, es decir, el problema de la existencia de buenos órdenes proyectivos se puede estudiar en cualquier espacio polaco no numerable en particular y las conclusiones son válidas para todos los espacios polacos no numerables.

Otro hecho básico es el siguiente:

Teorema 2.12 *Si $E \subset X \times X$ es una relación de orden total $\mathbf{\Sigma}^1_n \cup \mathbf{\Pi}^1_n$ en un espacio polaco, entonces $E \in \mathbf{\Delta}^1_n$.*

Demostración: Sea $\Delta \subset X \times X$ la diagonal, que es un conjunto de Borel. Esto hace que $E' = E \setminus \Delta$ sea también $\mathbf{\Sigma}^1_n \cup \mathbf{\Pi}^1_n$, al igual que lo es la relación E'^{-1} dada por $E'^{-1}(x, y) \leftrightarrow E'(y, x)$ (más concretamente, se cumple que E'^{-1} es $\mathbf{\Sigma}^1_n$ (resp. $\mathbf{\Pi}^1_n$) si y sólo si E' lo es). Al tratarse de una relación de orden total, tenemos la partición

$$X \times X = E' \cup \Delta \cup E'^{-1}.$$

De aquí se sigue que si, por ejemplo, E es $\mathbf{\Sigma}^1_n$, entonces $\Delta \cup E'^{-1}$ también lo es, luego E es $\mathbf{\Pi}^1_n$, y viceversa. En ambos casos, E es $\mathbf{\Delta}^1_n$. ■

De momento demostraremos únicamente el siguiente resultado básico:

Teorema 2.13 *Si existe un buen orden $\mathbf{\Delta}^1_n$ en $\mathbb{R}$, entonces existe un subconjunto en $\mathbf{\Delta}^1_n(\mathbb{R})$ que no es medible Lebesgue ni tiene la propiedad de Baire.*

Demostración: Sea E un buen orden en $\mathbf{\Delta}^1_n(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$. Basta probar que el conjunto de Vitali V definido en la demostración de [TC B.1] es (o, mejor dicho, puede tomarse) $\mathbf{\Delta}^1_n$. En efecto, V resulta de elegir un elemento en cada clase de equivalencia de $\mathbb{I}$ respecto de la relación dada por $a\,R\,b \leftrightarrow b - a \in \mathbb{Q}$. Si, concretamente, tomamos como elemento en V el mínimo de cada clase respecto del buen orden E, tenemos que, para cada $x \in \mathbb{I}$,

$$x \in V \leftrightarrow \bigwedge y \in \mathbb{I}(x - y \in \mathbb{Q} \rightarrow (x, y) \in E) \leftrightarrow \bigwedge y \in \mathbb{I}(x - y \notin \mathbb{Q} \vee (x, y) \in E).$$

Ahora observamos que

$$B = \{(x,y) \in \mathbb{I} \times \mathbb{I} \mid x - y \notin \mathbb{Q}\} \in \mathbf{\Delta}^1_1(\mathbb{I} \times \mathbb{I}).$$

En efecto, basta considerar la aplicación continua $f : \mathbb{I} \times \mathbb{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = x - y$, de modo que $B = f^{-1}[\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}]$.

Por consiguiente, $B \cup E \in \mathbf{\Delta}^1_n(\mathbb{I} \times \mathbb{I})$ y $V = \pi[B \cup E] \in \mathbf{\Delta}^1_n(\mathbb{I}) \subset \mathbf{\Delta}^1_n(\mathbb{R})$. ■

Por consiguiente, concluimos que un espacio polaco no numerable no admite buenos órdenes $\mathbf{\Sigma}^1_1$ o $\mathbf{\Pi}^1_1$. A lo máximo a lo que podemos aspirar es a un buen orden $\mathbf{\Delta}^1_2$.

2.3 Clases normadas

Introducimos aquí una propiedad que nos permitirá estudiar las propiedades de reducción y separación en las clases proyectivas.

Definición 2.14 Sea Γ una clase de conjuntos definida sobre los espacios polacos y sea $A \in \Gamma(X)$. Diremos que una aplicación $\phi : A \longrightarrow \Omega$ es una *norma en* Γ si existen relaciones $\leq_\Gamma, \leq_{\neg\Gamma} \subset X \times X$ en Γ y $\neg\Gamma$ respectivamente tales que, para todo $y \in A$ y todo $x \in X$, se cumple que

$$x \in A \land \phi(x) \leq \phi(y) \leftrightarrow x \leq_\Gamma y \leftrightarrow x \leq_{\neg\Gamma} y.$$

Diremos que Γ es una *clase normada* si todo $A \in \Gamma$ tiene una norma en Γ.

Observemos que las relaciones $\leq_\Gamma$ y $\leq_{\neg\Gamma}$ no son relaciones de orden en A. Ambas son reflexivas y transitivas, pero en general no tienen por qué ser simétricas. Ambas son lo que se llaman *buenos preórdenes* en A, es decir relaciones reflexivas y transitivas tales que la relación $x \sim y \leftrightarrow x \leq y \land y \leq x$ es una relación de equivalencia en A y $\leq$ induce un buen orden en el conjunto cociente $A/\sim$.

Si Γ es cerrada para uniones e intersecciones finitas y sustituciones continuas, entonces las relaciones inversas $\geq_\Gamma$ y $\geq_{\neg\Gamma}$ también están en Γ y $\neg\Gamma$, respectivamente, pues se obtienen de sus inversas como antiimágenes por el homeomorfismo $X \times X \longrightarrow X \times X$ dado por $(x,y) \mapsto (y,x)$. Además podemos definir

$$x <_\Gamma y \leftrightarrow x \leq_\Gamma y \land \neg(x \geq_{\neg\Gamma} y), \qquad x <_{\neg\Gamma} y \leftrightarrow x \leq_{\neg\Gamma} y \land \neg(x \geq_\Gamma y),$$

de modo que, para todo $y \in A$ y todo $x \in X$ se cumple que

$$x \in A \land \phi(x) < \phi(y) \leftrightarrow x <_\Gamma y \leftrightarrow x <_{\neg\Gamma} y.$$

Más aún, si extendemos $\phi : X \longrightarrow \Omega$ haciendo que, sobre $X \setminus A$ tome un valor fijo mayor que cualquier ordinal de $\phi[A]$, podemos definir

$$x \leq^* y \leftrightarrow x \in A \land \phi(x) \leq \phi(y), \qquad x <^* y \leftrightarrow x \in A \land \phi(x) < \phi(y),$$

de modo que ambas relaciones están en Γ.

En efecto, basta tener en cuenta que

$$x \leq^* y \leftrightarrow x \in A \land (x \leq_\Gamma y \lor \neg y \leq_{\neg\Gamma} x), \qquad x <^* y \leftrightarrow x \in A \land \neg y \leq_{\neg\Gamma} x.$$

Recíprocamente, si las relaciones $\leq^*$ y $<^*$ están en Γ, entonces ϕ es una norma en Γ, pues basta definir $x \leq_\Gamma y \leftrightarrow x \leq^* y$, $x \leq_{\neg\Gamma} y \leftrightarrow y \not<^* x$.

Teorema 2.15 *Sea Γ una clase normada definida sobre los espacios polacos, que contenga los conjuntos abiertos cerrados y que sea cerrada para uniones e intersecciones finitas y para sustituciones continuas.*

a) Γ tiene la propiedad de reducción y $\neg\Gamma$ tiene la propiedad de separación.

b) Si existe un conjunto $\mathcal{C}$-universal para $\Gamma(\mathcal{C})$, entonces Γ no tiene la propiedad de separación y $\neg\Gamma$ no tiene la propiedad de reducción.

c) Si Γ es cerrada para intersecciones numerables entonces tiene la propiedad de uniformización numérica y la propiedad de reducción generalizada.

d) Si Γ es cerrada para uniones e intersecciones numerables, entonces $\neg\Gamma$ tiene la propiedad de separación generalizada.

Demostración: a) Sean $A, B \in \Gamma(X)$ y definimos $R = (A \times \{0\}) \cup (B \times \{1\})$. Como la proyección $X \times \omega \longrightarrow X$ es obviamente continua, vemos que $A \times \omega \in \Gamma$, y también $X \times \{0\} \in \Gamma$ (pues es abierto cerrado), así concluimos que

$$A \times \{0\} = (A \times \omega) \cap (X \times \{0\}) \in \Gamma,$$

y análogamente $B \times \{1\} \in \Gamma$, luego $R \in \Gamma(X \times \omega)$.

Por consiguiente, podemos tomar una norma $\phi : R \longrightarrow \Omega$. Definimos los conjuntos A^*, $B^* \subset X$ mediante

$$x \in A^* \leftrightarrow (x, 0) <^* (x, 1), \qquad x \in B^* \leftrightarrow (x, 1) \leq^* (x, 0).$$

Se cumple que $A^*, B^* \in \Gamma$. Por ejemplo, la aplicación $X \longrightarrow (X \times \omega) \times (Y \times \omega)$ dada por $x \mapsto ((x, 0), (x, 1))$ es continua, y A^* es la antiimagen de $<^*$ por dicha aplicación, luego $A^* \in \Gamma$, y análogamente con B^*. Además, es obvio que $A^* \cap B^* = \varnothing$ y, si $x \in A^*$, entonces $(x, 0) \in R$, luego $x \in A$, es decir, $A^* \subset A$ e igualmente $B^* \subset B$. Por último, si $x \in A \cup B$, entonces $(x, 0) \in R$ o bien $(x, 1) \in R$, luego $\phi(x, 0) < \phi(x, 1)$ o bien $\phi(x, 1) \leq \phi(x, 0)$, luego $x \in A^* \cup B^*$.

Esto prueba que Γ tiene la propiedad de reducción, luego $\neg\Gamma$ tiene la propiedad de separación por 1.19.

b) está demostrado en 1.19 d).

c) Tomemos $R \in \Gamma(X \times \omega)$ y sea $\phi : R \longrightarrow \Omega$ una norma en R. Definimos R^* mediante

$$(x, n) \in R^* \leftrightarrow (x, n) \in R \land \bigwedge m \in \omega((x, n) \leq^* (x, m))$$
$$\land \bigwedge m \in \omega((x, n) <^* (x, m) \lor n \leq m)).$$

Veamos que $R^* \in \Gamma(X \times \omega)$. Para ello observamos que R^* es intersección de tres conjuntos, y que los tres están en $\Gamma(X \times \omega)$. Uno es el propio R, otro es

$$\bigcap_{m\in\omega} \{(x,n) \in X \times \omega \mid (x,n) \leq^* (x,m)\},$$

que está en $\Gamma(X \times \omega)$ porque cada uno de los conjuntos de la intersección es la antiimagen de $\leq^*$ por la aplicación continua $X \times \omega \longrightarrow X \times \omega \times X \times \omega$ dada por $(x,n) \mapsto (x,n,x,m)$. El tercero es

$$\bigcap_{m\in\omega} (\{(x,n) \in X \times \omega \mid (x,n) <^* (x,m)\} \cup (X \times (m+1))).$$

En cada unión, el conjunto de la izquierda está en $\Gamma(X \times \omega)$ por ser una antiimagen continua de $<^*$ y el de la derecha por ser una antiimagen continua del conjunto abierto cerrado $m+1$ en ω.

Una expresión alternativa para R^* es:

$$(x,n) \in R^* \leftrightarrow (x,n) \in R \land \phi(x,n) = \mathrm{mín}\{\phi(x,m) \mid (x,m) \in R\}$$
$$\land\ n = \mathrm{mín}\{m \in \omega \mid (x,m) \in R \land \phi(x,m) = \phi(x,n)\}.$$

Es decir, dado $(x,m) \in R$, consideramos todos los pares (x,n) con la misma proyección, y nos quedamos únicamente con aquellos en los que $\phi(x,n)$ toma el valor mínimo. De entre ellos, seleccionamos el menor n posible. Es inmediato entonces que, dado $(x,m) \in R$, existe un único par en R^* de la forma (x,n). Por lo tanto, R^* cumple la definición 1.17.

El resto del teorema se sigue de 1.18 y 1.19. ■

A continuación demostramos que la clase $\mathbf{\Pi}^1_1$ es una clase normada, con lo que, de hecho, satisface todas las hipótesis del teorema precedente. Nos apoyaremos en los resultados de la sección 1.6, si bien en el capítulo siguiente daremos una demostración con técnicas alternativas.

Teorema 2.16 *Existe una norma $\phi : \mathbf{BO} \longrightarrow \omega_1$ (suprayectiva) en $\mathbf{\Pi}^1_1$.*

Demostración: Definimos $\phi(x) = \alpha \leftrightarrow x \in \mathbf{BO}_\alpha$. Vamos a probar que es una norma en $\mathbf{\Pi}^1_1$. Para ello observamos que cada función $f : A \subset \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}$ puede codificarse mediante un elemento de $\mathcal{C}$. Como en la sección anterior, $d : \omega \longrightarrow \mathcal{D}$ es una biyección arbitraria prefijada, y consideramos también la semejanza $\langle\ ,\ \rangle : \omega \times \omega \longrightarrow \omega$. Así, a cada f podemos asignarle la función $x \in \mathcal{C}$ dada por

$$x(\langle m,n\rangle) = 1 \leftrightarrow d(n) \in A \land f(d(n)) = d(m).$$

Llamamos $C \subset \mathcal{C}$ al conjunto de todos los puntos que codifican sucesiones f crecientes respecto del orden usual en $\mathbb{Q}$. Explícitamente:

$$z \in C \leftrightarrow \bigwedge mn_1n_2 \in \omega(z(\langle n,m_1\rangle) = z(\langle n,m_2\rangle) = 1 \rightarrow m_1 = m_2)$$
$$\land \bigwedge n_1n_2m_1m_2(d(n_1) < d(n_2) \land z(\langle n_1,m_1\rangle) = z(\langle n_2,m_2\rangle) = 1$$
$$\rightarrow d(m_1) < d(m_2)).$$

Es fácil ver que C es cerrado, es decir, que si $x \notin C$, entonces, cualquier $y \in \mathcal{C}$ tal que $x|_n = y|_n$ para un n suficientemente grande, cumplirá también que $y \notin C$. Ahora vemos que la relación

$$x \leq_{\Pi^1_1} y \leftrightarrow x, y \in \mathbf{BO} \land \phi(x) \leq \phi(y)$$

es $\mathbf{\Pi}^1_1$, pues $\phi(x) \leq \phi(y)$ equivale a que no existan un $u \in A_x$ y una aplicación $f : A_y \longrightarrow A_x$ que conserve el orden y cuya imagen esté contenida en la sección inicial determinada por u. Por lo tanto:

$$x \leq_{\Pi^1_1} y \leftrightarrow x, y \in \mathbf{BO} \land \neg\bigvee zk(z \in C \land x(k) = 1 \land$$

$$\bigwedge n \in \omega(y(n) = 1 \to \bigvee m \in \omega(d(m) < d(k) \land x(m) = 1 \land z(\langle n, m\rangle) = 1))).$$

Para probar que la relación es $\mathbf{\Pi}^1_1$ basta ver que el conjunto

$$\{(x, y, z, k) \in \mathcal{C}^3 \times \omega \mid z \in C \land x(k) = 1 \land$$

$$\bigwedge n \in \omega(y(n) = 1 \to \bigvee m \in \omega(d(m) < d(k) \land x(m) = 1 \land z(\langle n, m\rangle) = 1))\}$$

es cerrado. Para ello vemos que es intersección de tres conjuntos, uno es el cerrado $\mathcal{C} \times \mathcal{C} \times C \times \omega$, otro el cerrado $\{(x, y, z, k) \in \mathcal{C} \times \mathcal{C} \times \mathcal{C} \times \omega \mid x(k) = 1\}$ y el tercero la intersección

$$\bigcap_{n\in\omega} (\{(x, y, z, k) \in \mathcal{C}^3 \times \omega \mid y(n) = 0\} \cup$$

$$\bigcap_{m\in\omega} \{\{(x, y, z, k) \in \mathcal{C}^3 \times \omega \mid d(m) < d(k) \land x(m) = 1 \land z(\langle n, m\rangle) = 1\}),$$

donde todos los conjuntos definidos explícitamente son abiertos cerrados.

Por otra parte, si $x \in \mathcal{C}$ e $y \in \mathbf{BO}$, la relación $x \in \mathbf{BO} \land \phi(x) \leq \phi(y)$ equivale a la existencia de una aplicación $f : A_x \longrightarrow A_y$ que conserve el orden, es decir,

$$x \leq_{\Sigma^1_1} y \leftrightarrow \bigvee z(z \in C \land \bigwedge n \in \omega(x(n) = 1 \to \bigvee m(y(m) = 1 \land z(\langle n, m\rangle) = 1)),$$

que claramente es $\mathbf{\Sigma}^1_1$, pues es la proyección del subconjunto de $\mathcal{C}^3$ formado por los (x, y, z) que cumplen la afirmación tras $\bigvee z$, que a su vez es intersección del cerrado $\mathcal{C}^2 \times C$ con la intersección de los conjuntos abiertos

$$\{(x, y, z) \in \mathcal{C}^3 \mid x(n) = 0\} \cup \bigcup_{m\in\omega} \{(x, y, z) \in \mathcal{C}^3 \mid y(m) = 1 \land z(\langle n, m\rangle) = 1\}.$$

■

Teorema 2.17 *La clase $\mathbf{\Pi}^1_1$ es normada.*

Demostración: Sea X un espacio polaco y sea $A \in \mathbf{\Pi}^1_1(X)$. Sea Φ una criba cerrada tal que $A = X \setminus C(\Phi)$. Por el teorema 1.58 existe una aplicación $f : X \longrightarrow \mathcal{C}$ medible Borel tal que $A_\alpha(\Phi) = f^{-1}[\mathbf{BO}_\alpha]$. Definimos la norma

$\phi : A \longrightarrow \omega_1$ dada por $\phi(x) = \alpha \leftrightarrow f(x) \in \mathbf{BO}_\alpha$. Equivalentemente, ϕ es la composición de $f : A \longrightarrow \mathbf{BO}$ con la norma definida en la demostración del teorema anterior. La aplicación $f \times f : X \times X \longrightarrow \mathcal{C} \times \mathcal{C}$ es medible Borel, por lo que las antiimágenes de las relaciones $\leq_{\Pi^1_1}$ y $\leq_{\Sigma^1_1}$ definidas en el teorema anterior son $\mathbf{\Pi}^1_1$ y $\mathbf{\Sigma}^1_1$ respectivamente, y es fácil ver que prueban que ϕ es una norma en $\mathbf{\Pi}^1_1$. ■

Más aún:

Teorema 2.18 *Si la clase $\mathbf{\Pi}^1_n$ es normada, también lo es $\mathbf{\Sigma}^1_{n+1}$. En particular, la clase $\mathbf{\Sigma}^1_2$ es normada.*

Demostración: Sea X un espacio polaco y $A \in \mathbf{\Sigma}^1_{n+1}(X)$. Entonces existe $B \in \mathbf{\Pi}^1_n(X \times \mathcal{N})$ tal que $A = \pi_X[B]$. Por hipótesis existe una norma $\phi : B \longrightarrow \Omega$ en $\mathbf{\Pi}^1_n$. Definimos $\psi : A \longrightarrow \Omega$ mediante $\psi(x) = \min\{\phi(x, y) \mid (x, y) \in B\}$. Vamos a probar que ψ es una norma en $\mathbf{\Sigma}^1_{n+1}$. En efecto, si $x_1 \in X$ y $x_2 \in A$, entonces

$$x_1 \leq^* x_2 \leftrightarrow \bigvee y \in \mathcal{N} \bigwedge z \in \mathcal{N}((x_1, y) \in B \wedge \phi(x_1, y) \leq \phi(x_2, z)))$$

$$\leftrightarrow \bigvee y \in \mathcal{N} \neg \bigvee z \in \mathcal{N}\ (x_1, y) \not\leq^* (x_2, z)$$

El conjunto

$$\{(x_1, y, x_2, z) \in X \times \mathcal{N} \times X \times \mathcal{N} \mid (x_1, y) \not\leq^* (x_2, z)\}$$

es $\mathbf{\Sigma}^1_n$ (es el complementario de $\leq^*$), luego su proyección en $X \times \mathcal{N} \times X$ es también $\mathbf{\Sigma}^1_n$, luego el complementario de esta proyección es $\mathbf{\Pi}^1_n$ y su proyección en $X \times X$ es $\mathbf{\Sigma}^1_{n+1}$. Dicha proyección es $\leq^*$. Similarmente,

$$x_1 <^* x_2 \leftrightarrow \bigvee y \in \mathcal{N} \bigwedge z \in \mathcal{N}((x_1, y) \in B \wedge \phi(x_1, y) < \phi(x_2, z)))$$

$$\leftrightarrow \bigvee y \in \mathcal{N} \neg \bigvee z \in \mathcal{N}\ (x_1, y) \not<^* (x_2, z),$$

luego $<^*$ también es $\mathbf{\Sigma}^1_{n+1}$. Esto prueba que ψ es una norma en $\mathbf{\Sigma}^1_{n+1}$. ■

En particular, tenemos que las clases $\mathbf{\Pi}^1_1$ y $\mathbf{\Sigma}^1_2$ tienen la propiedad de uniformización numérica y la propiedad de reducción generalizada, pero no la propiedad de separación, mientras que $\mathbf{\Sigma}^1_1$ y $\mathbf{\Pi}^1_2$ tienen la propiedad de separación generalizada, pero no la propiedad de reducción.

2.4 Uniformización

Introducimos ahora una propiedad que no hemos estudiado para los conjuntos de Borel porque no la poseen:

Definición 2.19 Sea Γ una clase de conjuntos definida sobre los espacios polacos. Diremos que Γ tiene la propiedad de *uniformización* si para todo par de espacios polacos X, Y y todo $A \in \Gamma(X \times Y)$ existe un $B \in \Gamma(X \times Y)$ tal que $B \subset A$ y

$$\bigwedge x \in X (\bigvee y \in Y \ (x, y) \in A \leftrightarrow \overset{1}{\bigvee} y \in Y \ (x, y) \in B).$$

En tal caso se dice que B *uniformiza* a A. (Véase la figura en la página xvi.)

Hemos visto que las clases $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha$ poseen la propiedad de uniformización numérica, que es el caso particular de la propiedad de uniformización en el que $Y = \omega$. Sin embargo, las clases de la jerarquía de Borel no poseen la propiedad de uniformización. En efecto:

Teorema 2.20 *Existe un conjunto cerrado $C \subset \mathcal{N} \times \mathcal{N}$ que no admite una uniformización analítica.*

Demostración: Hemos probado que $\mathbf{\Pi}^1_1$ no posee la propiedad de separación. Así pues, existen conjuntos disjuntos A_1, $A_2 \in \mathbf{\Pi}^1_1(\mathcal{N})$ tales que no existe ningún conjunto de Borel B tal que $A_0 \subset B$ y $A_1 \cap B = \varnothing$. Existen conjuntos cerrados $C_0, C_1 \subset \mathcal{N} \times \mathcal{N}$ tales que

$$\mathcal{N} \setminus A_i = \{x \in \mathcal{N} \mid \bigvee y \in \mathcal{N} \ (x, y) \in C_i\}.$$

La aplicación $x \mapsto 0^\frown x$ es un homeomorfismo entre $\mathcal{N}$ y $B_{\{0\}} \subset \mathcal{N}$ que induce a su vez un homeomorfismo $\mathcal{N} \times \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{N} \times B_{\{0\}} \subset \mathcal{N} \times \mathcal{N}$. Tomando la imagen de C_0 por este homeomorfismo podemos suponer que $C_0 \subset \mathcal{N} \times B_{\{0\}}$, e igualmente que $C_1 \subset \mathcal{N} \times B_{\{1\}}$.

Llamamos $C = C_0 \cup C_1$, y vamos a probar que no puede ser uniformizado por un conjunto analítico. Supongamos, por el contrario, que $B \in \mathbf{\Sigma}^1_1(\mathcal{N} \times \mathcal{N})$ uniformiza a C. Como las proyecciones de C_0 y C_1 son $\mathcal{C} \setminus A_0$ y $\mathcal{C} \setminus A_1$, tenemos que $\pi[C] = \mathcal{N}$. Por lo tanto B es la gráfica de una función $f : \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{N}$ que, por el teorema 1.42 es medible Borel.

Entonces, $D_i = f^{-1}[B_{\{i\}}]$ son dos conjuntos de Borel disjuntos y $A_i \subset D_{1-i}$. En efecto, si $x \in A_i$, entonces $x \in \mathcal{N} \setminus A_{1-i}$, luego existe un $y \in \mathcal{N}$ tal que $(x, y) \in C_{1-i} \subset C$, luego $(x, f(x)) \in C$, pero no puede ser $(x, f(x)) \in C_i$, ya que entonces $x \notin A_i$, luego $(x, f(x)) \in C_{1-i} \subset \mathcal{N} \times B_{\{1-i\}}$, luego $f(x) \in B_{\{1-i\}}$, luego $x \in D_{\{1-i\}}$.

Por lo tanto, D_0 separa a A_0 y A_1, contradicción. ■

En particular, ninguna de las clases $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha$, $\mathbf{\Pi}^0_\alpha$ o incluso $\mathbf{\Sigma}^1_1$ tiene la propiedad de uniformización. La primera candidata a poseerla es $\mathbf{\Pi}^1_1$ y vamos a ver que ése es el caso.

De la demostración del teorema de uniformización para $\mathbf{\Pi}^1_1$ puede abstraerse un argumento general a través del concepto de escala, que introducimos a continuación.

Definición 2.21 Sea A un subconjunto de un espacio polaco X. Una *escala* en A es una sucesión de normas $\{\phi_n\}_{n \in \omega}$ tal que si $\{x_n\}_{n \in \omega}$ es una sucesión en A convergente a un $x \in X$ y las sucesiones $\{\phi_n(x_m)\}_{m \in \omega}$ son finalmente constantes, entonces $x \in A$ y $\phi_n(x) \leq \phi_n(x_m)$, para todo m suficientemente grande.

Si Γ es una clase de conjuntos y cada ϕ_n es una norma en Γ, entonces se dice que la escala es una escala en Γ. Diremos que Γ *tiene escalas* si cada $A \in \Gamma$ tiene una escala en Γ.

Teorema 2.22 *Si* $\mathbf{\Pi}^1_m$ *tiene escalas, entonces tiene la propiedad de uniformización.*

DEMOSTRACIÓN: Sean X e Y espacios polacos y $A \in \mathbf{\Pi}^1_m(X \times Y)$. Por el teorema [T 6.9] existe un cerrado $C \subset \mathcal{N}$ y una biyección continua $f : C \longrightarrow Y$, con lo que $F = (I \times f) : X \times C \longrightarrow X \times Y$ es también una biyección continua.

Así $A' = F^{-1}[A] \in \mathbf{\Pi}^1_m(X \times C) \subset \mathbf{\Pi}^1_m(X \times \mathcal{N})$. Si probamos que existe un conjunto $B' \in \mathbf{\Pi}^1_m(X \times \mathcal{N})$ que uniformiza a A', entonces $B = F[B']$ uniformiza a A y, como F es inyectiva y continua, $B \in \mathbf{\Pi}^1_m(X \times Y)$ por 2.6. Así pues, basta probar la propiedad de uniformización para conjuntos $A \in \mathbf{\Pi}^1_m(X \times \mathcal{N})$.

Sea $\{\phi_n\}_{n\in\omega}$ una escala en $\mathbf{\Pi}^1_m$ definida sobre A y sean $\leq^*_n$ y $<^*_n$ las relaciones correspondientes (todas ellas en $\mathbf{\Pi}^1_m$). Para cada par $(x, y) \in X \times \mathcal{N}$ definimos

$$\psi_n(x, y) = (\phi_0(x, y), y(0), \phi_1(x, y), y(1), \ldots, \phi_n(x, y), y(n)) \in \Omega^{2n+2}.$$

Consideramos la relación en $X \times \mathcal{N}$ dada por

$$(x, y) \preceq^*_n (x', y') \leftrightarrow (x, y) \in A \wedge \psi_n(x, y) \leq \psi_n(x', y'),$$

donde $\leq$ es el orden lexicográfico en Ω^{2n+2}. Más explícitamente:

$$(x, y) \prec^*_n (x', y') \leftrightarrow \bigvee i \leq n \big(\bigwedge j < i \big((x, y) \leq^*_j (x', y') \wedge (x', y') \leq^*_j (x, y)$$

$$\wedge\, y(j) = y'(j)\big) \wedge \big((x, y) <^*_i (x', y') \vee ((x, y) \leq^*_i (x', y') \wedge (x', y') \leq^*_i (x, y)$$

$$\wedge\, y(i) < y'(i))\big)\big),$$

$$(x, y) \preceq^*_n (x', y') \leftrightarrow ((x, y) \prec^*_n (x', y') \vee$$

$$\bigwedge i \leq n((x, y) \leq^*_i (x', y') \wedge (x', y') \leq^*_i (x, y) \wedge y(i) = y'(i))).$$

A partir de estas expresiones es fácil ver que $\preceq^*_n$ y $\prec^*_n$ están en $\mathbf{\Pi}^1_m$. Llamamos

$$B_n = \{(x, y) \in X \times \mathcal{N} \mid \bigwedge z \in \mathcal{N}\ (x, y) \preceq^*_n (x, z)\}.$$

Observemos que el conjunto $C_n = \{(x, y, z) \in X \times \mathcal{N} \times \mathcal{N} \mid (x, y) \preceq^*_n (x, z)\}$ está en $\mathbf{\Pi}^1_m$, pues es la antiimagen de $\preceq^*_n$ por la aplicación continua dada por $(x, y, z) \mapsto (x, y, x, z)$. Esto implica que $B_n \in \mathbf{\Pi}^1_m$, pues su complementario es la proyección del complementario de C_n, luego es $\mathbf{\Sigma}^1_m$. Además, $B_{n+1} \subset B_n \subset A$. Llamamos $B = \bigcap\limits_{n\in\omega} B_n \in \mathbf{\Pi}^1_m$ y vamos a ver que B uniformiza a A.

Obviamente $B \subset A$. Si $(x, y), (x, y') \in B_n$, entonces $(x, y) \preceq^*_n (x, y')$ y $(x, y') \preceq^*_n (x, y)$, luego $\psi_n(x, y) = \psi_n(x, y')$, luego $y|_{n+1} = y'|_{n+1}$. Por lo tanto, si $(x, y), (x, y') \in B$, se cumple que $y = y'$. Así pues, B es la gráfica de una función. Sólo hemos de probar que si $(x, y) \in A$ existe un $z \in \mathcal{N}$ tal que $(x, z) \in B$. Definimos

$$Y_0 = \{y \in \mathcal{N} \mid (x, y) \in A \wedge \bigwedge z \in \mathcal{N}((x, z) \in A \to (x, y) \preceq_0^* (x, z))\},$$

$$Y_{n+1} = \{y \in Y_n \mid (x, y) \in A \wedge \bigwedge z \in \mathcal{N}((x, z) \in B_n \to (x, y) \preceq_{n+1}^* (x, z))\}.$$

Una simple inducción demuestra que $Y_n \neq \varnothing$ y $y \in Y_n \leftrightarrow (x, y) \in B_n$. En efecto, como existe un y tal que $(x, y) \in A$, tomándolo con $\psi_0(x, y)$ mínimo, tenemos que $y \in Y_0 \neq \varnothing$, y claramente $y \in Y_0 \leftrightarrow (x, y) \in B_0$.

Si es cierto para n, tomamos $y \in Y_n$ tal que $\psi_{n+1}(x, y)$ sea mínimo. Así $(x, y) \in A$ y, si $(x, z) \in B_n$, entonces $z \in Y_n$, luego $\psi_n(x, y) \leq \psi_n(x, z)$, luego $(x, y) \preceq_{n+1}^* (x, z)$, luego $y \in Y_{n+1} \neq \varnothing$.

Si $y \in Y_{n+1}$ y $z \in \mathcal{N}$, sea $z' \in \mathcal{N}$ tal que $\psi_{n+1}(x, z')$ sea mínimo. Entonces $(x, z') \in B_{n+1} \subset B_n$ y $(x, z') \preceq_{n+1}^* (x, z)$, luego $(x, y) \preceq_{n+1}^* (x, z') \preceq_{n+1}^* (x, z)$, luego $(x, y) \in B_{n+1}$. El recíproco es trivial.

Si $y_1, y_2 \in Y_n$, entonces $(x, y_1), (x, y_2) \in B_n$, de donde $(x, y_1) \preceq_n^* (x, y_2)$ y $(x, y_2) \preceq_n^* (x, y_1)$, luego $\psi_n(x, y_1) = \psi_n(x, y_2)$ y en particular $y_1|_{n+1} = y_2|_{n+1}$. Sea $z(n)$ el valor común de $y(n)$ para todo $y \in Y_n$. Así tenemos definido un $z \in \mathcal{N}$ tal que si $\{z_n\}_{n\in\omega}$ es una sucesión con $z_n \in Y_n$, se cumple que $z_n|_{n+1} = z|_{n+1}$, luego la sucesión $\{(x, z_n)\}_{n\in\omega}$ converge a (x, z). Además, si $m > n$, se cumple que $z_m, z_n \in Y_n$, por lo que $\phi_n(x, z_m) = \phi_n(x, z_n)$. Esto significa que la sucesión $\{\phi_n(x, z_m)\}_{m\in\omega}$ es finalmente constante. Por definición de escala, esto implica que $(x, z) \in A$, así como que $\phi_n(x, z) \leq \phi_n(x, z_n)$ para todo $n \in \omega$.

Más aún, si $m \leq n$, entonces $\phi_m(x, z) \leq \phi_m(x, z_m) = \phi_m(x, z_n)$, pues $z_m, z_n \in Y_m$. Como además $z|_{n+1} = z_n|_{n+1}$, resulta que $\psi_n(x, z) \leq \psi_n(x, z_n)$, luego $(x, z) \preceq_n^* (x, z_n) \in B_n$, luego $(x, z) \in B_n$ para todo n, luego $(x, z) \in B$. ■

Nota Más adelante necesitaremos la observación siguiente sobre la demostración del teorema anterior. En ella hemos partido de una escala $\{\phi_n\}_{n\in\omega}$ sobre un conjunto $A \in \mathbf{\Pi}_m^1(X \times \mathcal{N})$ y hemos construido aplicaciones ψ_n cuya imagen está en realidad en un conjunto de la forma κ^{2n+2}, para un cierto ordinal κ suficientemente grande. Componiendo ψ_n con la semejanza entre κ^{2n+2} (con el orden lexicográfico) y su ordinal, obtenemos aplicaciones $\chi_n : A \longrightarrow \Omega$ y las relaciones $\preceq_n^*$ y $\prec_n^*$ prueban que son normas en $\mathbf{\Pi}_m^1$. Más aún, la sucesión $\{\chi_n\}_{n\in\omega}$ forma una escala en $\mathbf{\Pi}_m^1$.

En efecto: si $\{(x_k, y_k)\}_{k\in\omega}$ es una sucesión en A que converge a un punto $(x, y) \in X \times \mathcal{N}$ de modo que las sucesiones $\{\chi_n(x_k, y_k)\}_{k\in\omega}$ son finalmente constantes, entonces $\{\psi_n(x_k, y_k)\}_{k\in\omega}$ es finalmente constante, luego, las sucesiones $\{\phi_n(x_k, y_k)\}_{k\in\omega}$ y $\{y_k|_n\}_{k\in\omega}$ son finalmente constantes. Como $\{\phi_n\}_{n\in\omega}$ es una escala, esto implica que $(x, y) \in A$, así como que $\phi_n(x, y) \leq \phi_n(x_k, y_k)$ para todo $k \geq k_n$. Además, tomando k_n suficientemente grande, se cumple también que $y_k|_n = y|_n$. Esto implica que, para k suficientemente grande, $\psi_n(x, y) \leq \psi_n(x_k, y_k)$, luego también $\chi_n(x, y) \leq \chi_n(x_k, y_k)$.

Más aún, la escala $\{\chi_n\}_{n\in\omega}$ cumple (claramente) una propiedad adicional:

Si $\{(x_k, y_k)\}_{k\in\omega}$ es una sucesión en A tal que las sucesiones $\{\chi_n(x_k, y_k)\}_{k\in\omega}$ son finalmente constantes, entonces la sucesión $\{y_k\}_{k\in\omega}$ es convergente. ■

Teorema 2.23 *La clase $\mathbf{\Pi}^1_1$ tiene escalas.*

Demostración: Sea $Z = \{(\beta, \gamma) \in \omega_1 \times \omega_1 \mid \gamma \leq \beta\}$ en el que consideramos el orden lexicográfico:

$$(\beta, \gamma) < (\beta', \gamma') \leftrightarrow \beta < \beta' \vee (\beta = \beta' \wedge \gamma < \gamma').$$

Puesto que todas las secciones iniciales son numerables, el ordinal de Z es ω_1, luego existe una única semejanza $F : Z \longrightarrow \omega_1$.

Fijemos un espacio polaco X y un conjunto $A \in \mathbf{\Pi}^1_1(X)$. Entonces $X \setminus A = S(B)$, donde B es un esquema de Suslin que, según 1.37, podemos tomar abierto, decreciente y con la propiedad de los diámetros. Por el teorema 1.52 tenemos que $X \setminus A = C(\Phi)$, para una cierta criba monótona abierta en X. Así

$$x \in A \leftrightarrow (M_x(\Phi), \preceq) \text{ está bien ordenado.}$$

Fijamos una biyección $d : \omega \longrightarrow \mathcal{D}$ y, para cada $r \in \mathcal{D}$, definimos la criba

$$\Phi_r(s) = \begin{cases} \Phi(s) & \text{si } s \prec r, \\ \varnothing & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

de manera que

$$M_x(\Phi_r) = \{s \in M_x(\Phi) \mid s \prec r\}.$$

Definimos la norma $\phi_n : A \longrightarrow \omega_1$ dada por

$$\phi_n(x) = F(\beta, \gamma), \qquad \beta = \operatorname{ord}(M_x(\Phi), \preceq), \quad \gamma = \operatorname{ord}(M_x(\Phi_{d(n)}), \preceq).$$

Veamos que la relación

$$x \leq^n_{\Pi^1_1} y \leftrightarrow x, y \in A \wedge \phi_n(x) \leq \phi_n(y)$$

es $\mathbf{\Pi}^1_1(X \times X)$. Para ello la expresamos en la forma

$$\begin{aligned} x \leq^n_{\Pi^1_1} y \leftrightarrow (x, y) \in A \times A \wedge (&\operatorname{ord}(M_x(\Phi), \preceq) < \operatorname{ord}(M_y(\Phi), \preceq) \\ &\vee (\operatorname{ord}(M_x(\Phi), \preceq) = \operatorname{ord}(M_y(\Phi), \preceq) \\ &\wedge \operatorname{ord}(M_x(\Phi_{d(n)}), \preceq) \leq \operatorname{ord}(M_y(\Phi_{d(n)}), \preceq))). \end{aligned}$$

Basta probar que son $\mathbf{\Pi}^1_1$ las tres relaciones:

$$\begin{aligned} R_1(x, y) &\leftrightarrow \operatorname{ord}(M_x(\Phi), \preceq) < \operatorname{ord}(M_y(\Phi), \preceq), \\ R_2(x, y) &\leftrightarrow \operatorname{ord}(M_x(\Phi), \preceq) \leq \operatorname{ord}(M_y(\Phi), \preceq), \\ R_3(x, y) &\leftrightarrow \operatorname{ord}(M_x(\Phi_{d(n)}), \preceq) \leq \operatorname{ord}(M_y(\Phi_{d(n)}), \preceq). \end{aligned}$$

(Notemos que entonces $R_2(x, y) \wedge R_2(y, x)$ también será $\mathbf{\Pi}^1_1$, y ésta es la relación que necesitamos para probar que $\leq^n_{\Pi^1_1}$ es $\mathbf{\Pi}^1_1$.)

Recordemos de la prueba del teorema 2.16 que el conjunto $C \subset \mathcal{C}$ de las sucesiones que codifican funciones crecientes $f : A \subset \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}$ es cerrado en $\mathcal{C}$. Así,

$$R_1(x, y) \leftrightarrow \neg \bigvee z \in C \ (z \text{ codifica una } f : M_y(\Phi) \longrightarrow M_x(\Phi))$$
$$\leftrightarrow \neg \bigvee z \in C \ (\bigwedge i \in \omega(y \in \Phi(d(i)) \to \bigvee j \in \omega(x \in \Phi(d(j)) \land z(\langle i, j\rangle) = 1))).$$

Ahora observamos que el conjunto

$$B_i = \{(x, y, z) \in X \times X \times \mathcal{C} \mid \bigvee j \in \omega(x \in \Phi(d(j)) \land z(\langle i, j\rangle) = 1)\}$$

es abierto, el conjunto $(X \times (X \setminus \Phi(d(i))) \times \mathcal{C})$ es cerrado, luego

$$B = (X \times X \times C) \cap \bigcap_{i \in \omega} ((X \times (X \setminus \Phi(d(i))) \times \mathcal{C}) \cup B_i) \subset X \times X \times \mathcal{C}$$

es de Borel, y $R_1 = (X \times X) \setminus \pi_{X \times X}[B]$, luego R_1 es $\mathbf{\Pi}^1_1$.

Para R_2 usamos la equivalencia

$$R_2(x, y) \leftrightarrow \neg \bigvee z \in C \bigvee m \in \omega(d(m) \in M_x(\Phi) \land$$
$$z \text{ codifica una } f : M_y(\Phi) \longrightarrow M_x(\Phi_{d(m)}))$$
$$\leftrightarrow \neg \bigvee z \in C \bigvee m \in \omega(x \in \Phi(d(m)) \land$$
$$\bigwedge i \in \omega(y \in \Phi(d(i)) \to \bigvee j \in \omega(x \in \Phi_{d(m)}(d(j)) \land z(\langle i, j\rangle = 1))))$$

y a partir de aquí se razona como con R_1. El caso de R_3 es similar al de R_2.

Por otra parte, dado $y \in A$, la relación dada por

$$x \leq^n_{\Sigma^1_1} y \leftrightarrow x \in A \land \phi_n(x) \leq \phi_n(y)$$

es equivalente a

$$x \leq^n_{\Sigma^1_1} y \leftrightarrow R_1(x, y) \lor (R_2(x, y) \land R_2(y, x) \land R_3(x, y)).$$

(Notemos que, al suponer $y \in A$, las relaciones $R_1(x, y)$ y $R_2(x, y)$ ya implican que $x \in A$.) A su vez,

$$R_1(x, y) \leftrightarrow \bigvee z \in C \bigvee m \in \omega(d(m) \in M_y(\Phi) \land$$
$$z \text{ codifica una } f : M_x(\Phi) \longrightarrow M_y(\Phi_{d(m)})),$$

que es fácil ver que es $\mathbf{\Sigma}^1_1$, e igualmente con R_2 y R_3. Por lo tanto $\leq^n_{\Sigma^1_1}$ es $\mathbf{\Sigma}^1_1$. Esto prueba que ϕ_n es una norma en $\mathbf{\Pi}^1_1$.

Supongamos ahora que $\{x_k\}_{k\in\omega}$ es una sucesión en A que converge a $x \in X$ y que las sucesiones $\{\phi_n(x_k)\}_{k\in\omega}$ son finalmente iguales a ordinales α_n. Más concretamente, para cada n existe un k_n tal que, si $k \geq k_n$, entonces $\alpha_n = F(\beta_n, \gamma_n)$, donde $\beta_n = \operatorname{ord}(M_{x_k}(\Phi), \preceq)$, $\gamma_n = \operatorname{ord}(M_{x_k}(\Phi_{d(n)}), \preceq)$.

Hemos de probar que $x \in A$ y que $\phi_n(x) \leq \alpha_n$.

En primer lugar observamos que para todo $k \geq \text{máx}\{k_m, k_n\}$ se cumple que $\beta_m = \text{ord}(M_{x_k}(\Phi), \preceq) = \beta_n$, luego en realidad todos los β_n son iguales a un mismo β. No ocurre lo mismo con los γ_n. Veamos que si $d(m), d(n) \in M_x(\Phi)$ y $d(m) \prec d(n)$, entonces $\gamma_m < \gamma_n$.

En efecto, tenemos que $x \in \Phi(d(m)) \cap \Phi(d(n))$. Como la criba es abierta, existe un $k \geq \text{máx}\{k_m, k_n\}$ tal que $x_k \in \Phi(d(m)) \cap \Phi(d(n))$. Esto implica que $d(m) \in M_{x_k}(\Phi_{d(n)})$, luego $M_{x_k}(\Phi_{d(m)})$ es un segmento inicial propio de $M_{x_k}(\Phi_{d(n)})$, por lo que $\gamma_m < \gamma_n$.

De este modo tenemos una aplicación $M_x(\Phi) \longrightarrow \Omega$ (la dada por $d(n) \mapsto \gamma_n$) que conserva el orden, luego $M_x(\Phi)$ está bien ordenado y, por consiguiente, $x \in A$.

Más aún, si $d(n) \in M_x(\Phi)$, entonces la misma aplicación muestra que $M_x(\Phi_{d(n)})$ es semejante a un subconjunto de γ_n, luego $\text{ord}(M_x(\Phi), \preceq) \leq \gamma_n \leq \beta$. Como todos los segmentos iniciales de $M_x(\Phi)$ tienen ordinal $\leq \beta$, ha de ser $\text{ord}(M_x(\Phi), \preceq) \leq \beta$, luego

$$\phi_n(x) = F(\text{ord}(M_x(\Phi), \preceq), \text{ord}(M_x(\Phi_{d(n)}), \preceq)) \leq F(\beta, \gamma_n) = \alpha_n.$$

Esto prueba que la escala que hemos construido es una escala en $\mathbf{\Pi}^1_1$. ■

Más aún:

Teorema 2.24 *Si la clase $\mathbf{\Pi}^1_n$ tiene escalas, también las tiene la clase $\mathbf{\Sigma}^1_{n+1}$. En particular la clase $\mathbf{\Sigma}^1_2$ tiene escalas.*

Demostración: Sea X un espacio polaco y $C \in \mathbf{\Sigma}^1_{n+1}(X)$. Esto significa que existe un $A \in \mathbf{\Pi}^1_n(X \times \mathcal{N})$ tal que $C = \pi_X[A]$. Sea $\{\phi_n\}_{n\in\omega}$ una escala en $\mathbf{\Pi}^1_n$ definida sobre A. Por la nota posterior al teorema 2.22 podemos suponer que tiene la propiedad adicional de que si $\{(x_k, y_k)\}_{k\in\omega}$ es una sucesión en A tal que las sucesiones $\{\phi_n(x_k, y_k)\}_{k\in\omega}$ son finalmente constantes, entonces la sucesión $\{y_k\}_{k\in\omega}$ es convergente. (Tomamos como ϕ_n la norma que en la nota hemos llamado χ_n.)

Por el teorema 2.22, tenemos que $\mathbf{\Pi}^1_n$ tiene la propiedad de uniformización, luego podemos tomar $B \subset A$ en $\mathbf{\Pi}^1_n(X \times \mathcal{N})$ que uniformiza a A. Más concretamente, podemos tomar el conjunto B definido en la prueba de 2.22, es decir, $B = \bigcap\limits_{n\in\omega} B_n$, donde

$$B_n = \{(x, y) \in X \times \mathcal{N} \mid \bigwedge z \in \mathcal{N}\ (x, y) \preceq^*_n (x, z)\}.$$

Definimos $\bar{\phi}_n : C \longrightarrow \Omega$ mediante $\bar{\phi}_n(x) = \phi(x, y)$, donde y es el único elemento de $\mathcal{N}$ tal que $(x, y) \in B$. Vamos a probar que $\{\bar{\phi}_n\}_{n\in\omega}$ es una escala en C.

Para ello consideramos una sucesión $\{x_n\}_{n\in\omega}$ contenida en C y convergente a un $x \in X$, de modo que las sucesiones $\{\bar{\phi}_n(x_k)\}_{k\in\omega}$ sean finalmente constantes, digamos que iguales a ordinales α_n. Para cada $k \in \omega$, sea y_k el único elemento de $\mathcal{N}$ tal que $(x_k, y_k) \in B$. Entonces, $\bar{\phi}_n(x_k) = \phi_n(x_k, y_k)$, luego las sucesiones $\{\phi_n(x_k, y_k)\}_{k\in\omega}$ son finalmente constantes, luego $\{y_k\}_{k\in\omega}$ converge a un $y \in \mathcal{N}$, luego $\{(x_k, y_k)\}_{k\in\omega}$ converge a (x, y). Como $\{\phi_n\}_{n\in\omega}$ es una escala, concluimos que $(x, y) \in A$, así como que $\phi_n(x, y) \leq \alpha_n$. Entonces $x \in C$. Sea $y_0 \in \mathcal{N}$ tal que $(x, y_0) \in B$. Entonces, para cada $n \in \omega$, tenemos que $(x, y_0) \in B_n$, luego $(x, y_0) \preceq_n^* (x, y)$, luego $\bar{\phi}(x) = \phi_n(x, y_0) \leq \phi_n(x, y) \leq \alpha_n$.

Falta probar que cada $\bar{\phi}_n$ es una norma en $\mathbf{\Sigma}^1_{n+1}$. Ahora bien,

$$x_1 \leq^* x_2 \leftrightarrow x_1 \in C \land \bar{\phi}_n(x_1) \leq \bar{\phi}_n(x_2)$$

es equivalente a

$$x_1 \leq^* x_2 \leftrightarrow \bigvee y_1 \in \mathcal{N} \bigwedge y_2 \in \mathcal{N}((x_1, y_1) \in B \land (x_1, y_1) \preceq_n^* (x_2, y_2)).$$

En efecto, si $x_1 \leq^* x_2$, entonces $x_1 \in C$, luego existe un $y_1 \in \mathcal{N}$ tal que $(x_1, y_1) \in B$ y $\bar{\phi}_n(x_1) \leq \bar{\phi}_n(x_2)$ o que significa que, o bien $x_2 \notin C$, en cuyo caso $(x_2, y_2) \notin A$ y se cumple $(x_1, y_1) \preceq_n^* (x_2, y_2)$, o bien $x_2 \in C$, con lo que existe un $y' \in \mathcal{N}$ tal que $(x_2, y') \in B$, y entonces $(x_1, y_1) \leq (x_2, y') \leq (x_2, y_2)$, porque $(x_2, y') \in B_n$.

Recíprocamente, si se cumple el miembro derecho de la equivalencia anterior, la condición $(x_1, y_2) \in B$ implica que $x_1 \in C$. Si $x_2 \notin C$, se cumple trivialmente que $\bar{\phi}(x_1) \leq \bar{\phi}(x_2)$, mientras que si $x_2 \in C$, existe un $y_2 \in \mathcal{N}$ tal que $(x_2, y_2) \in B$, luego, por hipótesis $(x_1, y_1) \preceq_n^* (x_2, y_2)$, luego $\phi(x_1, y_2) \leq \phi(x_2, y_2)$, luego $\bar{\phi}(x_1) \leq \bar{\phi}(x_2)$.

Es claro entonces que $\leq^*$ es una relación $\mathbf{\Sigma}^1_{n+1}$, y lo mismo vale para la relación $<^*$ definida sin más que cambiar $\preceq^*$ por $\prec^*$. ■

En particular, el teorema 2.22 implica que $\mathbf{\Pi}^1_1$ tiene la propiedad de uniformización. No podemos decir lo mismo de $\mathbf{\Sigma}^1_2$ porque no cumple la propiedad d) de dicho teorema. No obstante:

Teorema 2.25 *Si $\mathbf{\Pi}^1_n$ tiene la propiedad de uniformización, entonces $\mathbf{\Sigma}^1_{n+1}$ también la tiene.*

DEMOSTRACIÓN: Sean X e Y espacios polacos y $A \in \mathbf{\Sigma}^1_{n+1}(X \times Y)$. Entonces existe un $B \in \mathbf{\Pi}^1_n(X \times Y \times \mathcal{N})$ tal que $A = p[B]$. Por hipótesis existe un conjunto $C \subset B$ tal que $C \in \mathbf{\Pi}^1_n(X \times Y \times \mathcal{N})$ que uniformiza a B respecto de la primera componente, es decir, que

$$\bigvee yz\ (x, y, z) \in B \leftrightarrow \overset{1}{\bigvee} yz\ (x, y, z) \in C.$$

Es fácil ver que $D = p[C]$ uniformiza a A. ■

Así pues, $\mathbf{\Pi}^1_1$ y $\mathbf{\Sigma}^1_2$ tienen la propiedad de uniformización, mientras que $\mathbf{\Sigma}^1_1$ y $\mathbf{\Pi}^1_2$ no pueden tenerla, porque entonces tendrían en particular la propiedad de uniformización numérica y la propiedad de reducción, cuando sabemos que no la poseen.

Veamos una aplicación:

Teorema 2.26 *Todo conjunto $\mathbf{\Sigma}_2^1$ es unión de $\aleph_1$ conjuntos de Borel.*

DEMOSTRACIÓN: Si A es $\mathbf{\Sigma}_2^1$ en un espacio polaco X, entonces $A = \pi_x[B]$ para cierto $B \in \mathbf{\Pi}_1^1(X \times \mathcal{N})$. Sea $B^* \subset B$ un conjunto $\mathbf{\Pi}_1^1$ que lo uniformice. Por 1.53 sabemos que B^* es unión de $\aleph_1$ conjuntos de Borel, luego A es la unión de sus proyecciones. Ahora bien, la proyección π_X es inyectiva (y continua) sobre B^*, luego las proyecciones son conjuntos de Borel, por 1.43. ■

En particular [AE], el teorema 1.54 es válido para conjuntos $\mathbf{\Sigma}_2^1$. Sucede que la posibilidad de que existan conjuntos $\mathbf{\Sigma}_2^1$ con cardinal $\aleph_1$ es equivalente a la posibilidad de que existan conjuntos $\mathbf{\Pi}_1^1$ con dicho cardinal. En efecto, todo conjunto $\mathbf{\Sigma}_2^1$ es de la forma $A = \pi_x[B]$, donde B es $\mathbf{\Pi}_1^1$ y, uniformizándolo, podemos suponer que tiene el mismo cardinal que A.

2.5 Conjuntos κ-Suslin

Introducimos ahora un concepto que nos permite generalizar o refinar algunos de los resultados que hemos obtenido en las secciones precedentes.

Definición 2.27 Sea κ un ordinal infinito. Un subconjunto A de un espacio polaco X es *κ-Suslin* si es la proyección de un cerrado de $X \times \kappa^\omega$, donde en κ consideramos la topología discreta y en κ^ω la topología producto. Llamaremos S_κ a la clase de los subconjuntos κ-Suslin de los espacios polacos.

Puesto que una biyección entre dos ordinales κ y μ induce un homeomorfismo de κ^ω en μ^ω, es obvio que un conjunto A es κ-Suslin si y sólo si es $|\kappa|$-Suslin, por lo que la definición anterior no pierde generalidad si se restringe al caso en que κ es un cardinal infinito, pero vamos a ver varias caracterizaciones en las que es útil permitir que κ sea un ordinal infinito arbitrario.

Teniendo en cuenta que $\mathcal{N} = \omega^\omega$, el teorema 1.32 implica que los conjuntos $\aleph_0$-Suslin son exactamente los conjuntos $\mathbf{\Sigma}_1^1$.

La prueba del teorema 1.61 se generaliza trivialmente para concluir:

Teorema 2.28 *Si $s \geq 1$, un subconjunto $A \subset \mathcal{N}^s$ es κ-Suslin si y sólo si existe un árbol R en $\omega^s \times \kappa$ tal que*

$$x \in A \leftrightarrow \bigvee f \in \kappa^\omega \bigwedge n \in \omega (x|_n, f|_n) \in R \leftrightarrow R_x \text{ no está bien fundado.}$$

A su vez, el teorema 1.62 implica:

Teorema 2.29 *Todo conjunto $\mathbf{\Sigma}_2^1$ es $\aleph_1$-Suslin.*

(En principio lo tenemos probado para subconjuntos de espacios $\mathcal{N}^s$, pero el hecho de que todos los espacios polacos no numerables sean Borel-isomorfos implica claramente que el resultado vale en general.)

Así pues, los resultados que obtengamos para conjuntos κ-Suslin se pueden aplicar en particular a los conjuntos $\mathbf{\Sigma}_1^1$ y $\mathbf{\Sigma}_2^1$. Empezamos observando un hecho elemental:

Teorema 2.30 *Si κ es un cardinal de cofinalidad no numerable, entonces todo conjunto κ-Suslin A se expresa en la forma $A = \bigcup\limits_{\delta<\kappa} A_\delta$, donde cada A_δ es μ_δ-Suslin, para cierto $\mu_\delta < \kappa$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $C \subset X \times \kappa^\omega$ cerrado tal que $A = p[C]$. Para cada $\delta < \kappa$ infinito sea $A_\delta = p[C \cap (X \times \delta^\omega)]$. Es claro entonces que A_δ es δ-Suslin y todo elemento de A está en algún A_δ. ■

Introducimos ahora algunos conceptos en términos de los cuales expresaremos varias caracterizaciones de los conjuntos κ-Suslin:

Un *esquema de Suslin* de orden κ es una aplicación $F : \kappa^{<\omega} \longrightarrow \mathcal{P}X$. La operación de Suslin de orden κ es la que a cada esquema de Suslin de orden κ le asigna el conjunto

$$S^\kappa(F) = \bigcup_{f\in\kappa^\omega} \bigcap_{n\in\omega} F(f|_n).$$

Un esquema de Suslin F de orden κ en un espacio polaco X es *regular* (respecto de una base numerable $\{B_n\}_{n\in\omega}$) si cumple:

a) Para cada $s \in \kappa^{<\omega}$, el conjunto $F(s)$ es vacío o la clausura de un abierto básico.

b) Si $s \subset t$ son dos elementos de $\kappa^{<\omega}$, entonces $F(t) \subset F(s)$.

c) Si $\ell(s) = n$, entonces el diámetro de $F(s)$ es $\leq 2^{-n+1}$.

Una *semiescala* en un conjunto $A \subset X$ (donde X es un espacio polaco) es una sucesión de normas $\{\phi_n\}_{n\in\omega}$ en A tal que si $\{x_m\}_{m\in\omega}$ es una sucesión en A que converge a un $x \in X$ y todas las sucesiones $\{\phi_n(x_m)\}_{n\in\omega}$ son finalmente constantes, entonces $x \in A$. (Así, toda escala es en particular una semiescala.) Diremos que una semiescala es una λ-*semiescala* si cada una de sus normas toma valores en λ.

Teorema 2.31 *Sea κ un ordinal infinito y X un espacio polaco. Para cada conjunto $A \subset X$ las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

a) A es κ-Suslin.

b) A admite una κ-semiescala.

c) $A = S^\kappa(F)$, donde F es un esquema de Suslin regular de orden κ.

d) $A = S^\kappa(F)$, donde F es un esquema de Suslin cerrado de orden κ.

DEMOSTRACIÓN: a) $\Rightarrow$ b) Suponemos que $A = p[C]$, para cierto cerrado $C \subset X \times \kappa^\omega$. Para cada $x \in A$ elegimos $f_x \in \kappa^\omega$ tal que $(x, f) \in C$. Veamos que esto puede hacerse sin necesidad del axioma de elección. Para ello definimos recurrentemente

$$f_x(n) = \text{mín}\{\alpha < \kappa \mid \bigvee f \in \kappa^\omega((x, f) \in C \wedge f|_n = f_x|_n \wedge f(n) = \alpha)\}.$$

Así, para todo $n \in \omega$ existe un $f \in k^\omega$ tal que $(x, f) \in C$ y $f|_n = f_x|_n$. Esto significa que (x, f_x) es un punto de acumulación de C y, como C es cerrado, $(x, f_x) \in C$.

Definimos $\phi_n(x) = f_x(n)$. Con esto tenemos una sucesión de κ-normas $\{\phi_n\}_{n\in\omega}$. Vamos a probar que son una κ-semiescala. Para ello tomamos una sucesión $\{x_m\}_{m\in\omega}$ contenida en A y convergente a un $x \in X$. Suponemos además que las sucesiones $\{\phi_n(x_m)\}_{m\in\omega}$ son finalmente constantes. Sea $\xi_n = f_{x_m}(n)$ para todo m suficientemente grande y sea $f = \{\xi_n\}_{n\in\omega} \in \kappa^\omega$.

Entonces $\lim\limits_m (x_m, f_{x_m}) = (x, f)$ y, como $(x_m, f_{x_m}) \in C$ y C es cerrado, concluimos que $(x, f) \in C$, luego $x \in A$.

b) $\Rightarrow$ c) Sea $\{\phi_n\}_{n\in\omega}$ una κ-semiescala y fijemos $\pi : \kappa \longrightarrow \omega \times \kappa$ biyectiva. Digamos que $\pi(\xi) = (\pi_1(\xi), \pi_2(\xi))$. Fijemos una base numerable $\{B(n)\}_{n\in\omega}$ del espacio X. Para cada $s \in \kappa^{<\omega}$ con $\ell(s) = n$ definimos $F(s)$ como el conjunto de todos los $x \in X$ tales que:

- $\overline{B(\pi_1(s(0)))} \supset \cdots \supset \overline{B(\pi_1(s(n-1)))}$.
- El diámetro de $B(\pi_1(s(i)))$ es $\leq 2^{-i}$.
- Existe un $y \in A \cap B(\pi_1(s(n-1)))$ tal que
$$\phi_0(y) = \pi_2(s(0)), \ldots, \phi_{n-1}(y) = \pi_2(s(n-1)).$$
- $x \in \overline{B(\pi_1(s(n-1)))}$.

Puesto que las tres primeras condiciones no dependen de x, tenemos que $F(s) = \varnothing$ si falla alguna de ellas y $F(s) = \overline{B(\pi_1(s(n-1)))}$ si se cumplen todas. Es claro que F así definido es un esquema de Suslin regular de orden κ. Vamos a ver que $A = S^\kappa(F)$.

Si $x \in A$, podemos tomar una sucesión $\{B(n_i)\}_{i\in\omega}$ de entornos básicos de x tales que $\overline{B(n_0)} \supset \overline{B(n_1)} \supset \cdots$ y el diámetro de $B(n_i)$ sea $\leq 2^{-i}$. Sea $\xi_i < \kappa$ el único ordinal que cumple $\pi_1(\xi_i) = n_i$, $\pi_2(\xi_i) = \phi_i(x)$ y sea $f = \{\xi_i\}_{i\in\omega}$. Es claro entonces que $x \in \bigcap\limits_{n\in\omega} F(f|_n)$, luego $x \in S^\kappa(F)$.

Supongamos ahora que $x \in S^\kappa(F)$. Entonces existe $f \in \kappa^\omega$ de manera que $x \in \bigcap\limits_{n\in\omega} F(f|_n)$. Entonces, por definición de F se cumple que

$$\overline{B(\pi_1(f(0)))} \supset \overline{B(\pi_1(f(1)))} \supset \overline{B(\pi_1(f(2)))} \supset \cdots$$

además x esta en todos estos cerrados, cuyo diámetro tiende a cero, y existe un $y_n \in A \cap B(\pi_1(f(n-1)))$ tal que $\phi_0(y_n) = \pi_2(f(0)), \ldots, \phi_{n-1}(y_n) = \pi_2(f(n-1))$.

Claramente $\lim\limits_n y_n = x$ y para todo $n > i$ se cumple que $\phi_i(y_n) = \pi_2(f(i))$, es decir, las sucesiones $\{\phi_i(y_n)\}_{n\in\omega}$ son finalmente constantes. Por definición de semiescala concluimos que $x \in A$.

La implicación c) $\Rightarrow$ d) es trivial.

d) $\Rightarrow$ a). Suponemos que $A = S^\kappa(F)$ para cierto esquema de Suslin cerrado de orden κ. Sea

$$C = \{(x,f) \in X \times \kappa^\omega \mid x \in \bigcap_{n\in\omega} F(f|_n)\}.$$

Se cumple que C es cerrado, pues si $(x,f) \notin C$ existe un n tal que $x \notin F(f|_n)$, luego $(x,f) \in (X \setminus F(f|_n)) \times B(f|_n) \subset (X \times \kappa^\omega) \setminus C$. Además

$$x \in p[C] \leftrightarrow \bigvee f \in \kappa^\omega (x,f) \in C \leftrightarrow \bigvee f \in \kappa^\omega\ x \in \bigcap_{n\in\omega} F(f|_n) \leftrightarrow x \in S^\kappa(F) = A.$$

Por lo tanto A es κ-suslin. ■

Veamos las propiedades básicas de la clase S_κ:

Teorema 2.32 *Si κ es un ordinal infinito, la clase S_κ es cerrada para sustituciones continuas, para proyecciones desde productos de espacios polacos y para uniones e intersecciones numerables. Además, si $\kappa \leq \mu$, entonces $S_\kappa \subset S_\mu$.*

Demostración: Sea $h : X \longrightarrow Y$ una aplicación continua entre espacios polacos y sea A un conjunto κ-Suslin en Y. Sea $\bar{h} : X \times \kappa^\omega \longrightarrow Y \times \kappa^\omega$ la aplicación dada por $\bar{h}(x,f) = (h(x), f)$, claramente continua. Sea $C \subset Y \times \kappa^\omega$ cuya proyección en Y sea A. Entonces

$$x \in f^{-1}[A] \leftrightarrow f(x) \in A \leftrightarrow \bigvee f \in \kappa^\omega\ (h(x), f) \in C \leftrightarrow \bigvee f \in \kappa^\omega\ \bar{h}(x,f) \in C$$

$$\leftrightarrow \bigvee f \in \kappa^\omega\ (x,f) \in \bar{h}^{-1}[C],$$

luego $f^{-1}[A]$ es la proyección del cerrado $\bar{h}^{-1}[C]$, lo que prueba que es κ-Suslin.

Supongamos ahora que A es un conjunto κ-Suslin en $X \times \mathcal{N}$ y veamos que su proyección en X también lo es. Sabemos que existe un cerrado $C \subset X \times \mathcal{N} \times \kappa^\omega$ cuya proyección es A. Fijamos una biyección $\omega \times \kappa \longrightarrow \kappa$, la cual induce un homeomorfismo $h : \omega^\omega \times \kappa^\omega \longrightarrow \kappa^\omega$, el cual a su vez induce un homeomorfismo $\bar{h} : X \times \mathcal{N} \times \kappa^\omega \longrightarrow X \times \kappa^\omega$ dado por $\bar{h}(x,y,f) = (x, h(y,f))$. Consideremos el cerrado $C' = \bar{h}[C] \subset X \times \kappa^\omega$.

Entonces

$$x \in p[A] \leftrightarrow \bigvee y \in \mathcal{N}\ (x,y) \in A \leftrightarrow \bigvee y \in \mathcal{N} \bigvee f \in \kappa^\omega\ (x,y,f) \in C$$

$$\bigvee y \in \mathcal{N} \bigvee f \in \kappa^\omega\ (x, h(y,f)) \in C' \leftrightarrow \bigvee f' \in \kappa^\omega\ (x,f') \in C',$$

luego $p[A]$ es la proyección del cerrado C' y, por consiguiente, es κ-Suslin.

Seguidamente supongamos que A es un conjunto κ-Suslin en $X \times Y$ y veamos que su proyección en X también lo es. Para ello tomamos $h : \mathcal{N} \longrightarrow Y$ continua y suprayectiva, que a su vez induce $\bar{h} : X \times \mathcal{N} \longrightarrow X \times Y$ también continua y suprayectiva. Hemos probado que $\bar{h}^{-1}[A]$ es κ-Suslin en $X \times \mathcal{N}$, luego su proyección en X es κ-Suslin por el caso ya probado, pero es claro que dicha proyección es la misma que la de A.

Sea $\{A_n\}_{n\in\omega}$ una familia de conjuntos κ-Suslin en un espacio polaco X. Sea $C_n \subset X \times \kappa^\omega$ un cerrado cuya proyección sea A_n. Definimos

$$C = \{(x, f) \in X \times \kappa^\omega \mid \bigwedge n \in \omega\ (x, f_n) \in C_n\},$$

donde $f_n(m) = f(\langle m, n\rangle)$. Se trata de un cerrado, pues si $(x, f) \notin C$, existe un $n \in \omega$ tal que $(x, f_n) \notin C_n$. Como la aplicación $(x, f) \mapsto (x, f_n)$ es continua, la antiimagen por esta aplicación de $(X \times \kappa^\omega) \setminus C_n$ es un entorno abierto U de (x, f) tal que $U \subset (X \times \kappa^\omega) \setminus C$. Ahora basta observar que

$$x \in \bigcap_{n\in\omega} A_n \leftrightarrow \bigwedge n \in \omega \bigvee f \in \kappa^\omega\ (x, f) \in C_n$$

$$\leftrightarrow \bigvee f \in \kappa^\omega \bigwedge n \in \omega\ (x, f_n) \in C_n \leftrightarrow \bigvee f \in \kappa^\omega\ (x, f) \in C,$$

luego la intersección es la proyección de C y es, por consiguiente, κ-Suslin.

El argumento para tratar las uniones numerables es el mismo que se emplea en el teorema siguiente para las uniones de cardinal κ. La única diferencia es que al considerar cardinal κ se hace una elección no numerable (al escoger los cerrados que determinan los conjuntos κ-Suslin) y se requiere el axioma de elección.

Si $\kappa \leq \mu$, entonces κ^ω es cerrado en μ^ω, luego $X \times \kappa^\omega$ es cerrado en $X \times \mu^\omega$, luego todo cerrado $C \subset X \times \kappa^\omega$ es también cerrado en $X \times \mu^\omega$, y su proyección es la misma, luego todo conjunto κ-Suslin es también μ-Suslin. ■

Otras propiedades requieren el axioma de elección:

Teorema 2.33 (AE) *Sea κ un cardinal infinito. La clase S_κ es cerrada para uniones de cardinal κ, el operador de Suslin S^κ y sustituciones de Borel.*

Demostración: Sea $\{A_\alpha\}_{\alpha<\kappa}$ una familia de conjuntos κ-Suslin en un espacio polaco X. Para cada uno de ellos escogemos un cerrado $C_\alpha \subset X \times \kappa^\omega$ cuya proyección sea A_α. Sea

$$C = \{(x, f) \in X \times \kappa^\omega \mid (x, f') \in C_{f(0)}\},$$

donde $f'(n) = f(n + 1)$. Claramente C es cerrado y

$$x \in \bigcup_{\alpha<\kappa} A_\alpha \leftrightarrow \bigvee \alpha < \kappa \bigvee f \in \kappa^\omega\ (x, f) \in C_\alpha$$

$$\leftrightarrow \bigvee f \in \kappa^\omega\ (x, f') \in C_{f(0)} \leftrightarrow \bigvee f \in \kappa^\omega\ (x, f) \in C,$$

luego la unión es κ-Suslin.

Sea $F : \kappa^{<\omega} \longrightarrow \mathcal{P}X$ un esquema de Suslin cuya imagen esté en $S_\kappa(X)$, es decir, para cada $s \in \kappa^{<\omega}$ podemos elegir un cerrado $C_s \subset X \times \kappa^\omega$ cuya proyección es $F(s)$. Entonces

$$x \in S^\kappa(F) \leftrightarrow \bigvee f \in \kappa^\omega \bigwedge n \in \omega\ x \in F(f|_n)$$

$$\leftrightarrow \bigvee f \in \kappa^\omega \bigwedge n \in \omega \bigvee g \in \kappa^\omega\ (x, g) \in C_{f|_n}$$

$$\leftrightarrow \bigvee fg \in \kappa^\omega \bigwedge n \in \omega\ (x, g_n) \in C_{f|_n},$$

donde, como en el teorema anterior, $g_n(m) = g(\langle n, m\rangle)$.

Definimos

$$C = \{(x, f, g) \in X \times \kappa^\omega \times \kappa^\omega \mid \bigwedge n \in \omega \ (x, g_n) \in C_{f|_n}\}.$$

Se comprueba sin dificultad que C es cerrado, luego $S^\kappa(F)$ es la proyección de un cerrado en $X \times (\kappa \times \kappa)^\omega$, y considerando el homeomorfismo $\kappa^\omega \times \kappa^\omega \longrightarrow \kappa^\omega$ inducido por una biyección $\kappa \times \kappa \longrightarrow \kappa$ es fácil obtener un cerrado en $X \times \kappa^\omega$ con la misma proyección, luego $S^\kappa(F)$ es κ-Suslin.

Finalmente, si $f : X \longrightarrow Y$ es una aplicación de Borel entre espacios polacos y $A \subset Y$ es κ-Suslin, podemos expresarlo como $S^\kappa(F)$ para un esquema de Suslin cerrado de orden κ. Es fácil ver entonces que $f^{-1}[A] = S^\kappa(F')$, donde $F'(s) = f^{-1}[F(s)]$ es un esquema de Suslin de Borel. Puesto que todo conjunto de Borel es analítico, luego $\aleph_0$-Suslin, luego κ-Suslin, tenemos que F' es un esquema de Suslin $S_\kappa(X)$, y entonces $f^{-1}[A] \in S_\kappa(X)$, pues ya hemos probado que la clase S_κ es cerrada para el operador S^κ. ■

Podemos mejorar la caracterización de los conjuntos de Suslin en términos de semiescalas:

Definición 2.34 Una *buena semiescala* en un conjunto $A \subset X$ (donde X es un espacio polaco) es una sucesión de normas $\{\phi_n\}_{n\in\omega}$ en A tal que si $\{x_m\}_{m\in\omega}$ es una sucesión en A y todas las sucesiones $\{\phi_n(x_m)\}_{n\in\omega}$ son finalmente constantes, entonces $\{x_m\}_{m\in\omega}$ converge a un punto $x \in A$.

Teorema 2.35 *Sea κ un cardinal infinito. Si un subconjunto de un espacio polaco admite una κ-semiescala, entonces admite una buena κ-semiescala.*

Demostración: Fijemos una biyección $\pi : \kappa \times \omega \longrightarrow \kappa$. Sea X un espacio polaco y $A \subset X$ un conjunto con una κ-semiescala $\{\phi_n\}_{n\in\omega}$. Sea $\{B_n\}_{n\in\omega}$ una base de X. Para cada $x \in X$ y cada $i \in \omega$, sea $q(x, i)$ el mínimo natural tal que $x \in B_{q(x,i)}$ y el diámetro de $B_{q(x,i)}$ es $\leq 2^{-i}$.

Definimos $\psi_n(x) = \pi(\phi_n(x), q(x, n))$. De este modo, si $\{x_m\}_{m\in\omega}$ es una sucesión en A tal que las sucesiones $\{\psi_n(x_m)\}_{m\in\omega}$ son finalmente constantes, es claro que las sucesiones $\{\phi_n(x_m)\}_{m\in\omega}$ y $\{q(x_m, n)\}_{m\in\omega}$ son finalmente constantes. Por lo tanto, la sucesión dada está finalmente en un mismo abierto $B_{q(x_m,n)}$ de diámetro $\leq 2^{-n}$, lo que implica que es de Cauchy, luego converge a un $x \in X$, que en realidad cumplirá $x \in A$ porque $\{\phi_n\}_{n\in\omega}$ es una semiescala.

Esto prueba que $\{\psi_n\}_{n\in\omega}$ es una buena κ-semiescala en A. ■

Con esto podemos probar un resultado relevante:

Teorema 2.36 (Kunen-Martin) *Sea κ un cardinal infinito, sea X un espacio polaco no numerable, sea $P \subset X$ y sea $<$ una relación bien fundada en P que, como subconjunto de X^2, sea κ-Suslin. Entonces el rango asociado $\rho : P \longrightarrow \Omega$ toma imágenes en un ordinal $< \kappa^+$.*

Demostración: Sea T el árbol en X formado por las sucesiones finitas decrecientes respecto de $<$, que claramente está bien fundado. Más aún, una simple inducción sobre $x \in P$ demuestra que si $(x_0, \ldots, x_{n-1}, x) \in T$, entonces $\rho(x) = \rho_T(x_0, \ldots, x_{n-1}, x)$, donde ρ_T es el rango asociado a T. En efecto,

$$\rho(x) = \sup\{\rho_P(y) + 1 \mid y < x\} = \sup\{\rho_T(x_0, \ldots, x_{n-1}, x, y) + 1 \mid y < x\}$$

$$= \rho_T(x_0, \ldots, x_{n-1}, x).$$

En particular

$$\sup\{\rho_P(x) + 1 \mid x \in P\} = \sup\{\rho_T(x) + 1 \mid x \in P\} = \rho_T(\varnothing).$$

Por lo tanto, basta probar que $\rho_T(\varnothing) < \kappa^+$. Para ello definiremos un árbol bien fundado S en κ y una aplicación $\sigma : T \longrightarrow S$ que conserva la inclusión estricta. Es claro entonces (por inducción en T) que $\rho_T(t) \leq \rho_S(\sigma(t))$, luego $\|\rho_T(\varnothing)\| \leq \|\rho_S(\varnothing)\| < \kappa^+$.

Para construir S y σ consideramos una buena κ-semiescala $\{\psi_n\}_{n\in\omega}$ definida sobre $>$, es decir, sobre $\{(x, y) \in P^2 \mid x > y\}$. Notemos que esto significa que, dada cualquier sucesión $\{(x_m, y_m)\}_{m\in\omega}$ de pares con $x_m > y_m$ tal que las sucesiones $\{\psi_n(x_m, y_m)\}_{m\in\omega}$ sean finalmente constantes, entonces existen x, $y \in P$ tales que $x_m \to x$, $y_m \to y$, $x > y$.

Definimos una aplicación $\sigma : T \longrightarrow \kappa^{<\omega}$ con el criterio ilustrado por el esquema siguiente:

	ψ_0	ψ_1	ψ_2	$\cdots$
(x_0, x_1)	1	4	9	
(x_1, x_2)	2	3	8	
(x_2, x_3)	5	6	7	
$\vdots$				

Concretamente, definimos $\sigma(\varnothing) = \varnothing$, $\sigma(x_0) = (0)$, $\sigma(x_0, x_1) = (0, \psi_0(x_0, x_1))$,

$$\sigma(x_0, x_1, x_2) = (0, \psi_0(x_0, x_1), \psi_0(x_1, x_2), \psi_1(x_1, x_2), \psi_1(x_0, x_1))$$

$$\sigma(x_0, x_1, x_2, x_3) = (0, \psi_0(x_0, x_1), \psi_0(x_1, x_2), \psi_1(x_1, x_2), \psi_1(x_0, x_1),$$

$$\psi_0(x_2, x_3), \psi_1(x_2, x_3), \psi_2(x_2, x_3), \psi_2(x_1, x_2), \psi_2(x_0, x_1)),$$

y así sucesivamente. Por ejemplo, el esquema indica que en la sexta posición de $\sigma(x_0, x_1, x_2, x_3)$ (empezando a contar en 0) debe ser $\psi_1(x_2, x_3)$.

Definimos $S = \{s \in \kappa^{<\omega} \mid \bigvee t \in T \ s \subset \sigma(t)\}$. Es claro que S es un árbol y que σ conserva la inclusión estricta de sucesiones. Sólo falta probar que S está bien fundado. En caso contrario existe una sucesión estrictamente creciente $\{s_m\}_{m\in\omega}$ en S. Completándola podemos suponer que $\ell(s_m) = m$, y entonces contiene intercalada una sucesión estrictamente creciente $\{\sigma(t_m)\}_{m\in\omega}$, donde también podemos suponer que $\ell(t_m) = m$. Más explícitamente, tenemos

$$\sigma(x_0^0, x_1^0) \subset \sigma(x_0^1, x_1^1, x_2^1) \subset \sigma(x_0^2, x_1^2, x_2^2, x_3^2) \subset \cdots$$

Esto se traduce en que las columnas del diagrama siguiente son constantes:

$$\begin{array}{llllll}
\psi_0(x_0^0,x_1^0) & & & & & \\
\psi_0(x_0^1,x_1^1) & \psi_0(x_1^1,x_2^1) & \psi_1(x_1^1,x_2^1) & \psi_1(x_0^1,x_1^1) & & \\
\psi_0(x_0^2,x_1^2) & \psi_0(x_1^2,x_2^2) & \psi_1(x_1^2,x_2^2) & \psi_1(x_0^2,x_1^2) & \psi_0(x_2^2,x_3^2) & \psi_1(x_2^2,x_3^2) \ \cdots
\end{array}$$

Esto implica que para un n y j fijos la sucesión $\{\psi_n(x_j^m, x_{j+1}^m)\}_{m\in\omega}$ es finalmente constante. Según hemos indicado, esto implica que existe $x_j = \lim\limits_m x_j^m$ y se cumple que $x_j > x_{j+1}$, en contradicción con que $<$ está bien fundada. ■

En particular el teorema anterior se aplica a los conjuntos $\mathbf{\Sigma}_1^1$ y $\mathbf{\Sigma}_2^1$. Concretamente:

Teorema 2.37 *Sea X un espacio polaco no numerable, sea $P \subset X$ y $<$ una relación bien fundada en P que, como subconjunto de X^2, sea $\mathbf{\Sigma}_1^1$ (resp. $\mathbf{\Sigma}_2^1$). Entonces el rango asociado $\rho : P \longrightarrow \Omega$ toma imágenes en un ordinal $< \omega_1$ (resp. $< \omega_2$).*

En particular obtenemos de nuevo que un espacio polaco no numerable no admite un buen orden $\mathbf{\Delta}_1^1$, como ya habíamos concluido a partir de 2.13, y ahora sabemos además que si admite un buen orden $\mathbf{\Delta}_2^1$ necesariamente $2^{\aleph_0} = \aleph_1$.

El axioma de elección nos da una curiosa caracterización de los conjuntos $\aleph_n$-Suslin, para $n < \omega$:

Teorema 2.38 (Martin) (AE) *Si $0 < n < \omega$, un subconjunto de un espacio polaco es $\aleph_n$-Suslin si y sólo si es unión de $\aleph_n$ conjuntos de Borel.*

Demostración: Una implicación es trivial: los conjuntos de Borel son $\aleph_n$-Suslin y las uniones de $\aleph_n$ conjuntos $\aleph_n$-Suslin son $\aleph_n$-Suslin. No perdemos generalidad si trabajamos en $\mathcal{N}$. Razonaremos por inducción sobre n. Sea $A \subset \mathcal{N}$ un conjunto $\aleph_n$-Suslin y sea T un árbol en $\omega \times \aleph_n$ tal que $A = p[T]$.

Para cada $\gamma < \aleph_n$ sea $T^\gamma = T \cap (\omega \times \gamma)^{<\omega}$. Entonces $A = \bigcup\limits_{\gamma<\aleph_n} p[T^\gamma]$, pues si $x \in A$, existe un $f \in \aleph_n^\omega$ tal que $(x, f) \in [T]$, pero $f \in \gamma^\omega$ para algún $\gamma < \aleph_n$.

Como $\gamma^\omega \cong |\gamma|^\omega$, es claro que $p[T^\gamma]$ es $\aleph_{n-1}$-Suslin. Si $n = 1$ entonces $p[T^\gamma]$ es $\mathbf{\Sigma}_1^1$, luego es unión de $\aleph_1$ conjuntos de Borel por 2.26 y si $n > 1$ entonces $p[T^\gamma]$ es unión de $\aleph_{n-1}$ conjuntos de Borel por hipótesis de inducción. En ambos casos A queda expresado como unión de $\aleph_n$ conjuntos de Borel. ■

Resultados similares sin el axioma de elección tienen que enunciarse en términos del concepto de conjunto γ-Borel:

2.6 Conjuntos γ-Borel

Definición 2.39 Si X es un espacio polaco y $\gamma \geq \omega$ es un ordinal, la γ-álgebra de Borel $B_\gamma(X)$ es la menor subálgebra de subconjuntos de X que contiene a los abiertos y que es cerrada para uniones de menos de γ elementos, es decir, tal que si $\{A_\delta\}_{\delta<\epsilon}$ con $\epsilon < \gamma$ es una familia de elementos de $B_\gamma(X)$, entonces $\bigcup\limits_{\delta<\epsilon} A_\delta \in B_\gamma(X)$, y obviamente lo mismo vale entonces para intersecciones.

Los elementos de $B_\gamma(X)$ se llaman conjuntos γ-Borel de X. Así B_γ es una clase de conjuntos definida sobre todos los espacios polacos, aunque es trivial sobre los numerables.

Es obvio que si γ no es un cardinal entonces $B_\gamma = B_{\gamma^+}$, pero resulta útil manejar la definición para ordinales arbitrarios. Claramente $B_{\omega+1} = B_{\aleph_1}$ es la clase de los conjuntos de Borel usuales.

Teorema 2.40 *Si $\gamma > \omega$, entonces la clase B_γ es cerrada para sustituciones de Borel, para $\bigwedge n \in \omega$ y para $\bigvee n \in \omega$.*

Demostración: Sea $f : X \longrightarrow Y$ una aplicación medible Borel y sea B'_γ el conjunto de los $A \in B_\gamma(Y)$ tales que $f^{-1}[A] \in B_\gamma(X)$. Claramente B'_γ es una γ-álgebra que contiene a los abiertos (pues claramente $B_{\omega+1}(X) \subset B_\gamma(X)$), luego $B'_\gamma = B_\gamma(Y)$.

Si $B \in B_\gamma(X \times \omega)$, por la parte ya probada cada $B_n \in B_\gamma(X)$, luego $\bigwedge n \in \omega\, B = \bigcap\limits_{n\in\omega} B_n \in B_\gamma(X)$. El caso de $\bigvee n$ es idéntico. ■

La relación general entre los conjuntos de Suslin y los de Borel es la dada por el teorema siguiente:

Teorema 2.41 *Sea X un espacio producto y γ un cardinal infinito. Si $A \subset X$ es γ-Suslin entonces A es unión de γ^+ conjuntos γ^+-Borel, luego es $\gamma^+ + 1$-Borel. Si $\operatorname{cf}\gamma > \omega$, entonces A es unión de γ conjuntos $\gamma + 1$-Borel.*

Demostración: Vamos a considerar primero el caso en que $\operatorname{cf}\gamma > \omega$. No perdemos generalidad si suponemos que $A \subset \mathcal{N}$. Sea T un árbol en $\omega \times \gamma$ tal que $A = p[T]$. Para cada $\eta < \gamma$, consideramos el árbol $T^\eta = T \cap (\omega \times \eta)^{<\omega}$, de modo que

$$A = \bigcup_{\eta<\gamma} p[T^\eta],$$

donde hemos usado la hipótesis sobre la cofinalidad de γ. Basta probar que cada $A_\eta = p[T^\eta]$ es $\gamma + 1$-Borel. Tenemos que

$$x \in A_\eta \leftrightarrow T^\eta_x \text{ no está bien fundado.}$$

Notemos que $|\eta^{<\omega}| < \gamma$, por lo que la altura de un árbol en $\eta^{<\omega}$ tiene que ser menor que γ. Para cada $s \in \eta^{<\omega}$ y cada $\alpha < \gamma$, sea

$$B^s_\alpha = \{x \in \mathcal{N} \mid T^\eta_x/s \text{ está bien fundado y } \|T^\eta_x/s\| < \alpha\},$$

donde $T^\eta_x/s = \{t \in \gamma^{<\omega} \mid s^\frown t \in T^\eta_x\}$ y $\|T^\eta_x/s\|$ es la altura del árbol, es decir, el rango de $\varnothing$. Aquí entendemos que $B^s_0 = \{x \in \mathcal{N} \mid s \notin T^\eta_s\}$, que es un cerrado. (Notemos que $s \notin T^\eta_s$ equivale a que $T^\eta_x/s = \varnothing$ y no tiene definida la altura.) Veamos por inducción sobre α que B^s_α es γ-Borel. Para ello observamos que

$$B^s_\alpha = \bigcap_{\delta<\eta} \bigcup_{\beta<\alpha} B^{s^\frown\delta}_\beta.$$

En efecto, $x \in B^s_\alpha$ si y sólo si para cada $\delta < \eta$, o bien $s^\frown\delta \notin T^\eta_x$, o bien el árbol $T^\eta_x/(s^\frown\delta)$ está bien fundado y tiene altura menor que $\|T^\eta_s/s\|$. Si los conjuntos $B^{s^\frown\delta}_\beta$ son γ-Borel por hipótesis de inducción, lo mismo vale para B^s_α.

Ahora definimos

$$C_\alpha = \{x \in \mathcal{N} \mid T^\eta_x \text{ está bien fundado con } \|T^\eta_x\| < \alpha \vee$$
$$\bigvee s \in \eta^{<\omega}(T^\eta_x/s \text{ está bien fundado con } \|T^\eta_x/s\| = \alpha)\}.$$

Así

$$\mathcal{N} \setminus A_\eta = \bigcap_{\alpha<\gamma} C_\alpha.$$

En efecto, si $x \in \mathcal{N} \setminus A_\eta$, entonces T^η_x está bien fundado, luego, dado $\alpha < \gamma$, o bien $\|T^\eta_x\| < \alpha$, o bien $\|T_x\| \geq \alpha$, en cuyo caso existe un $s \in T^\eta_x$ de rango α, lo cual equivale a que $\|T^\eta_x/s\| = \alpha$. En cualquier caso $x \in C_\alpha$. Recíprocamente, si $x \in A_\eta$ entonces T^η_x no está bien fundado, luego, para cada $s \in \eta^{<\omega}$, o bien T^η_x/s no está bien fundado, o bien lo está con altura $\alpha_s < \gamma$. En el primer caso tomamos $\alpha_s = 0$. La aplicación $\eta^{<\omega} \longrightarrow \gamma$ no puede ser suprayectiva, luego hay un $\alpha < \gamma$ tal que $x \notin C_\alpha$.

Finalmente observamos que C_α es γ-Borel, pues

$$C_\alpha = B^\varnothing_\alpha \cup \bigcup_{s\in\eta^{<\omega}} (B^s_{\alpha+1} \setminus B^s_\alpha).$$

Por lo tanto, A_η es $\gamma + 1$-Borel.

Si no suponemos que $\operatorname{cf}\gamma > \omega$ el argumento es una simplificación del que hemos dado: no tomamos ningún $\eta < \gamma$, con lo que en toda la prueba hay que hacer $\eta = \gamma$ y α puede tomar cualquier valor $\alpha < \gamma^+$. En este contexto los B^s_α son γ^+-Borel, al igual que los C_α. ■

Ahora generalizamos el teorema de Lusin 1.38:

Teorema 2.42 *Sea γ un cardinal infinito y A, B dos conjuntos γ-Suslin disjuntos en un espacio polaco. Entonces existe un conjunto $\gamma+1$-Borel C que los separa, es decir, $A \subset C$ y $B \cap C = \varnothing$.*

Demostración: No perdemos generalidad si trabajamos en $\mathcal{N}$. Observemos en general que si

$$A = \bigcup_{i\in I} A_i, \qquad B = \bigcup_{j\in J} B_j$$

y el conjunto C_{ij} separa A_i de B_j, entonces $C = \bigcup_{i\in I}\bigcap_{j\in J} C_{ij}$ separa A de B.

Supongamos que los conjuntos dados A y B no se pueden separar por un conjunto $\gamma+1$-Borel. Sean T y S árboles en $\omega\times\gamma$ tales que $A = p[T]$ y $B = p[S]$. Entonces

$$A = \bigcup_{t\in\omega,\delta<\gamma} p[T_{(t,\delta)}], \quad B = \bigcup_{s\in\omega,\eta<\gamma} p[S_{(s,\eta)}],$$

donde $T_{(t,\delta)} = \{u \in T \mid u(0) = (t, \delta)\}$.

Si cada conjunto $p[T_{(t,\delta)}]$ pudiera separarse de cada $p[S_{(s,\eta)}]$ por un conjunto $\gamma+1$-Borel, entonces el conjunto C que separa a A y B según el razonamiento precedente sería también $\gamma+1$-Borel, luego existen (t_0,δ_0), (s_0,η_0) tales que $p[T_{(t_0,\delta_0)}]$ y $p[S_{(s_0,\eta_0)}]$ no se pueden separar por un conjunto $\gamma+1$-Borel. Necesariamente $t_0 = s_0$, pues en caso contrario $C = \{x \in \mathcal{N} \mid x(0) = t_0\}$ los separaría. Similarmente,

$$p[T_{(t_0,\delta_0)}] = \bigcup_{t\in\omega,\delta<\gamma} p[T_{(t_0,t,\delta_0,\delta)}], \quad p[S_{(t_0,\eta_0)}] = \bigcup_{s\in\omega,\eta<\gamma} p[T_{(t_0,s,\eta_0,\eta)}],$$

luego existen t_1,δ_1 y s_1,η_1 tales que $p[T_{(t_0,t_1,\delta_0,\delta_1)}]$ y $p[T_{(t_0,s_1,\eta_0,\eta_1)}]$ no se pueden separar por un conjunto $\gamma+1$-Borel. Nuevamente concluimos que $s_1 = t_1$. Razonando de este modo obtenemos por recurrencia sucesiones $x = (t_n) \in \mathcal{N}$, $\delta = (\delta_n) \in \gamma^\omega$, $\eta = (\eta_n) \in \gamma^\omega$ tales que

$$\bigwedge n \in \omega \ ((x|_n, \delta|_n) \in T \wedge (x|_n, \eta|_n) \in S),$$

pero esto implica que $x \in A \cap B$, contradicción. ■

Notemos que de aquí se deduce el teorema de Lusin 1.38 sin más que tomar $\gamma = \aleph_0$. La generalización correspondiente del teorema de Suslin afirma que si un conjunto y su complementario son ambos γ-Suslin, entonces ambos son $\gamma+1$-Borel.

Capítulo III

Teoría de la recursión

Para poner de manifiesto la naturaleza esencialmente conjuntista (por oposición a topológica) de muchas cuestiones relacionadas con los conjuntos proyectivos es necesario introducir la teoría efectiva de Kleene (véase la introducción), cuyo núcleo es una extensión de la teoría de la recursión expuesta en el capítulo VII de [L]. Concretamente, allí definimos los conceptos de función recursiva $f : \omega^n \longrightarrow \omega$ y de relación n-ádica recursiva en ω, y ahora vamos a introducir los conceptos de función recursiva $f : \mathcal{N}^n \longrightarrow \mathcal{N}$ y de relación n-ádica recursiva en $\mathcal{N}$. No obstante, para tratar conjuntamente con los conceptos originales y los nuevos, será conveniente considerar relaciones y funciones en "espacios producto" de la forma $X^{rs} = \omega^r \times \mathcal{N}^s$.

Dedicamos este capítulo a extender de este modo los conceptos de la teoría de la recursión y en el capítulo siguiente los aplicaremos a la teoría descriptiva de conjuntos.

Recordemos en primer lugar los conceptos básicos de la teoría de la recursión. En la sección 7.1 de [L] introdujimos las funciones recursivas $f : \omega^n \longrightarrow \omega$, que informalmente son aquellas funciones para las que existe un algoritmo capaz de calcular la imagen de cualquier elemento de ω^n en un tiempo finito. Una relación n-ádica (es decir, un subconjunto $R \subset \omega^n$) es recursiva si y sólo lo es su función característica, lo cual equivale a que exista un algoritmo que decida en un tiempo finito si cualquier elemento dado de ω^n cumple o no la relación.

Una caracterización útil de estos conceptos es la dada por los teoremas [L 7.11] y [L 7.12], según los cuales las relaciones y funciones recursivas son las relaciones y funciones Δ_1. Recordemos lo que esto significa: si $\mathcal{L}_a$ es el lenguaje de la aritmética [L 5.1], llamamos fórmulas Δ_0 a las fórmulas de $\mathcal{L}_a$ (sin descriptores) cuyos cuantificadores están todos acotados, es decir, que son de la forma $\bigwedge x \leq y$ o $\bigvee x \leq y$. Entonces, una relación $R \subset \omega^n$ es recursiva si y sólo si existen fórmulas $\phi(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ y $\psi(x_0, x_1, \ldots, x_n)$, de tipo Δ_0, tales que

$$R(a_1, \ldots, a_n) \leftrightarrow \bigvee m \in \omega\, \omega \vDash \phi[m, a_1, \ldots a_n] \leftrightarrow \bigwedge m \in \omega\, \omega \vDash \psi[m, a_1, \ldots a_n].$$

Equivalentemente, la relación R es tanto Σ_1 (está definida por una fórmula aritmética de tipo Σ_1, es decir, de la forma $\bigvee x\, \phi(x)$, con ϕ de tipo Δ_0) como Π_1 (está definida por una fórmula aritmética de tipo Π_1, es decir, de la forma $\bigwedge x\, \psi(x)$, con ψ también Δ_0).

En el caso de las funciones hay que tener en cuenta que $f : \omega^n \longrightarrow \omega$ es Δ_1 si y sólo si es una relación Σ_1 (véanse las observaciones tras [L 5.29]), por lo que f es recursiva si y sólo si existe una fórmula Δ_0 tal que

$$f(a_1, \ldots, a_n) = a \leftrightarrow \bigvee m \in \omega \ \omega \vDash \phi[m, a_1, \ldots, a_n, a].$$

Más en general, en la sección 7.3 de [L] definimos las funciones recursivas parciales, que son funciones parciales $f : \omega^n \longrightarrow \omega$ (donde "función parcial" significa que su dominio no es necesariamente ω^n, sino un subconjunto, que incluso podría ser vacío) con la propiedad de que existe un algoritmo que, partiendo de un $x \in \omega^n$, termina calculando $f(x)$ en un tiempo finito si es que está definido, o bien no termina el cálculo en caso contrario (lo cual no nos permite saber en un tiempo finito si el cálculo terminará más adelante o si la función f no está definida en x).

En la primera sección probaremos algunos resultados adicionales sobre funciones y relaciones recursivas en ω^n y a continuación pasaremos al caso de los espacios producto X^{rs}.

3.1 Funciones y relaciones recursivas

El teorema siguiente es una ligera generalización de [L 7.5]:

Teorema 3.1 *Si $R \subset \omega^{n+1}$ y $f : \omega^n \longrightarrow \omega$ son recursivas, también lo son las relaciones*

$$S(x) \leftrightarrow \bigvee m \leq f(x)\ R(m, x), \qquad T(x) \leftrightarrow \bigwedge m \leq f(x)\ R(m, x),$$

así como la función $g(x) = \mu m \leq f(x)\ R(m, x)$.

En efecto, las funciones características de S y T resultan de componer con f las funciones características de las relaciones definidas en [L 7.5], luego son recursivas. Igualmente, la función g resulta de componer con f la función que en [L 7.5] se define como f.

También es útil el siguiente resultado elemental sobre definición de funciones por casos:

Teorema 3.2 *Si $f_1, \ldots, f_{m+1} : \omega^n \longrightarrow \omega$ y $R_1, \ldots, R_m \subset \omega^n$ son recursivas, también lo es la función $f : \omega^n \longrightarrow \omega$ dada por:*

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \textit{si } R_1(x), \\ f_2(x) & \textit{si } \neg R_1(x) \land R_2(x), \\ \ \vdots & \\ f_m(x) & \textit{si } \neg R_1(x) \land \cdots \land \neg R_{m-1}(x) \land R_m(x), \\ f_{m+1}(x) & \textit{si } \neg R_1(x) \land \cdots \land \neg R_m(x). \end{cases}$$

DEMOSTRACIÓN: Consideramos las relaciones recursivas

$$S_1 = R_1, \quad S_2 = \neg R_1 \wedge R_2, \quad \ldots \quad S_m = \neg R_1 \wedge \cdots \wedge \neg R_{m-1} \wedge R_m,$$

$$S_{m+1} = \neg R_1 \wedge \cdots \wedge \neg R_m.$$

Entonces

$$f(x) = f_1(x)\chi_{S_1}(x) + \cdots + f_{m+1}(x)\chi_{S_{m+1}}(x)$$

es recursiva. ■

Notemos que si las relaciones $R_1, \ldots, R_m$ del teorema anterior son mutuamente excluyentes, la función f se reduce a

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{si } R_1(x), \\ \vdots & \\ f_m(x) & \text{si } R_m(x), \\ f_{m+1}(x) & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Por ejemplo, la función

$$\text{máx}\{m, n\} = \begin{cases} n & \text{si } m \leq n, \\ m & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

es recursiva.

Definición 3.3 (Biyecciones canónicas) Si consideramos en $\omega \times \omega$ el *orden canónico* dado por

$$(m, n) \leq (m', n') \leftrightarrow \text{máx}\{m, n\} < \text{máx}\{m', n'\} \vee$$

$$(\text{máx}\{m, n\} = \text{máx}\{m', n'\} \wedge (n < n' \vee (n = n' \wedge m \leq m'))),$$

con esta ordenación, $\omega \times \omega$ es semejante a ω, y la semejanza es única. La representaremos por $\langle\ ,\ \rangle_2 : \omega \times \omega \longrightarrow \omega$.

A su vez, podemos definir $\langle n_0, n_1, n_2\rangle_3 = \langle\langle n_0, n_1\rangle_2, n_2\rangle_2$, con lo que tenemos una biyección canónica $\langle\ \rangle_3 : \omega^3 \longrightarrow \omega$.

En general, definiendo inductivamente

$$\langle n_0, \ldots, n_{k-1}\rangle_k = \big\langle\langle n_0, \ldots, n_{k-2}\rangle_{k-1}, n_{k-1}\big\rangle_2$$

obtenemos biyecciones canónicas $\langle\ \rangle_k : \omega^k \longrightarrow \omega$.

De este modo, un mismo número natural codifica unívocamente un par de números naturales, o una terna, etc. Más aún, podemos definir una biyección $\langle\ \rangle_\infty : \omega^{<\omega} \longrightarrow \omega$ del modo siguiente: si $s \in \omega^k$ con $k \neq 0$, definimos

$$\langle s\rangle_\infty = \langle k - 1, \langle s\rangle_k\rangle_2 + 1,$$

y completamos la definición con $\langle\varnothing\rangle_\infty = 0$.

Salvo que haya posibilidades de confusión suprimiremos el subíndice en las biyecciones canónicas $\langle\ \rangle$.

Teorema 3.4 *El buen orden canónico en ω^2 dado por es una relación recursiva en ω^4. La semejanza $\langle\ ,\ \rangle_2 : \omega^2 \longrightarrow \omega$ es recursiva, al igual que las funciones $n_0^2, n_1^2 : \omega \longrightarrow \omega$ que cumplen $n = \langle n_0^2, n_1^2 \rangle_2$.*

DEMOSTRACIÓN: La recursividad del buen orden es inmediata (pues está definido por una fórmula Δ_0). Observemos que $\langle m, n\rangle_2$ es el número de pares anteriores a (m, n) respecto del buen orden canónico. Si $k = \text{máx}\{m, n\}$, es claro que los k^2 pares de $k \times k$ son anteriores a (m, n), tras los cuales vienen

$$(0, k), (1, k), \ldots, (k - 1, k), (k, 0), (k, 1), \ldots, (k, k).$$

Es claro entonces que

$$\langle m, n\rangle_2 = \begin{cases} n^2 + m & \text{si } m < n, \\ m^2 + m + n & \text{si } m \geq n, \end{cases}$$

luego se trata de una función recursiva. Por último,

$$n_0^2 = \mu k \leq n \bigvee r \leq n\ n = \langle k, r\rangle_2\,, \quad n_1^2 = \mu k \leq n \bigvee r \leq n\ n = \langle r, k\rangle_2\,.$$

■

Más en general:

Teorema 3.5 *Para cada $k \in \omega$, la biyección canónica $\langle\ \rangle_k : \omega^k \longrightarrow \omega$ es recursiva, al igual que lo son las funciones $n_i^k : \omega^3 \longrightarrow \omega$ que cumplen $n = \langle n_0^k, \ldots, n_{k-1}^k \rangle_k$.*

DEMOSTRACIÓN: La recursividad de las biyecciones canónicas es inmediata, pues se definen por composición a partir de $\langle\ \rangle_2$. Ahora definimos por recurrencia

$$f(n, 0) = n, \quad f(n, r + 1) = f(n, r)_0^2,$$

de modo que

$$n_i^k = \begin{cases} f(n, k \dot{-} (i + 1))_1^2 & \text{si } i < k, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

■

No podemos decir que la biyección canónica $\langle\ \rangle_\infty : \omega^{<\omega} \longrightarrow \omega$ es recursiva porque no hemos definido el concepto de función recursiva sobre $\omega^{<\omega}$, pero sí que es recursiva su restricción a cada ω^r, así como la función

$$\ell(n) = \begin{cases} (n \dot{-} 1)_0^2 + 1 & \text{si } n > 0, \\ 0 & \text{si } n = 0, \end{cases}$$

que nos da la longitud de la sucesión s tal que $\langle s\rangle_\infty = n$, y también la función $n_i^\infty : \omega^2 \longrightarrow \omega$ que nos da el elemento i-ésimo de la sucesión codificada por n. En efecto,

$$n_i^\infty = \begin{cases} ((n \dot{-} 1)_1^2)_i^{\ell(n)} & \text{si } n > 0, \\ 0 & \text{si } n = 0. \end{cases}$$

Las funciones y relaciones elementales que podemos definir sobre sucesiones finitas se corresponden a través de esta codificación con funciones y relaciones recursivas. Por ejemplo:

$m \subset n \leftrightarrow \ell(m) \leq \ell(n) \land \bigwedge i < \ell(m)\ m_i = n_i,$

$m \perp n \leftrightarrow \neg m \subset n \land \neg n \subset m,$

Para probar la recursividad de la concatenación definimos

$$\begin{cases} f(0,s,t) = \big\langle (s-1)^2_1, ((t-1)^2_1)_0 \big\rangle_2, \\ f(k+1,s,t) = \big\langle f(k,s,t), ((t-1)^2_1)_{k+1} \big\rangle_2, \end{cases}$$

$$s^\frown t = \begin{cases} t & \text{si } s = 0, \\ s & \text{si } s \neq 0 \land t = 0, \\ \langle \ell(s) + \ell(t) - 1, f(\ell(t), s, t) \rangle_2 + 1 & \text{si } s \neq 0 \neq t. \end{cases}$$

Es fácil ver que $\ell(s^\frown t) = \ell(s) + \ell(t)$ y, si $i < \ell(s)$, entonces $(s^\frown t)_i = s_i$, mientras que si $\ell(s) \leq i < \ell(t)$, entonces $(s^\frown t)_{\ell(s)+i} = t_i$.

3.2 Conjuntos semirrecursivos y recursivos en espacios producto

En [L 7.27] definimos que un conjunto $R \subset \omega^n$ es semirrecursivo si es Σ_1, es decir, si y sólo si existe una fórmula $\phi(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ de tipo Δ_0 tal que

$$R(a_1, \ldots, a_n) \leftrightarrow \bigvee m \in \omega\, \omega \vDash \phi[m, a_1, \ldots a_n].$$

Por consiguiente, un conjunto es recursivo si y sólo si tanto él como su complementario son semirrecursivos. Ahora vamos a generalizar estos conceptos a subconjuntos de los espacios producto $X^{rs} = \omega^r \times \mathcal{N}^s$.

Consideramos a $X^{10} = \omega$ como un espacio topológico discreto que tiene por base a los conjuntos $B^{10}_n = \{n\}$, mientras que $X^{01} = \mathcal{N}$, con la topología usual, tiene por base a los conjuntos

$$B^{01}_n = \{x \in \mathcal{N} \mid \bigwedge i < \ell(n)\ x(i) = n_i\}$$

o, equivalentemente, si para cada $x \in \mathcal{N}$ y cada $n \in \omega$ definimos

$$\bar{x}(n) = \langle x|_n \rangle \in \omega,$$

de modo que para cada $i < n$ se cumple $\bar{x}(n)_i = x(i)$, tenemos que

$$B^{01}_n = \{x \in \mathcal{N} \mid \bar{x}(\ell(n)) = n\}.$$

Por consiguiente, una base de X^{rs} con la topología producto está formada por los conjuntos

$$B^{rs}_n = B^{10}_{n^{r+s}_0} \times \cdots \times B^{10}_{n^{r+s}_{r-1}} \times B^{01}_{n^{r+s}_r} \times \cdots \times B^{01}_{n^{r+s}_{r+s-1}}.$$

Notemos que los conjuntos B_n^{10} y B_n^{01} según esta definición coinciden con los definidos previamente. Cuando no se preste a confusión escribiremos B_n en lugar de B_n^{rs}, de modo que $\{B_n\}_{n\in\omega}$ es una base numerable del espacio producto X^{rs}.

Definición 3.6 Sea X un espacio producto. Diremos que $A \subset X$ es *semirrecursivo* si $A = \varnothing$ o bien existe una función $x : \omega \longrightarrow \omega$ recursiva tal que $A = \bigcup\limits_{n\in\omega} B_{x(n)}$.

Observaciones Los conjuntos semirrecursivos son abiertos (y podemos concebirlos como la versión efectiva del concepto de "abierto"). Más precisamente, son uniones de abiertos básicos con la restricción adicional de que éstos pueden enumerarse a través de una función recursiva. En el caso en que $X = \omega$, tenemos que $B_{x(n)} = \{x(n)\}$, por lo que $A = x[\omega]$ y así, los conjuntos semirrecursivos no vacíos son simplemente las imágenes de las funciones recursivas. Por esta razón se llaman también conjuntos *recursivamente enumerables,* pero este nombre ya no es adecuado en el caso general.

Resulta, pues, que si $A \subset \omega$ es semirrecursivo y $n \in A$, tenemos un algoritmo que en un tiempo finito nos confirma que, en efecto, $n \in A$ (sólo tenemos que ir calculando $x(0), x(1), x(2), \ldots$ y esperar a que aparezca n en la sucesión. Sin embargo, si $n \notin A$ no tenemos, en principio, ningún criterio que nos permita comprobarlo.

Algo similar sucede con los subconjuntos semirrecursivos $A \subset \mathcal{N}$. Si $a \in A$ es recursivo como función $a : \omega \longrightarrow \omega$, entonces podemos calcular cualquier sucesión $a|_{\ell(x(n))}$ y comprobar si $\bar{a}(\ell(x(n))) = x(n)$, es decir, si $a \in B_{x(n)}$. Por lo tanto, si vamos comprobando sucesivamente si $a \in B_{x(0)}$, $a \in B_{x(1)}$, etc., en un tiempo finito podremos concluir que, en efecto, $a \in A$. En cambio, si $a \notin A$ no tenemos, en principio, ninguna forma de comprobarlo. ■

Enseguida demostraremos que la definición anterior generaliza a la que ya teníamos para subconjuntos de ω^r, pero para ello conviene demostrar antes algunas propiedades básicas de los conjuntos semirrecursivos. Necesitamos una definición:

Diremos que una aplicación $f : X^{rs} \longrightarrow X^{r's'}$ es *trivial* si sus funciones coordenadas son proyecciones, es decir, si

$$f(n_1, \ldots, n_r, x_1, \ldots, x_s) = (n_{j_1}, \ldots, n_{j_{r'}}, x_{k_1}, \ldots, x_{k_{s'}}).$$

Teorema 3.7 *Sea X un espacio producto.*

a) $\varnothing$ y X son conjuntos semirrecursivos.

b) Todo $A \subset \omega^r$ recursivo es semirrecursivo.

c) Todo abierto básico B_n es semirrecursivo.

d) $\{(n,x) \in \omega \times X \mid x \in B_n\}$ es semirrecursivo.

e) La clase de los conjuntos semirrecursivos es cerrada para sustituciones triviales, conjunciones, disyunciones $\bigwedge k \leq n$, $\bigvee k \leq n$ y $\bigvee k \in \omega$.

DEMOSTRACIÓN: a) $\varnothing$ es semirrecursivo por definición, mientras que X lo es porque $X = \bigcup\limits_{n\in\omega} B_n$.

b) Consideramos la función recursiva $f : \omega \longrightarrow \omega$ dada por

$$f(m) = \chi_A(m_0^r, \ldots, m_{r-1}^r).$$

Así $f(m) = 1 \leftrightarrow \{(m_0^r, \ldots, m_{r-1}^r)\} = B_m \subset A$.

Si $A = \varnothing$ ya sabemos que es semirrecursivo. En caso contrario tomamos $m_0 \in \omega$ tal que $f(m_0) = 1$. Entonces la función

$$g(m) = \begin{cases} m & \text{si } f(m) = 1, \\ m_0 & \text{si } f(m) = 0, \end{cases}$$

es recursiva y $A = \bigcup\limits_{m\in\omega} B_{g(m)}$ es semirrecursivo.

c) $B_n = \bigcup\limits_{m\in\omega} B_{c_n(m)}$, donde c_n es la función constantemente igual a n.

d) Consideramos la función recursiva $f(n) = \left\langle n, n_0^{r+s}, \ldots, n_{r+s-1}^{r+s}\right\rangle_{r+s+1}$. Así $B_{f(n)}^{r+1,s} = \{n\} \times B_n^{rs}$ y

$$\{(n, x) \in \omega \times X \mid x \in B_n\} = \bigcup_{n\in\omega} B_{f(n)}.$$

e) Consideremos dos conjuntos semirrecursivos

$$P = \bigcup_{n\in\omega} B_{x(n)}, \qquad Q = \bigcup_{n\in\omega} B_{y(n)},$$

con x, y recursivas. Definimos

$$z(n) = \begin{cases} x(k) & \text{si } n = 2k, \\ y(k) & \text{si } n = 2k+1. \end{cases}$$

Es fácil ver que z es recursiva (pues $d(n) = \mu k \leq n\,(2k \leq n \land n < 2k+2)$ es recursiva) y $P \lor Q = \bigcup\limits_{n\in\omega} B_{z(n)}$.

Definimos las funciones recursivas:

$$[m, n] = \begin{cases} m & \text{si } n \subset m, \\ n & \text{si } m \subset n, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

$$f(n,m) = \begin{cases} 0 \quad \text{si } n_0^{r+s} \neq m_0^{r+s} \lor \cdots \lor n_{r-1}^{r+s} \neq m_{r-1}^{r+s} \lor n_r^{r+s} \perp m_r^{r+s} \lor \cdots \lor n_{r+s-1}^{r+s} \perp m_{r+s-1}^{r+s} \\ \left\langle n_0^{r+s}, \ldots, n_{r-1}^{r+s}, [n_r^{r+s}, m_r^{r+s}], \ldots, [n_{r+s-1}^{r+s}, m_{r+s-1}^{r+s}]\right\rangle_{r+s} + 1 \text{ en otro caso.} \end{cases}$$

Así $B_n \cap B_m = \varnothing$ si $f(n, m) = 0$ y $B_n \cap B_m = B_{f(n,m)-1}$ si $f(n, m) \neq 0$.

Si $P \land Q = \varnothing$, la intersección es trivialmente semirrecursiva. En otro caso sea $B_{n_0} \subset P \land Q$. Consideramos la función recursiva

$$z(n) = \begin{cases} f(x(n_0^2), y(n_1^2)) - 1 & \text{si } f(x(n_0^2), y(n_1^2)) \neq 0, \\ n_0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Entonces $P \wedge Q = \bigcup_{n\in\omega} B_{z(n)}$ es semirrecursivo.

Supongamos ahora que $A = \bigcup_{n\in\omega} B_{y(n)} \subset \omega \times X$ y veamos que $\bigvee n \in \omega\, A$ es semirrecursivo. Podemos suponer que no es vacío y, como es abierto, existe $k \in \omega$ tal que $B_k \subset A$. Basta considerar la función recursiva

$$z(n) = \begin{cases} \langle y(n_1^2)_1^{r+s+1}, \ldots, y(n_1^2)_{r+s}^{r+s+1} \rangle_{r+s} & \text{si } y(n_1^2)_0^{r+s+1} = n_0^2, \\ k & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Así

$$\bigvee n \in \omega (n,x) \in A \leftrightarrow \bigvee nm \in \omega\, (n,x) \in B_{y(m)} \leftrightarrow \bigvee n \in \omega (n_0^2, x) \in B_{y(n_1^2)})$$
$$\leftrightarrow \bigvee n \in \omega\ x \in B_{z(n)}.$$

Por lo tanto $\bigvee n \in \omega\, A = \bigcup_{n\in\omega} B_{z(n)}$ es semirrecursivo.

Veamos ahora la clausura para sustituciones triviales. Consideremos, pues, $f : X \longrightarrow Y$ una aplicación trivial, de modo que $f(a_1, \ldots, a_k) = (a_{i_1}, \ldots, a_{i_{k'}})$ y un conjunto semirrecursivo $A = \bigcup_{n\in\omega} B_{y(n)} \subset Y$, con y recursiva. Entonces

$$(x_1, \ldots, x_k) \in f^{-1}[A] \leftrightarrow (x_{i_1}, \ldots, x_{i_{k'}}) \in A \leftrightarrow \bigvee n \in \omega\, (x_{i_1}, \ldots, x_{i_{k'}}) \in B_{y(n)}$$
$$\leftrightarrow \bigvee n \in \omega\, (x_{i_1} \in B_{y(n)_0^{k'}} \wedge \cdots \wedge x_{i_{k'}} \in B_{y(n)_{k'-1}^{k'}}).$$

Ahora observamos que

$$x_i \in B_{y(n)_j^{k'}} \leftrightarrow \bigvee t \in \omega\, (x_1 \in B_{t_0^k} \wedge \cdots \wedge x_i \in B_{y(n)_j^{k'}} \wedge \cdots \wedge x_k \in B_{t_{k-1}^k})$$
$$\leftrightarrow \bigvee t \in \omega\, (x_1, \ldots, x_k) \in B_{f_{ij}(t,n)},$$

donde

$$f_{ij}(t,n) = \left\langle t_0^k, \ldots, y(n)_j^{k'}, \ldots, t_{k-1}^k \right\rangle_k$$

es una función recursiva.

Sea

$$R_{i,j}(t, n, x_1, \ldots, x_k) \leftrightarrow (x_1, \ldots, x_k) \in B_{f_{ij}(t,n)} \leftrightarrow$$
$$(t, n, x_1, \ldots, x_k) \in \bigcup_{m\in\omega} \{m_0^2\} \times \{m_1^2\} \times B_{f_{ij}(m_0^2, m_1^2)} \leftrightarrow$$
$$(t, n, x_1, \ldots, x_k) \in \bigcup_{m\in\omega} B_{z(m)},$$

siendo

$$z(m) = \langle m_0^2, m_1^2, f_{ij}(m_0^2, m_1^2)_0^k, \ldots, m_{ij}(m_0^2, m_1^2)_{k-1}^k \rangle_{k+2},$$

claramente recursiva, luego el conjunto R_{ij} es semirrecursivo, y

$$(x_1, \ldots, x_k) \in f^{-1}[A] \leftrightarrow \bigvee n \in \omega (\bigvee t \in \omega\, R_{i_1,0}(t_1, n, x_1, \ldots, x_k) \wedge$$
$$\cdots \wedge \bigvee t \in \omega\, R_{i_{k'},k'-1}(t, n, x_1, \ldots, x_k)).$$

Como ya hemos probado que la clase de los conjuntos semirrecursivos es cerrada para conjunciones y $\bigvee n \in \omega$, podemos concluir que $f^{-1}[A]$ es semirrecursivo.

La clausura respecto a $\bigvee k \leq n$ es fácil de probar:

$$\bigvee k \leq n\,(k,x) \in A \leftrightarrow \bigvee k \in \omega(k \leq n \wedge (k,x) \in A)$$

$$\leftrightarrow \bigvee k \in \omega(R(k,n,x) \wedge S(k,n,x)),$$

donde $R(k,n,x) \leftrightarrow k \leq n$ y $S(k,n,x) \leftrightarrow (k,x) \in A$ son conjuntos semirrecursivos por la clausura respecto de sustituciones triviales (y porque los conjuntos recursivos son semirrecursivos). Ahora concluimos que $\bigvee k \leq n\, A$ es semirrecursivo de nuevo por la clausura respecto de conjunciones y $\bigvee k \in \omega$.

Finalmente probamos la clausura respecto a $\bigwedge k \leq n$. Para ello tomamos $A = \bigcup\limits_{n\in\omega} B_{y(n)} \subset \omega \times X$. Tenemos que

$$\bigwedge k \leq n\,(k,n) \in A \leftrightarrow \bigwedge k \leq n \bigvee m \in \omega\,(k,x) \in B_{y(m)} \leftrightarrow$$

$$\bigvee t \in \omega \bigwedge k \leq n\,(k,x) \in B_{y(t_k)} \leftrightarrow \bigvee t \in \omega \bigwedge k \leq n\,(y(t_k)_0^{r+s+1} = k \wedge x \in B_{f(t,k)}),$$

donde $f(t,k) = \left\langle y(t_k)_1^{r+s+1}, \ldots, y(t_k)_{r+s}^{r+s+1} \right\rangle_{r+s}$ es recursiva. Por lo tanto

$$\bigwedge k \leq n\,(k,n) \in A \leftrightarrow \bigvee t \in \omega(\bigwedge k \leq n\, y(t_k)_0^{r+s+1} = k \wedge \bigwedge k \leq n\, x \in B_{f(t,k)}).$$

Claramente $R(k,t) \leftrightarrow \bigwedge k \leq n\, y(t_k)_0^{r+s+1} = k$ es una relación recursiva, luego basta probar que el conjunto

$$\{(n,t,x) \mid \bigwedge k \leq n\, x \in B_{f(t,k)}\}$$

es semirrecursivo, pero

$$\bigwedge k \leq n\, x \in B_{f(t,k)} \leftrightarrow$$

$$\bigvee u \in \omega(\bigwedge k \leq n(f(t,k)_0^{r+s} = u_0 \wedge \cdots \wedge f(t,k)_{r-1}^{r+s} = u_{r-1} \wedge$$

$$f(t,k)_r^{r+s} \subset u_r \wedge \cdots \wedge f(t,k)_{r+s-1}^{r+s} \subset u_{r+s-1}) \wedge x \in B_u) \leftrightarrow$$

$$\bigvee u \in \omega(R(u,t,x) \wedge S(u,t,x)),$$

donde ambos conjuntos R y S son semirrecursivos, el primero por ser antiimagen trivial de un conjunto recursivo en ω^2, y el segundo por el apartado d) de este mismo teorema. Como ya hemos probado que la clase de los conjuntos semirrecursivos es cerrada para conjunciones y $\bigvee u \in \omega$, concluimos que el conjunto $\bigwedge l \leq n\, A$ es semirrecursivo. ■

Observemos que la clausura por sustituciones triviales nos permite añadir variables a un conjunto semirrecursivo, o alterar el orden de éstas, sin que por ello deje de ser semirrecursivo.

El teorema siguiente demuestra que los subconjuntos semirrecursivos de ω^r son precisamente los subconjuntos Σ_1, en concordancia con [L 7.27]:

Teorema 3.8 *Un conjunto $A \subset \omega^r$ es semirrecursivo si y sólo si existe un conjunto $R \in \omega^{r+1}$ recursivo tal que $A = \bigvee m \in \omega\, R$.*

Demostración: Supongamos que A es semirrecursivo. Si $A = \varnothing$ basta tomar $R = \varnothing$. En caso contrario, sea $A = \bigcup\limits_{n\in\omega} B_{x(n)}$, con x recursiva. Entonces

$$A(n_1,\ldots,n_r) \leftrightarrow \bigvee m \in \omega\, (n_1,\ldots,n_r) \in B_{x(m)} \leftrightarrow$$

$$\bigvee m \in \omega\, x(m) = \langle n_1,\ldots,n_r\rangle_r \leftrightarrow \bigvee m \in \omega\, R(m, n_1,\ldots,n_r),$$

donde R es claramente recursivo. Recíprocamente, si $A = \bigvee m \in \omega\, R$, entonces A es semirrecursivo por el teorema anterior. ■

En particular tenemos que un subconjunto $A \subset \omega^r$ es recursivo si y sólo si A y $\neg A$ son ambos semirrecursivos. Esto nos sirve para generalizar la definición de conjunto recursivo:

Definición 3.9 Si X es un espacio producto, un conjunto $A \subset X$ es *recursivo* si A y $\neg A$ son ambos semirrecursivos.

En particular, los conjuntos recursivos son abiertos cerrados (y constituyen la versión efectiva de "abierto-cerrado"). En el caso en que $A \subset \omega^r$, ya sabemos que esto equivale a que A sea recursivo en el sentido de [L 7.2], es decir, a que la función característica de A sea recursiva o, lo que es lo mismo, que exista un procedimiento para saber si un $a \in \omega^r$ está o no en A. Según las observaciones posteriores a la definición 3.6, en el caso en que $A \subset \mathcal{N}$ es recursivo, tenemos igualmente que si $a \in \mathcal{N}$ es recursivo como función $a : \omega \longrightarrow \omega$, existe un criterio para decidir si $a \in A$ o bien $a \notin A$.

Veamos las propiedades básicas de los conjuntos recursivos:

Teorema 3.10 *Sea X un espacio producto.*

a) $\varnothing$ y X son conjuntos recursivos.

b) $\{(n, m, x) \in \omega^2 \times \mathcal{N} \mid x(n) = m\}$ es recursivo.

c) Los abiertos básicos B_n son recursivos.

d) $\{(n, x) \in \omega \times X \mid x \in B_n\}$ es recursivo.

e) La clase de los conjuntos recursivos es cerrada para complementos, conjunciones, disyunciones, $\bigvee k \leq n$, $\bigwedge k \leq n$ y sustituciones triviales.

Demostración: a) y e) son evidentes.

b) $x(n) = m \leftrightarrow \bigvee k \in \omega(x \in B_k \wedge n < \ell(k) \wedge k_n = m)$

$$x(n) \neq m \leftrightarrow \bigvee k \in \omega(k \neq m \wedge x(n) = k)$$

Estas equivalencias demuestran que tanto el conjunto dado como su complementario son semirrecursivos.

c) Basta tener en cuenta que el complementario de un abierto básico es una unión finita de abiertos básicos, luego es semirrecursivo.

d) Sabemos que el conjunto dado es semirrecursivo, y su complementario es unión de un número finito de conjuntos de la forma $\{(n,x) \mid x_i \notin B_{n_i^k}\}$, luego basta probar que estos conjuntos son semirrecursivos. Cada uno de ellos es una antiimagen trivial de uno de los conjuntos

$$\{(n,m) \in \omega^2 \mid m \notin B_{n_i^k}\}, \qquad \{(n,x) \in \omega \times \mathcal{N} \mid x \notin B_{n_i^k}\}.$$

El primero es $\{(n,m) \in \omega^2 \mid m \neq n_i^k\}$, claramente recursivo, mientras que el segundo es

$$x \notin B_{n_i^k} \leftrightarrow \bigvee m < \ell(n_i^k)\; x(m) \neq (n_i^k)_m \leftrightarrow$$
$$\bigvee m \in \omega \bigvee t \in \omega (m < \ell(n_i^k) \wedge t \neq (n_i^k)_{m+1} \wedge x(m) = t),$$

claramente semirrecursivo. ■

Ahora generalizamos el teorema 3.8:

Teorema 3.11 *Si X es un espacio producto, un conjunto $A \subset X$ es semirrecursivo si y sólo si existe $R \subset \omega \times X$ recursivo tal que $A = \bigvee n \in \omega\, R$.*

Demostración: Una implicación es evidente. Si A es semirrecursivo (podemos suponer que no es vacío), entonces $A = \bigcup\limits_{n\in\omega} B_{y(m)}$, con y recursiva.

$$A(x) \leftrightarrow \bigvee n \in \omega\, x \in B_{y(n)} \leftrightarrow \bigvee mn \in \omega\, (y(n) = m \wedge x \in B_m)$$
$$\leftrightarrow \bigvee n \in \omega\, (y(n_0^2) = n_1^2 \wedge x \in B_{n_1^2}).$$

Basta probar que el conjunto $S = \{(n,x) \mid x \in B_{n_1^2}\}$ es recursivo. Ahora bien, esto es consecuencia inmediata de las equivalencias siguientes:

$$S(n,x) \leftrightarrow \bigvee m \in \omega (n = n_1^2 \wedge x \in B_m)$$
$$\neg S(n,x) \leftrightarrow \bigvee m \in \omega\, (m = n_1^2 \wedge x \notin B_m)$$

■

Veamos ahora que el conjunto R del teorema anterior puede tomarse, de hecho, en ω^{r+s+1}.

Teorema 3.12 *Un conjunto $A \subset X^{rs}$ es semirrecursivo si y sólo si existe un $B \subset \omega^{r+s+1}$ recursivo tal que*[1]

$$A(n_1,\ldots,n_r,x_1,\ldots,x_s) \leftrightarrow \bigvee m \in \omega\;\; B(m,n_1,\ldots,n_r,\bar{x}_1(m),\ldots,\bar{x}_s(m)).$$

Además podemos exigir que

$$B(m,n_1,\ldots,n_r,\bar{x}_1(m),\ldots,\bar{x}_s(m)) \wedge m \leq m'$$
$$\rightarrow B(m',n_1,\ldots,n_r,\bar{x}_1(m'),\ldots,\bar{x}_s(m')).$$

[1]Así se pone de manifiesto que para comprobar si un elemento $p = (n_1,\ldots,n_r,x_1,\ldots,x_s)$ pertenece a un conjunto semirrecursivo sólo tenemos que ser capaces de calcular las $r+s$-tuplas de números naturales $(n_1,\ldots,n_r,\bar{x}_1(m),\ldots,\bar{x}_s(m))$ (lo cual es posible siempre que las funciones x_i sean recursivas) y hacer sobre ellas una comprobación recursiva (que puede depender también de m, lo cual es redundante cuando $s > 0$, pues m puede recuperarse como $m = \ell(\bar{x}_1(m))$. Si esta comprobación es positiva para un m, tenemos la garantía de que $p \in A$, pero si $p \notin A$, en principio nada nos asegura que podamos llegar a saberlo.

Demostración: Supongamos que A es semirrecursivo (y, sin pérdida de generalidad, no vacío). Entonces $A = \bigcup_{n\in\omega} B_{y(n)}$, con y recursiva. Por tanto

$$A(n_1,\ldots,n_r,x_1,\ldots,x_s) \leftrightarrow \bigvee t\in\omega\ (n_1,\ldots,n_r,x_1,\ldots,x_s)\in B_{y(t)} \leftrightarrow$$
$$\bigvee m\in\omega \bigvee t\leq m\ (n_1 = y(t)_0^{r+s} \land\cdots\land n_r = y(t)_{r-1}^{r+s}$$
$$\land\, y(t)_r^{r+s}\subset \bar{x}_1(m)\land\cdots\land y(t)_{r+s-1}^{r+s}\subset \bar{x}_s(m)).$$

Basta definir

$$B(m,n_1,\ldots,n_r,u_1,\ldots,u_s)\leftrightarrow \bigvee t\leq m(n_1 = y(t)_0^{r+s}\land\cdots\land n_r = y(t)_{r-1}^{r+s}$$
$$\land\, y(t)_r^{r+s}\subset u_1\land\cdots\land y(t)_{r+s-1}^{r+s}\subset u_s).$$

Recíprocamente, si existe B, entonces el conjunto

$$\{(m,n_1,\ldots,n_r,x_1,\ldots,x_s)\mid B(m,n_1,\ldots,n_r,\bar{x}_1(m),\ldots,\bar{x}_s(m))\}$$
$$= \{(m,n_1,\ldots,n_r,x_1,\ldots,x_s)\mid \bigvee u_1\cdots u_s\in\omega(u_1 = \bar{x}_1(m)\land\cdots\land u_s = \bar{x}_s(m)$$
$$\land\, B(m,n_1,\ldots,n_r,u_1,\ldots,u_s))\}$$
$$= \{(m,n_1,\ldots,n_r,x_1,\ldots,x_s)\mid \bigvee u_1\cdots u_s\in\omega(\ell(u_1)=\cdots=\ell(u_s)=m\land$$
$$x_1\in B_{u_1}\land\cdots\land x_s\in B_{u_s}\land B(m,n_1,\ldots,n_r,u_1,\ldots,u_s)\}$$

es claramente semirrecursivo, luego A también lo es. ■

Terminamos la sección con unos resultados técnicos sencillos que nos serán útiles más adelante:

Teorema 3.13 *Si X es un espacio producto, un conjunto $A\subset X$ es semirrecursivo si y sólo si existe un $R\subset\omega$ semirrecursivo tal que*

$$A(x)\leftrightarrow \bigvee m\in\omega(x\in B_m\land R(m)).$$

Demostración: Podemos suponer que $A\neq\varnothing$, con lo que $A = \bigcup_{n\in\omega} B_{x(m)}$, donde x es recursiva. Entonces

$$A(x)\leftrightarrow \bigvee m\in\omega(x\in B_m\land \bigvee n\in\omega\ m = x(n)).$$ ■

Teorema 3.14 *Si X es un espacio producto, un conjunto $A\subset\omega\times X$ es semirrecursivo si y sólo si existe $R\subset\omega^2$ semirrecursivo tal que*

$$A(n,x)\leftrightarrow \bigvee m\in\omega(x\in B_m\land R(n,m)).$$

Demostración: Por el teorema anterior existe un conjunto semirrecursivo $R'\subset\omega$ tal que

$$A(n,x)\leftrightarrow \bigvee u\in\omega((n,x)\in B_u\land R'(u))\leftrightarrow$$
$$\bigvee m\in\omega\,(x\in B_m\land \bigvee u\in\omega(u = \langle n, m_0^{r+s},\ldots,m_{r+s-1}^{r+s}\rangle_{r+s+1}\land R'(u))).$$

y basta tomar

$$R(n,m)\leftrightarrow \bigvee u\in\omega(u = \langle n, m_0^{r+s},\ldots,m_{r+s-1}^{r+s}\rangle_{r+s+1}\land R'(u)).$$ ■

Teorema 3.15 *Si X es un espacio producto, un conjunto $A \subset X \times \mathcal{N}$ es Σ^0_1 si y sólo si existe un conjunto $B \subset X \times \omega^2$ recursivo tal que*

$$A(x, y) \leftrightarrow \bigvee m \in \omega\ B(x, \bar{y}(m), m).$$

Además podemos exigir que

$$B(x, \bar{y}(m), m) \wedge m \leq m' \rightarrow B(x, \bar{y}(m'), m').$$

Demostración: Obviamente, un conjunto que cumpla el enunciado es Σ^0_1. Recíprocamente, si A es Σ^0_1, por 3.13 existe un conjunto $R \subset \omega$ semirrecursivo tal que

$$A(x, y) \leftrightarrow \bigvee m \in \omega\ ((x, y) \in B^{X \times \mathcal{N}}_m \wedge R(m)).$$

Si $X = X^{rs}$, definimos

$$R'(u, v) \leftrightarrow \bigvee m \in \omega\ (m = \langle u^{r+s}_0, \ldots, u^{r+s}_{r+s-1}, v\rangle_{r+s+1} \wedge R(m)).$$

Es claro que R' es Σ^0_1 y

$$A(x, y) \leftrightarrow \bigvee uv \in \omega\ (x \in B^X_u \wedge y \in B^{\mathcal{N}}_v \wedge R'(u, v))$$

Por 3.11 existe un conjunto $R'' \subset \omega^3$ recursivo tal que

$$A(x, y) \leftrightarrow \bigvee nuv \in \omega\ (x \in B^X_u \wedge y \in B^{\mathcal{N}}_v \wedge R''(n, u, v))$$

$$\leftrightarrow \bigvee m \in \omega \bigvee nuv \leq m\ (x \in B^X_u \wedge v \subset \bar{y}(m) \wedge R''(n, u, v)).$$

Definimos

$$B(x, p, m) \leftrightarrow \bigvee nuv \leq m\ (x \in B^X_u \wedge v \subset p \wedge R''(n, u, v)).$$

Claramente B es recursivo y cumple lo pedido. ■

3.3 Funciones recursivas en espacios producto

Generalizamos ahora el concepto de función recursiva, lo que nos dará una versión efectiva del concepto de aplicación continua. Empezamos caracterizando la continuidad en términos del concepto siguiente:

Definición 3.16 Sea $f : X \longrightarrow Y$ una aplicación entre espacios producto. Llamaremos $G^f \subset \omega \times X$ al conjunto dado por $G^f(n, x) \leftrightarrow f(x) \in B^Y_n$.

Observemos que G^f determina completamente a f, pues

$$\{f(x)\} = \bigcap_{G^f(n,x)} B^Y_n.$$

La caracterización de la continuidad es la siguiente:

Teorema 3.17 *Una aplicación $f : X \longrightarrow Y$ entre dos espacios producto es continua si y sólo si G^f es abierto en $\omega \times X$.*

DEMOSTRACIÓN: Si f es continua y $(n, x) \in G^f$, entonces $f(x) \in B_n^Y$, luego existe un $m \in \omega$ tal que $x \in B_m^X \subset f^{-1}[B_n^Y]$, luego $(n, x) \in \{n\} \times B_m^X \subset G^f$, luego G^f es abierto.

Recíprocamente, si G^f es abierto y $x \in f^{-1}[B_n^Y]$, entonces $(n, x) \in G^f$, luego existe un $m \in \omega$ tal que $\{n\} \times B_m^X \subset G^f$, luego $x \in B_m^X \subset f^{-1}[B_n^Y]$, luego $f^{-1}[B_n^Y]$ es abierto y f es continua. ■

A partir de aquí podemos introducir un concepto más general que el de función recursiva:

Definición 3.18 Sea Γ una clase de conjuntos definida sobre los espacios producto.[2] Una aplicación $f : X \longrightarrow Y$ es Γ-*recursiva* si $G^f \in \Gamma$.

Diremos que Γ es una *clase* Σ si contiene a los conjuntos semirrecursivos y es cerrada para conjunciones, disyunciones, $\bigvee k \leq n$, $\bigwedge k \leq n$, $\bigvee k \in \omega$ y sustituciones triviales.

De este modo, la clase de los conjuntos semirrecursivos es la menor clase Σ. Definiremos las funciones recursivas (equivalentes a las funciones continuas en la teoría efectiva) tomando como Γ la clase de los conjuntos semirrecursivos, que son el análogo efectivo de los conjuntos abiertos. Pero antes de considerar este caso particular probaremos algunos hechos generales sobre funciones Γ-recursivas respecto de clases Σ. Empezamos por esta caracterización:

Teorema 3.19 *Sea Γ una clase Σ. Una función $f : X \longrightarrow Y$ entre espacios producto es Γ-recursiva si y sólo si, para todo $A \subset \omega \times Y$ semirrecursivo, el conjunto $A^f \subset \omega \times X$ dado por $A^f(n, x) \leftrightarrow A(n, f(x))$ está en Γ.*

DEMOSTRACIÓN: Si f es Γ-recursiva y A es semirrecursivo, por 3.14 podemos representarlo en la forma

$$A(n, y) \leftrightarrow \bigvee m \in \omega\, (y \in B_m \land R(n, m)),$$

donde $R \subset \omega^2$ es semirrecursivo. Entonces

$$\begin{aligned} A^f(n, x) &\leftrightarrow \bigvee m \in \omega\, (f(x) \in B_m \land R(n, m)) \\ &\leftrightarrow \bigvee m \in \omega\, (G^f(n, x) \land R(n, m)), \end{aligned}$$

luego $A^f \in \Gamma$.

Recíprocamente, si se cumple la condición, consideramos el conjunto recursivo dado por $A(n, y) \leftrightarrow y \in B_n$. Entonces

$$A^f(n, x) \leftrightarrow f(x) \in B_n \leftrightarrow G^f(n, x)$$

luego, $G^f \in \Gamma$ y f es Γ-recursiva. ■

[2]Recordemos que esto significa que Γ asigna a cada espacio producto X una familia $\Gamma(X)$ de subconjuntos de X, aunque, si $A \subset X$ y X se deduce del contexto, escribimos $A \in \Gamma$ en lugar de $A \in \Gamma(X)$.

Para entender qué se esconde bajo la definición técnica de Γ-recursión empezamos observando que basta estudiar las funciones que toman imágenes en ω o en $\mathcal{N}$:

Teorema 3.20 *Sea Γ una clase Σ. Una función $f : X \longrightarrow Y$ es Γ-recursiva si y sólo si lo son sus funciones coordenadas.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_k(x))$. Si f es Γ-recursiva, entonces

$$\begin{aligned} G^{f_i}(n, x) &\leftrightarrow f_i(x) \in B_n \leftrightarrow \bigvee m \in \omega\, (m_i^k = n \land f(x) \in B_m) \\ &\leftrightarrow \bigvee m \in \omega\, (m_i^k = n \land G^f(m, x)), \end{aligned}$$

luego $G^{f_i} \in \Gamma$ y cada f_i es Γ-recursiva.

Si cada f_i es Γ-recursiva, entonces

$$\begin{aligned} G^f(m, x) &\leftrightarrow f(x) \in B_m \leftrightarrow f_1(x) \in B_{m_0^k} \land \cdots \land f_k(x) \in B_{m_{k-1}^k} \\ &\leftrightarrow G^{f_1}(m_0^k, x) \land \cdots \land G^{f_k}(m_{k-1}^k, x) \\ &\leftrightarrow \bigvee n_0 \cdots n_{k-1}(n_0 = m_0^k \land \cdots \land n_{k-1} = m_{k-1}^k \\ &\qquad \land G^{f_1}(n_0, x) \land \cdots \land G^{f_k}(n_{k-1}, x)), \end{aligned}$$

luego $G^f \in \Gamma$ y f es Γ-recursiva. ■

Esto nos lleva a estudiar, en primer lugar, las funciones Γ-recursivas con imagen en ω:

Teorema 3.21 *Sea Γ una clase Σ y X un espacio producto. Una función $f : X \longrightarrow \omega$ es Γ-recursiva si y sólo si su gráfica $G_f \in \Gamma$.*

DEMOSTRACIÓN: Si f es Γ-recursiva, la relación $R(m, n) \leftrightarrow m = n$ es recursiva y

$$f(x) = m \leftrightarrow R(m, f(x)) \leftrightarrow R^f(m, x),$$

luego $G_f = R^f \in \Gamma$ por 3.19.

Si $G_f \in \Gamma$ y $A \subset \omega \times \omega$ es semirrecursivo, entonces

$$\begin{aligned} A^f(n, x) &\leftrightarrow A(n, f(x)) \leftrightarrow \bigvee m \in \omega\, (f(x) = m \land A(n, m)) \\ &\leftrightarrow \bigvee m \in \omega\, ((x, m) \in G_f \land A(n, m)), \end{aligned}$$

luego $A^f \in \Gamma$ y f es Γ-recursiva por 3.19. ■

El caso de funciones con valores en $\mathcal{N}$ se reduce al anterior:

Teorema 3.22 *Sea Γ una clase Σ y X un espacio producto. Una función $f : X \longrightarrow \mathcal{N}$ es Γ-recursiva si y sólo si la función $f^* : \omega \times X \longrightarrow \omega$ dada por $f^*(n, x) = f(x)(n)$ es Γ-recursiva.*

Demostración: Si f es Γ-recursiva, sea $R(u,x) \leftrightarrow x(u_0^2) = u_1^2$, semirrecursiva (por 3.10). Entonces la relación

$$R^f(u,x) \leftrightarrow R(u,f(x)) \leftrightarrow f(x)(u_0^2) = u_1^2$$

está en Γ por 3.19 y

$$f^*(n,x) = m \leftrightarrow f(x)(n) = m \leftrightarrow R^f(\langle n,m\rangle_2, x),$$

luego $G_{f^*} \in \Gamma$ y f^* es Γ-recursiva por el teorema anterior.

Recíprocamente, si f^* es Γ-recursiva,

$$G^f(u,x) \leftrightarrow f(x) \in B_u \leftrightarrow \bigwedge n < \ell(u)\, f(x)(n) = u_n \leftrightarrow \bigwedge n < \ell(u)\, f^*(n,x) = u_n$$

$$\leftrightarrow \bigwedge n < \ell(u)\, (n,x,u_n) \in G_{f^*},$$

de donde se sigue inmediatamente que $G^f \in \Gamma$, luego f es Γ-recursiva. ■

Ahora probamos el teorema que nos permite extender el concepto de función recursiva:

Teorema 3.23 *Sea Γ la clase de los conjuntos semirrecursivos. Una función $f : \omega^n \longrightarrow \omega$ es Γ-recursiva si y sólo si es recursiva.*

Demostración: Si f es recursiva, la relación $f(x) = m$ es recursiva, luego $G_f \in \Gamma$, luego f es Γ-recursiva por 3.21.

Si f es Γ-recursiva, entonces G_f es semirrecursiva y el teorema 3.8 nos da un conjunto recursivo $R \subset \omega^{n+1}$ tal que $f(x) = n \leftrightarrow \bigvee m \in \omega\, R(x,n,m)$. Entonces

$$f(x) = (\mu n\, R(x, n_0^2, n_1^2))_0^2$$

es recursiva. ■

Definición 3.24 Una aplicación $f : X \longrightarrow Y$ entre espacios producto es *recursiva* si es Γ-recursiva, donde Γ es la clase de los conjuntos semirrecursivos.[3]

Acabamos de probar que esta definición extiende a la que ya teníamos para funciones $\omega^n \longrightarrow \omega$. El teorema 3.17 implica que las funciones recursivas son continuas.

Veamos ahora algunas propiedades elementales:

[3]Consideremos el caso de una función $f : X \longrightarrow \omega$. Si es recursiva, entonces la gráfica G_f es semirrecursiva, luego, para cada $a \in X$ cuyas componentes que sean funciones sean recursivas, al plantearnos si $(a,k) \in G_f$, si es cierto podremos saberlo en un número finito de pasos. Por lo tanto, podemos ir probando si $(a,0) \in G_f$, $(a,1) \in G_f$, $(a,2) \in G_f$, ..., y tras un tiempo finito una de las comprobaciones terminará con resultado positivo, lo que significa que siempre podemos acabar sabiendo cuánto vale $f(a)$. En el caso de $f : X \longrightarrow \mathcal{N}$, el teorema 3.22 nos da que conocemos $f(a)$ en el sentido de que podemos calcular cualquier $f(a)(n)$, es decir, que $f(a)$ es una función recursiva. Luego demostraremos esto formalmente.

Teorema 3.25 *Sea Γ una clase Σ.*

a) Toda función trivial es recursiva.

b) Si $f : X \longrightarrow Y$ es Γ-recursiva y y $g : Y \longrightarrow Z$ es recursiva, entonces $f \circ g$ es Γ-recursiva. En particular, la composición de funciones recursivas es recursiva.

c) Si $f : X \longrightarrow Y$ es Γ-recursiva y $A \subset Y$ es semirrecursivo, entonces $f^{-1}[A]$ está en Γ. En particular, la clase de los conjuntos semirrecursivos es cerrada para sustituciones recursivas.[4]

d) Un conjunto $A \subset X$ está en $\Delta = \Gamma \cap \neg\Gamma$ si y sólo si χ_A es Γ-recursiva. En particular, un conjunto es recursivo si y sólo si lo es su función característica.

Demostración: a) Las funciones coordenadas de una función trivial son proyecciones $f(x) = x_i$, que son recursivas, porque

$$G^f(n, x) \leftrightarrow f(x) \in B_n \leftrightarrow x_i \in B_n,$$

luego G^f es semirrecursivo por ser antiimagen de un conjunto semirrecursivo por una aplicación trivial.

b) Tenemos que

$$G^{f \circ g}(n, x) \leftrightarrow g(f(x)) \in B_n \leftrightarrow G^g(n, f(x)) \leftrightarrow (G^g)^f(n, x).$$

Por definición, G^g es semirrecursivo y por 3.19 el conjunto $(G^g)^f$ está en Γ, luego de nuevo por 3.19 concluimos que $f \circ g$ es Γ-recursiva.

c) Por 3.13, existe $R \subset \omega$ semirrecursivo tal que

$$A(y) \leftrightarrow \bigvee m \in \omega\, (y \in B_m \wedge R(m)).$$

Por lo tanto:

$$x \in f^{-1}[A] \leftrightarrow \bigvee m \in \omega\, (f(x) \in B_m \wedge R(m)) \leftrightarrow \bigvee m \in \omega\, (G^f(m, x) \wedge R(m)),$$

luego $f^{-1}[A]$ está en Γ.

d) Si A está en Δ, entonces

$$G^{\chi_A}(m, x) \leftrightarrow \chi_A(x) = m \leftrightarrow (A(x) \wedge m = 1) \vee (\neg A(x) \wedge m = 0),$$

luego $G^{\chi_A} \in \Gamma$ y χ_A es Γ-recursiva.

Si χ_A es Γ-recursiva,

$$\begin{aligned} A(x) \leftrightarrow \chi_A(x) = 1 &\leftrightarrow \bigvee n \in \omega\, (\chi_A(x) = n \wedge n = 1) \\ &\leftrightarrow \bigvee n \in \omega\, (G^{\chi_A}(n, x) \wedge n = 1), \end{aligned}$$

luego $A \in \Gamma$, e igualmente se razona que $\neg A \in \Gamma$, luego $A \in \Delta$. ■

[4]Esto es el equivalente efectivo de que las antiimágenes continuas de los conjuntos abiertos son abiertas.

Ahora tenemos que demostrar que una serie de funciones "básicas" son recursivas. Empezamos con las siguientes:

Teorema 3.26 *Las funciones siguientes son recursivas:*

a) $f : \omega \times \mathcal{N} \longrightarrow \omega$ dada por $f(n, x) = x(n)$.

(Por 3.10 y 3.21.)

b) $f : \omega \times \mathcal{N} \longrightarrow \omega$ dada por $f(n, x) = \bar{x}(n)$.

En efecto, $f(n, x) = u \leftrightarrow \ell(u) = n \wedge \bigwedge i < \ell(u)\ x(i) = u_i$.

c) El homeomorfismo natural $f_n : \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{N}^n$, al igual que su inversa.

En efecto, sus funciones coordenadas son las aplicaciones f_i^n dadas por $x \mapsto x_i^n$, donde $x_i^n(m) = x(n \cdot m + i)$, y todas ellas son recursivas pues

$$(f_i^n)^*(m, x) = x_i^n(m) = x(n \cdot m + i),$$

y su gráfica es

$$(f_i^n)^*(m, x) = k \leftrightarrow \bigvee u \in \omega(u = n \cdot m + i \wedge x(u) = k),$$

claramente semirrecursiva.

Por lo tanto, f_n es recursiva. Por otra parte:

$$(f_n^{-1})^*(m, x_0, \ldots, x_n) = k \leftrightarrow f_n^{-1}(x_0, \ldots, x_n)(m) = k \leftrightarrow$$

$$\bigvee u \in \omega\, (m = n \cdot u \wedge x_0(u) = k) \vee \bigvee u \in \omega\, (m = n \cdot u + 1 \wedge x_1(u) = k)$$

$$\vee \cdots \vee \bigvee u \in \omega\, (m = n \cdot u + n - 1 \wedge x_{n-1}(u) = k).$$

Cada relación $x_i(u) = k$ es semirrecursiva, pues es la gráfica de la función trivial $x \mapsto x_i$, luego la gráfica de $(f_n^{-1})^*$ es semirrecursiva, luego $(f_n^{-1})^*$ es recursiva, luego f_n^{-1} también lo es.

d) El homeomorfismo natural $f_r : \mathcal{N} \longrightarrow \omega^r \times \mathcal{N}$, al igual que su inversa.

Sus primeras funciones coordenadas son las aplicaciones $x \mapsto x(i)$, que ya hemos visto que son recursivas. La última función coordenada es $x \mapsto x^r$, donde $x^r(i) = x(r + i)$, que se prueba que es recursiva análogamente a como hemos visto en el apartado anterior. Por otra parte,

$$(f_r^{-1})^*(m, n_1, \ldots, n_r, x) = k \leftrightarrow f_r^{-1}(n_1, \ldots, n_r, x)(m) = k \leftrightarrow$$

$$(m = 0 \wedge k = n_1) \vee \cdots \vee (m = r - 1 \wedge k = n_r) \vee$$

$$(m \geq r \wedge \bigvee u \in \omega\, (m = r + u \wedge k = x(u))),$$

y concluimos que f_r^{-1} es recursiva como en el apartado anterior.

e) Las funciones coordenadas del homeomorfismo natural $\mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{N}^\omega$.

Se trata de las funciones $x \mapsto x_i$, donde $x_i(n) = x(\langle i, n\rangle_2)$. Más aún, lo es la función $f(i, x) = x_i$, pues

$$f^*(m, i, x) = k \leftrightarrow x_i(m) = k \leftrightarrow x(\langle i, m\rangle_2) = k \leftrightarrow$$

$$\bigvee u \in \omega\,(u = \langle i, m\rangle_2 \land x(u) = k),$$

luego f^* es recursiva, y f también. La aplicación $x \mapsto x_i$ (para un i fijo) se obtiene de f componiéndola con la aplicación $x \mapsto (i, x)$, claramente recursiva.

De los resultados anteriores se sigue inmediatamente que todos los espacios producto X^{rs} con $s \neq 0$ son recursivamente homeomorfos, es decir, que entre dos de ellos se puede establecer un homeomorfismo recursivo con inversa recursiva. Teniendo en cuenta que la biyección natural $\langle\ \rangle_r : \omega^r \longrightarrow \omega$ y su inversa son también recursivas, lo mismo es cierto para los espacios X^{rs} con $s = 0$.

Los elementos de $\mathcal{N}$ pueden verse como puntos del espacio $\mathcal{N}$ y como funciones $\omega \longrightarrow \omega$. Para combinar y generalizar estos dos puntos de vista conviene introducir el concepto siguiente:

Definición 3.27 Sea X un espacio producto, $x \in X$ y Γ una clase de conjuntos. Diremos que x es Γ-*recursivo* si $\{n \in \omega \mid x \in B_n\} \in \Gamma$.

El teorema siguiente muestra que este concepto es más trivial de lo que parece:

Teorema 3.28 *Sea Γ una clase Σ.*

a) Si $n \in \omega$, entonces n es Γ-recursivo.

b) Si $x \in \mathcal{N}$, entonces x es Γ-recursivo si y sólo si lo es como aplicación $x : \omega \longrightarrow \omega$.

c) Si X es un espacio producto y $x \in X$, entonces x es Γ-recursivo si y sólo si, para todo espacio producto Y, la función constante $c_x : Y \longrightarrow X$ es Γ-recursiva.

d) Si X es un espacio producto y $x \in X$, entonces x es Γ-recursivo si y sólo si lo son sus coordenadas.

Demostración: a) $\{m \in \omega \mid n \in B_m\} = \{n\}$, recursivo, luego n es Γ-recursivo.

b) Si x es Γ-recursivo, entonces

$$x(m) = n \leftrightarrow \bigvee u \in \omega\,(x \in B_u \land m < \ell(u) \land u_m = n),$$

luego $G_x \in \Gamma$ y x es Γ-recursiva como aplicación.

Si x es Γ-recursiva como aplicación, entonces

$$x \in B_n \leftrightarrow \bigvee u \in \omega\,(\ell(n) = u + 1 \land \bigwedge v \leq u\ x(v) = n_v)$$

$$\leftrightarrow \bigvee u \in \omega\,(\ell(n) = u + 1 \land \bigwedge v \leq u\,(\bigvee w \in \omega\,(w = n_v \land x(v) = w))).$$

Es claro entonces que esta relación está en Γ, luego x es Γ-recursivo.

c) Basta tener en cuenta que

$$G^{c_x}(n, y) \leftrightarrow c_x(y) \in B_n \leftrightarrow x \in B_n.$$

d) Se deduce del apartado anterior y de 3.20. ■

3.4 Relativización

Hasta ahora, aunque hemos definido algunos conceptos para clases arbitrarias de conjuntos Γ, sólo hemos considerado la clase de los conjuntos semirrecursivos. Conviene tener a mano una familia de clases asociadas que resultan ser el nexo entre la teoría efectiva y la teoría clásica:

Definición 3.29 Sea Γ una clase de conjuntos, Y un espacio producto e $y \in Y$. Llamaremos $\Gamma(y)$ a la clase de los subconjuntos $A \subset X$ de cada espacio producto X tales que existe un $B \in \Gamma(X \times Y)$ de manera que $\bigwedge x \in X(A(x) \leftrightarrow B(x, y))$. Así, a cada clase Γ le podemos asociar la clase

$$\mathbf{\Gamma} = \bigcup_{a \in \mathcal{N}} \Gamma(a)$$

Teorema 3.30 *Sea Γ una clase Σ.*

a) Si X es un espacio producto y $a \in X$, entonces $\Gamma(a)$ es una clase Σ, $\Gamma \subset \Gamma(a)$ y a es $\Gamma(a)$-recursivo.

b) Si $f : X \longrightarrow Y$ es una aplicación Γ-recursiva y $x \in X$, entonces $f(x)$ es $\Gamma(x)$-recursivo.

c) Si Γ' es una clase Σ cerrada para sustituciones Γ'-recursivas, $\Gamma \subset \Gamma'$ y a es Γ'-recursivo, entonces $\Gamma(a) \subset \Gamma'$ (en particular, $\Gamma'(a) = \Gamma'$).

Demostración: a) Si $A \in \Gamma$, entonces $B = A \times X \in \Gamma$, pues es antiimagen trivial de A, y $A(z) \leftrightarrow B(z, a)$, luego $A \in \Gamma(a)$. Por lo tanto, $\Gamma \subset \Gamma(a)$ y, en particular, $\Gamma(a)$ contiene a los conjuntos semirrecursivos.

Si $A, B \in \Gamma(a)$, sean A', B' en Γ tales que $A(x) \leftrightarrow A'(x, a)$, $B(x) \leftrightarrow B'(x, a)$. Entonces $(A \land B)(x) \leftrightarrow (A' \land B')(x, a)$, luego $A \land B \in \Gamma(a)$. Igualmente se prueban las demás condiciones de clausura. Veamos únicamente la clausura para sustituciones triviales. Si $f : Z \longrightarrow Y$ es una aplicación trivial y $A \in \Gamma(a)(Y)$, entonces $\bar{f} = f \times I : Z \times X \longrightarrow Y \times X$ también es trivial, y

$$z \in f^{-1}[A] \leftrightarrow f(x) \in A \leftrightarrow (f(z), a) \in A' \leftrightarrow \bar{f}(z, a) \in A' \leftrightarrow (z, a) \in \bar{f}^{-1}[A']$$

y el último conjunto está en Γ, luego $f^{-1}[A] \in \Gamma(a)$.

Falta probar que a es $\Gamma(a)$-recursivo, pero esto es el caso particular del apartado siguiente, tomando como f la identidad.

b) $f(x) \in B_n \leftrightarrow G^f(n,x)$ y $G^f \in \Gamma$, luego $\{n \in \omega \mid f(x) \in B_n\} \in \Gamma(x)$, y esto significa que $f(x)$ es $\Gamma(x)$-recursivo.

c) Sea $A \subset Y$ un conjunto en $\Gamma(a)$. Sea $A' \in \Gamma$ tal que $A(x) \leftrightarrow A'(x,a)$. La función constante $c_a : \omega \longrightarrow X$ es Γ'-recursiva, luego $g : \omega \times Y \longrightarrow Y \times X$ dada por $g(n,x) = (x,a)$ es Γ'-recursiva, luego $B = g^{-1}[A'] \in \Gamma'$ y

$$A(x) \leftrightarrow \bigvee n \in \omega\, B(n,x),$$

luego $A \in \Gamma'$. ∎

Definición 3.31 Si Γ es la clase de los conjuntos semirrecursivos, a las funciones $\Gamma(a)$-recursivas se las llama funciones *recursivas en* a e igualmente a los puntos $\Gamma(a)$-recursivos se les llama puntos *recursivos en* a.

Nota Para el caso de funciones $f : \omega^r \longrightarrow \omega$, existe una definición alternativa de la recursividad en un $a \in \mathcal{N}$. No la vamos a necesitar aquí, pero la comentamos porque es mucho más habitual que la que hemos dado:

> Una función f es *recursiva en* a si existe una sucesión de funciones $f_1, \ldots, f_m$ tal que $f_m = f$ y cada f_i es una de las funciones c, s, $p_i^{k_i}$ o a, o bien está definida por composición, recursión o minimización a partir de funciones anteriores de la sucesión.

A su vez, esto se interpreta como que cada valor $f(n_1, \ldots, n_r)$ puede calcularse mediante un algoritmo explícito supuesto que podamos conocer cualquier valor $a(n)$ que resulte necesario, pero sin exigir que esto pueda hacerse a su vez mediante un algoritmo. En palabras de Turing, f es recursiva en a si f puede calcularse explícitamente siempre y cuando podamos consultar un "oráculo" que nos revele cualquier valor $a(n)$ que necesitemos en el cálculo.

Para probar que toda f función recursiva en a en el sentido de la definición 3.31 lo es también en el sentido de esta nota observamos que el conjunto

$$\{(x,n) \in \omega^{r+1} \mid f(x) = n\}$$

es recursivo en a, luego existe $A \subset \omega^{r+1} \times Y$ semirrecursivo tal que

$$f(x) = n \leftrightarrow (x,n,a) \in A.$$

A su vez, una mínima variante del teorema 3.14 nos da un conjunto semirrecursivo $R \subset \omega^{r+2}$ tal que

$$f(x) = n \leftrightarrow \bigvee m \in \omega\, (a \in B_m \land R(x,n,m)).$$

A su vez, $R(x,n,m) \leftrightarrow \bigvee u \in \omega\, S(x,n,m,u)$, donde S es recursivo, luego

$$f(x) = n \leftrightarrow \bigvee mu \in \omega\, (a \in B_m \land S(x,n,m,u)).$$

Ahora observamos que la relación

$$T(m) \leftrightarrow a \in B_m \leftrightarrow \bigwedge i < \ell(m)\ m_i = a(i)$$

es recursiva en a en el sentido de esta nota,[5] luego también lo es la función

$$g(x) = \mu v \bigvee m \leq v(m = v_0^3 \wedge a \in B_m \wedge S(x, v_1^3, m, v_2^3).$$

Notemos que siempre existe un $v \in \omega$ en las condiciones de la definición de g, por lo que la definición por minimización es correcta. Entonces, $f(x) = g(x)_1^3$ es recursiva en a en el sentido de esta nota.

Recíprocamente, si f es recursiva en a en este sentido, se demuestra que lo es en el sentido de 3.31 por inducción sobre la longitud de una derivación recursiva en a de f. ■

Teorema 3.32 *Si Γ es una clase Σ, un punto x es recursivo en y e y es Γ-recursivo, entonces x es también Γ-recursivo.*

DEMOSTRACIÓN: Que x sea recursivo en $y \in Y$ significa que existe $R \subset \omega \times Y$ semirrecursivo tal que $x \in B_n \leftrightarrow R(n, y)$. Por otra parte, la función constante $c_y : \omega \longrightarrow Y$ es Γ-recursiva, luego $R^f \in \Gamma$ por 3.19, donde

$$R^{c_y}(n, m) \leftrightarrow R(n, y) \leftrightarrow x \in B_n,$$

luego $\{n \in \omega \mid x \in B_n\} \in \Gamma$, pero esto significa que x es Γ-recursivo. ■

Definición 3.33 Si $x, y \in \mathcal{N}$, diremos que x es *reducible Turing* a y si x es recursivo en y, y lo representaremos mediante $x \leq_T y$.

El teorema anterior afirma que la relación $\leq_T$ es transitiva, mientras que 3.30 a) implica que es reflexiva. Por lo tanto, se trata de un preorden.

Diremos que $x, y \in \mathcal{N}$ son *equivalentes Turing* si $x \equiv_T y \leftrightarrow x \leq_T y \wedge y \leq_T x$.

Obviamente, la equivalencia de Turing es una relación de equivalencia en $\mathcal{N}$. Los elementos del conjunto cociente $\mathcal{D}$ se llaman *grados de Turing*. La relación $\leq_T$ induce una relación de orden parcial en $\mathcal{D}$. Obviamente, $\mathcal{D}$ tiene un mínimo elemento $\mathbb{0}$, que es el grado formado por todas las funciones recursivas.

3.5 Funciones recursivas parciales en espacios producto

El concepto de función recursiva tiene un "defecto", y es que no siempre es posible saber si una definición dada corresponde o no a una función recursiva.

[5]Aquí usamos que todos los resultados elementales demostrados en [L] sobre funciones recursivas se generalizan trivialmente a funciones recursivas en a.

En términos de la definición dada en [L 7.1] el problema está en la definición por minimización, pues una definición de la forma

$$f(a_1, \ldots, a_k) = \mu n\, g(a_1, \ldots, a_k, n) = 0$$

sólo define una función recursiva si para cada $a_1, \ldots, a_k \in \omega$ existe al menos un número n que cumpla $g(a_1, \ldots, a_k, n) = 0$ y, en principio, no hay una forma de verificar si es así aunque la función g sea recursiva. Esto lleva a la definición de las funciones recursivas parciales:

Definición 3.34 Si X e Y son dos espacios producto, diremos que $f : X \longrightarrow Y$ es una *función parcial* si $f : D \longrightarrow Y$, para cierto $D \subset X$, sin descartar el caso en que $D = \varnothing$. Cuando $D = X$ diremos que la función f es *total* (de modo que toda función total se considera parcial por definición). No obstante, si decimos que f es una función, sin especificar si es total o parcial, se entenderá que es total.

Si $x \in X$, usaremos la notación $f(x)\!\downarrow$ para indicar que la función parcial f está definida en el punto x. A veces se usa la notación $f(x)\!\uparrow$ para indicar que f no está definida en x.

Todas las funciones parciales (no totales) que nos van a aparecer se reducen en última instancia a funciones definidas por minimización parcial en el sentido siguiente:

Definición 3.35 Una función $f : X \longrightarrow \omega$ está definida por *minimización parcial* a partir de una función parcial $g : \omega \times X \longrightarrow \omega$ si

$$f(x)\!\downarrow \leftrightarrow \bigvee n \in \omega (\bigwedge k \leq n\, g(k,x)\!\downarrow \land\, g(n,x) = 0)$$

y en tal caso

$$f(x) = \mu n\, g(n,x) = 0.$$

Ahora conviene observar que las definiciones de composición y recursión de funciones requieren también ciertas precisiones naturales en el caso de funciones parciales. Las presentamos para espacios producto arbitrarios:

Definición 3.36 Dadas dos funciones parciales $g : X \longrightarrow Y$ y $h : Y \longrightarrow Z$, su *composición* se define como la función parcial $g \circ h : X \longrightarrow Z$ tal que

$$(g \circ h)(x)\!\downarrow \leftrightarrow g(x)\!\downarrow \land\, h(g(x))\!\downarrow$$

y en tal caso $(g \circ h)(x) = h(g(x))$.

En [L 7.1] definimos la composición de una función $h : \omega^m \longrightarrow \omega$ con otras m funciones $g_i : \omega^n \longrightarrow \omega$, porque allí trabajábamos únicamente con funciones con imagen en ω. En ese contexto, si las funciones h y g_i son parciales, su composición se define como la función parcial $f : \omega^n \longrightarrow \omega$ tal que

$$f(x)\!\downarrow \leftrightarrow \bigwedge i (1 \leq i \leq m \to g_i(x)\!\downarrow) \land h(g_1(x), \ldots, g_m(x))\!\downarrow,$$

y en tal caso

$$f(x) = h(g_1(x), \ldots, g_m(x)).$$

Notemos que esta composición coincide con la composición (en el sentido de la definición 3.36) de la función parcial h y la función parcial $g : \omega^n \longrightarrow \omega^m$ cuyas funciones coordenadas son las funciones parciales g_i (definida en cada $x \in \omega^n$ donde lo estén todas las g_i).

Definición 3.37 Una función parcial $f : \omega \times X \longrightarrow Y$ está definida por *recursión* a partir de las funciones parciales $g : X \longrightarrow Y$ y $h : \omega \times Y \times X \longrightarrow Y$ si

$$f(n,x){\downarrow} \leftrightarrow g(x){\downarrow} \land \bigwedge k < n\ (f(k,x){\downarrow} \land h(k, f(k,x), x){\downarrow}\,)$$

y en tal caso

$$f(0,x) = g(x) \land \bigwedge k < n\ f(k+1,x) = h(k, f(k,x), x).$$

(Dejamos al lector definir la variante en que $f : \omega \longrightarrow Y$.)

Notemos que esta definición extiende a la que ya teníamos para funciones totales con $X = \omega^{n-1}$, $Y = \omega$.

Nuestro propósito es generalizar el concepto de función recursiva parcial $f : \omega^r \longrightarrow \omega$ definido en [L 7.14], pero antes necesitamos recordar algunos hechos sobre estas funciones:

En [L 7.23] definimos un conjunto recursivo $C \subset \omega$ de *códigos* de funciones recursivas parciales, de modo que cada $c \in C$ tiene asignada una función recursiva parcial $f_c : \omega^r \longrightarrow \omega$ (donde el número de argumentos $r = \operatorname{Nar}(x)$ depende recursivamente de c), de modo que toda función recursiva parcial es de la forma f_c, para cierto $c \in C$, y el conjunto $\mathcal{A} \subset \omega$ formado por[6] todos naturales de la forma $\langle c, x, m\rangle$ tales que $c \in C$, $x = \langle a_1, \ldots, a_k\rangle$ con $k = \operatorname{Nar}(c)$ y $m = f_c(a_1, \ldots, a_k)$, es un conjunto semirrecursivo, pero no recursivo [L 7.26].

De aquí se desprenden varias consecuencias de interés. El primero de ellos afirma que si $f : \omega^k \longrightarrow \omega$ es una función recursiva parcial que, casualmente, está definida en todo ω^k, entonces es una función recursiva. Nótese que esto no es inmediato a partir de las definiciones.

Teorema 3.38 *Toda función total recursiva parcial $f : \omega^k \longrightarrow \omega$ es recursiva.*

DEMOSTRACIÓN: Como $\mathcal{A}$ es semirrecursivo, el teorema 3.11 nos da un conjunto recursivo $R \subset \omega^2$ tal que

$$\bigwedge n \in \omega (n \in \mathcal{A} \leftrightarrow \bigvee m \in \omega\ (m,n) \in R).$$

[6]En la definición de los conjuntos C y $\mathcal{A}$ presentada en [L] usábamos una codificación de las sucesiones finitas de números naturales distinta de la que estamos considerando aquí, pero es trivial que todo vale sin cambio alguno con la que estamos empleando ahora. Esto hace que los conjuntos C y $\mathcal{A}$ que vamos a considerar aquí (definidos en términos de la codificación de sucesiones finitas introducida en la sección 3.1) no son exactamente los mismos definidos en [L], pero cumplen los mismos resultados demostrados allí.

Sea $n \in C$ tal que $f = f_n$. Supongamos f que es total. Entonces, para todo $x \in \omega^k$ está definido $f_n(x) = a$, luego $\langle n, \langle x \rangle, a \rangle \in \mathcal{A}$, luego existe un $b \in \omega$ tal que $(b, \langle n, \langle x \rangle, a \rangle) \in R$. Si llamamos $t = \langle a, b \rangle$, resulta que

$$\bigwedge x \in \omega^k \bigvee t \in \omega \ (t_2, \langle n, \langle x \rangle, t_1 \rangle) \in R$$

y la relación $S(x,t) \leftrightarrow (t_2, \langle c_n(x), \langle x \rangle, t_1 \rangle) \in R$ es recursiva. Por consiguiente, la función $g : \omega^k \longrightarrow \omega$ dada por

$$g(x) = \mu t \ (t_2, \langle n, \langle x \rangle, t_1 \rangle) \in R$$

es recursiva, luego $f_n(t) = g(x)_1$ también lo es. ■

Así pues, a partir de aquí podemos considerar a las funciones recursivas $f : \omega^k \longrightarrow \omega$ como un caso particular de las funciones recursivas parciales.

Teorema 3.39 *Un conjunto $B \subset \omega^r$ es semirrecursivo si y sólo si es el dominio de una función recursiva parcial.*[7]

Demostración: Una función recursiva parcial es de la forma $f_n : \omega^r \longrightarrow \omega$, para un $n \in C$. Se cumple

$$f_n(x)\downarrow \leftrightarrow \bigvee m \ \ \langle n, \langle x \rangle, m \rangle \in \mathcal{A},$$

y es claro que la relación de la derecha (para un n fijo) es semirrecursiva. Por ejemplo, porque podemos expresarla en la forma

$$\bigvee m m' \ (m', \langle n, \langle x \rangle, m \rangle) \in R,$$

con R recursivo y podemos aplicar el teorema 3.7 e).

Recíprocamente, si $B \subset \omega^r$ es semirrecursivo, por 3.11 existe un conjunto recursivo $R \subset \omega^{r+1}$ tal que $x \in B \leftrightarrow \bigvee m \in \omega \ (m, x) \in R$. Entonces la función recursiva parcial

$$f(x) = \mu m \ (m, x) \in R$$

tiene a B por dominio. ■

El teorema siguiente muestra que, al estudiar las funciones recursivas parciales, en realidad estamos estudiando una única función:

Teorema 3.40 *Existe una función recursiva parcial $U : \omega^2 \longrightarrow \omega$ tal que, para todo $(n, x) \in \omega \times \omega^{<\omega}$, se cumple*

$$U(n, \langle x \rangle)\downarrow \leftrightarrow n \in C \wedge f_n(x)\downarrow,$$

y en tal caso $U(n, \langle x \rangle) = f_n(x)$.

[7] Puesto que hay conjuntos semirrecursivos que no son recursivos, este teorema implica que no existe ningún algoritmo que nos permita saber si una función recursiva parcial arbitraria está definida o no en un punto dado.

Demostración: El teorema 3.11 nos da un conjunto recursivo $R \subset \omega^2$ tal que

$$\bigwedge n \in \omega (n \in \mathcal{A} \leftrightarrow \bigvee m \in \omega\ (m,n) \in R).$$

La función parcial

$$g(n,z) = \mu t\ (t_2, \langle n, z, t_1\rangle) \in R$$

es recursiva parcial, y está definida en $(n, \langle x\rangle)$ si y sólo si existe $(m,w) \in \omega^2$ tal que $(m, \langle n, \langle x\rangle, w\rangle) \in R$, lo que equivale a que $\langle n, \langle x\rangle, w\rangle \in \mathcal{A}$, y esto equivale a su vez a que $n \in C$ y $f_n(x) = w$. Es claro entonces que la función parcial $U(n,z) = g(n,z)_2$ cumple lo pedido. ■

La función U es lo que se llama una *función recursiva parcial universal.* De ella obtenemos otro ejemplo de conjunto semirrecursivo que no es recursivo:

Teorema 3.41 *El dominio de la función universal U es un subconjunto de ω^2 semirrecursivo, pero no recursivo.*

Demostración: Sea D el dominio de U. Ya hemos visto que el dominio de cualquier función recursiva parcial es semirrecursivo. Si D fuera recursivo, también lo sería el conjunto E dado por

$$n \in E \leftrightarrow (n, \langle n\rangle) \notin D,$$

luego sería el dominio de una función recursiva parcial $f_n : \omega \longrightarrow \omega$, para cierto $n \in C$. Pero entonces

$$f_n(n)\!\downarrow \leftrightarrow U(n, \langle n\rangle)\!\uparrow \leftrightarrow f_n(n)\!\uparrow,$$

contradicción. ■

En [L 724] se demuestra que el conjunto C de los códigos de las funciones recursivas parciales es recursivo. En cambio:

Teorema 3.42 *El conjunto C_0 de los códigos de las funciones recursivas no es semirrecursivo.*

Demostración: Supongamos que C_0 es semirrecursivo. Entonces también lo sería el conjunto

$$C_1 = C_0 \cap \{n \in \omega \mid \ell(n) = 2 \wedge (n_1)_0 = 1\},$$

que es el conjunto de los códigos de las funciones recursivas de una variable. Por lo tanto, existe una función recursiva $g : \omega \longrightarrow \omega$ tal que $g[\omega] = C_1$. La función

$$f(n) = U(g(n), \langle n\rangle) + 1$$

sería, por una parte, una función recursiva parcial y, por otra, una función total, pues la función $f_{g(n)}$ es total, luego $U(g(n), \langle n\rangle)$ está definido. Así pues, f sería una función recursiva de una variable, y sería de la forma $f = f_{g(m)}$, para cierto $m \in \omega$. Pero entonces

$$f_{g(m)}(m) = f(m) = U(g(m), \langle m \rangle) + 1 = f_{g(m)}(m) + 1,$$

contradicción. ■

Para generalizar el concepto de función recursiva parcial a funciones entre espacios producto nos apoyaremos en el teorema siguiente:

Teorema 3.43 *Una función parcial $f : \omega^r \longrightarrow \omega$ de dominio $D \subset \omega^r$ coincide sobre D con una función recursiva parcial si y sólo si existe un $P \subset \omega^{r+1}$ semirrecursivo tal que*

$$\bigwedge x \in D \bigwedge n \in \omega (f(x) = n \leftrightarrow P(n, x)).$$

Si se da esta condición y D es semirrecursivo, entonces f es recursiva parcial con dominio exactamente D.

Demostración: Supongamos que existe una función recursiva parcial, que será de la forma f_m, para cierto $m \in C$, que está definida en D y coincide con f en dicho conjunto. Por consiguiente,

$$\bigwedge x \in D \bigwedge n \in \omega (f(x) = n \leftrightarrow \langle m, \langle x \rangle, n \rangle \in \mathcal{A})$$

y, como el conjunto $\mathcal{A}$ es semirrecursivo, basta definir

$$P(n, x) \leftrightarrow \langle n, \langle x \rangle, m \rangle \in \mathcal{A},$$

de modo que P es semirrecursivo por ser antiimagen de $\mathcal{A}$ por una función recursiva.

Recíprocamente, si existe el conjunto semirrecursivo P, por el teorema 3.11 existe un conjunto recursivo $R \subset \omega^{r+2}$ tal que

$$\bigwedge n \in \omega \bigwedge x \in \omega^r (P(n, x) \leftrightarrow \bigvee m \in \omega \, R(m, n, x).$$

La función parcial $g(x) = \mu t \; R(t_0^2, t_1^2, x)$ está definida si y sólo si existen $m, n \in \omega$ tales que $R(m, n, x)$, es decir, si y sólo si $\bigvee n \in \omega \; P(n, x)$, lo cual sucede en particular para todo $x \in D$, en cuyo caso el único n que cumple $P(n, x)$ es $n = f(x)$. Por lo tanto, la función parcial $h(x) = g(x)_1^2$ es recursiva parcial y coincide con f en su dominio.

Si suponemos además que D es semirrecursivo, existirá un conjunto recursivo $R' \subset \omega^r$ tal que $\bigwedge x \in \omega^r \, (x \in D \leftrightarrow \bigvee m \in \omega \; R'(m, x))$. En el argumento anterior podemos reemplazar el conjunto R por el conjunto recursivo

$$R''(m, n, x) \leftrightarrow R(m_0^2, n, x) \wedge R'(m_1^2, x).$$

Así, la función $g(x)$ está definida si y sólo si existen m_0, m_1, $n \in \omega$ tales que $R(m_0, n, x) \wedge R'(m_1, x)$, lo cual equivale a $P(n, x) \wedge x \in D$. Por lo tanto, ahora el dominio de la función g (y de h) es exactamente D. ■

Definición 3.44 Si $f : X \longrightarrow Y$ es una función parcial y D es un subconjunto de su dominio, diremos que $P \subset \omega \times X$ *computa* a f en D si

$$\bigwedge x \in D \bigwedge n \in \omega\ (f(x) \in B_n \leftrightarrow P(n, x)).$$

Si Γ es una clase de conjuntos, diremos que f es Γ-*recursiva* en D si existe un $P \in \Gamma$ que computa a f en D. Diremos que f es Γ-*recursiva parcial* si es Γ-recursiva en su dominio. Si además dicho dominio está en Γ diremos que f es *estrictamente* Γ-*recursiva parcial.* Si Γ es la clase de los conjuntos semirrecursivos diremos simplemente que f es *(estrictamente) recursiva parcial.*

De acuerdo con el teorema anterior, las funciones $f : \omega^r \longrightarrow \omega$ recursivas parciales en el sentido de la definición [L 7.14] son las estrictamente recursivas parciales en el sentido de la definición que acabamos de dar. Las funciones que acabamos de definir como "recursivas parciales" son restricciones a un subdominio arbitrario de funciones recursivas parciales. En realidad, es más habitual llamar funciones Γ-recursivas (y funciones recursivas parciales) a las funciones que hemos llamado estrictamente Γ-recursivas (y estrictamente recursivas parciales), pero nos resultará más cómodo definir funciones Γ-recursivas sobre determinados dominios sin preocuparnos de si la definición se puede extender o no a dominios mayores, y por ello cuando hablemos de funciones Γ-recursivas o recursivas parciales lo entenderemos en este sentido ligeramente más laxo.

Notemos que, en el caso particular en que f es una función total, se cumple que f es Γ-recursiva parcial si y sólo si es Γ-recursiva en el sentido de la definición 3.18, pues entonces G^f es el único conjunto que computa a f.

Otra consecuencia trivial de la definición es que si f es Γ-recursiva parcial y $f(x)\!\downarrow$, entonces $f(x)$ es $\Gamma(x)$-recursivo. En particular, si f es recursiva parcial y $f(x)\!\downarrow$, entonces $f(x)$ es recursivo en x.

Teorema 3.45 *Si Γ es una clase Σ, toda función definida por minimización parcial a partir de una función Γ-recursiva parcial es Γ-recursiva parcial.*

Demostración: Sea $g : \omega \times X \longrightarrow \omega$ una función Γ-recursiva parcial y sea $P \subset \omega \times \omega \times X$ un conjunto en Γ que la compute. Sea $f : X \longrightarrow \omega$ la función parcial definida a partir de g por minimización parcial. Entonces, si $f(x)\!\downarrow$, se cumple que

$$f(x) \in B_n \leftrightarrow f(x) = n \leftrightarrow \bigwedge k < n \bigvee uv(v = u+1 \land g(k, x) \in B_v) \land g(n, x) \in B_0$$

$$\leftrightarrow \bigwedge k < n \bigvee uv(v = u + 1 \land P(k, x, v)) \land P(n, x, 0).$$

Como Γ es una clase Σ, el conjunto $Q(x, n)$ definido por la última condición cumple $Q \in \Gamma$ y hemos probado que

$$f(x)\!\downarrow \to \bigwedge n\,(f(x) \in B_n \leftrightarrow Q(x, n)),$$

es decir, que Q computa a f en su dominio, luego f es Γ-recursiva parcial. ■

Para que la composición de funciones Γ-recursivas parciales (o incluso totales) sea Γ-recursiva no basta con que Γ sea una clase Σ, sino que necesitamos exigir una condición más fuerte que introducimos a continuación:

Definición 3.46 Una clase Γ tiene la *propiedad de sustitución* si para toda función Γ-recursiva parcial $f : X \longrightarrow Y$ y todo $Q \in \Gamma(Y)$ existe $Q^* \in \Gamma(X)$ tal que

$$\bigwedge x \in X\,(f(x){\downarrow} \rightarrow (Q^*(x) \leftrightarrow Q(f(x))).$$

Observemos que si la función f es total el conjunto Q^* no puede ser sino $Q^* = f^{-1}[Q]$, luego si Γ tiene la propiedad de sustitución en particular es cerrada para sustituciones Γ-recursivas (totales).

Teorema 3.47 *Si Γ es una clase Σ con la propiedad de sustitución, entonces la composición de funciones Γ-recursivas parciales es Γ recursiva parcial.*

Demostración: Sean $g : X \longrightarrow Y$ y $h : Y \longrightarrow Z$ funciones Γ-recursivas parciales, sean $P \subset \omega \times X$ y $Q \subset \omega \times Y$ conjuntos en Γ que las computen y llamemos $f = g \circ h$. Si $f(x){\downarrow}$, tenemos que

$$\bigwedge n \in \omega(h(g(x)) \in B_n \leftrightarrow Q(n, g(x))).$$

Consideramos ahora la función parcial $g' : \omega \times X \longrightarrow \omega \times Y$ definida mediante[8] $g'(n, x) = (n, g(x))$. Veamos que g' es Γ-recursiva parcial. Ello se debe a que si $g(x){\downarrow}$, entonces

$$(m, g(x)) \in B_n \leftrightarrow m = n_0^{r+s+1} \land \bigvee u(n = \tilde{m}^\frown r \land g(x) \in B_u),$$

donde $\tilde{m} = \langle 0, m\rangle_2 + 1$ es el número natural tal que $\ell(\tilde{m}) = 1 \land \tilde{m}_0 = m$. Así:

$$g'(m, x) \in B_n \leftrightarrow m = n_0^{r+s+1} \land \bigvee u\,(n = \tilde{m}^\frown r \land P(u, x)),$$

y la última expresión prueba que la relación está en Γ. Por consiguiente, existe $Q^* \in \Gamma$ tal que

$$g(x){\downarrow} \rightarrow (Q(n, g(x)) \leftrightarrow Q^*(n, x)).$$

Por lo tanto,

$$f(x){\downarrow} \rightarrow \bigwedge n \in \omega(f(x) \in B_n \leftrightarrow Q^*(n, x))$$

y esto prueba que f es Γ-recursiva parcial. ■

Veamos ahora algunas condiciones sencillas que garantizan la propiedad de sustitución:

[8]En general, cuando definamos una función parcial a partir de otras funciones parciales, se sobrentenderá que la nueva función está definida donde lo está la expresión que la define. Por ejemplo, en este caso el dominio de g' es $\omega \times \mathcal{D}g$.

Teorema 3.48 *a) La clase de los conjuntos semirrecursivos tiene la propiedad de sustitución.*

b) Si Γ es una clase Σ con la propiedad de sustitución, también la tiene cada clase $\Gamma(a)$.

c) Si Γ es una clase Σ cerrada para $\bigwedge n$ y para $\bigwedge y \in Y$ o $\bigvee y \in Y$, entonces tiene la propiedad de sustitución.

Demostración: a) Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función recursiva parcial y $Q \subset Y$ semirrecursivo. Por 3.13 existe $Q' \subset \omega$ semirrecursivo tal que

$$Q(y) \leftrightarrow \bigvee n\,(y \in B_n \land Q'(n)).$$

Por otra parte, sea $P \subset \omega \times X$ un conjunto semirrecursivo que compute a f en su dominio. Definimos $Q^*(x) \leftrightarrow \bigvee n\,(P(n,x) \land Q'(n))$, de modo que Q^* es semirrecursivo y si $f(x)\!\downarrow$ entonces $f(x) \in B_n \leftrightarrow P(n,x)$, luego

$$Q^*(x) \leftrightarrow \bigvee n\,(f(x) \in B_n \land Q'(n)) \leftrightarrow Q(f(x)).$$

b) Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función $\Gamma(a)$-recursiva parcial y $Q \in \Gamma(a)(Y)$. Sea $Q' \in \Gamma$ tal que $Q(y) \leftrightarrow Q(y,a)$. Sea $P \in \Gamma(a)$ que compute a f en su dominio y sea $P' \in \Gamma$ tal que $P(n,x) \leftrightarrow P'(n,x,a)$.

Definimos $f' : X \times \mathcal{N} \longrightarrow Y$ de modo que[9]

$$f'(x,z)\!\downarrow \leftrightarrow \bigvee y \in Y \bigwedge n\,(y \in B_n \leftrightarrow P'(n,x,z)).$$

Notemos que si existe tal y, es único, y éste es por definición $f'(x,z)$, es decir:

$$f'(x,z)\!\downarrow \rightarrow \bigwedge n\,(f'(x,z) \in B_n \leftrightarrow P'(n,x,z)).$$

Así P' computa a f' en su dominio, luego f' es una función Γ-recursiva parcial. Ahora observamos que si $f(x)\!\downarrow$ entonces $f'(x,a)\!\downarrow$, pues $y = f(x)$ cumple la condición para que f' esté definida, luego, más concretamente, $f'(x,a) = f(x)$.

Definimos $g(x,z) = (f'(x,z), z)$ y es fácil ver que también es Γ-recursiva parcial, luego existe un $Q'' \in \Gamma(X \times \mathcal{N})$ tal que

$$g(x,z)\!\downarrow \rightarrow (Q''(x,z) \leftrightarrow Q'(f'(x,z),z)).$$

En particular:

$$f(x)\!\downarrow \rightarrow (Q''(x,a) \leftrightarrow Q'(f'(x,a),a)) \rightarrow (Q''(x,a) \leftrightarrow Q(f(x)).$$

Por lo tanto, si definimos $Q^*(x) \leftrightarrow Q''(x,a)$ tenemos que $Q^* \in \Gamma(a)$ y

$$f(x)\!\downarrow \rightarrow (Q^*(x) \leftrightarrow Q(f(x))),$$

lo que prueba que $\Gamma(a)$ tiene la propiedad de sustitución.

[9]Aquí tenemos un ejemplo en el que nos aparece una función parcial aunque partamos de funciones totales: no está claro para qué pares (x,z) existe un y como requiere la definición de $f'(x,z)$, por lo que la función f' sólo puede ser Γ-recursiva si la dejamos indefinida cuando no existe tal y.

c) Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función Γ-recursiva parcial y sea $P \subset \omega \times X$, $P \in \Gamma$, que compute a f en su dominio.

Supongamos que Γ es cerrada para $\bigvee y \in Y$. Entonces definimos

$$Q^*(x) \leftrightarrow \bigvee y \in Y\,(Q(y) \wedge \bigwedge n\,(y \in B_n \to P(n,x))),$$

de modo que $Q^* \in \Gamma$ y si $f(x)\!\downarrow$, para todo $y \in Y$ se cumple que

$$\bigwedge n\,(y \in B_n \to P(n,x)) \to \bigwedge n\,(y \in B_n \to f(x) \in B_n) \to y = f(x),$$

luego $Q^*(x) \leftrightarrow Q(f(x))$.

Si Γ es cerrada para $\bigwedge y \in Y$ tomamos

$$Q^*(x) \leftrightarrow \bigwedge y \in Y(Q(y) \vee \bigvee n\,(P(n,x) \wedge y \notin B_n))$$

y se concluye análogamente. ■

Hemos probado que las funciones definidas por minimización parcial o por composición a partir de funciones Γ-recursivas parciales son Γ-recursivas parciales, supuesto que la clase Γ cumpla propiedades adecuadas. Ahora faltaría demostrar que lo mismo es válido para las funciones definidas por recursión, pero sucede que para ello hay que exigir que Γ cumpla una propiedad más fuerte que la propiedad de sustitución, y además la prueba requiere un resultado nada trivial conocido como teorema de recursión de Kleene. Así pues, necesitamos algún trabajo previo antes de estudiar la recursión con funciones Γ-recursivas parciales.

3.6 El teorema de recursión

En [L 7.28] construimos un conjunto semirrecursivo universal. La definición siguiente generaliza este concepto:

Definición 3.49 Sea Y un espacio producto y Γ una clase de conjuntos. Diremos que Γ está Y-*parametrizada* si para todo espacio producto X existe un conjunto $U \subset X \times Y$, $U \in \Gamma$ tal que si $A \in \Gamma(X)$ existe un $y \in Y$ de modo que

$$A = U_y = \{x \in X \mid (x,y) \in A\}.$$

En tal caso diremos que U es un conjunto Y-*universal* para $\Gamma(X)$.

Teorema 3.50 *Si una clase Γ está Y-parametrizada y $a \in \mathcal{N}$ entonces $\Gamma(a)$ también lo está.*

DEMOSTRACIÓN: Se comprueba trivialmente que si $U \subset X \times \mathcal{N} \times Y$ es Y-universal para $\Gamma(X)$, entonces $U_a = \{(x,y) \in X \times Y \mid (x,a,y) \in U\}$ es Y-universal para $\Gamma(a)(X)$. ■

Teorema 3.51 *La clase* Γ *de los conjuntos semirrecursivos está* ω*-parametrizada.*

DEMOSTRACIÓN: Definimos $G(m,n) \leftrightarrow \bigvee r\ \langle n, \langle r,m\rangle, 1\rangle \in \mathcal{A}$, que es un conjunto semirrecursivo. Vamos a probar que es ω-universal para $\Gamma(\omega)$.

Si $B \in \Gamma(\omega)$, por 3.8 existe un $R \subset \omega\times\omega$ recursivo tal que

$$B(m) \leftrightarrow \bigvee r\, R(r,m) \leftrightarrow \bigvee r\, \chi_R(r,m) = 1.$$

Sea $n \in C$ tal que $\chi_R = f_n$. Entonces

$$B(m) \leftrightarrow \bigvee r\ f_n(r,m) = 1 \leftrightarrow \bigvee r\ \langle n, \langle r,m\rangle, 1\rangle \in \mathcal{A} \leftrightarrow G(m,n),$$

luego $B = G_n$.

Ahora consideremos un espacio producto arbitrario X y un $S \in \Gamma(X)$. Por el teorema 3.13 existe un $B \in \Gamma(\omega)$ tal que

$$S(x) \leftrightarrow \bigvee m\,(x \in B_m \wedge B(m)) \leftrightarrow \bigvee m\,(x \in B_m \wedge G(m,n)),$$

para cierto $n \in \omega$. Definimos entonces

$$U(x,n) \leftrightarrow \bigvee m(x \in B_m \wedge G(m,n)) \in \bigvee m(\Gamma \wedge \Gamma) \subset \Gamma.$$

Acabamos de probar que para cada $S \in \Gamma(X)$ existe un $n \in \omega$ tal que $S = U_n$, luego U es ω-universal para $\Gamma(X)$. ■

Más en general:

Teorema 3.52 *La clase* Γ *de los conjuntos semirrecursivos está* Y*-parametrizada, para todo espacio producto* Y*.*

DEMOSTRACIÓN: Veamos que Γ está $\mathcal{N}$-parametrizada. Dado un espacio producto X, definimos $U \subset X \times \mathcal{N}$ mediante

$$U(x,a) \leftrightarrow \bigvee n\,(n \neq 0 \wedge a(0) = 0 \wedge x \in B_{a(n)}) \leftrightarrow$$

$$\bigvee nm\,(n \neq 0 \wedge a(0) = 0 \wedge a(n) = m \wedge x \in B_m),$$

con lo que U está en Γ.

Así, si $a(0) = 1$ se tiene que $U_a = \varnothing$ y si $A \in \Gamma(X)$ no es vacío existe un $y \in \mathcal{N}$ recursivo tal que $A = \bigcup\limits_{n\in\omega} B_{y(n)}$. Definimos $a(0) = 0$ y $a(n+1) = y(n)$, de modo que

$$x \in A \leftrightarrow \bigvee n\,(n \neq 0 \wedge a(0) = 0 \wedge x \in B_{a(n)}) \leftrightarrow (x,a) \in U \leftrightarrow x \in U_a.$$

Por lo tanto, U es $\mathcal{N}$-universal para $\Gamma(X)$.

Por el teorema anterior sabemos que Γ también está ω-parametrizada y, como todo espacio producto es recursivamente homeomorfo a ω o a $\mathcal{N}$, es fácil ver que Γ está Y-parametrizada para cualquier espacio Y. ■

Veamos una aplicación:

Teorema 3.53 *Todo espacio producto contiene un conjunto semirrecursivo no recursivo.*

DEMOSTRACIÓN: En efecto, sea X un espacio producto y sea $U \subset X \times X$ un conjunto semirrecursivo X-universal para X. Sea $V = \{x \in X \mid (x, x) \notin U\}$. La función $f : X \longrightarrow X \times X$ dada por $f(x) = (x, x)$ es recursiva, y como obviamente $\neg V = f^{-1}[U]$, concluimos que $\neg V$ es semirrecursivo. En cambio, si V fuera recursivo, existiría un $x \in X$ tal que $V = U_x$, pero entonces

$$x \in V \leftrightarrow (x, x) \in U \leftrightarrow x \notin V,$$

contradicción. Así pues, $\neg V \subset X$ es semirrecursivo y no recursivo. ■

Una aplicación más importante se obtiene al observar que el conjunto $\mathcal{N}$-universal U para $\Gamma(X)$ construido en la prueba del teorema 3.52 cumple una propiedad adicional: si $A \subset X$ es cualquier abierto no vacío, puede expresarse como unión de abiertos básicos, es decir, en la forma

$$A = \bigcup_{n \in \omega} B_{y(n)},$$

donde ahora $y \in \mathcal{N}$ es una función arbitraria, no necesariamente recursiva, pero la prueba de que $A = U_y$ es válida igualmente. Más aún, por definición, $A \in \Gamma(y)$. Ahora es inmediato concluir:

Teorema 3.54 *Si* Γ *es la clase de los conjuntos semirrecursivos, entonces la clase*

$$\mathbf{\Gamma} = \bigcup_{a \in \mathcal{N}} \Gamma(a)$$

definida en 3.29 *es la clase de los conjuntos abiertos, luego las funciones* $\mathbf{\Gamma}$*-recursivas son las funciones continuas.*

DEMOSTRACIÓN: Acabamos de probar que todo abierto está en una clase $\Gamma(a)$, para cierto $a \in \mathcal{N}$, lo cual nos da una inclusión. Para la contraria basta observar que todo elemento de $\Gamma(a)$ es por definición de la forma A_a para cierto $A \in \Gamma(X \times \mathcal{N})$ semirrecursivo, y en particular abierto, y A_a es la antiimagen de A por una función continua, luego es abierto. La última afirmación es consecuencia inmediata del teorema 3.17. ■

Veamos ahora que es posible construir conjuntos universales que cumplan condiciones adicionales de coherencia:

Teorema 3.55 *Sea* Γ *una clase* ω*-parametrizada y cerrada para sustituciones recursivas. Para cada espacio producto* X *existe un conjunto* $G^X \subset X \times \mathcal{N}$ *tal que* $G^X \in \Gamma$*, es* $\mathcal{N}$*-universal para* $\mathbf{\Gamma}(X)$ *y además:*

a) *Si* $P \subset X$*, entonces* $P \in \Gamma \leftrightarrow$ *existe* $a \in \mathcal{N}$ *recursivo tal que* $P = G^X_a$.

b) *Para cada par de espacios* X, Y*, existe* $S^{XY} : X \times \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{N}$ *recursiva tal que*

$$G^{X \times Y}(x, y, a) \leftrightarrow G^Y(y, S^{XY}(x, a)).$$

(Es decir, que si a *codifica a* $P = G^{X\times Y}_a$*, entonces* $S^{XY}(x, a)$ *codifica a* P_x*.)*

Demostración: Sea $G \subset \omega \times X \times \mathcal{N}$ un conjunto ω-universal para $\Gamma(X \times \mathcal{N})$ y definimos

$$G^*(x, a) \leftrightarrow G(a(0), x, a^1),$$

donde $a^1(n) = a(n+1)$. Es fácil ver que G^* es $\mathcal{N}$-universal para $\mathbf{\Gamma}(X)$ y cumple la propiedad a).

En particular podemos tomar un conjunto $V \in \Gamma$ que sea $\mathcal{N}$-universal para $\mathbf{\Gamma}(\mathcal{N} \times \mathcal{N})$ y cumpla la propiedad a). Para cada espacio X definimos

$$G^X(x, a) \leftrightarrow V(\pi_X(x, a_0^3), a_1^3, a_2^3),$$

donde $\pi_X : X \times \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{N}$ es un homeomorfismo recursivo. Claramente $G^X \in \Gamma$.

Veamos que G^X es $\mathcal{N}$-universal para $\mathbf{\Gamma}(X)$ y cumple la propiedad a).

Tomemos $Q \subset X$ tal que $Q \in \mathbf{\Gamma}$ [resp. $Q \in \Gamma$]. Sea $Q' \subset \mathcal{N} \times \mathcal{N}$ dado por

$$Q'(u, v) \leftrightarrow Q(p_X(\pi_X^{-1}(u)),$$

donde $p_X : X \times \mathcal{N} \longrightarrow X$ es la proyección. Se cumple que $Q' \in \mathbf{\Gamma}$ [$Q' \in \Gamma$], pues $Q' = \pi_1^{-1}[\pi_X[p_X^{-1}[Q]]]$ y es fácil ver que si una case Γ es cerrada para sustituciones recursivas, sus relativizaciones $\Gamma(a)$ también lo son, luego $\mathbf{\Gamma}$ también lo es.

Por consiguiente, existe un $a \in \mathcal{N}$ [recursivo] tal que $Q'(u, v) \leftrightarrow V(u, v, a)$. Así, para todo $u \in \mathcal{N}$,

$$\begin{aligned} Q(x) \leftrightarrow Q(p_X(\pi_X^{-1}(\pi_X(x, u)))) \leftrightarrow Q'(\pi_X(x, u), u) \leftrightarrow V(\pi_X(x, u), u, a) \\ \leftrightarrow G^X(x, \langle u, u, a \rangle_3). \end{aligned}$$

Por consiguiente, si tomamos cualquier $u \in \mathcal{N}$ recursivo, $b = \langle u, u, a \rangle_3$ es recursivo en a [recursivo] y[10]

$$Q(x) \leftrightarrow G^X(x, b).$$

Veamos ahora b). Tomamos dos espacios producto X e Y y definimos un conjunto $P \subset \mathcal{N} \times \mathcal{N}$ mediante

$$P(u, v) \leftrightarrow G^{X \times Y}(p_X(\pi_X^{-1}(v_0^2), p_Y(\pi_Y^{-1}(u)), v_1^2).$$

Claramente $P \in \Gamma$. Sea $a \in \mathcal{N}$ recursivo tal que $P(u, v) \leftrightarrow V(u, v, a)$. Para todo $(x, y, b) \in X \times Y \times \mathcal{N}$, tomando $u = \pi_Y(y, b)$, $v = \langle \pi_X(x, b), b \rangle_2$, se cumple

$$\begin{aligned} G^{X \times Y}(x, y, b) \leftrightarrow P(\pi_Y(y, b), \langle \pi_X(x, b), b \rangle_2) \leftrightarrow V(\pi_Y(y, b), \langle \pi_X(x, b), b \rangle_2, a) \\ \leftrightarrow G^Y(y, \langle b, \langle \pi_X(x, b), b \rangle_2, a \rangle_3). \end{aligned}$$

Definimos $S(x, b) = \langle b, \langle \pi_X(x, b), b \rangle_2, a \rangle_3$ y así

$$G^{X \times Y}(x, y, b) \leftrightarrow G^Y(y, S(x, b)).$$

■

[10]Notemos que hemos probado que todo $P \in \Gamma(a)$ es de la forma G_b^X con b recursivo en a, que es más de lo que afirma a).

Definición 3.56 Si Γ es una clase de conjuntos ω-parametrizada y cerrada para sustituciones recursivas, una *buena parametrización* de Γ es una aplicación que asigne a cada espacio producto X un conjunto $G^X \subset X \times \mathcal{N}$ y a cada par de espacios X, Y una aplicación $S^{XY} : X \times \mathcal{N} \longrightarrow Y$ en las condiciones del teorema anterior. Diremos que G^X es un *buen conjunto universal.*

Probamos un resultado técnico que necesitaremos más adelante:

Teorema 3.57 *Sea Γ una clase ω-parametrizada y cerrada para sustituciones recursivas. Sea X un espacio producto, sea $R \subset X \times \mathcal{N}$ una relación en $\Gamma(a)$ y sea $G \subset X \times \mathcal{N}$ un buen conjunto $\mathcal{N}$-universal para $\Gamma(X)$. Entonces existe $\epsilon \in \mathcal{N}$ recursivo en a tal que $\bigwedge x \in X(R(x, \epsilon) \leftrightarrow G(x, \epsilon))$.*

Demostración: Sea $P(u, x) \leftrightarrow R(x, S^{\mathcal{N},X}(u, u))$, de modo que $P \in \Gamma(a)$ por ser una sustitución recursiva de una relación en Γ. Por el teorema anterior

$$G^{\mathcal{N}\times X}(v, x, u) \leftrightarrow G^X(x, S^{\mathcal{N},X}(v, u))$$

Como $P \in \Gamma(a)$, existe un $\epsilon_0 \in \mathcal{N}$ recursivo en a tal que

$$R(x, S^{\mathcal{N},X}(u, u)) \leftrightarrow P(u, x) \leftrightarrow G^{\mathcal{N}\times X}(u, x, \epsilon_0) \leftrightarrow G(x, S^{\mathcal{N},X}(u, \epsilon_0)).$$

En particular $R(x, S^{\mathcal{N},X}(\epsilon_0, \epsilon_0)) \leftrightarrow G(x, S^{\mathcal{N},X}(\epsilon_0, \epsilon_0))$ y $\epsilon = S^{\mathcal{N},X}(\epsilon_0, \epsilon_0)$ cumple el teorema. ■

Definición 3.58 Diremos que Γ es una clase Σ^* si es una clase Σ, está ω-parametrizada y tiene la propiedad de sustitución. En particular esto implica que es cerrada para sustituciones Γ-recursivas (en particular recursivas), luego por el teorema 3.55 admite una buena parametrización.

Sabemos que la clase de los conjuntos semirrecursivos es una clase Σ^*.

Cuando tratemos con una clase Σ^*, supondremos prefijada una buena parametrización cualquiera.

En particular fijamos un buen conjunto $\mathcal{N}$-universal $G_\Gamma^{\omega\times X}$ para $\Gamma(\omega \times X)$. Para cada espacio producto Y definimos $U_\Gamma^{XY} : X \times \mathcal{N} \longrightarrow Y$ de modo que

$$U_\Gamma^{XY}(x, a)\!\downarrow \leftrightarrow \bigvee y \in Y \bigwedge n \in \omega\, (y \in B_n \leftrightarrow G_\Gamma^{\omega\times X}(n, x, a)).$$

Si existe tal y, es único, y es por definición $U_\Gamma^{XY}(x, a)$, es decir:

$$U_\Gamma^{XY}(x, a)\!\downarrow \rightarrow \bigwedge n \in \omega\, (U_\Gamma^{XY}(x, a) \in B_n \leftrightarrow G_\Gamma^{\omega\times X}(n, x, a)).$$

Obviamente $G_\Gamma^{\omega\times X}$ computa a U_Γ^{XY} en su dominio, luego U_Γ^{XY} es una función Γ-recursiva parcial. Para cada $a \in \mathcal{N}$ definimos a su vez la función parcial $\{a\}_\Gamma^{XY} : X \longrightarrow Y$ dada por $\{a\}_\Gamma^{XY}(x) = U_\Gamma^{XY}(x, a)$. Claramente, el conjunto $(G_\Gamma^{\omega\times X})_a$ computa $\{a\}_\Gamma^{XY}$ en su dominio, luego se trata de una función $\Gamma(a)$-recursiva parcial y, en particular $\boldsymbol{\Gamma}$-recursiva parcial.

El teorema siguiente muestra que $\{a\}_\Gamma^{XY}$ es una $\mathcal{N}$-parametrización de las funciones $\boldsymbol{\Gamma}$-recursivas parciales de X en Y.

Teorema 3.59 *Sea* Γ *una clase* Σ^*.

a) Una función parcial $f : X \longrightarrow Y$ *es* $\mathbf{\Gamma}$*-recursiva parcial si y sólo si existe un* $a \in \mathcal{N}$ *tal que* $f \subset \{a\}_\Gamma^{XY}$.

b) Una función parcial $f : X \longrightarrow Y$ *es* Γ*-recursiva parcial si y sólo si existe un* $a \in \mathcal{N}$ *recursivo tal que* $f \subset \{a\}_\Gamma^{XY}$.

c) Para cada terna de espacios producto X, Y, Z *existe una función recursiva (total)* $S_\Gamma^{XYZ} : X \times \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{N}$ *tal que para todos los* $x \in X$, $y \in Y$, $a \in \mathcal{N}$

$$\{a\}_\Gamma^{X\times Y,Z}(x,y) = \{S_\Gamma^{XYZ}(x,a)\}^{YZ}(y),$$

entendiendo que un miembro está definido si y sólo si lo está el otro.

Demostración: a) f es $\mathbf{\Gamma}$-recursiva parcial si y sólo si existe $P \subset \omega \times X$, $P \in \mathbf{\Gamma}$ tal que $\bigwedge x \in \mathcal{D}f \bigwedge n \in \omega\,(f(x) \in B_n \leftrightarrow P(n,x))$, si y sólo si

$$\bigvee a \in \mathcal{N} \bigwedge x \in \mathcal{D}f \bigwedge n \in \omega (f(x) \in B_n \leftrightarrow G^{\omega\times X}(n,x,a)) \leftrightarrow$$

$$\bigvee a \in \mathcal{N} \bigwedge x \in \mathcal{D}f\,(U_\Gamma^{XY}(x,a){\downarrow} \land f(x) = U_\Gamma^{XY}(x,a)) \leftrightarrow$$

$$\bigvee a \in \mathcal{N} \bigwedge x \in \mathcal{D}f\,(\{a\}_\Gamma^{XY}{\downarrow} \land f(x) = \{a\})_\Gamma^{XY} \leftrightarrow \bigvee a \in \mathcal{N}\ f \subset \{a\}_\Gamma^{XY}.$$

b) Basta observar que, en las equivalencias del apartado anterior, la función f es $\Gamma(b)$-recursiva parcial si y sólo si $P \in \Gamma(b)$, si y sólo si a es recursivo en b.

c) En principio, $\{a\}_\Gamma^{X\times Y,Z}(x,y) = U_\Gamma^{X\times Y,Z}(x,y,a)$ y

$$\bigwedge n \in \omega\,(U_\Gamma^{X\times Y,Z}(x,y,a) \in B_n \leftrightarrow G^{\omega\times X\times Y}(n,x,y,a)).$$

El teorema 3.55 nos da que

$$G^{\omega\times X\times Y}(n,x,y,a) \leftrightarrow G^{\omega\times Y}(n,y,S^{X,\omega\times Y}(x,a)),$$

y de aquí se sigue que

$$U_\Gamma^{X\times Y,Z}(x,y,a){\downarrow} \leftrightarrow U_\Gamma^{YZ}(y,S^{X,\omega\times Y}(x,a)){\downarrow}$$

y en caso de que ambas funciones estén definidas, coinciden. Equivalentemente,

$$\{a\}_\Gamma^{X\times Y,Z}(x,y) = \{S^{X,\omega\times Y}(x,a)\}_\Gamma^{YZ}(y)$$

y basta tomar $S^{XYZ} = S^{X,\omega\times Y}$. ■

Con esto ya podemos probar:

Teorema 3.60 (Teorema de recursión) (Kleene) *Si* Γ *es una clase* Σ^*, *para cada par de espacios producto* X, Y *existe una función recursiva (total)* $R^{XY} : \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{N}$ *tal que si* $f : X \times \mathcal{N} \longrightarrow Y$ *es una función* $\mathbf{\Gamma}$*-recursiva parcial,* $f \subset \{b\}_\Gamma^{X\times\mathcal{N},Y}$ *y* $a = R(b)$, *entonces*

$$\bigwedge x \in X\,(f(x,a){\downarrow} \rightarrow f(x,a) = \{a\}_\Gamma^{X,Y}(x)).$$

(Notemos además que si f *es* $\Gamma(c)$*-recursiva parcial, entonces* b *puede tomarse recursivo en* c, *luego* a *también es recursivo en* c.*)*

DEMOSTRACIÓN: Sea $S = S^{\mathcal{N}\times\mathcal{N},X,Y} : \mathcal{N}\times\mathcal{N}\times\mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{N}$ según 3.59. Definimos $g : X\times\mathcal{N}\times\mathcal{N} \longrightarrow Y$ mediante $g(x,u,v) = \{u\}_\Gamma^{X\times\mathcal{N},Y}(x, S(u,v,v)))$. Así g es Γ-recursiva parcial, por el teorema 3.47, pues

$$g(x,u,v) = U_\Gamma^{X\times\mathcal{N},Y}(x, S(u,v,v),u),$$

U es Γ-recursiva parcial y S es recursiva. Por 3.59 b), existe un $c\in\mathcal{N}$ recursivo tal que $g\subset\{c\}_\Gamma^{X\times\mathcal{N}\times\mathcal{N},Y}$ y, por el apartado c)

$$g(x,u,v){\downarrow} \rightarrow g(x,u,v) = \{c\}_\Gamma^{X\times\mathcal{N}\times\mathcal{N},Y}(x,u,v) = \{S(u,v,c)\}_\Gamma^{X,Y}(x).$$

Haciendo $v = c$ queda

$$g(x,u,c){\downarrow} \rightarrow \{u\}_\Gamma^{X\times\mathcal{N}\times\mathcal{N},Y}(x, S(u,c,c)) = \{S(u,c,c)\}_\Gamma^{X,Y}(x).$$

Definimos $R^{XY}(u) = S(u,c,c)$, obviamente recursiva, y así, si f, b, a cumplen las condiciones del enunciado,

$$f(x,a){\downarrow} \rightarrow \{b\}_\Gamma^{X\times\mathcal{N},Y}(x,a){\downarrow} \rightarrow \{b\}_\Gamma^{X\times\mathcal{N},Y}(x, S(b,c,c)){\downarrow} \rightarrow g(x,b,c){\downarrow}$$

$$\rightarrow \{b\}_\Gamma^{X\times\mathcal{N}\times\mathcal{N},Y}(x, S(b,c,c)) = \{S(b,c,c)\}_\Gamma^{X,Y}(x) \rightarrow f(x,a) = \{a\}_\Gamma^{X,Y}(x).$$

■

A veces se llama teorema de recursión de Kleene a la versión simplificada siguiente:

Teorema 3.61 *Si Γ es una clase Σ^* y $f : X\times\mathcal{N} \longrightarrow Y$ es una función $\boldsymbol{\Gamma}$-recursiva parcial, existe un $a\in\mathcal{N}$ tal que*

$$\bigwedge x\in X\,(f(x,a){\downarrow} \rightarrow f(x,a) = \{a\}_\Gamma^{X,Y}(x)).$$

Si f es Γ-recursiva parcial, entonces a puede tomarse recursivo.

Como una primera ilustración del uso del teorema de recursión demostramos el resultado que teníamos pendiente. No se conoce una prueba más sencilla que evite el teorema de la recursión (ni siquiera para funciones totales, salvo en el caso de funciones $\omega^r \longrightarrow \omega$, donde es consecuencia inmediata de la definición de función recursiva).

Teorema 3.62 *Si Γ es una clase Σ^*, toda función parcial definida por recursión a partir de funciones Γ-recursivas parciales es Γ-recursiva parcial.*

DEMOSTRACIÓN: Sean f, g, h en las condiciones de la definición 3.37, donde g y h son Γ-recursivas parciales. (El caso en que no está el espacio X se trata análogamente.) Definimos la función parcial $\phi : \mathcal{N}\times\omega\times X \longrightarrow Y$ mediante

$$\phi(a,n,x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } n = 0,\\ h(n-1, \{a\}_\Gamma^{\omega\times X,Y}(n-1,x),x) & \text{si } n > 0.\end{cases}$$

Veamos que ϕ es Γ-recursiva parcial. Para ello observamos que

$$\phi(a,n,x) \in B_m \leftrightarrow \begin{cases} g(x) \in B_m & \text{si } n = 0, \\ h(n-1, U_\Gamma^{\omega\times X,Y}(n-1,x,a),x) \in B_m & \text{si } n > 0. \end{cases}$$

La función $h^*(a,n,x) = h(n-1, U_\Gamma^{\omega\times X,Y}(n-1,x,a),x)$ es Γ-recursiva parcial por ser composición de funciones Γ-recursivas parciales. Sean P_g y P_{h^*} conjuntos en Γ que computen a g y h^* en sus dominios respectivos. Entonces

$$P_\phi = ((\mathcal{N}\times\omega\times P_g)\cap(\mathcal{N}\times\{0\}\times X\times\omega))\cup(P_{h^*}\cap(\mathcal{N}\times(\omega\setminus\{0\})\times X\times\omega))$$

computa a ϕ en su dominio, y está en Γ porque el primer conjunto es una antiimagen trivial de P_g, y el segundo y el cuarto son semirrecursivos.

Por el teorema de recursión existe un $a \in \mathcal{N}$ recursivo tal que

$$\phi(a,n,x)\!\downarrow \to \phi(a,n,x) = \{a\}_\Gamma^{\omega\times X,Y}(n,x).$$

Se cumple entonces que $f \subset \{a\}_\Gamma^{\omega\times X,Y}$. En efecto

$$f(0,x)\!\downarrow \to \phi(a,0,x)\!\downarrow \to \{a\}_\Gamma^{\omega\times X,Y}(0,x) = g(x) = f(0,x),$$

y supuesto que

$$f(n,x)\!\downarrow \to \{a\}_\Gamma^{\omega\times X,Y}(n,x) = f(n,x),$$

$$f(n+1,x)\!\downarrow \to f(n,x)\!\downarrow \to \{a\}_\Gamma^{\omega\times X,Y}(n,x)\!\downarrow \to \phi(a,n+1,x)\!\downarrow$$

$$\to \{a\}_\Gamma^{\omega\times X,Y}(n+1,x) = h(n,\{a\}_\Gamma^{\omega\times X,Y}(n,x),x) = h(n,f(n,x),x) = f(n+1,x).$$

Por consiguiente, f es Γ-recursiva parcial. ■

Veamos otra aplicación del teorema de recursión:

Teorema 3.63 *Si Γ es una clase Σ^* y $g : X\times\omega \longrightarrow \omega$ es una función Γ-recursiva, entonces la función $f : X \longrightarrow \mathcal{N}$ dada por $f(x)(n) = g(x, \overline{f(x)}(n))$ es Γ-recursiva.*

Demostración: En general, si $p : Y\times\omega \longrightarrow \omega$ es una función Γ-recursiva parcial, podemos definir la función parcial $\bar{p} : Y\times\omega \longrightarrow \omega$ dada por

$$\begin{cases} \bar{p}(y,0) = 0 = \langle\varnothing\rangle\,, \\ \bar{p}(y,n+1) = \bar{p}(y,n)^\frown p(y,n), \end{cases}$$

que es Γ-recursiva parcial por el teorema anterior. Observemos que $\bar{p}(y,n)$ está definida si y sólo si lo están $p(x,0),\ldots p(x,n-1)$, y entonces su valor es el número natural que codifica esta sucesión finita. En particular $\bar{p}(x,0)$ está definida para todo x.

En particular tenemos $\overline{U_\Gamma^{X\times\omega,\omega}} : \mathcal{N}\times X\times\omega \longrightarrow \omega$, que es Γ-recursiva parcial, la cual nos permite definir a su vez $\phi : X\times\omega\times\mathcal{N} \longrightarrow \omega$ mediante

$$\phi(x,n,a) = g(x, \overline{U_\Gamma^{X\times\omega,\omega}}(x,n,a)),$$

que es Γ-recursiva parcial por ser composición de funciones Γ-recursivas parciales. Por el teorema de recursión existe $a \in \mathcal{N}$ recursivo tal que, si llamamos $f_0 = \{a\}_\Gamma^{X\times\omega,\omega}$, se cumple que:

$$\bigwedge x \in X \bigwedge n \in \omega(\phi(x,n,a)\!\downarrow \to f_0(x,n) = \phi(x,n,a)).$$

Veamos por inducción que para todo $x \in X$ se cumple $f_0(x,n)\!\downarrow$.

En efecto, como $\overline{U_\Gamma^{X\times\omega,\omega}}(x,0,a)\!\downarrow$, también $\phi(x,0,a)\!\downarrow$, luego $f_0(x,0)\!\downarrow$.

Si $f_0(x,k)\!\downarrow$ para todo $k < n$, entonces está definido

$$\{a\}_\Gamma^{X\times\omega,\omega}(x,k) = U_\Gamma^{X\times\omega,\omega}(x,k,a),$$

para todo $k < n$, luego está definido $\overline{U_\Gamma^{X\times\omega,\omega}}(x,n,a)$, luego también $\phi(x,n,a)$, luego también $f_0(x,n)$.

Como la función f_0 es Γ-recursiva, también lo es la función $f : X \longrightarrow \mathcal{N}$ dada por $f(x)(n) = f_0(x,n)$. Ahora bien, $\overline{U_\Gamma^{X\times\omega,\omega}}(x,n,a)$ es el número natural que codifica la sucesión formada por los números

$$U_\Gamma^{X\times\omega,\omega}(x,k,a) = \{a\}_\Gamma^{X\times\omega,\omega}(x,k) = f_0(x,k) = f(x)(k)$$

para $k < n$, luego $\overline{U_\Gamma^{X\times\omega,\omega}}(x,n,a) = \overline{f(x)}(n)$, luego

$$f(x)(n) = f_0(x,n) = \phi(x,n,a) = g(x, \overline{f(x)}(n)).$$

Así pues, f es la función del enunciado. ■

Las parametrizaciones $\{a\}^{XY}$ que hemos construido utilizan parámetros en $\mathcal{N}$ para codificar todas las funciones **Γ**-recursivas parciales. Para codificar únicamente las funciones Γ-recursivas parciales podemos tomar los parámetros en ω. Para probarlo empezamos demostrando el teorema análogo a 3.55:

Teorema 3.64 *Sea Γ una clase ω-parametrizada y cerrada para sustituciones recursivas. Para cada espacio producto X existe un conjunto $G^X \subset \omega \times X$ tal que $G^X \in \Gamma$ es ω-universal para $\Gamma(X)$ y además, para $X = \omega^r$ y todo espacio producto Y existe $S^{XY} : \omega \times X \longrightarrow \omega$ recursiva tal que*

$$G^{X\times Y}(e,x,y) \leftrightarrow G^Y(S^{XY}(e,x),y).$$

Demostración: Sea $V \in \Gamma$ un conjunto ω-universal para $\Gamma(\omega \times \mathcal{N})$. Para cada espacio X definimos

$$G^X(e,x) \leftrightarrow V(e_0^3, e_1^3, \pi_X(e_2^3, x)),$$

donde $\pi_X : \omega \times X \longrightarrow \mathcal{N}$ es un homeomorfismo recursivo si X es no numerable o, en caso contrario, una biyección recursiva (con inversa también recursiva) $\pi_X^0 : \omega \times X \longrightarrow \omega$ compuesta, con la aplicación $\omega \longrightarrow \mathcal{N}$ dada por $n \mapsto c_n$. En el segundo caso definimos $\pi_X^{-1} : \mathcal{N} \longrightarrow \omega \times X$ mediante $\pi_X^{-1}(u) = (\pi_X^0)^{-1}(u(0))$, de modo que π_X^{-1} es recursiva y $\pi_X^{-1}(\pi_X(n,x)) = (n,x)$. En el primer caso llamamos π_X^{-1} a la inversa de π_X.

Veamos que G^X es ω-universal para $\Gamma(X)$. Si $Q \in \Gamma(X)$, sea $Q' \in \omega \times \mathcal{N}$ dado por

$$Q'(n, u) \leftrightarrow Q(p_X(\pi_X^{-1}(u))),$$

donde $p_X : \omega \times X \longrightarrow X$ es la proyección. Como $Q' = \pi_{\mathcal{N}}^{-1}[(\pi_X^{-1})^{-1}[p_X^{-1}[Q]]]$, vemos que $Q' \in \Gamma$. Por lo tanto, existe un $e \in \omega$ tal que $Q'(n, u) \leftrightarrow V(e, n, u)$. Así, para todo $n \in \omega$,

$$Q(x) \leftrightarrow Q(p_X(\pi_X^{-1}(\pi_X(n, x)))) \leftrightarrow Q'(n, \pi_X(n, x)) \leftrightarrow V(e, n, \pi_X(n, x))$$
$$\leftrightarrow G^X(\langle e, n, n\rangle_3, x).$$

Por consiguiente, para todo $n \in \omega$, tenemos que $m = \langle e, n, n\rangle_3$ cumple

$$Q(x) \leftrightarrow G^X(m, x).$$

Consideremos ahora $X = \omega^r$ e Y un espacio producto arbitrario. Definimos $P \subset \omega \times \mathcal{N}$ mediante

$$P(n, u) \leftrightarrow G^{X \times Y}(n_0^2, p_X((\pi_X^0)^{-1}(n_1^2)), p_Y(\pi_Y^{-1}(u))).$$

Claramente $P \in \Gamma$. Sea $e \in \omega$ tal que $P(n, u) \leftrightarrow V(e, n, u)$. Para todo $(m, x, y) \in \omega \times X \times Y$, tomando $n = \left\langle m, \pi_X^0(m, x)\right\rangle_2$, $u = \pi_Y(m, y)$, se cumple

$$G^{X \times Y}(m, x, y) \leftrightarrow P(\left\langle m, \pi_X^0(m, x)\right\rangle_2, \pi_Y(m, y)) \leftrightarrow$$

$$V(e, \left\langle m, \pi_X^0(m, x)\right\rangle_2, \pi_Y(m, y)) \leftrightarrow G^Y(\left\langle e, \left\langle m, \pi_X^0(m, x)\right\rangle_2, m\right\rangle_3, y).$$

Definimos $S^{XY}(m, x) = \left\langle e, \left\langle m, \pi_X^0(m, x)\right\rangle_2, m\right\rangle_3$ y así

$$G^{X \times Y}(m, x, y) \leftrightarrow G^Y(S^{XY}(m, x), y). \qquad \blacksquare$$

Definición 3.65 Si Γ es una clase Σ^*, llamaremos $U_\Gamma^{XY} : \omega \times X \longrightarrow Y$ a la función parcial que cumple

$$U_\Gamma^{XY}(e, x)\!\downarrow\, \leftrightarrow \bigvee y \in Y \bigwedge n \in \omega(y \in B_n \leftrightarrow G_\Gamma^{\omega \times X}(e, n, x)),$$

de modo que, si existe tal y, es claramente único, y es, por definición, $U_\Gamma^{XY}(e, x)$, es decir:

$$U_\Gamma^{XY}(e, x)\!\downarrow\, \rightarrow \bigwedge n \in \omega(U_\Gamma^{XY}(e, x) \in B_n \leftrightarrow G_\Gamma^{\omega \times X}(e, n, x)).$$

Así es inmediato que U_Γ^X es Γ-recursiva parcial, y a su vez nos permite definir, para cada $e \in \omega$, la función parcial $\{e\}_\Gamma^{XY} : X \longrightarrow Y$ mediante

$$\{e\}_\Gamma^{XY}(x) = U_\Gamma^{XY}(e, x).$$

Claramente $\{e\}_\Gamma^{XY}$ está computada en su dominio por $(G_\Gamma^{\omega \times X})_e$, luego es Γ-recursiva parcial.

La demostración del teorema siguiente es completamente análoga a la del teorema 3.59:

Teorema 3.66 *Sea* Γ *una clase* Σ^*.

a) *Una función parcial* $f : X \longrightarrow Y$ *es* Γ*-recursiva parcial si y sólo si existe un* $e \in \omega$ *tal que* $f \subset \{e\}_\Gamma^{XY}$.

b) *Para cada terna de espacios producto* X, Y, Z, *donde* $X = \omega^r$ *existe una función recursiva (total)* $S_\Gamma^{XYZ} : \omega \times X \longrightarrow \omega$ *tal que para todos los* $e \in \omega$, $x \in X$, $y \in Y$

$$\{e\}_\Gamma^{X\times Y,Z}(x,y) = \{S_\Gamma^{XYZ}(e,x)\}^{YZ}(y),$$

entendiendo que un miembro está definido si y sólo si lo está el otro.

Así tenemos una enumeración de las funciones recursivas parciales en la que todos los números naturales son códigos.

La prueba del teorema de recursión se adapta también sin dificultad al presente contexto:

Teorema 3.67 (Teorema de recursión) (Kleene) *Si* Γ *es una clase* Σ^*, *para cada par de espacios producto* X, Y *existe una función recursiva (total)* $R^{XY} : \omega \longrightarrow \omega$ *tal que si* $f : \omega \times X \longrightarrow Y$ *es una función* Γ*-recursiva parcial,* $f \subset \{a\}_\Gamma^{\omega\times X,Y}$ *y* $e = R(a)$, *entonces*

$$\bigwedge x \in X\, (f(e,x)\!\downarrow \to f(e,x) = \{e\}_\Gamma^{X,Y}(x)).$$

Terminamos con una propiedad adicional de las clases Σ^*:

Teorema 3.68 *Sea* Γ *una clase* Σ^* *cerrada para* $\bigwedge n \in \omega$. *Entonces la clase* $\mathbf{\Gamma}$ *es cerrada para uniones e intersecciones numerables, luego* $\mathbf{\Delta} = \mathbf{\Gamma} \cap \neg\mathbf{\Gamma}$ *es una* σ*-álgebra en cada espacio producto. Además, las funciones* $\mathbf{\Delta}$*-medibles son las funciones* $\Delta(a)$*-recursivas, para cada* $a \in \mathcal{N}$, *donde llamamos* $\Delta(a) = \Gamma(a) \cap \neg\Gamma(a)$.

Demostración: Sea X un espacio producto, sea $G \subset X \times \mathcal{N}$ un buen conjunto universal y sea $\{A_n\}_{n\in\omega}$ una familia de conjuntos en $\mathbf{\Gamma}(X)$. Entonces existen $a_n \in \mathcal{N}$ tales que $A_n = G_{a_n}$. Sea $a \in \mathcal{N}$ que determine la sucesión $\{a_n\}_{n\in\omega}$. La aplicación $f(x,n,a) = (x,a_n)$ es recursiva y, como Γ es cerrada para sustituciones recursivas, $H = f^{-1}[G] \in \Gamma$. Así,

$$x \in \bigcup_{n\in\omega} A_n \leftrightarrow \bigvee n \in \omega\; G(x,a_n) \leftrightarrow \bigvee n \in \omega\, H(x,n,a),$$

luego la unión está en $\Gamma(a) \subset \mathbf{\Gamma}$. Con la intersección se razona igual, sin más que cambiar $\bigvee n \in \omega$ por $\bigwedge n \in \omega$.

Si $f : X \longrightarrow Y$ es $\mathbf{\Delta}$-medible, para cada $n \in \omega$ tenemos que $f^{-1}[B_n] \in \mathbf{\Delta}$, luego también $f^{-1}[B_n] \times \{n\} \in \mathbf{\Delta}$, luego

$$\{(x,n) \in X \times \omega \mid f(x) \in B_n\} = \bigcup_{n\in\omega} f^{-1}[B_n] \times \{n\} \in \mathbf{\Delta}.$$

Existen $a_0, a_1 \in \mathcal{N}$ tales que

$$\{(x, n) \in X \times \omega \mid f(x) \in B_n\} \in \Gamma(a_2) \cap \neg\Gamma(a_3).$$

Tomando $a = \langle a_0, a_1 \rangle \in \mathcal{N}$ tenemos que f es $\Delta(a)$-recursiva.

Recíprocamente, si f es $\Delta(a)$-recursiva y $A \in \mathbf{\Delta}(Y)$, tenemos que $A \in \Delta(b)$, para cierto $b \in \mathcal{N}$ luego, tomando $c = \langle a, b \rangle$, se cumple que f es $\Delta(c)$-recursiva y $A \in \Delta(c)$. Ahora bien, $\Gamma(a)$ también tiene la propiedad de sustitución, luego es cerrada para sustituciones $\Gamma(a)$-recursivas. Esto implica que

$$f^{-1}[A] \in \Delta(c) \subset \mathbf{\Delta},$$

luego f es $\mathbf{\Delta}$-medible. ■

Capítulo IV

La teoría efectiva

Ya estamos en condiciones de exponer la versión efectiva de la teoría descriptiva de conjuntos desarrollada por Kleene.

4.1 Las clases de Kleene

Las clases de Lusin $\boldsymbol{\Sigma}_n^0$, $\boldsymbol{\Pi}_n^0$, $\boldsymbol{\Sigma}_n^1$, $\boldsymbol{\Pi}_n^1$ se definen a partir de la clase $\boldsymbol{\Sigma}_1^0$ de los conjuntos abiertos tomando uniones y complementos y proyecciones. Las clases de Kleene se definen similarmente a partir de la clase Σ_1^0 de los conjuntos semirrecursivos:

Definición 4.1 *Las clases de Kleene (sobre los espacios producto) se definen como sigue:*

$$\begin{array}{llll} \Sigma_1^0 & = \{A \mid A \textit{ es semirrecursivo}\} & \Sigma_1^1 & = \bigvee x \in \mathcal{N}\ \Pi_1^0 \\ \Sigma_{n+1}^0 & = \bigvee m \in \omega\ \neg\Sigma_n^0 & \Sigma_{n+1}^1 & = \bigvee x \in \mathcal{N}\ \neg\Sigma_n^1 \\ \Pi_n^1 & = \neg\Sigma_n^0 & \Pi_n^1 & = \neg\Sigma_n^1 \\ \Delta_n^0 & = \Sigma_n^0 \cap \Pi_n^0 & \Delta_n^1 & = \Sigma_n^1 \cap \Pi_n^1 \end{array}$$

A partir de estas clases podemos definir las clases relativizadas $\Sigma_n^0(a)$, $\Pi_n^0(a)$, $\Sigma_n^1(a)$ y $\Pi_n^1(a)$, para $a \in \mathcal{N}$, y es fácil ver que guardan entre sí las mismas relaciones, es decir, $\Sigma_{n+1}^0(a) = \bigvee m \in \omega\, \Pi_n^0(a)$, etc.

Definimos $\Delta_n^0(a) = \Sigma_n^0(a) \cap \Pi_n^0(a)$, $\Delta_n^1(a) = \Sigma_n^1(a) \cap \Pi_n^1(a)$ a pesar de que no son las relativizaciones de las clases Δ_n^0 y Δ_n^1.

Observemos que Δ_1^0 es la clase de los conjuntos recursivos. Como Σ_1^0 es cerrada para sustituciones recursivas, si $a \in \mathcal{N}$ es recursiva, el teorema 3.30 nos da que $\Sigma_1^0(a) = \Sigma_1^0$, de donde se sigue a su vez que

$$\Sigma_n^0(a) = \Sigma_n^0, \quad \Pi_n^0(a) = \Pi_n^0, \quad \Delta_n^0(a) = \Delta_n^0,$$
$$\Sigma_n^1(a) = \Sigma_n^1, \quad \Pi_n^1(a) = \Pi_n^1, \quad \Delta_n^1(a) = \Delta_n^1.$$

Diremos que una clase Γ es *adecuada* si $\Delta^0_1 \subset \Gamma$ y Γ es cerrada para conjunciones, disyunciones, $\bigvee n \leq m$, $\bigwedge n \leq m$ y sustituciones recursivas. Los teoremas 3.7 y 3.25 implican que la clase Σ^0_1 es adecuada, y de aquí se sigue fácilmente que sus relativizaciones $\Sigma^0_1(a)$ también lo son. El teorema siguiente implica que todas las clases de Kleene son adecuadas:

Teorema 4.2 *Sea Γ una clase adecuada.*

a) $\neg\Gamma$, $\bigvee n\,\Gamma$, $\bigwedge n\,\Gamma$, $\bigvee x\,\Gamma$, $\bigwedge x\,\Gamma$ son adecuadas.

b) $\bigvee n\,\Gamma$ es cerrada para $\bigvee n$.

c) $\bigwedge n\,\Gamma$ es cerrada para $\bigwedge n$.

d) $\bigvee x\,\Gamma$ es cerrada para $\bigvee y \in Y$, para todo espacio producto Y.

e) $\bigwedge x\,\Gamma$ es cerrada para $\bigwedge y \in Y$, para todo espacio producto Y.

Demostración: a) Como $\Delta^0_1 \subset \Gamma$, también $\Delta^0_1 = \neg\Delta^0_1 \subset \neg\Gamma$. Es claro que $\neg\Gamma$ es cerrada para conjunciones y disyunciones. Si $\neg A \in \neg\Gamma$, entonces

$$\bigvee m \leq n\, \neg A = \neg \bigwedge m \leq n\, A \in \neg\Gamma,$$

e igualmente con $\bigwedge m \leq n\,\neg A$. Finalmente, si $f : X \longrightarrow Y$ es recursiva y $\neg A \in \neg\Gamma(Y)$ entonces $A \in \Gamma(Y)$, luego $f^{-1}[A] \in \Gamma(X)$, luego $f^{-1}[\neg A] = \neg f^{-1}[A] \in \Gamma(X)$. Por lo tanto, $\neg\Gamma$ es cerrada para sustituciones recursivas.

Tenemos que $\Delta^0_1 \subset \Gamma \subset \bigvee n\,\Gamma$. La última inclusión se debe a que si $A \in \Gamma$, entonces $\omega \times A \in \Gamma$ (porque Γ es cerrada para antiimágenes triviales), luego $A = \bigvee n\, \omega \times A \in \Gamma$.

Sean $A, B \in \Gamma(\omega \times X)$. Entonces

$$\bigvee n\, A(n,x) \vee \bigvee n\, B(n,x) \leftrightarrow \bigvee n\, (A(n,x) \vee B(n,x)),$$

luego $\bigvee n\, A \vee \bigvee n\, B \in \bigvee n\,\Gamma$. Además

$$\bigvee n\, A(n,x) \wedge \bigvee n\, B(n,x) \leftrightarrow \bigvee n\, (A(n^2_0,x) \wedge B(n^2_1,x)),$$

luego $\bigvee n\, A \wedge \bigvee n\, B \in \bigvee n\,\Gamma$ porque Γ es cerrada para sustituciones recursivas.

$$\bigvee u \leq v \bigvee n\, A(u,n,x) \leftrightarrow \bigvee n \bigvee u \leq v\, A(u,n,x),$$

luego, si $A \in \Gamma$, se cumple que $\bigvee u \leq v \bigvee n\,\Gamma \in \bigvee n\,\Gamma$.

$$\bigwedge u \leq v \bigvee n\, A(u,n,x) \leftrightarrow \bigvee n \bigwedge u \leq v\, A(u,n_u,x)$$

luego, si $A \in \Gamma$, también $\bigwedge u \leq v \bigvee n\, A \in \bigvee n\,\Gamma$, pues Γ es cerrado para sustituciones recursivas.

Si $f : X \longrightarrow Y$ es recursiva y $\bigvee n\, A \in \bigvee n\,\Gamma$, entonces $I \times f : \omega \times X \longrightarrow \omega \times Y$ es recursiva y $f^{-1}[\bigvee n\, A] = \bigvee n\,(I \times f)^{-1}[A] \in \bigvee n\,\Gamma$.

La prueba para $\bigwedge n\,\Gamma$ es análoga o, alternativamente, podemos usar que $\bigwedge n\,\Gamma = \neg\bigvee n\,\neg\Gamma$ y usar la parte ya probada.

$\Delta_1^0 \subset \Gamma \subset \bigvee x\,\Gamma$, donde usamos nuevamente que Γ es cerrada para sustituciones triviales. La prueba de que $\bigvee x\,\Gamma$ es cerrada para conjunciones, disyunciones, $\bigvee u \leq v$, $\bigwedge u \leq v$ y sustituciones recursivas es idéntica a la que hemos visto para $\bigvee n\,\Gamma$, salvo que usamos las funciones recursivas x_i^2, x_u en lugar de n_i^2, n_u. Lo mismo se aplica a $\bigwedge x\,\Gamma$.

b) $\bigvee n \bigvee m\, A(n,m,x) \leftrightarrow \bigvee n\, A(n_0^2, n_1^2, x) \in \bigvee n\,\Gamma$.

c) $\bigwedge n \bigwedge m\, A(n,m,x) \leftrightarrow \bigwedge n\, A(n_0^2, n_1^2, x) \in \bigwedge n\,\Gamma$.

d) $\bigvee x \in \mathcal{N} \bigvee y \in \mathcal{N}\, A(z,y,x) \leftrightarrow \bigvee x \in \mathcal{N}\, A(z, x_0^2, x_1^2) \in \bigvee x\,\Gamma$.

$\bigvee n \in \omega \bigvee x \in \mathcal{N}\, A(n,z,x) \leftrightarrow \bigvee x \in \mathcal{N}\, A(x(0), z, x^1) \in \bigvee x\,\Gamma$, donde x^1 es la función recursiva definida en 3.26 c). Esto prueba que $\bigvee x\,\Gamma$ es cerrado tanto para $\bigvee x \in \mathcal{N}$ como para $\bigvee n \in \omega$, de donde se sigue fácilmente que es cerrado para $\bigvee y \in Y$.

e) puede probarse análogamente, o bien usando que, si $A \in \bigwedge x\,\Gamma$,

$$\bigwedge y \in Y\, A(x,y) \leftrightarrow \neg\bigvee y \in Y\,\neg A(x,y) \in \neg\bigvee x\,\neg\Gamma = \bigwedge x\,\Gamma,$$

por la parte ya probada. ■

Como consecuencia:

Teorema 4.3 *Sea $a \in \mathcal{N}$ y sea Y un espacio producto arbitrario.*

a) Todas las clases de Kleene (relativizadas) son adecuadas.

b) $\Sigma_n^0(a)$ es cerrada para $\bigvee n$.

c) $\Pi_n^0(a)$ es cerrada para $\bigwedge n$.

d) $\Sigma_n^1(a)$, $\Pi_n^1(a)$ son cerradas para $\bigvee n$, $\bigwedge n$.

e) $\Sigma_n^1(a)$ es cerrada para $\bigvee y \in Y$.

f) $\Pi_n^1(a)$ es cerrada para $\bigwedge y \in Y$.

Demostración: Teniendo en cuenta que $\Sigma_1^0(a)$ es adecuada y cerrada para $\bigvee n$, todas las propiedades son inmediatas a partir del teorema anterior salvo que $\Sigma_n^1(a)$ es cerrada para $\bigwedge n$ (lo cual implica a su vez que $\Pi_n^1(a)$ es cerrada para $\bigvee n$). Ahora bien, un conjunto $\Sigma_n^1(a)(\omega \times X)$ es de la forma $\bigvee x \in \mathcal{N}\, A(n,y,a,x)$, donde $A \in \Pi_{n-1}^1$ o bien $A \in \Pi_1^0$, y entonces

$$\bigwedge n \bigvee x\, A(n,y,a,x) \leftrightarrow \bigvee x \bigwedge n\, A(n,y,a,x_n) \in \Sigma_n^1(a).$$

■

Ahora podemos probar que las clases de Kleene satisfaces inclusiones análogas a las de las clases de Lusin:

Teorema 4.4 *Se cumplen las inclusiones siguientes:*

$$\begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=small]
 & \Sigma_1^0(a) \arrow[dr, hook] & & \Sigma_2^0(a) \arrow[dr, hook] & & \Sigma_3^0(a) \arrow[dr, hook] & & \cdots \\
\Delta_1^0(a) \arrow[ur, hook] \arrow[dr, hook] & & \Delta_2^0(a) \arrow[ur, hook] \arrow[dr, hook] & & \Delta_3^0(a) \arrow[ur, hook] \arrow[dr, hook] & & \Delta_4^0(a) \arrow[ur, hook] \arrow[dr, hook] & \\
 & \Pi_1^0(a) \arrow[ur, hook] & & \Pi_2^0(a) \arrow[ur, hook] & & \Pi_3^0(a) \arrow[ur, hook] & & \cdots
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=small]
 & \Sigma_1^1(a) \arrow[dr, hook] & & \Sigma_2^1(a) \arrow[dr, hook] & & \Sigma_3^1(a) \arrow[dr, hook] & & \cdots \\
\Delta_1^1(a) \arrow[ur, hook] \arrow[dr, hook] & & \Delta_2^1(a) \arrow[ur, hook] \arrow[dr, hook] & & \Delta_3^1(a) \arrow[ur, hook] \arrow[dr, hook] & & \Delta_4^1(a) \arrow[ur, hook] \arrow[dr, hook] & \\
 & \Pi_1^1(a) \arrow[ur, hook] & & \Pi_2^1(a) \arrow[ur, hook] & & \Pi_3^1(a) \arrow[ur, hook] & & \cdots
\end{tikzcd}$$

Demostración: Las inclusiones entre las clases relativizadas se siguen inmediatamente de las inclusiones de las clases absolutas correspondientes. Como Π_1^0 es cerrada para antiimágenes triviales, resulta que $\Pi_1^0 \subset \Sigma_2^0$. Por otra parte, todo $A \in \Sigma_1^0$ (no vacío) es de la forma $A = \bigcup\limits_{n\in\omega} B_{y(n)}$, con $y \in \mathcal{N}$ recursiva, luego

$$x \in A \leftrightarrow \bigvee n \in \omega\,(m = y(n) \land x \in B_n) \in \bigvee n\, \Delta_1^0 \subset \bigvee n\, \Pi_1^0 = \Sigma_2^0.$$

Así pues, $\Sigma_1^0 \subset \Sigma_2^0$.

De $\Sigma_n^0 \subset \Sigma_{n+1}^0$ se sigue obviamente que $\Pi_n^0 \subset \Pi_{n+1}^0$ y de aquí a su vez que $\Sigma_{n+1}^0 \subset \Sigma_{n+2}^0$.

Por la clausura para antiimágenes triviales tenemos que $\Pi_n^0 \subset \Sigma_{n+1}^0$, de donde $\Sigma_n^0 \subset \Pi_{n+1}^0$. Esto nos da todo el primer grupo de inclusiones.

Ahora observamos que $\Pi_1^0 \subset \Sigma_1^1$, luego $\Sigma_1^0 \subset \Sigma_2^0 = \bigvee n\, \Pi_1^0 \subset \bigvee n\, \Sigma_1^1 = \Sigma_1^1$, luego $\Pi_1^0 \subset \Pi_1^1$, luego $\Sigma_1^1 = \bigvee x\, \Pi_1^0 \subset \bigvee x\, \Pi_1^1 = \Sigma_2^1$. A partir de esta inclusión, todas las demás se demuestran como las precedentes. ■

El teorema 3.52 prueba que la clase Σ_1^0 está Y-parametrizada para todo espacio producto Y. Esto se generaliza a todas las clases de Kleene:

Teorema 4.5 *Si una clase Γ está Y parametrizada para todo espacio producto Y, también lo están $\neg\Gamma$, $\bigvee x \in X\, \Gamma$, $\Gamma(a)$, para todo espacio producto X y todo $a \in \mathcal{N}$. En particular, todas las clases de Kleene de tipo Σ y Π (pero no Δ) están Y-parametrizadas para todo espacio producto Y.*

Demostración: Es fácil comprobar que:

a) Si $U \subset X \times Y$ es Y-universal para $\Gamma(X)$, entonces $\neg U$ es Y-universal para $\neg\Gamma(X)$.

b) Si $U \subset Z \times X \times Y$ es Y-universal para $\Gamma(Z \times X)$, entonces $\bigvee x \in X\, U$ es Y-universal para $\bigvee x \in X\, \Gamma(Z)$.

c) Si $U \subset X \times A \times Y$ es Y-universal para $X \times A$, entonces U_a es Y-universal para $\Gamma(a)(X)$.

■

Como consecuencia:

Teorema 4.6 *Todas las inclusiones del teorema* 4.4 *son estrictas en cualquier espacio producto.*

DEMOSTRACIÓN: Sea Γ una de las clases $\Sigma_n^0(a)$ o $\Sigma_n^1(a)$ y sea $U \subset X \times X$ un conjunto X-universal para $\Gamma(X)$. Definimos $V(x) \leftrightarrow (x,x) \notin U$.

Como la función $f(x) = (x,x)$ es recursiva y $V = f^{-1}[\neg U]$, tenemos que $V \in \neg\Gamma$. Si $V \in \Gamma$ existiría un $x \in X$ tal que $V = U_x$ y así

$$x \in V \leftrightarrow (x,x) \in U \leftrightarrow x \notin V.$$

Esta contradicción muestra que $V \in \neg\Gamma \setminus \Gamma$, luego $\neg V \in \Gamma \setminus \neg\Gamma$. De aquí se sigue inmediatamente el carácter estricto de todas las inclusiones. ■

Ahora podemos considerar clases $\mathbf{\Sigma}_n^0$, $\mathbf{\Pi}_n^0$, $\mathbf{\Delta}_n^0$, $\mathbf{\Sigma}_n^1$, $\mathbf{\Pi}_n^1$, $\mathbf{\Delta}_n^1$ en dos sentidos distintos: por una parte tenemos las clases de Lusin que hemos llamado así y, por otra parte, tenemos las clases definidas en 3.29 para la clase de Kleene correspondiente. Vamos a probar que se trata de las mismas clases, para lo cual observamos primero lo siguiente:

Teorema 4.7 *Si* Γ *es cualquiera de las clases* Σ_n^0, Π_n^0, Σ_n^1, Π_n^1, *existe un conjunto* $U \in \Gamma(X \times \mathcal{N})$ *que es* $\mathcal{N}$*-universal para la clase de Lusin* $\mathbf{\Gamma}(X)$ *correspondiente.*

DEMOSTRACIÓN: Tal y como observamos antes del teorema 3.54, el conjunto $U \in \Sigma_1^0(X \times \mathcal{N})$ $\mathcal{N}$-universal para $\Sigma_1^0(X)$ construido en la prueba del teorema 3.52 es de hecho $\mathcal{N}$-universal para la clase de los abiertos $\mathbf{\Sigma}_1^0(X)$. La demostración del teorema 4.5 implica entonces que lo mismo vale para todos los pares de clases[1] considerados. ■

Ahora ya podemos probar que si Γ es una de las clases $\Sigma_n^0, \Pi_n^0, \Sigma_n^1, \Pi_n^1$, entonces la clase $\mathbf{\Gamma}$ definida en 3.29 es la clase de Lusin correspondiente (restringida a espacios producto).

Para probarlo representamos momentáneamente por $\mathbf{\Gamma}_l$ la clase de Lusin. Dado un espacio producto X, tomamos $U \in \Gamma(X \times \mathcal{N})$ que sea $\mathcal{N}$-universal para $\mathbf{\Gamma}_l(X)$. Entonces, dado $A \in \mathbf{\Gamma}_l(X)$, existe un $a \in \mathcal{N}$ de manera que $A = U_a \in \Gamma(a)(X)$, luego $A \in \mathbf{\Gamma}(X)$, y tenemos una inclusión. Para la opuesta observamos que, por inducción, $\Gamma \subset \mathbf{\Gamma}_l$, y cada elemento de $\Gamma(a)$ es antiimagen continua de un elemento de Γ, luego $\Gamma(a) \subset \mathbf{\Gamma}_l$ para todo $a \in \mathcal{N}$, luego $\mathbf{\Gamma} \subset \mathbf{\Gamma}_l$.

Definición 4.8 Para cada $a \in \mathcal{N}$, llamaremos conjuntos *aritméticos en* a a los elementos de

$$\mathrm{Ar}(a) = \bigcup_{n\in\omega} \Sigma_n^0(a) = \bigcup_{n\in\omega} \Pi_n^0(a) = \bigcup_{n\in\omega} \Delta_n^0(a)$$

[1] Aquí usamos que $\mathbf{\Sigma}_{n+1}^0 = \bigvee n\, \mathbf{\Pi}_n^0$, como es fácil comprobar.

Llamaremos conjuntos *analíticos*[2] *en a* a los elementos de

$$\mathrm{An}(a) = \bigcup_{n\in\omega} \Sigma^1_n(a) = \bigcup_{n\in\omega} \Pi^1_n(a) = \bigcup_{n\in\omega} \Delta^1_n(a).$$

En la demostración de 4.4 hemos visto que $\Pi^0_1 \subset \Sigma^1_1 \cap \Pi^1_1 = \Delta^1_1$, luego $\Sigma^0_1 \subset \neg\Delta^1_1 = \Delta^1_1$ y, como $\bigwedge n\, \Delta^1_1 = \bigvee n\, \Delta^1_1 = \Delta^1_1$, concluimos que todo conjunto aritmético es Δ^1_1, de donde se sigue a su vez que

$$\mathrm{Ar}(a) \subset \Delta^1_1(a).$$

Veremos más adelante que la inclusión opuesta no es cierta.

Así, aunque en principio $\Sigma^1_1(a) = \bigvee x\, \Pi^0_1(a)$, ahora podemos afirmar que $\Sigma^1_1(a) = \bigvee x\, \mathrm{Ar}(a)$, puesto que $\Pi^0_1(a) \subset \mathrm{Ar}(a) \subset \Sigma^1_1(a)$, luego

$$\Sigma^1_1(a) = \bigvee x\, \Pi^0_1(a) \subset \bigvee x\, \mathrm{Ar}(a) \subset \bigvee x\, \Sigma^1_1(a) = \Sigma^1_1(a).$$

Terminamos la sección con algunas propiedades de las funciones Σ^1_1-recursivas:

Teorema 4.9 *Sea $f : X \longrightarrow Y$ y $a \in \mathcal{N}$. Las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

a) f es $\Delta^1_1(a)$-recursiva.

b) f es $\Sigma^1_1(a)$-recursiva.

c) La gráfica $G(f) \subset X \times Y$ es $\Sigma^1_1(a)$.

d) La gráfica $G(f) \subset X \times Y$ es $\Delta^1_1(a)$.

Demostración: a) $\rightarrow$ b) es trivial.

b) $\rightarrow$ c) $f(x) = y \leftrightarrow \bigwedge n(y \in B_n \rightarrow f(x) \in B_n)$ y el último conjunto está en

$$\bigwedge n(\Sigma^0_1 \rightarrow \Sigma^1_1(a)) \subset \Sigma^1_1(a).$$

c) $\rightarrow$ d) $f(x) \neq y \leftrightarrow \bigvee z(f(x) = z \wedge z \neq y)$ y el último conjunto está en

$$\bigvee z(\Sigma^1_1(a) \wedge \Delta^0_1) \subset \Sigma^1_1(a),$$

luego $G(f)$ es $\Delta^1_1(a)$.

d) $\rightarrow$ a) $f(x) \in B_n \leftrightarrow \bigvee y(f(x) = y \wedge y \in B_n) \in \bigvee y(\Sigma^1_1(a) \wedge \Sigma^0_1) \subset \Sigma^1_1(a)$.

$$f(x) \in B_n \leftrightarrow \bigwedge y(f(x) \neq y \vee y \in B_n) \in \bigwedge y(\Pi^1_1(a) \vee \Sigma^0_1) \in \Pi^1_1(a).$$

Por consiguiente, $G^f \in \Delta^1_1(a)$. ■

[2]Este concepto de conjunto analítico no tiene ninguna relación con el concepto de conjunto analítico en el sentido de $\boldsymbol{\Sigma}^1_1$. Por el contrario, los conjuntos analíticos en este sentido son el análogo efectivo de los conjuntos proyectivos.

Teorema 4.10 *Las clases $\Sigma_n^1(a)$, $\Pi_n^1(a)$, $\Delta_n^1(a)$ son cerradas para sustituciones $\Sigma_1^1(a)$-recursivas.*

DEMOSTRACIÓN: Si $f : X \longrightarrow Y$ es $\Sigma_1^1(a)$-recursiva y $P \in \Sigma_n^1(a)(Y)$, entonces

$$x \in f^{-1}[P] \leftrightarrow f(x) \in P \leftrightarrow \bigvee y(f(x) = y \land P(y)) \in \bigvee y(\Sigma_1^1(a) \land \Sigma_n^1(a)),$$

luego $f^{-1}[P]$ es $\Sigma_n^1(a)$.

Si $P \in \Pi_n^1(a)$, entonces

$$x \in f^{-1}[P] \leftrightarrow f(x) \in P \leftrightarrow \bigwedge y(f(x) \neq y \lor P(y)) \in \bigwedge y(\Pi_1^1(a) \lor \Pi_n^1(a)),$$

luego $f^{-1}[P]$ es $\Pi_n^1(a)$. ■

4.2 Caracterización aritmética

Sabemos que los subconjuntos recursivos de ω^r son los definibles mediante fórmulas aritméticas Δ_1, es decir, equivalentes tanto a una fórmula Σ_1 como a una fórmula Π_1. En esta sección extenderemos este resultado a los subconjuntos recursivos de espacios producto X^{rs}, lo que nos dará, de hecho, caracterizaciones similares para todas las clases de la jerarquía de Kleene. Para ello necesitamos extender el lenguaje de la aritmética de Peano a un lenguaje de segundo orden que no sólo permita hablar de elementos de ω, sino también de elementos de $\mathcal{N}$.

Definición 4.11 Llamaremos *formalismo de la aritmética de segundo orden* al lenguaje formal $\mathcal{L}_a^2$ que consta de los signos siguientes:

- Variables de primer orden: m, n, ...
- Variables de segundo orden: x, y, ...
- Tres funtores diádicos: $+$, $\cdot$, e
- Constantes: $0, 1, 2, 3, \ldots$
- Signos lógicos: $\neg, \rightarrow, \bigwedge, =$

La naturaleza conjuntista de estos signos es irrelevante, pero es útil tomarlos tan simples como sea posible. Concretamente, conviene suponer que todos ellos son números naturales. Por ejemplo, podemos considerar que las variables de primer orden son los números $2, 2^2, 2^3, 2^4, \ldots$, que las variables de segundo orden son los números $3, 3^2, 3^3, 3^4, \ldots$, que las constantes son los números $5, 5^2, 5^3, 5^4, \ldots$, que los funtores son los números 7, 7^2 y 7^3 y que los signos lógicos son los números $11, 11^2, 11^3, 11^4$.

Así, por ejemplo, cuando hablamos de la constante 1 de $\mathcal{L}_a$, nos referimos al número natural 25.

Si llamamos $\mathrm{Sig}(\mathcal{L}_a^2) \subset \omega$ al conjunto de los signos de $\mathcal{L}_a^2$, definimos por recurrencia el conjunto $\mathrm{Term}(\mathcal{L}_a^2) \subset \omega^{<\omega}$ de *términos* de $\mathcal{L}_a$ como el determinado por las reglas siguientes:

a) Si v es una variable de primer orden o una constante, entonces $\{v\}$ (la sucesión de longitud 1 formada por v, que normalmente representaremos simplemente como v) es un término.

b) Si t_1 y t_2 son términos, también lo son $+{}^\frown t_1{}^\frown t_2$ y $\cdot{}^\frown t_1{}^\frown t_2$, y representaremos a estas sucesiones en la forma $t_1 + t_2$, $t_1 \cdot t_2$, respectivamente.

c) Si x es una variable de segundo orden y t es un término, entonces $e^\frown x^\frown t$ es un término, que representaremos por $x(t)$.

Más precisamente, definimos T_0 como el conjunto de sucesiones de longitud 1 que cumplen a) y, supuesto definido T_n, definimos T_{n+1} como la unión de T_n y el conjunto de las sucesiones que pueden obtenerse a partir de T_n aplicando las reglas b) y c). Así $\mathrm{Term}(\mathcal{L}_a^2)$ se define como la unión de los conjuntos T_n.

Las *fórmulas atómicas* de $\mathcal{L}_a^2$ son las sucesiones de la forma $= {}^\frown t_1{}^\frown t_2$, donde $t_1, t_2 \in \mathrm{Term}(\mathcal{L}_a^2)$, y las representaremos en la forma $t_1 = t_2$.

El conjunto $\mathrm{Form}(\mathcal{L}_a^2) \subset \omega^{<\omega}$ de *fórmulas* de $\mathcal{L}_a^2$ es el determinado por las reglas siguientes:

a) Las fórmulas atómicas son fórmulas de $\mathcal{L}_a^2$.

b) Si α y β son fórmulas de $\mathcal{L}_a^2$, entonces $\neg{}^\frown\alpha$ y $\rightarrow{}^\frown\alpha^\frown\beta$ son fórmulas de $\mathcal{L}_a$, que representaremos por $\neg\alpha$ y $\alpha \rightarrow \beta$, respectivamente.

c) Si α es una fórmula de $\mathcal{L}_a^2$ y x es una variable, entonces $\bigwedge{}^\frown x^\frown\alpha$ es una fórmula de $\mathcal{L}_a^2$ que representaremos por $\bigwedge x\, \alpha$

Cuando haya riesgo de confundir una fórmula metamatemática con el nombre de una fórmula de $\mathcal{L}_a^2$ usaremos ángulos de Quine para representar a éstas últimas (por ejemplo, podemos escribir $\ulcorner 2+2=4 \urcorner \in \mathrm{Form}(\mathcal{L}_a^2)$ o $\ulcorner 2+2 \urcorner \neq \ulcorner 4 \urcorner$, y ambas afirmaciones son ciertas).

Usaremos los convenios lógicos usuales. Por ejemplo, $\ulcorner \alpha \lor \beta \urcorner = \ulcorner \neg\alpha \rightarrow \beta \urcorner$, $\ulcorner \bigvee x\, \alpha \urcorner = \ulcorner \neg \bigwedge x \neg \alpha \urcorner$, etc.

Una *valoración* en $\mathcal{L}_a$ es una aplicación s que a cada variable de primer orden de $\mathcal{L}_a^2$ le asigna un elemento de ω, y a cada variable de segundo orden de $\mathcal{L}_a^2$ le asigna un elemento de $\mathcal{N}$.

Si s es una valoración de $\mathcal{L}_a^2$, definimos $\bar{s} : \mathrm{Term}(\mathcal{L}_a^2) \longrightarrow \omega$ como la única aplicación que cumple:

a) Si v es una variable de primer orden, $\bar{s}(v) = s(v)$.

b) Si $c = 5^n$ es una constante, entonces $\bar{s}(c) = n - 1$ (es decir, $\bar{s}(\ulcorner 7 \urcorner) = 7$.

c) $\bar{s}((t_1 + t_2)) = \bar{s}(t_1) + \bar{s}(t_2)$, $\bar{s}((t_1 \cdot t_2)) = \bar{s}(t_1) \cdot \bar{s}(t_2)$, $\bar{s}((t_1^{t_2})) = \bar{s}(t_1)^{\bar{s}(t_2)}$.

d) $\bar{s}(x(t)) = s(x)(\bar{s}(t))$.

A su vez, definimos $\bar{s} : \mathrm{Form}(\mathcal{L}_a^2) \longrightarrow \{0, 1\}$ como la única aplicación que cumple las reglas siguientes, donde convenimos en escribir $\vDash \alpha[s]$ en lugar de $\bar{s}(\alpha) = 1$, para cada $\alpha \in \mathrm{Form}(\mathcal{L}_a^2)$:

a) $\vDash (t_1 = t_2)[s] \leftrightarrow \bar{s}(t_1) = \bar{s}(t_2)$.

b) $\vDash \neg\alpha[s] \leftrightarrow \neg \vDash \alpha[s]$.

c) $\vDash (\alpha \rightarrow \beta)[s] \leftrightarrow \neg \vDash \alpha[s] \vee \vDash \beta[s]$.

d) $\vDash \bigwedge n\alpha[s] \leftrightarrow \bigwedge m \in \omega \vDash \alpha[s_n^m]$, donde s_n^m es la valoración que coincide con s salvo que $s_m(n) = m$.

e) $\vDash \bigwedge x\, \alpha[s] \leftrightarrow \bigwedge y \in \mathcal{N} \vDash \alpha[s_x^y]$.

Notemos que, como en las dos últimas propiedades se cambia de valoración, en realidad hemos de definir, por recurrencia sobre la longitud de las fórmulas, una aplicación

$$\phi : \mathrm{Form}(\mathcal{L}_a^2) \longrightarrow 2^{\mathrm{Val}(\mathcal{L}_a^2)},$$

donde $\mathrm{Val}(\mathcal{L}_a^2)$ es el conjunto de las valoraciones en $\mathcal{L}_a^2$. Una vez definida ϕ, definimos $\bar{s}(\alpha) = \phi(\alpha)(\bar{s})$.

De este modo, "$\vDash \alpha[s]$" es una fórmula metamatemática con dos variables libres.

Se define del modo habitual lo que son variables libres y ligadas en una fórmula, y un argumento estándar demuestra que $\bar{s}(t)$ y $\vDash \alpha[s]$ sólo dependen del valor que toma s sobre las variables libres en t o en α. Por ello, si α tiene sus variables libres entre $\bar{n}_1, \ldots, \bar{n}_r, \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_s$, si $n_1, \ldots, n_r \in \omega$ y $x_1, \ldots, x_s \in \mathcal{N}$, escribiremos

$$\vDash \alpha[n_1, \ldots, n_r, x_1, \ldots, x_s]$$

para referirnos a $\vDash \alpha[s]$, donde s es cualquier valoración que cumpla $s(\bar{n}_i) = n_i$, $s(\bar{x}_i) = x_i$. Cuando no haya posibilidad de confusión, no distinguiremos entre variables y los objetos con los que queremos valorarlas.

Diremos que dos fórmulas $\alpha(n_1, \ldots, n_r, x_1, \ldots, x_s)$ y $\beta(n_1, \ldots, n_r, x_1, \ldots, x_s)$ son (semánticamente) equivalentes si

$$\vDash \alpha[n_1, \ldots, n_r, x_1, \ldots, x_s] \leftrightarrow \vDash \beta[n_1, \ldots, n_r, x_1, \ldots, x_s],$$

para todos los $n_1, \ldots, n_r \in \omega$ y $x_1, \ldots, x_s \in \mathcal{N}$.

A las fórmulas de $\mathcal{L}_a^2$ las llamaremos también *fórmulas aritméticas de segundo orden,* mientras que las *fórmulas aritméticas de primer orden* serán las fórmulas de $\mathcal{L}_a^2$ que no contienen cuantificadores de segundo orden (con lo que todas las variables de segundo orden son libres).

Definimos la fórmula $(t_1 \leq t_2) = \bigvee n(t_1 + n = t_2)$, de modo que

$$\vDash (t_1 \leq t_2)[s] \leftrightarrow \bar{s}(t_1) \leq \bar{s}(t_2).$$

Escribiremos $\bigwedge n \leq m\, \alpha$ y $\bigvee n \leq m\, \alpha$ para representar las fórmulas

$$\bigwedge n(n \leq m \rightarrow \alpha) \quad \text{y} \quad \bigvee n(n \leq m \land \alpha).$$

Llamaremos *fórmulas* Δ_0^0 de $\mathcal{L}_a^2$ a aquellas que sólo incluyan cuantificadores de la forma $\bigwedge m \leq n$ o, más en general, a las que sean (semánticamente) equivalentes a fórmulas que cumplan esto, lo cual nos permite incluir cuantificadores de la forma $\bigvee m \leq n$.

Llamaremos fórmulas Σ_n^0 (resp. Π_n^0) a las de la forma $\bigvee m_1 \bigwedge m_2 \cdots m_n\, \alpha$ (resp. $\bigwedge m_1 \bigvee m_2 \cdots m_n\, \alpha$), con n cuantificadores alternados, donde α es una fórmula Δ_0^0. Más en general, llamaremos también fórmulas Σ_n^0 o Π_n^0 a las que sean equivalentes a fórmulas de este tipo. Las fórmulas que sean equivalentes tanto a una fórmula Σ_n^0 como a una fórmula Π_n^0 las llamaremos fórmulas Δ_n^0.

Es fácil ver que los teoremas [L 5.18] y [L 5.23] valen igualmente para la jerarquía de fórmulas que acabamos de definir.[3] Esto implica que toda fórmula aritmética es de tipo Σ_n^0 o Π_n^0 para algún n suficientemente grande.

Un conjunto $A \subset X^{rs}$ es Δ_0 si está definido por una fórmula α de tipo Δ_0^0, es decir, si es de la forma

$$A = \{(n_1, \ldots, n_r, x_1, \ldots, x_s) \in X^{rs} \mid \vDash \alpha[n_1, \ldots, n_r, x_1, \ldots, x_s]\}.$$

Teorema 4.12 *Todo conjunto Δ_0 es recursivo, es decir, $\Delta_0 \subset \Delta_1^0$.*

Demostración: Observamos en primer lugar que si $t(n_1, \ldots, n_r, x_1, \ldots, x_s)$ es un término aritmético cuyas variables libres estén entre las indicadas, la función $f : X^{rs} \longrightarrow \omega$ dada por

$$f(n_1, \ldots, n_r, x_1, \ldots, x_s) = \bar{s}(t),$$

donde s es cualquier valoración que asigne a las variables de t los argumentos de f, es recursiva. Se razona por inducción sobre la longitud de t. Si t es una variable (de primer orden) entonces f es una proyección, si t es una constante entonces f es constante, si $t = t_1 + t_2$ entonces las funciones f_1 y f_2 definidas por t_1 y t_2 son recursivas por hipótesis de inducción, y f se obtiene componiendo estas dos con la función suma, luego también es recursiva. El caso en que $t = t_1 t_2$

[3] Los argumentos son exactamente los mismos, aunque técnicamente son más sencillos, ya que estamos considerando equivalencias semánticas entre fórmulas, en lugar de equivalencias sintácticas en ciertas teorías aritméticas. Así, por ejemplo, la versión semántica de [L 5.22] es trivialmente cierta. El hecho de que las fórmulas Δ_0^0 puedan contener términos de segundo orden no afecta en nada a las pruebas.

es análogo y si $t = x_i(t')$, entonces la función f' definida por t' es recursiva por hipótesis de inducción, y también lo es la función $(x, n) \mapsto x(n)$ (por 3.26). La función f se obtiene claramente por composición de ésta y de f', luego también es recursiva.

De aquí se sigue el enunciado para fórmulas de tipo $t_1 = t_2$, ya que las funciones f_i definidas por los dos términos son recursivas, según acabamos de probar, y

$$A = \{z \in X^{rs} \mid f_1(z) = f_2(z)\} = \{z \in X^{rs} \mid \bigvee n \in \omega((z, n) \in G_{f_1} \cap G_{f_2})\}$$

$$= \{z \in X^{rs} \mid \bigwedge n \in \omega((z, n) \in G_{f_1} \cap G_{f_2})\}$$

es Δ_1^0, es decir, recursivo. Si la fórmula es de tipo $\neg\alpha$ basta usar que los complementarios de los conjuntos recursivos son recursivos, y si es una implicación $\alpha \rightarrow \beta$ y llamamos A_α y A_β a los conjuntos definidos por α y β respectivamente, entonces el definido por la implicación es $(X^{rs} \setminus A_\alpha) \cup A_\beta$.

Por último, si la fórmula es de tipo $\bigwedge n \leq n_i\, \alpha(n, n_1, \ldots, n_r, x_1, \ldots, x_s)$, por hipótesis de inducción el conjunto A_α definido por α es recursivo, al igual que

$$B = \{(n, z) \in X^{r+1,s} \mid \bigwedge m \leq n\ (m, z) \in A_\alpha\},$$

y también

$$A = \{(n_1, \ldots, n_r, x_1, \ldots, x_s) \in X^{rs} \mid (n_i, n_1, \ldots, n_r, x_1, \ldots, x_s) \in B\},$$

por ejemplo porque su función característica χ_A se obtiene de χ_B componiendo con proyecciones. ■

Teorema 4.13 *Para cada $a \in \mathcal{N}$, los conjuntos $\Sigma_n^0(a)$, $\Pi_n^0(a)$ o $\Delta_n^0(a)$ son los de la forma*

$$A = \{(n_1, \ldots, n_r, x_1, \ldots, x_s) \in X^{rs} \mid \vDash \alpha[n_1, \ldots, n_r, x_1, \ldots, x_s, a]\},$$

donde α es una fórmula de tipo Σ_n^0, Π_n^0 o Δ_n^0, respectivamente.

Demostración: Basta probarlo para los conjuntos Σ_1^0, pues el caso general se sigue inmediatamente por inducción sobre n y la extensión a las clases relativizadas es trivial.

Por el teorema anterior $A \in \bigvee m\, \Delta_0 \subset \bigvee m\, \Sigma_1^0 = \Sigma_1^0$. Recíprocamente, si $A \subset X^{rs}$ es un conjunto Σ_1^0, por el teorema 3.12 existe un conjunto $B \subset \omega^{r+s+1}$ recursivo tal que

$$A(n_1, \ldots, n_r, x_1, \ldots, x_s) \leftrightarrow \bigvee m\, (m, n_1, \ldots, n_r, \bar{x}_1(m), \ldots, \bar{x}_s(m)) \in B$$

$$\leftrightarrow \bigvee m m_1 \cdots m_s (m_1 = \bar{x}_1(m) \wedge \cdots \wedge m_s = \bar{x}_s(m)$$

$$\wedge\ (m, n_1, \ldots, n_r, m_1, \ldots, m_s) \in B).$$

Ahora observamos que

$$m_i = \bar{x}_i(m) \leftrightarrow \ell(m_i) = m \land \bigwedge j < m \bigvee k((m_i)_j = k \land x_i(j) = k).$$

Por consiguiente:

$$A(n_1, \ldots, n_r, x_1, \ldots, x_s) \leftrightarrow \bigvee m m_1 \cdots m_s(\ell(m_1) = m \land \cdots \land \ell(m_s) = m \land$$

$$\bigwedge j < m \bigvee k_1 \cdots k_s((m_1)_j = k_1 \land \cdots \land (m_s)_j = k_s \land$$

$$x_1(j) = k_1 \land \cdots \land x_s(j) = k_s) \land (m, n_1, \ldots, n_r, m_1, \ldots, m_s) \in B).$$

Sabemos que las relaciones $\ell(m_i) = m$ y $(m_i)_j = k$ son recursivas, al igual que la pertenencia a B, luego en particular equivalen a fórmulas aritméticas de tipo Σ_1^0, digamos α, β y γ, respectivamente. Así pues, tenemos que

$$A(n_1, \ldots, n_r, x_1, \ldots, x_s) \leftrightarrow\ \vDash \bigvee m m_1 \cdots m_s(\alpha(m_1, m) \land \cdots \land \alpha(m_s, m)$$

$$\bigwedge j < m \bigvee k_1 \cdots k_s(\beta(m_1, j, k_1) \land \cdots \land \beta(m_s, j, k_s) \land$$

$$x_1(j) = k_1 \land \cdots \land x_s(j) = k_s) \land \gamma(m, n_1, \ldots, n_r, m_1, \ldots, m_s)).$$

Por las versiones para fórmulas de segundo orden de los teoremas [L 5.18] y [L 5.23], concluimos que toda la fórmula anterior es Σ_1^0. ■

Como consecuencia inmediata, los subconjuntos aritméticos de un espacio producto X^{rs} son los definibles mediante fórmulas aritméticas de primer orden.

Si llamamos Δ_0^1 a las fórmulas aritméticas de primer orden, a partir de ellas podemos definir una jerarquía de fórmulas Σ_n^1 y Π_n^1 como las de la forma $\bigvee x_1 \bigwedge x_2 \cdots x_n\, \alpha$ (resp. $\bigwedge x_1 \bigvee x_2 \cdots x_n\, \alpha$), donde α es Δ_0^1, (o las equivalentes a ellas). Las fórmulas equivalentes tanto a una fórmula Σ_n^1 como a una fórmula Π_n^1 se llaman fórmulas Δ_n^1. El teorema siguiente es trivial:

Teorema 4.14 *Para todo $a \in \mathbb{N}$, los conjuntos $\Sigma_n^1(a)$, $\Pi_n^1(a)$ o $\Delta_n^1(a)$ son los de la forma*

$$A = \{(n_1, \ldots, n_r, x_1, \ldots, x_s) \in X^{rs} \mid\ \vDash \alpha[n_1, \ldots, n_r, x_1, \ldots, x_s, a]\},$$

donde α es una fórmula de tipo Σ_n^1, Π_n^1 o Δ_n^1, respectivamente.

En particular, los subconjuntos analíticos de un espacio producto X^{rs} son los definibles mediante fórmulas aritméticas de segundo orden.

Ahora podemos dar un ejemplo interesante:

Teorema 4.15 *El conjunto de las sentencias aritméticas de primer orden (identificadas con números naturales) que son verdaderas en su interpretación natural es Δ_1^1, pero no aritmético.*

DEMOSTRACIÓN: Llamamos $\mathcal{L}_a$ al lenguaje de la aritmética de primer orden (es decir, $\mathcal{L}_a^2$ sin las variables de segundo orden). Sea σ la valoración de $\mathcal{L}_a$ que interpreta la variable de primer orden $x_i = 2^{i+1}$ como el número i y sea A el conjunto de todos los $z \in \mathcal{N}$ tales que si $t \in \omega$ es un término de $\mathcal{L}_a$, entonces $z(t) = \bar{\sigma}(t)$ y si $\alpha \in \omega$ es una fórmula de $\mathcal{L}_a$, entonces $z(\alpha) = 1$ si $\vDash \alpha[\sigma]$ y 0 en caso contrario. Vamos a ver que A es un conjunto aritmético. En efecto, es claro que

$$z \in A \leftrightarrow \bigwedge n(\cdots),$$

donde los puntos suspensivos son la conjunción de las fórmulas siguientes:

a) $\bigwedge i(n = 2^{i+1} \lor n = 5^{i+1} \to z(n) = i)$,

b) $\bigwedge uv(u \in \mathrm{Term}(\mathcal{L}_a^1) \land v \in \mathrm{Term}(\mathcal{L}_a^1) \to \cdots)$, donde los puntos suspensivos son la conjunción de las fórmulas siguientes:

1. $n = 7^\frown u^\frown v \to z(n) = z(u) + z(v)$,
2. $n = 7^{2\frown} u^\frown v \to z(n) = z(u)z(v)$,
3. $n = 11^{4\frown} u^\frown v \to (z(u) = z(v) \to z(n) = 1) \land$
   $(z(u) \neq z(v) \to z(n) = 0)$,

c) $\bigwedge uv(u \in \mathrm{Form}(\mathcal{L}_a^1) \land v \in \mathrm{Form}(\mathcal{L}_a^1) \to \cdots)$, donde los puntos suspensivos son la conjunción de las fórmulas siguientes:

1. $n = 11^\frown u \to z(n) = 1 - z(u)$,
2. $n = 11^{2\frown} u^\frown v \to z(n) = 1 - z(u)(1 - z(v))$,
3. $\bigvee i(n = 11^{3\frown} 2^{i+1\frown} u \to ((\bigwedge jw(w = \mathsf{S}_i^j u \to z(w) = 1) \to z(n) = 1)$
   $\land (\bigvee jw(w = \mathsf{S}_i^j u \land z(w) = 0) \to z(n) = 0)))$,

donde $\mathsf{S}_i^j u$ representa la sustitución de la variable $x_i = 2^{i+1}$ por $x_j = 2^{j+1}$ en la fórmula u. Todas las relaciones consideradas son recursivas, luego aritméticas (véase la sección 8.1 de [L]). Por lo tanto, A es un conjunto aritmético, al igual que el conjunto S de las sentencias de $\mathcal{L}_a^1$. Si llamamos V al conjunto de las sentencias verdaderas, tenemos que

$$n \in V \leftrightarrow \bigvee z(z \in A \land n \in S \land z(n) = 1) \leftrightarrow \bigwedge z(z \in A \to n \in S \land z(n) = 1),$$

con lo que V es tanto Σ_1^1 como Π_1^1, es decir, es Δ_1^1. Si fuera aritmético, existiría una fórmula aritmética $T(\alpha)$ tal que

$$\alpha \in V \leftrightarrow \ \vDash T[\alpha],$$

pero esto es imposible por el teorema de Tarski de indefinibilidad de la verdad. Veamos el argumento adaptado a este contexto:

La función $\beta = \mathsf{Sc}_i^j\alpha$ que a cada $\alpha \in \mathrm{Form}(\mathcal{L}_a)$ le asigna la fórmula β que resulta de sustituir la variable 2^{i+1} en α por la constante 5^{j+1} es recursiva, luego existe una fórmula aritmética $\sigma(\alpha, \beta, i, j)$ tal que

$$\beta = \mathsf{Sc}_i^j\alpha \leftrightarrow \ \vDash \sigma[\alpha, \beta, i, j].$$

Consideremos entonces la fórmula aritmética

$$\gamma(\alpha) \equiv \bigvee \beta(\sigma(\alpha, \beta, \ulcorner 1 \urcorner, \alpha) \land \neg T(\beta)),$$

donde β es una variable de $\mathcal{L}_a$ distinta de $\alpha = 2$ y $\ulcorner 1 \urcorner$ representa la constante 5^{1+1} de $\mathcal{L}_a$. Así γ es una fórmula aritmética, y en particular un número natural. Consideramos finalmente la sentencia aritmética

$$\psi = \gamma(\ulcorner \gamma \urcorner) = \mathsf{Sc}_1^\gamma \gamma = \bigvee \beta(\sigma(\ulcorner \gamma \urcorner, \beta, \ulcorner 1 \urcorner, \ulcorner \gamma \urcorner) \land \neg T(\beta)).$$

Se cumple entonces $\vDash \sigma[\gamma, \psi, 1, \gamma]$. Por consiguiente, $\vDash \psi$ es equivalente a que existe un β tal que $\vDash \sigma[\gamma, \beta, 1, \gamma]$ y $\beta \notin V$ y, como la primera condición equivale a que $\beta = \mathsf{Sc}_1^\gamma \gamma = \psi$, concluimos que

$$\vDash \psi \leftrightarrow \psi \notin V \leftrightarrow \neg \vDash \psi,$$

y tenemos una contradicción (suponiendo que V es aritmético hemos construido una sentencia aritmética que equivale a su propia falsedad). ■

Terminamos con un ejemplo de un subconjunto Σ_1^1 de $\mathcal{N}$ que no es de Borel y que admite una definición muy sencilla:

Teorema 4.16 *Sea $E \subset \mathcal{N}$ el conjunto formado por los $x \in \mathcal{N}$ tales que existe $a \subset \omega$ infinito de modo que todos los elementos de $x[a]$ se dividen unos a otros. Entonces E es un conjunto Σ_1^1 que no es de Borel.*

DEMOSTRACIÓN: Podemos enumerar el conjunto a con un $y \in \mathcal{N}$ tal que $\bigwedge mn \in \omega(m < n \rightarrow y(m) \leq y(n))$, y entonces tenemos que cada $y(m)$ divide a $y(m+1)$. Equivalentemente,

$$x \in E \leftrightarrow \bigvee y \in \mathcal{N}(\bigwedge n \in \omega \bigvee k \in \omega\ x(y(n+1)) = k \cdot x(y(n)) \land$$

$$\bigwedge nk \in \omega(y(k) = y(n) \rightarrow k = n)),$$

la fórmula tras el cuantificador $\bigvee y \in \mathcal{N}$ define un conjunto aritmético, luego E es Σ_1^1. La parte delicada de la prueba consiste en ver que E no es un conjunto de Borel. Para ello fijamos un conjunto $Q \subset \mathcal{N}$ que sea analítico, pero no de Borel. Por 1.37 podemos expresarlo como

$$Q = \bigcup_{y \in \mathcal{N}} \bigcap_{n \in \omega} A(y|_n),$$

donde A es un esquema de Suslin cerrado tal que si $s \subset t$, entonces $A(t) \subset A(s)$. Para cada $x \in \mathcal{N}$ definimos $C(x) = \{s \in {}^{<\omega}\omega \mid x \in A(s)\}$. Un camino en un conjunto $X \subset {}^{<\omega}\omega$ es una sucesión $\{s_n\}_{n \in \omega}$ en X tal que $\bigwedge k \in \omega\ s_k \subsetneq s_{k+1}$.

Observemos que $x \in Q$ si y sólo si $C(x)$ tiene un camino. En efecto, si $x \in Q$ existe un $y \in \mathcal{N}$ tal que $x \in \bigcap_{n \in \omega} A(y|_n)$, y entonces $\{y|_n\}_{n \in \omega}$ es un camino en $C(x)$. Recíprocamente, un camino en $C(x)$ es de la forma $\{y|_{m_k}\}_{k \in \omega}$, para cierta sucesión $\{m_k\}_{k \in \omega}$ estrictamente creciente, de modo que $x \in A(y|_{m_k})$ para todo k, pero como el esquema es decreciente, de hecho $y \in A(y|_n)$ para todo n, luego $x \in Q$.

Consideremos ahora una descomposición del conjunto de todos los números primos en una sucesión doble $\{p_{k,m}\}_{k,m\in\omega}$ y otra simple $\{p_n\}_{n\in\omega}$, de modo que cada primo aparezca sólo una vez en sólo una de ellas. Para cada sucesión finita $s = (s_0, \ldots, s_{r-1}) \in {}^{<\omega}\omega$ llamamos $p(s) = p_{0s_0} \cdots p_{r-1,s_{r-1}}$, entendiendo que $p_\varnothing = 1$. Así, es claro que si $s, t \in {}^{<\omega}\omega$, se cumple $s \subsetneq t$ si y sólo si $p(s)$ divide estrictamente a $p(t)$.

Veamos ahora que si $X \subset {}^{<\omega}\omega$, $U = \{p(s) \mid s \in X\}$ y definimos $x \in \mathcal{N}$ mediante

$$x(n) = \begin{cases} n & \text{si } n \in U, \\ p_n & \text{si } n \notin U, \end{cases}$$

entonces $x \in E$ si y sólo si X tiene un camino.

En efecto, si X tiene un camino $\{s_n\}_{n\in\omega}$, consideramos el $y \in \mathcal{N}$ dado por $y(n) = p(s_n) \in U$, con lo que $x(y(n)) = y(n)$ y así $x(y(n)) \mid x(y(n+1))$, luego $x \in E$. Recíprocamente, si $x \in E$, existe $y : \omega \longrightarrow \omega$ inyectiva tal que $x(y(n))$ divide a $x(y(n+1))$. Como x también es inyectiva, la división es necesariamente estricta. Como los p_n son primos y no se dividen unos a otros, necesariamente $y(n) \in U$, luego existe un $s_n \in X$ tal que $y(n) = p(s_n)$, y además $s_n \subsetneq s_{n+1}$, luego $\{s_n\}_{n\in\omega}$ es un camino en X.

Ahora definimos $F : \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{N}$ como sigue: dado $x \in \mathcal{N}$, hacemos

$$F(x)(n) = \begin{cases} n & \text{si } n \in \{p(s) \mid s \in C(x)\}, \\ p_n & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Así, $F(x)$ es el elemento de $\mathcal{N}$ que hemos asociado al conjunto $C(x)$, y lo que hemos probado es que $F(x) \in E$ si y sólo si $C(x)$ tiene un camino, lo cual a su vez equivale a que $x \in Q$, luego en definitiva $Q = F^{-1}[E]$.

Basta probar que F es medible Borel, pues entonces E no puede ser un conjunto de Borel, ya que ello implicaría que Q también lo es. Por 1.42 basta ver que la gráfica $G(F) \subset \mathcal{N} \times \mathcal{N}$ es de Borel. Ahora bien, podemos expresar $G(F) = \bigcap\limits_{n\in\omega} U_n$, donde, si $n = p(s)$ para cierto $s \in {}^{<\omega}\omega$, entonces

$$U_n = \{(x,y) \in \mathcal{N} \times \mathcal{N} \mid (x \in A(s) \rightarrow y(n) = n) \land (x \notin A(s) \rightarrow y(n) = p_n)\},$$

y si n o es de la forma $p(s)$, entonces

$$U_n = \{(x,y) \in \mathcal{N} \times \mathcal{N} \mid y(n) = p_n\}.$$

Teniendo en cuenta que $A(s)$ es cerrado, es fácil ver que todos los conjuntos U_n son de Borel. ∎

4.3 Conjuntos $\Pi^1_1(a)$ y $\Sigma^1_2(a)$

Presentamos ahora varias representaciones de los conjuntos de los primeros niveles de la jerarquía efectiva de segundo orden que más adelante nos permitirán extraer algunas consecuencias sobre ellos.

Códigos de buenos órdenes En primer lugar introducimos un conjunto que, sin ser el mismo, representará un papel equivalente al conjunto **BO** que definimos en 1.55.

Definición 4.17 Para cada $x \in \mathcal{N}$, definimos la relación $\leq_x \subset \omega \times \omega$ mediante

$$m \leq_x n \leftrightarrow x(\langle m, n \rangle) = 0.$$

Definimos $m <_x n \leftrightarrow m \leq_x n \land m \neq n$. En general, si $R \subset X \times X$ es una relación en un conjunto X, su *campo* es el conjunto

$$C_R = \{x \in X \mid \bigvee y \in X(x\, R\, y \lor y\, R\, x)\}.$$

Llamaremos $C_x \subset \omega$ al campo de $\leq_x$. Definimos

$$\mathrm{OT} = \{x \in \mathcal{N} \mid (C_x, \leq_x) \text{ está totalmente ordenado}\}$$

Claramente es un conjunto aritmético, pues

$$x \in \mathrm{OT} \leftrightarrow \bigwedge mn(x(\langle m, n \rangle) = 0 \to x(\langle n, m \rangle) = 0) \land$$

$$\bigwedge mnr(x(\langle m, n \rangle) = 0 \land x(\langle n, r \rangle) = 0 \to x(\langle m, r \rangle) = 0) \land$$

$$\bigwedge mn((\bigvee r\ x(\langle m, r \rangle) = 0 \land \bigvee r\ x(\langle n, r \rangle) = 0) \to x(\langle m, n \rangle) = 0 \lor x(\langle n, m \rangle) = 0)$$

y es claro que esta relación es aritmética. (Aquí hemos usado que una relación simétrica y transitiva en su campo es también reflexiva en su campo.)

Similarmente, definimos

$$\mathrm{BO} = \{x \in \mathcal{N} \mid (C_x, \leq_x) \text{ está bien ordenado}\}.$$

Para cada $x \in \mathrm{BO}$ existe un único ordinal $\|x\| < \omega_1$ y una única semejanza $f : (C_x, \leq_x) \longrightarrow \|x\|$.

Teorema 4.18 *El conjunto* BO *es* Π^1_1 *y la aplicación* $\|\ \| : \mathrm{BO} \longrightarrow \omega_1$ *es una norma en* Π^1_1.

Demostración: En primer lugar:

$$x \in \mathrm{BO} \leftrightarrow x \in \mathrm{OT} \land \neg \bigvee z \in \mathcal{N} \bigwedge n \in \omega(z(n+1) <_x z(n)) \leftrightarrow$$

$$x \in \mathrm{OT} \land \bigwedge z \in \mathcal{N} \bigvee n \in \omega(u = z(n+1) \land v = z(n) \land u \neq v \land x(\langle u, v \rangle) = 0)).$$

Claramente, la relación tras $\bigwedge z \in \mathcal{N}$ es aritmética, luego la relación completa es Π^1_1.

Definimos ahora

$$x \leq_{\Sigma^1_1} y \leftrightarrow x \in \mathrm{OT} \land \bigvee z \in \mathcal{N} \bigwedge mn \in \omega(m <_x n \to z(m) <_y z(n)).$$

Claramente se trata de una relación Σ^1_1 en $\mathcal{N} \times \mathcal{N}$ y, si $x \in \mathcal{N}$, $y \in \mathrm{BO}$, se cumple que

$$x \leq_{\Sigma^1_1} y \leftrightarrow x \in \mathrm{BO} \land \|x\| \leq \|y\|.$$

Por otra parte, definimos

$$x \leq_{\Pi^1_1} y \leftrightarrow x, y \in \mathrm{BO} \land \neg \bigvee z \in \mathcal{N} \bigvee k \in \omega(k \leq_x k \land$$

$$\bigwedge mn \in \omega(m <_y n \to z(m) <_x z(n) <_x k)),$$

y es claro que se trata de una relación Π^1_1 y

$$x \leq_{\Pi^1_1} y \leftrightarrow x, y \in \mathrm{BO} \land \|x\| \leq \|y\|.$$

(Concretamente, $\leq_{\Pi^1_1}$ afirma que $(C_y, \leq_y)$ no es semejante a ningún segmento inicial de $(C_x, \leq_x)$.) Esto prueba que $\|\ \|$ es una norma en Π^1_1 definida sobre BO. ■

Como consecuencia inmediata:

Teorema 4.19 *Para cada* $\alpha < \omega_1$*, los conjuntos*

$$\mathrm{BO}_\alpha = \{x \in \mathrm{BO} \mid \|x\| \leq \alpha\}, \quad \{x \in \mathrm{BO} \mid \|x\| < \alpha\}, \quad \{x \in \mathrm{BO} \mid \|x\| = \alpha\}$$

son $\mathbf{\Delta}^1_1$.

Demostración: Podemos tomar $a \in \mathrm{BO}$ tal que $\|a\| = \alpha$. Entonces,

$$x \in \mathrm{BO}_\alpha \leftrightarrow x \leq_{\Sigma^1_1} a \leftrightarrow x \leq_{\Pi^1_1} a.$$

Así pues, BO_α es la antiimagen por la aplicación continua $x \mapsto (x, a)$ tanto de $\leq_{\Sigma^1_1}$ como de $\leq_{\Pi^1_1}$, luego es[4] $\mathbf{\Delta}^1_1$. Trivialmente,

$$\{x \in \mathrm{BO} \mid \|x\| < \alpha\} = \bigcup_{\beta<\alpha} \mathrm{BO}_\beta$$

y el tercer conjunto del enunciado es la diferencia de los dos anteriores. ■

Ahora necesitamos el concepto siguiente:

Definición 4.20 El *orden de Brouwer-Kleene* en $\omega^{<\omega}$ es el orden total dado por $s \preceq t$ si y sólo si $t \subset s$ o $s(n) < t(n)$, donde n es el mínimo número natural tal que $s(n) \neq t(n)$. Es fácil ver que se trata ciertamente de una relación de orden.

[4]Notemos que la aplicación es, de hecho, aritmética en a, luego BO_α es $\Delta^1_1(a)$.

Teorema 4.21 *Sea R un subárbol de $\omega^{<\omega}$, sea $\leq$ la relación inversa a la inclusión y $\preceq$ el orden de Brouwer-Kleene. Entonces $(R, \leq)$ está bien fundado si y sólo si $(R, \preceq)$ está bien ordenado.*

DEMOSTRACIÓN: Un orden total es un buen orden si y sólo si está bien fundado, luego en realidad sólo hay que probar que una relación de orden está bien fundada en R si y sólo si lo está la otra. A su vez, la buena fundación equivale a que no existan sucesiones estrictamente decrecientes. Como $\preceq$ extiende a $\leq$, una implicación es evidente.

Si $\prec$ no está bien fundado sobre R, existe una sucesión $\{s_i\}_{i\in\omega}$ en R tal que $s_{i+1} \prec s_i$. Si existe una subsucesión en la que cada término extiende al anterior, ésta prueba que $\leq$ no está bien fundado. En caso contrario, existe una subsucesión en la que ningún término extiende al anterior y, quedándonos con ella, podemos suponer que $s_i \not\subset s_{i+1}$ para todo i. Sea n_i el menor natural tal que $s_i(n_i) > s_{i+1}(n_i)$. No puede haber infinitos n_i iguales entre sí, luego, tomando una subsucesión, podemos suponer que la sucesión $\{n_i\}_{i\in\omega}$ es estrictamente creciente. De este modo, la sucesión $s_i|_{n_i} \subset s_{i+1}|_{n_i} \subset s_{i+1}|_{n_{i+1}}$ prueba que $(R, \leq)$ no está bien fundado. ■

Teorema 4.22 *Si X es un espacio producto y $a \in \mathcal{N}$, un conjunto $A \subset X$ es $\Pi^1_1(a)$ si y sólo si existe una función $f : X \longrightarrow \mathcal{N}$ recursiva en a tal que $\bigwedge x \in X\ f(x) \in \mathrm{OT}$ y*

$$A(x) \leftrightarrow f(x) \in \mathrm{BO}.$$

DEMOSTRACIÓN: Como $\Pi^1_1(a)$ tiene la propiedad de sustitución (por el teorema 3.48) y BO es Π^1_1, la existencia de f implica que A es $\Pi^1_1(a)$. Recíprocamente, si A es $\Pi^1_1(a)$, sea A' un conjunto Π^1_1 tal que $A(x) \leftrightarrow A'(x, a)$. Existe un conjunto A'' semirrecursivo tal que

$$A(x) \leftrightarrow \bigwedge y \in \mathcal{N}\ A''(x, y, a).$$

Por el teorema 3.15 existe $B \subset X \times \mathcal{N} \times \omega^2$ recursivo tal que

$$A(x) \leftrightarrow \bigwedge y \in \mathcal{N} \bigvee m \in \omega\ B(x, a, \bar{y}(m), m).$$

Para cada $x \in X$, sea

$$T(x, a) = \{n \in \omega \mid \neg B(x, a, n, \ell(n))\}.$$

Claramente $T(x, a)$ codifica un árbol en ω (es decir, las sucesiones de $\omega^{<\omega}$ cuyos códigos están en $T(x, a)$ forman un árbol) y

$$A(x) \leftrightarrow \bigwedge y \in \mathcal{N} \bigvee m \in \omega\ \bar{y}(m) \notin T(x, a) \leftrightarrow T(x, a) \text{ está bien fundado.}$$

Consideramos ahora la codificación del orden de Brouwer-Kleene restringido a $T(x, a)$, es decir,

$$m\, R_{x,a}\, n \leftrightarrow m, n \in T(x, a) \wedge (n \subset m \vee$$
$$\bigvee i < \ell(m)(i < \ell(n) \wedge \bigwedge j < i\ m_j = n_j \wedge m_i < n_i)).$$

Teniendo en cuenta que $m \in T(x,a)$ equivale a $\neg B(x,a,m,\ell(m))$, es claro que la relación R es recursiva (como subconjunto de $\omega^2 \times X \times \mathcal{N}$). Por lo tanto, la función

$$f(x)(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n_0^2 \, R_{x,a} \, n_1^2, \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

es recursiva en a, y $f(x) \in \mathrm{OT}$, puesto que codifica el orden de Brouwer-Kleene restringido a $T(x)$. Además

$$A(x) \leftrightarrow (T(x), \leq_{f(x)}) \text{ está bien ordenado } \leftrightarrow f(x) \in \mathrm{BO}. \qquad \blacksquare$$

El teorema anterior implica obviamente que los conjuntos $\mathbf{\Pi}^1_1$ de un espacio producto X son precisamente las antiimágenes de BO por aplicaciones continuas $f : X \longrightarrow \mathcal{N}$.

De aquí se sigue que BO no es $\mathbf{\Sigma}^1_1$, por el mismo argumento elemental empleado en el teorema 1.60. También tenemos una prueba alternativa del teorema 1.53: todo subconjunto $\mathbf{\Pi}^1_1$ de $\mathcal{N}^s$ es unión de $\aleph_1$ conjuntos de Borel (antiimágenes continuas de los conjuntos BO_α) y, como todos los espacios polacos no numerables son Borel-isomorfos (y el resultado es trivial para los espacios numerables), podemos concluir que el teorema es cierto para espacios polacos arbitrarios.

Veamos ahora una versión de los resultados anteriores con códigos en ω en lugar de en $\mathcal{N}$:

Definición 4.23 Para cada $a \in \mathcal{N}$, llamamos

$$\mathrm{BO}_a = \{e \in \omega \mid \{e\}^{\omega,\omega}_{\Sigma^0_1(a)} \in \mathrm{BO}\}.$$

Teorema 4.24 *Si* $a \in \mathcal{N}$*, el conjunto* BO_a *es* $\Pi^1_1(a)$*.*

DEMOSTRACIÓN: Recordemos que $\{e\}^{\omega,\omega}_{\Sigma^0_1(a)}(n) = U^{\omega,\omega}_{\Sigma^0_1(a)}(e,n)$, de modo que

$$\{e\}^{\omega,\omega}_{\Sigma^0_1(a)}(n)\!\downarrow \leftrightarrow \bigvee m \in \omega \bigwedge u \in \omega (m = u \leftrightarrow G^{\omega\times\omega}_{\Sigma^0_1(a)}(e,u,n)),$$

luego $\{e\}^{\omega,\omega}_{\Sigma^0_1(a)} \in \mathcal{N} \leftrightarrow \bigwedge n \in \omega \bigvee m \in \omega \bigwedge u \in \omega (m = u \leftrightarrow G^{\omega\times\omega}_{\Sigma^0_1(a)}(e,u,n))$, luego el conjunto

$$\{e \in \omega \mid \{e\}^{\omega,\omega}_{\Sigma^0_1(a)} \in \mathcal{N}\}$$

es $\Delta^1_1(a)$. Ahora observamos que

$$e \in \mathrm{BO}_a \leftrightarrow \{e\}^{\omega,\omega}_{\Sigma^0_1(a)} \in \mathcal{N} \land \bigwedge x \in \mathcal{N} ((\bigwedge n \in \omega \; x(n) = \{e\}^{\omega,\omega}_{\Sigma^0_1(a)}(n)) \to x \in \mathrm{BO})$$

$$\leftrightarrow \{e\}^{\omega,\omega}_{\Sigma^0_1(a)} \in \mathcal{N} \land \bigwedge x \in \mathcal{N} (\bigwedge n \in \omega \; G^{\omega\times\omega}_{\Sigma^0_1(a)}(e, x(n), n) \to x \in \mathrm{BO})$$

y, como sabemos que BO es Π^1_1, concluimos que BO_a es $\Pi^1_1(a)$. $\blacksquare$

Teorema 4.25 *Si* $a \in \mathcal{N}$ *y* $A \subset \omega^r$ *es* $\Pi^1_1(a)$*, entonces existe una aplicación* $f : \omega^r \longrightarrow \omega$ *recursiva tal que* $A = f^{-1}[\mathrm{BO}_a]$*.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $g : \omega^r \longrightarrow \mathcal{N}$ recursiva en a según el teorema 4.22 y sea $e_0 \in \omega$ tal que

$$\{e_0\}^{\omega^r\times\omega,\omega}_{\Sigma^0_1(a)}(e,i) = g(e)(i).$$

Sea $f : \omega^r \longrightarrow \omega$ la función recursiva dada por $f(e) = S^{\omega^r,\omega,\omega}_{\Sigma^0_1(a)}(e_0, e)$. Así

$$\{f(e)\}^{\omega,\omega}_{\Sigma^0_1(a)}(i) = \{e_0\}^{\omega^r\times\omega,\omega}_{\Sigma^0_1(a)}(e,i) = g(e)(i),$$

es decir, $\{f(e)\}^{\omega,\omega}_{\Sigma^0_1(a)} = g(e)$. Así,

$$A(n) \leftrightarrow g(n) \in \mathrm{BO} \leftrightarrow \{f(e)\}^{\omega,\omega}_{\Sigma^0_1(a)} \in \mathrm{BO} \leftrightarrow f(e) \in \mathrm{BO}_a.$$

■

Como existen subconjuntos de ω que son $\Pi^1_1(a)$ pero no $\Sigma^1_1(a)$, concluimos que BO_a es uno de ellos.

El cardinal Θ Como aplicación del conjunto BO presentamos un cardinal de gran relevancia en la teoría descriptiva de conjuntos sin el axioma de elección:

Definición 4.26 Llamaremos

$$\Theta = \sup\{\alpha \mid \bigvee f\ f : \mathcal{N} \longrightarrow \alpha \text{ suprayectiva}\}.$$

Teorema 4.27 Θ *es un cardinal (un álef)* $\geq \aleph_2$. *Además, para todo ordinal* $\alpha > 0$, *existe* $f : \mathcal{N} \longrightarrow \alpha$ *suprayectiva si y sólo si* $\alpha < \Theta$.

DEMOSTRACIÓN: Probamos en primer lugar que $\Theta \in \Omega$, es decir, que no existen aplicaciones suprayectivas de $\mathcal{N}$ en ordinales arbitrariamente grandes. En efecto, si existe $f : \mathcal{N} \longrightarrow \alpha$ es suprayectiva, podemos definir $g : \alpha \longrightarrow \mathcal{PN}$ inyectiva dada por $g(\delta) = f^{-1}[\delta]$, luego $\mathcal{PN}$ tiene un subconjunto que admite un buen orden de ordinal α, luego $\alpha \leq \aleph(\mathcal{N})$, donde el segundo miembro es el número de Hartogs[5] de $\mathcal{N}$.

Observemos ahora que si $0 < \alpha \leq \beta$, entonces existe una aplicación $\beta \longrightarrow \alpha$ suprayectiva, luego si existe una aplicación $\mathcal{N} \longrightarrow \beta$ suprayectiva también existe una aplicación $\mathcal{N} \longrightarrow \alpha$ suprayectiva. Por lo tanto, si $0 < \alpha < \Theta$, existe un $\beta > \alpha$ tal que existe una aplicación $\mathcal{N} \longrightarrow \beta$ suprayectiva, luego también existe $f : \mathcal{N} \longrightarrow \alpha$ suprayectiva.

Recíprocamente, si existe $f : \mathcal{N} \longrightarrow \alpha$ suprayectiva, ha de ser $\alpha < \Theta$, pues en caso contrario existiría una aplicación $\mathcal{N} \longrightarrow \Theta$ suprayectiva y podríamos componerla con una biyección $\Theta \longrightarrow \Theta + 1$ para concluir que $\Theta + 1 \leq \Theta$.

Veamos ahora que Θ es un cardinal. Si existe una biyección $g : \kappa \longrightarrow \Theta$ con $\kappa < \Theta$, entonces existe una aplicación $\mathcal{N} \longrightarrow \kappa$ suprayectiva, la cual puede componerse con g y nos da una aplicación $\mathcal{N} \longrightarrow \Theta$ suprayectiva, contradicción.

[5]Véase [TC 5.23]. Esencialmente, lo que sucede es que podemos definir el conjunto $B = \{R \in \mathcal{P}(\mathcal{N}^2) \mid R$ es un buen orden en un subconjunto de $\mathcal{N}\}$ y a partir de él, por reemplazo, el conjunto $\aleph(\mathcal{N}) = \{\mathrm{ord}(\mathcal{N}, R) \mid R \in B\}$, que se prueba fácilmente que es un álef.

Notemos por último que existe $f : \mathcal{N} \longrightarrow \omega_1$ suprayectiva, por ejemplo la dada por

$$f(x) = \begin{cases} \|x\| & \text{si } x \in \mathrm{BO}, \\ 0 & \text{si } x \notin \mathrm{BO}. \end{cases}$$

Por lo tanto, si $\omega_1 \leq \alpha < \omega_2$, existe también $g : \mathcal{N} \longrightarrow \alpha$ suprayectiva (basta componer f con una biyección entre ω_1 y α) y esto prueba que $\aleph_2 \leq \Theta$. ■

Bajo AE es claro que $\Theta = (2^{\aleph_0})^+$, luego la hipótesis del continuo equivale a que $\Theta = \aleph_2$.

Representaciones en términos de árboles En este apartado refinamos los teoremas 1.61 y 1.62. Para ello observemos que la biyección canónica $\omega^{<\omega} \longrightarrow \omega$ nos permite codificar un árbol en ω mediante un subconjunto de ω y, más en general, un árbol multidimensional en ω^s mediante un subconjunto de ω^s. En la práctica no distinguiremos entre un árbol como subconjunto $R \subset (\omega^{<\omega})^s$ de su imagen $R \subset \omega^s$.

Ahora observamos que si A es un subconjunto $\Pi^1_1(a)$ de $\mathcal{N}^s$, entonces

$$A(x) \leftrightarrow \bigwedge z \in \mathcal{N}\, A'(x, z, a),$$

para cierto conjunto A' de tipo Σ^0_1. El teorema 3.12 nos da un conjunto recursivo $B \subset \omega^{s+3}$ tal que

$$A(x) \leftrightarrow \bigwedge z \in \mathcal{N} \bigvee m \in \omega\ B(m, \bar{x}_1(m), \ldots, \bar{x}_s(m), \bar{z}(m), \bar{a}(m)),$$

donde podemos exigir que

$$B(m, \bar{x}_1(m), \ldots, \bar{x}_s(m), \bar{z}(m), \bar{a}(m)) \land m \leq m'$$

$$\rightarrow B(m', \bar{x}_1(m'), \ldots, \bar{x}_s(m'), \bar{z}(m'), \bar{a}(m')).$$

Si llamamos

$$R = \{(n_1, \ldots, n_s, n) \in \omega^s \mid \bigvee m \in \omega (m = \ell(n_1) \land \cdots \land m = \ell(n_s) \land m = \ell(n)$$

$$\land\ (m, n_1, \ldots, n_s, n, \bar{a}(m)) \notin B)\},$$

tenemos que R es $\Sigma^0_1(a)$ y cumple que si $x_1, \ldots, x_s, z \in \mathcal{N}$ y $m \leq m'$, entonces

$$R(\bar{x}_1(m'), \ldots \bar{x}_s(m'), \bar{z}(m')) \rightarrow R(\bar{x}_1(m), \ldots, \bar{x}_s(m), \bar{z}(m)).$$

Claramente, esto significa que R es la codificación de un árbol en ω^{s+1}, y además cumple que

$$A(x) \leftrightarrow \bigwedge z \in \mathcal{N} \bigvee m \in \omega\ \neg R(\bar{x}_1(m), \ldots, \bar{x}_s(m), \bar{z}(m)).$$

Así pues, hemos obtenido la caracterización siguiente de los conjuntos $\Pi^1_1(a)$:

Teorema 4.28 *Dado $a \in \mathcal{N}$, un conjunto $A \subset \mathcal{N}^s$ es $\Pi^1_1(a)$ si y sólo si existe un árbol R en ω^{s+1} aritmético en a (y, de hecho, podemos tomarlo $\Sigma^0_1(a)$) tal que, para todo $x \in \mathcal{N}^s$,*

$$A(x) \leftrightarrow \bigwedge z \in \mathcal{N} \bigvee m \in \omega\ \neg R(\bar{x}_1(m), \ldots, \bar{x}_s(m), \bar{z}(m)).$$

Equivalentemente:

$$A(x) \leftrightarrow \bigwedge z \in \mathcal{N} \bigvee m \in \omega\ \neg R_x(\bar{z}(m)) \leftrightarrow R_x \text{ está bien fundado,}$$

considerando en R_x el orden inverso a la inclusión de sucesiones finitas.

De aquí obtenemos a su vez una representación para los conjuntos $\Sigma^1_2(a)$:

Teorema 4.29 *Sea $a \in \mathcal{N}$ y sea $A \subset \mathcal{N}^s$ un conjunto $\Sigma^1_2(a)$. Entonces existe un árbol R en $\omega^s \times \omega_1$, $R \in L[a]$, tal que*

$$A(x) \leftrightarrow R_x \text{ no está bien fundado.}$$

Demostración: La prueba es esencialmente la misma que la de 1.62. Partimos de que $A = \bigvee y\, B$, donde $B \subset \mathcal{N}^s \times \mathcal{N}$ es un conjunto $\Pi^1_1(a)$. Por el teorema anterior existe un árbol R' en $\omega^{s+1} \times \omega$ aritmético en a tal que

$$x \in A \leftrightarrow \bigvee y \in \mathcal{N}\ R'_{(x,y)} \text{ está bien fundado.}$$

Ahora observamos que $R' \in L[a]$ porque es fácil ver[6] que los conjuntos aritméticos en a son los mismos en todos los modelos transitivos de ZFC que contengan a a. Es fácil ver que los árboles R'' y R que se construyen en la prueba de 1.62 siguen estando en $L[a]$ (sin más que considerar la enumeración canónica $\{s_n\}_{n\in\omega} \in L$ de $\omega^{<\omega}$ y una biyección constructible $\omega \times \omega_1 \longrightarrow \omega_1$). ■

4.4 Códigos de Borel

Presentamos en esta sección un ejemplo relevante de conjunto Π^1_1, cuyos elementos codifican los conjuntos de Borel de cualquier espacio polaco.

Definición 4.30 Para cada $i \in \omega$ definimos las funciones $u, v_i : \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{N}$ dadas por

$$u(c)(n) = c(n+1), \qquad v_i(c)(n) = c(\langle i, n\rangle + 1).$$

Para cada ordinal $0 < \alpha < \omega_1$ definimos como sigue los conjuntos Σ^c_α, $\Pi^c_\alpha \subset \mathcal{N}$:

a) $c \in \Sigma^c_1$ si y sólo si $c(0) \geq 2$.

b) $c \in \Sigma^c_\alpha$ si y sólo si $c \in \bigcup\limits_{0<\delta<\alpha} (\Sigma^c_\delta \cup \Pi^c_\delta)$ o bien

$$c(0) = 1 \wedge \bigwedge i \in \omega\ v_i(c) \in \bigcup_{0<\delta<\alpha} (\Sigma^c_\delta \cup \Pi^c_\delta).$$

c) $c \in \Pi^c_\alpha$ si y sólo si $c \in \bigcup\limits_{0<\delta<\alpha} (\Sigma^c_\delta \cup \Pi^c_\delta)$ o bien $c(0) = 0 \wedge u(c) \in \Sigma^c_\alpha$.

[6] Por ejemplo, por la caracterización aritmética 4.13.

Llamaremos *códigos de Borel* a los elementos de

$$\mathrm{CB} = \bigcup_{0<\alpha<\omega_1} \Sigma^c_\alpha = \bigcup_{0<\alpha<\omega_1} \Pi^c_\alpha.$$

La definición y el teorema siguientes explican la definición anterior:

Definición 4.31 Sea X un espacio polaco en el que hemos fijado una enumeración $\{U_n\}_{n\in\omega}$ de una base. Para cada $c \in \mathrm{CB}$ definimos $B_c \subset X$ como sigue:

a) Si $c(0) > 1$ entonces $B_c = \bigcup\{U_n \mid c(n+1) = 1\}$.

b) Si $c(0) = 1$ entonces $B_c = \bigcup\limits_{i\in\omega} B_{v_i(c)}$.

c) Si $c(0) = 0$ entonces $B_c = X \setminus B_{u(c)}$.

De este modo, los códigos de Borel codifican los conjuntos de Borel de cualquier espacio polaco X:

Teorema 4.32 *Si X es un espacio polaco, su σ-álgebra de Borel cumple*

$$\mathcal{B}(X) = \{B_c \mid c \in \mathrm{CB}\}.$$

DEMOSTRACIÓN: Vamos a probar, más precisamente, que para cada $\alpha < \omega_1$ no nulo:

$$\boldsymbol{\Sigma}^0_\alpha = \{B_c \mid c \in \Sigma^c_\alpha\}, \qquad \boldsymbol{\Pi}^0_\alpha = \{B_c \mid c \in \boldsymbol{\Pi}^c_\alpha\}.$$

En efecto, los códigos $c \in \Sigma^c_1$ son los que cumplen $c(0) \geq 2$ y, por lo demás, son arbitrarios, y entonces $B_c = \bigcup\{U_n \mid c(n+1) = 1\}$. Es claro que, cuando c recorre Σ^c_1, los conjuntos B_c recorren todas las uniones numerables de abiertos básicos de X, es decir, recorren todos los abiertos, todos los conjuntos $\boldsymbol{\Sigma}^0_1$ de X, luego la igualdad de la izquierda es cierta para $\alpha = 1$.

Se cumple que $c \in \Pi^c_1$ si y sólo si $c(0) = 0$ y $u(c) \in \Sigma^c_1$, de modo que cualquier código de Σ^c_1 es de la forma $u(c)$, para un $c \in \Pi^1_1$. Por lo tanto, como $B_c = X \setminus B_{u(c)}$, tenemos que, cuando c recorre Π^c_1, los conjuntos B_c recorren todos los complementarios de los conjuntos de $\boldsymbol{\Sigma}^0_1$, es decir, recorren todos los cerrados, los conjuntos $\boldsymbol{\Pi}^0_1$ de X, luego tenemos ambas igualdades probadas para $\alpha = 1$. Supongamos que ambas igualdades son ciertas para $0 < \delta < \alpha$.

Si $c \in \Sigma^c_\alpha$, o bien $c \in \bigcup\limits_{0<\delta<\alpha} (\Sigma^c_\delta \cup \Pi^c_\delta)$, en cuyo caso, por hipótesis de inducción,

$$B_c \in \bigcup_{0<\delta<\alpha} (\boldsymbol{\Sigma}^0_\delta \cup \boldsymbol{\Pi}^0_\delta) \subset \boldsymbol{\Sigma}^0_\alpha,$$

o bien $c(0) = 1$ y $\bigwedge i \in \omega\ v_i(c) \in \bigcup\limits_{0<\delta<\alpha} (\Sigma^c_\delta \cup \Pi^c_\delta)$, luego por hipótesis de inducción

$$\bigwedge i \in \omega\ B_{v_i(c)} \in \bigcup_{0<\delta<\alpha} (\boldsymbol{\Sigma}^0_\delta \cup \boldsymbol{\Pi}^0_\delta) \subset \boldsymbol{\Sigma}^0_\alpha,$$

luego

$$B_c = \bigcup_{i\in\omega} B_{v_i(c)} \in \mathbf{\Sigma}^0_\alpha.$$

Más aún, si $\{A_i\}_{i\in\omega}$ es una familia de conjuntos en $\bigcup\limits_{0<\delta<\alpha} \mathbf{\Pi}^0_\delta$, por hipótesis de inducción cada uno de ellos será de la forma $A_i = B_{c_i}$, con $c_i \in \bigcup\limits_{0<\delta<\alpha} (\mathbf{\Sigma}^0_\delta \cup \mathbf{\Pi}^0_\delta)$ y es claro que podemos construir $c \in \mathcal{N}$ tal que $c(0) = 1$ y $v_i(c) = c_i$ para todo i, con lo que $c \in \Sigma^c_\alpha$ y

$$B_c = \bigcup_{i\in\omega} B_{v_i(c)} = \bigcup_{i\in\omega} A_i.$$

Esto prueba que, cuando c recorre Σ^c_α, los conjuntos B_c recorren todo $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha$.

Finalmente, si $c \in \Pi^c_\alpha$, o bien $c \in \bigcup\limits_{0<\delta<\alpha} (\Sigma^c_\delta \cup \Pi^c_\delta)$, en cuyo caso, por hipótesis de inducción,

$$B_c \in \bigcup_{0<\delta<\alpha} (\mathbf{\Sigma}^0_\delta \cup \mathbf{\Pi}^0_\delta) \subset \mathbf{\Pi}^0_\alpha,$$

o bien $c(0) = 0$ y $u(c) \in \Sigma^c_\alpha$, con lo que $B_{u(c)} \in \mathbf{\Sigma}^0_\alpha$ por lo que acabamos de probar y $B_c = X \setminus B_{u(c)} \in \mathbf{\Pi}^0_\alpha$. Por otra parte, hemos visto que todo elemento de $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha$ es de la forma B_c, para cierto $c \in \Sigma^c_\alpha$, y es fácil construir $c' \in \mathcal{N}$ tal que $c'(0) = 0$ y $u(c') = c$, con lo que $c' \in \Pi^c_\alpha$ y $B_{c'} = X \setminus B_c$, luego cuando c recorre Π^c_α tenemos que B_c recorre todo $\mathbf{\Pi}^0_\alpha$. ■

Nota Observemos que el conjunto B_c no sólo depende del código c sino también de la elección de la enumeración $\{U_n\}_{n\in\omega}$ de la base de X. Nos va a interesar especialmente la codificación de los conjuntos de Borel del espacio $\mathcal{N}$, y en este caso tomaremos la enumeración dada por

$$U_n = B_{s_n} = \{x \in \mathcal{N} \mid x|_{\ell(s_n)} = s_n\},$$

donde $s_n \in \omega^{<\omega}$ es la sucesión dada por $\langle s_n\rangle_\infty = n$. Es fácil definir análogamente enumeraciones sencillas de bases de los espacios $\mathcal{C}$, o $\mathbb{R}$ o $\mathbb{I}$. ■

Una consecuencia sencilla es la siguiente:

Teorema 4.33 *Si X es un espacio polaco no numerable, entonces $\mathcal{B}(X) \neq \mathcal{P}X$.*

Demostración: Los códigos de Borel proporcionan una aplicación suprayectiva $\mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{B}(X)$. Si se diera la igualdad, como $|X| = |\mathcal{N}|$ y $|\mathcal{P}X| = |\mathcal{PN}|$, tendríamos una aplicación $\mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{PN}$ suprayectiva, lo cual es imposible. ■

En la prueba del teorema anterior hemos evitado el uso del axioma de elección. Si no lo esquivamos obtenemos lo siguiente:

Teorema 4.34 (AE) *Si X es un espacio polaco infinito, entonces tiene exactamente $\mathfrak{c}$ subconjuntos de Borel.*

Demostración: Si X es numerable entonces $\mathcal{B}(X) = \mathcal{P}X$ y el resultado es trivial. Si X es no numerable, la aplicación $\mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{B}(X)$ dada por los códigos de Borel implica que $|\mathcal{B}(X)| \leq |\mathcal{N}| = \mathfrak{c}$. Para la desigualdad contraria consideramos la aplicación inyectiva $X \longrightarrow \mathcal{B}(X)$ dada por $x \mapsto \{x\}$. ■

Notemos que si el espacio polaco X es no numerable, entonces tiene $2^{\mathfrak{c}}$ subconjuntos.

Teorema 4.35 *El conjunto* CB *es* Π^1_1.

Demostración: Consideramos en $\mathcal{N}$ la relación E dada por:

$$x\,E\,y \leftrightarrow (y(0) = 0 \land x = u(y)) \lor (y(0) = 1 \land \bigvee i \in \omega\ x = v_i(y)),$$

donde u y v_i son las funciones definidas en 4.30. Claramente E es aritmética y cumple lo siguiente:

a) Si $y \in \Sigma^c_1$, entonces y es E-minimal.

b) Si $y \in \Pi^c_\alpha$ y $x\,E\,y$, entonces $x \in \Sigma^c_\alpha$.

c) Si $y \in \Sigma^c_\alpha$ con $\alpha > 1$ y $x\,E\,y$, entonces $x \in \bigcup\limits_{0<\delta<\alpha} (\Sigma^c_\delta \cup \Pi^c_\delta)$.

Basta ver que

$$y \in \mathrm{CB} \leftrightarrow \neg \bigvee z \in \mathcal{N}(z_0 = y \land \bigwedge i \in \omega\ z_{i+1}\,E\,z_i),$$

pues esto implica que CB es Π^1_1.

En efecto, si $y \in \mathrm{CB}$ pero existiera la sucesión decreciente $\{z_i\}_{i\in\omega}$, las propiedades anteriores implican que cada $z_i \in \mathrm{CB}$ y, si tomamos el mínimo α_i tal que $z_i \in \Sigma^c_{\alpha_i} \cup \Pi^c_{\alpha_i}$, la sucesión de ordinales $\{\alpha_i\}_{i\in\omega}$ sería decreciente, lo cual es absurdo.

Recíprocamente, si se cumple la condición indicada, la relación E está bien fundada en la clausura de y respecto a E, con lo que podemos razonar por inducción sobre E que todo elemento de dicha clausura (en particular y) está en CB. ■

No sólo el conjunto de códigos es Π^1_1, sino también la relación de codificación. Más aún:

Teorema 4.36 *Existen relaciones P y Q en $\mathcal{N}^2$ que son Σ^1_1 y Π^1_1, respectivamente, tales que, si $x \in \mathcal{N}$ y $c \in \mathrm{CB}$, entonces*

$$x \in B_c \leftrightarrow P(x, c) \leftrightarrow Q(x, c).$$

Demostración: Fijemos $x \in \mathcal{N}$ y $c \in \mathrm{CB}$, y sea $T \subset \mathcal{N}$ la clausura de c en $\mathcal{N}$ respecto de la relación E definida en la prueba del teorema anterior (a la que añadimos el propio c). Como la extensión respecto a E de cada elemento de $\mathcal{N}$ es numerable, es claro que T es numerable. Además sabemos que E está bien fundada en T. Sea $h : T \longrightarrow 2$ la función definida como sigue por E-recursión:

a) Si $y(0) \geq 2$, entonces $h(y) = 1 \leftrightarrow \bigvee n \in \omega (y(n) = 1 \land x \in B_{s_n})$ (donde $\{s_n\}_{n\in\omega}$ es la enumeración de $\omega^{<\omega}$ considerada en la definición 4.31).

b) Si $y(0) = 1$, entonces $h(y) = 1 \leftrightarrow \bigvee i \in \omega \; h(v_i(y)) = 1$.

c) Si $y(0) = 0$, entonces $h(y) = 1 \leftrightarrow h(u(y)) = 0$.

Claramente, para cada $y \in T$ se cumple que $x \in B_y \leftrightarrow h(y) = 1$.

Ahora podemos definir:

$$P(a, c) \leftrightarrow \bigvee Th(T \subset \mathcal{N} \land T \text{ es numerable} \land c \in T \land$$

$$\bigwedge yz(y\, E\, z \land z \in T \to y \in T) \land h : T \longrightarrow 2 \land (*) \land h(c) = 1),$$

$$Q(a, c) \leftrightarrow \bigwedge Th(T \subset \mathcal{N} \land T \text{ es numerable} \land c \in T \land$$

$$\bigwedge yz(y\, E\, z \land z \in T \to y \in T) \land h : T \longrightarrow 2 \land (*) \to h(c) = 1),$$

donde $(*)$ es la conjunción de las tres fórmulas a), b), c) anteriores (precedida de $\bigwedge y \in T$). Es claro que P y Q equivalen a $x \in B_c$ (suponiendo que $c \in \mathrm{CB}$). Falta probar que son Σ^1_1 y Π^1_1 respectivamente. La clave es que T puede codificarse como $\{w_i\}_{i\in\omega}$, para cierto $w \in \mathcal{N}$, lo cual convierte en cuantificaciones sobre ω todas las cuantificaciones sobre T:

$$P(a, c) \leftrightarrow \bigvee wh \in \mathcal{N}$$

$$\bigwedge i \in \omega((w_i(0) = 0 \to \bigvee j \in \omega \; w_j = u(w_i)) \land (w_i(0) = 1 \to \bigvee jk(w_j = v_k(w_i)))$$

$$\land \bigwedge i \in \omega((*) \land (\bigvee i \in \omega \; (c = w_i \land h(i) = 1)),$$

donde $(*)$ abrevia ahora a la conjunción de

a) $w_i(0) \geq 2 \to (h(i) = 1 \leftrightarrow \bigvee n(w_i(n) = 1 \land x \in B_{s_n}))$.

b) $w_i(0) = 1 \to (h(i) = 1 \leftrightarrow \bigvee jk(w_j = v_k(w_i) \land h(j) = 1))$.

c) $w_i(0) = 0 \to (h(i) = 1 \leftrightarrow \bigvee j(w_j = u(w_i) \land h(j) = 0))$.

Así es evidente que toda la fórmula que define a P tras los cuantificadores $\bigvee wh$ define un conjunto aritmético, luego P es Σ^1_1. El caso de Q se trata con variaciones mínimas. ■

Ahora es fácil probar:

Teorema 4.37 *Las relaciones siguientes son* Π^1_1*:*

a) $c \in \mathrm{CB}$,

b) $c \in \mathrm{CB} \land x \in B_c$,

c) $c, d \in \mathrm{CB} \land B_c \subset B_d$,

d) $c, d \in \mathrm{CB} \land B_c = B_d$, *e)* $c \in \mathrm{CB} \wedge B_c = \varnothing$.

f) $c, d, e \in \mathrm{CB} \wedge B_e = B_c \cup B_d$,

g) $c, d, e \in \mathrm{CB} \wedge B_e = B_c \cap B_d$,

h) $c, d \in \mathrm{CB} \wedge B_d = \mathcal{N} \setminus B_c$,

i) $c, d, e \in \mathrm{CB} \wedge B_e = B_c \bigtriangleup B_d$,

j) $\{c_n\}_{n\in\omega} \subset \mathrm{CB} \wedge d \in \mathrm{CB} \wedge B_d = \bigcup\limits_{n\in\omega} B_{c_n}$.

k) $\{c_n\}_{n\in\omega} \subset \mathrm{CB} \wedge d \in \mathrm{CB} \wedge B_d = \bigcap\limits_{n\in\omega} B_{c_n}$.

Demostración: a) es el teorema 4.35. Para las restantes basta considerar las relaciones P y Q dadas por el teorema anterior:

$$\begin{array}{rcl} c \in \mathrm{CB} \wedge x \in B_c & \leftrightarrow & c \in \mathrm{CB} \wedge Q(x, c). \\ c, d \in \mathrm{CB} \wedge B_c \subset B_d & \leftrightarrow & c, d \in \mathrm{CB} \wedge \bigwedge x \in \mathcal{N}(P(x, c) \rightarrow Q(x, d)), \\ c, d \in \mathrm{CB} \wedge B_c = B_d & \leftrightarrow & c, d \in \mathrm{CB} \wedge B_c \subset B_d \wedge B_d \subset B_c, \\ c \in \mathrm{CB} \wedge B_c = \varnothing & \leftrightarrow & c \in \mathrm{CB} \wedge \bigwedge x \in \mathcal{N} \neg P(c, x), \end{array}$$

$$c, d, e \in \mathrm{CB} \wedge B_e = B_c \cup B_d \leftrightarrow c, d, e \in \mathrm{CB} \wedge \bigwedge x \in \mathcal{N}(P(x, e) \rightarrow Q(x, c) \vee Q(x, d))$$
$$\wedge \bigwedge x \in \mathcal{N}(P(x, c) \vee P(x, d) \rightarrow Q(x, e)),$$

Omitimos las comprobaciones siguientes, porque son análogas y probamos únicamente el último apartado:

$$\{c_n\}_{n\in\omega} \subset \mathrm{CB} \wedge d \in \mathrm{CB} \wedge B_d = \bigcap_{n\in\omega} B_{c_n} \leftrightarrow \bigwedge n \in \omega \bigwedge x \in \mathcal{N}(x = c_n \rightarrow x \in \mathrm{CB})$$
$$\wedge\, d \in \mathrm{CB} \wedge \bigwedge x \in \mathcal{N}(P(x, d) \rightarrow \bigwedge n \in \omega \bigwedge y \in \mathcal{N}(y = c_n \rightarrow Q(x, y)) \wedge$$
$$\bigwedge x \in \mathcal{N}(\bigwedge n \in \omega \bigvee y \in \mathcal{N}(y = c_n \wedge P(x, y)) \rightarrow Q(x, d)).$$

■

Es fácil ver que todo lo anterior vale también para subconjuntos de Borel de $\mathcal{N} \times \mathcal{N}$, pero también es fácil deducirlo identificándolos con los subconjuntos de Borel de $\mathcal{N}$ a través del homeomorfismo canónico $i : \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{N} \times \mathcal{N}$, de modo que, por definición $B_c^{\mathcal{N}\times\mathcal{N}} = i[B_c^{\mathcal{N}}]$. Esto hace que todas las propiedades anteriores se cumplan trivialmente con $\mathcal{N} \times \mathcal{N}$ en lugar de $\mathcal{N}$. Por ejemplo, la relación $c, d, e \in \mathrm{CB} \wedge B_e^{\mathcal{N}\times\mathcal{N}} = B_c^{\mathcal{N}\times\mathcal{N}} \cap B_d^{\mathcal{N}\times\mathcal{N}}$ es Π_1^1, pues equivale a

$$c, d, e \in \mathrm{CB} \wedge B_e^{\mathcal{N}} = B_c^{\mathcal{N}} \cap B_d^{\mathcal{N}},$$

que ya sabemos que lo es. No obstante, a las relaciones del teorema anterior hay que añadir una más:

$$c, d, e \in \mathrm{CB} \wedge B_e^{\mathcal{N}\times\mathcal{N}} = B_c^{\mathcal{N}} \times B_d^{\mathcal{N}} \leftrightarrow c, d, e \in \mathrm{CB} \wedge$$
$$\bigwedge xyz \in \mathcal{N}(z = f(x, y) \wedge P(z, e) \rightarrow Q(x, c) \wedge Q(y, d)) \wedge$$
$$\bigwedge xyz \in \mathcal{N}(z = f(x, y) \wedge P(x, c) \wedge P(y, d) \rightarrow Q(z, e).$$

4.5 Clases con normas y escalas

Presentamos aquí la versión efectiva de la teoría sobre clases normadas que tratamos en el capítulo II. La definición 2.14 de clase normada no requiere más modificación que la de aplicarla a una clase de conjuntos Γ no definida sobre todos los espacios polacos, sino únicamente sobre los espacios producto. Más aún, por simplicidad consideraremos únicamente espacios producto con $s \geq 1$, de modo que todos son homeomorfos a $\mathcal{N}$ (y el homeomorfismo se puede tomar aritmético).

Todas las consideraciones posteriores son válidas igualmente con esta restricción y con una mínima variante: en lugar de exigir a la clase Γ que sea cerrada para sustituciones continuas, basta exigir que sea cerrada para sustituciones aritméticas, ya que en dichas consideraciones únicamente usamos que la aplicación $(x, y) \mapsto (y, x)$ es continua y, por otra parte, también es aritmética. En cuanto al teorema 2.15, podemos adaptarlo como sigue:

Teorema 4.38 *Sea Γ una clase normada definida sobre los espacios producto que contenga los conjuntos aritméticos y que sea cerrada para uniones e intersecciones finitas y para sustituciones aritméticas. Entonces:*

a) Γ tiene la propiedad de reducción y $\neg\Gamma$ tiene la propiedad de separación.

b) Si existe un conjunto $\mathcal{N}$-universal para $\Gamma(\mathcal{N})$, entonces Γ no tiene la propiedad de separación y $\neg\Gamma$ no tiene la propiedad de reducción.

c) Si $\Gamma = \bigwedge n\, \Gamma$ entonces Γ tiene la propiedad de uniformización numérica.

Demostración: El apartado a) se demuestra adaptando trivialmente la prueba del apartado correspondiente de 2.15.

b) Adaptamos la prueba de 1.19 d). Al igual que allí, definimos los conjuntos U^0 y U^1 usando el homeomorfismo natural $\mathcal{N}^2 \cong \mathcal{N}$, que es aritmético, por lo que U^0 y U^1 están en Γ. Con ellos construimos el conjunto $V \in \Delta$ que no es exactamente $\mathcal{N}$-universal para $\Delta(\mathcal{N})$, sino que cumple que, para todo $A \in \Delta(\mathcal{N})$ existe un $x \in \mathcal{N}$ tal que $A = V_x$ (pero no todo V_x tiene por qué estar en $\Delta(\mathcal{N})$). Esto basta para que funcione el argumento de 1.16. En efecto, definimos $A = \{x \in \mathcal{N} \mid (x, x) \notin V\}$, que está en $\Delta(\mathcal{N})$ porque la aplicación $\mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{N} \times \mathcal{N}$ dada por $x \mapsto (x, x)$ es aritmética. Entonces, debería haber un $x \in \mathcal{N}$ tal que $V_x = A$, lo cual es absurdo.

c) La demostración de 2.15 es válida igualmente en este contexto. La única diferencia está en la justificación de que $R^* \in \Gamma(X \times \omega)$, donde

$$(x, n) \in R^* \leftrightarrow (x, n) \in R \land \bigwedge m \in \omega((x, n) \leq^* (x, m))$$
$$\land \bigwedge m \in \omega((x, n) <^* (x, m) \lor n \leq m)).$$

Ahora basta ver que las relaciones definidas tras los $\bigwedge m$ están en Γ, por ejemplo, para la primera de las dos, esto es así por que la relación $(x, n) \leq^* (x, m)$ es la antiimagen de $\leq^*$ por la aplicación aritmética $(x, m, n) \mapsto (x, n, x, m)$. ■

Teorema 4.39 *Si $a \in \mathcal{N}$, la clase $\Pi_1^1(a)$ es normada.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $A \subset \mathcal{N}^s$ un conjunto $\Pi_1^1(a)$. Por el teorema 4.22 existe una aplicación $f : \mathcal{N}^s \longrightarrow \mathcal{N}$ de tipo $\Delta_1^1(a)$ tal que $A = f^{-1}[\mathrm{BO}]$. Esto nos permite componer f con la norma en BO dada por el teorema 4.18. Se comprueba inmediatamente que la aplicación $f \times f : \mathcal{N}^s \times \mathcal{N}^s \longrightarrow \mathcal{N} \times \mathcal{N}$ es también $\Delta_1^1(a)$, luego las antiimágenes de las relaciones $\leq_{\Sigma_1^1}$ y $\leq_{\Pi_1^1}$ son $\Sigma_1^1(a)$ y $\Pi_1^1(a)$ respectivamente, y es claro que satisfacen la definición de norma.

En realidad falta demostrar que los subconjuntos $\Pi_1^1(a)$ de los espacios producto generales, es decir, de la forma $X = \omega^r \times \mathcal{N}^s$ (con $s \geq 1$) también admiten normas $\Pi_1^1(a)$, pero esto se sigue de la parte ya probada teniendo en cuenta que X es homeomorfo a $\mathcal{N}$ a través de un homeomorfismo Δ_1^1. ■

La demostración del teorema 2.18 se adapta trivialmente para probar la versión efectiva correspondiente:

Teorema 4.40 *Dado $a \in \mathcal{N}$, si la clase $\Pi_n^1(a)$ es normada, también lo es la clase $\Sigma_{n+1}^1(a)$.*

Por lo tanto, tenemos que las clases $\Pi_1^1(a)$ y $\Sigma_2^1(a)$ son normadas, con lo que en particular tienen la propiedad de reducción y la propiedad de uniformización numérica (pero no la de separación) y las clases $\Sigma_1^1(a)$ y $\Pi_2^1(a)$ tienen la propiedad de separación (pero no la de reducción).

Pasamos ahora a estudiar las clases con escalas y la uniformización. Para tratar con clases efectivas, la definición de escala requiere una precisión que en el caso clásico se cumplía trivialmente:

Para que una escala $\{\phi_n\}_{n\in\omega}$ en un conjunto $A \subset X$ sea una Γ escala, donde Γ es una clase definida sobre los espacios producto no numerables, exigiremos que las relaciones $x \leq_\Gamma^n y$ y $x \leq_{\neg\Gamma}^n y$ (que prueban que cada ϕ_n es una norma en Γ) estén en Γ y $\neg\Gamma$ respectivamente como un único par de relaciones ternarias en $X \times X \times \omega$, y no sólo como infinitas relaciones binarias en $X \times X$.

Con esta precisión, la prueba del teorema 2.22 se adapta sin dificultad:

Teorema 4.41 *Sea Γ una clase definida sobre los espacios producto no numerables que sea cerrada para uniones e intersecciones finitas, para antiimágenes Δ_1^1, para $\bigwedge n \in \omega$, $\bigvee n \in \omega$ y para $\bigwedge x \in \mathcal{N}$. Entonces, si Γ tiene escalas tiene la propiedad de uniformización.*

DEMOSTRACIÓN: Basta probar que todo conjunto $A \in \Gamma(\mathcal{N} \times \mathcal{N})$ puede uniformizarse en Γ. Para ello tomamos una escala $\{\phi_n\}_{n\in\omega}$ y, a partir de este punto, seguimos la demostración de 2.22 con los pocos cambios que comentamos a continuación.

Por la precisión que hemos hecho a la definición de escala en Γ, ahora tenemos que las relaciones $\preceq_n^*$ y $\prec_n^*$ están en $\Gamma(\mathcal{N} \times \mathcal{N} \times \omega)$, con lo que

$$C = \{(x, y, z, n) \in \mathcal{N} \times \mathcal{N} \times \mathcal{N} \times \omega \mid (x, y) \preceq_n^* (x, z)\}$$

está en Γ y, por lo tanto, también lo está

$$B^* = \{(x, y, n) \in \mathcal{N} \times \mathcal{N} \times \omega \mid \bigwedge z \in \mathcal{N}\ (x, y) \preceq_n^* (x, z)\}.$$

A su vez, esto implica que

$$B = \bigcap_{n \in \omega} B_n = \bigwedge n \in \omega\ B^*$$

también esté en Γ, y el resto de la prueba vale sin cambio alguno. ■

Teorema 4.42 *Si $a \in \mathcal{N}$, la clase $\Pi_1^1(a)$ tiene escalas.*

DEMOSTRACIÓN: Basta probar que todo $A \subset \mathcal{N}$ que sea $\Pi_1^1(a)$ tiene una escala en $\Pi_1^1(a)$. Según 4.22, existe una aplicación continua $f : \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{N}$ tal que $f[\mathcal{N}] \subset \mathrm{LO}$ y $A = f^{-1}[\mathrm{BO}]$, y en la prueba hemos visto que la podemos tomar $\Delta_1^1(a)$.

Consideremos la aplicación $g : \mathcal{N} \times \omega \longrightarrow \mathcal{N}$ tal que

$$\leq_{g(x,n)} = \{(u, v) \in \omega \times \omega \mid u \leq_x v <_x n\}.$$

Notemos que su gráfica es aritmética, pues

$$(x, n, y) \in G(g) \leftrightarrow \bigwedge uv \in \omega(y(\langle u, v\rangle) = 0 \leftrightarrow x(\langle u, v\rangle) = 0 \land x(\langle v, n\rangle) = 0$$

$$\land\ v \neq n) \land \bigwedge u \in \omega(y(u) = 1 \leftrightarrow y(u) \neq 0).$$

En particular g es Δ_1^1.

Sea $Z = \{(\beta, \gamma) \in \omega_1 \times \omega_1 \mid \gamma \leq \beta\}$ en el que consideramos el orden lexicográfico:

$$(\beta, \gamma) < (\beta', \gamma') \leftrightarrow \beta < \beta' \lor (\beta = \beta' \land \gamma < \gamma').$$

Puesto que todas las secciones iniciales son numerables, el ordinal de Z es ω_1, luego existe una única semejanza $F : Z \longrightarrow \omega_1$. Definimos $\phi_n : A \longrightarrow \Omega$ como las aplicaciones dadas por

$$\phi_n(x) = F(\|f(x)\|, \|g(f(x), n)\|).$$

Observemos que $\|g(f(x), n)\| \leq \|f(x)\|$ porque el término de la izquierda es el ordinal de una sección inicial de un conjunto bien ordenado cuyo ordinal es el término de la derecha.

Vamos a probar que $\{\phi_n\}_{n\in\omega}$ es una escala en A. Para ello consideramos una sucesión $\{x_m\}_{m\in\omega}$ contenida en A, convergente a un $x \in \mathcal{N}$ y tal que cada sucesión $\{\phi_n(x_m)\}_{m\in\omega}$ sea finalmente igual a un $F(\alpha_n, \beta_n)$.

En primer lugar observamos que todos los α_n son iguales a un mismo ordinal α. En efecto, dados n, $n' \in \omega$, podemos tomar un m suficientemente grande como para que $\alpha_n = \|f(x_m)\| = \alpha_{n'}$. Por otra parte, teniendo en cuenta que f es continua, por lo que $\{f(x_m)\}_{m\in\omega}$ converge a $f(x)$, se cumple que

$$n <_{f(x)} n' \to f(x)(\langle n, n'\rangle) = 0 \wedge n \neq n'$$

$$\to \text{para } m \text{ grande } f(x_m)(\langle n, n'\rangle) = 0 \wedge n \neq n'$$

$$\to \text{para } m \text{ grande } n <_{f(x_m)} n'$$

$$\to \text{para } m \text{ grande } \|g(f(x_m), n)\| < \|g(f(x_m), n')\| \to \beta_n < \beta_{n'}$$

Así pues, $<_{f(x)}$ está bien fundada, luego $f(x) \in \mathrm{BO}$, luego $x \in A$. Más aún, la aplicación $n \mapsto \beta_n$ es una semejanza del segmento inicial de n en $(C_{f(x)}, \leq_{f(x)})$ en un subconjunto de β_n, luego $\|g(f(x), n)\| \leq \beta_n \leq \alpha$. A su vez,

$$\|f(x)\| = \sup\{\|g(f(x), n)\| \mid n \in \omega\} \leq \alpha,$$

luego $\phi_n(x) \leq F(\alpha, \beta_n)$, como exige la definición de escala.

Falta probar que la escala es $\Pi^1_1(a)$. Para ello observamos que si $x \in \mathcal{N}$, $y \in A$, se cumple que

$$x \in A \wedge \phi_n(x) \leq \phi_n(y) \leftrightarrow x \in A \wedge$$

$$(\|f(x)\| < \|f(y)\| \vee (\|f(x)\| = \|f(y)\| \wedge \|g(f(x), n)\| \leq \|g(f(y), n)\|))$$

$$\leftrightarrow f(x) \leq_{\Pi^1_1} f(y) \wedge (f(y) \not\leq_{\Sigma^1_1} f(x) \vee (g(f(x), n) \leq_{\Pi^1_1} g(f(y), n))),$$

donde $\leq_{\Pi^1_1}$ y $\leq_{\Sigma^1_1}$ son las relaciones definidas en la demostración de 4.18.

Así pues, la relación

$$x \leq^n_{\Pi^1_1} y \leftrightarrow f(x) \leq_{\Pi^1_1} f(y) \wedge (f(y) \not\leq_{\Sigma^1_1} f(x) \vee (g(f(x), n) \leq_{\Pi^1_1} g(f(y), n)))$$

es claramente $\Pi^1_1(a)$ (pues se expresa en términos de uniones e intersecciones de antiimágenes de relaciones Π^1_1 por aplicaciones $\Delta^1_1(a)$) y cumple la definición de escala en $\Pi^1_1(a)$. Lo mismo sucede con la relación $\Sigma^1_1(a)$ dada por:

$$x \leq^n_{\Sigma^1_1} y \leftrightarrow f(x) \leq_{\Sigma^1_1} f(y) \wedge (f(y) \not\leq_{\Pi^1_1} f(x) \vee (g(f(x), n) \leq_{\Sigma^1_1} g(f(y), n))).$$

■

Los teoremas 2.24 y 2.25 se adaptan sin dificultad alguna:

Teorema 4.43 *Sea $a \in \mathcal{N}$. Si la clase $\Pi^1_n(a)$ tiene escalas (resp. tiene la propiedad de uniformización), lo mismo le sucede a $\Sigma^1_{n+1}(a)$.*

Por lo tanto, concluimos que las clases $\Pi^1_1(a)$ y $\Sigma^1_2(a)$ tienen escalas y la propiedad de uniformización, mientras que $\Sigma^1_1(a)$ y $\Pi^1_2(a)$ no pueden tener la propiedad de uniformización, pues entonces tendrían la propiedad de uniformización numérica y la propiedad de reducción.[7]

[7]Para reducir dos conjuntos A y B basta uniformizar $A \times \{0\} \cup B \times \{1\}$.

Definición 4.44 Diremos que una clase de conjuntos Γ definida sobre los espacios polacos es una *clase de Spector* si cumple las propiedades siguientes:

- Es cerrada para $\wedge$, $\vee$, $\bigwedge n \leq m$, $\bigvee n \leq m$, $\bigwedge n \in \omega$, $\bigvee n \in \omega$ y para sustituciones recursivas.
- Está ω-parametrizada, tiene la propiedad de sustitución y es normada.
- Contiene a Π^1_1.

En particular, vemos que toda clase de Spector es adecuada, es una clase Σ y Σ^* y es cerrada para sustituciones Γ-recursivas (por la propiedad de sustitución). En particular a todas se les puede aplicar el teorema de recursión de Kleene.

Todas las clases de Spector que vamos a considerar serán cerradas o bien para $\bigwedge x \in \mathcal{N}$ o bien para $\bigvee x \in \mathcal{N}$, y el teorema 3.48 garantiza entonces la propiedad de sustitución.

Todas las propiedades exigidas se conservan al relativizar, es decir, que si Γ es una clase de Spector, también lo son las clases $\Gamma(a)$, para $a \in \mathcal{N}$. La clase $\mathbf{\Gamma}$ no es una clase de Spector porque no está ω-parametrizada, pero cumple todas las demás propiedades, contiene a $\mathbf{\Pi}^1_1$ y está $\mathcal{N}$-parametrizada. Más aún, el teorema 3.68 nos da entre otras cosas que $\mathbf{\Gamma}$ es cerrada para uniones e intersecciones numerables.

Las clases Σ^1_n y Π^1_n cumplen todas las propiedades de la definición de clase de Spector excepto a lo sumo la de ser clases normadas (y además Σ^1_1 no cumple la última propiedad, pero no importa porque de hecho no es una clase normada, luego no es de Spector). De entre todas ellas, la única clase que puede probarse que es normada (luego de Spector) en ZFC es Π^1_1 (y sus relativizaciones).

Pasemos a estudiar las clases de Spector y empezamos profundizando un poco en el concepto de norma:

Definición 4.45 Recordemos que un *preorden* $\leq$ en un conjunto X es una relación reflexiva y transitiva en X. Esto implica que la relación dada por $x \sim y \leftrightarrow x \leq y \wedge y \leq x$ es una relación de equivalencia en X y $\leq$ induce una relación de orden en el conjunto cociente $X/\sim$. Cuando este orden es un buen orden se dice que $\leq$ es un *buen preorden* en X y está definida su *longitud* $\|\leq\|$ como el ordinal de dicho conjunto cociente.

Observemos que toda aplicación $f : X \longrightarrow \Omega$ define un buen preorden en X, mediante $x \leq_f y \leftrightarrow f(x) \leq f(y)$. En tal caso f induce una aplicación inyectiva $\bar{f} : (X/\sim) \longrightarrow \Omega$ que conserva el orden total inducido por $\leq_f$, por lo que éste es un buen orden y $\leq_f$ es un buen preorden.

Recíprocamente, si $\leq$ es un buen preorden arbitrario, de longitud α, tenemos una semejanza $\bar{g} : (X/\sim) \longrightarrow \alpha$, que a su vez induce una (única) aplicación $g : X \longrightarrow \alpha$ suprayectiva que induce en X el buen preorden dado. Si este preorden era de la forma $\leq_f$, es decir, inducido por una aplicación f en Ω, podemos definir $h = \bar{g}^{-1} \circ \bar{f}$ y entonces $h : \alpha \longrightarrow \Omega$ es inyectiva y creciente y hace el diagrama siguiente conmutativo:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g"'] & \Omega \\ & \alpha \arrow[u, "h"'] \end{tikzcd}$$

Observemos también que si $\leq$ es un preorden en un conjunto X, que sea un buen preorden equivale a que la relación dada por $x < y \leftrightarrow x \leq y \land y \not\leq x$ esté bien fundada en X, en cuyo caso la aplicación $g : X \longrightarrow \| \leq \|$ inducida por la semejanza de $X/\sim$ en su ordinal no es sino el rango de $<$.

Una norma $\phi : A \longrightarrow \Omega$ es *regular* si existe un ordinal α tal que $\phi : A \longrightarrow \alpha$ suprayectiva. Según las observaciones precedentes, para toda norma ϕ existe una única norma regular $\bar{\phi}$ en A que induce el mismo buen preorden $\leq_\phi$, por lo que si ϕ es una norma en Γ lo mismo vale para $\bar{\phi}$. Definimos la *longitud* de una norma como $\|\phi\| = \bar{\phi}[A] = \alpha$. (Así la longitud de una norma coincide con la del buen preorden que induce.)

Observemos que cuando $A = X$ la definición de norma en Γ se simplifica, pues entonces las condiciones $x \in A$ e $y \in A$ son triviales y simplemente tenemos que el buen preorden $\leq_\phi$ está en la clase ambigua $\Delta = \Gamma \cap \neg\Gamma$. Definimos

$$\boldsymbol{\delta}_\Gamma = \sup\{\| \leq \| \mid \leq \text{ es un buen preorden en } \mathcal{N} \text{ que está en } \boldsymbol{\Delta}(\mathcal{N}^2)\}$$

$$= \sup\{\|\phi\| \mid \phi : \mathcal{N} \longrightarrow \Omega \text{ es una norma en } \boldsymbol{\Gamma}\}.$$

Aquí llamamos $\boldsymbol{\Delta} = \boldsymbol{\Gamma} \cap \neg\boldsymbol{\Gamma}$, donde $\boldsymbol{\Gamma} = \bigcup\limits_{a \in \mathcal{N}} \Gamma(a)$.

Según hemos visto, si $\alpha = \|\phi\|$, para cierta norma $\phi : \mathcal{N} \longrightarrow \Omega$ (que podemos tomar regular, de modo que $\phi : \mathcal{N} \longrightarrow \alpha$ suprayectiva), tenemos que $\alpha < \Theta$, el cardinal definido en la sección anterior. Esto implica que $\boldsymbol{\delta}_\Gamma \leq \Theta$, luego, si suponemos AE, se cumple que $\boldsymbol{\delta}_\Gamma \leq (2^{\aleph_0})^+$. En particular, es consistente que $\boldsymbol{\delta}_\Gamma \leq \omega_2$.

Podemos ver los ordinales $\boldsymbol{\delta}_\Gamma$ como versiones "descriptivas" del cardinal Θ. Veamos ahora algunos hechos elementales que nos serán útiles en varias ocasiones:

- Si Γ es una clase adecuada, X es un espacio polaco y $A \in \boldsymbol{\Gamma}(X)$, según 2.14, toda norma regular $\phi : A \longrightarrow \alpha$ es una norma regular en $\boldsymbol{\Gamma}$, se extiende a una aplicación $\phi : X \longrightarrow \alpha + 1$ haciendo que $\phi(x) = \alpha$ para todo $x \in X \setminus A$, y entonces las relaciones

$$x \leq^* y \leftrightarrow x \in A \land \phi(x) \leq \phi(y), \qquad x <^* y \leftrightarrow \phi(x) < \phi(y)$$

están ambas en $\boldsymbol{\Gamma}$ (pero esta extensión no es necesariamente una norma en $\boldsymbol{\Gamma}$).

- Para cada $\delta < \alpha$ definimos
$$A^\delta = \{x \in A \mid \phi(x) < \delta\}.$$
Claramente $A = \bigcup\limits_{\delta < \|\phi\|} A^\delta$, y cada A^δ está $\mathbf{\Delta}$.

  En efecto, podemos tomar $y \in A$ tal que $\phi(y) = \delta$, y entonces
$$x \in A^\delta \leftrightarrow x \leq^* y \leftrightarrow \neg(y <^* x).$$

- La restricción $\phi|_{A^\delta} : A^\delta \longrightarrow \delta$ es una norma regular en $\mathbf{\Gamma}$, pues, si $y \in A^\delta$, basta tener en cuenta que
$$x \in A^\delta \wedge \phi(x) \leq \phi(y) \leftrightarrow x \in A \wedge \phi(x) \leq \phi(y) \leftrightarrow x \leq_\Gamma y \leftrightarrow x \leq_{\neg\Gamma} y.$$

- Si $\phi : A \longrightarrow \alpha$ es una norma en $\mathbf{\Gamma}$ y $A \in \mathbf{\Delta}(X)$, entonces la extensión $\phi : X \longrightarrow \alpha$ que toma el valor 0 en $X \setminus A$ es una norma en $\mathbf{\Gamma}$, luego en $\mathbf{\Delta}$.

  En efecto, basta definir
$$x \leq y \leftrightarrow (x \in A \wedge y \in A \wedge x \leq_\Gamma y) \vee (x \notin A \wedge y \in A) \vee (x \notin A \wedge y \notin A).$$
Como $A \in \mathbf{\Delta}$ y podemos cambiar $x \leq_\Gamma y$ por $x \leq_{\neg\Gamma} y$, es claro que la relación está en $\mathbf{\Delta}$ y también es inmediato que es un buen preorden de longitud δ, pues su norma asociada es la extensión que hemos indicado.

- Estos hechos implican que en realidad
$$\boldsymbol{\delta}_\Gamma = \{\|\leq\| \mid \leq \text{ es un buen preorden en } \mathcal{N} \text{ que está en } \mathbf{\Delta}(\mathcal{N}^2)\}$$
$$= \{\|\phi\| \mid \phi : \mathcal{N} \longrightarrow \Omega \text{ es una norma en } \mathbf{\Gamma}\},$$
pues estos conjuntos ya son ordinales. En efecto, si α pertenece a cualquiera de los dos conjuntos de longitudes de normas o buenos preórdenes, existe una norma regular $\phi : \mathcal{N} \longrightarrow \Omega$ en $\mathbf{\Delta}$ tal que $\|\phi\| = \alpha$. Si $\delta < \alpha$ acabamos de ver que ϕ se restringe a una norma sobre A^δ de longitud δ, la cual se extiende a una norma en $\mathcal{N}$ de longitud δ, luego δ también está en el conjunto, luego éste es su propio supremo.

Prácticamente hemos demostrado ya el teorema siguiente, que muestra que $\boldsymbol{\delta}_\Gamma$ acota las normas de todos los preórdenes inducidos por normas en $\mathbf{\Gamma}$ de cualquier subconjunto de $\mathbf{\Gamma}(\mathcal{N})$:

Teorema 4.46 *Sea* Γ *una clase adecuada. Si* $A \in \mathbf{\Gamma}(\mathcal{N})$ *y* $\phi : A \longrightarrow \Omega$ *es una norma en* $\mathbf{\Gamma}$*, entonces* $\|\phi\| \leq \boldsymbol{\delta}_\Gamma$.

DEMOSTRACIÓN: Para todo $\delta < \|\phi\|$, hemos visto que ϕ se restringe a una norma de longitud δ sobre A^δ, la cual se extiende a una norma de longitud δ sobre $\mathcal{N}$, luego $\delta \leq \boldsymbol{\delta}_\Gamma$, luego $\|\phi\| \leq \boldsymbol{\delta}_\Gamma$. ■

Definición 4.47 Cuando $\Gamma = \Sigma^1_n$ o $\Gamma = \Pi^1_n$, se usa la notación $\boldsymbol{\delta}^1_n = \boldsymbol{\delta}_\Gamma$. Explícitamente:

$$\boldsymbol{\delta}^1_n = \{\| \leq \| \mid \leq \text{ es un buen preorden en } \mathcal{N} \text{ de clase } \boldsymbol{\Delta}^1_n\}.$$

Estos ordinales $\boldsymbol{\delta}^1_n$ se conocen como *ordinales proyectivos.*

El teorema anterior prueba que si $\phi : A \longrightarrow \Omega$ es una norma en $\boldsymbol{\Sigma}^1_n$ o $\boldsymbol{\Pi}^1_n$ con $A \subset \mathcal{N}$, entonces $\|\phi\| \leq \boldsymbol{\delta}^1_n$. De hecho, es claro que lo mismo vale si A está contenido en cualquier espacio polaco no numerable, ya que un isomorfismo de Borel permite transportar la norma a otra en un subconjunto de $\mathcal{N}$ en las mismas condiciones.

Veamos ahora que los ordinales proyectivos son ordinales límite. Más en general:

Teorema 4.48 *Si Γ es una clase de Spector, entonces $\boldsymbol{\delta}_\Gamma$ es un ordinal límite de cofinalidad no numerable. En particular esto se aplica a los ordinales $\boldsymbol{\delta}^1_n$.*

Demostración: Sea $\leq$ un buen preorden en $\mathcal{N}$ que esté en $\boldsymbol{\Delta}$ y cuya norma sea un ordinal α. Es claro que podemos tomar un $x_0 \in \mathcal{N}$ tal que la relación

$$\leq^* = (\leq \setminus (\{x_0\} \times \mathcal{N})) \cup (\mathcal{N} \times \{x_0\})$$

es un n buen preorden en $\mathcal{N}$ de norma $\alpha + 1$. Además está en $\boldsymbol{\Delta}$, pues los conjuntos $\{x_0\} \times \mathcal{N}$ y $\mathcal{N} \times \{x_0\}$ son de $\boldsymbol{\Delta}^1_1$. Esto prueba que $\boldsymbol{\delta}_\Gamma$ es un ordinal límite.

Sea $\{\alpha_n\}_{n\in\omega}$ una sucesión creciente en $\boldsymbol{\delta}_\Gamma$. Vamos a probar que su supremo también está en $\boldsymbol{\delta}_\Gamma$. Tenemos que existe un buen preorden $\leq_n$ en $\mathcal{N}$ de clase $\boldsymbol{\Delta}$ y ordinal α_n. Vamos a probar que

$$\leq^* = \bigcup_n (\leq_n \times \{n\}) \cup \{(x, m, y, n) \in (\mathcal{N} \times \omega)^2 \mid m < n\} \in \boldsymbol{\Delta}.$$

El segundo conjunto está en $\boldsymbol{\Delta}$ porque es una antiimagen por una proyección de la relación de orden en ω, que está en Δ^1_1. En cuanto al primero, fijamos un buen conjunto universal $G \subset \mathcal{N} \times \mathcal{N} \times \mathcal{N}$, de modo que para cada $n \in \omega$ existe un $a_n \in \mathcal{N}$ tal que $\leq_n = G_{a_n}$, tomamos $a \in \mathcal{N}$ que codifique a todos los a_n y así

$$(x, y) \in \bigcup_n (\leq_n \times \{n\}) \leftrightarrow \bigvee n \in \omega\ G(x, y, a_n),$$

lo que prueba que la unión está en $\Gamma(a) \subset \boldsymbol{\Gamma}$. Expresando $\leq_n = \neg G_{b_n}$ obtenemos igualmente que la unión está en $\neg\Gamma(b) \subset \neg\boldsymbol{\Gamma}$, luego está en $\boldsymbol{\Delta}$. Claramente,

$$(x, n) \leq (y, n) \leftrightarrow m < n \vee (m = n \wedge x \leq_n y).$$

Es claro entonces que $\leq$ es un buen preorden en $\mathcal{N} \times \omega$ cuya norma es mayor o igual que todos los α_n. A través de un homeomorfismo recursivo $\mathcal{N} \times \omega \cong \mathcal{N}$ se puede obtener un buen preorden con la misma norma en $\mathcal{N}$, y que seguirá estando en $\boldsymbol{\Delta}$ por la clausura para sustituciones recursivas, luego el supremo de los α_n es menor que $\boldsymbol{\delta}_\Gamma$. ■

Estos resultados sobre normas y buenos preórdenes están relacionados con resultados sobre relaciones bien fundadas:

Definición 4.49 Dada una clase de conjuntos Γ, llamaremos

$$\boldsymbol{\gamma}_\Gamma = \sup\{\| < \| \mid < \text{ es una relación bien fundada en } \mathcal{N} \text{ de clase } \boldsymbol{\Gamma}\},$$

donde la *longitud* $\| < \|$ de una relación bien fundada se define, naturalmente, como la imagen de su rango.

Observemos que en general $\boldsymbol{\delta}_\Gamma \leq \boldsymbol{\gamma}_\Gamma$, pues todo buen preorden en $\mathcal{N}$ de clase $\boldsymbol{\Delta}$ determina una relación bien fundada en $\mathcal{N}$ de clase $\boldsymbol{\Delta}$ (la dada por $x \leq y \wedge y \not\leq x$).

Teorema 4.50 *Si* Γ *es una clase adecuada,*

$$\boldsymbol{\gamma}_\Gamma = \{\| < \| \mid < \textit{ es una relación bien fundada en } \mathcal{N} \textit{ de clase } \boldsymbol{\Gamma}\}$$

y es un ordinal límite.

DEMOSTRACIÓN: Para probar la igualdad basta ver que el conjunto de la derecha es un ordinal. En efecto, si $\alpha \in \boldsymbol{\gamma}_\Gamma$ existe una relación $<$ bien fundada en $\mathcal{N}$ de clase $\boldsymbol{\Gamma}$ y longitud α, y si $\beta < \alpha$, existe un $y_0 \in \mathcal{N}$ de rango β, y podemos definir

$$x <^* y \leftrightarrow x < y \wedge y < y_0,$$

con lo que tenemos una nueva relación bien fundada, también en $\boldsymbol{\Gamma}$, y de longitud β. Para probar que $\boldsymbol{\gamma}_\Gamma$ es un ordinal límite observamos que si $\alpha \in \boldsymbol{\gamma}_\Gamma$ y $<$ es una relación bien fundada de longitud α, siempre podemos elegir un $x_0 \in \mathcal{N}$ tal que la relación

$$x <^* y \leftrightarrow (x \neq x_0 \wedge x < y) \vee (x \neq y \wedge y = x_0).$$

tenga longitud $\alpha + 1$, y también es de clase $\boldsymbol{\Gamma}$. ∎

Teorema 4.51 *Se cumple que* $\boldsymbol{\delta}^1_1 = \omega_1$ *y* $\boldsymbol{\delta}^1_2 \leq \omega_2$.

DEMOSTRACIÓN: El teorema 2.37 implica las desigualdades $\boldsymbol{\delta}^1_1 \leq \boldsymbol{\gamma}^1_1 \leq \omega_1$ y $\boldsymbol{\delta}^1_2 \leq \boldsymbol{\gamma}^1_2 \leq \omega_2$. Dado cualquier ordinal $\omega \leq \alpha < \omega_1$, tomamos un subconjunto $A \subset \mathcal{N}$ numerable y una biyección $f : A \longrightarrow \alpha$, que podemos extender a $\mathcal{N}$ asignando el valor 0 a todos los puntos de $\mathcal{N} \setminus A$. Entonces

$$\leq_f \; = (\mathcal{N} \setminus A)^2 \cup ((\mathcal{N} \setminus A) \times A) \cup \{(x, y) \in A^2 \mid f(x) \leq f(y)\}$$

es un conjunto de Borel en $\mathcal{N}^2$, ya que A lo es (por ser numerable) y el tercer conjunto de la unión anterior también (por la misma razón). Por lo tanto $\alpha \leq \boldsymbol{\delta}^1_1$. ∎

Este teorema es todo lo que puede decirse sobre la situación de los ordinales proyectivos en la escala de los álefs en ausencia de axiomas adicionales.

El teorema siguiente generaliza a 2.37, pues implica que toda relación bien fundada de clase $\boldsymbol{\Sigma}^1_1$ debe tener longitud $< \boldsymbol{\delta}^1_1 = \omega_1$:

Teorema 4.52 *Sea Γ una clase de Spector cerrada para $\bigwedge x \in \mathcal{N}$, sea X un espacio producto, sea $<$ una relación bien fundada en X que esté en $\neg\Gamma(a)$, sea $G \subset X \times \mathcal{N}$ un buen conjunto $\mathcal{N}$-universal para $\mathbf{\Gamma}(X)$ y sea $\phi : G \longrightarrow \Omega$ una norma en Γ. Entonces existe una función $f : X \longrightarrow X \times \mathcal{N}$ recursiva en a con imagen en G y tal que*

$$x < y \rightarrow \phi(f(x)) < \phi(f(y)).$$

Consecuentemente, $\|\phi\| = \boldsymbol{\delta}_\Gamma = \boldsymbol{\gamma}_{\neg\Gamma}$.

Demostración: Consideremos la relación en $\Gamma(a)$ dada por

$$Q(y,u) \leftrightarrow \bigwedge x \in X(x < y \rightarrow (x,u) <^*_\phi (y,u)).$$

Por 3.57 existe un $\epsilon \in \mathcal{N}$ recursivo en a tal que $Q(y,\epsilon) \leftrightarrow G(y,\epsilon)$. Basta definir $f(x) = (x,\epsilon)$. Veamos que todo $y \in X$ cumple $f(y) \in G$. En caso contrario sea $y \in Y$ un $<$-minimal tal que $(y,\epsilon) \notin G$. Esto equivale a $\neg Q(y,\epsilon)$, es decir, a que existe un $x \in X$ tal que $x < y$ pero $\neg(x,\epsilon) <^*_\phi (y,\epsilon)$. Ahora bien, como $(y,\epsilon) \notin G$, la relación $(x,\epsilon) <^*_\phi (y,\epsilon)$ se cumple a menos que $(x,\epsilon) \notin G$, pero esto contradice la minimalidad de y. Por lo tanto, si $x < y$, como $Q(y,\epsilon)$, tenemos que $\phi(f(x)) < \phi(f(y))$.

Esto implica que $\|<\| \leq \|\phi\|$, para toda relación bien fundada $<$ en $\neg\mathbf{\Gamma}$. Por lo tanto $\boldsymbol{\delta}_\Gamma \leq \boldsymbol{\gamma}_{\neg\Gamma} \leq \|\phi\|$, y la desigualdad opuesta nos la da 4.46. ■

Este teorema muestra que en el teorema 4.46 puede darse la igualdad. Esto implica que la norma ϕ del teorema anterior no puede extenderse a una norma en $X \times \mathcal{N}$ de clase $\mathbf{\Gamma}$, pues en tal caso tendría que ser $\|\phi\| < \boldsymbol{\delta}_\Gamma$.

Terminamos con una observación sobre escalas:

Teorema 4.53 *Si A es un subconjunto de un espacio polaco X y $\{\phi_n\}_{n\in\omega}$ es una escala en A, la sucesión $\{\bar{\phi}_n\}_{n\in\omega}$ de las normas regulares determinadas por cada norma ϕ_n es también una escala en A.*

Demostración: Basta tener en cuenta que, tal y como hemos visto, existen aplicaciones inyectivas y crecientes $\psi_n : \|\phi_n\| \longrightarrow \Omega$ tales que $\phi_n = \bar{\phi}_n \circ \psi_n$. Así, si $\{x_n\}_{n\in\omega}$ es una sucesión en A convergente a $x \in X$ y se cumple que las sucesiones $\{\bar{\phi}_n(x_m)\}_{m\in\omega}$ son finalmente constantes, entonces también lo son las sucesiones $\{\phi_n(x_m)\}_{m\in\omega}$, luego $x \in A$ y $\phi_n(x) \leq \phi_n(x_m)$, para todo m suficientemente grande, luego $\bar{\phi}_n(x) \leq \bar{\phi}_n(x_m)$, para todo m suficientemente grande. ■

Obviamente, si la escala dada es una escala en una clase Γ (es decir, si cada norma ϕ_n es una norma en Γ), entonces lo mismo le sucede a la escala regularizada, pues la regularización de una norma en Γ es una norma en Γ. Si Γ satisface las hipótesis del teorema 4.46, concluimos que la escala es una δ_Γ-escala, es decir, que todas sus normas toman valores en δ_Γ.

4.6 El teorema de parametrización

Dedicamos esta sección a demostrar algunas propiedades más profundas de las clases de Spector. Escribiremos $x \in \Delta(y)$ (con x en un espacio producto X e $y \in \mathcal{N}$) para indicar que x es $\Delta(y)$-recursivo, es decir (definición 3.27) si $C(x) = \{n \in \mathcal{N} \mid x \in B_n\} \in \Delta(y)$.

Empezamos con algunas propiedades elementales sobre aplicaciones Γ-recursivas:

Teorema 4.54 *Sea Γ una clase de Spector y $f : X \longrightarrow Y$ una función estrictamente Γ-recursiva parcial entre espacios producto.*

a) Las relaciones siguientes están en Γ:

$$f(x)\downarrow, \quad f(x)\downarrow \wedge f(x) \notin B_n, \quad f(x)\downarrow \wedge f(x) = y, \quad f(x)\downarrow \wedge f(x) \neq y.$$

b) Si $Q \in \Gamma(Y)$, la relación $f(x)\downarrow \wedge Q(f(x))$ está en Γ.

c) Para cada $x \in X$ tal que $f(x)\downarrow$ se cumple que $f(x) \in \Delta(x)$.

DEMOSTRACIÓN: a) Recordemos que una función es estrictamente Γ-recursiva parcial cuando es Γ-recursiva parcial y su dominio está en Γ. Por lo tanto, la relación $f(x)\downarrow$ está en Γ por definición.

El conjunto $\{(y, n) \in Y \times \omega \mid y \notin B_n\}$ es Π^0_1 (por 3.7), luego está en Γ. La función $(x, n) \mapsto (f(x), n)$ es claramente Γ-recursiva, luego por la propiedad de sustitución existe $Q^* \in \Gamma(X \times \omega)$ tal que

$$f(x)\downarrow \rightarrow (Q^*(x, n) \leftrightarrow f(x) \notin B_n).$$

Por lo tanto $f(x)\downarrow \wedge f(x) \notin B_n \leftrightarrow f(x)\downarrow \wedge Q^*(x, n)$, luego la relación está en Γ. Para las otras dos basta tener en cuenta que

$$f(x)\downarrow \wedge f(x) = y \leftrightarrow \bigwedge n \in \omega(y \in B_n \rightarrow (f(x)\downarrow \wedge f(x) \in B_n)),$$

$$f(x)\downarrow \wedge f(x) \neq y \leftrightarrow \bigvee n \in \omega((f(x)\downarrow \wedge f(x) \in B_n) \wedge y \notin B_n).$$

b) Por la propiedad de sustitución existe $Q^* \in \Gamma(X)$ tal que

$$f(x)\downarrow \rightarrow (Q^*(x) \leftrightarrow Q(f(x))).$$

Entonces

$$f(x)\downarrow \wedge Q(f(x)) \leftrightarrow f(x)\downarrow \wedge Q^*(x).$$

c) Tras la definición 3.44 de función Γ-recursiva parcial observamos que cuando $f(x)\downarrow$ se cumple que $f(x) \in \Gamma(x)$, es decir, que $C(f(x)) \in \Gamma(x)$. Por otra parte,

$$n \in \neg C(f(x)) \leftrightarrow f(x) \notin B_n \leftrightarrow f(x)\downarrow \wedge f(x) \notin B_n \leftrightarrow P(x, n),$$

donde $P(x, n)$ está en Γ por a), luego $\neg C(f(x)) \in \Gamma(x)$, luego $C(f(x)) \in \neg\Gamma(x)$. Por lo tanto, $C(f(x)) \in \Delta(x)$, lo que equivale a que $f(x) \in \Delta(x)$. ■

Teorema 4.55 (Teorema de parametrización) *Sea Γ una clase de Spector. Para cada espacio producto Y existe una función estrictamente Γ-recursiva parcial $d : \omega \longrightarrow Y$ tal que para cada $y \in Y$ se cumple*

$$y \in \Delta \leftrightarrow \bigvee i \in \omega (d(i){\downarrow} \land d(i) = y).$$

Similarmente, si X es también un espacio producto, existe una función estrictamente Γ-recursiva parcial $d : \omega \times X \longrightarrow Y$ tal que

$$y \in \Delta(x) \leftrightarrow \bigvee i \in \omega (d(i,x){\downarrow} \land d(i,x) = y).$$

Demostración: Suponemos en primer lugar que $Y = \mathcal{N}$. Probamos la segunda afirmación (la primera se obtiene simplificando la prueba). Tomemos $G \subset \omega \times \mathcal{N} \times \omega \times \omega$ un conjunto ω-universal para $\Gamma(\mathcal{N} \times \omega \times \omega)$. El teorema 4.38 nos da que Γ tiene la propiedad de uniformización numérica, luego existe $G^* \subset G$ en Γ que uniformiza a G respecto de la última componente. Definimos

$$d(i,x){\downarrow} \leftrightarrow \bigwedge n \in \omega \bigvee m \in \omega \; G^*(i,x,n,m),$$

$$d(i,x){\downarrow} \rightarrow (d(i,x) = y \leftrightarrow \bigwedge mn \in \omega (y(n) = m \leftrightarrow G^*(i,x,n,m))).$$

Claramente, el dominio de d está en Γ, y se trata de una función Γ-recursiva parcial, pues

$$d(i,x){\downarrow} \rightarrow \bigwedge k \in \omega (d(i,x) \in B_k \leftrightarrow \bigwedge j < \ell(k) \, G^*(i,x,j,k_j)$$

y la parte final está claramente en Γ.

El teorema anterior nos da entonces que cada $d(i,x) \in \Delta(x)$. Recíprocamente, si $y \in \Delta(x)$, entonces y está en $\Gamma(x)$, como subconjunto de $\omega \times \omega$, luego existe un $i \in \omega$ tal que

$$y(n) = m \leftrightarrow G(i,x,n,m).$$

Por lo tanto, como y es una función,

$$y(n) = m \leftrightarrow G^*(i,x,n,m),$$

luego $d(i,x){\downarrow}$ y $d(i,x) = y$.

Si $Y = \omega^r$ el teorema es trivial, pues todos sus puntos están en $\Delta(x)$. En caso contrario podemos tomar un homeomorfismo recursivo $\pi : \mathcal{N} \longrightarrow Y$ (con inversa recursiva). Definimos $d^*(i,x) = \pi(d(i,x))$, que es Γ-recursiva parcial por se composición de dos funciones Γ-recursivas parciales. Además su dominio es el mismo que el de d, luego d^* es estrictamente Γ-recursiva parcial y claramente cumple lo pedido. ■

De aquí obtenemos que las clases de Spector son cerradas para cuantificadores existenciales $\bigvee y \in \Delta(z)$:

Teorema 4.56 *Sea Γ una clase de Spector, sean X e Y espacios producto y $Q \subset X \times Y$ un conjunto en Γ y sea*

$$P(x) \leftrightarrow \bigvee y \in \Delta\ Q(x, y).$$

Entonces $P \in \Gamma$. Similarmente, si $Q \subset X \times Y \times Z$ está en Γ y

$$P(x, z) \leftrightarrow \bigvee y \in \Delta(z)\, Q(x, y, z)$$

entonces P está en Γ.

Demostración: Consideremos el segundo caso. Con la notación del teorema anterior,

$$P(x, z) \leftrightarrow \bigvee i \in \omega(d(i, z)\!\downarrow \wedge\, Q(x, d(i, z), z)).$$

Esta relación está en Γ por el teorema 4.54 b) (aplicado a $(x, z) \mapsto (d, d(i, z), z)$). ■

Seguidamente probamos una versión efectiva de 1.43:

Teorema 4.57 *Sea Γ una clase de Spector cerrada para $\bigwedge x \in \mathcal{N}$, sea una aplicación Γ-recursiva $f : X \longrightarrow Y$ entre dos espacios producto cuya restricción a $P \in \Delta(X)$ sea inyectiva. Entonces $f[P] \in \Delta(Y)$.*

Demostración: Notemos que la relación $f(x) = y$ está en Δ por 4.54 a). Si $P(x) \wedge f(x) = y$, entonces x es el único punto de P cuya imagen es y, luego

$$n \in C(x) \leftrightarrow x \in B_n \leftrightarrow \bigvee x' \in X(f(x') = y \wedge P(x') \wedge x' \in B_n)$$

$$\leftrightarrow \bigwedge x' \in X(f(x') \neq y \vee \neg P(x') \vee x' \in B_n).$$

Esto implica que $C(x) \in \Delta(y)$, es decir, que $x \in \Delta(y)$. Por lo tanto,

$$y \in f[P] \leftrightarrow \bigvee x \in X(P(x) \wedge y = f(x))$$

$$\leftrightarrow \bigvee x \in \Delta(y)(P(x) \wedge y = f(x)).$$

La primera equivalencia prueba que $f[P] \in \neg\Gamma$, mientras que la segunda, teniendo en cuenta el teorema anterior, prueba que $f[P] \in \Gamma$, luego $f[P] \in \Delta$. ■

El teorema 1.43 es en realidad un caso particular de la versión para $\mathbf{\Gamma}$ del teorema anterior, cuya prueba es un corolario inmediato:

Teorema 4.58 *Sea Γ una clase de Spector cerrada para $\bigwedge x \in \mathcal{N}$, sea una aplicación $\mathbf{\Delta}$-medible $f : X \longrightarrow Y$ entre dos espacios producto cuya restricción a $P \in \mathbf{\Delta}(X)$ sea inyectiva. Entonces $f[P] \in \mathbf{\Delta}(Y)$.*

Demostración: Existen $a_0, a_1, a_2 \in \mathcal{N}$ tales que $P \in \Gamma(a_0) \cap \neg\Gamma(a_1)$ y f es $\Delta(a_2)$-recursiva (por 3.68). Tomamos $a = \langle a_0, a_1, a_2\rangle \in \mathcal{N}$, de modo que $P \in \Delta(a)$ y f es $\Delta(a)$-recursiva. Ahora basta aplicar el teorema anterior a la clase de Spector $\Gamma(a)$. ■

4.7 Codificaciones de modelos numerables

Terminamos estudiando la posición en la jerarquía de Kleene de algunos conjuntos definidos en términos de la teoría de modelos.

Definición 4.59 Dado $x \in \mathcal{N}$, llamaremos $E_x \subset \omega \times \omega$ a la relación dada por

$$m\, E_x\, n \leftrightarrow x(\langle m, n\rangle) = 0.$$

Notemos que E_x es exactamente la misma relación que en 4.17 hemos llamado $\leq_x$. Cambiamos la notación porque hasta ahora allí interesados en los $x \in \mathcal{N}$ para los que la relación asociada era un buen orden, mientras que ahora nos interesarán relaciones más generales. Concretamente, observamos que, para cada $x \in \mathcal{N}$, el par (ω, E_x) es un modelo del lenguaje formal $\mathcal{L}_{\mathrm{tc}}$ de la teoría de conjuntos. Podemos suponer que los signos de $\mathcal{L}_{\mathrm{tc}}$ son números naturales, de modo que las fórmulas de $\mathcal{L}_{\mathrm{tc}}$ son elementos de $\omega^{<\omega}$ que, a su vez, pueden codificarse de forma canónica mediante números naturales mediante la biyección canónica. A través de esta identificación, es claro que el conjunto de las fórmulas o de las sentencias de $\mathcal{L}_{\mathrm{tc}}$ es recursivo.

Para cada terna $(\alpha, v, x) \in \omega^2 \times \mathcal{N}$, escribiremos $x \vDash \alpha[v]$ para representar que $\alpha \in \mathrm{Form}(\mathcal{L}_{\mathrm{tc}})$, que v codifica una sucesión finita definida (al menos) sobre todas las variables libres en α y que $(\omega, E_x) \vDash \alpha[v]$.

Teorema 4.60 *La relación $x \vDash \alpha[v]$ es Δ^1_1.*

Demostración: Por concretar, podemos suponer que las variables de $\mathcal{L}_{\mathrm{tc}}$ son los números ≥ 5, mientras que $\ulcorner = \urcorner = 0$, $\ulcorner \in \urcorner = 1$, $\ulcorner \neg \urcorner = 2$, $\ulcorner \rightarrow \urcorner = 3$, $\ulcorner \bigwedge \urcorner = 4$. Definimos entonces el conjunto $V \subset \mathcal{N}^2$ mediante

$$V(y, x) \leftrightarrow \bigwedge nmvl \in \omega(n = \langle m, v\rangle \land l = \ell(v) \rightarrow (y(n) = 0 \lor y(n) = 1) \land \cdots),$$

donde los puntos suspensivos son la conjunción de las fórmulas siguientes:

- $\bigwedge ab < l(m = \langle 0, a, b\rangle \rightarrow (y(n) = 1 \leftrightarrow v_a = v_b))$,
- $\bigwedge ab < l(m = \langle 1, a, b\rangle \rightarrow (y(n) = 1 \leftrightarrow v_a\, E_x\, v_b))$,
- $\bigwedge p \in \omega(m = 2^\frown p \rightarrow (y(n) = 1 \leftrightarrow y(\langle p, v\rangle) = 0))$,
- $\bigwedge pq \in \omega(m = 3^\frown p^\frown q \rightarrow (y(n) = 1 \leftrightarrow (y(p, v) = 0 \lor y(q, v) = 1)))$,
- $\bigwedge pr \in \omega(m = 4^\frown r^\frown p \rightarrow y(n) = 1 \leftrightarrow$
  $\bigwedge s \in \omega(l \leq \ell(s) \land r < \ell(s) \land \bigwedge i < l(i \neq r \rightarrow v_i = s_i) \rightarrow y(\langle p, s\rangle) = 1))$.

Es claro entonces que V es aritmética, y si $\alpha \in \mathrm{Form}(\mathcal{L}_{\mathrm{tc}})$, $v \in \omega$ codifica una sucesión definida sobre todas las variables libres en α y se cumple $V(y, x)$, entonces

$$y(\langle \alpha, v\rangle) = 1 \leftrightarrow x \vDash \alpha[v].$$

A su vez, la relación $x \vDash \alpha[v]$ equivale a

$$\alpha \in \mathrm{Form}(\mathcal{L}_{\mathrm{tc}}) \land \bigvee l(l = \ell(\alpha) \land \bigwedge i < l(i \text{ es una variable libre en } \alpha \to i < \ell(v))$$
$$\land \bigvee y \in \mathcal{N}(V(y,x) \land y(\langle \alpha, v\rangle) = 1) \leftrightarrow$$
$$\alpha \in \mathrm{Form}(\mathcal{L}_{\mathrm{tc}}) \land \bigvee l(l = \ell(\alpha) \land \bigwedge i < l(i \text{ es una variable libre en } \alpha \to i < \ell(v))$$
$$\land \bigwedge y \in \mathcal{N}(V(y,x) \to y(\langle \alpha, v\rangle) = 1).$$

Teniendo en cuenta que "ser una variable libre" es una relación recursiva, es claro que estas equivalencias prueban que $x \vDash \alpha[v]$ es Δ^1_1. ■

Si $\alpha \in \omega$ es una fórmula con variables libres $v_1, \ldots, v_r$, la relación en $\omega^r \times \mathcal{N}$ dada por

$$x \vDash \alpha[a_1, \ldots, a_r] \leftrightarrow \bigvee s \in \omega(v_1 < \ell(s) \land \cdots \land v_r < \ell(s) \land$$
$$s_{v_1} = a_1 \land \cdots \land s_{v_r} = a_r \land x \vDash \alpha[s])$$

es también Δ^1_1.

Escribiremos $x \vDash \alpha$ en lugar de $x \vDash \alpha[0]$, que es también una relación Δ^1_1 en $\omega \times \mathcal{N}$. Esta relación nos interesará únicamente cuando α sea una sentencia, con lo que la elección de v será irrelevante.

Notemos ahora que si $\Gamma \subset \mathrm{Form}(\mathcal{L}_{\mathrm{tc}})$ es un conjunto Δ^1_1 de sentencias de $\mathcal{L}_{\mathrm{tc}}$, entonces la relación $x \vDash \Gamma$ es Δ^1_1 en $\mathcal{N}$, pues

$$x \vDash \Gamma \leftrightarrow \bigwedge \alpha \in \omega(\alpha \in \Gamma \to x \vDash \alpha).$$

Los conjuntos de los axiomas de KPI o de ZFC son recursivos, por lo que las relaciones $x \vDash \mathrm{KPI}$ o $x \vDash \mathrm{ZFC}$ son Δ^1_1 en $\mathcal{N}$.

Recordemos ahora la definición de modelo ω dada en [PC 2.39]: si (M, R) es un modelo de KP, la parte bien fundada M_{bf} es un modelo transitivo de KP (lo probamos en [PC 2.37]) y la inversa de la función colapsante es una inmersión $i : M_{\mathrm{bf}} \longrightarrow M$. Se dice que M es un modelo ω si $i[\omega] = \omega^M$.

Teorema 4.61 *La relación "x codifica un modelo ω de* KPI*" es Δ^1_1 en $\mathcal{N}$.*

Demostración: Consideremos la relación $N \subset \omega^2 \times \mathcal{N}$ que se cumple si $m = i_x(n)$, donde $i_x : (\omega, E_x)_{\mathrm{bf}} \longrightarrow \omega$ es la inmersión canónica. Explícitamente, tenemos que

$$N(n,m,x) \leftrightarrow \bigvee s \in \omega(\ell(s) = n+1 \land s_n = m \land x \vDash [s_0] = \varnothing \land$$
$$\bigwedge i < n \; x \vDash [s_{i+1}] = [s_i] \cup \{[s_i]\},$$

luego N es Δ^1_1, y también es claro que $x \in \mathcal{N}$ codifica un modelo ω de KPI si y sólo si

$$x \vDash \mathrm{KPI} \land \bigwedge m \in \omega(x \vDash [m] \in \omega \to \bigvee n \in \omega \; N(n,m,x)),$$

luego se trata de una relación Δ^1_1. ■

Obviamente lo mismo vale cambiando KPI por ZFC, ZF, etc.

Definición 4.62 Llamaremos BF al conjunto de los $x \in \mathcal{N}$ tales que la relación E_x es extensional y bien fundada en ω.

Se trata de un conjunto Π^1_1, pues, si $\alpha \in \mathrm{Form}(\mathcal{L})$ es el axioma de extensionalidad,

$$E_x \text{ es extensional} \leftrightarrow x \vDash \alpha,$$

luego $\{x \in \mathcal{N} \mid E_x \text{ es extensional}\}$ es Δ^1_1. Por otra parte,

$$E_x \text{ está bien fundada} \leftrightarrow \bigwedge y \in \mathcal{N} \bigvee n \in \omega \; x(\langle y(n+1), y(n)\rangle) \neq 0,$$

y es claro que el conjunto $\{(x, y, n) \in \mathcal{N} \times \mathcal{N} \times \omega \mid x(\langle y(n+1), y(n)\rangle) \neq 0\}$ es aritmético, luego $\{x \in \mathcal{N} \mid E_x \text{ está bien fundada}\}$ es Π^1_1. ■

Si $x \in \mathrm{BF}$, podemos considerar la función colapsante $\pi_x : (\omega, E_x) \longrightarrow M_x$. Fijado x, para cada $y \in M_x$ llamaremos $\hat{y} = \pi_x^{-1}(y)$, y diremos que $\hat{y}$ es el *nombre* de y respecto de x.

Teorema 4.63 *Los conjuntos*

$$\{(x, y, m) \in \mathcal{N} \times \mathcal{N} \times \omega \mid x \in \mathrm{BF} \wedge y \in M_x \wedge m = \hat{y}\},$$

$$\{(x, y) \in \mathcal{N} \times \mathcal{N} \mid x \in \mathrm{BF} \wedge y \in M_x\}$$

son Π^1_1

Demostración: Observemos que, para $x \in \mathrm{BF}$, la relación

$$m = \hat{n}_x \leftrightarrow n \in M_x \wedge n = \hat{m}$$

no es sino la relación N definida en la prueba del teorema anterior, que es Δ^1_1.

Ahora definimos en $\omega^3 \times \mathcal{N}$ la relación

$$m = (\hat{a}, \hat{b})_x \leftrightarrow \bigvee uv \in \omega(u = \hat{a}_x \wedge v = \hat{b}_x \wedge x \vDash [w] = ([u], [v])).$$

De este modo, si $x \in \mathrm{BF}$ esta relación equivale a que $a, b \in M_x \wedge \pi_x(m) = (a, b)$, pero sin suponer $x \in \mathrm{BF}$ la relación es Δ^1_1.

Finalmente, definimos en $\omega \times \mathcal{N}^2$ la relación

$$m = \hat{y}_x \leftrightarrow \bigwedge t \in \omega(x \vDash ([t] \in [m]) \rightarrow \bigvee uv \in \omega(v = y(u) \wedge t = (\hat{u}, \hat{v})_x) \wedge$$
$$\bigwedge u \in \omega \bigvee vt \in \omega(v = y(u) \wedge t = (\hat{u}, \hat{v})_x \wedge x \vDash [t] \in [m])).$$

Si $x \in \mathrm{BF}$, esta relación equivale a la determinada por el primer conjunto del enunciado, pero sin suponerlo es Δ^1_1. Por lo tanto, el primer conjunto del enunciado es la intersección de esta relación con $\omega \times \mathrm{BF} \times \mathcal{N}$, luego es Π^1_1. El segundo se obtiene del primero mediante $\bigvee m \in \omega$, luego también es Π^1_1. ■

Capítulo V

Conjuntos hiperaritméticos

Las clases de Lusin $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha$ y $\mathbf{\Pi}^0_\alpha$ abarcan toda la clase de los conjuntos de Borel $\mathbf{\Delta}^1_1$, que es la base de la jerarquía de segundo orden, que recorre los conjuntos proyectivos. Sin embargo, no podemos decir lo mismo de las clases de Kleene Σ^0_n y Π^0_n, que sólo recorren la clase de los conjuntos aritméticos, estrictamente contenida en la clase Δ^1_1 (teorema 4.15). No es sorprendente que esto sea así, pues las clases $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha$ forman una jerarquía transfinita de longitud ω_1, mientras que las clases Σ^0_n sólo se corresponden con los primeros ω niveles de dicha jerarquía. En este capítulo vamos a probar que la jerarquía de Kleene se puede prolongar a una jerarquía transfinita de conjuntos que llamaremos hiperaritméticos, y probaremos que éstos son precisamente los conjuntos Δ^1_1. Como paso previo, dedicamos la primera sección a conectar la teoría de la recursión con la teoría de ordinales.

5.1 Ordinales recursivos

El lector necesita recordar ahora la definición del conjunto BO dada en 4.17 y los conceptos relacionados con ella.

Definición 5.1 Para cada $a \in \mathcal{N}$, definimos

$$\omega_1^a = \{\alpha \in \Omega \mid \bigvee x \in \mathrm{BO}\ (\|x\| = \alpha \land x \text{ es recursivo en } a)\}.$$

Los elementos de ω_1^a se llaman *ordinales recursivos en a.* Obviamente ω_1^a depende únicamente del grado de Turing de a. El conjunto de los ordinales recursivos (es decir, recursivos en cualquier $a \in \mathcal{N}$ recursivo) se suele representar por ω_1^{CK} (por Church-Kleene).

Teorema 5.2 *Para cada $a \in \mathcal{N}$ se cumple que ω_1^a es un ordinal límite numerable $> \omega$, que es, pues, el menor ordinal no recursivo en a.*

Demostración: Para probar que ω_1^a es un ordinal basta ver que si $\alpha \in \omega_1^a$ y $\beta < \alpha$, entonces $\beta \in \omega_1^a$. Sea $b \in \mathrm{BO}$ recursivo en a tal que $\|b\| = \alpha$. Entonces existe un $n \in C_b$ tal que el ordinal del segmento $(C_b)_n^{<_b}$ es β. La aplicación $r : \mathcal{N} \times \omega \longrightarrow \mathcal{N}$ dada por

$$r(x,n)(m) = \begin{cases} 1 & \text{si } m_0^2 \leq_x m_1^2 \wedge m_1^2 <_x n, \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

es claramente recursiva, luego $c = r(b,n)$ es recursivo en a (aquí usamos que la aplicación $r(-,n)$ también es recursiva) y claramente $\|c\| = \beta \in \omega_1^a$.

Así pues, ω_1^a es un ordinal, claramente no nulo y numerable. Para probar que es un ordinal límite observamos que la aplicación $s : \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{N}$ dada por

$$s(x)(m) = \begin{cases} 1 & \text{si } m_1^2 = 0 \vee (m_0^2 \neq 0 \wedge m_1^2 \neq 0 \wedge m_0^2 - 1 \leq_x m_1^2 - 1), \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

es recursiva y si $b \in \mathrm{BO}$ es recursivo en a, entonces $s(b) \in \mathrm{BO}$ es recursivo en a y $\|s(b)\| = \|b\| + 1$, de modo que si $\alpha < \omega_1^a$, también $\alpha + 1 < \omega_1^a$.

Por último, es fácil ver que ω es un ordinal recursivo: basta definir

$$x(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n_0^2 \leq n_1^2, \\ 0 & \text{en caso contrario,} \end{cases}$$

de modo que $x \in \mathcal{N}$ es recursivo y $\leq_x$ es el orden usual en ω, luego $\|x\| = \omega$. Esto prueba que $\omega < \omega_1^{\mathrm{CK}} \leq \omega_1^a$. ■

Notemos que todo ordinal numerable es de la forma $\|a\|$, para cierto $a \in \mathrm{BO}$ obviamente recursivo en a, lo que implica que

$$\bigcup_{a \in \mathcal{N}} \omega_1^a = \omega_1.$$

Teorema 5.3 (Teorema de acotación) *Sea X un espacio producto, $a \in \mathcal{N}$, $f : X \longrightarrow \mathcal{N}$ una aplicación $\Delta_1^1(a)$-recursiva y sea $P \subset X$ un conjunto tal que $P(x) \leftrightarrow f(x) \in \mathrm{BO}$. Entonces P es $\Delta_1^1(a)$ si y sólo si $\{\|f(x)\| \mid x \in P\}$ está acotado en ω_1^a.*

Demostración: Observemos que, en cualquier caso, como $\Sigma_1^1(a)$ tiene la propiedad de sustitución, P es un conjunto $\Pi_1^1(a)$, luego será $\Delta_1^1(a)$ si y sólo si es $\Sigma_1^1(a)$.

Si existe $y \in \mathcal{N}$ recursivo en a tal que $\|f(x)\| \leq \|y\|$ para todo $x \in X$, entonces, teniendo en cuenta el teorema 4.18, vemos que

$$P(x) \leftrightarrow f(x) \in \mathrm{BO} \wedge \|f(x)\| \leq \|y\| \leftrightarrow f(x) \leq_{\Sigma_1^1} y,$$

de donde, usando que la función $x \mapsto (f(x), y)$ es $\Sigma_1^1(a)$-recursiva (notemos que la función constante c_y lo es), concluimos que $P \in \Sigma_1^1(a)$.

Supongamos ahora que el conjunto de las normas no está acotado en ω_1^a. Sea $Q \subset \omega$ un conjunto $\Pi_1^1(a)$ cualquiera. Por 4.22 existe una función $g : \omega \longrightarrow \mathcal{N}$

recursiva en a tal que $Q(n) \leftrightarrow g(n) \in \mathrm{BO}$. Para todo $n \in \omega$, por 3.30 tenemos que $g(n)$ es recursivo en a, luego

$$Q(n) \leftrightarrow g(n) \in \mathrm{BO} \land \|g(n)\| < \omega_1^a \leftrightarrow \bigvee x \in X\ (P(x) \land g(n) \leq_{\Sigma_1^1} f(x)).$$

Por consiguiente, si P fuera $\Sigma_1^1(a)$, esta expresión probaría que Q es $\Sigma_1^1(a)$, pero no todo conjunto $\Pi_1^1(a)$ es $\Sigma_1^1(a)$. ■

De aquí deducimos un resultado sorprendente:

Teorema 5.4 *Si $a \in \mathcal{N}$, entonces*

$$\omega_1^a = \{\alpha \in \Omega \mid \bigvee x \in \mathrm{BO}\ (\|x\| = \alpha \land x \textit{ es } \Sigma_1^1(a))\}.$$

Demostración: La demostración del teorema 5.2 se adapta trivialmente para probar que el miembro derecho es un ordinal. Teniendo esto en cuenta, una desigualdad es inmediata, pues todo código $\Sigma_1^0(a)$ es $\Sigma_1^1(a)$. Supongamos que existiera un $y \in \mathrm{BO}$ que fuera $\Sigma_1^1(a)$ pero para todo $x \in \mathrm{BO}$ recursivo en a se cumpliera $\|x\| \leq \|y\|$. Sea $Q \subset \omega$ un conjunto $\Pi_1^1(a)$. Por 4.22 existe $g : \omega \longrightarrow \mathcal{N}$ recursiva en a tal que $Q(n) \leftrightarrow g(n) \in \mathrm{BO}$. Entonces

$$Q(n) \leftrightarrow g(n) \in \mathrm{BO} \land \|g(n)\| \leq \|y\| \leftrightarrow g(n) \leq_{\Sigma_1^1} y.$$

Esto implica que Q es $\Sigma_1^1(a)$, pero no todo conjunto $\Pi_1^1(a)$ es $\Sigma_1^1(a)$, luego tenemos una contradicción. ■

Así pues, las funciones $\Sigma_1^1(a)$ no permiten codificar más ordinales que las funciones $\Sigma_1^0(a)$.

A veces es preferible codificar los ordinales como alturas de árboles bien fundados:

Definición 5.5 Llamaremos

$$\mathrm{Arb} = \{x \in \mathcal{N} \mid \bigwedge mn \in \omega\ (m \subset n \land x(n) = 0 \to x(m) = 0)\},$$

donde la inclusión es la codificación recursiva de la inclusión entre sucesiones definida al final de la sección 3.1.

Así, cada $x \in \mathrm{Arb}$ codifica el árbol $A_x = \{s \in \omega^{<\omega} \mid x(\langle s \rangle_\infty) = 0\}$ y, recíprocamente, todo árbol en $\omega^{<\omega}$ es de la forma A_x, para cierto $x \in \mathrm{Arb}$.

Definimos

$$\mathrm{ABF} = \{x \in \mathrm{Arb} \mid \bigwedge y \in \mathcal{N} \bigvee n \in \omega\ x(\bar{y}(n)) \neq 0\}.$$

Así los elementos de ABF codifican los árboles bien fundados. Si $A \subset \omega^{<\omega}$ es un árbol bien fundado, definimos su *altura* $\|A\|$ como el rango de $\varnothing$ en A respecto de la relación inversa de la inclusión. También podemos considerar la aplicación $\|\ \| : \mathrm{ABF} \longrightarrow \omega_1$ dada por $\|x\| = \|A_x\|$.

Si $A \subset \omega^{<\omega}$ es un árbol y $s \in \omega^{<\omega}$, definimos

$$A/s = \{t \in \omega^{<\omega} \mid s^\frown t \in A\}.$$

Es claro que si A está bien fundado también lo están todos los árboles A/s, con $s \in A$. Más aún, en tal caso la aplicación $f : A/s \longrightarrow A$ determinada por $f(t) = s^\frown t$ hace corresponder biunívocamente las sucesiones que extienden a t con las sucesiones que extienden a $f(t)$ y, como el rango de t es el menor ordinal mayor que los rangos de las sucesiones que extienden a t, una simple inducción muestra que $\operatorname{rang}_{A/s}(t) = \operatorname{rang}_A(f(t))$, luego, en particular:

$$\|A/s\| = \operatorname{rang}_A(s).$$

Esto muestra a su vez que, si $s \in A \setminus \{\varnothing\}$, se cumple $\|A/s\| < \|A\|$. Más aún:

Teorema 5.6 *Si A es un árbol bien fundado, la aplicación $A \setminus \{\varnothing\} \longrightarrow \|A\|$ dada por $s \mapsto \|A/s\|$ es suprayectiva.*

Demostración: Si $\alpha < \|A\|$, entonces existe un $s_1 \in A$ tal que $\ell(s_1) = 1$ y $\operatorname{rang}(s_1) \geq \alpha$. Si la desigualdad es estricta existe un $s_2 \supset s_1$ tal que $\ell(s_2) = 2$ y $\operatorname{rang}(s_2) \geq \alpha$ y, como no podemos formar una rama infinita en A, tras un número finito de pasos llegamos a un s_n tal que $\|A/s_n\| = \operatorname{rang}(s_n) = \alpha$. ■

El teorema siguiente demuestra, entre otras cosas, que todo ordinal numerable es la altura de un árbol bien fundado:

Teorema 5.7 *Existen aplicaciones recursivas $f, g : \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{N}$ tales que*

a) Para todo $x \in \mathcal{N}$, se cumple $x \in \mathrm{BO} \leftrightarrow f(x) \in \mathrm{ABF}$, y en tal caso $\|x\| = \|f(x)\|$.

b) Para todo $x \in \mathcal{N}$, se cumple $x \in \mathrm{ABF} \leftrightarrow g(x) \in \mathrm{BO}$, y en tal caso $\|x\| \leq \|g(x)\|$.

Demostración: Definimos

$$f(x)(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } \bigwedge ij < \ell(n)(i < j \rightarrow n_j <_x n_i) \\ 1 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Claramente f es recursiva[1] y claramente $f[\mathrm{OT}] \subset \mathrm{Arb}$, pues si x codifica un orden total entonces $f(x)$ codifica el árbol de las sucesiones decrecientes para $\leq_x$. Esto a su vez implica que $x \in \mathrm{BO} \leftrightarrow f(x) \in \mathrm{ABF}$, pues un orden total es un buen orden si y sólo si todas sus sucesiones decrecientes son finitas, es decir, si y sólo si el árbol de sus sucesiones decrecientes está bien fundado.

La igualdad de las alturas se demuestra fácilmente por inducción sobre $\|x\|$. Si $\|x\| = 0$, es claro que $A_{f(x)} = \varnothing$ y la igualdad es obvia. Si es cierto para

[1]El conjunto $P = \{(i, j, x, n) \mid i < j \rightarrow n_j <_x n_i\}$ es claramente recursivo, luego también lo es $Q(k, x, n) = \bigwedge ij < k\, P$, luego también $A(x, n) \rightarrow Q(\ell(n), x, n)$, así como el conjunto $G = (A \times \{0\}) \cup (\neg A \times \{1\})$, que es la gráfica de la función $(x, n) \mapsto f(x)(n)$.

órdenes de tipo α y $\|x\| = \alpha + 1$, sea $n \in C_x$ el máximo para $\leq_x$. Entonces $A_{f(x)} \setminus \{\varnothing\} = \bigcup\limits_{m\in C_x} A_{f(x)}/\{m\}$. Si $m \neq n$, entonces $A_{f(x)/\{m\}}$ es parte del árbol de sucesiones decrecientes en un conjunto bien ordenado de ordinal α, luego $\|A_{f(x)/\{m\}}\| \leq \alpha$, mientras que $A_{f(x)/\{n\}}$ es el conjunto de todas las sucesiones decrecientes en un conjunto de ordinal α, luego, por hipótesis de inducción $\|A_{f(x)/\{m\}}\| = \alpha$, luego $\|A_{f(m)}\| = \alpha + 1$.

Si es cierto para buenos órdenes de ordinal menor que λ y $\|x\| = \lambda$, entonces, si $f : C_x \longrightarrow \lambda$ es una semejanza, para cada $m \in C_x$ tenemos que $A_{f(x)}/\{m\}$ es el árbol de sucesiones decrecientes en un buen orden de ordinal $f(m)$, luego por hipótesis de inducción $\|A_{f(m)}/\{m\}\| = f(m)$, luego $\|A_{f(m)}\| = \lambda$.

Ahora definimos

$$g(x)(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } x(n_0^2) = x(n_1^2) = 0 \wedge (n_1^2 \subset n_0^2 \vee \\ & \bigvee i < \ell(n_0^2)(i < \ell(n_1^2) \wedge \bigwedge j < i\ (n_0^2)_j = (n_1^2)_j \wedge (n_0^2)_i < (n_1^2)_i) \\ 1 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Es fácil ver que g es recursiva y, si $g[\mathrm{Arb}] \subset \mathrm{OT}$, pues si x codifica un árbol entonces $g(x)$ codifica la restricción a dicho árbol del orden de Brouwer-Kleene. Precisamente por esto podemos concluir que $x \in \mathrm{ABF} \leftrightarrow g(x) \in \mathrm{BO}$. La desigualdad entre las alturas se demuestra también por inducción. Para ello observamos que, para cada $s \in A_x$ de longitud 1, la aplicación $A_x/s \longrightarrow A_x$ dada por $t \mapsto s^\frown t$ es creciente para el orden de Brouwer-Kleene, por lo que $\|x\|$, que es el supremo de las alturas de los árboles A_x/s, es menor o igual (por hipótesis de inducción) que los ordinales de los órdenes de Brouwer-Kleene de dichos árboles, que son todos $\leq \|g(x)\|$, luego $\|x\| \leq \|g(x)\|$. ■

Como consecuencia:

Teorema 5.8 *Para cada $a \in \mathcal{N}$,*

$$\omega_1^a = \{\|x\| \mid x \in \mathrm{ABF} \wedge x \in \Sigma_1^0(a)\} = \{\|x\| \mid x \in \mathrm{ABF} \wedge x \in \Sigma_1^1(a)\}.$$

Demostración: Lo único que no es inmediato a partir del teorema anterior es que los dos conjuntos son ordinales (es decir, que son transitivos). Ahora bien, si $x \in \mathrm{ABF}$ y $\alpha < \|x\|$, hemos visto que existe un $s \in A_x$ tal que $\|A_x/s\| = \alpha$. Sólo hay que probar que A_x/s admite un código $\Sigma_1^0(a)$ o $\Sigma_1^1(a)$ si x es de una de estas clases. Para ello basta considerar la aplicación $h : \omega \times \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{N}$ dada por

$$h(n, x)(m) = \begin{cases} 0 & \text{si } x(n^\frown m) = 0, \\ 1 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Claramente h es recursiva y $h(\langle s \rangle_\infty, x)$ es un código de A_x/s, luego es de la misma clase que x. ■

Es evidente a partir de las definiciones que Arb es Π_1^0 y que ABF es Π_1^1. Puesto que, según el teorema 5.7, tenemos que $\mathrm{BO} = f^{-1}[\mathrm{ABF}]$, podemos concluir que ABF no es $\boldsymbol{\Sigma}_1^1$, pues si lo fuera lo mismo le sucedería a BO.

No demostramos aquí más propiedades sobre los ordinales recursivos porque muchas de ellas serán inmediatas más adelante.

5.2 Conjuntos hiperaritméticos

Nota En esta sección $\{a\}^{XY}$ representará siempre $\{a\}^{XY}_{\Sigma^0_1}$, es decir, la codificación recursiva de las funciones $\mathbf{\Sigma}^0_1$-recursivas parciales entre los espacios producto X e Y.

Observemos que, por 3.17, las funciones $\mathbf{\Sigma}^0_1$-recursivas entre espacios producto son simplemente las funciones continuas, luego en particular todas las funciones $f : \omega \longrightarrow X$, para cualquier espacio X, son $\mathbf{\Sigma}^0_1$-recursivas.

Puesto que la parametrización $\{a\}^{\omega,X}$ recorre todas las funciones $\mathbf{\Sigma}^0_1$-recursivas parciales $\omega \longrightarrow X$, en particular toda función $\omega \longrightarrow X$ es de la forma $\{a\}^{\omega,X}$ para un $a \in \mathcal{N}$ adecuado. Esto nos permite definir una codificación de los conjuntos de Borel que aquí será más adecuada que la que considerábamos en 4.31.

Definición 5.9 (Recordemos que, para $c \in \mathcal{N}$, se define $c^1 \in \mathcal{N}$ mediante $c^1(n) = c(n+1)$). Definimos

$$\begin{aligned}
C(\mathbf{\Sigma}^0_1) &= \{c \in \mathcal{N} \mid c(0) = 0 \land \textstyle\bigwedge n \in \omega\ \{c^1\}^{\omega,\omega}(n)\!\downarrow\},\\
C(\mathbf{\Sigma}^0_\alpha) &= \{c \in \mathcal{N} \mid c(0) = 1 \land \textstyle\bigwedge n \in \omega\,(\{c^1\}^{\omega,\mathcal{N}}(n)\!\downarrow \land \{c^1\}^{\omega,\mathcal{N}}(n) \in \bigcup\limits_{1\leq\beta<\alpha} C(\mathbf{\Pi}^0_\beta))\},\\
C(\mathbf{\Pi}^0_\alpha) &= \{c \in \mathcal{N} \mid c(0) = 2 \land \{c^1\}^{\omega,\omega} \in C(\mathbf{\Sigma}^0_\alpha)\},
\end{aligned}$$

donde la segunda línea vale para $2 \leq \alpha < \omega_1$ y la tercera para $1 \leq \alpha < \omega_1$. Definimos el conjunto de los *códigos de Borel* como

$$\mathrm{CB} = \bigcup_{1\leq\alpha<\omega_1} C(\mathbf{\Sigma}^0_\alpha) \cup \bigcup_{1\leq\alpha<\omega_1} C(\mathbf{\Pi}^0_\alpha).$$

Notemos que si $2 \leq \alpha \leq \beta$ entonces $C(\mathbf{\Sigma}^0_\alpha) \subset C(\mathbf{\Sigma}^0_\beta)$ y $C(\mathbf{\Pi}^0_\alpha) \subset C(\mathbf{\Pi}^0_\beta)$.

Estas definiciones cobran sentido al definir a continuación el conjunto de Borel codificado por cada código de Borel:

Para cada espacio producto X, definimos:

$$\begin{aligned}
&\pi^X_0 : \omega \longrightarrow \Delta^0_1(X) && \pi^X_0(n) = \begin{cases} \varnothing & \text{si } n = 0,\\ B^X_{n-1} & \text{si } n \neq 0.\end{cases}\\
&\pi^X_{\Sigma^0_1} : C(\mathbf{\Sigma}^0_1) \longrightarrow \mathbf{\Sigma}^0_1(X) && \pi^X_{\Sigma^0_1}(c) = \bigcup_{n\in\omega} \pi^X_0(\{c^1\}^{\omega,\omega}(n)),\\
&\pi^X_{\Sigma^0_\alpha} : C(\mathbf{\Sigma}^0_\alpha) \longrightarrow \mathbf{\Sigma}^0_\alpha(X) && \pi^X_{\Sigma^0_\alpha}(c) = \bigcup_{n\in\omega} \pi^X_{\Pi^X_{\beta(n)}}(\{c^1\}^{\omega,\mathcal{N}}(n)),\\
&\pi^X_{\Pi^0_\alpha} : C(\mathbf{\Pi}^0_\alpha) \longrightarrow \mathbf{\Pi}^0_\alpha(X) && \pi^X_{\Pi^0_\alpha}(c) = X \setminus \pi^X_{\Sigma^0_\alpha}(\{c^1\}^{\omega,\omega}),
\end{aligned}$$

donde, en la tercera línea, $\beta(n)$ es el mínimo ordinal tal que

$$\{c^1\}^{\omega,\mathcal{N}}(n) \in C(\mathbf{\Pi}^0_{\beta(n)}).$$

Una simple inducción muestra que si $2 \leq \alpha \leq \beta$ entonces $\pi^X_{\Sigma^0_\beta}$ extiende a $\pi^X_{\Sigma^0_\alpha}$ y $\pi^X_{\Pi^0_\beta}$ extiende a $\pi^X_{\Pi^0_\alpha}$, por lo que todas estas aplicaciones se extienden a una misma aplicación

$$\pi^X : \mathrm{CB} \longrightarrow \mathbf{\Delta}^1_1(X).$$

Así, para cada $\alpha \geq 2$, si $c \in C(\mathbf{\Sigma}^0_\alpha)$ entonces

$$\pi^X(c) = \bigcup_{n\in\omega} \pi^X(\{c^1\}^{\omega,\mathcal{N}}(n)),$$

y si $c \in C(\mathbf{\Pi}^0_\alpha)$

$$\pi^X(c) = X \setminus \pi^X(\{c^1\}^{\omega,\omega}).$$

Es claro que las aplicaciones que acabamos de definir sobre los códigos de Borel son suprayectivas: la suprayectividad de $\pi^X_{\Sigma^0_1}$ se sigue de que todo elemento de ω^ω es de la forma $\{a\}^{\omega,\omega}$, para cierto $a \in \mathcal{N}$ y la de $\pi^X_{\Sigma^0_\alpha}$ de que todo elemento de $\mathcal{N}^\omega$ es de la forma $\{a\}^{\omega,\mathcal{N}}$, para cierto $a \in \mathcal{N}$.

Ahora necesitamos demostrar que las operaciones y relaciones básicas entre conjuntos de Borel pueden expresarse en términos de sus códigos mediante funciones recursivas:

Teorema 5.10 *Se cumple:*

a) Existe una función recursiva $\mathrm{Bas} : \omega \longrightarrow \mathcal{N}$ *tal que si* X *es un espacio producto y* $n \in \omega$, *entonces* $\mathrm{Bas}(n) \in C(\mathbf{\Sigma}^0_1)$ *y*

$$\pi^X(\mathrm{Bas}(n)) = \begin{cases} \varnothing & \text{si } n = 0, \\ B^X_{n-1} & \text{si } n \neq 0. \end{cases}$$

b) Existe una función recursiva $i_\Sigma : \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{N}$ *tal que si* $c \in C(\mathbf{\Sigma}^0_\alpha)$ *entonces* $i_\Sigma(c) = c$, *mientras que si* $c \in C(\mathbf{\Pi}^0_\alpha)$ *se cumple que* $i_\Sigma(c) \in C(\mathbf{\Sigma}^0_{\alpha+1})$ *y, para todo espacio* X *y todo* $c \in \mathrm{CB}$, *se cumple que* $\pi^X(i_\Sigma(c)) = \pi^X(c)$.

c) Existe una función recursiva $i_\Pi : \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{N}$ *tal que si* $c \in C(\mathbf{\Sigma}^0_\alpha)$ *entonces* $i_\Pi(c) \in C(\mathbf{\Pi}^0_{\alpha+1})$, *si* $c \in C(\mathbf{\Pi}^0_\alpha)$, *entonces* $i_\Pi(c) = c$ *y, para todo espacio producto* X, $\pi^X(i_\Pi(c)) = \pi^X(c)$.

d) Existe una función recursiva $\mathrm{comp} : \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{N}$ *tal que si* $c \in \mathrm{CB}$ *entonces* $\mathrm{comp}(c) \in \mathrm{CB}$ *y, para todo espacio producto* X, *se cumple que* $\pi^X(\mathrm{comp}(c)) = X \setminus \pi^X(c)$.

e) Existe una función recursiva $\mathrm{Un} : \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{N}$ *tal que si* $a \in \mathcal{N}$ *cumple que*

$$\bigwedge n \in \omega\ (\{a\}^{\omega,\mathcal{N}}(n)\!\downarrow \wedge\ \{a\}^{\omega,\mathcal{N}}(n) \in \mathrm{CB}),$$

entonces $\mathrm{Un}(a) \in \mathrm{CB}$ *y, para todo espacio producto* X,

$$\pi^X(\mathrm{Un}(a)) = \bigcup_{n\in\omega} \pi^X(\{a\}^{\omega,\mathcal{N}}(n)).$$

f) Existe una función recursiva $\mathrm{In} : \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{N}$ *tal que si* $a \in \mathcal{N}$ *cumple que*

$$\bigwedge n \in \omega\ (\{a\}^{\omega,\mathcal{N}}(n){\downarrow} \land \{a\}^{\omega,\mathcal{N}}(n) \in \mathrm{CB}),$$

entonces $\mathrm{In}(a) \in \mathrm{CB}$ *y, para todo espacio producto* X*,*

$$\pi^X(\mathrm{In}(a)) = \bigcap_{n\in\omega} \pi^X(\{a\}^{\omega,\mathcal{N}}(n)).$$

g) Si Γ *es una de las clases* Σ^0_n *o* Π^0_n *y* $P \in \Gamma(X \times Y)$*, existe una función recursiva* $\mathrm{proy}^{X,Y}_P : X \longrightarrow \mathcal{N}$ *tal que, para todo* $x \in X$*,* $\mathrm{proy}^{X,Y}_P(x) \in C(\mathbf{\Gamma})$ *y* $\pi^Y(\mathrm{proy}^{X,Y}_P(x)) = P_x$*.*

DEMOSTRACIÓN: a) La función $(n, i) \mapsto n$ es recursiva, luego existe un $a \in \mathcal{N}$ recursivo tal que $\{a\}^{\omega\times\omega,\omega}(n, i) = n$. Definimos

$$\mathrm{Bas}(n)(i) = \begin{cases} 0 & \text{si } i = 0, \\ S^{\omega,\omega,\omega}(n, a)(i - 1) & \text{si } i \neq 0, \end{cases}$$

donde $S^{\omega,\omega,\omega}$ es la función dada por el teorema 3.59. Observemos que, como a es recursivo, la función constante c_a es recursiva (teorema 3.28), por lo que la función $(n, i) \mapsto S(n, a)(i \dot{-} 1)$ es composición de funciones recursivas y, por consiguiente, es recursiva. De aquí se sigue fácilmente que la función $\mathrm{Bas}(n)(i)$ (como función $\omega^2 \longrightarrow \omega$ es recursiva, luego también lo es la función Bas.

Para cada $n \in \omega$ tenemos que $\mathrm{Bas}(n)(0) = 0$ y $\mathrm{Bas}(n)^1 = S^{\omega,\omega,\omega}(n, a)$, luego, por el teorema 3.59,

$$\{\mathrm{Bas}(n)^1\}^{\omega,\omega}(i) = \{a\}^{\omega\times\omega,\omega}(n, i) = n.$$

En particular, vemos que la función $\{\mathrm{Bas}(n)^1\}^{\omega,\omega}$ es total, luego concluimos que $\mathrm{Bas}(n) \in C(\mathbf{\Sigma}^0_1)$ y además

$$\pi^X(\mathrm{Bas}(n)) = \bigcup_{n\in\omega} \pi^X_0(n) = \begin{cases} \varnothing & \text{si } n = 0, \\ B^X_{n-1} & \text{si } n \neq 0. \end{cases}$$

b) La función $(c, n) \mapsto c$ es recursiva, luego existe un $a \in \mathcal{N}$ recursivo tal que $\{a\}^{\mathcal{N}\times\omega,\mathcal{N}}(c, n) = c$. Definimos

$$i_\Sigma(c)(i) = \begin{cases} 1 & \text{si } c(0) = 2, i = 0, \\ S^{\mathcal{N},\mathcal{N}\times\omega,\mathcal{N}}(c, a)(i - 1) & \text{si } c(0) = 2, i \neq 0, \\ c(i) & \text{si } c(0) \neq 2. \end{cases}$$

Claramente, la función $i_\Sigma(c)(i)$ es recursiva, luego también lo es i_Σ, y obviamente $i_\Sigma(c) = c$ si $c \in C(\mathbf{\Sigma}^0_\alpha)$. Si $c \in C(\mathbf{\Pi}^0_\alpha)$, entonces $c(0) = 2$, luego $i_\Sigma(c)(0) = 1$, $i_\Sigma(c)^1 = S(c, a)$. Por consiguiente,

$$\{i_\Sigma(c)^1\}^{\omega,\mathcal{N}}(n) = \{a\}^{\mathcal{N}\times\omega,\mathcal{N}}(c, n) = c \in C(\mathbf{\Pi}^0_\alpha).$$

En particular, $\{i_\Sigma(c)^1\}^{\omega,\mathcal{N}}$ es una función total, luego $i_\Sigma(c) \in C(\mathbf{\Sigma}^0_{\alpha+1})$ y $\pi^X(i_\Sigma(c)) = \bigcup_{n\in\omega} \pi^X(c) = \pi^X(c)$.

c) La aplicación $(c, n) \mapsto c(n)$ es recursiva, luego existe un $a \in \mathcal{N}$ recursivo tal que $\{a\}^{\mathcal{N}\times\omega,\omega}(c, n) = c(n)$. Definimos

$$g(c)(n) = \begin{cases} 2 & \text{si } n = 0, \\ S^{\mathcal{N},\omega,\omega}(c, a)(n-1) & \text{si } n \neq 0. \end{cases}$$

Claramente g es recursiva y si $c \in C(\mathbf{\Sigma}^0_\alpha)$ entonces tenemos que $g(c)(0) = 2$ y $g(c)^1 = S^{\mathcal{N},\omega,\omega}(c, a)$, luego

$$\{g(c)^1\}^{\omega,\omega}(n) = \{a\}^{\mathcal{N}\times\omega,\mathcal{N}}(c, n) = c(n),$$

luego $\{g(c)^1\}^{\omega,\omega} = c$. Esto prueba que $g(c) \in C(\mathbf{\Pi}^0_\alpha)$ y además

$$\pi^X(g(c)) = X \setminus \pi^X(c).$$

Definimos

$$i_\Pi(c)(n) = \begin{cases} c(n) & \text{si } c(0) = 2, \\ g(i_\Sigma(g(c)))(n) & \text{si } c(0) \neq 2. \end{cases}$$

Claramente i_Π es recursiva, deja invariantes a los códigos en $C(\mathbf{\Pi}^0_\alpha)$ y si $c \in C(\mathbf{\Sigma}^0_\alpha)$ entonces $i_\Pi(c) = g(i_\Sigma(g(c))) \in C(\mathbf{\Pi}^0_{\alpha+1})$ y

$$\pi^X(i_\Pi(c)) = X \setminus \pi^X(i_\Sigma(g(c))) = X \setminus \pi^X(g(c)) = \pi^X(c).$$

d) Sea $g : \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{N}$ la aplicación recursiva construida en el apartado anterior. Basta tomar $\operatorname{comp}(c) = g(i_\Sigma(c))$. Notemos que si $c \in C(\mathbf{\Sigma}^0_\alpha)$ entonces $\operatorname{comp}(c) \in C(\mathbf{\Pi}^0_\alpha)$.

e) La función parcial $(a, n) \mapsto i_\Pi(\{a\}^{\omega,\mathcal{N}}(n))$ es recursiva parcial, luego existe un $b \in \mathcal{N}$ recursivo tal que

$$\{b\}^{\mathcal{N}\times\omega,\mathcal{N}}(a, n) = i_\Pi(\{a\}^{\omega,\mathcal{N}}(n)).$$

Definimos

$$\operatorname{Un}(a)(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0, \\ S^{\mathcal{N},\omega,\mathcal{N}}(a, b)(n-1) & \text{si } n \neq 0. \end{cases}$$

Claramente Un es recursiva y, si $a \in \mathcal{N}$ cumple las hipótesis, $\operatorname{Un}(a)(0) = 1$ y $\operatorname{Un}(a)^1 = S(a, b)$, luego

$$\{\operatorname{Un}(a)^1\}^{\omega,\mathcal{N}}(n) = \{b\}^{\mathcal{N}\times\omega,\mathcal{N}}(a, n) = i_\Pi(\{a\}^{\omega,\mathcal{N}}(n)) \in C(\mathbf{\Pi}^0_{\delta_n}),$$

para cierto ordinal $\delta_n < \aleph_1$. En particular, la función $\{\operatorname{Un}(a)^1\}^{\omega,\mathcal{N}}$ es total, luego $\operatorname{Un}(a) \in C(\mathbf{\Sigma}^0_\alpha) \subset \mathrm{CB}$, para cualquier[2] $\alpha < \omega_1$ mayor que todos los ordinales δ_n, y

$$\begin{aligned} \pi^X(\operatorname{Un}(a)) &= \bigcup_{n\in\omega} \pi^X(\{\operatorname{Un}(a)^1\}^{\omega,\mathcal{N}}(n)) = \bigcup_{n\in\omega} \pi^X(i_\Pi(\{a\}^{\omega,\mathcal{N}}(n))) \\ &= \bigcup_{n\in\omega} \pi^X(\{a\}^{\omega,\mathcal{N}}(n)). \end{aligned}$$

[2]Así resulta que si $\{a\}^{\omega,\mathcal{N}} \in \bigcup_{\beta<\alpha} C(\mathbf{\Pi}^0_\beta)$, entonces $\operatorname{Un}(a) \in C(\mathbf{\Sigma}^0_\alpha)$.

f) Basta tomar $\mathrm{In}(a) = \mathrm{comp}(\mathrm{Un}(\mathrm{comp}(a)))$.

g) Supongamos en primer lugar que $P \in \Sigma_1^0(X \times Y)$. Dejamos al lector el caso en que $P = \varnothing$. En caso contrario existe un $a \in \mathcal{N}$ recursivo tal que

$$P = \bigcup_{n\in\omega} B_{a(n)}^{X\times Y}.$$

Si $X = X^{r,s}$, $Y = X^{r',s'}$, consideramos las funciones recursivas

$$h_1(n) = \left\langle n_0^{r+s+r'+s'}, \ldots, n_{r-1}^{r+s+r'+s'}, n_{r+r'}^{r+s+r'+s'}, \ldots, n_{r+r'+s-1}^{r+s+r'+s'} \right\rangle_{r+s},$$

$$h_2(n) = \left\langle n_r^{r+s+r'+s'}, \ldots, n_{r+r'-1}^{r+s+r'+s'}, n_{r+r'+s}^{r+s+r'+s'}, \ldots, n_{r+r'+s+s'-1}^{r+s+r'+s'} \right\rangle_{r+s},$$

de modo que, llamando $g_i = a \circ h_i$, tenemos que

$$P = \bigcup_{n\in\omega} B_{g_1(n)}^X \times B_{g_2(n)}^Y.$$

Así $y \in P_x \leftrightarrow \bigvee n \in \omega(x \in B_{g_1(n)}^X \land y \in B_{g_2(n)}^Y)$. Definimos

$$h(x,n) = \begin{cases} g_2(n)+1 & \text{si } x \in B_{g_1(n)}^X, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Es fácil ver que la gráfica de la función $h(x,n)$ es semirrecursiva, luego h es recursiva. Además

$$\pi_0^Y(h(x,n)) = \begin{cases} \varnothing & \text{si } x \notin B_{g_1(n)}^X, \\ B_{g_2(n)}^Y & \text{si } x \in B_{g_1(n)}^X. \end{cases}$$

Por lo tanto

$$P_x = \bigcup_{n\in\omega} \pi_0^Y(h(x,n)).$$

Sea $a \in \mathcal{N}$ recursivo tal que $\{a\}^{X\times\omega,\omega} = h$. Definimos

$$\mathrm{proy}_P^{X,Y}(x)(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0, \\ S^{X,\omega,\omega}(x,a)(n-1) & \text{si } n > 0. \end{cases}$$

Claramente la función es recursiva y $\mathrm{proy}_P^{X,Y}(x)^1 = S^{X,\omega,\omega}(x,a)$, luego

$$\{\mathrm{proy}_P^{X,Y}(x)^1\}^{\omega,\omega}(n) = \{a\}^{X\times\omega,\omega}(x,n) = h(x,n).$$

Esto prueba que $\mathrm{proy}_P^{X,Y}(x) \in C(\mathbf{\Sigma}_1^0)$ y

$$\pi^Y(\mathrm{proy}_P^{X,Y}(x)) = \bigcup_{n\in\omega} \pi_0^Y(h(x,n)) = P_x.$$

Supongamos que el resultado es cierto para Σ_n^0 y veámoslo para Π_n^0. Si $P \in \Pi_n^0(X \times Y)$, entonces $P' = (X \times Y) \setminus P \in \Sigma_n^0(X \times Y)$, luego existe la función recursiva $\mathrm{proy}_{P'}^{X,Y}$ y basta definir $\mathrm{proy}_P^{X,Y}(x) = \mathrm{comp}(\mathrm{proy}_{P'}^{X,Y}(x))$. La función es claramente recursiva y

$$\pi^Y(\mathrm{proy}_P^{X,Y}(x)) = Y \setminus \pi^Y(\mathrm{proy}_{P'}^{X,Y}(x)) = Y \setminus P'_x = P_x.$$

Notemos que $\mathrm{proy}_P^{X,Y}(x) \in C(\mathbf{\Pi}_n^0)$.

Supongamos el resultado cierto para Π_n^0 y veámoslo para Σ_{n+1}^0. Tomamos $P \in \Sigma_{n+1}^0(X \times Y)$, con lo que $P = \bigvee n\, P'$, para cierto $P' \in \Pi_n^0(\omega \times X \times Y)$. Entonces

$$y \in P_x \leftrightarrow \bigvee n \in \omega\ (n, x, y) \in P' \leftrightarrow \bigvee n \in \omega\ y \in P'_{n,x)},$$

de modo que $P_x = \bigcup\limits_{n\in\omega} P'_{(n,x)}$. Por hipótesis de inducción tenemos la función recursiva $\mathrm{proy}_{P'}^{\omega\times X,Y}$, que está codificada por un cierto $b \in \mathcal{N}$ recursivo, es decir,

$$\{b\}^{\omega\times X,\mathcal{N}}(n, x) = \mathrm{proy}_{P'}^{\omega\times X,Y}(n, x).$$

Entonces

$$\{S^{\omega,X,\mathcal{N}}(x, b)\}(n) = \{b\}^{\omega\times X,\mathcal{N}}(n, x) = \mathrm{proy}_{P'}^{\omega\times X,Y}(n, x) \in C(\mathbf{\Pi}_n^0).$$

El apartado e) nos da entonces que la función $\mathrm{proy}_P^{X,Y}(x) = \mathrm{Un}(S^{\omega,X,\mathcal{N}}(x, b))$ es recursiva y cumple

$$\pi^Y(\mathrm{proy}_P^{X,Y}(x)) = \bigcup_{n\in\omega} \pi^Y(\mathrm{proy}_{P'}^{\omega\times X,Y}(n, x)) = \bigcup_{n\in\omega} P'_{(n,x)} = P_x.$$

Además se cumple que $\mathrm{Proy}_P^{X,Y}(x) \in C(\mathbf{\Sigma}_{n+1}^0)$ (véase la nota al pie en la prueba del apartado e). ■

Lo más destacado del teorema anterior (salvo el último apartado) es que las funciones definidas entre códigos son uniformes, en el sentido de que no dependen de los espacios producto a los que se aplican. La propiedad siguiente requiere el teorema de recursión:

Teorema 5.11 *Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función recursiva. Entonces existe $v : \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{N}$ recursiva tal que si $c \in \mathrm{CB}$ entonces $v(c) \in \mathrm{CB}$ y $\pi^X(v(c)) = f^{-1}[\pi^Y(c)]$. Más aún, $v[C(\mathbf{\Sigma}_\alpha^0)] \subset C(\mathbf{\Sigma}_\alpha^0)$ y $v[C(\mathbf{\Pi}_\alpha^0)] \subset C(\mathbf{\Pi}_\alpha^0)$.*

Demostración: Se cumple que

$$x \in f^{-1}[B_n] \leftrightarrow f(x) \in B_n \leftrightarrow G^f(n, x) \leftrightarrow x \in G_n^f$$

y $G^f \in \Sigma_1^0$ por definición de función recursiva. Definimos

$$u(n) = \begin{cases} \mathrm{Bas}(0) & \text{si } n = 0, \\ \mathrm{proy}_{G^f}^{\omega,X}(n-1) & \text{si } n \neq 0. \end{cases}$$

Claramente u es una función recursiva y, para todo $n \in \omega$, se cumple que $u(n) \in C(\mathbf{\Sigma}^0_1)$ y

$$\pi^X(u(n)) = \begin{cases} f^{-1}[\varnothing] & \text{si } n = 0, \\ f^{-1}[B_{n-1}] & \text{si } n \neq 0. \end{cases}$$

La función parcial $f(b,c,n) = \{u(\{c^1\}^{\omega,\omega}(n^2_0))^1\}^{\omega,\omega}(n^2_1)$ es recursiva parcial, luego existe un $a_1 \in \mathcal{N}$ recursivo tal que

$$\{a_1\}^{\mathcal{N}\times\mathcal{N}\times\omega,\omega}(b,c,n) = \{u(\{c^1\}^{\omega,\omega}(n^2_0))^1\}^{\omega,\omega}(n^2_1).$$

Similarmente, podemos tomar a_2, $a_3 \in \mathcal{N}$ recursivos tales que

$$\{a_2\}^{\mathcal{N}\times\mathcal{N}\times\omega,\mathcal{N}}(b,c,n) = \{b\}^{\mathcal{N},\mathcal{N}}(\{c^1\}^{\omega,\mathcal{N}}(n)),$$

$$\{a_3\}^{\mathcal{N}\times\mathcal{N}\times\omega,\omega}(b,c,n) = \{b\}^{\mathcal{N},\mathcal{N}}(\{c^1\}^{\omega,\omega})(n).$$

Definimos ahora la función $h : \mathcal{N}\times\mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{N}$ mediante

$$h(c,b)(n) = \begin{cases} c(0) & \text{si } n = 0, \\ S^{\mathcal{N}\times\mathcal{N},\omega,\omega}(b,c,a_1)(n-1) & \text{si } c(0) = 0 \land n \neq 0, \\ S^{\mathcal{N}\times\mathcal{N},\omega,\mathcal{N}}(b,c,a_2)(n-1) & \text{si } c(0) = 1 \land n \neq 0, \\ S^{\mathcal{N}\times\mathcal{N},\omega,\omega}(b,c,a_3)(n-1) & \text{si } c(0) \geq 2 \land n \neq 0. \end{cases}$$

Claramente h es recursiva, luego por el teorema de recursión existe un $b \in \mathcal{N}$ recursivo tal que, para todo $c \in \mathcal{N}$, se cumple que $\{b\}^{\mathcal{N},\mathcal{N}}(c) = h(c,b)$. Definimos $v = \{b\}^{\mathcal{N},\mathcal{N}}$, con lo que v es trivialmente una función recursiva.

Si $c \in C(\mathbf{\Sigma}^0_1)$, entonces $c(0) = 0$, luego $v(c)^1 = h(c,b)^1 = S^{\mathcal{N}\times\mathcal{N},\omega,\omega}(b,c,a_1)$. Por lo tanto,

$$\{v(c)^1\}^{\omega,\omega}(n) = \{a_1\}^{\mathcal{N}\times\mathcal{N}\times\omega,\omega}(b,c,n) = \{u(\{c^1\}^{\omega,\omega}(n^2_0))^1\}^{\omega,\omega}(n^2_1).$$

Ahora bien, sabemos que $u(\{c^1\}^{\omega,\omega}(m)) \in C(\mathbf{\Sigma}^0_1)$, luego el último término está definido y, por consiguiente,la función $v(c)^1$ es total. Esto implica que $v(c) \in C(\mathbf{\Sigma}^0_1)$. Además

$$\pi^X(v(c)) = \bigcup_{n\in\omega} \pi^X_0(\{u(\{c^1\}^{\omega,\omega}(n^2_0))^1\}^{\omega,\omega}(n^2_1))$$

$$= \bigcup_{m,n\in\omega} \pi^X_0(\{u(\{c^1\}^{\omega,\omega}(m))^1\}^{\omega,\omega}(n)) = \bigcup_{m\in\omega} \pi^X(u(\{c^1\}^{\omega,\omega}(m)))$$

$$= \bigcup_{m\in\omega} f^{-1}[\pi^Y_0(\{c^1\}^{\omega,\omega}(m))] = f^{-1}\left[\bigcup_{m\in\omega} \pi^Y_0(\{c^1\}^{\omega,\omega}(m))\right] = f^{-1}[\pi^Y(c)].$$

Supongamos ahora que la relación $\pi^X(v(c)) = f^{-1}[\pi^Y(c)]$ se cumple para códigos en $\bigcup\limits_{\beta<\alpha} C(\mathbf{\Pi}^0_\beta)$ y veamos que es cierta cuando $c \in C(\mathbf{\Sigma}^0_\alpha)$. Como el caso $\alpha = 1$ ya está probado, suponemos $\alpha > 1$, de manera que $c(0) = 1$ y $v(c)^1 = S^{\mathcal{N}\times\mathcal{N},\omega,\mathcal{N}}(b,c,a_2)$. Entonces

$$\{v(c)^1\}^{\omega,\mathcal{N}}(n) = \{a_2\}^{\mathcal{N}\times\mathcal{N}\times\omega,\mathcal{N}}(b,c,n) = \{b\}^{\mathcal{N},\mathcal{N}}(\{c^1\}^{\omega,\mathcal{N}}(n)) = v(\{c^1\}^{\omega,\mathcal{N}}(n)).$$

En particular vemos que $\{v(c)^1\}^{\omega,\mathcal{N}}(n)$ está definido para todo $n \in \omega$ y $\{v(c)^1\}^{\omega,\mathcal{N}}(n) \in \bigcup\limits_{\beta<\alpha} C(\mathbf{\Pi}^0_\beta)$. Por lo tanto, $v(c) \in C(\mathbf{\Sigma}^0_\alpha)$ y

$$\pi^X(v(c)) = \bigcup_{n\in\omega} \pi^X(v(\{c^1\}^{\omega,\mathcal{N}}(n))) = \bigcup_{n\in\omega} f^{-1}[\pi^Y(\{c^1\}^{\omega,\mathcal{N}}(n))]$$

$$= f^{-1}\left[\bigcup_{n\in\omega} \pi^Y(\{c^1\}^{\omega,\mathcal{N}}(n))\right] = f^{-1}[\pi^Y(c)].$$

Finalmente, supongamos que la relación se cumple para códigos en $C(\mathbf{\Sigma}^0_\alpha)$ y veamos que se cumple cuando $c \in C(\mathbf{\Pi}^0_\alpha)$. En tal caso $c(0) = 2$, luego $v(c)^1 = S^{\mathcal{N}\times\mathcal{N},\omega,\omega}(b, c, a_3)$. Así pues,

$$\{v(c)^1\}^{\omega,\omega}(n) = \{a_3\}^{\mathcal{N}\times\mathcal{N}\times\omega,\omega}(b, c, n) = \{b\}^{\mathcal{N},\mathcal{N}}(\{c^1\}^{\omega,\omega})(n) = v(\{c^1\}^{\omega,\omega})(n),$$

luego la función $\{v(c)^1\}^{\omega,\omega} = v(\{c^1\}^{\omega,\omega})$ es total y es un código $C(\mathbf{\Sigma}^0_\alpha)$, luego $v(c) \in C(\mathbf{\Pi}^0_\alpha)$ y

$$\pi^X(v(c)) = X \setminus \pi^X(v(\{c^1\}^{\omega,\omega})) = X \setminus f^{-1}[\pi^Y(\{c^1\}^{\omega,\omega})]$$

$$= f^{-1}[Y \setminus \pi^Y(\{c^1\}^{\omega,\omega})] = f^{-1}[\pi^Y(c)].$$ ■

Para terminar con las propiedades de los códigos, codificamos los conjuntos universales:

Teorema 5.12 *Sea* Γ *una de las clases* Σ^0_n *o* Π^0_n*. Existe una función recursiva* $\mathrm{cod}_\Gamma : \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{N}$ *tal que para cada espacio producto* X *existe un* $G \subset X \times \mathcal{N}$*, tal que* $G \in \Gamma$*, es* $\mathcal{N}$*-universal para* $\mathbf{\Gamma}(X)$ *y si* $c \in C(\mathbf{\Gamma})$ *entonces*

$$\bigwedge n \in \omega\ \{\mathrm{cod}^X_\Gamma(c)\}^{\omega,\omega}(n)\!\downarrow \wedge\ \pi^X(c) = G_{\{\mathrm{cod}^X_\Gamma(c)\}^{\omega,\omega}}.$$

Demostración: Veámoslo en primer lugar para Σ^0_1. Definimos

$$G(x, a) \leftrightarrow \bigvee n \in \omega\, (a(n) \neq 0 \wedge x \in B_{a(n)-1}).$$

Claramente $G \in \Sigma^0_1(X)$ y es $\mathcal{N}$ universal para $\mathbf{\Sigma}^0_1(X)$. Como la función $(c, n) \mapsto \{c^1\}^{\omega,\omega}(n)$ es recursiva parcial, existe un $a \in \mathcal{N}$ recursivo tal que $\{a\}^{\mathcal{N}\times\omega,\omega}(c, n) = \{c^1\}^{\omega,\omega}(n)$. Definimos $\mathrm{cod}_{\Sigma^0_1}(c) = S^{\mathcal{N},\omega,\omega}(c, a)$.

Así, si $c \in C(\mathbf{\Sigma}^0_1)$, tenemos que

$$\{\mathrm{cod}_{\Sigma^1_1}(c)\}^{\omega,\omega}(n) = \{a\}^{\mathcal{N}\times\omega,\omega}(c, n) = \{c^1\}^{\omega,\omega}(n),$$

luego la función $\{\mathrm{cod}_{\Sigma^0_1}(c)\}^{\omega,\omega}$ es total y

$$x \in \pi^X(c) \leftrightarrow \bigvee n \in \omega\, (\{c^1\}^{\omega,\omega}(n) \neq 0 \wedge x \in B_{\{c^1\}^{\omega,\omega}(n)-1})$$

$$\leftrightarrow G(x, \{\mathrm{cod}_{\Sigma^0_1}(c)\}^{\omega,\omega}) \leftrightarrow x \in G_{\{\mathrm{cod}_{\Sigma^0_1}(c)\}^{\omega,\omega}}.$$

Supongamos que se cumple para Σ_n^0 y veámoslo para Π_n^0. Sea $G \in \Sigma_n^0(X \times \mathcal{N})$ un conjunto $\mathcal{N}$-universal para $\mathbf{\Sigma}_n^1(X)$ asociado a la función $\mathrm{cod}_{\Sigma_n^0} : \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{N}$. Entonces $G' = (X \times \mathcal{N}) \setminus G$ es $\mathcal{N}$-universal para $\mathbf{\Pi}_n^0(X)$.

Sea $a \in \mathcal{N}$ recursivo tal que $\{a\}^{\mathcal{N}\times\omega,\omega}(c,n) = \{\mathrm{cod}_{\Sigma_n^0}(\{c^1\}^{\omega,\omega})\}^{\omega,\omega}$ y definimos $\mathrm{cod}_{\Pi_n^0}(c) = S^{\mathcal{N},\omega,\omega}(c,a)$. Así, si $c \in C(\mathbf{\Pi}_n^0)$, tenemos que

$$\{\mathrm{cod}_{\Pi_n^0}(c)\}^{\omega,\omega}(k) = \{a\}^{\mathcal{N}\times\omega,\omega}(c,k) = \{\mathrm{cod}_{\Sigma_n^0}(\{c^1\}^{\omega,\omega})\}^{\omega,\omega}(k),$$

luego la función $\{\mathrm{cod}_{\Pi_n^0}(c)\}^{\omega,\omega}$ es total y, como $\{c^1\}^{\omega,\omega} \in C(\mathbf{\Sigma}_n^0)$,

$$x \in \pi^X(c) \leftrightarrow x \notin \pi^X(\{c^1\}^{\omega,\omega}) \leftrightarrow (x, \{\mathrm{cod}_{\Sigma_n^0}(\{c^1\}^{\omega,\omega})\}^{\omega,\omega}) \notin G$$
$$\leftrightarrow (x, \{\mathrm{cod}_{\Pi_n^0}(c)\}^{\omega,\omega}) \in G' \leftrightarrow x \in G'_{\{\mathrm{cod}_{\Pi_n^0}(c)\}^{\omega,\omega}}.$$

Supongamos que se cumple el teorema para Π_n^0 y veámoslo para Σ_{n+1}^0. Sea $G \subset X \times \mathcal{N}$ un conjunto $\mathcal{N}$-universal para $\mathbf{\Pi}_n^0(X)$ correspondiente a la función $\mathrm{cod}_{\Pi_n^0}$, de modo que el conjunto

$$G'(x,y) \leftrightarrow \bigvee k \in \omega\ (x, y_k) \in G$$

es Σ_{n+1}^0 y $\mathcal{N}$-universal para $\mathbf{\Sigma}_{n+1}^0(X)$. Sea $a \in \mathcal{N}$ recursivo tal que

$$\{a\}^{\mathcal{N}\times\omega,\omega}(c,k) = \{\mathrm{cod}_{\Pi_n^0}(\{c^1\}^{\omega,\mathcal{N}}(k_0^2))\}^{\omega,\omega}(k_1^2).$$

Definimos $\mathrm{cod}_{\Sigma_{n+1}^0}(c) = S^{\mathcal{N},\omega,\omega}(c,a)$. Así, si $c \in C(\mathbf{\Pi}_n^0)$, tenemos que

$$\{\mathrm{cod}_{\Sigma_{n+1}^0}(c)\}^{\omega,\omega}(k) = \{a\}^{\mathcal{N}\times\omega,\omega}(c,k) = \{\mathrm{cod}_{\Pi_n^0}(\{c^1\}^{\omega,\mathcal{N}}(k_0^2))\}^{\omega,\omega}(k_1^2).$$

En particular, esto prueba que la función $\{\mathrm{cod}_{\Sigma_{n+1}^0}(c)\}^{\omega,\omega}$ es total. La igualdad anterior equivale a que, para todo par $(k,i) \in \omega^2$,

$$\{\mathrm{cod}_{\Sigma_{n+1}^0}(c)\}^{\omega,\omega}(\langle k,i\rangle) = \{\mathrm{cod}_{\Pi_n^0}(\{c^1\}^{\omega,\mathcal{N}}(k))\}^{\omega,\omega}(i).$$

o, también:

$$\{\mathrm{cod}_{\Sigma_{n+1}^0}(c)\}_k^{\omega,\omega} = \{\mathrm{cod}_{\Pi_n^0}(\{c^1\}^{\omega,\mathcal{N}}(k))\}^{\omega,\omega}.$$

Por lo tanto:

$$x \in \pi^X(c) \leftrightarrow \bigvee k \in \omega\ x \in \pi^X(\{c^1\}^{\omega,\mathcal{N}}(k)) \leftrightarrow$$
$$\bigvee k \in \omega\ G(x, \{\mathrm{cod}_{\Pi_n^0}(\{c^1\}^{\omega,\mathcal{N}}(k))\}^{\omega,\omega})$$
$$\leftrightarrow \bigvee k \in \omega\ G(x, \{\mathrm{cod}_{\Sigma_{n+1}^0}(c)\}_k^{\omega,\omega}) \leftrightarrow G'(x, \{\mathrm{cod}_{\Sigma_{n+1}^0}(c)\}^{\omega,\omega})$$
$$\leftrightarrow x \in G'_{\{\mathrm{cod}_{\Sigma_{n+1}^0}(c)\}^{\omega,\omega}}.$$

■

Ya estamos en condiciones de definir jerarquía hiperaritmética, pero antes demostramos el teorema siguiente, que garantizará que los primeros conjuntos de dicha jerarquía son los de la jerarquía aritmética que ya tenemos definida:

Teorema 5.13 *Sea Γ una de las clases de Kleene Σ^0_n, Π^0_n y sea $a \in \mathcal{N}$. Entonces*

$$\Gamma(a)(X) = \{\pi^X(c) \mid c \in C(\mathbf{\Gamma}) \wedge c \text{ es recursivo en } a\}.$$

Demostración: Si $c \in C(\mathbf{\Gamma})$ es recursivo en a, como cod_Γ es recursiva, el teorema 3.30 nos da que $\mathrm{cod}_\Gamma(c)$ es recursivo en c, luego en a, por lo que $b = \{\mathrm{cod}_\Gamma(c)\}^{\omega,\omega}$ es también recursivo en a. Si G es el conjunto $\mathcal{N}$-universal sobre $\mathbf{\Gamma}(X)$ dado por el teorema anterior, $\pi^X(c) = G_b \in \Gamma(b) \subset \Gamma(a)$.

La última inclusión para Σ^0_n se deduce de 3.30 c), pues $\Sigma^0_n(a)$ es cerrado para sustituciones $\Sigma^0_n(a)$-recursivas por la propiedad de sustitución. A su vez, la inclusión $\Sigma^0_n(b) \subset \Sigma^0_n(a)$ implica inmediatamente la inclusión $\Pi^0_n(b) \subset \Pi^0_n(a)$.

Con esto tenemos probada una inclusión. Recíprocamente, si $A \in \Gamma(a)(X)$, entonces existe $B \in \Gamma(X \times \mathcal{N})$ tal que $A = B_a = \pi^X(c)$, donde $c = \mathrm{proy}_B^{X,\mathcal{N}}(a)$ es recursivo en a (teorema 5.10 g). ■

Definición 5.14 Para cada ordinal $1 \leq \alpha < \omega_1$, cada $a \in \mathcal{N}$ y cada espacio producto X, definimos

$$C(\Sigma^0_\alpha(a)) = \{c \in C(\mathbf{\Sigma}^0_\alpha) \mid c \text{ es recursivo en } a\},$$

$$C(\Pi^0_\alpha(a)) = \{c \in C(\mathbf{\Pi}^0_\alpha) \mid c \text{ es recursivo en } a\},$$

$$\Sigma^0_\alpha(a)(X) = \{\pi^X(c) \mid c \in C(\Sigma^0_\alpha(a))\}, \qquad \Pi^0_\alpha(a)(X) = \{\pi^X(c) \mid c \in C(\Pi^0_\alpha(a))\},$$

$$\Delta^0_\alpha(a) = \Sigma^0_\alpha(a) \cap \Pi^0_\alpha(a).$$

Cuando a es recursivo escribimos simplemente Σ^0_α, Π^0_α y Δ^0_α.

El teorema anterior prueba que para $\alpha < \omega$ las clases que acabamos de definir son las clases de Kleene que ya teníamos definidas.

Es fácil ver que $\Pi^0_\alpha(a) = \neg\Sigma^0_\alpha(a)$, pero en general no es cierto que $\Sigma^0_\alpha(a)$ sea la relativización de Σ^0_α. La suprayectividad de las aplicaciones π^X implica que

$$\mathbf{\Sigma}^0_\alpha = \bigcup_{a\in\mathcal{N}} \Sigma^0_\alpha(a), \qquad \mathbf{\Pi}^0_\alpha = \bigcup_{a\in\mathcal{N}} \Pi^0_\alpha(a), \qquad \mathbf{\Delta}^0_\alpha = \bigcup_{a\in\mathcal{N}} \Delta^0_\alpha(a).$$

En realidad la última igualdad se apoya en que las clases que acabamos de definir satisfacen las inclusiones "típicas":

Teorema 5.15 *Las clases $\Sigma^0_\alpha(a)$, $\Pi^0_\alpha(a)$, $\Delta^0_\alpha(a)$ satisfacen las inclusiones*

$$\begin{array}{cccccccc}
 & \Sigma^1_1(a) & & \Sigma^1_2(a) & & \Sigma^1_3(a) & & \cdots \\
\Delta^1_1(a) & & \Delta^1_2(a) & & \Delta^1_3(a) & & \Delta^1_4(a) & \\
 & \Pi^1_1(a) & & \Pi^1_2(a) & & \Pi^1_3(a) & & \cdots
\end{array}$$

Demostración: Si $2 \leq \alpha \leq \beta < \omega_1$, las inclusiones $\Sigma^0_\alpha(a) \subset \Sigma^0_\beta(a)$ y $\Pi^0_\alpha(a) \subset \Pi^0_\beta(a)$ son consecuencia directa de las inclusiones correspondientes entre los conjuntos de códigos: $C(\Sigma^0_\alpha(a)) \subset C(\Sigma^0_\beta(a))$ y $C(\Pi^0_\alpha(a)) \subset C(\Pi^0_\beta(a))$, luego faltaría probar que $\Sigma^0_1(a) \subset \Sigma^0_2(a)$ y $\Pi^0_1(a) \subset \Pi^0_2(a)$, pero estas clases pertenecen a la jerarquía aritmética y estas inclusiones ya las tenemos probadas.

La inclusión $\Pi^0_\alpha(a) \subset \Sigma^0_{\alpha+1}(a)$ es sencilla: si $A \in \Pi^0_\alpha(a)(X)$ existe un código $c \in C(\Pi^0_\alpha(a))$ tal que $A = \pi^X(c) = \pi^X(i_\Sigma(c)) \in \Sigma^0_{\alpha+1}(a)$, y tomando complementos obtenemos que $\Sigma^0_\alpha(a) \subset \Pi^0_{\alpha+1}(a)$. De aquí se deducen inmediatamente todas las demás inclusiones. ■

Definición 5.16 Si $a \in \mathcal{N}$, los conjuntos *hiperaritméticos* en a son los elementos de la clase

$$\mathrm{Hip}(a) = \bigcup_{1 \leq \alpha < \omega_1} \Sigma^0_\alpha(a) = \bigcup_{1 \leq \alpha < \omega_1} \Pi^0_\alpha(a) = \bigcup_{1 \leq \alpha < \omega_1} \Delta^0_\alpha(a).$$

Equivalentemente, los conjuntos hiperaritméticos en a son los conjuntos de Borel que admiten un código recursivo en a. Por consiguiente, es obvio que $\boldsymbol{\Delta}^1_1 = \bigcup\limits_{a \in \mathcal{N}} \mathrm{Hip}(a)$. En la sección siguiente demostraremos que $\Delta^1_1(a) = \mathrm{Hip}(a)$.

Ahora observamos que las inclusiones $\Sigma^0_\alpha(a) \subset \Sigma^0_\beta(a)$ no pueden ser todas estrictas, pues ello significaría que $\mathrm{Hip}(a)(X)$ es no numerable (para algún espacio X), pero de hecho es numerable, pues sólo hay una cantidad numerable de funciones recursivas en un $a \in \mathcal{N}$ fijo.

El teorema siguiente nos ayudará a entender mejor la situación:

Teorema 5.17 *Existe una función $v : \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{N}$ recursiva tal que si $c \in \mathrm{CB}$, entonces $\bigwedge n \in \omega\ \{v(c)\}^{\omega,\omega}(n){\downarrow} \wedge \{v(c)\}^{\omega,\omega} \in \mathrm{BO}$ y si $\|\{v(c)\}^{\omega,\omega}\| = \alpha$, entonces $c \in C(\boldsymbol{\Sigma}^0_\alpha) \cup C(\boldsymbol{\Pi}^0_\alpha)$.*

Demostración: Sea $u \in \mathrm{BO}$ (recursivo) tal que $\|u\| = 1$. Tomamos $b_1, b_2, b_3 \in \mathcal{N}$ recursivos tales que

$$\{b_1\}^{\mathcal{N}\times\mathcal{N}\times\omega,\omega}(c, a, n) = u(n),$$

$$\{b_2\}^{\mathcal{N}\times\mathcal{N}\times\omega,\omega}(c, a, n) = \begin{cases} 1 & \text{si } (n^2_0)^2_1 \leq_{(n^2_0)^2_0} (n^2_0)^2_1 \wedge (n^2_1)^2_1 \leq_{(n^2_1)^2_0} (n^2_1)^2_1 \\ & \wedge\ ((n^2_0)^2_0 < (n^2_1)^2_0 \vee \\ & ((n^2_0)^2_0 = (n^2_1)^2_0 \wedge (n^2_0)^2_1 \leq_{(n^2_0)^2_0} (n^2_1)^2_1) \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

$$\{b_3\}^{\mathcal{N}\times\mathcal{N}\times\omega,\omega}(c, a, n) = \{\{a\}^{\mathcal{N},\mathcal{N}}(\{c^1\}^{\omega,\omega})\}^{\omega,\omega}(n),$$

donde, en la definición de b_2, la expresión $\leq_k$ es una abreviatura por

$$\leq_{\{\{a\}^{\mathcal{N},\mathcal{N}}(\{c^1\}^{\omega,\mathcal{N}}(k))\}^{\omega,\omega}}.$$

Para interpretar b_2 debemos pensar en n como la codificación de un par de pares de números naturales:

$$n = \langle n_0^2, n_1^2 \rangle_2 = \langle \langle (n_0^2)_0^2, (n_0^2)_1^2 \rangle_2, \langle (n_1^2)_0^2, (n_1^2)_1^2 \rangle_2 \rangle_2 .$$

Si, para cada natural k tenemos definida una relación de orden $\leq_k$ sobre un subconjunto de ω, la función que define b_2 define la suma lexicográfica de dichas relaciones de orden, es decir para que el par $\langle (n_0^2)_0^2, (n_0^2)_1^2 \rangle_2$ sea menor o igual que el par $\langle (n_1^2)_0^2, (n_1^2)_1^2 \rangle_2$ se ha de cumplir que las segundas componentes estén en los dominios de las relaciones asociadas a las primeras componentes, que la primera componente del primer par sea menor que la del segundo o que, en caso de que coincidan, que la segunda componente del primer par sea menor o igual que la segunda componente del segundo par respecto de la relación asociada a la primera componente común.

Definimos la función recursiva

$$g(c, a)(n) = \begin{cases} S^{\mathcal{N}\times\mathcal{N},\omega,\omega}(c, a, b_1)(n) & \text{si } c(0) = 0, \\ S^{\mathcal{N}\times\mathcal{N},\omega,\omega}(c, a, b_2)(n) & \text{si } c(0) = 1, \\ S^{\mathcal{N}\times\mathcal{N},\omega,\omega}(c, a, b_3)(n) & \text{si } c(0) = 2. \end{cases}$$

Por el teorema de recursión existe un $a \in \mathcal{N}$ recursivo tal que

$$v(c) = \{a\}^{\mathcal{N},\mathcal{N}}(c) = g(a, c).$$

Así, la función $v : \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{N}$ es recursiva. Vamos a ver que cumple lo pedido. Tomemos primeramente $c \in C(\mathbf{\Sigma}_1^0)$. Entonces $c(0) = 0$, luego tenemos que $v(c) = S^{\mathcal{N}\times\mathcal{N},\omega,\omega}(c, a, b_1)$, luego

$$\{v(c)\}^{\omega,\omega}(n) = \{b_1\}^{\mathcal{N}\times\mathcal{N}\times\omega,\omega}(c, a, n) = u(n),$$

luego la función $\{v(c)\}^{\omega,\omega} = u$ es total, $\|\{v(c)\}^{\omega,\omega}\| = \|u\| = 1$ y, en efecto, $c \in C(\mathbf{\Sigma}_1^0)$, como exige el enunciado.

Supongamos ahora que el teorema es cierto para códigos de ordinal $< \alpha$ y supongamos que $c \in C(\mathbf{\Sigma}_\alpha^1)$. Entonces $c(0) = 1$, luego $v(c) = S^{\mathcal{N}\times\mathcal{N},\omega,\omega}(c, a, b_2)$, luego

$$\{v(c)\}^{\omega,\omega}(n) = \{b_2\}^{\mathcal{N}\times\mathcal{N}\times\omega,\omega}(c, a, n).$$

Ahora observamos que la función $\{c^1\}^{\omega,\omega}$ es total y cada $k \in \omega$ tenemos que $\{c^1\}^{\omega,\omega}(k) \in C(\mathbf{\Pi}_\beta^0)$, para un $\beta < \alpha$, luego, por hipótesis de inducción está definido

$$\{v(\{c^1\}^{\omega,\omega}(k))\}^{\omega,\omega} = \{\{a\}^{\mathcal{N},\mathcal{N}}(\{c^1\}^{\omega,\omega}(k))\}^{\omega,\omega} \in \mathrm{BO}$$

y, si $\beta_k = \|\{v(\{c^1\}^{\omega,\omega}(k))\}^{\omega,\omega}\|$, entonces $\{c^1\}^{\omega,\omega}(k) \in C(\mathbf{\Pi}_{\beta_k}^0)$.

Esto a su vez garantiza que está definido $\{b_2\}^{\mathcal{N}\times\mathcal{N}\times\omega,\omega}(c, a, n)$. Por lo tanto, la función $\{v(c)\}^{\omega,\omega}$ es total y, según hemos explicado, codifica la suma lexicográfica de los buenos órdenes codificados por los códigos $\{v(\{c^1\}^{\omega,\omega}(k))\}^{\omega,\omega}$, luego es un buen orden, y así $\{v(c)\}^{\omega,\omega} \in \mathrm{BO}$. Si llamamos $\alpha' = \|\{v(c)\}^{\omega,\omega}\|$, tenemos que α' es el ordinal de un conjunto ordenado que contiene subconjuntos de ordinal β_k. Como hay infinitos β_k y ninguno de ellos es nulo, concluimos que $\beta_k < \alpha'$, luego $c \in C(\mathbf{\Sigma}^0_{\alpha'})$.

Por último, supongamos que v cumple el teorema para códigos $C(\mathbf{\Sigma}^0_\alpha)$ y veamos que lo cumple cuando $c \in C(\mathbf{\Pi}^0_\alpha)$. En tal caso $c(0) = 2$, luego $v(c) = S^{\mathcal{N}\times\mathcal{N},\omega,\omega}(c, a, b_3)$, luego

$$\{v(c)\}^{\omega,\omega}(n) = \{b_3\}^{\mathcal{N}\times\mathcal{N}\times\omega,\omega}(c, a, n) = \{\{a\}^{\mathcal{N},\mathcal{N}}(\{c^1\}^{\omega,\omega})\}^{\omega,\omega}(n).$$

Pero $\{c^1\}^{\omega,\omega}$ es un código en $C(\mathbf{\Sigma}^0_\alpha)$, luego por hipótesis de inducción está definido

$$\{\{a\}^{\mathcal{N},\mathcal{N}}(\{c^1\}^{\omega,\omega})\}^{\omega,\omega} = \{v(\{c^1\}^{\omega,\omega})\}^{\omega,\omega} \in \mathrm{CB}$$

y si $\alpha' = \|\{v(\{c^1\}^{\omega,\omega})\}\|$ entonces $\{c^1\}^{\omega,\omega} \in C(\mathbf{\Sigma}^0_{\alpha'})$.

En particular vemos que la función $\{v(c)\}^{\omega,\omega} = \{v(\{c^1\}^{\omega,\omega})\}^{\omega,\omega}$ es total, $\|\{v(c)\}^{\omega,\omega}\| = \alpha'$ y, ciertamente, $c \in C(\mathbf{\Pi}^0_{\alpha'})$. ■

Como consecuencia:

Teorema 5.18 *Para cada $a \in \mathcal{N}$ se cumple que*

$$\mathrm{Hip}(a) = \bigcup_{1\leq\alpha<\omega_1^a} \Sigma^0_\alpha(a) = \bigcup_{1\leq\alpha<\omega_1^a} \Pi^0_\alpha(a) = \bigcup_{1\leq\alpha<\omega_1^a} \Delta^0_\alpha(a).$$

Demostración: Observemos que la función parcial $\mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{N}$ dada por $x \mapsto \{x\}^{\omega,\omega}$ (que está definida para aquellos x tales que la función $\{x\}^{\omega,\omega}$ es total), es recursiva parcial. En efecto, si está definida en x, tenemos que

$$\{x\}^{\omega,\omega} \in B_n \leftrightarrow \bigwedge i < \ell(n)\ \{x\}^{\omega,\omega}(i) = n_i$$

$$\leftrightarrow \bigwedge i < \ell(n) \bigvee k(k = n_i \land U^{\omega,\omega}(i, x) \in B_k)$$

$$\leftrightarrow \bigwedge i < \ell(n) \bigvee k(k = n_i \land G^{\omega\times\omega}(k, i, x)),$$

luego el conjunto semirrecursivo

$$P(n, x) \leftrightarrow \bigwedge i < \ell(n) \bigvee k(k = n_i \land G^{\omega\times\omega}(k, i, x))$$

computa la función en su dominio.

Ahora, si $A \in \mathrm{Hip}(a)(X)$, existe un $c \in \mathrm{CB}$ recursivo en a tal que $A = \pi^X(c)$. Entonces $v(c)$ es también recursivo en a y $b = \{v(c)\}^{\omega,\omega} \in \mathrm{BO}$ es recursivo en $v(c)$, luego en a. Por consiguiente $\beta = \|b\| < \omega_1^a$ y $c \in C(\Sigma^0_\beta) \cup C(\Pi^0_\beta)$, luego $A = \pi^X(c) \in \Delta^0_{\beta+1}(a)$, y también $\beta + 1 < \omega_1^a$. ■

Del teorema 5.11 se sigue fácilmente que las clases $\Sigma^0_\alpha(a)$ son cerradas para sustituciones recursivas. Para $1 \leq \alpha < \omega_1^a$ se cumple también que están ω-parametrizadas, pero no estamos en condiciones de probarlo. Nos limitaremos a demostrar que están $\mathcal{N}$-parametrizadas. La prueba es un refinamiento de la construcción empleada en el teorema 1.14:

Teorema 5.19 *Sea $a \in \mathcal{N}$ y sea $1 \leq \alpha < \omega_1^a$. Entonces la clase $\Sigma_\alpha^0(a)$ está $\mathcal{N}$-parametrizada.*

DEMOSTRACIÓN: Basta probar que existe un conjunto $\mathcal{N}$-universal para $\Sigma_\alpha^0(a)(\mathcal{N})$. Sea $x \in \mathrm{BO}$ recursivo en a tal que $\|x\| > \alpha$. Definimos

$$x'(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \lor (n_0^2 = 0 \land n_1^2 \neq 0 \land n_1^2 - 1 \leq_x n_1^2 - 1) \\ & \lor (n_0^2 \neq 0 \land n_1^2 \neq 0 \land n_0^2 - 1 \leq_x n_1^2 - 1), \\ 1 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Claramente $x' \in \mathrm{BO}$ es recursivo en a, $\|x'\| = 1 + \|x\| > \alpha$ y además 0 es el mínimo para la relación $\leq_{x'}$. A su vez definimos

$$x''(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } (n_0^2)_0^2 \leq_{x'} (n_1^2)_0^2 \land ((n_0^2)_0^2 = (n_1^2)_0^2 \to (n_0^2)_1^2 \leq (n_1^2)_1^2), \\ 1 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Observemos que x'' es recursivo en a y codifica el buen orden lexicográfico definido por $\leq_{x'}$ y el orden usual en ω. Por consiguiente, vemos que $x'' \in \mathrm{BO}$ y $\|x''\| = \omega \cdot \|x'\| \geq \|x'\| > \alpha$. Sustituyendo x por x'' podemos exigir que la semejanza $s : \|x\| \longrightarrow (C_x, \leq_x)$ cumpla lo siguiente:

a) $s(0) = 0$.

b) $\bigwedge \delta < \|x\| \; s(\delta)_1^2 \neq 0$.

c) $\bigwedge \lambda < \|x\| (\lambda \text{ límite} \to s(\lambda)_1^2 = 0)$.

Definimos una función $\Sigma_1^0(a)$-recursiva parcial mediante

$$\begin{aligned} \mathrm{sc}(n, 0) &= \begin{cases} 0 & \text{si } n_1^2 = 0, \\ \langle n_0^2, n_1^2 - 1 \rangle_2 & \text{si } n_1^2 \neq 0, \end{cases} \\ \mathrm{sc}(n, k+1) &= \begin{cases} \mathrm{sc}(n, k) & \text{si } n = 0 \lor n_1^2 \neq 0, \\ \mu m(m > \mathrm{sc}(n, k) \land m \leq_x m) & \text{en otro caso.} \end{cases} \end{aligned}$$

Así, si $n \in C_x$, la sucesión $\{\mathrm{sc}(n, k)\}_{k \in \omega}$ está definida para todo k, es constante igual a 0 si $n = 0$, es constante igual al anterior de n respecto de $\leq_x$ cuando existe dicho anterior, y recorre todos los elementos anteriores a n respecto de $\leq_x$ si n no tiene un inmediato anterior. Así pues, salvo cuando $n = 0$ se trata de una sucesión cofinal en la sección inicial determinada por n respecto a $\leq_x$.

Sea $a_1 \in \mathcal{N}$ recursivo en a tal que $\{a_1\}^{\omega \times \omega, \omega}(n, k) = \mathrm{sc}(n, k)$. Así,

$$\{S^{\omega, \omega, \omega}(n, a_1)\}^{\omega, \omega}(k) = \mathrm{sc}(n, k).$$

Para cada $k \in \omega$, consideramos la función recursiva $f_k : \mathcal{N} \times \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{N} \times \mathcal{N}$ dada por $f_k(y, x) = (y_k, x)$ (donde $y_k(j) = y(\langle k, j \rangle_2)$. La prueba del teorema 5.11 se adapta sin dificultad para demostrar que existe una función recursiva $v : \omega \times \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{N}$ tal que si $c \in C(\mathbf{\Pi}_\delta^0)$, entonces $v(k, c) \in C(\mathbf{\Pi}_\delta^0)$ y

$$\pi^{\mathcal{N} \times \mathcal{N}}(v(k, c)) = f_k^{-1}[\pi^{\mathcal{N} \times \mathcal{N}}(c)].$$

Sea $a_2 \in \mathcal{N}$ recursivo en a tal que

$$\{a_2\}^{\mathcal{N}\times\omega\times\omega,\mathcal{N}}(c,n,k) = v(k, \mathrm{comp}(\{c\}^{\omega,\mathcal{N}}(\{S^{\omega,\omega,\omega}(n,a_1)\}^{\omega,\omega}(k)))).$$

Sea $a_0 \in C(\Sigma^0_1)$ tal que $\pi^{\mathcal{N}\times\mathcal{N}}(a_0)$ sea un conjunto $\mathcal{N}$-universal para $\mathbf{\Sigma}^0_1(\mathcal{N})$. Consideramos la función $\Sigma^0_1(a)$-recursiva parcial dada por

$$g(n,c) = \begin{cases} a_0 & \text{si } n = 0 \vee n = 1 (= \langle 0,1\rangle_2), \\ \mathrm{Un}(S^{\mathcal{N}\times\omega,\omega,\mathcal{N}}(c,n,a_2)) & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Por el teorema de recursión existe un $c \in \mathcal{N}$ recursivo en a que cumple $f(n) = \{c\}^{\omega,\mathcal{N}}(n) = g(n,c)$. Vamos a probar que f está definida para todo $n \in C_x$ o, equivalentemente, siempre que $n = s(\delta)$, con $\delta < \|x\|$ y que, si $\delta \neq 0$, $f(s(\delta)) \in C(\Sigma^0_\delta(a))$. Llamaremos $U_\delta = \pi^{\mathcal{N}\times\mathcal{N}}(f(s(\delta)))$.

Razonamos por inducción sobre δ. Si $\delta = 0$ o $\delta = 1$ tenemos que $f(\delta) = a_0$, luego $f(\delta) \in C(\Sigma^0_1(a))$. Supongamos ahora que para todo $\gamma < \delta$ se cumple que $f(s(\gamma)) \in \bigcup\limits_{1\leq\epsilon<\delta} C(\Sigma^0_\epsilon(a))$.

Llamando $n = s(\delta)$, tenemos que $\{S^{\omega,\omega,\omega}(n,a_1)\}^{\omega,\omega}(k)$ es de la forma $s(\gamma)$, para cierto $\gamma < \delta$, luego, por hipótesis de inducción está definido

$$\{c\}^{\omega,\mathcal{N}}(\{S^{\omega,\omega,\omega}(n,a_1)\}^{\omega,\omega}(k)) \in \bigcup_{1\leq\epsilon<\delta} C(\Sigma^0_\epsilon(a)),$$

luego

$$\mathrm{comp}(\{c\}^{\omega,\mathcal{N}}(\{S^{\omega,\omega,\omega}(n,a_1)\}^{\omega,\omega}(k))) \in \bigcup_{1\leq\epsilon<\delta} C(\Pi^0_\epsilon(a)),$$

luego

$$v(k, \mathrm{comp}(\{c\}^{\omega,\mathcal{N}}(\{S^{\omega,\omega,\omega}(n,a_1)\}^{\omega,\omega}(k)))) \in \bigcup_{1\leq\epsilon<\delta} C(\Pi^0_\epsilon(a)).$$

Equivalentemente,

$$\{S^{\mathcal{N}\times\omega,\omega,\mathcal{N}}(c,n,a_2)\}^{\omega,\mathcal{N}}(k) = \{a_2\}^{\mathcal{N}\times\omega\times\omega,\mathcal{N}}(c,n,k)$$

está definido para todo k y está en $\bigcup\limits_{1\leq\epsilon<\delta} C(\Pi^0_\epsilon(a)$, lo cual implica que

$$g(n,c) = \mathrm{Un}(S^{\mathcal{N}\times\omega,\omega,\mathcal{N}}(c,n,a_2))$$

está definido y pertenece a $C(\Sigma^0_\delta(a))$, como había que probar. Más precisamente, vemos que

$$\begin{aligned} U_\delta &= \bigcup_{k\in\omega} \pi^{\mathcal{N}\times\mathcal{N}}(\{a_2\}^{\mathcal{N}\times\omega\times\omega,\mathcal{N}}(c,n,k)) \\ &= \bigcup_{k\in\omega} f_k^{-1}[\pi^{\mathcal{N}\times\mathcal{N}}(\mathrm{comp}(\{c\}^{\omega,\mathcal{N}}(\{S^{\omega,\omega,\omega}(n,a_1)\}^{\omega,\omega}(k))))] \\ &= \bigcup_{k\in\omega} f_k^{-1}[(\mathcal{N}\times\mathcal{N}) \setminus \pi^{\mathcal{N}\times\mathcal{N}}(f(\{S^{\omega,\omega,\omega}(n,a_1)\}^{\omega,\omega}(k)))] \\ &= \bigcup_{k\in\omega} f_k^{-1}[(\mathcal{N}\times\mathcal{N}) \setminus U_{\delta_k}], \end{aligned}$$

donde $\{\delta_k\}_{k\in\omega}$ es una sucesión cofinal en δ. Equivalentemente,

$$U_\delta = \{(y,x) \in \mathcal{N}\times\mathcal{N} \mid \bigvee k \in \omega\,((y_k,x) \notin U_{\delta_k})\}.$$

Como la función $f : \omega \longrightarrow \mathcal{N}$ es $\Sigma^0_1(a)$-recursiva parcial, es inmediato que $U_\delta \in \Sigma^0_\delta(a)$, y ahora una simple inducción demuestra que es $\mathcal{N}$-universal para $\mathbf{\Sigma}^0_\delta(\mathcal{N})$. (De hecho, el argumento es exactamente el mismo empleado en el teorema 2.10.) ■

Ahora el mismo argumento del teorema 1.15 (aplicado a $\mathcal{N}$ en lugar de a $\mathcal{C}$ y usando de las clases hiperaritméticas son cerradas para sustituciones recursivas en lugar de continuas), nos da el teorema siguiente:

Teorema 5.20 *Si $a \in \mathcal{N}$, las inclusiones entre las clases de la jerarquía de los conjuntos hiperaritméticos en a son estrictas para ordinales $1 \leq \alpha < \omega_1^a$.*

Notemos que la demostración del teorema anterior prueba, concretamente, que la jerarquía hiperaritmética es estricta sobre el espacio $\mathcal{N}$ y, en general, sobre los espacios producto no numerables (puesto que son recursivamente homeomorfos a $\mathcal{N}$). Según indicábamos, puede probarse que las clases hiperaritméticas están ω-parametrizadas y esto implica que la jerarquía hiperaritmética también es estricta en ω y, en general, en todos los espacios producto, pero no vamos a probarlo aquí (ni tampoco vamos a usar este hecho en ningún momento).

En particular, puesto que la clase de los conjuntos aritméticos en $a \in \mathcal{N}$ está contenida en la clase $\Delta^0_\omega(a)$, hemos demostrado que existen subconjuntos hiperaritméticos de $\mathcal{N}$ que no son aritméticos.

No vamos a demostrar más propiedades de las clases de la jerarquía hiperaritmética, pues no las vamos a necesitar y las demostraciones se reducen a tediosas manipulaciones de códigos, pero no es difícil demostrar, sin más que refinar sistemáticamente argumentos que ya hemos empleado, que todas las clases $\Sigma^0_\alpha(a)$ y $\Pi^0_\alpha(a)$ son adecuadas, que las primeras son cerradas para $\bigvee n$ y las segundas lo son para $\bigwedge n$ y que $\Sigma^0_\alpha(a)$ es la relativización de Σ^0_α si $\alpha < \omega_1^{\mathrm{ck}}$, pero no en caso contrario.

5.3 El teorema de Suslin-Kleene

En esta sección demostraremos que la clase $\mathrm{Hip}(a)$ de los conjuntos aritméticos en a no es sino la clase $\Delta^1_1(a)$, en perfecta analogía con el teorema de Suslin que caracteriza a la clase de los conjuntos de Borel como la clase $\mathbf{\Delta}^1_1$.

Definición 5.21 Para cada espacio producto X, fijamos un conjunto G^X que sea Σ^1_1 y $\mathcal{N}$-universal para $\mathbf{\Sigma}^1_1(X)$ según 3.55. Un código $\mathbf{\Delta}^1_1$ en X es un $c \in \mathcal{N}$ tal que $G^X_{c^2_0} = X \setminus G^X_{c^2_1}$.

Llamaremos $C_X(\mathbf{\Delta}^1_1)$ al conjunto de todos los códigos $\mathbf{\Delta}^1_1$ en el espacio X y $p_X : C_X(\mathbf{\Delta}^1_1) \longrightarrow \mathbf{\Delta}^1_1(X)$ a la aplicación (obviamente suprayectiva) dada por $p_X(c) = G^X_{c^2_0}$.

Llamaremos $C_X(\Delta_1^1(a))$ al conjunto de todos los códigos $\mathbf{\Delta}_1^1$ en X que son recursivos en a.

Según el teorema 3.55 (véase la nota al pie en la demostración), tenemos que la restricción $p_X : C_X(\Delta_1^1(a)) \longrightarrow \Delta_1^1(a)(X)$ es suprayectiva.

Veamos la parte trivial de la igualdad que nos proponemos demostrar:

Teorema 5.22 *Para cada espacio producto X existe una función $u : \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{N}$ recursiva tal que si $c \in \mathrm{CB}$, entonces $u(c) \in C_X(\mathbf{\Delta}_1^1)$ y $\pi^X(c) = p_X(u(c))$. Por lo tanto,* $\mathrm{Hip}(a) \subset \Delta_1^1(a)$.

Demostración: Sea $D = \bigcup\limits_{n\in\omega} \{n+1\} \times B_n^X \in \Sigma_1^0(\omega \times X)$. Existe $a \in \mathcal{N}$ recursivo tal que $D = G_a^{\omega\times X}$. Observemos que $D_0 = \varnothing$ y que $D_{n+1} = B_n^X$. Por lo tanto, usando 3.55:

$$x \in B_n^X \leftrightarrow (n+1, x) \in D \leftrightarrow (n+1, x, a) \in G^{\omega\times X} \leftrightarrow (x, S^{\omega,X}(n+1, a)) \in G^X$$
$$\leftrightarrow x \in G^X_{S^{\omega,X}(n+1,a)}.$$

Igualmente se prueba que $G^X_{S^{\omega,X}(0,a)} = \varnothing$. Análogamente, partiendo del conjunto $\bigcup\limits_{n\in\omega} \{n+1\} \times (X \setminus B_n^X)$ obtenemos un $b \in \mathcal{N}$ recursivo tal que

$$G^X_{S^{\omega,X}(n+1,b)} = X \setminus B_n^X, \qquad G^X_{S^{\omega,X}(0,b)} = X.$$

Sea $u_0(n) = \left\langle S^{\omega,X}(n,a), S^{\omega,X}(n,b)\right\rangle_2 \in C_X(\Delta_1^1)$. Por construcción tenemos claramente que $p_X(u_0(n)) = \pi_0^X(n)$.

Definimos los conjuntos

$$P(x,c) \leftrightarrow \bigvee n \ (\{c^1\}^{\omega,\omega}(n){\downarrow} \land G^X(x, u_0(\{c^1\}^{\omega,\omega}(n))_0^2)),$$

$$Q(x,c) \leftrightarrow \bigwedge n \ (\{c^1\}^{\omega,\omega}(n){\downarrow} \land G^X(x, u_0(\{c^1\}^{\omega,\omega}(n))_1^2)).$$

Observemos que

$$\{c^1\}^{\omega,\omega}(n){\downarrow} \leftrightarrow U^{\omega,\omega}(n,c^1){\downarrow} \leftrightarrow \bigvee m \in \omega \bigwedge k \in \omega (m = k \leftrightarrow G^{\omega\times\omega}(k,n,c^1))$$

y la última expresión es claramente Σ_1^1, luego P y Q son Σ_1^1. Por lo tanto, existen b_1, $b_2 \in \mathcal{N}$ recursivos tales que

$$P(x,c) \leftrightarrow G^{X\times\mathcal{N}}(x,c,b_1), \qquad Q(x,c) \leftrightarrow G^{X\times\mathcal{N}}(x,c,b_2).$$

Sea $u_1(c) = \left\langle S^{X,\mathcal{N}}(c,b_1), S^{X,\mathcal{N}}(c,b_2)\right\rangle_2$. Claramente u_1 es una función recursiva.

Sean ahora

$$P'(x,c,a) \leftrightarrow \bigvee n(\{a\}^{\mathcal{N},\mathcal{N}}(\{c^1\}^{\omega,\mathcal{N}}(n)){\downarrow} \land G^X(x, \{a\}^{\mathcal{N},\mathcal{N}}(\{c^1\}^{\omega,\mathcal{N}}(n))_0^2)),$$

$$Q'(x, c, a) \leftrightarrow \bigwedge n(\{a\}^{\mathcal{N},\mathcal{N}}(\{c^1\}^{\omega,\mathcal{N}}(n))\downarrow \land G^X(x, \{a\}^{\mathcal{N},\mathcal{N}}(\{c^1\}^{\omega,\mathcal{N}}(n))^1_0)),$$

que también son Σ^1_1, luego existen b'_1, $b'_2 \in \mathcal{N}$ recursivos tales que

$$P'(x, c, a) \leftrightarrow G^{X\times\mathcal{N}\times\mathcal{N}}(x, c, a, b'_1), \qquad Q'(x, c, a) \leftrightarrow G^{X\times\mathcal{N}\times\mathcal{N}}(x, c, a, b'_2).$$

Definimos $u_2(c, a) = \big\langle S^{\mathcal{N}\times\mathcal{N},X}(c, a, b'_1), S^{\mathcal{N}\times\mathcal{N},X}(c, a, b'_2)\big\rangle_2$, recursiva.

Similarmente, definimos

$$P''(x, c, a) \leftrightarrow \{a\}^{\mathcal{N},\mathcal{N}}(\{c^1\}^{\omega,\omega})\downarrow \land G^X(x, \{a\}^{\mathcal{N},\mathcal{N}}(\{c^1\}^{\omega,\omega})^2_1),$$

$$Q''(x, c, a) \leftrightarrow \{a\}^{\mathcal{N},\mathcal{N}}(\{c^1\}^{\omega,\omega})\downarrow \land G^X(x, \{a\}^{\mathcal{N},\mathcal{N}}(\{c^1\}^{\omega,\omega})^2_0),$$

que también son Σ^1_1, luego existen b''_1, $b''_2 \in \mathcal{N}$ recursivos tales que

$$P''(x, c, a) \leftrightarrow G^{X\times\mathcal{N}\times\mathcal{N}}(x, c, a, b''_1), \qquad Q''(x, c, a) \leftrightarrow G^{X\times\mathcal{N}\times\mathcal{N}}(x, c, a, b''_2).$$

Definimos $u_3(c, a) = \big\langle S^{\mathcal{N}\times\mathcal{N},X}(c, a, b''_1), S^{\mathcal{N}\times\mathcal{N},X}(c, a, b''_2)\big\rangle_2$, recursiva.

Por último definimos $g : \mathcal{N} \times \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{N}$ mediante

$$g(c, a) = \begin{cases} u_1(c) & \text{si } c(0) = 0, \\ u_2(c, a) & \text{si } c(0) = 1, \\ u_3(c, a) & \text{si } c(0) = 2, \end{cases}$$

claramente recursiva. Por el teorema de recursión existe un $a \in \mathcal{N}$ recursivo tal que

$$u(c) = \{a\}^{\mathcal{N},\mathcal{N}}(c) = g(c, a).$$

Vamos a probar que la función u (claramente recursiva) cumple lo pedido.

Sea $c \in C(\mathbf{\Sigma}^0_1)$. Entonces $c(0) = 0$, luego $u(c) = u_1(c)$. En consecuencia:

$$x \in \pi^X(c) \leftrightarrow x \in \bigcup_{n\in\omega} \pi^X_0(\{c^1\}^{\omega,\omega}(n)) \leftrightarrow \bigvee n \in \omega\ x \in G^X_{S^{\omega,X}(\{c^1\}^{\omega,\omega}(n),a)}$$

$$\leftrightarrow \bigvee n \in \omega\ G^X(x, u_0(\{c^1\}^{\omega,\omega}(n))^2_0) \leftrightarrow P(x, c) \leftrightarrow G^{\mathcal{N}\times X}(x, c, b_1)$$
$$\leftrightarrow G^X(x, S^{X,\mathcal{N}}(c, b_1)) \leftrightarrow x \in G^X_{u_1(c)^2_0}.$$

Así pues $\pi^X(c) = G^X_{u_1(c)^2_0}$, e igualmente:

$$x \in \pi^X(c) \leftrightarrow x \in \bigcup_{n\in\omega} \pi^X_0(\{c^1\}^{\omega,\omega}(n)) \leftrightarrow \bigvee n \in \omega\ x \notin G^X_{S^{\omega,X}(\{c^1\}^{\omega,\omega}(n),b)}$$

$$\leftrightarrow \bigvee n \in \omega\ \neg G^X(x, u_0(\{c^1\}^{\omega,\omega}(n))^2_1) \leftrightarrow \neg Q(x, c) \leftrightarrow \neg G^{\mathcal{N}\times X}(x, c, b_1)$$
$$\leftrightarrow \neg G^X(x, S^{X,\mathcal{N}}(c, b_1)) \leftrightarrow x \in X \setminus G^X_{u_1(c)^2_1}.$$

luego $\pi^X(c) = X \setminus G^X_{u(c)^2_1}$. Esto prueba que $u(c) \in C_X(\mathbf{\Delta}^1_1)$ y $\pi^X(c) = p_X(u(c))$.

Supongamos que u cumple el teorema para códigos en $C(\mathbf{\Pi}^0_\beta)$, con $\beta < \alpha$ y veamos que también lo cumple si $c \in C(\mathbf{\Sigma}^0_\alpha)$, con $\alpha > 1$. Entonces $c(0) = 1$, luego $u(c) = u_2(c, a)$.

$$x \in \pi^X(c) \leftrightarrow x \in \bigcup_{n\in\omega} \pi^X(\{c^1\}^{\omega,\mathcal{N}}(n)) = \bigcup_{n\in\omega} p_X(u(\{c^1\}^{\omega,\mathcal{N}}(n)))$$

$$\leftrightarrow \bigvee n \in \omega\ x \in G^X_{u(\{c^1\}^{\omega,\mathcal{N}}(n))^2_0} \leftrightarrow \bigvee n \in \omega\ G^X(x, (\{a\}^{\mathcal{N},\mathcal{N}}(\{c^1\}^{\omega,\mathcal{N}}(n)))^2_0)$$

$$\leftrightarrow P'(x, c, a) \leftrightarrow G^{X\times\mathcal{N}\times\mathcal{N}}(x, c, a, b'_1) \leftrightarrow G^X(x, S^{\mathcal{N}\times\mathcal{N},X}(c, a, b'_1))$$

$$\leftrightarrow x \in G^X_{u_2(c,a)^2_0} \leftrightarrow x \in G^X_{u(c)^2_0},$$

luego $\pi^X(c) = G^X_{u(c)^2_0}$, y análogamente $\pi^X(c) = X \setminus G^X_{u(c)^2_1}$. Esto prueba que $u(c) \in C_X(\mathbf{\Delta}^1_1)$ y $\pi^X(c) = p_X(u(c))$.

Por último, supongamos que u cumple el teorema para códigos en $C(\mathbf{\Sigma}^0_\alpha)$ y veamos que también lo cumple si $c \in C(\mathbf{\Pi}^0_\alpha)$. En tal caso $c(0) = 2$, luego $u(c) = u_3(c, a)$.

$$x \in \pi^X(c) \leftrightarrow x \in X \setminus \pi^X(\{c^1\}^{\omega,\omega}) \leftrightarrow x \in X \setminus p_X(u(\{c^1\}^{\omega,\omega}))$$

$$\leftrightarrow x \in G^X_{u(\{c^1\}^{\omega,\omega})^2_1} \leftrightarrow G^X(x, (\{a\}^{\mathcal{N},\mathcal{N}}(\{c^1\}^{\omega,\omega}))^2_1) \leftrightarrow P''(x, c, a)$$

$$\leftrightarrow G^{X\times\mathcal{N}\times\mathcal{N}}(x, c, a, b''_1) \leftrightarrow G^X(x, S^{\mathcal{N}\times\mathcal{N},X}(c, a, b''_1))$$

$$\leftrightarrow x \in G^X_{u_3(c,a)^2_0} \leftrightarrow x \in G^X_{u(c)^2_0},$$

luego $\pi^X(c) = G^X_{u(c)^2_0}$, y análogamente $\pi^X(c) = X \setminus G^X_{u(c)^2_1}$, luego $u(c) \in C_X(\mathbf{\Delta}^1_1)$ y $\pi^X(c) = p_X(u(c))$. ■

El resultado principal es el análogo efectivo del teorema de Suslin según el cual todo par de conjuntos analíticos disjuntos puede separarse por un conjunto de Borel:

Teorema 5.23 (Suslin-Kleene) *Para cada espacio X existe una función recursiva $v : \mathcal{N} \times \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{N}$ tal que si c, $d \in \mathcal{N}$ cumplen $G^X_c \cap G^X_d = \varnothing$ entonces $v(c, d) \in \mathrm{CB}$ y si $B = \pi^X(v(c, d))$ entonces $G^X_c \subset B$, $G^X_d \subset X \setminus B$.*

Demostración: Lo demostraremos primero para $X = \mathcal{N}$. Llamamos

$$P = \{n \in \omega \mid \ell(n^2_0) = \ell(n^2_1)\}, \qquad T = \{n \in \omega \mid \ell(n^3_0) = \ell(n^3_1) = \ell(n^3_2)\}.$$

Un *árbol binario* será un conjunto $A \subset P$ tal que, para todo x, $y \in \mathcal{N}$, si $\langle \bar{x}(n), \bar{y}(n)\rangle_2 \in A$ y $m \leq n$, entonces $\langle \bar{x}(m), \bar{y}(m)\rangle_2 \in A$. Análogamente se define un *árbol ternario.*

Consideramos las relaciones recursivas siguientes:

$$n \subset m \leftrightarrow \ell(n) \leq \ell(m) \land \bigwedge i < \ell(n)\ n_i = m_i$$

$$n <_3 m \leftrightarrow n^3_0 \subsetneq m^3_0 \land n^3_1 \subsetneq m^3_1 \land n^3_2 \subsetneq m^3_2$$

$$r = n * m \leftrightarrow \ell(r) = \ell(n) + 1 \land n \subset r \land r_{\ell(n)} = m$$

$$n *_2 m = \left\langle n_0^2 * m_0^2, n_1^2 * m_1^2 \right\rangle_2, \qquad n *_3 m = \left\langle n_0^3 * m_0^3, n_1^2 * m_1^3, n_2^3 * m_2^3 \right\rangle_3.$$

Si A es un árbol binario y $n \in P$, definimos

$$A_n = \{m \in A \mid (n_0^2 \subset m_0^2 \land n_1^2 \subset m_1^2) \lor (m_0^2 \subset n_0^2 \land m_1^2 \subset n_1^2)\},$$

$$p(A) = \{v \in \mathcal{N} \mid \bigvee w \in \mathcal{N} \bigwedge n \in \omega \ \ \langle \bar{v}(n), \bar{w}(n) \rangle_2 \in A\}.$$

Diremos que un $x \in \mathcal{N}$ *codifica* un árbol A si $x = \chi_A$.

Si A y B son árboles binarios, podemos construir el árbol ternario J dado por:

$$J = \{\langle u, v, w \rangle_3 \mid \langle u, v \rangle_2 \in A \land \langle u, w \rangle_2 \in B\}.$$

Sean $f_1(m) = \left\langle m_0^3, m_1^3 \right\rangle_2$, $f_2(m) = \left\langle m_0^3, m_2^3 \right\rangle_2$ recursivas, de modo que

$$n \in J \leftrightarrow f_1(n) \in A \land f_2(n) \in B.$$

Sea $j : \mathcal{N} \times \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{N}$ la función recursiva dada por

$$j(x, u)(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } \ell(n_0^3) = \ell(n_1^3) = \ell(n_2^3) \land x(f_1(n)) = 1 \land y(f_2(n)) = 1, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Así, si $x = \chi_A$, $y = \chi_B$, entonces $j(x, y) = \chi_J$.

Sea $G^{\mathcal{N}}$ el conjunto $\mathcal{N}$-universal para $\mathbf{\Sigma}_1^1(\mathcal{N})$ según 3.55. Sea $B \in \Pi_1^0$ tal que

$$G^{\mathcal{N}}(u, v) \leftrightarrow \bigvee w \in \mathcal{N} \ B(u, v, w).$$

Por 3.12 existe un $P \subset \omega^4$ recursivo tal que

$$\neg B(u, v, w) \leftrightarrow \bigvee m \ P(\bar{u}(m), \bar{v}(m), \bar{w}(m), m)$$

y

$$P(\bar{u}(m), \bar{v}(m), \bar{w}(m), m) \land m \leq m' \rightarrow P(\bar{u}(m'), \bar{v}(m'), \bar{w}(m'), m').$$

Para cada $u \in \mathcal{N}$ definimos

$$A^u = \{\langle s, t \rangle_2 \mid \bigvee n \in \omega(\ell(s) = \ell(t) = n \land \neg P(\bar{u}(n), s, t, n))\}.$$

Claramente A^u es un árbol binario. Ahora observamos que

$$v \in G_u^{\mathcal{N}} \leftrightarrow (u, v) \in G^{\mathcal{N}} \leftrightarrow \bigvee w \, B(u, v, w) \leftrightarrow \bigvee w \bigwedge n \neg P(\bar{u}(n), \bar{v}(n), \bar{w}(n), n)$$

$$\leftrightarrow \bigvee w \bigwedge n \ \ \langle \bar{v}(n), \bar{w}(n) \rangle_2 \in A^u \leftrightarrow v \in p(A^u).$$

Así pues, $G_u^{\mathcal{N}} = p(A^u)$.

Sea $g : \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{N}$ la función recursiva dada por

$$g(u)(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } \bigvee stn(\ell(s) = \ell(t) = n \land \neg P(\bar{u}(n), s, t, n) \land n = \langle s, t \rangle_2), \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Así, $g(u) = \chi_{A^u}$. Definimos

$$\{p_1\}^{\mathcal{N}\times\omega^3,\mathcal{N}}(a,r,s,t) = \mathrm{In}(S^{\omega^3,\omega,\mathcal{N}}(r,s,t,a)),$$

$$\{p_2\}^{\mathcal{N}\times\omega^2,\mathcal{N}}(a,r,s) = \mathrm{In}(S^{\mathcal{N}\times\omega^2,\omega,\mathcal{N}}(a,r,s,p_1)),$$

$$\{p_3\}^{\mathcal{N}\times\omega,\mathcal{N}}(a,r) = \mathrm{Un}(S^{\mathcal{N}\times\omega,\omega,\mathcal{N}}(a,r,p_2)), \qquad p(a) = \mathrm{Un}(S^{\mathcal{N},\omega,\mathcal{N}}(a,p_3)).$$

Así, $p : \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{N}$ recursiva y si $a \in \mathcal{N}$ cumple que

$$\bigwedge rstu \in \omega \ \{a\}^{\omega^4,\mathcal{N}}(r,s,t,u) \in \mathrm{CB}$$

y $\pi^{\mathcal{N}}(\{a\}^{\omega^4,\mathcal{N}}(r,s,t,u)) = D_{rstu}$, entonces $p(a) \in \mathrm{CB}$ y

$$\pi^{\mathcal{N}}(p(a)) = \bigcup_{r,s\in\omega}\bigcap_{t,u\in\omega} D_{rstu}.$$

En efecto: $\{a\}^{\omega^4,\mathcal{N}}(r,s,t,u) = \{S^{\omega^3,\omega,\mathcal{N}}(r,s,t,a)\}^{\omega,\mathcal{N}}(u)$, luego

$$\pi^{\mathcal{N}}(\{p_1\}^{\mathcal{N}\times\omega^3,\mathcal{N}}(a,r,s,t)) = \bigcap_{u\in\omega} D_{rstu}.$$

A su vez, $\{p_1\}^{\omega^3,\mathcal{N}}(a,r,s,t) = \{S^{\mathcal{N}\times\omega^2,\omega,\mathcal{N}}(a,r,s,p_1)\}^{\omega,\mathcal{N}}(t)$, luego

$$\pi^{N}(\{p_2\}^{\mathcal{N}\times\omega^2,\mathcal{N}}(a,r,s)) = \bigcap_{t,u\in\omega} D_{rstu}.$$

Igualmente, $\{p_2\}^{\mathcal{N}\times\omega^2,\mathcal{N}}(a,r,s) = \{S^{\mathcal{N}\times\omega,\omega,\mathcal{N}}(a,r,p_2)\}^{\omega,\mathcal{N}}(s)$, luego

$$\pi^{\mathcal{N}}(\{p_3\}^{\mathcal{N}\times\omega,\mathcal{N}}(a,r)) = \bigcup_{s\in\omega}\bigcap_{t,u\in\omega} D_{rstu}.$$

Por último,

$$\{p_3\}^{\mathcal{N}\times\omega,\mathcal{N}}(a,r) = \{S^{\mathcal{N},\omega,\mathcal{N}}(a,p_3)\}^{\omega,\mathcal{N}}(r),$$

luego

$$\pi^{\mathcal{N}}(p(a)) = \bigcup_{r,s\in\omega}\bigcap_{t,u\in\omega} D_{rstu}.$$

Veamos ahora que existe una función recursiva $d_2 : \omega \times \omega \longrightarrow \mathcal{N}$ tal que, para todo $n, r \in \omega$, $d_2(n,r) \in \mathrm{CB}$ y

$$\pi^{\mathcal{N}}(d_2(n,r)) = \{z \in \mathcal{N} \mid z(\ell(n_0^3)) = r\}.$$

Para ello consideramos el conjunto

$$A_{n,r} = \{m \in \omega \mid \ell(m) = \ell(n_0^3) + 1 \land m_{\ell(n_0^3)} = r\}.$$

Es fácil construir una función recursiva $h : \omega^3 \longrightarrow \omega$ tal que

$$A_{n,r} = \{h(k,n,r) \mid k \in \omega\}.$$

(Basta definir $h(0, n, r)$ como el mínimo elemento de $A_{n,r}$ y $h(k+1, n, r)$ como el mínimo elemento de $A_{n,r}$ mayor que $h(k, n, r)$.)

Podemos tomar $a \in \mathcal{N}$ recursivo tal que $\{a\}^{\omega,\mathcal{N}}(n, r, k) = \mathrm{Bas}(h(k, n, r)+1)$. Así, $d_2(n, r) = \mathrm{Un}(S^{\omega^2,\omega,\mathcal{N}}(n, r, a))$ cumple lo pedido, pues

$$\{S^{\omega^2,\omega,\mathcal{N}}(n, r, a)\}^{\omega,\mathcal{N}}(k) = \mathrm{Bas}(h(k, n, r) + 1) \in \mathrm{CB},$$

luego

$$\pi^{\mathcal{N}}(d_2(n, r)) = \bigcup_{k\in\omega} B^{\mathcal{N}}_{h(k,n,r)} = \bigcup_{m\in A} B^{\mathcal{N}}_m$$

es el conjunto requerido.

Seguidamente definimos una función parcial $d : \mathcal{N}^3 \times \omega^5 \longrightarrow \mathcal{N}$ como sigue:

a) Si $r = t$ y $j(x, y)(n *_3 \langle r, s, u\rangle_3) = 1$, entonces

$$d(x, y, a, n, r, s, t, u) = \{a\}^{\omega\times\mathcal{N}^2,\mathcal{N}}(n *_3 \langle r, s, u\rangle_3, x, y).$$

b) Si $r = t$ y $x(f_1(n *_3 \langle r, s, u\rangle_3)) \neq 1$ entonces $d(x, y, a, n, r, s, t, u) = d_0$, donde $d_0 \in \mathrm{CB}$ es un código recursivo tal que $\pi^{\mathcal{N}}(d_0) = \varnothing$.

c) Si $r = t$ y no se cumplen los casos anteriores, $d(x, y, a, n, r, s, t, u) = d_1$, donde $d_1 \in \mathrm{CB}$ es un código recursivo tal que $\pi^{\mathcal{N}}(d_1) = \mathcal{N}$.

d) Si $r \neq t$, entonces $d(x, y, a, n, r, s, t, u) = d_2(n, r)$.

Claramente d es recursiva parcial, luego existe un $\hat{d} \in \mathcal{N}$ recursivo tal que

$$\begin{aligned} d(x, y, a, n, r, s, t, u) &= \{\hat{d}\}^{\omega^5\times\mathcal{N}^3,\mathcal{N}}(x, y, a, n, r, s, t, u) \\ &= \{S^{\mathcal{N}^3\times\omega,\omega^4,\mathcal{N}}(x, y, a, n, \hat{d})\}^{\omega^4,\mathcal{N}}(r, s, t, u). \end{aligned}$$

Sea $h : \omega \times \mathcal{N}^3 \longrightarrow \mathcal{N}$ la función recursiva dada por

$$h(n, x, y, a) = p(S^{\mathcal{N}^3\times\omega,\omega^4,\mathcal{N}}(x, y, a, n, \hat{d})).$$

Por el teorema de recursión existe un $a \in \mathcal{N}$ recursivo tal que

$$q(n, x, y) = \{a\}^{\omega\times\mathcal{N}^2,\mathcal{N}}(n, x, y) = h(n, x, y, a).$$

De este modo, la función $q : \omega \times \mathcal{N}^2 \longrightarrow \mathcal{N}$ es recursiva.

Consideremos ahora dos árboles binarios A y B tales que $p(A) \cap p(B) = \varnothing$. Sean $x = \chi_A$, $y = \chi_B$ y sea J el árbol ternario construido a partir de A y B, de modo que $j(x, y) = \chi_J$.

Observemos que la inversa de $<_3$ está bien fundada en J, pues lo contrario significa que existen $u, v, w \in \mathcal{N}$ tales que

$$\bigwedge n \in \omega \ \ \langle \bar{u}(n), \bar{v}(n), \bar{w}(n)\rangle_3 \in J,$$

y entonces $\bigwedge n \ \langle \bar{u}(n), \bar{v}(n)\rangle_2 \in A$, $\bigwedge n \ \langle \bar{u}(n), \bar{w}(n)\rangle_2 \in B$, luego $u \in p(A)\cap p(B)$.

Vamos a ver que si $n \in J$ entonces $q(n,x,y) \in \mathrm{CB}$ y si $C_n = \pi^{\mathcal{N}}(q(n,x,y))$, entonces $p(A_{f(n)}) \subset C_n$, $p(B_{g(n)}) \subset \mathcal{N} \setminus C_n$.

Para ello observamos que

$$p(A_{f_1(n)}) = \bigcup_{r,s\in\omega} p(A_{f_1(n)*_2\langle r,s\rangle_2}), \qquad p(B_{f_2(n)}) = \bigcup_{t,u\in\omega} p(B_{f_2(n)*_2\langle t,u\rangle_2}),$$

por lo que es suficiente demostrar que $d(x,y,a,n,r,s,t,u) \in \mathrm{CB}$ y que $D_{rstu} = \pi^{\mathcal{N}}(d(x,y,a,n,r,s,t,u))$ separa a $p(A_{f_1(n)*_2\langle r,s\rangle_2})$ de $p(B_{f_2(n)*_2\langle t,u\rangle_2})$, pues entonces

$$C_n = \pi^{\mathcal{N}}(q(n,x,y)) = \pi^{\mathcal{N}}(p(S^{\mathcal{N}^3\times\omega,\omega^4,\mathcal{N}}(x,y,a,n,\hat{d}))) = \bigcup_{r,s\in\omega}\bigcap_{t,u\in\omega} D_{rstu}$$

separa a $p(A_{f_1(n)})$ de $p(B_{f_2(n)})$.

Lo demostramos por inducción sobre la inversa de $<_3$. Distinguimos casos según la definición de d:

a) Si $r = t$ y $j(x,y)(n *_3 \langle r,s,u\rangle_3) = 1$, entonces, $n *_3 \langle r,s,u\rangle_3 \in J$, luego, por hipótesis de inducción,

$$d(x,y,a,n,r,s,t,u) = q(n *_3 \langle r,s,u\rangle_3, x, y) \in \mathrm{CB}$$

y $D_{rstu} = C_{n*_3\langle r,s,u\rangle_3}$ separa a $p(A_{f_1(n)*_2\langle r,s\rangle_2}) = p(A_{f_1(n*_3\langle r,s,u\rangle_3)})$ de $p(B_{f_2(n)*_2\langle t,u\rangle_2}) = p(B_{f_2(n*_3\langle r,s,u\rangle_3)})$.

b) Si $r = t$ y $x(f_1(n *_3 \langle r,s,u\rangle_3)) \neq 1$, entonces $f_1(n) *_2 \langle r,s\rangle_2 \notin A$, luego $p(A_{f_1(n)*_2\langle r,s\rangle_2}) = \varnothing$ y $D_{rstu} = \varnothing$ cumple lo pedido (además obviamente $d(x,y,a,n,r,s,t,u) = d_0 \in \mathrm{CB}$).

c) Si $r = t$ y no se cumplen los casos anteriores ha de ser necesariamente porque $f_2(n) *_2 \langle r,u\rangle_2 \notin B$, luego $p(B_{f_2(n)*_2\langle r,u\rangle_2}) = \varnothing$ y $D_{rstu} = \mathcal{N}$ cumple lo pedido (además obviamente $d(x,y,a,n,r,s,t,u) = d_1 \in \mathrm{CB}$).

d) Si $r \neq t$, entonces $d(x,y,a,n,r,s,t,u) = d_2(n,r) \in \mathrm{CB}$ y se cumple que $D_{rstu} = \{z \in \mathcal{N} \mid z(\ell(n_0^3)) = r\}$. Este conjunto separa a $p(A_{f_1(n)*_2\langle r,s\rangle_2})$ de $p(B_{f_2(n)*_2\langle t,u\rangle_2})$, pues si $z \in p(A_{f_1(n)*_2\langle r,s\rangle_2})$ entonces $z(\ell(n_0^3)) = r$, mientras que si $z \in p(B_{f_2(n)*_2\langle t,u\rangle_2})$ entonces $z(\ell(n_0^3)) = t$.

Obviamente $0 = \langle 0,0,0\rangle_3 \in J$ y en particular tenemos que C_0 separa a $p(A_0)$ de $p(B_0)$, es decir, a $p(A)$ de $p(B)$. Por consiguiente, si definimos $r(x,y) = q(0,x,y)$, la función r es recursiva y acabamos de probar que si A y B son árboles binarios con $p(A) \cap p(B) = \varnothing$, entonces $r(\chi_A, \chi_B)$ codifica un conjunto de Borel que separa las proyecciones.

Finalmente, basta definir $v(c,d) = r(g(c), g(d))$. Así v es una función recursiva y si $G_c^{\mathcal{N}} \cap G_d^{\mathcal{N}} = \varnothing$, como $G_c = p(A^c)$, $G_d = p(A^d)$, $g(c) = \chi_{A^c}$, $g(d) = \chi_{A^d}$, resulta que $v(c,d)$ codifica a un conjunto de Borel que separa a G_c y G_d.

Esto termina la prueba para $X = \mathcal{N}$. Veamos ahora el caso general. Si X es un espacio producto, consideramos una función $h : X \longrightarrow \mathcal{N}$ recursiva inyectiva como en la prueba del teorema 3.64. Sea $v_1 : \mathcal{N} \times \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{N}$ la aplicación que acabamos de construir para $\mathcal{N}$ según el enunciado y sea $v_2 : \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{N}$ la aplicación dada por el teorema 5.11 para h. Definimos

$$P(u,v) \leftrightarrow \bigvee w \in X\ (h(w) = u \land G^X(w,v)),$$

que claramente es Σ^1_1. Por consiguiente, existe un $a \in \mathcal{N}$ recursivo tal que

$$P(u,v) \leftrightarrow G^{\mathcal{N}\times\mathcal{N}}(u,v,a) \leftrightarrow G^{\mathcal{N}}(u, S^{\mathcal{N},\mathcal{N}}(v,a))).$$

Así pues:

$$u \in G^{\mathcal{N}}_{S^{\mathcal{N},\mathcal{N}}(v,a)} \leftrightarrow \bigvee v \in \mathcal{N}\ P(u,v) \leftrightarrow \bigvee w \in X\ (h(w) = u \land w \in G^X_v)$$
$$\leftrightarrow u \in h[G^X_v].$$

Equivalentemente: $h[G^X_v] = G^{\mathcal{N}}_{S^{\mathcal{N},\mathcal{N}}(v,a)}$.

Si $G^X_c \cap G^X_d = \varnothing$, como h es inyectiva, $h[G^X_c] \cap h[G^X_d] = \varnothing$, luego también $G^{\mathcal{N}}_{S^{\mathcal{N},\mathcal{N}}(c,a)} \cap G^{\mathcal{N}}_{S^{\mathcal{N},\mathcal{N}}(d,a)} = \varnothing$, luego, por el caso ya probado, $v_1(S(c,a), S(d,a))$ es un código de borel correspondiente a un conjunto B que separa estos dos últimos conjuntos, luego $v_2(v_1(S(c,a), S(d,a)))$ es un código de Borel para $h^{-1}[B]$, el cual separa a G^X_c y G^X_d.

Por consiguiente, basta definir $v(c,d) = v_2(v_1(S(c,a), S(d,a)))$. ■

En particular:

Teorema 5.24 *Para cada espacio producto X existe una función recursiva $v : \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{N}$ tal que si $c \in C_X(\boldsymbol{\Delta}^1_1)$ entonces $v(c) \in \mathrm{CB}$ y $p_X(c) = \pi^X(v(c))$. Consecuentemente, para todo $a \in \mathcal{N}$ se cumple que $\Delta^1_1(a) = \mathrm{Hip}(a)$.*

Demostración: Si llamamos $v' : \mathcal{N} \times \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{N}$ a la función dada por el teorema anterior, basta definir $v(c) = v'(c^2_0, c^2_1)$. Todo conjunto $\Delta^1_1(a)$ es de la forma $p_X(c)$, para un $c \in C_X(\Delta^1_1(a))$, y entonces $v(c)$ es recursivo en a, luego $p_X(c) = \pi^X(v(c)) \in \mathrm{Hip}(a)$. ■

5.4 Una caracterización de Hip(a)(ω)

Presentamos aquí una caracterización de los subconjuntos hiperaritméticos (en un $a \in \mathcal{N}$) de ω^r en términos de modelos de KPI. Necesitamos algunos resultados técnicos:

Teorema 5.25 *Para cada fórmula aritmética $\phi \in \mathrm{Form}(\mathcal{L}_a)$ existe una fórmula $\bar{\phi} \in \mathrm{Form}(\mathcal{L}_{\mathrm{tc}})$ de clase Δ_0 tal que para todo modelo transitivo M de KPI y todos los $n_1, \ldots, n_r \in \omega$, $x_1, \ldots, x_s \in \mathcal{N} \cap M$, se cumple que*

$$\vDash \phi[n_1, \ldots, n_r, x_1, \ldots, x_s] \leftrightarrow M \vDash \bar{\phi}[n_1, \ldots, n_r, x_1, \ldots, x_s, \omega, \sigma, \pi],$$

donde $\sigma : \omega \times \omega \longrightarrow \omega$ y $\pi : \omega \times \omega \longrightarrow \omega$ son la suma y el producto en ω.

Demostración: Observemos que ω, al igual que la suma y el producto de números naturales pueden definirse en KPI y son claramente absolutas para modelos transitivos de KPI, por lo que $\omega, \sigma, \pi \in M$.

Veamos en primar lugar que si t es un término de $\mathcal{L}_a$ existe una fórmula $\phi_t \in \mathrm{Form}(\mathcal{L}_{\mathrm{tc}})$ de clase Δ_0 tal que

$$\models (n = t)[n, n_1, \ldots, n_r, x_1, \ldots, x_s] \leftrightarrow M \models \phi_t[n, n_1, \ldots, n_r, x_1, \ldots, x_s, \omega, \sigma, \pi].$$

Si $t = n_i$ es una variable de primer orden, basta tomar $\phi_t \equiv n = n_i$.

Si $t = c_n$ es la constante que se interpreta como el número natural n, basta tomar la fórmula ϕ_n definida recurrentemente por $\phi_0(x) \equiv \bigwedge u\, u \notin x$,

$$\phi_{n+1}(x) \equiv \bigvee y \in x\, (\phi_n(y) \land y \subset x \land \bigwedge u \in x (u \in y \lor u = y)).$$

Si $t \equiv t_1 + t_2$, tomamos

$$\phi_t(n, w, s, p) \equiv \bigvee uv \in w (\phi_{t_1}(u, w, s, p) \land \phi_{t_2}(v, w, s, p) \land (u, v, n) \in s),$$

donde por brevedad hemos suprimido los demás parámetros. Similarmente se razona en el caso $t \equiv t_1 \cdot t_2$.

Si $t \equiv x_i(t')$ tomamos

$$\phi_t(n, x_i, w, s, p) \equiv \bigvee u \in w (\phi_{t'}(u, w, s, p) \land (u, n) \in x_i).$$

Es claro que las fórmulas construidas cumplen lo pedido. Ahora pasamos a demostrar el teorema:

Si $\phi \equiv (t_1 = t_2)$ definimos $\bar{\phi} \equiv \bigvee u \in w (\phi_{t_1}(u, w, s, p) \land \phi_{t_2}(u, w, s, p))$.

Los casos restantes se tratan de forma obvia. Por ejemplo, si $\phi \equiv \bigwedge n\, \psi$, definimos $\bar{\phi} \equiv \bigwedge n \in w\, \bar{\psi}$. ■

Como consecuencia:

Teorema 5.26 *Sea M un modelo transitivo de* KPI *y $a \in M \cap \mathcal{N}$. Entonces todo subconjunto de ω^r aritmético en a está en M.*

Demostración: Por 4.13 si $X \subset \omega^r$ es aritmético en a existe una fórmula aritmética $\phi \in \mathrm{Form}(\mathcal{L}_a)$ tal que

$$X = \{n \in \omega^r \mid \models \phi[n, a]\}.$$

Por el teorema anterior existe una fórmula $\bar{\phi} \in \mathrm{Form}(\mathcal{L}_{\mathrm{tc}})$ de clase Δ_0 tal que

$$n \in X \leftrightarrow M \models \bar{\phi}[n, a, \omega, \sigma, \tau].$$

Como $\omega^r \in M$, el subconjunto de ω^r definido en M por Δ_0-especificación a partir de $\bar{\phi}$ con parámetros a, ω, σ, τ es claramente X, luego $X \in M$. ■

En particular M contiene todas las funciones recursivas $f : \omega^r \longrightarrow \omega^m$. Esto también puede probarse directamente, comprobando que el concepto de función recursiva puede definirse en KPI y es absoluto para modelos transitivos.

Observación Dado $a \in \mathcal{N}$, recordemos que

$$\{e\}^{\omega,\omega}_{\Sigma^0_1(a)} = \{(x,y) \in \omega \times \omega \mid (e,x,y) \in U^{\omega,\omega}_{\Sigma^0_1(a)}\},$$

donde, según 3.65,

$$U^{\omega,\omega}_{\Sigma^0_1(a)} = \{(e,x,y) \in \omega^3 \mid \bigwedge n \in \omega (y = n \leftrightarrow (e,n,x) \in G^{\omega\times\omega}_{\Sigma^0_1(a)}\}.$$

El conjunto $G^{\omega\times\omega}_{\Sigma^0_1(a)}$ es $\Sigma^0_1(a)$ recursivo, luego $U^{\omega,\omega}_{\Sigma^0_1(a)}$ es un conjunto aritmético en a. Por el teorema 4.13 tenemos que

$$\{e\}^{\omega,\omega}_{\Sigma^0_1(a)} = \{(x,y) \in \omega^2 \mid \vDash \phi[e,x,y,a]\},$$

para cierta fórmula aritmética $\phi(e,x,y,a)$. Por 5.25 existe una fórmula Δ_0 de $\mathcal{L}_{\mathrm{tc}}$ tal que, para todo modelo transitivo M de KPI y todos los $e,x,y \in \omega$, $a \in \mathcal{N} \cap M$ se cumple

$$M \vDash \psi(e,x,y,a,\omega,\sigma,\tau) \leftrightarrow \vDash \phi[e,x,y,a] \leftrightarrow (x,y) \in \{e\}^{\omega,\omega}_{\Sigma^0_1(a)}.$$

Esto hace que $\{e\}^{\omega,\omega}_{\Sigma^0_1(a)} \in M$, pues puede definirse por Δ_0-especificación como subconjunto de $\omega \times \omega$. (De hecho, lo que hemos probado es que esta función es definible en M.) Más aún, todo $y \in M$ cumple

$$y = \{e\}^{\omega,\omega}_{\Sigma^0_1(a)} \leftrightarrow M \vDash (y \subset \omega \times \omega \land \bigwedge xy \in \omega((x,y) \in y \leftrightarrow \psi(e,x,y,a,\omega,\sigma,\tau))),$$

y la fórmula es Δ_0, luego por Σ_1-reemplazo la función $\{\ \}^{\omega,\omega}_{\Sigma^0_1(a)}$ está (y es definible) en M, al igual que su rango, el conjunto de todas las funciones $\Sigma^0_1(a)$-recursivas parciales de ω en ω. Como la fórmula $y : \omega \longrightarrow \omega$ es Δ_0, por selección en este conjunto obtenemos que el subconjunto de los puntos de $\mathcal{N}$ recursivos en a está (y es definible) en M. ■

El teorema 5.26 se puede mejorar sustancialmente:

Teorema 5.27 *Si M es un modelo transitivo de* KPI *y $a \in M \cap \mathcal{N}$, entonces todo subconjunto de ω^r hiperaritmético en a está en M.*

Demostración: Podemos trabajar con $r = 1$ pues M contiene una biyección recursiva $f : \omega \longrightarrow \omega^r$ que reduce el problema a este caso.

Para cada $x \in \mathrm{CB}$ definimos $d(x) : \omega \longrightarrow \mathcal{N}$ por recurrencia sobre $\ell(s)$, para cada $s \in \omega$, es decir, si $\ell(s) = 0$ (lo que equivale a $s = 0$) definimos $d(x)(s) = x$ y, supuesto definido $d(x)(s)$ para $\ell(s) = n$, definimos

$$d(x)(s^\frown k)(n) = \begin{cases} 3 & \text{si } d(x)(s)(0) \neq 1,2, \\ 3 & \text{si } d(x)(s)(0) = 2 \land k \neq 0, \\ \{d(x)(s)^1\}^{\omega,\omega}(n) & \text{si } d(x)(s)(0) = 2 \land k = 0, \\ \{d(x)(s)^1\}^{\omega,\mathcal{N}}(k)(n) & \text{si } d(x)(s)(0) = 1. \end{cases}$$

Una simple inducción sobre $\ell(s)$ prueba que $d(x)(s) \in \mathrm{CB}$ o bien $d(x)(s)$ es la sucesión constante igual a 3.

Sea $e : \mathrm{CB} \longrightarrow \mathcal{N}$ la aplicación dada por $e(x)(\langle s, n\rangle_2) = d(x)(s)(n)$. Así, para cada $s \in \omega$ tenemos que $e(x)_s = d(x)(s)$. Ahora observamos que, para $x \in \mathrm{CB}$, la fórmula $e(x) = y$ equivale a la conjunción de las fórmulas siguientes:

a) $y_0 = x \land x(0) \neq 3$

b) $\bigwedge s \in \omega\ (y_s(0) = 0 \lor y_s(0) = 1 \lor y_s(0) = 2 \lor y_s(0) = 3)$

c) $\bigwedge s \in \omega\ (y_s(0) = 0 \to \bigwedge n \in \omega\ \{y_s^1\}^{\omega,\omega}(n)\!\downarrow)$

d) $\bigwedge s \in \omega\ (y_s(0) = 0 \lor y_s(0) = 3 \to \bigwedge nk \in \omega(y_{s^\frown k}(n) = 3))$

e) $\bigwedge s \in \omega\ (y_s(0) = 1 \to \bigwedge k \in \omega\ y_{s^\frown k} = \{y_s^1\}^{\omega,\mathcal{N}}(k) \land y_{s^\frown k}(0) = 2)$

f) $\bigwedge s \in \omega\ (y_s(0) = 2 \to y_{s^\frown 0} = \{y_s^1\}^{\omega,\omega} \land y_{s^\frown 0}(0) = 1)$

g) $\bigwedge s \in \omega\ (y_s(0) = 2 \to \bigwedge kn \in \omega\ y_{s^\frown(k+1)}(n) = 3))$

Es claro que el conjunto $F \subset \mathcal{N}\times\mathcal{N}$ formado por los pares (x, y) que cumplen estas fórmulas es aritmético. Por ejemplo, $\{y_s^1\}^{\omega,\mathcal{N}}(k) = U^{\omega,\mathcal{N}}(k, y_s^1)$, luego

$$y_{s^\frown k} = \{y_s^1\}^{\omega,\mathcal{N}}(k) \leftrightarrow \bigwedge n \in \omega\,(y_{s^\frown k} \in B_n \leftrightarrow G^{\omega\times\omega}(n, k, y_s^1))$$

y el conjunto $G^{\omega\times\omega} \subset \omega \times \omega \times \mathcal{N}$ es semirrecursivo, luego aritmético. Notemos que la fórmula de la derecha implica en particular que $\{y_s^1\}^{\omega,\mathcal{N}}(k)\!\downarrow$.

En particular tenemos que $\bigwedge x \in \mathrm{CB} \overset{1}{\bigvee} y\ F(x, y)$.

Para cada $x \in \mathrm{CB}$ definimos $c(x) : \omega \longrightarrow \mathcal{N}$ de modo que $c(x)(s)$ es la función característica de $\pi^\omega(d(x)(s))$ si $d(x)(s) \in \mathrm{CB}$ y es la función característica de $\varnothing$ en caso contrario. En particular $c(x)(0)$ es la función característica de $\pi^\omega(x)$.

Sea $f : \mathrm{CB} \longrightarrow \mathcal{N}$ la aplicación dada por $f(x)(\langle s, n\rangle_2) = c(x)(s)(n)$, de modo que $f(x)_s = c(x)(s)$. Seguidamente observamos que, si $x \in \mathrm{CB}$, la fórmula $e(x) = y \land f(x) = z$ equivale a la conjunción de las fórmulas siguientes:

a) $(x, y) \in F$

b) $\bigwedge sn \in \omega\ (z_s(n) = 0 \lor z_s(n) = 1)$

c) $\bigwedge sn \in \omega(y_s(0) = 3 \to z_s(n) = 0)$

d) $\bigwedge sn \in \omega\ (y_s(0) = 0 \to (z_s(n) = 1 \leftrightarrow \bigvee m \in \omega\ \{y_s^1\}^{\omega,\omega}(m) = n))$

e) $\bigwedge sn \in \omega\ (y_s(0) = 1 \to (z_s(n) = 1 \leftrightarrow \bigvee k \in \omega\ z_{s^\frown k}(n) = 1))$

f) $\bigwedge sn \in \omega\ (y_s(0) = 2 \to (z_s(n) = 1 \leftrightarrow z_{s^\frown 0}(n) = 0))$

Nuevamente vemos que el conjunto $G \subset \mathcal{N} \times \mathcal{N} \times \mathcal{N}$ formado por las ternas (x, y, z) que cumplen estas fórmulas es aritmético, luego existe una fórmula aritmética $\phi(x, y, z) \in \mathrm{Form}(\mathcal{L}_a)$ tal que

$$\bigwedge x \in \mathrm{CB} \overset{1}{\bigvee} yz \in \mathcal{N}\ \vDash \phi[x, y, z]$$

y, concretamente, los únicos y, z que cumplen $\vDash \phi[x, y, z]$ son $y = e(x)$, $z = f(x)$. Sea $\bar{\phi}(x, y, z, w, s, p)$ la fórmula Δ_0 dada por el teorema 5.25.

Veamos ahora por inducción sobre α que si $x \in C(\Sigma^0_\alpha(a)) \cup C(\Pi_\alpha(a))$ entonces $e(x), f(x) \in M$. Notemos que $x \in M$ por el teorema 5.26.

Si $x \in C(\Sigma^0_1(a))$, entonces

$$e(x)(\langle s, n\rangle_2) = \begin{cases} x(n) & \text{si } s = 0, \\ 3 & \text{si } s \neq 0, \end{cases}$$

$$f(x)(\langle s, n\rangle_2) = \begin{cases} 1 & \text{si } \bigvee m \in \omega \{x^1\}^{\omega,\omega}(m) = n, \\ 0 & \text{en caso contrario,} \end{cases}$$

y es claro que tanto $e(x)$ como $f(x)$, vistos como subconjuntos de ω^2, son aritméticos en x, luego están en M por el teorema 5.26.

Supongamos que el resultado es cierto para códigos en $C(\Sigma^0_\alpha(a))$ y supongamos que $x \in C(\Pi^0_\alpha)$. Entonces $x' = \{x^1\}^{\omega,\omega} \in C(\Sigma^0_\alpha(a))$, luego por hipótesis de inducción $x', e(x'), f(x') \in M$.

Ahora observamos que, si llamamos $y = e(x)$, $y' = e(x')$, la relación entre ambos viene dada por

$$y(\langle 0, n\rangle_2) = x(n), \quad y(\langle \langle 1, k\rangle_2{}^\frown s, n\rangle_2) = \begin{cases} y'(\langle s, n\rangle_2) & \text{si } k = 0, \\ 3 & \text{si } k \neq 0. \end{cases}$$

Por otra parte, los conjuntos aritméticos

$$P = \{(s, n, u) \in \omega^2 \mid u = \langle s, n\rangle_2\} \quad Q = \{(k, s, t) \in \omega^4 \mid t = \langle 1, k\rangle_2{}^\frown s\}$$

están[3] en M y, como M cumple el axioma de Δ_0-especificación, concluimos que

$$M \vDash \bigvee y \bigwedge u (u \in y \leftrightarrow u \in [\omega \times \omega] \land \bigvee abtn \in [\omega](u = (a, b) \land (t, n, a) \in [P] \land$$
$$(t = 0 \land v = [x](n)) \lor \bigvee sk \in \omega((k, s, t) \in [Q] \land$$
$$((k = 0 \land \bigvee t' \in \omega((s, n, t') \in [P] \land v = [y'](t'))) \lor (k \neq 0 \land v = 3))))).$$

El conjunto $y \in M$ determinado por esta fórmula es precisamente $e(x)$.

Similarmente, si llamamos $z = f(x)$ y $z' = f(z')$, la relación entre ambos viene dada por

$$z(\langle 0, n\rangle_2) = 1 - z'(\langle 0, n\rangle_2), \quad z(\langle \langle 1, k\rangle_2{}^\frown s, n\rangle_2) = \begin{cases} z'(\langle s, n\rangle_2) & \text{si } k = 0, \\ 0 & \text{si } k \neq 0, \end{cases}$$

y un razonamiento análogo al precedente nos permite concluir que $z \in M$.

Supongamos ahora que el resultado es cierto para códigos en $C(\Pi^0_\beta(a))$ con $\beta < \alpha$ y tomamos $x \in C(\Sigma^0_\alpha(a))$. Entonces, para cada $k \in \omega$, tenemos que

[3] Alternativamente puede probarse que en KPI pueden definirse la función $\langle\ ,\ \rangle_2$ y las demás funciones relacionadas con la codificación de las sucesiones finitas.

$x_k = \{x^1\}^{\omega,\mathcal{N}}(k) \in \bigcup\limits_{1\leq\beta<\alpha} C(\Pi^0_\beta(a))$, luego, por hipótesis de inducción tenemos que $x_k, e(x_k), f(x_k) \in M$.

El conjunto

$$A = \{(k,n,m) \in \omega^3 \mid \bigvee t \in \omega(\ell(t) = n+1 \land t_n = m \land G^{\omega\times\omega}(t,k,x^1)\}$$

es aritmético en $x^1 \in M$, luego $A \in M$ y

$$x_k(n) = m \leftrightarrow \{x^1\}^{\omega,\mathcal{N}}(k)(n) = m \leftrightarrow U^{\omega,\mathcal{N}}(k,x^1)(n) = m \leftrightarrow$$

$$\bigvee t \in \omega(\ell(t) = n+1 \land t_n = m \land G^{\omega\times\omega}(t,k,x^1)) \leftrightarrow (k,n,m) \in A.$$

Usando el axioma de Δ_0-especificación con k y A como parámetros obtenemos que $x_k \in M$, de modo que

$$M \vDash \bigwedge k \in \omega \overset{1}{\bigvee} f(f : [\omega] \longrightarrow [\omega] \land \bigwedge n \in [\omega]\ (k,n,f(n)) \in [A]),$$

luego, por Δ_0-reemplazo, concluimos que $B = \{(k,x_k) \mid k \in \omega\} \in M$. Por lo tanto,

$$M \vDash \bigwedge k \in \omega \overset{1}{\bigvee} yz \bigvee x \in [\mathcal{R}B]((k,x) \in [B] \land \bar{\phi}(x,y,z,\omega,\sigma,\pi))$$

y por Δ_0-reemplazo concluimos que

$$E = \{(k,e(x_k)) \mid k \in \omega\} \in M, \qquad F = \{(k,f(x_k)) \mid k \in \omega\} \in M.$$

Si llamamos $y = e(x)$, $y_k = e(x_k)$, la relación entre ellos es que

$$y(\langle 0,n\rangle_2) = x(n), \qquad y(\langle\langle 1,k\rangle_2{}^\frown s,n\rangle_2) = y_k(\langle s,n\rangle_2),$$

y a partir de aquí se concluye por Δ_0-especificación en M que $y \in M$. Similarmente, la relación entre $z = f(x)$ y $z_k = f(x_k)$ es

$$z(\langle 0,n\rangle_2) = \begin{cases} 1 & \text{si } \bigvee k \in \omega\, z_k(\langle 0,k\rangle_2) = 1) \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}, \quad z(\langle\langle 1,k\rangle_2{}^\frown s,n\rangle_2) = z(\langle s,n\rangle_2),$$

y nuevamente es fácil concluir que $z \in M$.

En definitiva, hemos probado que si $x \in \mathrm{CB}$ es recursivo en a, entonces $f(x) \in M$, luego $f(x)_0 \in M$ y esta función es la función característica de $\pi^\omega(x)$, luego $\pi^\omega(x) \in M$. ■

Del principio de la prueba del teorema anterior se deduce un resultado que tiene interés en sí mismo:

Teorema 5.28 *El conjunto* CB *es* Π^1_1.

Demostración: Consideremos el conjunto aritmético $F \subset \mathcal{N}\times\mathcal{N}$ que hemos construido en la demostración del teorema anterior. Teniendo en cuenta que el conjunto ABF es Π^1_1, basta probar que

$$x \in \mathrm{CB} \leftrightarrow \bigvee yz \in \mathcal{N}\ (F(x,y) \land \bigwedge s \in \omega\ (z(s) = 0 \leftrightarrow y_s(0) \neq 3) \land z \in \mathrm{ABF})).$$

En efecto, si se cumple la condición de la derecha, consideramos el conjunto $A_z = \{s \in \omega \mid z(s) = 0\}$, sobre el cual está bien fundada la relación dada por $s \prec t \leftrightarrow t \subset s$. Sea $r : A_z \longrightarrow \Omega$ el rango asociado a dicha relación. Una simple inducción sobre $r(s)$ prueba que cada $y_s \in \mathrm{CB}$ y, como la definición de F implica que $0 \in A_z$, en particular $x = y_0 \in \mathrm{CB}$.

Recíprocamente, si $x \in \mathrm{CB}$, sabemos que existe un $y \in \mathcal{N}$ tal que $F(x, y)$ y podemos definir $z \in \mathcal{N}$ como indica la fórmula de la derecha. Hemos de probar que no existe un $u \in \mathcal{N}$ tal que la sucesión $\{\bar{u}(n)\}_{n\in\omega}$ esté contenida en A_z. Ahora bien, si $0 = \bar{u}(0)$ tiene un anterior en A_z necesariamente $x(0) = y_0(0) \neq 0$, luego ha de ser $x(0) = 1$ o $x(0) = 2$. Supongamos que $x(0) = 1$. El otro caso se trata análogamente.

Tenemos entonces que $x = y_{\bar{u}(0)} \in C(\mathbf{\Sigma}^1_{\alpha_0})$, para cierto ordinal $\alpha_0 > 1$. Entonces $y_{\bar{u}(1)} = \{y^1_{\bar{u}(0)}\}^{\omega,\mathcal{N}}(u(0)) \in C(\mathbf{\Pi}^1_{\alpha_1})$, para cierto ordinal $\alpha_1 < \alpha_0$, a su vez $y_{\bar{u}(2)} = \{y^1_{\bar{u}(1)}\}^{\omega,\omega} \in C(\mathbf{\Sigma}^1_{\alpha_1})$ y, como $\bar{u}(2)$ tiene un anterior en A_z, no puede ser $\alpha_1 = 0$. Entonces $y_{\bar{u}(3)} = \{y^1_{\bar{u}(2)}\}^{\omega,\mathcal{N}}(u(2)) \in C(\mathbf{\Pi}^1_{\alpha_2})$, para cierto ordinal $\alpha_2 < \alpha_1$, y prosiguiendo de este modo se construye una sucesión decreciente de ordinales. ■

Veremos más adelante que en KPI no puede probarse que todo conjunto bien ordenado es semejante a un ordinal, y que "ser un conjunto bien ordenado" no es absoluto para modelos transitivos de KPI. No obstante, se cumple lo siguiente:

Teorema 5.29 *Sea M un modelo transitivo de* KPI *y sea $(A, \leq) \in M$ un conjunto ordenado. Entonces*

$$(A, \leq) \text{ está bien ordenado} \leftrightarrow M \vDash \bigvee f \bigvee \alpha \in \Omega\ f : [(A, \leq)] \longrightarrow \alpha \text{ semejanza.}$$

Demostración: Una implicación es inmediata, porque la fórmula

$$\alpha \in \Omega \land f : (A, \leq) \longrightarrow \alpha \text{ semejanza}$$

es absoluta para modelos transitivos de KP. Demostraremos la contraria probando que si $f : (A, \leq) \longrightarrow \alpha$ es una semejanza, entonces $\alpha, f \in M$. Razonamos por inducción sobre α. Si $\alpha = 0$ el resultado es trivial. Si es cierto para α y $f : (A, \leq) \longrightarrow \alpha + 1$ es una semejanza, sea $a \in A$ tal que $f(a) = \alpha$. Entonces

$$A^<_a = \{x \in A \mid x < a\} \in M,$$

y también está en M la restricción de $\leq$ a $A^<_a$, luego por hipótesis de inducción $\alpha, f|_{A^<_a} \in M$, luego $\alpha + 1 \in M$ y $f = f|_{A^<_a} \cup \{(\alpha, a)\} \in M$.

Si α es un ordinal límite y el resultado es cierto para todo $\delta < \alpha$, tenemos que

$$M \vDash \bigwedge a \in [A] \overset{1}{\bigvee} f \bigvee \delta \in \Omega\, (f : ([A]_a^<, [\leq]_a) \longrightarrow \delta \text{ semejanza}),$$

donde $\leq_a$ representa la restricción de $\leq$ a $A_a^<$, y la fórmula tras $\overset{1}{\bigvee} f$ es Δ_0, luego por reemplazo $C = \{f|_{A_a^<} \mid a \in A\} \in M$, luego $f = \bigcup\limits_{u \in C} u \in M$ y $\alpha = \mathcal{R}f \in M$. ■

Como consecuencia:

Teorema 5.30 *Si M es un modelo transitivo de* KPI *y $a \in M \cap \mathcal{N}$, entonces $\omega_1^a \subset M$.*

Demostración: Todo $\alpha \in \omega_1^a$ es de la forma $\|x\|$, para un $x \in$ BO recursivo en a. Por 5.26 tenemos que $x \in M$, luego claramente tenemos que $\leq_x \in M$ y $C_x = \{n \in \omega \mid n \leq_x n\} \in M$. Puesto que $(C_x, \leq_x)$ es un conjunto bien ordenado, el teorema anterior nos da que su ordinal $\|x\| \in M$. ■

Hasta aquí hemos usado la definición de los conjuntos hiperaritméticos en a a partir de la jerarquía hiperaritmética. Los teoremas siguientes dependen de su caracterización como conjuntos $\Delta_1^1(a)$:

Teorema 5.31 *Si $a \in \mathcal{N}$ y $x \subset \omega^r$ no es hiperaritmético en a, entonces existe un modelo transitivo M de* KPI *tal que $a \in M$ y $x \notin M$.*

Demostración: Si $f : \omega^r \longrightarrow \omega$ es una biyección recursiva, entonces f está en todos los modelos transitivos de KPI, luego basta probar que existe uno tal que $a \in M$ y $f[x] \notin M$, pues entonces también se cumplirá $x \notin M$. Equivalentemente, podemos suponer que $x \subset \omega$. Notemos que $y = \chi_x \in \mathcal{N}$ no es hiperaritmético en a (como subconjunto de ω^2), pues x es una antiimagen recursiva de y, luego basta demostrar que existe un modelo transitivo M de KPI tal que $a \in M \wedge y \notin M$.

Equivalentemente, basta probar que si $x \in \mathcal{N}$ no es hiperaritmético en a (como subconjunto de ω^2), entonces existe un modelo transitivo M de KPI tal que $a \in M \wedge x \notin M$.

Observemos en primer lugar que existen modelos transitivos numerables de KPI tales que $a \in M$. En efecto, $N = H(\aleph_1)$ es un modelo transitivo de KPI tal que $a \in N$. Por el teorema de Löwenheim-Skolem existe un submodelo elemental $N_0 \prec N$ numerable tal que $a \in N_0$ y basta considerar el colapso transitivo M de N_0. Se comprueba sin dificultad que $a \in M$.

Llamamos $\mathcal{L}'_{\mathrm{tc}}$ al lenguaje de la teoría de conjuntos al que añadimos un conjunto infinito de constantes C. Por ejemplo, si consideramos que los signos de $\mathcal{L}'_{\mathrm{tc}}$ son números naturales, podemos suponer que sus variables son las potencias de 2 y que el conjunto de sus constantes es

$$C = \{3^{i+1} \mid i \in \omega\} \cup \{5^{i+1} \mid i \in \omega\}.$$

Representaremos por $N_i = 3^{i+1}$ y $c_i = 5^{i+1}$ las constantes de $\mathcal{L}'_{\mathrm{tc}}$. Un modelo de $\mathcal{L}'_{\mathrm{tc}}$ queda determinado por una terna (M, R, I), donde M es un conjunto, $R \subset M \times M$ es la relación que interpreta al relator de pertenencia e $I : C \longrightarrow M$ es la aplicación que determina la interpretación de cada constante de $\mathcal{L}'_{\mathrm{tc}}$. Llamaremos S al conjunto de todas las sentencias de $\mathcal{L}'_{\mathrm{tc}}$.

Sea $D \subset S$ el conjunto formado por las sentencias siguientes:

- $\phi_0 = \ulcorner \bigwedge x\, x \notin N_0 \urcorner$,
- $\phi_n = \ulcorner N_n = N_{n-1} \cup \{N_{n-1}\} \urcorner$, para cada $n \in \omega \setminus \{0\}$,
- $\psi_* = \ulcorner c_0 \in \mathcal{N} \urcorner$,
- $\psi_n = \ulcorner c_0(N_n) = N_{a(n)} \urcorner$, para cada $n \in \omega$.

Diremos que (M, R, I) es un modelo *válido* de $\mathcal{L}'$ si es un modelo ω numerable de $\mathrm{KPI} + D$ en el que todo elemento de M está denotado por una constante c_n.

Observemos que existen modelos válidos, pues todo modelo transitivo numerable M de KPI que contenga a a se extiende a un modelo válido sin más que definir R como la relación de pertenencia en M, $I(N_i) = i$, $I(c_0) = a$ y completar la definición de I sobre las demás constantes c_n de modo que sus interpretaciones recorran todo M. Se trata de un modelo ω porque está bien fundado.

Notemos también que si (M, R, I) es un modelo de $\mathrm{KPI}+D$ e $I : M_{\mathrm{bf}} \longrightarrow M$ es la inmersión natural, una simple inducción prueba que $\bigwedge n \in \omega\; I(N_n) = i(n)$, y si es un modelo ω entonces $a \in M_{\mathrm{bf}}$ y se cumple que $i(a) = c_0$.

Llamaremos $\mathbb{P}$ al conjunto de todos los conjuntos finitos p de sentencias de $\mathcal{L}'_{\mathrm{tc}}$ tales que existe un modelo válido (M, R, I) tal que $(M, R, I) \vDash p$. Consideramos a $\mathbb{P}$ como conjunto parcialmente ordenado por la relación inversa de la inclusión.

Para cada sentencia ϕ de $\mathcal{L}_{\mathrm{tc}}$, sea

$$C_\phi = \{p \in \mathbb{P} \mid \phi \in p \vee \neg\phi \in p\}.$$

Para cada sentencia de la forma $\bigvee x\, \phi(x)$, definimos

$$D_{\phi,x} = \{p \in \mathbb{P} \mid \ulcorner \bigvee x\, \phi(x) \urcorner \notin p \vee \bigvee c \in C\, \phi(c) \in p\}.$$

Para cada $c \in C$ definimos

$$E_c = \{p \in \mathbb{P} \mid \ulcorner c \notin \omega \urcorner \in p \vee \bigvee n \in \omega \ulcorner c = N_n \urcorner \in p\},$$

y sea

$$F_c = \{p \in \mathbb{P} \mid \ulcorner c \notin \mathcal{N} \urcorner \in p \vee \bigvee nm \in \omega\, (x(n) \neq m \wedge \ulcorner c(N_n) = N_m \urcorner \in p\}.$$

Todos los conjuntos que acabamos de definir son densos en $\mathbb{P}$. Veamos la prueba para los dos últimos (los dos primeros casos son mucho más simples).

Dado $p \in \mathbb{P}$, sea (M, R, I) un modelo válido de p. Si $(M, R, I) \vDash c \notin \omega$, entonces $p \cup \{c \notin \omega\}$ es una extensión de p en E_c. Si, por el contrario, se cumple que $(M, R, I) \vDash c \in \omega$, entonces, por definición de modelo ω, existe un $n \in \omega$ tal que $I(c) = i(n) = i(N_n)$ o, lo que es lo mismo, $(M, R, I) \vDash c = N_n$, luego $p \cup \{\ulcorner c = N_n \urcorner\} \in \mathbb{P}$ es una extensión de p en E_c.

Consideremos ahora el caso de F_c y razonemos por reducción al absurdo. Si F_c no es denso en $\mathbb{P}$ existe un $p \in \mathbb{P}$ que no admite extensiones a F_c. Sea (M, R, I) un modelo válido de p. No puede ser que $(M, R, I) \vDash c \notin \mathcal{N}$, pues entonces $p \cup \{c \notin \mathcal{N}\}$ sería una extensión de p a F_c, luego $(M, R, I) \vDash c \in \mathcal{N}$. Para que p no admita extensiones a F_c es necesario que si n, $m \in \omega$, entonces

$$x(n) = m \leftrightarrow (M, R, I) \vDash c(N_n) = N_m.$$

En efecto, $(M, R, I) \vDash \bigvee v \in \omega\ c([N_n]) = v$ y, por ser un modelo ω, existe un $k \in \omega$ tal que $(M, R, I) \vDash c(N_n) = [i(k)]$, luego

$$(M, R, I) \vDash c(N_n) = N_k.$$

Si k fuera distinto de $m = x(n)$ podríamos extender p a F_c, luego $k = m$ y tenemos una implicación. El recíproco es trivial.

Observemos que la equivalencia anterior es válida para cualquier modelo válido de p. En particular M ha de ser numerable (necesariamente infinito), luego pasando a un modelo isomorfo podemos suponer que $M = \omega$, y entonces la relación R puede codificarse mediante un $y \in \mathcal{N}$, de modo que $m\,R\,n \leftrightarrow y(\langle m, n\rangle_2) = 0$. A su vez I puede extenderse a un elemento $z \in \mathcal{N}$. Recíprocamente, cada par $(y, z) \in \mathcal{N}^2$ determina un modelo (ω, y, z) del lenguaje $\mathcal{L}'_{\mathrm{tc}}$, y podemos escribir

$$x(n) = m \leftrightarrow (\omega, y, z) \vDash c(N_n) = N_m,$$

donde $(y, z) \in \mathcal{N}^2$ es cualquier par que determine un modelo válido de p.

Podemos identificar el conjunto S de las sentencias de $\mathcal{L}'_{\mathrm{tc}}$ con un subconjunto de ω, y entonces una adaptación rutinaria del argumento empleado en la demostración del teorema 4.60 prueba que el conjunto

$$V = \{(y, z, \alpha) \in \mathcal{N}^2 \times \omega \mid \alpha \in S \wedge (\omega, y, z) \vDash \alpha\}$$

es Δ^1_1. Más aún, el conjunto $\mathrm{KPI} + p$ formado por los axiomas de KPI más las sentencias de p es claramente recursivo, mientras que D es claramente recursivo en a, luego el conjunto $\mathcal{M}$ dado por

$$(y, z) \in \mathcal{M} \leftrightarrow \bigwedge n \in \omega \bigvee i \in \omega\ z(5^{i+1}) = n \wedge$$

$$\bigwedge \alpha \in \omega (\alpha \in \mathrm{KPI} + D + p \rightarrow V(y, z, \alpha))$$

es $\Delta^1_1(a)$ (y es el conjunto de todos los elementos de $\mathcal{N}^2$ que determinan un modelo de KPI$+D+p$ en el que todo elemento está denotado por una constante c_n).

Veamos ahora que el conjunto $\mathcal{M}_\omega$ formado por los pares $(y,z) \in \mathcal{M}$ que determinan un modelo ω (es decir, un modelo válido de p) también es $\Delta^1_1(a)$. Para ello observamos que

$$(y,z) \in \mathcal{M}_\omega \leftrightarrow (y,z) \in \mathcal{M} \land \bigwedge n \in \omega\ ((\omega, y, z) \vDash c_n \in \omega \rightarrow$$
$$\bigvee k \in \omega\ (\omega, y, z) \vDash N_k = c_n).$$

Como las funciones $f : \omega \longrightarrow \omega$ y $g : \omega^2 \longrightarrow \omega$ dadas por

$$f(n) = \ulcorner c_n \in \omega \urcorner, \qquad g(k,n) = \ulcorner N_k = c_n \urcorner$$

son obviamente recursivas y

$$(y,z) \in \mathcal{M}_\omega \leftrightarrow (y,z) \in \mathcal{M} \land \bigwedge n \in \omega\ (V(y,z,f(n)) \rightarrow \bigvee k \in \omega\ V(y,z,g(k,n))),$$

concluimos que M_ω es $\Delta^1_1(a)$.

Por último, la aplicación $h : \omega^2 \longrightarrow S$ dada por $h(n,m) = \ulcorner c(N_n) = N_m \urcorner$ también es recursiva, luego el conjunto dado por

$$W(y,z,m,n) \leftrightarrow (y,z,h(n,m)) \in V \leftrightarrow (y,z) \vDash c(N_n) = N_m$$

es Δ^1_1, y concluimos que

$$x(n) = m \leftrightarrow \bigvee yz \in \mathcal{N}((y,z) \in \mathcal{M}_\omega \land W(y,z,m,n)) \leftrightarrow$$
$$\bigwedge yz((y,z) \in \mathcal{M}_\omega \rightarrow W(y,z,m,n))),$$

lo que prueba que x es hiperaritmético en a, en contra de lo supuesto. Esto termina la prueba de que el conjunto F_c es denso.

Ahora tomamos un filtro G que sea $\mathbb{P}$-genérico sobre la familia numerable de conjuntos densos que hemos definido y llamamos $S_0 = \bigcup\limits_{p \in G} p$, que es una familia de sentencias de $\mathcal{L}'_{\text{tc}}$.

Observemos que, si ϕ es cualquier sentencia de $\mathcal{L}'_{\text{tc}}$, como $C_\phi \cap G \neq \varnothing$, resulta que $\phi \in S_0 \lor \neg\phi \in S_0$.

Por otra parte, todo teorema ϕ de KPI $+ D$ está en S_0, ya que no puede suceder que $\neg\phi \in S_0$, pues ello exigiría que $\neg\phi$ fuera verdadera en un modelo válido.

Ahora definimos en el conjunto C de constantes de $\mathcal{L}'_{\text{tc}}$ la relación dada por

$$c \sim d \leftrightarrow \ulcorner c = d \urcorner \in S_0.$$

Se cumple que es una relación de equivalencia. Por ejemplo, probaremos la transitividad. Suponemos que $\ulcorner c = d \urcorner, \ulcorner d = e \urcorner \in S_0$ y hemos de probar que

$\ulcorner c = e \urcorner \in S_0$. En caso contrario, hemos visto que $\ulcorner c \neq e \urcorner \in S_0$, luego existe un $p \in G$ que contiene las sentencias $\ulcorner c = d \urcorner$, $\ulcorner d = e \urcorner$ y $\ulcorner c \neq e \urcorner$, pero esto es imposible, pues entonces las tres tendrían que ser verdaderas en un mismo modelo ω de KPI.

Consideramos el conjunto cociente $M = C/\sim$. Un argumento similar al anterior prueba que la relación en M dada por

$$[c]\,R\,[d] \leftrightarrow \ulcorner c \in d \urcorner \in S_0$$

está bien definida, en el sentido de que no depende de los representantes de las clases de equivalencia con los que se calcula. Con esto tenemos un modelo (M, R, I) de $\mathcal{L}_{\mathrm{tc}}$, en el que la aplicación I interpreta cada constante como su propia clase de equivalencia en M. Veamos ahora que, para toda sentencia ϕ de $\mathcal{L}_{\mathrm{tc}}$, se cumple que

$$(M, R, I) \vDash \phi \leftrightarrow \phi \in S_0.$$

Lo probamos por inducción sobre la longitud de ϕ. Si $\phi = \ulcorner c = d \urcorner$ se cumple por la definición de $\sim$, y si $\phi = \ulcorner c \in d \urcorner$ se cumple por la definición de R. Si $\phi = \neg\psi$, tenemos que

$$(M, R, I) \vDash \phi \leftrightarrow \neg(M, R, I) \vDash \psi \leftrightarrow \neg\psi \in S_0 \leftrightarrow \phi \in S_0,$$

donde hemos usado que $G \cap C_\psi \neq \varnothing$.

Si $\phi = \psi \rightarrow \chi$ entonces

$$\begin{aligned}(M, R, I) \vDash \phi \leftrightarrow \neg(M, R, I) \vDash \psi \vee (M, R, I) \vDash \chi &\leftrightarrow \neg\psi \in S_0 \vee \chi \in S_0 \\ &\leftrightarrow \phi \in S_0.\end{aligned}$$

La última equivalencia se debe a que si suponemos que $\neg\psi \in S_0 \vee \chi \in S_0$ pero $\phi \notin S_0$, entonces $\neg\phi \in S_0$, luego existe un $p \in G$ que contiene a $\neg\phi$ y a una de las dos sentencias $\neg\psi$ o χ, pero eso es imposible, porque tendrían que ser verdaderas en un mismo modelo. La implicación contraria se demuestra análogamente.

Por último, si $\phi = \bigwedge x\, \psi(x)$ tenemos que

$$\begin{aligned}(M, R, I) \vDash \phi \leftrightarrow \bigwedge c \in C\ (M, R, I) \vDash \psi(c) &\leftrightarrow \bigwedge c \in C\ \psi(c) \in S_0 \\ &\leftrightarrow \phi \in S_0.\end{aligned}$$

La última equivalencia se prueba así: si $\phi \notin S_0$ entonces $\neg\phi \in S_0$, luego $\bigvee x \neg\psi(x) \in S_0$ (pues en caso contrario la negación de esta sentencia y $\neg\phi$ serían verdaderas en un mismo modelo, lo cual es imposible) y, como $D_{\neg\psi,x} \cap G \neq \varnothing$ existe un $c \in C$ tal que $\neg\psi(c) \in S_0$, luego $\psi(c) \notin S_0$. Esto demuestra una implicación. La otra es más sencilla.

En particular tenemos que $(M, R, I) \vDash \mathrm{KPI} + D$. Más aún, (M, R, I) es un modelo ω, pues si $[c] \in M$ cumple $(M, R, I) \vDash [c] \in \omega$, es decir, $\ulcorner c \in \omega \urcorner \in S_0$, como $E_c \cap G \neq \varnothing$ existe un $n \in \omega$ tal que $\ulcorner c = N_n \urcorner \in S_0$, lo que implica que $(M, R, I) \vDash c = N_n$, luego $I([c]) = I(N_n) = i(n)$.

El teorema [PC 2.40] nos da que M_{bf} es un modelo transitivo de KPI, y además sabemos que contiene a a. Sólo falta probar que $x \notin M_{\mathrm{bf}}$. Supongamos lo contrario y sea $i(x) = [c]$. Entonces $(M, R, I) \vDash c \in \mathcal{N}$ y, como $F_c \cap G \neq \varnothing$, existen $n, m \in \omega$ tales que $x(n) \neq m$ y $(M, R, I) \vDash c(N_n) = N_m$. Equivalentemente,

$$(M, R, z) \vDash [i(x)]([i(n)]) = [i(m)],$$

luego $M_{\mathrm{bf}} \vDash [x]([n]) = [m]$, luego $x(n) = m$ y tenemos una contradicción. ■

Combinando el teorema anterior con 5.27 obtenemos la caracterización siguiente de los subconjuntos hiperaritméticos en a de ω^r:

Teorema 5.32 *Un subconjunto de ω^r es hiperaritmético en $a \in \mathcal{N}$ si y sólo si pertenece a todos los modelos transitivos de* KPI *que contienen a a.*

En particular, los subconjuntos hiperaritméticos de ω^r son los subconjuntos de ω^r que pertenecen a todos los modelos transitivos de KPI.

5.5 Ordinales admisibles

En esta sección presentamos una caracterización de los subconjuntos hiperaritméticos de ω^r que no dependa de la totalidad de los modelos transitivos de KPI, sino de un modelo en concreto de la forma L_λ. Para ello introducimos el concepto siguiente:

Definición 5.33 Un conjunto M es *admisible* si es transitivo y $M \vDash \mathrm{KP}$. Un ordinal α es *admisible* si L_α es un conjunto admisible.

En estos términos, los teoremas [PC 2.33] y [PC 3.25] afirman que si κ es un cardinal infinito, entonces $H(\kappa)$ es un conjunto admisible, al igual que lo son los conjunto $L_\kappa[a]$ con $a \in \mathcal{N}$, si κ es un cardinal infinito$^{L[a]}$. (El caso $\kappa = \omega$ no está contemplado en estos teoremas, pero entonces el conjunto en cuestión es en ambos casos V_ω, y la conclusión es trivial.) En particular, todos los cardinales infinitos son ordinales admisibles.

Obviamente ω es el menor ordinal admisible, y si $\alpha > \omega$ es admisible, entonces $L_\alpha \vDash \mathrm{KPI}$, pues $\omega \in L_\alpha$. Todo ordinal admisible es un ordinal límite, pues en $L_{\alpha+1}$ hay un máximo ordinal, mientras que en KP se demuestra que no lo hay.

Ejercicio: Probar (AE) que si κ es un cardinal infinito no numerable, entonces hay κ ordinales admisibles menores que κ.

Del teorema [PC 2.40] se desprende que si (M, R) es un modelo de KP, entonces Ω^M_{bf} es un ordinal admisible, pues, si $\Omega^M_{\mathrm{bf}} > \omega$ (el caso contrario es trivial) M_{bf} es un modelo transitivo de KPI tal que $M_{\mathrm{bf}} \cap \Omega = \Omega^M_{\mathrm{bf}}$, y a su vez $L^{M_{\rm bf}} = L_{\Omega_{\rm bf}^M}$ es también un modelo de KPI (aquí usamos que en KPI se demuestra que L es un modelo de KPI), luego $\Omega_{\rm bf}^M$ es admisible.

Ahora estamos en condiciones de probar lo siguiente:

Teorema 5.34 *Si $a \in \mathcal{N}$, el ordinal ω_1^a es admisible.*

Demostración: Según hemos observado tras el teorema 4.25, el conjunto $\mathrm{BO}_a \subset \omega$ es $\Pi_1^1(a)$, pero no $\Sigma_1^1(a)$, luego, en particular, no es hiperaritmético. Por el teorema 5.32 existe un modelo transitivo M de KPI tal que $a \in M$ y $\mathrm{BO}_a \notin M$. Por 5.30 sabemos que $\omega_1^a \subset M$. Basta probar que $\omega_1^a \notin M$, pues entonces $L_{\omega_1^a} = L^M$ es un modelo transitivo de KPI, es decir, el ordinal ω_1^a es admisible (y por la misma razón, $L_{\omega_1^a}[a] = L[a]^M$ es también un modelo transitivo de KPI).

Supongamos que, por el contrario, $\omega_1^a \in M$. Entonces $L_{\omega_1^a}(a) \in M$. En la prueba del teorema 4.24 hemos visto que el conjunto

$$\{e \in \omega \mid \{e\}^{\omega,\omega}_{\Sigma_1^0(a)} \in \mathcal{N}\}$$

es hiperaritmético en a. Más aún, lo mismo vale para el conjunto

$$\mathrm{OT}_a = \{e \in \omega \mid \{e\}^{\omega,\omega}_{\Sigma_1^0(a)} \in \mathrm{OT}\}.$$

En efecto:

$$e \in \mathrm{OT}_a \leftrightarrow \{e\}^{\omega,\omega}_{\Sigma_1^0(a)} \in \mathcal{N} \land \bigwedge x \in \mathcal{N}\,((\bigwedge n \in \omega\ x(n) = \{e\}^{\omega,\omega}_{\Sigma_1^0(a)}(n)) \rightarrow x \in \mathrm{OT})$$

$$\leftrightarrow \{e\}^{\omega,\omega}_{\Sigma_1^0(a)} \in \mathcal{N} \land \bigwedge x \in \mathcal{N}\,(\bigwedge n \in \omega\ G^{\omega\times\omega}_{\Sigma_1^0(a)}(e, x(n), n) \rightarrow x \in \mathrm{OT}),$$

con lo que OT_a es $\Pi_1^1(a)$ (pues OT es Δ_1^1), pero podemos cambiar el cuantificador $\bigwedge x \in \mathcal{N}$ por $\bigvee x \in \mathcal{N}$ y la fórmula resultante es equivalente, luego OT_a es $\Delta_1^1(a)$ y, en particular, está en M. Para cada $e \in \mathrm{OT}$, definimos la relación en ω dada por

$$m \leq_e n \leftrightarrow \{e\}_{\Sigma_1^0(a)}(\langle m, n\rangle_2) = 0,$$

de modo que $\leq_e$ es una relación de orden total en su dominio

$$C_e = \{n \in \omega \mid n \leq_e n\}$$

por definición de OT y de OT_a. Más explícitamente:

$$m \leq_e n \leftrightarrow G^{\omega\times\omega}_{\Sigma_1^0(a)}(e, 0, \langle m, n\rangle_2)$$

y, teniendo en cuenta que el conjunto de la derecha es $\Sigma_1^0(a)$, concluimos que la relación $\leq$ (como subconjunto de ω^3) está en M. Más precisamente, está en $L_{\omega+1}[a]$. Ahora bien,

$$e \in \mathrm{BO}_a \leftrightarrow e \in \mathrm{OT}_a \land \bigvee f\ (f : (C_e, \leq_e) \longrightarrow \omega_1^a \text{ inyectiva creciente}).$$

Basta probar que, más aún,

$$e \in \mathrm{BO}_a \leftrightarrow e \in \mathrm{OT}_a \land \bigvee f \in L_{\omega_1^a}[a]\ (f : (C_e, \leq_e) \longrightarrow \omega_1^a \text{ inyectiva creciente}),$$

ya que entonces podemos concluir que $\mathrm{BO}_a \in M$ por Δ_0-especificación, ya que la fórmula de la derecha es Δ_0 en los parámetros OT_a, $L_{\omega_1^a}[a]$, ω, $\leq$, $\omega_1^a \in M$, y así tendremos una contradicción.

Un poco más en general, tenemos $C = C_e \subset \omega$ tal que $C \in L_{\omega+1}[a]$, pues

$$C = \{n \in \omega \mid n \leq_e n\}$$

y $\leq$ es definible (con a como parámetro) por una fórmula relativizada a $L_\omega[a]$, tenemos $\leq\, = \,\leq_e \in L_{\omega+1}[a]$ y una semejanza $f : (C, \leq) \longrightarrow \alpha$, con $\alpha < \omega_1^a$, y queremos probar que $f \in L_{\omega_1^a}[a]$. Para cada $\delta \leq \alpha$, sea $f_\delta : (C^<_{n_\delta}, \leq) \longrightarrow \delta$ la restricción de f a la sección inicial de C determinada por $n_\delta = f^{-1}(\delta)$.

Obviamente, si $\delta < \omega$, tenemos que $f_\delta \in L_\omega[a]$, pues f_δ es hereditariamente finito. Si δ es infinito (en el supuesto de que α lo sea), tenemos que $f_\delta \subset L_{\delta+2}[a]$ (porque f_δ es un conjunto de pares ordenados con primera componente en ω y segunda componente en δ). Además, $C, \leq\, \in L_{\delta+1}[a]$.

Una simple inducción demuestra que, si $\omega \leq \delta \leq \alpha$, entonces $f_\delta \in L_{\delta+3}[a]$. En efecto, si $\delta = \gamma + 1$, por hipótesis de inducción $f_\gamma \in L_{\delta+2}[a]$ y así

$$f_\delta = \{x \in L_{\delta+2}[a] \mid \bigvee g \in L_{\delta+2}[a](g : (C^<_{n_\gamma}, \leq) \longrightarrow \gamma \text{ semejanza} \land x \in g)$$
$$\lor\ x = (n_\gamma, \delta)\},$$

y la fórmula indicada puede relativizarse a $L_{\delta+2}[a]$ tomando como parámetros $C, n_\gamma, \leq, \gamma, \delta$, todos ellos en $L_{\delta+2}[a]$. Esto prueba que $f_\delta \in L_{\delta+3}[a]$.

Si δ es un ordinal límite, para todo $\gamma < \delta$ (por hipótesis de inducción o por el caso finito) tenemos que $f_\gamma \in L_{\delta+2}[a]$, luego

$$f_\delta = \{x \in L_{\delta+2}[a] \mid \bigvee g \in L_{\delta+2}[a] \bigvee n \in C \bigvee \gamma < \delta\, (g : (C^<_n, \leq) \longrightarrow \gamma \text{ semejanza}$$
$$\land\ x \in g)\},$$

e igualmente concluimos que $f_\delta \in L_{\delta+3}[a]$. ■

De aquí extraemos varias consecuencias de interés:

Teorema 5.35 *Se cumple:*

a) ω_1^{ck} *es el menor ordinal admisible* $> \omega$.

b) $L_{\omega_1^a}[a]$ *es el menor modelo transitivo de* KPI *que contiene a* a. *Además en él se cumple que todo conjunto es numerable.*

c) $\Delta^1_1(a)(\omega) = L_{\omega_1^a}[a] \cap \mathcal{P}\omega$.

DEMOSTRACIÓN: a) Si $\alpha > \omega$ es un ordinal admisible entonces L_α es un modelo transitivo de KPI, luego $\omega_1^{\mathrm{ck}} \subset L_\alpha$ por 5.30, luego $\omega_1^{\mathrm{ck}} \leq \alpha$.

b) En la prueba del teorema anterior hemos visto que $L_{\omega_1^a}[a] \vDash$ KPI. Si $M \vDash$ KPI y $a \in N$ entonces $\omega_1^a \subset M$, luego $L_{\omega_1^a}[a] \subset M$.

Si $\alpha < \omega_1^a$ entonces existe $x \in$ BO recursivo en a tal que $\|x\| = \alpha$, pero entonces $x \in L_{\omega_1^a}[a]$ por 5.26 (porque x es aritmético en a como subconjunto de ω^2), y por 5.29 concluimos que la semejanza $(\omega, \leq_x) \longrightarrow \alpha$ está en $L_{\omega_1^a}[a]$, luego α es numerable$^{L_{\omega_1^a}[a]}$. Ese mismo teorema implica que la semejanza de $(L_\alpha[a], \trianglelefteq_a)$ en su ordinal está en $L_{\omega_1^a}[a]$, y acabamos de probar que dicho ordinal es numerable en el modelo, luego $L_\alpha[a]$ también lo es. De aquí se sigue que todo elemento de $L_{\omega_1^a}[a]$ es numerable$^{L_{\omega_1^a}[a]}$.

c) Una inclusión nos la da el teorema 5.27 y la otra el teorema 5.31 junto con el apartado b). ■

El hecho de que los ordinales ω_1^a sean admisibles implica que, aun siendo numerables, son ordinales "grandes", pues, por ejemplo, la suma, el producto y la exponenciación de dos ordinales menores que ω_1^a es menor que ω_1^a.

Recordemos que, según 3.28, un $x \in \mathcal{N}$ es $\Sigma_1^1(a)$-recursivo si y sólo si lo es como aplicación $x : \omega \longrightarrow \omega$ y, según 3.21, esto equivale a que x sea $\Sigma_1^1(a)$ como subconjunto de $\omega \times \omega$. De hecho, equivale a que x sea $\Delta_1^1(a)$ como subconjunto de ω, pues

$$(m, n) \notin x \leftrightarrow \bigvee k \in \omega \, (k \neq n \land (m, k) \in x).$$

Veamos una variante del teorema 4.56:

Teorema 5.36 *Sea $a \in \mathcal{N}$, Y un espacio producto y $P \subset Y \times \mathcal{N}$ un conjunto $\Pi_n^1(a)$. Entonces el conjunto dado por*

$$S(y) \leftrightarrow \bigvee x \in \Delta_1^1(a) \, P(y, x)$$

es también $\Pi_n^1(a)$.

DEMOSTRACIÓN: Si $x \in \Delta_1^1(a)$, entonces $A = \{n \in \omega \mid x(n_0^2) = n_1^2\}$ es $\Delta_1^1(a)(\omega)$ (es una sustitución recursiva de x como subconjunto de $\omega \times \omega$), luego existe un $z \in$ CB recursivo en a tal que $A = \pi^\omega(z)$. Si llamamos $b = \chi_A$, tenemos que (x, b, z) pertenece al conjunto $R \subset \mathcal{N} \times \mathcal{N} \times \mathcal{N}$ dado por

$$R(x, b, z) \leftrightarrow b = \chi_{\pi^\omega(z)} \land \bigwedge mn \in \omega \, (x(m) = n \leftrightarrow b(\langle m, n \rangle_2) = 1).$$

Recíprocamente, si $x \in \mathcal{N}$ cumple $R(x, b, z)$ para cierto $b \in \mathcal{N}$ y cierto $z \in$ CB recursivo en a entonces $x \in \Delta_1^1(a)$. La razón para expresar la relación de este modo es que en la demostración del teorema 5.27 hemos construido un conjunto aritmético G tal que para todo $z \in$ CB se cumple

$$b = \chi_{\pi^\omega(z)} \leftrightarrow \bigvee uv \in \mathcal{N} \, (G(z, u, v) \land b = v_0).$$

La relación de la derecha define un conjunto $C \in \Sigma_1^1(\mathcal{N}^2)$. Así pues, si definimos

$$R'(x,b,z) \leftrightarrow C(b,z) \land \bigwedge mn \in \omega\,(x(m) = n \leftrightarrow b(\langle m,n\rangle_2) = 1),$$

tenemos que $R' \in \Sigma_1^1(\mathcal{N}^3)$ y, los $x \in \mathcal{N}$ tales que $x \in \Delta_1^1(a)$ son exactamente los que cumplen $R'(x,b,z)$, para cierto $z \in \mathrm{CB}$ recursivo en a y cierto $b \in \mathcal{N}$ (necesariamente único, pues tiene que ser $\chi_{\pi^\omega(z)}$). Por consiguiente:

$$S(y) \leftrightarrow \bigvee e \in \omega\,(\{e\}^{\omega,\omega}_{\Sigma_1^0(a)} \in \mathcal{N} \land \bigwedge z \in \mathcal{N}(z = \{e\}^{\omega,\omega}_{\Sigma_1^0(a)} \to z \in \mathrm{CB}) \land$$

$$\bigwedge xbz \in \mathcal{N}(z = \{e\}^{\omega,\omega}_{\Sigma_1^0(a)} \land R'(x,b,z) \to P(y,x))).$$

Esta relación prueba que S es $\Pi_n^1(a)$, pues CB es Π_1^1 (teorema 5.28) y en la demostración del teorema 4.24 hemos visto que la relación $\{e\}^{\omega,\omega}_{\Sigma_1^0(a)} \in \mathcal{N}$ es $\Delta_1^1(a)$ (aritmética en a, de hecho), ya que

$$\{e\}^{\omega,\omega}_{\Sigma_1^0(a)} \in \mathcal{N} \leftrightarrow \bigwedge n \in \omega \bigvee m \in \omega \bigwedge u \in \omega(m = u \leftrightarrow G^{\omega\times\omega}_{\Sigma_1^0(a)}(e,u,n)),$$

y lo mismo sucede con

$$z = \{e\}^{\omega,\omega}_{\Sigma_1^0(a)} \leftrightarrow \bigwedge nu \in \omega(z(n) = u \leftrightarrow G^{\omega\times\omega}_{\Sigma_1^0(a)}(e,u,n)).$$

■

De aquí extraemos una consecuencia interesante:

Teorema 5.37 *En* KPI *no puede probarse que todo conjunto bien ordenado es semejante a un ordinal.*

Demostración: Sabemos que $L_{\omega_1^{\mathrm{ck}}}$ es un modelo transitivo de KPI, luego basta probar que en él existen conjuntos bien ordenados$^{L_{\omega_1^{\mathrm{ck}}}}$ que no son semejantes a ordinales$^{L_{\omega_1^{\mathrm{ck}}}}$. Por 5.29 esto equivale a que no estén bien ordenados (en V).

Si $e \in \omega$ cumple que $\{e\}^{\omega,\omega} \in \mathcal{N}$, hemos visto que $\{e\}^{\omega,\omega} \in L_{\omega_1^{\mathrm{ck}}}$, y también está en dicho modelo la relación

$$m \leq_e n \leftrightarrow \{e\}^{\omega,\omega}(\langle m,n\rangle_2) = 0,$$

así como su dominio $C_e = \{n \in \omega \mid n \leq_e n\}$. Por lo tanto, podemos definir

$$\mathrm{BO}_0^* = \{e \in \omega \mid \{e\}^{\omega,\omega} \in \mathcal{N} \land (C_e, \leq_e) \text{ está bien ordenado}^{L_{\omega_1^{\mathrm{ck}}}}\}.$$

Por otra parte, sea

$$\mathrm{BO}_0 = \{e \in \omega \mid \{e\}^{\omega,\omega} \in \mathcal{N} \land (C_e, \leq_e) \text{ está bien ordenado}\}$$

$$= \{e \in \omega \mid \{e\}^{\omega,\omega} \in \mathrm{BO}\}.$$

El teorema 5.29 implica que $\mathrm{BO}_0 \subset \mathrm{BO}_0^*$. Ahora bien, $e \in \mathrm{BO}_0^*$ si y sólo si $\{e\}^{\omega,\omega} \in \mathrm{OT}$ y todo conjunto $a \subset C_e$ no vacío que esté en $L_{\omega_1^{\mathrm{ck}}}$ (es decir, que sea hiperaritmético) tiene un mínimo elemento respecto a $\leq_e$.

Observemos que si $x \in \Delta^1_1$, el conjunto $a = \{n \in \omega \mid x(n) = 1\}$ es hiperaritmético, y que todo $a \subset \omega$ hiperaritmético es de esta forma con $x = \chi_a$. Por lo tanto:

$$e \in \mathrm{BO}^*_0 \leftrightarrow \{e\}^{\omega,\omega} \in \mathrm{OT} \land \bigwedge x \in \Delta^1_1\, M(e,x),$$

donde

$$M(e,x) \leftrightarrow \bigwedge n \in \omega\, (n \leq_e n \rightarrow x(n) = 0) \lor$$
$$\bigvee n \in \omega(n \leq_e n \land x(n) = 1 \land \bigwedge m \in \omega\, (m <_e n \rightarrow x(m) = 0))$$

es la relación Δ^1_1 que expresa que x codifica a un subconjunto de C_e vacío o con mínimo elemento. En la prueba de 5.34 hemos visto que la relación $\{e\}^{\omega,\omega} \in \mathrm{OT}$ define un subconjunto Δ^1_1 de ω, y el teorema 5.36 nos da que la relación

$$\bigwedge x \in \Delta^1_1\, M(e,x) \leftrightarrow \neg \bigvee x \in \Delta^1_1 \neg M(e,x)$$

es Σ^1_1, luego concluimos que BO^*_0 es un conjunto Σ^1_1, pero tras el teorema 4.25 hemos observado que el conjunto BO^* no es Σ^1_1. Esto significa que la inclusión $\mathrm{BO}_0 \subset \mathrm{BO}^*_0$ tiene que ser estricta. Por consiguiente, tomando un $e \in \mathrm{BO}^*_0 \setminus \mathrm{BO}_0$ obtenemos que el conjunto totalmente ordenado $(C_e, \leq_e)$ no está bien ordenado, pero está bien ordenado$^{L_{\omega_1^{\mathrm{ck}}}}$. ■

Vamos a estudiar con más detalle la jerarquía hiperaritmética:

Teorema 5.38 *Si M es un modelo transitivo de* KPI *y $a \in \mathcal{N} \cap M$, para cada ordinal $1 \leq \alpha < \omega_1^a$ se cumple que $\Sigma^0_\alpha(a)(\omega), \Pi^0_\alpha(a)(\omega) \in M$.*

Demostración: Veamos en primer lugar que el conjunto $\mathcal{N}_a$ de los $x \in \mathcal{N}$ recursivos en a está en M. Para ello observamos que

$$R = \{e \in \omega \mid \{e\}^{\omega,\omega}_{\Sigma^a_1} \in \mathcal{N}\} \in M,$$

pues en la prueba del teorema 4.24 hemos visto que es hiperaritmético en a. El conjunto $G^{\omega\times\omega}_{\Sigma^0_1(a)} \in M$ porque es aritmético y, puesto que, para cada $e \in R$ se cumple que

$$y = \{e\}^{\omega,\omega}_{\Sigma^0_1(a)} \leftrightarrow y : \omega \longrightarrow \omega \land \bigwedge n \in \omega\; G^{\omega\times\omega}_{\Sigma^0_1(a)}(e, y(n), n)$$

y, obviamente, $M \vDash \bigwedge e \in [R] \overset{1}{\bigvee} y\; (y : [\omega] \longrightarrow [\omega] \land \bigwedge n \in \omega\; [G^{\omega\times\omega}_{\Sigma^0_1(a)}](e, y(n), n))$, por reemplazo tenemos que

$$\mathcal{N}_a = \{\{e\}^{\omega,\omega}_{\Sigma^0_1(a)} \mid e \in R\} \in M.$$

Por otra parte, si $x \in \mathcal{N}$, tenemos que

$$\{x\}^{\omega,\omega}(n){\downarrow} \leftrightarrow \bigvee m \in \omega \bigwedge u \in \omega (u = m \leftrightarrow G^{\omega\times\omega}(u, n, x))$$
$$\leftrightarrow \bigvee m \in \omega \bigwedge u \in \omega (u = m \leftrightarrow \bigvee k \in \omega\; H(k, u, n, \bar{x}(k)),$$

donde $H \in M$ es el conjunto recursivo dado por el teorema 3.12. Así pues, si llamamos $\phi(x, n, w, H)$ a la fórmula Δ_0 anterior[4] (donde la variable w se sustituye por ω), tenemos que

$$C(\Sigma_1^0(a)) = \{x \in \mathcal{N}_a \mid x(0) = 0 \wedge \bigwedge n \in \omega\ \phi(x^1, n, \omega, H)\} \in M$$

por Δ_0-especificación.

Similarmente,

$$C(\Pi_1^0(a)) = \{x \in \mathcal{N}_a \mid x(0) = 2 \wedge \bigvee y \in C(\Sigma_1^0(a))\ \psi(y, x^1, \omega, H)\} \in M,$$

donde ψ es la fórmula Δ_0 dada por

$$\psi(y, x, w, H) \equiv \bigwedge nu \in w\ (u = y(n) \leftrightarrow \bigvee k \in w\ H(k, u, n, \bar{x}(k))).$$

Veamos ahora que es posible definir en M la aplicación $F : \Omega \longrightarrow V$ dada por $F(\alpha) = (C(\Sigma_\alpha^0(a)), C(\Pi_\alpha^0(a)))$. Basta expresarla en la forma[5]

$$F(\alpha) = G(\alpha, F|_\alpha)$$

para cierta función G de clase Σ_1 definida, en principio, sobre todos los pares (α, f) tales que $\alpha \in \Omega$ y $f : \alpha \longrightarrow V$. Sin embargo, para simplificar la definición conviene comprobar que el teorema de Σ_1-recursión puede modificarse para que el dominio de G se reduzca a los pares (α, f) con $\alpha \in \Omega$ y $f : \alpha \longrightarrow \mathcal{P}\mathcal{N}_a \times \mathcal{P}\mathcal{N}_a$. En esencia esto es posible porque esta condición es Δ_0:

$$f : \alpha \longrightarrow \mathcal{P}\mathcal{N}_a \times \mathcal{P}\mathcal{N}_a \leftrightarrow f : \alpha \longrightarrow V \wedge \bigwedge u \in \alpha \bigvee v \in f$$

$$\bigvee v_1 \in v \bigvee v_2 \in v_1 \bigvee v_3 \in v_2 \bigvee pq \in v_3\ (v = (u, (p, q)) \wedge p \subset \mathcal{N}_a \wedge q \subset \mathcal{N}_a).$$

La definición de G es:

$$\begin{gathered} y = G(\alpha, f) \leftrightarrow (\alpha = 0 \wedge y = (\varnothing, \varnothing)) \vee (\alpha = 1 \wedge y = (C(\Sigma_1^0(a)), C(\Pi_1^0(a)))) \\ \vee\ (\alpha > 1 \wedge \bigvee^* CD\ (y = (C, D) \wedge C \subset \mathcal{N}_a \wedge D \subset \mathcal{N}_a \wedge \\ \bigwedge x \in \mathcal{N}_a (x \in C \leftrightarrow x(0) = 1 \wedge \bigwedge n \in \omega \bigvee \delta < \alpha \bigvee^* pq\, (f(\delta) = (p, q) \wedge \\ \bigvee y \in q\ \{x^1\}^{\omega, \mathcal{N}}(n) = y) \wedge \\ \bigwedge x \in \mathcal{N}_a (x \in D \leftrightarrow x(0) = 2 \wedge \bigvee y \in C\ \{x^1\}^{\omega, \omega} = y))). \end{gathered}$$

(Por no complicar aún más la expresión no hemos acotado los cuantificadores marcados con un asterisco, pero es fácil hacerlo.) La definición de G es, de hecho, Δ_0. Notemos que

$$\{x\}^{\omega, \mathcal{N}}(n) = y \leftrightarrow \bigwedge m \in \omega\, (y \in B_m \leftrightarrow G^{\omega, \omega}(m, n, x)))$$

$$\leftrightarrow \bigwedge m \in \omega\, (\bar{y}(\ell(m)) = m \leftrightarrow \bigvee k \in \omega\, H(k, m, n, \bar{x}(k))),$$

e igualmente se reduce a una fórmula Δ_0 (con los parámetros necesarios) la

[4] Por simplicidad en las comprobaciones podemos añadir a ϕ más parámetros con las relaciones aritméticas que definen a $\bar{x}(k)$, y así no hace falta justificar que éstas pueden definirse en KPI.

[5] Usamos el teorema de Σ_1-recursión [L 12.6].

fórmula $\{x^1\}^{\omega,\omega} = y$. Hay que demostrar que el conjunto y descrito por G está realmente en M. El único caso no trivial es el correspondiente a $\alpha > 1$, donde hay que probar que los conjuntos C y D están en M, pero también es evidente, pues se definen a partir de $\mathcal{N}_a$ por Δ_0-especificación con los parámetros necesarios (entre ellos α y f).

Así pues, concluimos que los conjuntos de códigos $C(\Sigma^0_\alpha(a))$, $C(\Pi^0_\alpha(a))$ están en M, para $1 \leq \alpha < \omega_1^a$). Más precisamente, las fórmulas $y = C(\Sigma^0_\alpha(a))$, $y = C(\Pi^0_\alpha(a))$ equivalen a fórmulas Δ_1 relativizadas a M con los parámetros necesarios.

Seguidamente comprobamos que la aplicación $F : \Omega \longrightarrow V$ dada por $F(\alpha) = \pi^\omega|_{C(\Sigma^0_\alpha(a)) \cup C(\Pi^0_\alpha(a))}$ también es definible en M. Esto completará la demostración, pues entonces

$$\Sigma^0_\alpha(a)(\omega) = F(\alpha)[C(\Sigma^0_\alpha(a))] \in M, \quad \Pi^0_\alpha(a)(\omega) = F(\alpha)[C(\Pi^0_\alpha(a))] \in M.$$

Como antes, podemos definir función G sobre la clase de los pares (α, f) tales que $\alpha \in \Omega$ y $f : \alpha \longrightarrow V$ cumple que

$$\bigwedge \alpha \in \Omega \; f(\alpha) : C(\Sigma^0_\alpha(a)) \cup C(\Pi^0_\alpha(a)) \longrightarrow V,$$

pues estas condiciones definen una clase Δ_1. La definición es la siguiente:

$$y = G(\alpha) \leftrightarrow (\alpha = 0 \land y = \varnothing) \lor$$

$$(\alpha = 1 \land \bigvee y_1 y_2 (y_1 = C(\Sigma^0_1(a)) \land y_2 = C(\Pi^0_1(a)) \land y : y_1 \cup y_2 \longrightarrow V \land$$

$$\bigwedge x \in y_1 (y(x) = \{\{x^1\}^{\omega,\omega}(n) \mid n \in \omega\}) \land$$

$$\bigwedge x \in y_2 \bigvee x' \in y_1 \; (x' = \{x^1\}^{\omega,\omega} \land y(x) = \omega \setminus y(x')))) \lor$$

$$(\alpha > 1 \land \bigvee y_1 y_2 (y_1 = C(\Sigma^0_\alpha(a)) \land y_2 = C(\Pi^0_\alpha(a)) \land y : y_1 \cup y_2 \longrightarrow V \land$$

$$\bigwedge x \in y_1 (\bigvee A (\bigwedge n \in \omega \bigvee \delta < \alpha \bigvee y' \bigvee x' \in y' (y' = C(\Sigma^0_\delta(a)) \land x' = \{x^1\}^{\omega,\mathcal{N}}(n)$$

$$\land f(\delta)(x') \in A) \land \bigwedge a \in A \bigvee n \in \omega \bigvee \delta < \alpha \bigvee y' \bigvee x' \in y' (y' = C(\Sigma^0_\delta(a) \land$$

$$x' = \{x^1\}^{\omega,\mathcal{N}}(n) \land a = f(\delta)(x')) \land y(x) = \bigcup_{a \in A} a)$$

$$\land \bigwedge x \in y_2 \bigvee x' \in y_1 \; (x' = \{x^1\}^{\omega,\omega} \land y(x) = \omega \setminus y(x')))).$$

Como en el caso anterior se demuestra que la fórmula que define a G es Σ_1 así como que la función y descrita por dicha fórmula está en M. ■

Al aplicar el teorema anterior al modelo $L_{\omega_1^a}[a]$ obtenemos que si $1 \leq \alpha < \omega_1^a$ entonces $\Sigma^0_\alpha(a)(\omega) \in L_{\omega_1^a}[a]$, luego existe un $\lambda < \omega_1^a$ tal que $\Sigma^0_\alpha(a)(\omega) \subset L_\lambda[a]$. En otras palabras, existe un $\lambda < \omega_1^a$ tal que en los conjuntos de la jerarquía constructible posteriores a λ ya no aparecen nuevos subconjuntos de ω hiperaritméticos de rango α. A continuación demostramos que, por el contrario, nunca dejan de aparecer nuevos subconjuntos hiperaritméticos de ω:

Teorema 5.39 *Si $a \in \mathcal{N}$ y $\lambda < \omega_1^a$, entonces $\Delta^1_1(a)(\omega) \not\subset L_\lambda[a]$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $A = \{a \in L_\lambda[a] \mid a \subset \omega\} \in L_{\omega_1^a}[a]$, sea $\trianglelefteq_a \in L_{\omega_1^a}[a]$ la restricción a $L_\lambda[a]$ del buen orden constructible y sea $\trianglelefteq = \trianglelefteq_a \cap (A \times A) \in L_{\omega_1^a}[a]$.

Así $(A, \trianglelefteq)$ es un conjunto bien ordenado y, si α es su ordinal, el teorema 5.29 nos da que $\alpha < \omega_1^a$ y que la semejanza $f : (A, \trianglelefteq) \longrightarrow \alpha$ cumple $f \in L_{\omega_1^a}[a]$. Sea $x \in \mathrm{BO}$ recursivo en a tal que $\|x\| = \alpha$. Por el mismo teorema, las semejanzas $g : (C_x, \leq_x) \longrightarrow \alpha$ y $h : (C_x, \leq) \longrightarrow \omega$ cumplen $g, h \in L_{\omega_1^a}[a]$, donde la última relación de orden es la restricción a C_x del buen orden usual en ω.

Componiendo estas semejanzas obtenemos una biyección $t : \omega \longrightarrow A$ tal que $t \in L_{\omega_1^a}[a]$. Ahora basta considerar el conjunto

$$x = \{n \in \omega \mid n \notin t(n)\} \in L_{\omega_1^a}[a].$$

Tenemos que $x \in \Delta_1^1(a)(\omega)$ (por estar en $L_{\omega_1^a}[a]$), pero no puede ser $x \in L_\lambda[a]$, pues entonces existiría un $n \in \omega$ tal que $t(n) = x$ y llegaríamos a la paradoja $n \in x \leftrightarrow n \notin x$. ■

Los dos teoremas anteriores implican que si $1 \leq \alpha < \omega_1^a$, entonces

$$\Sigma_\alpha^0(a)(\omega) \subsetneq \Delta_1^1(a)(\omega),$$

y de aquí se sigue la misma inclusión estricta para $\Pi_\alpha^0(a)(\omega)$.

5.6 La lógica $\epsilon\sigma$

Vamos a presentar una lógica con deducciones infinitas que está asociada a una generalización del concepto de modelo ω. Con ella determinaremos todos los ordinales admisibles numerables.

Definición 5.40 Dado un ordinal numerable σ, llamaremos $\mathcal{L}_{\epsilon\sigma}$ al lenguaje formal de primer orden cuyos signos (aparte de los signos lógicos) son el relator de pertenencia $\in$ y un conjunto de constantes $\{\omega + \tau \mid \tau \in \sigma\}$. Representaremos $\bar{\tau} = \omega + \tau$.

Supondremos además que los signos de $\mathcal{L}_{\epsilon\sigma}$ distintos de las constantes $\bar{\tau}$ son números naturales (por ejemplo, que las variables son las potencias 2^i y que los restantes signos —una cantidad finita— son los primeros números naturales).

Más en general, llamaremos *lenguaje* $\epsilon\sigma$ a cualquier lenguaje $\mathcal{L}$ que conste de los signos de $\mathcal{L}_{\epsilon\sigma}$ más una cantidad finita o numerable de nuevas constantes (a las que siempre supondremos una descripción conjuntista sencilla, por ejemplo, las primeras o todas las potencias 3^i).

Todos los resultados que vamos a probar siguen siendo válidos si admitimos lenguajes $\epsilon\sigma$ con otros signos adicionales (relatores o funtores), pero no nos van a hacer falta y sólo alargarían las demostraciones, por lo que trabajaremos con la definición restringida que acabamos de dar.

Un *modelo* $\epsilon\sigma$ de $\mathcal{L}$ es un modelo M tal que

a) Si $\rho < \tau < \sigma$ entonces $M \vDash \bar{\rho} \in \bar{\tau}$.

b) Si $x \in M$ y $\tau < \sigma$ cumplen $M \vDash [x] \in \bar{\tau}$, entonces existe un ordinal $\rho < \tau$ tal que $M \vDash [x] = \bar{\rho}$.

Observemos que si M es un modelo $\epsilon\sigma$ de KPI, para todo $\tau < \sigma$ se cumple que $M(\bar{\tau}) \in M_{\rm bf}$, pues una sucesión decreciente respecto a la pertenencia en M que parta de $\bar{\tau}$ daría lugar (por la propiedad b) a una sucesión decreciente de ordinales. Una simple inducción demuestra entonces que el colapso transitivo de $M(\bar{\tau})$ es precisamente τ, de modo que $\sigma \leq \Omega_{\rm bf}^M$ y $\bigwedge \tau < \sigma\ i(\tau) = M(\bar{\tau})$.

En particular, si $\sigma > \omega$ tenemos que $e(M(\bar{\omega})) = i[\omega]$, pero entonces, aplicando el principio de inducción en M, concluimos que $M \vDash \bar{\omega} = \omega$, luego $e(M(\bar{\omega})) = \omega^M$ y tenemos que M es un modelo ω. Así pues, los modelos $\epsilon\sigma$ son una generalización[6] del concepto de modelo ω.

Definición 5.41 Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje $\epsilon\sigma$. Una *deducción* $\epsilon\sigma$ a partir de un conjunto de *premisas* dado $\Gamma \subset \mathrm{Form}(\mathcal{L})$ es un árbol bien fundado $T \subset X^{<\omega}$ junto con una aplicación $p : T \longrightarrow \mathrm{Form}(\mathcal{L})$ que cumpla las condiciones siguientes:

- Si $s \in T$ es un nodo terminal (no tiene extensiones en T) entonces $p(s)$ es un axioma lógico, o bien una premisa, o bien una sentencia $\bar{\rho} \in \bar{\tau}$, para ciertos ordinales $\rho < \tau < \sigma$.

- Si $s \in T$ no es terminal, entonces se da uno de los casos siguientes:

  (MP) Existen $x, y \in X$ tales que $s^\frown x, s^\frown y \in T$, $p(s^\frown x) = p(s^\frown y) \rightarrow p(s)$.

  (IG) Existe un $x \in X$ tal que $s^\frown x \in T$ y $p(s) = \bigwedge u\ p(s^\frown x)$, para cierta variable u de $\mathcal{L}$.

  (IG$_\tau$) Existe un ordinal $\tau < \sigma$ tal que $p(s) = \bigwedge u \in \bar{\tau}\ \phi(u)$ y

$$\bigwedge \rho < \tau \bigvee x \in X (s^\frown x \in T \wedge p(s^\frown x) = \phi(\bar{\rho})).$$

Escribiremos $\Gamma \vdash_{(T,p)\epsilon\sigma} \phi$ para indicar que (T, p) es una deducción $\epsilon\sigma$ con premisas en $\Gamma \subset \mathrm{Form}(\mathcal{L})$ y $p(\varnothing) = \phi$.

Abreviaremos $\Gamma \vdash_{\epsilon\sigma} \phi \equiv \bigvee Tp\ \Gamma \vdash_{(T,p)\epsilon\sigma} \phi$.

En definitiva, una deducción $\epsilon\sigma$ es una deducción en la que admitimos como axiomas todas las sentencias $\bar{\rho} < \bar{\tau}$ con $\rho < \tau < \sigma$ y admitimos como demostración de que todo ordinal menor que $\bar{\tau}$ cumple una determinada propiedad la reunión (organizada en forma de árbol) de una familia de demostraciones individuales de que cada uno de ellos la cumple.

Es obvio que este concepto de deducción $\epsilon\sigma$ extiende al concepto usual, de modo que

$$\Gamma \vdash \phi \quad \Rightarrow \quad \Gamma \vdash_{\epsilon\sigma} \phi.$$

(toda deducción usual se convierte en una deducción $\epsilon\sigma$ sobre un árbol finito lineal).

[6]Es fácil ver que un modelo ω es esencialmente lo mismo que un modelo $\epsilon(\omega+1)$, mientras que cualquier modelo de KP admite una estructura de modelo $\epsilon\omega$.

El concepto de deducción $\epsilon\sigma$ nos obliga a trabajar con árboles $T \subset X^{<\omega}$ sobre conjuntos X arbitrarios, no necesariamente $X = \omega$. Algunos resultados que hemos visto tras la definición 5.5 cuando $X = \omega$ son válidos en general con el mismo argumento. Así, todo árbol bien fundado T tiene asociada una única aplicación $\operatorname{rang}_T : T \longrightarrow \Omega$ determinada por la relación recurrente

$$\operatorname{rang}_T(t) = \bigcup_{t \subsetneq s} (\operatorname{rang}_T(s) + 1).$$

Así, si $t \subsetneq s$, entonces $\operatorname{rang}_T s < \operatorname{rang}_T t$.

Para cada $t \in T$ podemos definir el árbol

$$T/t = \{s \in X^{<\omega} \mid t^\frown s \in T\},$$

que está bien fundado si T lo está, y en tal caso $\operatorname{rang}_{T/t}(s) = \operatorname{rang}_T(t^\frown s)$. Se define la *altura* de un árbol bien fundado como $\|T\| = \operatorname{rang}_T(\varnothing)$. En particular, si $t \in T \setminus \{\varnothing\}$ se cumple que $\|T/t\| = \operatorname{rang}_T(t) < \|T\|$.

Vamos a necesitar la versión para árboles del teorema 5.29. En general, si $T \subset X^{<\omega}$ es un árbol, diremos que $f : T \longrightarrow \Omega$ *es un rango* si

$$f : T \longrightarrow \Omega \land \bigwedge s \in T \ f(s) = \bigcup_{s \subsetneq t} (f(t) + 1)$$

Según acabamos de indicar, todo árbol bien fundado tiene asociada una aplicación rango, y es claro que T tiene una aplicación rango entonces está bien fundado. Todo esto se puede demostrar en ZF + ED, pero no en KPI. No obstante se cumple:

Teorema 5.42 *Sea M un modelo transitivo de* KPI *y sea $T \in M$ un árbol. Entonces*

$$T \text{ está bien fundado} \leftrightarrow \bigvee f \in M \ (f : T \longrightarrow \Omega \text{ es un rango}).$$

DEMOSTRACIÓN: Una implicación es trivial, pues si existe un rango (esté o no en M), entonces T está bien fundado. Falta probar que si $T \in M$ es un árbol bien fundado y $\operatorname{rang} : T \longrightarrow \Omega$ es su aplicación rango, entonces $\operatorname{rang} \in M$. Lo probamos por inducción sobre su altura $\|T\|$.

Así pues, suponemos que el rango de todo árbol en M bien fundado y de altura menor que $\|T\|$ está en M, y vamos a probar que lo mismo vale para T.

Sea $X = \operatorname{ct}(T) \in M$, de modo que $T \subset X^{<\omega} \in M$. Para cada $t \in T$, es claro que, por Δ_0-especificación,

$$T/t = \{s \in X^{<\omega} \mid t^\frown s \in T\} \in M.$$

Si $t \neq \varnothing$, tenemos $\|T/t\| < \|T\|$, luego por hipótesis de inducción $\operatorname{rang}_{T/t} \in M$. Así pues:

$$M \vDash \bigwedge t \in [T] \setminus \{\varnothing\} \overset{1}{\bigvee} f (f : [T]/t \longrightarrow \Omega \text{ es un rango})$$

Teniendo en cuenta que la única aplicación f que satisface la afirmación anterior es $\operatorname{rang}_{T/t}$, por Σ_1-reemplazo la aplicación $F : T \setminus \{\varnothing\} \longrightarrow V$ dada por $F(t) = \operatorname{rang}_{T/t}$ está en M, luego también lo está la función $r : T \setminus \{\varnothing\} \longrightarrow \Omega$ dada por

$$r(t) = F(t)(\varnothing) = \operatorname{rang}_{T/t}(\varnothing) = \operatorname{rang}_T(t).$$

(Por ejemplo, $r = \{(t, \alpha) \in (T \setminus \{0\}) \times \operatorname{ct}(T) \mid (\varnothing, \alpha) \in F(t)\}$, que está en M por Δ_0-especificación.) Ahora bien, $\|T\| \leq \bigcup \Re r + 1 \in M$, luego tenemos que $\|T\| \in M$ y por consiguiente $\operatorname{rang}_T = r \cup \{(\varnothing, \|T\|)\} \in M$. ■

Pasemos ya a estudiar la lógica $\epsilon\sigma$. En primer lugar demostramos que las deducciones $\epsilon\sigma$ son correctas con respecto a los modelos $\epsilon\sigma$:

Teorema 5.43 (de corrección) *Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje $\epsilon\sigma$, sea M un modelo $\epsilon\sigma$ de $\mathcal{L}$ y sea Γ un conjunto de premisas tales que $M \vDash \Gamma$. Entonces, para toda fórmula $\phi \in \operatorname{Form}(\mathcal{L})$, se cumple que*

$$\Gamma \vdash_{\epsilon\sigma} \phi \quad \Rightarrow \quad M \vDash \phi.$$

Demostración: Por inducción sobre la altura de (el árbol asociado a) una deducción $\epsilon\sigma$ de ϕ.

Si el árbol tiene altura 0, entonces ϕ es un axioma lógico (luego es verdadero en M) o bien una premisa (en cuyo caso es verdadera en M por hipótesis), o bien una sentencia $\bar{\rho} \in \bar{\tau}$ (que es verdadera en M por definición de modelo $\epsilon\sigma$).

Si ϕ tiene una deducción sobre un árbol de altura α y el resultado es válido para fórmulas deducibles sobre árboles de altura menor, fijemos una deducción (T, p) de ϕ y distingamos tres casos:

Si ϕ se deduce por (MP), es decir, si existen $xy \in X$ de manera que $\{(0, x)\}, \{(0, y)\} \in T$ y $p(\{(0, x)\}) = \psi \to \phi$, donde $\psi = p(\{(0, y)\}$ los árboles $T/\{(0, x)\}$ y $T/\{(0, y)\}$ tienen altura menor que T y sobre cada uno de ellos podemos construir una deducción de $\psi \to \phi$ y ψ respectivamente. Por hipótesis de inducción concluimos que $M \vDash (\psi \to \phi)$ y $M \vDash \psi$, luego también $M \vDash \phi$.

El caso en que ϕ se deduce por (IG) es análogo al anterior, incluso más simple. Pasemos al caso en que ϕ se deduce por (IG$_\tau$). Tenemos entonces que $\phi \equiv \bigwedge u \in \bar{\tau}\, \psi(u)$ y que para cada $\rho < \tau$ existe un $x \in X$ tal que $\{(0, x)\} \in T$ y $p(\{(0, x)\}) = \psi(\bar{\rho})$. El árbol $T/\{(0, x)\}$ tiene altura menor que T, y sobre él podemos construir una deducción de $\psi(\bar{\rho})$, luego por hipótesis de inducción

$$\bigwedge \rho < \tau\ M \vDash \psi(\bar{\rho}).$$

Veamos que de aquí se sigue que $M \vDash \bigwedge u \in \bar{\tau}\ \psi(u)$. En caso contrario existe un $x \in M$ tal que $M \vDash [x] \in \bar{\tau}$ y $\neg M \vDash \psi[x]$. Por definición de modelo $\epsilon\sigma$ existe un $\rho < \tau$ tal que $M \vDash [x] = \bar{\rho}$, luego $\neg M \vDash \psi(\bar{\rho})$, y así tenemos una contradicción. ■

En particular, si decimos que un conjunto de fórmulas Γ es $\epsilon\sigma$-consistente si no existe ninguna deducción $\epsilon\sigma$ de una contradicción a partir de Γ, el teorema anterior prueba que todo conjunto de fórmulas que admita un modelo $\epsilon\sigma$ es $\epsilon\sigma$-consistente. Más delicado es probar el recíproco:

Teorema 5.44 (de adecuación) *Todo conjunto $\epsilon\sigma$-consistente de sentencias de un lenguaje $\epsilon\sigma$ tiene un modelo $\epsilon\sigma$ numerable.*

DEMOSTRACIÓN: Dado un lenguaje $\epsilon\sigma$ $\mathcal{L}$ y un conjunto $\epsilon\sigma$-consistente Γ de sentencias de $\mathcal{L}$, consideramos el lenguaje $\mathcal{L}'$ que resulta de añadir a $\mathcal{L}$ un conjunto numerable de constantes C. Llamamos $\mathbb{P}$ al conjunto de todos los conjuntos finitos p de sentencias de $\mathcal{L}'$ tales que $\Gamma \cup p$ es $\epsilon\sigma$-consistente y consideramos en $\mathbb{P}$ el orden parcial dado por la relación inversa de la inclusión.

Para cada sentencia ϕ de $\mathcal{L}$, sea

$$C_\phi = \{p \in \mathbb{P} \mid \phi \in p \vee \neg\phi \in p\}.$$

Para cada sentencia de la forma $\bigvee x\, \phi(x)$, definimos

$$D_{\phi,x} = \{p \in \mathbb{P} \mid \ulcorner \bigvee x\, \phi(x) \urcorner \notin p \vee \bigvee c \in C\, \phi(c) \in p\}.$$

Por último, para cada ordinal $\tau < \sigma$ y cada constante $c \in C$, definimos

$$E_{\tau,c} = \{p \in \mathbb{P} \mid \ulcorner c \notin \bar{\tau} \urcorner \in p \vee \bigvee \rho < \tau \ulcorner c = \bar{\rho} \urcorner \in p\}.$$

Todos estos conjuntos son densos en $\mathbb{P}$. La prueba para el primero de ellos se basa en que la lógica $\epsilon\sigma$ también cumple el teorema de deducción.[7] Así, dado $p \in \mathbb{P}$, o bien $p \cup \{\phi\}$ o bien $p \cup \{\neg\phi\}$ está en $\mathbb{P}$ pues en caso contrario, si llamamos $\psi \equiv \bigvee x(x \neq x)$ a una contradicción, tendríamos que $\Gamma \cup p \cup \{\phi\} \vdash_{\epsilon\sigma} \psi$ y $\Gamma \cup p \cup \{\neg\phi\} \vdash_{\epsilon\sigma} \psi$, luego por el teorema de deducción $\Gamma \cup p \vdash_{\epsilon\sigma} \phi \rightarrow \psi$ y $\Gamma \cup p \vdash_{\epsilon\sigma} \neg\phi \rightarrow \psi$, de donde $\Gamma \cup p \vdash_{\epsilon\sigma} \psi$, pues $\phi \rightarrow \psi, \neg\phi \rightarrow \psi \vdash \psi$, y esto implica trivialmente que $\phi \rightarrow \psi, \neg\phi \rightarrow \psi \vdash_{\epsilon\sigma} \psi$.

Dejamos al lector la comprobación de que $D_{\phi,x}$ es denso.[8]

Para $E_{\tau,c}$ tomamos una condición $p \in \mathbb{P}$. Si existe un ordinal $\rho < \tau$ tal que $\Gamma \cup p \cup \{c = \bar{\rho}\}$ es consistente, entonces p se extiende a un elemento de $E_{\tau,c}$. En caso contrario, para todo $\rho < \tau$ tenemos que $\Gamma \cup p \vdash_{\epsilon\sigma} c \neq \bar{\rho}$, luego $\Gamma \cup p \vdash_{\epsilon\sigma} \bigwedge u \in \bar{\tau}\ c \neq u$, y esto implica que $\Gamma \cup p \vdash_{\epsilon\sigma} c \notin \bar{\tau}$ (pues es una consecuencia lógica), luego $p \cup \{c \notin \bar{\tau}\} \in W_{\tau,c}$.

En total tenemos una familia numerable de conjuntos densos, luego podemos tomar un filtro G que sea $\mathbb{P}$-genérico sobre todos ellos, y llamamos $S_0 = \bigcup\limits_{p \in G} p$.

Tenemos los hechos siguientes:

[7] La prueba de [L 2.8] se generaliza sin dificultad, cambiando la inducción sobre la longitud de una deducción por una inducción sobre la altura del árbol asociado. Sólo hay que añadir un último caso correspondiente a la regla (IG_τ), que es trivial (con la notación allí empleada): si $\beta \equiv \bigwedge u \in \bar{\tau}\phi(u)$ se deduce por (IG_τ), por hipótesis de inducción tenemos que $\Gamma \vdash_{\epsilon\sigma} \alpha \rightarrow \phi(\bar{\rho})$ para todo $\rho < \tau$, lo que nos da una prueba de $\bigwedge u \in \bar{\tau}(\alpha \rightarrow \phi(u))$ (donde u puede tomarse no libre en α) y esto a su vez nos lleva a $\alpha \rightarrow \beta$.

[8] Esto supone generalizar los teoremas [L 4.9 y 4.10] y sólo el primero de ellos requiere añadir un caso a la prueba, lo que no ofrece ninguna dificultad.

a) Para toda sentencia ϕ de $\mathcal{L}'$, o bien $\phi \in S_0$ o bien $\neg\phi \in S_0$, pero no se dan ambos casos a la vez.

   En efecto, la primera parte es consecuencia de que C_ϕ es denso, y la segunda se debe a que en caso contrario ϕ y $\neg\phi$ estarían en una misma condición de G, lo cual es imposible.

b) $\Gamma \subset S_0$.

   En efecto, si $\gamma \in \Gamma \setminus S_0$ entonces $\neg\gamma \in S_0$, luego $\neg\gamma$ estaría en una condición de $\mathbb{P}$, la cual no sería consistente con Γ.

c) Si $\rho < \tau < \sigma$, entonces $\ulcorner \bar{\rho} \in \bar{\tau} \urcorner \in S_0$.

   Pues $\vdash_{\epsilon\sigma} \bar{\rho} \in \bar{\tau}$, luego $\bar{\rho} \notin \bar{\tau}$ no es consistente con Γ y no puede estar en ninguna condición de $\mathbb{P}$.

d) Si $\ulcorner \bigvee x\, \phi(x) \urcorner \in S_0$, entonces existe una constante $c \in C$ tal que $\phi(c) \in S_0$.

   En efecto, existe una condición $p \in G$ que contiene la fórmula indicada, la cual tiene que extenderse a una condición en $G \cap D_{\phi,x}$, la cual tiene que contener a $\phi(c)$, para cierta c.

e) Si $\tau < \sigma$ y $c \in C$ cumplen $\ulcorner c \in \bar{\tau} \urcorner \in S_0$, entonces existe un $\rho < \tau$ tal que $\ulcorner c = \bar{\rho} \urcorner \in S_0$.

   Esto se sigue de la densidad de $E_{\tau,c}$.

f) Si ϕ es una sentencia tal que $S_0 \vdash \phi$, entonces $\phi \in S_0$.

   En efecto, pues en caso contrario $\neg\phi \in S_0$ y existe un número finito de premisas en S_0 que implican ϕ, las cuales estarán en una misma condición $p \in G$, que además podemos exigir que contenga a $\neg\phi$, pero entonces p sería contradictorio, al igual que $\Gamma \cup p$.

Definimos sobre el conjunto C la relación dada por

$$c \sim d \leftrightarrow \ulcorner c = d \urcorner \in S_0.$$

La observación f) implica que se trata de una relación de equivalencia, luego podemos considerar el conjunto cociente $M = C/\sim$, y definir sobre él la relación dada por

$$[c]\, R\, [d] \leftrightarrow \ulcorner c \in d \urcorner \in S_0,$$

que también está bien definida por la propiedad f).

Si k es cualquier constante de $\mathcal{L}'$ (en particular esto vale para las constantes $\bar{\tau}$, con $\tau < \sigma$) por f) tenemos que $\ulcorner \bigvee x\; x = k \urcorner \in S_0$, luego por e) existe una constante $c \in C$ tal que $\ulcorner c = k \urcorner \in S_0$. Además, si $\ulcorner c' = k \urcorner \in S_0$, por f) concluimos que $\ulcorner c = c' \urcorner \in S_0$, luego $[c] = [c']$. Esto nos permite definir $I(k) = [c]$, y así (M, R, I) se convierte en un modelo de $\mathcal{L}'$. Notemos que si $c \in C$ se cumple que $I(c) = [c]$.

Si ϕ es una sentencia de $\mathcal{L}'$, entonces $(M, R, I) \vDash \phi$ si y sólo si $\phi \in S_0$.

En efecto, lo probamos por inducción sobre la longitud de ϕ.

Si $\phi \equiv k = k'$, existen constantes $c, c' \in C$ tales que $\ulcorner k = c \urcorner, \ulcorner k' = c' \urcorner \in S_0$. Entonces

$$(M, R, I) \vDash k = k' \leftrightarrow [c] = [c'] \leftrightarrow \ulcorner c = c' \urcorner \in S_0 \leftrightarrow \ulcorner k = k' \urcorner \in S_0,$$

donde en la última implicación hemos usado la propiedad f).

El caso $\phi \equiv k \in k'$ es análogo.

Si $\phi \equiv \neg\alpha$ entonces

$$(M, R, I) \vDash \phi \leftrightarrow \neg M \vDash \alpha \leftrightarrow \alpha \notin S_0 \leftrightarrow \phi \in S_0,$$

donde la última equivalencia es por la propiedad a).

Si $\phi \equiv \alpha \rightarrow \beta$, entonces

$$(M, R, I) \vDash \phi \leftrightarrow \neg(M, R, I) \vDash \alpha \vee (M, R, I) \vDash \beta$$

$$\leftrightarrow \neg(\alpha \in S_0) \vee \beta \in S_0 \leftrightarrow \phi \in S_0,$$

donde la última equivalencia es por las propiedades a) y f).

Si $\phi \equiv \bigwedge x\, \psi(x)$, entonces

$$(M, R, I) \vDash \phi \leftrightarrow \bigwedge c \in C\ (M, R, I) \vDash \psi[c] \leftrightarrow \bigwedge c \in C\ (M, R, I) \vDash \psi(c)$$

$$\leftrightarrow \bigwedge c \in C\ \psi(c) \in S_0 \leftrightarrow \bigwedge c \in C\ \neg\psi(c) \notin S_0$$

$$\leftrightarrow \bigvee x \neg\psi(x) \notin S_0 \leftrightarrow \neg\bigvee x \neg\psi(x) \in S_0 \leftrightarrow \phi \in S_0,$$

donde hemos usado las propiedades d) y f).

En particular $(M, R, I) \vDash \Gamma$ y, para cada $\rho < \tau < \sigma$, tenemos que $M \vDash \bar{\rho} < \bar{\tau}$. Para comprobar que (M, R, I) es un modelo $\epsilon\sigma$ sólo falta observar que si se cumple $(M, R, I) \vDash [c] \in \bar{\tau}$, entonces $(M, R, I) \vDash c \in \bar{\tau}$, luego $\ulcorner c \in \bar{\tau} \urcorner \in S_0$, luego, por la propiedad e), existe un $\rho < \tau$ tal que $\ulcorner c = \bar{\rho} \urcorner \in S_0$, luego concluimos que $(M, R, I) \vDash [c] = \bar{\rho}$.

Así pues, "olvidando" la interpretación de las constantes de C, tenemos que M es un modelo $\epsilon\sigma$ de Γ. ■

En particular:

Teorema 5.45 *Un conjunto de sentencias $\epsilon\sigma$ es $\epsilon\sigma$-consistente si y sólo si tiene un modelo.*

Teorema 5.46 (de completitud) *Si Γ es un conjunto de sentencias de un lenguaje $\epsilon\sigma$ $\mathcal{L}$ y ϕ es una sentencia verdadera en todos los modelos $\epsilon\sigma$ (numerables) de Γ, entonces $\Gamma \vdash_{\epsilon\sigma} \phi$.*

DEMOSTRACIÓN: Basta tener en cuenta que si $\neg\Gamma \vdash_{\epsilon\sigma} \phi$, entonces $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ es $\epsilon\sigma$-consistente. En efecto, si a partir de este conjunto pudiera probarse una contradicción, como $\psi \equiv \bigvee x(x \neq x)$, por el teorema de deducción (que ya hemos observado que es válido para la lógica $\epsilon\sigma$) tendríamos que $\Gamma \vdash_{\epsilon\sigma} \neg\phi \rightarrow \psi$, pero $\neg\phi \rightarrow \psi \vdash \phi$, luego concluimos que $\Gamma \vdash_{\epsilon\sigma} \phi$. ■

Veamos ahora cómo aplicar estos resultados al estudio de los ordinales admisibles. Necesitamos algunos resultados previos.

Teorema 5.47 *Sea M un modelo transitivo de* KPI *y sea $\sigma = \Omega^M$. Entonces, el conjunto*

$$\{(T, p, \Gamma, \phi) \in M \mid \Gamma \vdash_{(T,p)\epsilon\sigma} \phi\}$$

es Σ_1 sobre M.

DEMOSTRACIÓN: Descompongamos

$$\Gamma \vdash_{(T,p)\epsilon\sigma} \phi \leftrightarrow \Gamma \vdash^*_{(T,p)\epsilon\sigma} \phi \wedge T \text{ está bien fundado},$$

donde $\Gamma \vdash^*_{(T,p)\epsilon\sigma} \phi$ representa la definición de deducción en la que hemos eliminado la exigencia de que el árbol T esté bien fundado. Basta probar separadamente que ambas fórmulas son Σ_1 en M, es decir, que ambas equivalen a fórmulas Σ_1 relativizadas a M. La segunda lo es por el teorema 5.42.

En cuanto a $\Gamma \vdash^*_{(T,p)\epsilon\sigma} \phi$, sería pura rutina escribir esta fórmula explícitamente. Ello supondría incluir en los lugares oportunos las definiciones de fórmula en $\mathcal{L}$ y de sustitución de una variable por una constante, y de axioma lógico, etc. Ahora bien, dicha fórmula tendrá muchas variables ligadas que no admitan una cota natural. Además habrá algunas acotadas por σ (pero es claro que σ no aparecerá más que como cota de ciertas variables) y no podemos mantener esta cota porque $\sigma \notin M$.

Observamos entonces que si $(T, p, \Gamma, \phi) \in M$, entonces $A = \operatorname{ct}(p \cup \Gamma) \in M$ y este conjunto contiene a todos los signos de $\mathcal{L}$ que aparecen en las fórmulas de la deducción y, en particular, a todos los ordinales correspondientes a constantes de $\mathcal{L}$ que aparecen en la deducción (no a todos los signos de $\mathcal{L}$ porque son una clase propia en M). Además, T puede verse como un árbol $T \subset A^{<\omega}$.

Es claro entonces que todas las variables que en la fórmula $\Gamma \vdash^*_{(T,p)\epsilon\sigma} \phi$ no tienen una cota natural, cuando la fórmula se aplica al (T, p, Γ, ϕ) considerado, varían en el conjunto

$$B \in \omega \cup A \cup (A^{<\omega}) \cup (A^{<\omega})^{<\omega} \in M.$$

Por ejemplo, para afirmar que $p(t)$ es una fórmula de $\mathcal{L}$ necesitamos afirmar la existencia de una sucesión de subfórmulas que justifique que $p(t)$ está construida de acuerdo con la definición recurrente de "fórmula", y dicha sucesión será un elemento de $(A^{<\omega})^{<\omega}$.

Por lo tanto, para obtener una fórmula Σ_1^M basta acotar todas las variables por B (y, en el caso de las variables acotadas por σ, sustituir cada $\bigwedge\alpha < \sigma$ por $\bigwedge\alpha \in B(\alpha \text{ es un ordinal} \rightarrow \cdots)$, que es de tipo Δ_0 y no menciona a σ) y anteponer un $\bigvee B \in M$. ■

Teorema 5.48 *Sea M un modelo transitivo de* KPI *y sea $\sigma = \Omega^M$. Supongamos que $\Gamma \vdash_{\epsilon\sigma} \phi$ y que $\Gamma \subset M$ es Σ_1 sobre M. Entonces existen $\Gamma', T, p \in M$ tales que $\Gamma' \subset \Gamma$ y $\Gamma' \vdash_{(T,p)\epsilon\sigma} \phi$.*

DEMOSTRACIÓN: Por inducción sobre la altura de una deducción de ϕ a partir de Γ, es decir, suponemos que el teorema es cierto para fórmulas deducibles con árboles de altura menor que $\|T_0\|$ y que ϕ tiene una deducción (T_0, p_0), donde $T_0 \subset X^{<\omega}$. Distinguimos varios casos según la definición de deducción:

Si $\varnothing$ es un nodo terminal de T_0, entonces $T_0 = \{\varnothing\}$, $p_0 = \{(\varnothing, \phi)\}$ y ϕ es un axioma lógico o bien $\phi \in \Gamma$, o bien $\bar{\rho} \in \bar{\tau}$. Entonces $T_0, p_0 \in M$ y basta tomar $\Gamma' = \varnothing$ o $\Gamma' = \{\phi\}$, según el caso, y se cumple que $\Gamma' \in M$.

Si $\varnothing$ no es un nodo terminal, se pueden dar tres casos:

(MP) Si existen $x, y \in X$ tales que $t_1 = \{(0, x)\}, t_2 = \{(0, y)\}$ cumplen $t_1, t_2 \in T_0$, $p_0(t_1) = p_0(t_2) \to \phi$, entonces es fácil obtener una deducción de $p_0(t_1)$ sobre el árbol T/t_1 y otra de $p_0(t_2)$ sobre T/t_2, luego, por hipótesis de inducción existen $T_1, p_1, T_2, p_2, \Gamma'_1, \Gamma'_2 \in M$ tales que $\Gamma'_i \subset \Gamma$ y

$$\Gamma'_1 \vdash_{(T_1,p_1)\epsilon\sigma} p_0(t_1), \qquad \Gamma'_2 \vdash_{(T_2,p_2)\epsilon\sigma} p_0(t_2).$$

Ahora se trata de ver que podemos unir estas dos deducciones en una sola sin salirnos de M. En efecto, tomamos $X' = \mathrm{ct}(T_1 \cup T_2) \cup \{1, 2\} \in M$ y, por Δ_0-especificación, para $i = 1, 2$,

$$T'_i = \{s \in X'^{<\omega} \mid \bigvee t \in T_i \; s = i^\frown t\} \in M.$$

Igualmente

$$p'_i = \{(s, \alpha) \in T'_i \times \mathrm{ct}(p_i) \mid \bigvee t \in T_i (s = i^\frown t \land \alpha = p_i(t))\} \in M,$$

luego $T' = \{\varnothing\} \cup T'_1 \cup T'_2$, $p' = \{(\varnothing, \phi)\} \cup p'_1 \cup p'_2$ y $\Gamma' = \Gamma'_1 \cup \Gamma'_2$ están en M y cumplen lo pedido.

El caso **(IG)** es más simple que el anterior. Pasemos a **(IG$_\tau$)**, es decir, suponemos que $\phi \equiv \bigwedge u \in \bar{\tau}\, \psi(u)$ y que

$$\bigwedge \rho < \tau \bigvee x \in X(\{(0, x)\} \in T_0 \land p_0(\{(0, x)\}) = \psi(\bar{\rho})).$$

Entonces podemos construir una deducción de $\psi(\bar{\rho})$ sobre $T/\{(0, x)\}$, cuya altura es menor que $\|T\|$, luego por hipótesis de inducción

$$\bigwedge \rho < \tau \bigvee T p \Gamma' \in M(\Gamma' \subset \Gamma \land \Gamma' \vdash_{(T,p)\epsilon\sigma} \psi(\bar{\rho})).$$

Ahora usamos que la fórmula $\Gamma' \subset \Gamma$ es Σ_1^M por la hipótesis sobre Γ, mientras que la segunda parte de la conjunción lo es por el teorema anterior. Por lo tanto, la afirmación precedente es de la forma

$$M \vDash \forall \rho < [\tau] \bigvee T p \Gamma'(\cdots)$$

donde la fórmula entre paréntesis es Σ_1. Ahora podemos aplicar el principio de Σ_1-recolección, según el cual existe un conjunto $A \in M$ cuyos elementos son ternas (T, p, Γ'), cada una de las cuales demuestra una fórmula $\psi(\bar{\rho})$ (y para cada ρ hay al menos una terna en A que demuestra $\psi(\bar{\rho})$). Tomamos $X' = A \cup \mathrm{ct}(A) \in M$ y definimos

$$T' = \{\varnothing\} \cup \{t \in X'^{<\omega} \mid \bigvee x \in A \bigvee Tp\Gamma(x = (T, p, \Gamma) \land \bigvee s \in T\ t = x^\frown s)\},$$

$$p' = \{(\varnothing, \phi)\} \cup \{(t, \alpha) \in T' \times X' \mid \bigvee x \in A$$
$$\bigvee Tp\Gamma(x = (T, p, \Gamma) \land \bigvee s \in T(t = x^\frown s \land \alpha = p(s)))\},$$
$$\Gamma' = \{\chi \in X' \mid \bigvee x \in A \bigvee Tp\Gamma(x = (T, p, \Gamma) \land \chi \in \Gamma)\}.$$

Es claro que $T', p', \Gamma' \in M$ (pues están definidos por Δ_0-especificación) y cumplen lo pedido. ■

Consideremos el orden siguiente definido sobre pares de sucesiones finitas de ordinales: $s \preceq t$ si $\ell(s) < \ell(t)$, o bien $\ell(s) = \ell(t)$ y además $\max \mathcal{R}s < \max \mathcal{R}t$, o bien $\ell(s) = \ell(t)$, $\max \mathcal{R}s = \max \mathcal{R}t$ y $s \leq t$ respecto al orden lexicográfico. Claramente se trata de un buen orden y si $\ell(t) = n$ y $\max \mathcal{R}t = \alpha$, entonces

$$A_t = \{s \mid s \preceq t\} \subset (\alpha + 1)^{<n+1}$$

es un conjunto. Más aún, si σ es un ordinal admisible y $t \in L_\sigma$ es claro que $A_t \in L_\sigma$ y también pertenece a L_σ la restricción de $\preceq$ a A_t. Como es un buen orden, el teorema 5.29 nos da que $\alpha = \mathrm{ord}(A_t, \preceq) \in L_\sigma$, y también está en L_σ la semejanza correspondiente. Por lo tanto, la fórmula

$$\alpha = \langle t \rangle \equiv t \in \Omega^{<\omega} \land \bigvee f\ f : (A_t, \preceq) \longrightarrow \alpha \text{ semejanza}$$

es absoluta para L_σ (es fácil ver que es Δ_1).

En particular, la asignación $\phi \mapsto \langle \phi \rangle$ asigna un ordinal $< \sigma$ a cada fórmula $\phi \in \mathrm{Form}(\mathcal{L}_{\epsilon\sigma})$. Definimos

$$V_\sigma = \{\alpha < \sigma \mid \bigvee \phi \in \mathrm{Sent}_{\Sigma_1}(\mathcal{L}_{\epsilon\sigma})(\alpha = \langle \phi \rangle \land L_\sigma \vDash \phi)\}.$$

Aunque no vamos a necesitar este hecho, no es difícil probar que V_σ es Σ_1 sobre L_σ. Lo que necesitamos en realidad es la versión siguiente del teorema de Tarski de indefinibilidad de la verdad:

Teorema 5.49 *Si σ es un ordinal admisible numerable, el conjunto V_σ no es Π_1 sobre L_σ.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que existe una fórmula $\psi(x)$ (del lenguaje de la teoría de conjuntos) de tipo Π_1 de modo que, para cada $\tau < \sigma$

$$\tau \in V_\sigma \leftrightarrow L_\sigma \vDash \psi(\tau).$$

Entonces consideramos la fórmula $\theta(x)$ (del lenguaje de la teoría de conjuntos) dada por

$$\theta(x) \equiv x \in \Omega \land \bigvee st \in \mathrm{Form}_{\Sigma_1}(\mathcal{L}_{\epsilon\sigma})(x = \langle s \rangle \land t = \mathsf{S}^{\bar{x}}_{\ulcorner x \urcorner} s$$
$$\land \bigvee y \in \Omega(y = \langle t \rangle \land \neg\psi(y)).$$

No es difícil comprobar que esta fórmula es Σ_1 sobre L_σ. Con más detalle, es de la forma

$$x \in \Omega \wedge \bigvee styfg(s, t \in \mathrm{Form}(\mathcal{L}_{\epsilon\sigma}) \wedge f : (A_s, \preceq) \longrightarrow x \text{ semejanza}$$

$$\wedge\, y \in \Omega \wedge \neg\psi(y) \wedge g : (A_t, \preceq) \longrightarrow y \text{ semejanza} \wedge \cdots)$$

donde $s \in \mathrm{Form}(\mathcal{L}_{\epsilon\sigma})$, al igual que la parte que corresponde a los puntos suspensivos, es Σ_1 sobre L_σ por la misma razón que en el teorema 5.47: Todas las variables que no admiten una cota natural pueden acotarse por una variable que puede tomar el valor $A \cup A^{<\omega} \cup (A^{<\omega})^{<\omega} \in L_\sigma$, donde $A = \omega \cup \{x, \bar{x}\} \cup \mathrm{ct}(s \cup t)$.

Podemos ver a $\theta(x)$ como una fórmula Σ_1 de $\mathcal{L}_{\epsilon\sigma}$. Sea $\tau = \langle\theta(x)\rangle$, con lo que $\theta(\bar{\tau})$ es una sentencia Σ_1 de $\mathcal{L}_{\epsilon\sigma}$. Sea $\rho = \langle\theta(\bar{\tau})\rangle$. Entonces

$$L_\sigma \vDash \theta(\bar{\tau}) \leftrightarrow L_\sigma \vDash \neg\psi(\rho) \leftrightarrow \rho \notin V_\sigma \leftrightarrow \neg L_\sigma \vDash \theta(\bar{\tau}),$$

con lo que llegamos a una contradicción. ■

Teorema 5.50 *Sea σ un ordinal admisible numerable, sea $\mathcal{L}$ un lenguaje $\epsilon\sigma$ y sea Γ un conjunto $\epsilon\sigma$-consistente de sentencias de $\mathcal{L}$ que extienda a* KPI *y sea Σ_1 sobre L_σ. Entonces Γ admite un modelo $\epsilon\sigma$ M tal que $\Omega^M_{\mathrm{bf}} = \sigma$.*

Demostración: Usamos el argumento del teorema 5.44, pero añadimos una familia más de conjuntos densos. Concretamente, para cada constante $c \in C$ definimos

$$F_c = \{p \in \mathbb{P} \mid \bigvee \tau < \sigma\,((\tau \in V_\sigma \wedge \ulcorner\bar{\tau} \notin c\urcorner \in p) \vee (\tau \notin V_\sigma \wedge \ulcorner\bar{\tau} \in c\urcorner \in p))\}.$$

Vamos a probar que efectivamente F_c es denso en $\mathbb{P}$. En caso de no serlo, existe una condición $q \in \mathbb{P}$ que no admite extensiones a F_c. Como $\Gamma \cup q$ es $\epsilon\sigma$-consistente, tiene un modelo $\epsilon\sigma$ M. Si $\tau \in V_\sigma$, tiene que cumplirse que $M \vDash \bar{\tau} \in c$, pues en caso contrario $q \cup \{\bar{\tau} \notin c\}$ sería una extensión de q a F_c. Similarmente, si $\tau \notin V_\sigma$ tiene que ser $M \vDash \bar{\tau} \notin c$. Como esto vale para todo modelo $\epsilon\sigma$, el teorema de completitud 5.46 nos da que, para todo $\tau < \sigma$, se cumple

$$\tau \in V_\sigma \leftrightarrow \Gamma \cup q \vdash_{\epsilon\sigma} \bar{\tau} \in c, \qquad \tau \notin V_\sigma \leftrightarrow \Gamma \cup q \vdash_{\epsilon\sigma} \bar{\tau} \notin c.$$

El teorema 5.48 implica a su vez que

$$\tau \notin V_\sigma \leftrightarrow \bigvee \Gamma' T p \in L_\sigma\ (\Gamma' \subset \Gamma \cup q \wedge \Gamma' \vdash_{(T,p)\epsilon\sigma} \bar{\tau} \notin c).$$

La fórmula de la derecha es Σ_1 sobre L_σ (por 5.47), pero no podemos decir que hemos llegado a una contradicción con el teorema 5.49 porque éste no contempla la presencia del parámetro q. Observamos entonces que q es un conjunto finito de sentencias de $\mathcal{L}$, cada una de las cuales puede codificarse por un ordinal $< \sigma$. Estos ordinales forman una sucesión finita de ordinales que a su vez puede ser codificada por un ordinal $\delta < \sigma$.

Consideramos la fórmula:

$$\psi(\tau,\delta) \equiv \neg\bigvee snfghq(n\in\omega \wedge s\in\Omega^n \wedge f:(A_s,\preceq)\longrightarrow \delta \text{ semejanza} \wedge \mathcal{D}g = n$$
$$\wedge\ \mathcal{D}h = n \wedge \bigwedge i\in n(g(i)\in \mathrm{Form}(\mathcal{L}_{\epsilon\sigma}) \wedge h(i):(A_{g(i)},\preceq)\longrightarrow s(i) \text{ semejanza})$$
$$\wedge\ q = \mathcal{R}g \wedge \bigvee \Gamma' Tp\ (\Gamma'\subset \Gamma\cup q \wedge \Gamma' \vdash_{(T,p)\epsilon\sigma} \bar{\tau}\notin c)).$$

Se trata de una fórmula Π_1 (del lenguaje de la teoría de conjuntos) tal que,[9] para todo $\tau<\sigma$,

$$\tau\in V_\sigma \leftrightarrow L_\sigma \vDash \psi(\tau,\delta).$$

Ahora, la prueba del teorema 5.49 se generaliza trivialmente para admitir el parámetro δ en la fórmula ψ, sin más que definir

$$\theta(x,d) \equiv x\in\Omega \wedge \bigvee st\in \mathrm{Form}_{\Sigma_1}(\mathcal{L}_{\epsilon\sigma})(x=\langle s\rangle \wedge t = \mathrm{S}^{\bar{x}}_{\ulcorner x\urcorner}\mathrm{S}^{\bar{d}}_{\ulcorner d\urcorner} s$$
$$\wedge \bigvee y\in\Omega(y=\langle t\rangle \wedge \neg\psi(y,d)),$$

y tomar $\tau = \langle\theta(x,d)\rangle$, $\rho = \big\langle\theta(\bar{\tau},\bar{\delta})\big\rangle$.

La contradicción final es ahora:

$$L_\sigma \vDash \theta(\bar{\tau},\bar{\delta}) \leftrightarrow L_\sigma\vDash \neg\psi(\rho,\delta) \leftrightarrow \rho\notin V_\sigma \leftrightarrow \neg L_\sigma \vDash \theta(\bar{\tau},\bar{\delta}).$$

Esto termina la prueba de que V_c es denso en $\mathbb{P}$. Ahora el teorema 5.44 nos da un modelo $\epsilon\sigma$ M de Γ del que ahora podemos probar además que no existe ningún $x\in M$ tal que

$$\tau\in V_\sigma \leftrightarrow M\vDash \bar{\tau}\in[x].$$

En efecto, dicho x sería de la forma $x=[c]$, para cierta constante $c\in C$, pero existe un $p\in G\cap F_c$, lo que a su vez se traduce en que existe un $\tau<\sigma$ tal que, o bien $\tau\in V_\sigma$ pero $M\vDash\bar{\tau}\notin c$ o viceversa.

En particular, ningún $x\in M_{\mathrm{bf}}$ cumple esto mismo, lo cual equivale a que $V_\sigma\notin M_{\mathrm{bf}}$. Esto implica a su vez que $\sigma\notin M_{\mathrm{bf}}$, pues en caso contrario también tendríamos que $L_\sigma\in M_{\mathrm{bf}}$ y V_σ puede construirse[10] en KPI a partir de L_σ.

Puesto que todo modelo $\epsilon\sigma$ cumple $\sigma\leq\Omega^M_{\mathrm{bf}}$, podemos concluir que $\Omega^M_{\mathrm{bf}}=\sigma$. ■

Notemos que KPI es Σ_1 sobre cualquier modelo transitivo de KPI, pues es una teoría recursiva y, según el teorema 5.25 el conjunto de números de Gödel de sus axiomas puede ser descrito con una fórmula Δ_1 relativizada al modelo (una fórmula que empiece por $\bigvee wsp(w=\omega\wedge f=\sigma\wedge p=\pi\wedge\cdots)$ o por $\bigwedge wsp(w=\omega\wedge f=\sigma\wedge p=\pi\rightarrow\cdots))$.

Como aplicación generalizamos el teorema 5.35 a):

[9] Aquí estamos usando que si q es un conjunto finito de fórmulas de $L_{\sigma\epsilon}$, cualquier biyección $g:n\longrightarrow q$ está en L_σ (porque L_σ es cerrado para subconjuntos finitos), al igual que lo están (por la misma razón) la sucesión s de códigos de las fórmulas $g(i)$ y la aplicación h que a cada $i<n$ le asigna la semejanza correspondiente $h(i):(A_{g(i)},\preceq)\longrightarrow s(i)$.

[10] La fórmula $M\vDash\phi$ puede definirse en KPI y es Δ_1. En la sección 12.2 de [L] está probado para lenguajes formales con signos contenidos en ω, pero el argumento es válido sin más que cambios triviales cuando el conjunto de signos está contenido en un ordinal σ. Así pues, V_σ puede definirse por Δ_1-especificación a partir de L_σ.

Teorema 5.51 *Los ordinales admisibles numerables mayores que ω son los ordinales ω_1^a, para cada $a \in \mathcal{N}$.*

DEMOSTRACIÓN: En la observación tras el teorema 5.26 hemos probado que existe una fórmula $\psi(x, a)$ tal que, para todo modelo transitivo M de KPI y todos los $x, a \in \mathcal{N} \cap M$, se cumple

$$x \text{ es recursivo en } a \leftrightarrow M \vDash \psi[x, a].$$

Sea ahora $\sigma > \omega$ un ordinal admisible y $\mathcal{L}$ un lenguaje $\epsilon\sigma$ que posea una constante $\bar{a}$. Consideramos el conjunto Γ de sentencias de $\mathcal{L}$ dado por:

a) Los axiomas de KPI.

b) La sentencia $\bar{a} : \omega \longrightarrow \omega$.

c) Para cada $\tau < \sigma$, la sentencia

$$\bar{\tau} < \omega_1^{\bar{a}} \equiv \bigvee x f(x : \omega \longrightarrow \omega \land \psi(x, \bar{a}) \land f : (C_x, \leq_x) \longrightarrow \bar{\tau} \text{ semejanza}).$$

Claramente Γ es Σ_1 sobre L_σ, y es $\epsilon\sigma$-consistente, pues tiene por modelo $\epsilon\sigma$ a $H(\aleph_1)$. (Basta interpretar $\bar{a}$ como un elemento $a \in \mathcal{N}$ tal que $\sigma < \omega_1^a$.) El teorema anterior nos da entonces un modelo M tal que $\Omega_{\mathrm{bf}}^M = \sigma$. Es obvio que $M(\bar{a}) \in M_{\mathrm{bf}}$ (porque $\omega \in M_{\mathrm{bf}}$), luego podemos llamar $a \in \mathcal{N}$ al objeto de M_{bf} que se corresponde con $M(\bar{a})$.

Similarmente, para cada $\tau < \sigma$, las funciones $x, f \in M$ que existen porque $M \vDash \bar{\tau} < \omega_1^{\bar{a}}$ están en M_{bf}, y es claro entonces que la sentencia $\bar{\tau} < \omega_1^{\bar{a}}$ es absoluta para $M_{\mathrm{bf}} - M$, luego resulta que (cambiando x y f por sus colapsos en M_{bf}) tenemos que $x \in \mathcal{N}$ y $f : (C_x, \leq_x) \longrightarrow \tau$ semejanza, lo cual implica a su vez que $x \in \mathrm{BO}$ y que $\tau = \|x\|$ con x recursivo en a, es decir que $\tau < \omega_1^a$. Por lo tanto, $\sigma \leq \omega_1^a$.

Por otra parte, el teorema 5.30 nos da que $\omega_1^a \subset M_{\mathrm{bf}}$, luego $\sigma = \omega_1^a$. ■

Nota Terminamos observando que podemos generalizar ligeramente el teorema 5.50: cuando $\sigma = \omega_1^a$, basta exigir que Γ sea Σ_1 sobre $L_{\omega_1^a}[a]$ en lugar de sobre $L_{\omega_1^a}$. Para ello basta considerar el conjunto V'_σ definido como V_σ pero con $L_{\omega_1^a}[a]$ en lugar de $L_{\omega_1^a}$. La prueba del teorema 5.50 vale sin más que cambiar cada L_σ por $L_\sigma[a]$ (pues ambos son modelos de KPI, y esto es lo único que se usa).

Capítulo VI

Pruebas de consistencia

En los capítulos precedentes hemos probado muchos resultados sobre las primeras clases de la jerarquía de Lusin o de Kleene, pero apenas nada sobre las siguientes. Por ejemplo, sabemos que los conjuntos de $\mathbb{R}$ de tipo $\mathbf{\Sigma}^1_1$ y $\mathbf{\Pi}^1_1$ son medibles Lebesgue, pero no sabemos si esto es cierto también para los conjuntos $\mathbf{\Sigma}^1_2$ y $\mathbf{\Pi}^1_2$, o siquiera para los $\mathbf{\Delta}^1_2$.

Esto se debe a que los análogos para clases superiores de éste y de otros resultados que hemos obtenido son indecidibles en ZFC. Por ejemplo, en este capítulo vamos a probar que si $V = L$ existe un subconjunto $\mathbf{\Delta}^1_2$ de $\mathbb{R}$ que no es medible Lebesgue, mientras que el axioma de Martin implica que todo los conjuntos $\mathbf{\Sigma}^1_2$ y $\mathbf{\Pi}^1_2$ son universalmente medibles.

Más en general, aquí vamos a presentar algunos resultados sobre modelos transitivos de ZFC relacionados con la teoría descriptiva de conjuntos que nos permitirán aplicar las técnicas expuestas en [PC] (en este capítulo y en capítulos posteriores) para dar pruebas de consistencia en este contexto.

6.1 La complejidad del orden constructible

Varios de los resultados que vamos a obtener en este capítulo se apoyan en el análisis que vamos a hacer ahora de la complejidad del buen orden constructible respecto de la jerarquía de Lusin.

Recordemos [PC 2.27] que $H(\aleph_1)$ es el conjunto de todos los conjuntos hereditariamente numerables, es decir, los conjuntos cuya clausura transitiva es numerable. El resultado básico de esta sección es el teorema siguiente:

Teorema 6.1 *Sea $a \in \mathcal{N}$ y $A \subset \mathcal{N}$ un conjunto definido por una fórmula $\Sigma_1^{H(\aleph_1)}(a)$, es decir,*

$$A = \{x \in \mathcal{N} \mid \bigvee y \in H(\aleph_1)\ \phi(x, y, a)\},$$

donde $\phi(x, y, a)$ es una fórmula (metamatemática) Δ_0. Entonces[1] *A es $\Sigma^1_2(a)$.*

[1]El teorema también es cierto si $A = \{x \in \mathcal{N} \mid \bigvee y\ \phi(x, y, a)\}$, pero entonces requiere AE.

Demostración: La clave está en que $x \in A$ equivale a

$$\bigvee M(M \text{ transitivo numerable} \wedge x \in M \wedge a \in M \wedge \bigvee y \in M\ \phi(x, y, a)).$$

En efecto, si existe M, entonces $M \subset H(\aleph_1)$ y se cumple que $x \in A$. Recíprocamente, si $x \in A$, sea $y \in H(\aleph_1)$ según la definición. Como también $x, a \in H(\aleph_1)$, es claro que $M = \mathrm{ct}(\{x, y, a\} \cup \{x, y, a\}$ es un conjunto transitivo numerable y cumple la condición.[2]

Ahora recordamos que las fórmulas Δ_0 son absolutas para conjuntos transitivos, luego

$$\bigvee y \in M\ \phi(x, y, a) \leftrightarrow (\bigvee y\ \phi(x, y, a))^M \leftrightarrow M \vDash \bigvee y\ \ulcorner\phi\urcorner[x, a],$$

donde $\ulcorner\phi\urcorner \in \mathrm{Form}(\mathcal{L})$ es la fórmula matemática que se corresponde con la fórmula metamatemática ϕ. (Técnicamente, $\ulcorner\phi\urcorner$ es un designador del lenguaje (metamatemático) de la teoría de conjuntos.) A través de una biyección entre M y ω podemos definir un $z \in \mathcal{N}$ tal que M sea el colapso transitivo de (ω, E_z). Por lo tanto, $x \in A$ equivale a

$$\bigvee z \bigvee mn(z \in \mathrm{BF} \wedge x \in M_z \wedge m = \hat{x} \wedge a \in M_z \wedge n = \hat{a} \wedge z \vDash (\bigvee y\ \ulcorner\phi\urcorner)[m, n]).$$

Así pues, el conjunto R de los $(x, a, z, m, n) \in \mathcal{N} \times \mathcal{N} \times \mathcal{N} \times \omega \times \omega$ que cumplen la condición que sigue a los cuantificadores es intersección de dos conjuntos Π^1_1 (por 4.63) y un conjunto Δ^1_1 (por 4.60), luego es Π^1_1, luego $\bigvee mn\, R$ también es Π^1_1 y $B = \bigvee z \bigvee mn\, R$ es Σ^1_2. Finalmente, el conjunto

$$A = \{x \in \mathcal{N} \mid (x, a) \in B\}$$

es $\Sigma^1_2(a)$. ■

Recordemos [PC 3.7] que existe una fórmula (metamatemática) Δ_0, digamos $\phi(f, Y, \alpha, a)$, tal que para cualquier conjunto a (aunque aquí nos interesa únicamente el caso $a \in \mathcal{N}$) y para todo ordinal numerable α se cumple

$$Y = L_\alpha[a] \leftrightarrow \bigvee f\ \phi(f, Y, \alpha, a) \leftrightarrow \bigvee f \in L_{\omega_1}[a]\ \phi(f, Y, \alpha, a).$$

Combinando este hecho con el teorema anterior obtenemos:

Teorema 6.2 (Gödel) *Si $a \in \mathcal{N}$, entonces $\mathcal{N}^{L[a]}$ es un conjunto $\Sigma^1_2(a)$.*

Demostración: Observemos que, por [PC 3.28],

$$\mathcal{N}^{L[a]} = \mathcal{N} \cap L[a] \subset (\mathcal{P}L_\omega[a])^{L[a]} \subset L_{\omega_1}[a].$$

Por otro lado, si $\alpha < \omega_1$, entonces $L_\alpha[a]$ es un conjunto transitivo numerable, luego $L_{\omega_1}[a] \subset H(\aleph_1)$. Esto implica que

$$Y = L_\alpha[a] \leftrightarrow \bigvee f \in H(\aleph_1)\ \phi(f, Y, \alpha, a),$$

[2]Si no exigimos que $y \in H(\aleph_1)$ podemos llegar a la misma conclusión usando el teorema de reflexión, pero entonces usamos AE.

luego, para todo $x \in \mathcal{N} \subset H(\aleph_1)$,

$$x \in \mathcal{N}^{L[a]} \leftrightarrow \bigvee Y f \alpha \in H(\aleph_1)\ (x \in Y \land \phi(f, Y, \alpha, a))$$
$$\leftrightarrow \bigvee y \in H(\aleph_1)(\bigvee U \in y \bigvee Y f \alpha \in U(y = (Y, f, \alpha) \land x \in Y \land \phi(f, Y, \alpha, a)))$$
$$\leftrightarrow \bigvee y \in H(\aleph_1)\ \psi(x, y, a),$$

donde la fórmula ψ es Δ_0. En definitiva,

$$\mathcal{N}^{L[a]} = \{x \in \mathcal{N} \mid \bigvee y \in H(\aleph_1)\ \psi(x, y, a)\},$$

luego $\mathcal{N}^{L[a]}$ es $\Sigma^1_2(a)$ por el teorema anterior. ■

Más aún, en $L[a]$ tenemos definido el buen orden $\trianglelefteq^a$, que es definible en las mismas condiciones que $L[a]$, es decir, existe una fórmula Δ_0, digamos $\psi(f, Y, \alpha, a)$, tal que, para todo $\alpha < \omega_1$,

$$Y = \trianglelefteq^a_\alpha \leftrightarrow \bigvee f\ \psi(f, Y, \alpha, a) \leftrightarrow \bigvee f \in L_{\omega_1}[a]\ \psi(f, Y, \alpha, a),$$

donde $\trianglelefteq^a_\alpha$ es la restricción de $\trianglelefteq^a$ a $L_\alpha[a]$, que es una sección inicial de $\trianglelefteq^a$.

Definición 6.3 Si $a \in \mathcal{N}$, definimos

$$\trianglelefteq_a = \{(x, y) \in \mathcal{N}^{L[a]} \times \mathcal{N}^{L[a]} \mid x \trianglelefteq^a y\},$$

que es un buen orden en $\mathcal{N}^{L[a]}$.

Teorema 6.4 (Gödel) *Si $a \in \mathcal{N}$, el conjunto $\trianglelefteq_a$ es $\Sigma^1_2(a)$.*

Demostración: La prueba es análoga a la del teorema anterior. Como el teorema 6.1 está enunciado para $\mathcal{N}$ en lugar de $\mathcal{N}\times\mathcal{N}$, fijamos un homeomorfismo $h : \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{N}\times\mathcal{N}$, por ejemplo el dado por $h(z) = (z_0, z_1)$, donde $z_i(n) = z(2n+i)$, que claramente es Δ^1_1, y así basta probar que $h^{-1}[\trianglelefteq_a]$ es $\Sigma^1_2(a)$ en $\mathcal{N}$.

Al igual que en la prueba del teorema anterior, tenemos que, para todo ordinal numerable α,

$$Y = \trianglelefteq^a_\alpha \leftrightarrow \bigvee f \in H(\aleph_1)\ \psi(f, Y, \alpha, a),$$

luego, para cada $z \in \mathcal{N}$,

$$z \in\ h^{-1}[\trianglelefteq_a] \leftrightarrow \bigvee Y f \alpha x y \in H(\aleph_1)(x, y \in \mathcal{N} \land \bigwedge n \in \omega(x(n) = z(2n)$$
$$\land\, y(n) = z(2n+1)) \land (x, y) \in Y \land \psi(f, Y, \alpha, a)),$$

y la fórmula de la derecha se transforma fácilmente en una fórmula en las condiciones del teorema 6.1, lo que implica que $h^{-1}[\trianglelefteq_a]$ es $\Sigma^1_2(a)$ y, consecuentemente, $\trianglelefteq_a$ también lo es. ■

Observemos que, como los conjuntos $L_\alpha[a]$ son numerables y son segmentos iniciales de $\trianglelefteq^a$, todos los segmentos iniciales de $(\mathcal{N}^{L[a]}, \trianglelefteq_a)$ son numerables, por lo que $\operatorname{ord}(\mathcal{N}^{L[a]}, \trianglelefteq_a) = \omega_1^{L[a]} \leq \omega_1$.

Una propiedad técnica de gran importancia es que los segmentos iniciales de la relación $\trianglelefteq_a$ pueden codificarse mediante un conjunto $\Sigma^1_2(a)$:

Teorema 6.5 (Addison) *Para cada $a \in \mathcal{N}$, la relación*

$$\mathrm{SI}(x,y) \leftrightarrow y \in \mathcal{N}^{L[a]} \wedge \{x_n \mid n \in \omega\} = \{z \in \mathcal{N}^{L[a]} \mid z \trianglelefteq_a y\}$$

es $\Delta^1_2(a)$ en $\mathcal{N} \times \mathcal{N}$.

Demostración: Aquí hay que entender que $\{x_n\}_{n\in\omega}$ es la imagen de x por el homeomorfismo canónico $\mathcal{N} \cong \mathcal{N}^\omega$. Ahora observamos que

$$\mathrm{SI}(x,y) \leftrightarrow \bigvee \alpha YZ \in H(\aleph_1)(Y = L_\alpha[a] \wedge Z \ = \trianglelefteq^a_\alpha \wedge y \in Y \wedge$$

$$\bigwedge z \in Y(z \in \mathcal{N} \wedge (z,y) \in Z \leftrightarrow \bigvee n \in \omega\ z = x_n))$$

$$\leftrightarrow \bigvee \alpha YZfg \in H(\aleph_1)(\phi(f, Y\alpha, a) \wedge \psi(g, Z, \alpha, a) \wedge y \in Y \wedge$$

$$\bigwedge z \in Y(z \in \mathcal{N} \wedge (z,y) \in Z \leftrightarrow \bigvee n \in \omega\ z = x_n)).$$

A partir de esta expresión, razonando análogamente a como hemos hecho en los dos teoremas precedentes se concluye que $\mathrm{SI}(x,y)$ es $\Sigma^1_2(a)$. Que su negación es también $\Sigma^1_2(a)$ es trivial. Basta tener en cuenta la equivalencia:

$$\neg\mathrm{SI}(x,y) \leftrightarrow \bigvee z \in \mathcal{N} \bigvee n \in \omega\ (z = x_n \wedge y \triangleleft_a z) \vee$$

$$\bigvee z \in \mathcal{N}(z \trianglelefteq_a y \wedge \bigwedge n \in \omega \bigvee w \in \mathcal{N}(w = x_n \wedge z \neq w)).$$

■

Esto se traduce en la propiedad siguiente del buen orden constructible:

Teorema 6.6 *Si $a \in \mathcal{N}$ y $P \subset \mathcal{N} \times \mathcal{N}$ es un conjunto $\Sigma^1_n(a)$, para $n \geq 2$, entonces los conjuntos dados por*

$$P_1(x,y) \leftrightarrow x \in \mathcal{N}^{L[a]} \wedge \bigvee z \trianglelefteq_a x\ P(z,y),$$

$$P_2(x,y) \leftrightarrow x \in \mathcal{N}^{L[a]} \wedge \bigwedge z \trianglelefteq_a x\ P(z,y),$$

son también $\Sigma^1_n(a)$.

Demostración: El caso de P_1 es trivial:

$$P_1(x,y) \leftrightarrow \bigvee z \in \mathcal{N}(z \trianglelefteq_a x \wedge P(z,y)).$$

Para P_2 necesitamos el teorema anterior:

$$P_2(x,y) \leftrightarrow \bigvee w \in \mathcal{N}(\mathrm{SI}(w,x) \wedge \bigwedge n \in \omega \bigvee z \in \mathcal{N}(z = w_n \wedge P(z,y))).$$

■

6.2 Consecuencias de V = L

En realidad, las pruebas de consistencia que vamos a presentar no requieren la hipótesis $V = L$ o, más en general, $V = L[a]$, sino que $\mathcal{N} \subset L[a]$ o, equivalentemente, $\mathcal{N} = \mathcal{N}^{L[a]}$, será suficiente. En lo sucesivo, siempre que demostremos una fórmula $\phi(a)$ con la indicación $\mathcal{N} \subset L[a]$ habrá que entender que estamos demostrando la sentencia

$$\bigwedge a \in \mathcal{N}\ (\mathcal{N} \subset L[a] \to \phi(a))$$

Naturalmente, todo resultado de este tipo puede particularizarse tomando, por ejemplo, una sucesión constante a, y entonces $L[a] = L$ y todo conjunto $\Sigma^1_n(a)$, $\Pi^1_n(a)$ o $\Delta^1_n(a)$ es simplemente Σ^1_n, Π^1_n o Δ^1_n.

Empezamos probando que si $V = L$ los espacios polacos admiten buenos órdenes Δ^1_2 que, según las observaciones tras el teorema 2.13, es el mejor resultado que se puede esperar en esta dirección.

Teorema 6.7 ($\mathcal{N} \subset L[a]$) *La relación $\trianglelefteq_a$ es un buen orden en $\mathcal{N}$ de clase $\Delta^1_2(a)$ y ordinal*[3] *ω_1 con la propiedad de que si $P \subset \mathcal{N} \times \mathcal{N}$ es un conjunto $\Sigma^1_n(a)$, para $n \geq 2$, entonces los conjuntos dados por*

$$P_1(x, y) \leftrightarrow \bigvee z \trianglelefteq_a x\ P(z, y), \qquad P_2(x, y) \leftrightarrow \bigwedge z \trianglelefteq_a x\ P(z, y),$$

son también $\Sigma^1_n(a)$.

Demostración: Hemos visto que $\operatorname{ord}(\mathcal{N}^{L[a]}, \trianglelefteq_a) = \omega_1^{L[a]} \leq \omega_1$ y, como $\mathcal{N} = \mathcal{N}^{L[a]}$, dicho ordinal ha de ser no numerable, luego ha de ser ω_1.

En principio tenemos que $\trianglelefteq_a$ es un buen orden $\Sigma^1_2(a)$, pero la demostración del teorema 2.12 se adapta trivialmente al caso efectivo: la diagonal $\Delta \subset \mathcal{N} \times \mathcal{N}$ es Δ^1_1, luego $\triangleleft_a = \trianglelefteq_a \setminus \Delta$ es también $\Sigma^1_2(a)$ y, como la aplicación $(x, y) \mapsto (y, x)$ es claramente Δ^1_1, concluimos que la relación inversa $\triangleright_a$ también es $\Sigma^1_2(a)$. Por último, como $\mathcal{N} \times \mathcal{N} = \triangleleft_a \cup \Delta \cup \triangleright_a$ y la unión es disjunta, resulta que $\triangleright_a$ es el complementario de $\trianglelefteq_a$, luego éste es también $\Pi^1_2(a)$, luego es $\Delta^1_2(a)$. La última parte es el teorema 6.6. ■

Así, si $\mathcal{N} \subset L[a]$, tenemos que $\mathcal{N}$ admite un buen orden $\boldsymbol{\Delta}^1_2$ y, por la observación previa al teorema 2.12, lo mismo vale para todo espacio polaco. Más aún, en la demostración de 6.6 se ve que si P es $\boldsymbol{\Sigma}^1_n$, entonces los conjuntos P_1 y P_2 son también $\boldsymbol{\Sigma}^1_n$ y es claro que esto es extensible a todo espacio polaco no numerable.

Veamos ahora que el teorema anterior (es decir, la existencia de un buen orden en $\mathcal{N}$ que cumpla las condiciones del teorema anterior), es, de hecho, equivalente a $\mathcal{N} \subset L[a]$. Para ello necesitamos un resultado previo:

Teorema 6.8 *Sea R un árbol en $\omega \times K$ tal que $R \in L[R]$ y sea $A = p[R] \subset \mathcal{N}$. Entonces, o bien $A \subset L[R]$ o bien A contiene un subconjunto perfecto. Más aún, en el segundo caso existe un árbol perfecto $U \in L[R]$ en ω tal que $[U] \subset A$.*

[3]En particular tenemos que $\mathcal{N} \subset L[a] \to 2^{\aleph_0} = \aleph_1$.

DEMOSTRACIÓN: En general, para cualquier árbol R en $\omega \times K$, definimos el árbol derivado

$$R' = \{(s,h) \in R \mid \text{existen } (s_0,h_0),(s_1,h_1) \in R \text{ tales que } s \subset s_0,\ s \subset s_1,$$

$$h \subset h_0,\ h \subset h_1 \text{ y } s_0,\ s_1 \text{ son incompatibles}\}.$$

Ahora, partiendo del árbol R del enunciado, definimos

$$R^0 = R, \quad R^{\alpha+1} = (R^\alpha)', \quad R^\lambda = \bigcap_{\delta<\lambda} R^\delta.$$

Estas definiciones son absolutas para modelos transitivos de ZFC, luego, para todo ordinal α se cumple que $R^\alpha \in L[R]$. Como cada R^α está contenido en los anteriores, ha de existir un (mínimo) ordinal α tal que $R^{\alpha+1} = R^\alpha$.

Supongamos en primer lugar que $R^\alpha = \varnothing$ y veamos que entonces $A \subset L[R]$.

Para ello tomamos $x \in A$, de modo que existe $f \in K^\omega$ tal que $(x,f) \in [R]$. Sea $\gamma < \alpha$ tal que $(x,f) \in [R^\gamma] \setminus [R^{\gamma+1}]$. Esto significa que existe un par $(s,h) \in R^\gamma$ tal que $s \subset x$, $h \subset f$ y $(s,h) \notin [R^{\gamma+1}]$, lo cual significa a su vez que si $(s',h') \in R^\gamma$ cumplen $s \subset s'$ y $h \subset h'$, entonces $s' \subset x$. Entonces

$$x = \bigcup\{s' \in \omega^{<\omega} \mid s \subset s' \wedge \bigvee h'(h \subset h' \wedge (s',h') \in R^\gamma)\} \in L[R].$$

Supongamos ahora que $R^\alpha \neq \varnothing$. Este árbol tiene la propiedad de que cada $(s,h) \in R^\alpha$ tiene dos extensiones con primeras coordendas incompatibles. Ahora razonamos en $L[R]$ (que es un modelo de ZFC, luego podemos usar el axioma de elección). Tomamos $(s_0,h_0),(s_1,h_1) \in R^\alpha$ tales que s_0 y s_1 sean incompatibles. A continuación elegimos (s_{00},h_{00}), (s_{01},h_{01}), (s_{10},h_{10}), $(s_{11},h_{11}) \in R^\alpha$, tales que $s_i \subset s_{ij}$, $h_i \subset h_{ij}$ y los s_{ij} sean incompatibles. De este modo podemos construir pares $\{(s_t,h_t)\}_{t\in 2^{<\omega}}$ en R^α de modo que $t \subset t' \to s_t \subset s_{t'} \wedge h_t \subset h_{t'}$ y los elementos de $\{s_t\}_{t\in 2^n}$ son incompatibles dos a dos para todo n. Toda la construcción está hecha en $L[R]$, por lo que

$$U = \{s \in \omega^{<\omega} \mid \bigvee t \in 2^{<\omega}\ s \subset s_t\} \in L[R],$$

y claramente U es un árbol perfecto tal que $[U] \subset p[R^\alpha] \subset p[R] = A$. ■

Ahora ya podemos probar:

Teorema 6.9 (Mansfield) *Si $a \in \mathcal{N}$ y existe un buen orden $\Sigma^1_2(a)$ en $\mathcal{N}$, entonces $\mathcal{N} \subset L[a]$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $\trianglelefteq$ un buen orden $\Sigma^1_2(a)$ en $\mathcal{N}$ y supongamos que $\mathcal{N}$ no está contenido en $L[a]$. Es claro que entonces $\mathcal{C}$ tampoco está contenido en $L[a]$, pues todo elemento de $\mathcal{N}$ puede codificarse de forma absoluta por un elemento de $\mathcal{C}$. Llamemos $R_0 = 2^{<\omega}$, de modo que $\mathcal{C} = [R_0]$.

En general, si $R \subset R_0$ es un árbol y $f : R \longrightarrow R_0$ es una aplicación que cumple:

a) $s \subset t \rightarrow f(s) \subset f(t)$,

b) $\bigwedge x \in [R] \bigcup\limits_{n\in\omega} f(x|_n) \in \mathcal{C}$,

podemos definir una aplicación continua $f^* : [R] \longrightarrow \mathcal{C}$ mediante

$$f^*(x) = \bigcup_{n\in\omega} f(x|_n).$$

Vamos a probar que si $R \subset R_0$ es un árbol perfecto, $R \in L[a]$, $f : R \longrightarrow R_0$ cumple las condiciones anteriores, $f \in L[a]$ y f^* es inyectiva, entonces existen un árbol perfecto $U \subset R$, $U \in L[a]$ y una aplicación $g : U \longrightarrow R_0$ que cumple las condiciones anteriores, $g \in L[a]$, g^* es inyectiva y $\bigwedge x \in [U]\ g^*(x) \lhd f^*(x)$.

En efecto, como R es perfecto, cada $r \in R$ tiene dos extensiones incompatibles r' y r''. Si las restringimos al mínimo natural $n+1$ en el que difieren, tenemos que r' y r'' son únicas, pues $r'|_n = r''|_n$ y $r'(n), r''(n)$ sólo pueden tomar los valores 0 y 1. Es fácil construir entonces una semejanza $h : R \longrightarrow R_0$ que induce un homeomorfismo $h^* : [R] \longrightarrow [R_0]$. Más aún, la construcción puede hacerse en $L[R]$, con lo que $h \in L[R]$.

Para cada $s \in R_0$ y cada $s \in \mathcal{C}$, definimos $\hat{s}$ como la función con el mismo dominio que s y tal que $\hat{s}(i) = 1 - s(i)$, para todo i en el dominio común. Sean

$$P = \{x \in [R] \mid h^*(x) \lhd f^*(x)\}, \qquad Q = \{x \in [R] \mid \widehat{h^*}(x) \lhd f^*(x)\}$$

y sea z el $\unlhd$-mínimo elemento de $\mathcal{C} \setminus L[a]$.

Si x, $y \in [R]$ cumplen $h^*(x) = z$, $h^*(y) = \hat{z}$, entonces $x, y \notin L[a]$, pues en caso contrario

$$z = \bigcup_{n\in\omega} h(x|_n) \in L[a], \quad \text{o bien} \quad \hat{z} = \bigcup_{n\in\omega} h(y|_n) \in L[a],$$

y lo segundo implica igualmente que $z \in L[a]$.

Por consiguiente, $f^*(x), f^*(y) \notin L[a]$, ya que si, por ejemplo, $f^*(x) \in L[a]$, entonces

$$S = \{s \in R \mid f(s) \subset f^*(x)\} \in L[a]$$

sería un árbol con x como única rama infinita, pues si hubiera otra rama infinita $x' \neq x$, sería $f^*(x') = f^*(x)$, en contra de la inyectividad que estamos suponiendo en f^*. Por lo tanto, tendríamos que $x \in L[a]$.

Así pues, $z \unlhd f^*(x) \wedge z \unlhd f^*(y)$, luego $z \lhd f^*(x) \vee z \lhd f^*(y)$, luego uno de los conjuntos P y Q no está contenido en $L[a]$. Vamos a suponer que es P. (El caso de Q se trata análogamente.)

Ahora observamos que R, f, h son subconjuntos de V_ω pertenecinentes a $L[a]$, por lo que pueden codificarse en función de un $b \in \mathcal{N} \cap L[a]$, de modo que son aritméticos en b. Esto implica que tanto $[R]$ como (la gráfica de) la aplicación $F : [R] \longrightarrow \mathcal{C}$ dada por $F(x) = (h^*(x), f^*(x))$ son $\Delta^1_1(b)$. Por lo tanto, el conjunto $P = F^{-1}[\lhd]$ es $\Sigma^1_2(b)$.

Por 4.29 existe un árbol S en $\omega \times \omega_1$ tal que $P = p[S]$ y $S \in L[b] \subset L[a]$. Por el teorema anterior existe un árbol perfecto $U \in L[S] \subset L[a]$ tal que $[U] \subset P$. (Aquí usamos que P no está contenido en $L[b] \subset L[a]$.)

Es fácil ver que $g = h|_U : U \longrightarrow R_0$ cumple lo requerido.

Aplicando repetidamente la propiedad que acabamos de probar, y partiendo de la identidad $f_0 : [R_0] \longrightarrow [R_0]$, construimos una sucesión decreciente de árboles $\{R_n\}_{n\in\omega}$ y de funciones $\{f_n\}_{n\in\omega}$ de modo que $f_n : [R_n] \longrightarrow \mathcal{C}$ y

$$\bigwedge n \in \omega \ f^*_{n+1}(x) \lhd f^*_n(x).$$

Ahora bien, $\{[R_n]\}_{n\in\omega}$ es una sucesión decreciente de compactos no vacíos en $\mathcal{C}$, luego existe un $x \in \bigcap\limits_{n\in\omega} [R_n]$, pero esto es absurdo, porque entonces

$$\cdots \lhd f_3(x) \lhd f_2(x) \lhd f_1(x) \lhd f_0(x)$$

contradice que $\trianglelefteq$ sea un buen orden. ■

Así pues, la existencia de un buen orden $\Sigma^1_2(a)$ en $\mathcal{N}$ equivale a que $\mathcal{N} \subset L[a]$ y, a su vez, esto equivale a la existencia de un buen orden en $\mathcal{N}$ que cumpla las propiedades del teorema 6.7. Una de las razones por las que esta equivalencia es interesante es que puede usarse sin necesidad de estar familiarizado con la teoría sobre conjuntos constructibles. Observemos que todos los resultados que vamos a deducir de $\mathcal{N} \subset L[a]$ las obtendremos en realidad a partir de 6.7.

Por ejemplo, el teorema 2.13 implica que, si $\mathcal{N} \subset L[a]$, existen conjuntos $\boldsymbol{\Delta}^1_2$ que no son medibles Lebesgue ni tienen la propiedad de Baire. Veamos una versión efectiva:

Teorema 6.10 ($\mathcal{N} \subset L[a]$) *Existe un subconjunto $\Delta^1_2(a)$ de $\mathcal{N}$ que no es universalmente medible ni tiene la propiedad de Baire.*

Demostración: Obviamente es equivalente encontrar un subconjunto de $\mathcal{N} \times \mathcal{N}$ en las condiciones del enunciado, y vamos a ver que sirve

$$A = \trianglelefteq_a = \{(x, y) \in \mathcal{N} \times \mathcal{N} \mid x \trianglelefteq_a y\},$$

que ciertamente es $\Delta^1_2(a)$. Vamos a probar que si μ_1 es una medida de Borel continua y no nula en $\mathcal{N}$ y μ_2 es la medida producto en $\mathcal{N} \times \mathcal{N}$, entonces A no es μ_2-medible.

Si lo fuera, como las secciones $A_y = \{x \in \mathcal{N} \mid (x, y) \in A\}$ son numerables (porque $\trianglelefteq_a$ tiene ordinal ω_1), todas ellas son nulas, luego, por el teorema de Fubini, A es nulo. Ahora bien, el conjunto

$$B = (\mathcal{N} \times \mathcal{N}) \setminus A = \{(x, y) \in \mathcal{N} \times \mathcal{N} \mid y \lhd_a x\}$$

también sería medible, y sus secciones B^x son todas numerables, luego nulas, luego B también sería nulo, y todo $\mathcal{N} \times \mathcal{N}$ tendría medida nula.

La prueba de que A no tiene la propiedad de Baire es totalmente análoga, usando el teorema de Kuratowski-Ulam [T 6.45] en lugar del teorema de Fubini. ■

Nota Observemos que, si cambiamos $\Delta^1_2(a)$ por $\boldsymbol{\Delta}^1_2$, la demostración del teorema anterior es válida cambiando $\mathcal{N}$ por cualquier espacio polaco no numerable.

Para probar la existencia de un conjunto $\Pi^1_1(a)$ no numerable sin subconjuntos perfectos nos basta una hipótesis más débil que $\mathcal{N} \subset L[a]$:

Teorema 6.11 *Si $a \in \mathcal{N}$ cumple que $\aleph_1^{L[a]} = \aleph_1$, existe un subconjunto $\Pi^1_1(a)$ de $\mathcal{N}$ no numerable que no contiene subconjuntos perfectos.*

Demostración: Sea $A \subset \mathcal{N}$ el conjunto dado por

$$x \in A \leftrightarrow x \in \mathcal{N}^{L[a]} \land x \in \mathrm{BO} \land \bigwedge y \trianglelefteq_a x\, (y \in \mathrm{BO} \to \|y\| \neq \|x\|).$$

Usando las relaciones que prueban que $\|\ \|$ es una norma en Π^1_1, podemos expresar esta relación en la forma

$$x \in \mathcal{N}^{L[a]} \land x \in \mathrm{BO} \land \bigwedge y \trianglelefteq_a x\, (y \notin \mathrm{BO} \lor (y \in \mathrm{BO} \land \neg(x \leq_{\Sigma^1_1} y \land y \leq_{\Sigma^1_1} x))).$$

Así es claro que la relación tras $\bigwedge y \trianglelefteq_a x$ es Σ^1_2, luego usando 6.6 vemos que A es $\Sigma^1_2(a)$.

Observamos ahora que la aplicación $A \longrightarrow \omega_1$ dada por $x \mapsto \|x\|$ es biyectiva. La inyectividad se sigue inmediatamente de la definición de A, y la suprayectividad se debe a que si $\alpha < \omega_1 = \omega_1^{L[a]}$, existe un $x \in \mathrm{BO} \cap L[a]$ tal que $\|x\| = \alpha$ y el mínimo para $\trianglelefteq_a$ cumple que $x \in A$. En particular, vemos que $|A| = \aleph_1$.

Vamos a probar que A no posee subconjuntos analíticos no numerables. En efecto, si $B \subset A$ fuera analítico y no numerable, el conjunto $\{\|x\| \mid x \in B\}$ no estaría acotado en ω_1, pero entonces

$$\mathrm{BO} = \{x \in \mathcal{N} \mid \bigvee z (z \in B \land x \leq_{\Sigma^1_1} z)\}$$

(recordemos que, para $z \in \mathrm{BO}$, se cumple $x \leq_{\Sigma^1_1} z \leftrightarrow x \in \mathrm{BO} \land \|x\| \leq \|z\|$), lo que implicaría que BO es $\boldsymbol{\Sigma}^1_1$, y esto es falso.

Sea ahora $C \subset \mathcal{N} \times \mathcal{N}$ un conjunto $\Pi^1_1(a)$ tal que $x \in A \leftrightarrow \bigvee y \in \mathcal{N}\ (x, y) \in C$. Como la clase $\Pi^1_1(a)$ tiene la propiedad de uniformización, podemos suponer que

$$\bigwedge x \in A \overset{1}{\bigvee} y \in \mathcal{N}\ (x, y) \in C,$$

y es claro que C no tiene subconjuntos perfectos, pues si $P \subset C$ fuera perfecto, entonces $\pi[P] \subset A$ sería un conjunto analítico no numerable.

Así hemos encontrado un subconjunto de $\mathcal{N} \times \mathcal{N}$ que es $\Pi^1_1(a)$ y no tiene subconjuntos perfectos. Obviamente esto implica que existe un conjunto similar en $\mathcal{N}$ y en cualquier espacio producto. Más aún, todo espacio polaco no numerable contiene un subconjunto $\boldsymbol{\Pi}^1_1$ no numerable sin subconjuntos perfectos. ■

Sucede que se cumple el recíproco del teorema anterior. Para probarlo obtenemos primero un resultado sobre conjuntos $\sigma^1_2(a)$. Por 4.29, todo conjunto $A \subset \mathcal{N}$ de clase $\Sigma^1_2(a)$ es de la forma $A = p[R]$, donde R es un árbol en $\omega \times \omega_1$ tal que $R \in L[a]$ (con lo que $L[R] \subset L[a]$). Claramente $R \subset L[R]$, luego $R = R \cap L[R] \in L[R]$. Combinando esto con 6.8 obtenemos:

Teorema 6.12 (Mansfield-Solovay) *Si $a \in \mathcal{N}$ y A es un subconjunto $\Sigma_2^1(a)$ de $\mathcal{N}$, entonces $A \subset L[a]$ o bien A contiene un subconjunto perfecto.*

Y de aquí se deduce a su vez la equivalencia que anunciábamos:

Teorema 6.13 *Para cada $a \in \mathcal{N}$, las afirnaciones siguientes son equivalentes:*

a) $\aleph_1^{L[a]} < \aleph_1$.

b) Todo conjunto $\Pi_1^1(a)$ no numerable contiene un subconjunto perfecto.

c) Todo conjunto $\Sigma_2^1(a)$ no numerable contiene un subconjunto perfecto.

Demostración: a) $\rightarrow$ c) es consecuencia del teorema anterior: si suponemos $\aleph_1^{L[a]} < \aleph_1$ y A es un conjunto $\Sigma_2^1(a)$ no numerable, no puede ser $A \subset \mathcal{N}^{L[a]}$, pues el conjunto $\mathcal{N}^{L[a]}$ es numerable, luego por el teorema anterior A contiene un subconjunto perfecto.

Por otra parte, c) $\rightarrow$ b) es trivial y b) $\rightarrow$ a) es el teorema 6.11. ■

Pasamos a estudiar ahora la propiedad de uniformización:

Teorema 6.14 ($\mathcal{N} \subset L[a]$) *La clase $\Sigma_n^1(a)$ (definida sobre los espacios producto no numerables) tiene la propiedad de uniformización para $n \geq 2$.*

Demostración: Sea $A \subset \mathcal{N} \times \mathcal{N}$ un conjunto $\Pi_{n-1}^1(a)$ y sea

$$A^*(x,y) \leftrightarrow A(x,y) \wedge \bigwedge z \trianglelefteq_a y\ (z = y \vee \neg A(x,z)).$$

Obviamente A^* uniformiza a A, y es $\Sigma_n^1(a)$. Hemos probado que todo subconjunto $\Pi_{n-1}^1(a)$ de $\mathcal{N} \times \mathcal{N}$ puede ser uniformizado por un conjunto $\Sigma_n^1(a)$. Obviamente, esto implica que lo mismo es cierto para cualquier producto de espacios producto no numerables.

Sea ahora $A \subset X \times Y$ una relación $\Sigma_n^1(a)$, de modo que existe un conjunto $B \subset X \times Y \times \mathcal{N}$ que es $\Pi_{n-1}^1(a)$ y $A(x,y) \leftrightarrow \bigvee z\, B(x,y,z)$. Según acabamos de probar, B admite una uniformización B^* de clase $\Sigma_n^1(a)$, respecto de la primera coordenada, es decir,

$$\bigvee yz\ (x,y,z) \in B \leftrightarrow \overset{1}{\bigvee} yz\ (x,y,z) \in B^*.$$

Es fácil ver que $A^* = \bigvee z\, B^*$ uniformiza a A y es claramente $\Sigma_n^1(a)$. ■

Como es habitual, considerando isomorfismos de Borel, de aquí se sigue que, para $n \geq 2$, la clase $\mathbf{\Sigma}_n^1$ (definida sobre todos los espacios polacos no numerables) tiene la propiedad de uniformización.

Recordemos que en ZF + ED se demuestra que $\Sigma_1^1(a)$ no tiene la propiedad de uniformización, sino que es $\Pi_1^1(a)$ quien la posee.

Teorema 6.15 ($\mathcal{N} \subset L[a]$) *La clase $\Sigma_n^1(a)$ es normada para $n \geq 2$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea X un espacio producto y $A \subset X$ un conjunto $\Sigma^1_n(a)$. Entonces existe un conjunto $B \subset X \times \mathcal{N}$ de clase $\Pi^1_{n-1}(a)$ tal que $A = \bigvee y\, B$. Sea $\rho : \mathcal{N} \longrightarrow \aleph_1$ la semejanza determinada por $\trianglelefteq_a$. Para cada $x \in B$ definimos

$$\phi(x) = \text{mín}\{\rho(y) \mid (x, y) \in B\}.$$

Así, las relaciones

$$x \leq^* x' \leftrightarrow \bigvee y \in \mathcal{N}\,(B(x, y) \wedge \bigwedge z \trianglelefteq_a y(z = y \vee \neg B(x', z)))$$

$$x <^* x' \leftrightarrow \bigvee y \in \mathcal{N}\,(B(x, y) \wedge \bigwedge z \trianglelefteq_a y\, \neg B(x', y))$$

son ambas $\Sigma^1_n(a)$. ■

De aquí se sigue a su vez de forma inmediata la versión para las clases de Lusin para todo espacio polaco:

Teorema 6.16 *Las clases de Lusin*

$$\begin{array}{cccc} & \boldsymbol{\Sigma}^1_2 & \boldsymbol{\Sigma}^1_3 & \boldsymbol{\Sigma}^1_4 \quad \cdots \\ \boldsymbol{\Pi}^1_1 & & & \end{array}$$

son normadas y tienen la propiedad de uniformización, pero sus complementarias no.

Por consiguiente, las clases indicadas en el teorema tienen la propiedad de reducción generalizada y sus complementarias tienen la propiedad de separación generalizada. Las clases $\Sigma^1_n(a)$ tienen la propiedad de reducción y las clases $\Pi^1_n(a)$ tienen la propiedad de separación (y todos estos resultados se invierten para $n = 1$).

No es difícil probar que si $\mathcal{N} \subset L[a]$ las clases $\Sigma^1_n(a)$ tienen escalas, pero no vamos a necesitar este hecho, así que no presentamos la demostración.

Con esto hemos probado que el axioma $\mathcal{N} \subset L[a]$ resuelve todas las cuestiones que en los temas anteriores habían quedado abiertas. En todo caso, podemos añadir una última observación trivial: la mera hipótesis del continuo $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ implica que todo subconjunto de cualquier espacio polaco es unión de $\aleph_1$ conjuntos de Borel (sus puntos, que son cerrados), y no solamente los subconjuntos $\boldsymbol{\Sigma}^1_2$, como hemos probado en ZF+ED.

Del teorema 6.13 se sigue inmediatamente la siguiente versión clásica:

Teorema 6.17 *Las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

a) $\bigwedge a \in \mathcal{N}\ \aleph_1^{L[a]} < \aleph_1$.

b) Todo conjunto $\boldsymbol{\Pi}^1_1$ *no numerable en un espacio polaco contiene un subconjunto perfecto.*

c) Todo conjunto $\boldsymbol{\Sigma}^1_2$ *no numerable en un espacio polaco contiene un subconjunto perfecto.*

Y de aquí deducimos algo crucial. En principio, cabría esperar un resultado de este tipo:

> *(Si* ZFC *es consistente) la existencia de conjuntos* $\mathbf{\Pi}^1_1$ *no numerables sin subconjuntos perfectos es independiente de los axiomas de* ZFC.

Sin embargo, aunque uno podría jugarse el cuello a que esto es cierto, ¡no es posible demostrarlo! Ciertamente, el teorema 6.11 nos asegura que no es posible demostrar en ZFC que todo conjunto $\mathbf{\Pi}^1_1$ no numerable contiene un subconjunto perfecto. La cuestión es si podemos asegurar que tampoco se puede demostrar lo contrario. Esto equivaldría a encontrar en ZFC un modelo en el que se cumpla la condición a) del teorema anterior. Sin embargo, según el teorema [PC 3.36], dicha condición a) implica que $\aleph_1$ es inaccesible[4] en L. Por lo tanto, si pudiéramos construir en ZFC un modelo de ZFC + "todo conjunto $\mathbf{\Pi}^1_1$ no numerable posee un subconjunto perfecto", esto nos daría un modelo de ZFC + "existe un cardinal inaccesible", y con ello habríamos demostrado la consistencia de ZFC en ZFC. Por el teorema de incompletitud de Gödel, ZFC sería contradictorio.

Concluimos que si es consistente que todo conjunto $\mathbf{\Pi}^1_1$ no numerable posea un subconjunto perfecto, dicha consistencia no puede demostrarse a partir de la mera consistencia de ZFC. Lo máximo a lo que podemos aspirar es a demostrarla suponiendo la consistencia de ZFC + "existe un cardinal inaccesible", es decir, suponiendo la existencia de un cardinal inaccesible o bien partiendo de un modelo de ZFC en el que haya un cardinal inaccesible. Así lo haremos en [PC 9.27]. Veamos otro caso similar:

Ya hemos visto que en ZFC no puede demostrarse ni refutarse la existencia de conjuntos $\mathbf{\Sigma}^1_2$ que no sean universalmente medibles, luego tampoco puede demostrarse que todo conjunto $\mathbf{\Sigma}^1_3$ lo sea, pero, ¿puede demostrarse la existencia de un conjunto $\mathbf{\Sigma}^1_3$ que no sea universalmente medible? Equivalentemente, ¿podemos probar que si ZFC es consistente, también lo es ZFC + "todo conjunto $\mathbf{\Sigma}^1_3$ es universalmente medible"?

La respuesta es análoga a la del problema sobre la existencia de conjuntos $\mathbf{\Pi}^1_1$ sin subconjuntos perfectos:

Teorema 6.18 (Shelah) *Sea $a \in \mathcal{N}$. Si todo conjunto $\mathbf{\Sigma}^1_3$ es medible Lebesgue, entonces $\bigwedge a \in \mathcal{N}\ \aleph_1^{L[a]} < \aleph_1$, luego $\aleph_1$ es inaccesible$^{L[a]}$ para todo $a \in \mathcal{N}$.*

Demostración: Consideremos en el espacio de Cantor $\mathcal{C}$ su medida de Haar unitaria m. Si todo conjunto $\mathbf{\Sigma}^1_3$ (de $\mathbb{R}$ y, en particular de, $\mathbb{I}$) es medible Lebesgue, el teorema [T 6.40] nos da que todo subconjunto $\mathbf{\Sigma}^1_3$ de $\mathcal{C}$ es medible para la medida m, así como que todo subconjunto $\mathbf{\Sigma}^1_3$ de $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ es medible para la medida producto.

Supongamos que $\aleph_1^{L[a]} = \aleph_1$. Entonces $X = \mathcal{C} \cap L[a]$ es un subconjunto $\mathbf{\Sigma}^1_2$ de $\mathcal{N}$ de cardinal $\aleph_1$. Más precisamente, en X está definido el buen orden $\trianglelefteq_a$,

[4]De hecho, una ligera variante en la prueba muestra que en realidad $\aleph_1$ es inaccesible en todos los modelos $L[a]$, con $a \in \mathcal{N}$.

que es también $\mathbf{\Sigma}^1_2$ y $(X, \trianglelefteq_a)$ tiene ordinal $\aleph_1$. Vamos a refinar la prueba del teorema [TC B.23].

En primer lugar demostramos que se cumple la condición (N) de [TC B.22]. Para ello tomamos $H \subset \mathcal{C} \times \mathcal{C}$ un conjunto G_δ con secciones nulas y hemos de probar que $H(X)$ es nulo. El argumento de [TC B.23] es válido salvo por el hecho de que requiere que el conjunto $\tilde{H}(X)$ sea medible, y para asegurarlo en el contexto actual hemos de demostrar que es $\mathbf{\Sigma}^1_3$.

Recordemos que $H(X) = \bigcup\limits_{x \in X} H_x$, $\lambda(x) = \text{mín}\{y \in \mathcal{C} \mid y \in X \land x \in H_y\}$ y

$$\tilde{H}(X) = \{(x, y) \in H(X) \times H(X) \mid \lambda(x) \vartriangleleft_a \lambda(y)\}.$$

Por lo tanto:

$$(x, y) \in \tilde{H}(X) \leftrightarrow \bigvee zw(z \in X \land w \in X \land (x, z) \in H \land (y, v) \in H \land$$
$$\bigwedge u(u \in X \land (y, u) \in H \to \neg u \trianglelefteq_a z)).$$

La estructura de esta relación es:

$$\bigvee zw(\mathbf{\Sigma}^1_2 \land \mathbf{\Sigma}^1_2 \land \mathbf{\Delta}^1_1 \land \mathbf{\Delta}^1_1 \land \bigwedge u(\mathbf{\Sigma}^1_2 \land \mathbf{\Delta}^1_1 \to \mathbf{\Pi}^1_2)).$$

Por lo tanto, la relación tras $\bigwedge u$ es $\mathbf{\Pi}^1_2$, luego con $\bigwedge u$ también lo es, luego la relación tras $\bigvee zw$ es $\mathbf{\Sigma}^1_3$ y con $\bigvee zw$ también lo es.

Igualmente se prueba que el conjunto D definido en [TC B.23] es $\mathbf{\Sigma}^1_3$, lo que nos permite concluir que X cumple la propiedad (N). A su vez, eso garantiza que el filtro $\mathcal{F}_X$ es rápido, por lo que el conjunto $\tilde{\mathcal{F}}_X \subset \mathcal{C}$ no es medible. Sólo necesitamos probar que $\tilde{\mathcal{F}}_X$ es también $\mathbf{\Sigma}^1_3$.

Para ello consideramos un conjunto $U \subset \mathcal{C}^3$ que sea $\mathcal{C}^2$-universal para $\mathbf{\Sigma}^1_1$, de modo que cada subconjunto de Borel de $\mathcal{C}^2$ está determinado por dos puntos $x, y \in \mathcal{N}$ tales que $U_x = \mathcal{N} \setminus U_y$. Así:

$$p \in \tilde{\mathcal{F}}_X \leftrightarrow p \in \mathcal{C} \land \bigvee R(R \text{ es una relación de equivalencia de Borel en } \mathcal{C} \times \mathcal{C}$$
$$\land\ |\mathcal{C}/R| \leq \aleph_0 \land Z_R \subset p^{-1}[\{1\}]).$$
$$\leftrightarrow p \in \mathcal{C} \land \bigvee xy \in \mathcal{C}(\bigwedge uv \in \mathcal{C}((u, v) \in U_x \leftrightarrow (u, v) \notin U_y) \land$$
$$U_x \text{ es una R.E. en } \mathcal{C} \times \mathcal{C}) \land |\mathcal{C}/U_x| \leq \aleph_0 \land Z_{U_x} \subset p^{-1}[\{1\}]).$$

Vamos a analizar cada parte de esta relación:

- $\bigwedge uv \in \mathcal{C}((u, v) \in U_x \leftrightarrow (u, v) \notin U_y) \leftrightarrow$

  $$\bigwedge uv(u \in \mathcal{C} \land v \in \mathcal{C} \to ((u, v, x) \in U \leftrightarrow (u, v, y) \notin U))$$

  es $\mathbf{\Pi}^1_2$, luego $\mathbf{\Sigma}^1_3$.

- U_x es una R.E. en $\mathcal{C} \times \mathcal{C} \leftrightarrow$

$$\bigwedge uvw \in \mathcal{C}((u,u,x) \in U \land ((u,v,x) \in U \to (v,u,x) \in U) \land$$
$$((u,v,x) \in U \land (v,w,x) \in U \to (u,w,x) \in U))$$

  es $\mathbf{\Pi}^1_2$, luego $\mathbf{\Sigma}^1_3$.

- $|\mathcal{C}/U_x| \leq \aleph_0 \leftrightarrow \bigvee z \in \mathcal{N} \bigwedge u \in \mathcal{C} \bigvee n \in \omega \bigvee w \in \mathcal{C}(w = z_n \land (w,u,x) \in U)$ es $\mathbf{\Sigma}^1_3$.

- $Z_{U_z} \subset p^{-1}[\{1\}] \leftrightarrow \bigwedge uv(u \in X \land v \in X \land u \neq v \land (u,v,x) \in U \to$

$$\bigvee n \in \omega(u|_n = v|_n \land u(n) \neq v(n) \land p(n) = 1))$$

  es $\mathbf{\Pi}^1_2$, luego $\mathbf{\Sigma}^1_3$.

En total, $p \in \tilde{\mathcal{F}}_X$ es de la forma $\mathbf{\Delta}^1_1 \land \bigvee xy\ \mathbf{\Sigma}^1_3$, luego es $\mathbf{\Sigma}^1_3$, como había que probar. ■

Así pues, para probar la consistencia de que todo subconjunto $\mathbf{\Sigma}^1_3$ de $\mathbb{R}$ sea medible Lebesgue o, más en general, de que todo conjunto $\mathbf{\Sigma}^1_3$ de un espacio polaco sea universalmente medible, es necesario suponer como mínimo la consistencia de ZFC + "existe un cardinal inaccesible". Nuevamente, en [PC 9.27] demostraremos que esta condición necesaria es también suficiente para garantizar la consistencia de la medibilidad de los conjuntos $\mathbf{\Sigma}^1_3$ y, de hecho, de todos los conjuntos proyectivos.

6.3 Consecuencias del axioma de Martin

Tal y como anticipábamos en la introducción a este capítulo, en 6.10 hemos probado que el axioma de constructibilidad implica la existencia de un subconjunto $\mathbf{\Delta}^1_2$ de $\mathbb{R}$ no medible Lebesgue, y ahora probamos que el axioma de Martin implica lo contrario:

Teorema 6.19 (AM($\aleph_1$)) *Los conjuntos $\mathbf{\Sigma}^1_2$ y $\mathbf{\Pi}^1_2$ son universalmente medibles y tienen la propiedad de Baire.*

Demostración: Por el teorema [TC 8.45] sabemos que AM($\aleph_1$) implica que $\aleph_1 \leq \mathrm{ad}(I_m) \leq \mathrm{ad}(I_c)$, lo que, junto a los teoremas [TC 8.38] y [TC 8.39], inplica que la unión de $\aleph_1$ conjuntos medibles (para cualquier medida de Borel continua en un espacio polaco) es medible, así como que la unión de $\aleph_1$ conjuntos con la propiedad de Baire (en cualquier espacio polaco sin puntos aislados) tiene la propiedad de Baire. Combinando esto con el teorema 2.26, según el cual todo conjunto $\mathbf{\Sigma}^1_2$ es unión de $\aleph_1$ conjuntos de Borel, tenemos la conclusión. ■

Por otra parte, ya hemos observado que la hipótesis del continuo implica que todo subconjunto de cualquier espacio polaco es unión de $\aleph_1$ conjuntos de Borel. Ahora veremos que, con la ayuda del axioma de Martin, podemos demostrar que es consistente que sólo los conjuntos $\mathbf{\Sigma}^1_2$ puedan expresarse como uniones de $\aleph_1$ conjuntos de Borel (cf. 2.26) La clave es el teorema siguiente:

Teorema 6.20 (AM) *Si X es un espacio de Hausdorff* 2AN *y* $|X| < 2^{\aleph_0}$*, entonces todo subconjunto de X es* $\mathbf{\Pi}^0_2$.

DEMOSTRACIÓN: Sea $\mathcal{B}$ una base numerable de X y sea $A \subset X$ arbitrario. Definimos $\mathbb{P}$ como el conjunto de todos los conjuntos finitos p cuyos elementos son de una de las dos formas siguientes:

a) Pares (x,n), con $x \in X \setminus A$ y $n \in \omega$. [Conviene pensar en cada uno de estos pares como si representara una "afirmación" de tipo $x \notin \check{U}_n$ donde $\check{U}_n$ es el nombre de un "abierto genérico" en X que pretendemos definir.]

b) Pares (B,n), con $B \in \mathcal{B}$ y $n \in \omega$. [Estos pares representan "afirmaciones" $B \subset \check{U}_n$.]

Exigimos además que las condiciones p sean "consistentes" en el sentido de que si $x \in B \setminus A$ los pares (x,n) y (B,n) no estén simultáneamente en p. [Es decir, que la condición no "fuerce" al mismo tiempo $x \notin \check{U}_n$ y $B \subset \check{U}_n$.]

Consideramos a $\mathbb{P}$ como c.p.o. con la relación inversa de la inclusión.

Para aplicarle AM hemos de probar que cumple la condición de cadena numerable. En efecto, dada una familia no numerable de condiciones, puesto que sólo hay una cantidad numerable de pares (B,n) y, por consiguiente, sólo una cantidad numerable de conjuntos finitos de tales pares, ha de haber dos condiciones distintas en la familia, digamos p y q, que contengan exactamente los mismos pares de tipo (B,n), pero entonces $p \cup q \in \mathbb{P}$ es una extensión común, luego la familia dada no era una anticadena.

Para cada $x \in X \setminus A$ definimos $D_x = \{p \in \mathbb{P} \mid \bigvee n \in \omega\ (x,n) \in p\}$, que obviamente es denso en $\mathbb{P}$. Similarmente, para cada $x \in A$ y $n \in \omega$ definimos $E^n_x = \{p \in \mathbb{P} \mid \bigvee B \in \mathcal{B}(x \in B \land (B,n) \in p)\}$. Veamos que también es denso.

Sea $Y \subset X \setminus A$ el conjunto finito de puntos que aparecen como primera componente de un par de p. Como $x \in A$ y X es un espacio de Hausdorff, existe un $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B$ y $B \cap Y = \varnothing$. Entonces $q = p \cup \{(B,n)\} \in \mathbb{P}$ es una extensión de p en E^n_x.

Como $|X| < 2^{\aleph_0}$, podemos aplicar AM para concluir que existe un filtro G en $\mathbb{P}$ que corta a todos los conjuntos densos que hemos definido. Llamamos $U_n = \{B \mid \bigvee p \in G\ (B,n) \in p\}$, que es un abierto en X. Basta observar que $A = \bigcap\limits_{n\in\omega} U_n$. En efecto:

Si $x \in A$ y $n \in \omega$, existe un $p \in E^n_x \cap G$, luego existe un $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B$ y $(B,n) \in q$, luego $x \in B \subset U_n$, luego $x \in \bigcap\limits_{n\in\omega} U_n$.

Si $x \in X \setminus A$, existe $q \in D_x \cap G$, luego existe un $n \in \omega$ tal que $(x,n) \in q$, luego si $p \in G$ cumple $(B,n) \in q$, entonces (x,n) y (B,n) están en una extensión común de p y q, luego $x \notin B$, luego $x \notin U_n$, luego $x \notin \bigcap\limits_{n\in\omega} U_n$. ■

Teorema 6.21 (AM + $2^{\aleph_0} > \aleph_1 + \aleph_1^L = \aleph_1$) *En todo espacio polaco no numerable, los subconjuntos de cardinal $\aleph_1$ son* $\mathbf{\Pi}^1_1$.

Demostración: Claramente, basta demostrar el teorema para subconjuntos de $\mathcal{C}$. En la prueba del teorema 6.11 se ve que el conjunto $\mathbf{\Pi}^1_1$ no numerable $A \subset \mathcal{N}$ que se construye tiene concretamente cardinal $\aleph_1$. Obviamente, podemos tomar un conjunto $A \subset \mathcal{C}$ con las mismas características (que sea $\mathbf{\Pi}^1_1$ de cardinal $\aleph_1$). Sea $B \subset \mathcal{C}$ un conjunto arbitrario de cardinal $\aleph_1$. Enumeremos ambos conjuntos: $A = \{a_\alpha\}_{\alpha<\omega_1}$, $B = \{b_\alpha\}_{\alpha<\omega_1}$.

Por el teorema anterior, el conjunto $U'_n = \{b_\alpha \mid a_\alpha(n) = 1\}$ es $\mathbf{\Pi}^0_2(B)$, luego existe un conjunto U_n de clase $\mathbf{\Pi}^0_2(\mathcal{C})$ tal que $U'_n = U_n \cap B$. Esto significa que

$$\bigwedge \alpha < \omega_1 \bigwedge n \in \omega\ (a_\alpha(n) = 1 \leftrightarrow b_\alpha \in U_n).$$

Igualmente, existen conjuntos V_n de clase $\mathbf{\Pi}^0_2(\mathcal{C})$ tales que

$$\bigwedge \alpha < \omega_1 \bigwedge n \in \omega\ (b_\alpha(n) = 1 \leftrightarrow a_\alpha \in V_n).$$

Pero entonces:

$$b \in B \leftrightarrow \bigwedge a \in \mathcal{C}\big[\bigwedge n \in \omega\,(a(n) = 1 \leftrightarrow b \in U_n)$$

$$\to (a \in A \land \bigwedge n \in \omega\,(b(n) = 1 \leftrightarrow a \in V_n))\big].$$

En efecto, para probar la implicación $\leftarrow$ tomamos $b \in \mathcal{C}$ y definimos $a \in \mathcal{C}$ mediante

$$\bigwedge n \in \omega\,(a(n) = 1 \leftrightarrow b \in U_n).$$

Entonces tenemos que $a \in A$, luego $a = a_\alpha$, para cierto $\alpha < \omega_1$, y la segunda parte de la implicación se traduce en que $b = b_\alpha$.

Recíprocamente, si $b \in B$, entonces $b = b_\alpha$ y la hipótesis del miembro derecho equivale a que $a = a_\alpha$, luego se cumple la consecuencia indicada.

Con esto tenemos una definición para B de tipo $\bigwedge a[\mathbf{\Pi}^0_3 \to (\mathbf{\Pi}^1_1 \land \mathbf{\Pi}^0_3)]$, con lo que concluimos que B es $\mathbf{\Pi}^1_1$. ■

Teorema 6.22 (AM + $2^{\aleph_0} > \aleph_1 + \aleph_1^L = \aleph_1$) *Toda unión de $\aleph_1$ conjuntos de Borel en un espacio polaco es $\mathbf{\Sigma}^1_2$.*

Demostración: Basta probar el teorema para $\mathcal{C}$. Para ello fijamos un conjunto U $\mathcal{C}$-universal para $\mathbf{\Pi}^1_1(\mathcal{C})$. Sea $\{B_\alpha\}_{\alpha<\omega_1}$ una familia arbitraria de $\aleph_1$ conjuntos de Borel en $\mathcal{C}$ y sea $x_\alpha \in \mathcal{C}$ tal que $V_\alpha = U_{x_\alpha}$. Sea $A = \{x_\alpha \mid \alpha < \omega_1\}$, que es $\mathbf{\Pi}^1_1$, por el teorema anterior si es no numerable y trivialmente si es numerable. Entonces

$$x \in \bigcup_{\alpha<\omega_1} B_\alpha \leftrightarrow \bigvee x(x \in A \land (x, y) \in U),$$

con lo que tenemos una definición de tipo $\bigvee x(\mathbf{\Pi}^1_1 \land \mathbf{\Pi}^1_1)$, luego la unión es $\mathbf{\Sigma}^1_2$. ■

6.4 El teorema de Shoenfield

Vamos a probar que las fórmulas Σ^1_1 y Π^1_1 son absolutas para modelos transitivos de ZF + ED y que, bajo alguna hipótesis adicional, lo mismo sucede con las fórmulas Σ^1_2 y Π^1_2. Nos ocupamos primero de este segundo caso porque así la prueba del primero puede verse como una simplificación de la segunda:

Teorema 6.23 (Shoenfield) *Sea M un modelo transitivo de* ZF + ED *tal que $\omega_1 \in M$ y sea $\phi[t_1, \ldots, t_r, x_1, \ldots, x_s, y, z]$ una fórmula aritmética de $\mathcal{L}_a$. Entonces*

$$\bigwedge t \in \omega^r \bigwedge x \in \mathcal{N}^s \cap M(\vDash^M \bigvee y \bigwedge z\, \phi[t, x] \leftrightarrow \vDash \bigvee y \bigwedge z\, \phi[t, x]\ ).$$

Demostración: Consideremos primero el caso en que $r = 0$. El conjunto

$$\{(x, y) \in \mathcal{N}^{s+1} \mid \vDash \bigwedge z\, \phi[x, y]\}$$

es Π^1_1, luego, por definición, es de la forma $\bigwedge z \in \mathcal{N}\, A(x, y, z)$ para cierto conjunto A de tipo Σ^0_1. Por el teorema 3.12 existe un $B \subset \omega^{s+3}$ recursivo (en particular aritmético) tal que

$$\vDash \bigwedge z\, \phi[x, y] \leftrightarrow \bigwedge z \in \mathcal{N} \bigvee m \in \omega\, B(m, \bar{x}(m), \bar{y}(m), \bar{z}(m)),$$

con la propiedad adicional de que

$$B(m, \bar{x}(m), \bar{y}(m), \bar{z}(m)) \wedge m \leq m' \rightarrow B(m', \bar{x}(m'), \bar{y}(m'), \bar{z}(m')).$$

La parte más técnica de la prueba es que podemos definir explícitamente B a partir de ϕ o, más precisamente, que podemos definir un término B_ϕ del lenguaje de la teoría de conjuntos y demostrar que si ϕ es una fórmula aritmética de $\mathcal{L}_a$ entonces B_ϕ es un conjunto aritmético que cumple lo indicado y, más aún, que es absoluto para modelos transitivos de ZF. Vamos a demostrar el teorema admitiendo este hecho. Consideramos

$$R_\phi = \{t \in \omega^{s+2} \mid \bigvee m \in \omega(m = \ell(t_0) \wedge \cdots \wedge m = \ell(t_{s+1}) \wedge (m, t) \notin B_\phi)\},$$

que es la codificación de un árbol en ω^{s+2} tal que

$$\vDash \bigwedge z\, \phi[x, y] \leftrightarrow \bigwedge z \in \mathcal{N} \bigvee m \in \omega\, \neg R_\phi(\bar{x}(m), \bar{y}(m), \bar{z}(m)).$$

Además R_ϕ es claramente absoluto para modelos transitivos de ZF. Así pues,

$$\vDash \bigvee y \bigwedge z\, \phi[x] \leftrightarrow \bigvee y \in \mathcal{N}\, (R_\phi)_{(x,y)} \text{ está bien fundado.}$$

Seguidamente, si κ es cualquier ordinal no numerable y $\{s_n\}_{n\in\omega}$ es la enumeración canónica de $\omega^{<\omega}$, definimos el árbol $R''_{\phi,\kappa}$ en $\omega^{s+1} \times \kappa$ mediante

$$(s, t, h) \in R''_{\phi,\kappa} \leftrightarrow \bigwedge mn < \ell(h)(s_m, s_n \in R'_{\phi,\kappa}[s, t] \rightarrow h(n) < h(m)),$$

donde

$$R'_{\phi,\kappa}[s, t] = \{u \in \omega^{<\omega} \mid \ell(u) \leq \ell(s) = \ell(t) \wedge (s|_{\ell(u)}, t|_{\ell(u)}, u) \in R_\phi\}.$$

El razonamiento del teorema 1.62 justifica que

$$\vDash \bigvee y \bigwedge z\, \phi[x] \leftrightarrow \bigvee y \in \mathcal{N} \bigvee f \in {}^\omega\kappa \bigwedge n \in \omega\, (x|_n, y|_n, f|_n) \in R''_{\phi,\kappa},$$

y el término $R_{\phi,\kappa}$ es también absoluto para modelos transitivos de ZF. A partir de aquí tomamos $\kappa = \omega_1$, pero es importante que la equivalencia anterior vale para cualquier κ, pues ω_1 no es necesariamente ω_1^M, pero como la equivalencia anterior se prueba en ZF + ED para cualquier κ no numerable y ω_1 es en cualquier caso un ordinal no numerable en M, se cumple

$$\vDash^M \bigvee y \bigwedge z\, \phi[x] \leftrightarrow \bigvee y \in \mathcal{N}^M \bigvee f \in ({}^\omega\kappa)^M \bigwedge n \in \omega\, (x|_n, y|_n, f|_n) \in R''_{\phi,\omega_1},$$

Ahora consideramos la semejanza $i : \omega \times \omega_1 \longrightarrow \omega_1$ respecto del orden lexicográfico en $\omega \times \omega_1$ (comparando primero las segundas componentes de los pares), de modo que $i \in M$ y mediante i construimos a partir de R''_{ϕ,ω_1} el árbol R^*_ϕ siguiendo la prueba de 1.62, de modo que R^*_ϕ es un término absoluto para modelos transitivos de ZF, y se cumple que

$$\vDash \bigvee y \bigwedge z\, \phi[x] \leftrightarrow (R^*_\phi)_x \text{ no está bien fundado}$$

y también

$$\vDash^M \bigvee y \bigwedge z\, \phi[x] \leftrightarrow (R^*_\phi)_x \text{ no está bien fundado}^M,$$

pero "estar bien fundado" es absoluto, luego el teorema queda probado para $r = 0$, salvo que falta definir el término B_ϕ. Si $r > 0$ definimos

$$\psi(w, x, y, z) \equiv \phi(w(0), \ldots, w(r-1), x, y, z),$$

donde $0, \ldots, r-1$ son las constantes de $\mathcal{L}_a$. Tenemos el teorema probado para la fórmula ψ, y, si $t \in \omega^r$ y $x \in \mathcal{N}^s \cap M$, fijamos un $w \in \mathcal{N} \cap M$ que extienda a t, de modo que

$$\vDash^M \bigvee y \bigwedge z\, \phi[t, x] \leftrightarrow\ \vDash^M \bigvee y \bigwedge z\, \psi[w, x] \leftrightarrow\ \vDash \bigvee y \bigwedge z\, \psi[w, x] \leftrightarrow\ \vDash \bigvee y \bigwedge z\, \phi[t, x].$$

Pasemos a construir el término B_ϕ. A cada fórmula aritmética ϕ podemos asociarle otra equivalente $\bar{\phi}$ en forma prenexa (es decir, que conste de una sucesión de cuantificadores de primer orden seguidos de una fórmula $\bar{\phi}_0$ sin cuantificadores). Además $\bar{\phi}$ puede definirse explícitamente a partir de ϕ, de modo que el término $\bar{\phi}$ sea absoluto para modelos transitivos de ZF.

Pongamos que las variables de primer orden que aparecen en $\bar{\phi}_0$ están entre $2, \ldots, 2^p$, a las que hay que añadir las variables de segundo orden $x_1, \ldots, x_s, y, z$. Sea $T \subset \omega$ el conjunto de (codificaciones de) los términos aritméticos en los que a lo sumo aparecen dichas variables. Definimos una función $V : \omega^{p+s+3} \longrightarrow \omega$ como sigue (escribimos $\bar{n}$ y $\bar{u}$ en lugar de $n_1, \ldots, n_p$ y $u_1, \ldots, u_s$):

a) Si $t \in \omega$ no está en T, entonces $V(t, \bar{n}, \bar{u}, v, w) = 0$.

b) Si $t = 2^i$, entonces $V(t, \bar{n}, \bar{u}, v, w) = n_i + 1$.

c) Si $t = 5^i$ (es decir, es la constante que debe interpretarse como $i-1$), entonces $V(t, \bar{n}, \bar{u}, v, w) = i$.

d) Si $t = t_1 + t_2$, entonces $V(t, \bar{n}, \bar{u}, v, w)$ toma el valor

$$V(t_1, \bar{n}, \bar{u}, v, w) + V(t_2, \bar{n}, \bar{u}, v, w) - 1$$

si $V(t_i, \bar{n}, \bar{u}, v, w) \neq 0$ para $i = 1, 2$ y toma el valor 0 en caso contrario.

e) Si $t = t_1 t_2$, entonces $V(t, \bar{n}, \bar{u}, v, w)$ toma el valor

$$(V(t_1, \bar{n}, \bar{u}, v, w) - 1)(V(t_2, \bar{n}, \bar{u}, v, w) - 1) + 1$$

si $V(t_i, \bar{n}, \bar{u}, v, w) \neq 0$ para $i = 1, 2$, y toma el valor 0 en caso contrario.

f) Si $t = x_i(t')$, entonces $V(t, \bar{n}, \bar{u}, v, w)$ toma el valor 0 si $V(t', \bar{n}, \bar{u}, v, w) = 0$ o si $V(t', \bar{n}, \bar{u}, v, w) - 1$ es mayor que la longitud de la sucesión codificada por u_i. En caso contrario

$$V(t, \bar{n}, \bar{u}, v, w) = u_i(V(t', \bar{n}, \bar{u}, v, w) - 1) + 1.$$

g) Si $t = y(t')$ o $t = z(t')$ la definición es análoga al punto precedente, cambiando u_i por v o w, respectivamente.

De este modo, $V(t, \bar{n}, \bar{u}, v, w)$ es una unidad más que el valor denotado por t cuando las variables 2^i se interpretan como n_i y las variables x_i, y, z se interpretan como sucesiones que extienden a las sucesiones finitas definidas por los números u_i, v, w, supuesto que estas sucesiones finitas basten para calcular dicho valor, y $V(t, \bar{n}, \bar{u}, v, w) = 0$ si t no está en T o si las sucesiones codificadas por u_i, v, w no son lo suficientemente largas como para interpretar las variables x_i, y, z a la hora del calcular el número denotado por t.

Es pura rutina comprobar que la función V es recursiva. Ahora consideramos el conjunto F de las fórmulas aritméticas sin cuantificadores cuyas variables están entre las que estamos considerando, y definimos una función $V' : \omega^{p+s+3} \longrightarrow \omega$ como sigue:

a) Si α no está en F entonces $V'(\alpha, \bar{n}, \bar{u}, v, w) = 2$.

b) Si α es $t_1 = t_2$ entonces $V'(\alpha, \bar{n}, \bar{u}, v, w) = 2$ si $V(t_i, \bar{n}, \bar{u}, v, w) = 0$ para algún i y, en caso contrario, toma el valor 1 si se cumple $V(t_1, \bar{n}, \bar{u}, v, w) = V(t_2, \bar{n}, \bar{u}, v, w)$ y 0 en caso contrario.

c) Si $\alpha = \neg\beta$, entonces $V'(\alpha, \bar{n}, \bar{u}, v, w) = 2$ si $V'(\beta, \bar{n}, \bar{u}, v, w) = 2$ y en caso contrario

$$V'(\alpha, \bar{n}, \bar{u}, v, w) = 1 - V'(\beta, \bar{n}, \bar{u}, v, w).$$

d) Si $\alpha = \beta \rightarrow \gamma$, entonces $V'(\alpha, \bar{n}, \bar{u}, v, w) = 2$ si $V'(\beta, \bar{n}, \bar{u}, v, w) = 2$ o $V'(\gamma, \bar{n}, \bar{u}, v, w) = 2$ y en caso contrario $V'(\alpha, \bar{n}, \bar{u}, v, w) = 1$ si se cumple $V'(\beta, \bar{n}, \bar{u}, v, w) = 0$ o bien $V'(\gamma, \bar{n}, \bar{u}, v, w) = 1$, y $V'(\alpha, \bar{n}, \bar{u}, v, w) = 0$ en el caso restante.

De nuevo es pura rutina comprobar que la función V' es recursiva y se cumple $V'(\alpha, \bar{n}, \bar{u}, v, w) = 2$ si α no está en F o si las sucesiones finitas codificadas por u_i, v, w no son suficientemente largas como para decidir el valor de verdad de α. En otro caso, α toma el valor 1 si $\vDash \alpha[\bar{n}, \bar{x}, y, z]$, donde x_i, y, z son elementos de $\mathcal{N}$ que extienden a las sucesiones finitas u_i, v, w. El conjunto $R_0 \subset \omega^{p+s+2}$ dado por

$$R_0(\bar{n}, \bar{u}, v, w) \leftrightarrow V'(\bar{\phi}_0, \bar{n}, \bar{u}, v, w) = 1$$

es recursivo, y es fácil ver que

$$\vDash \bar{\phi}_0[\bar{n}, \bar{x}, y, z] \leftrightarrow \bigvee m \in \omega\, R_0(\bar{n}, \bar{x}(m), \bar{y}(m), \bar{z}(m)).$$

Además,

$$R_0(\bar{n}, \bar{x}(m), \bar{y}(m), \bar{z}(m)) \wedge m \leq m' \to R_0(\bar{n}, \bar{x}(m'), \bar{y}(m'), \bar{z}(m')).$$

En particular

$$\vDash \bigwedge z\, \bar{\phi}_0[\bar{n}, \bar{x}, y] \leftrightarrow \bigwedge z \in \mathcal{N} \bigvee m \in \omega\, R_0(\bar{n}, \bar{x}(m), \bar{y}(m), \bar{z}(m)).$$

Supongamos que el primer cuantificador que precede a $\bar{\phi}_0$ en $\bar{\phi}$ es $\bigvee n_p$. Entonces

$$\vDash \bigwedge z \bigvee n_p\, \bar{\phi}_0[\bar{n}, \bar{x}, y] \leftrightarrow \bigwedge z \in \mathcal{N} \bigvee m \in \omega \bigvee n_p \in \omega\, R_0(\bar{n}, \bar{x}(m), \bar{y}(m), \bar{z}(m))$$
$$\leftrightarrow \bigwedge z \in \mathcal{N} \bigvee m \in \omega\, R_1(\bar{n}, \bar{x}(m), \bar{y}(m), \bar{z}(m)),$$

donde el conjunto $R_1 = \bigvee n_p \in \omega R_0$ es aritmético y sigue cumpliendo la propiedad de monotonía.

Si, por el contrario, el primer cuantificador es $\bigwedge n_p$, entonces

$$\vDash \bigwedge z \bigwedge n_p\, \bar{\phi}_0[\bar{n}, \bar{x}, y] \leftrightarrow \bigwedge z \in \mathcal{N} \bigvee m \in \omega \in \omega\, R_0(\bar{n}, z(0), \bar{x}(m), \bar{y}(m), \bar{z}^+(m))$$
$$\leftrightarrow \bigwedge z \in \mathcal{N} \bigvee m \in \omega\, R_1(\bar{n}, \bar{x}(m), \bar{y}(m), \bar{z}(m)),$$

donde $z^+(i) = z(i+1)$ y ahora

$$R_1(n_1, \ldots, n_p, u, v, w) \leftrightarrow$$
$$\bigvee n \in \omega(\ell(w) = n + 1 \wedge R_0(n_1, \ldots, n_{p-1}, w(0), u|_n, v|_n, w^+)$$

es también un conjunto aritmético con la propiedad de monotonía. Incorporando de este modo los cuantificadores llegamos hasta el conjunto B_ϕ que cumple lo requerido. Es claro que hemos construido un conjunto aritmético a partir exclusivamente de la estructura de la fórmula ϕ, por lo que la construcción es absoluta para modelos transitivos de ZF. ■

Sin más que simplificar la prueba del teorema anterior obtenemos una demostración del resultado siguiente:

Teorema 6.24 *Consideremos un modelo transitivo M de* ZF + ED *y una fórmula aritmética $\phi[n_1, \ldots, n_r, x_1, \ldots, x_s, z]$ de $\mathcal{L}_a$. Entonces*

$$\bigwedge t \in \omega^r \bigwedge x \in \mathcal{N}^s \cap M(\vDash^M \bigvee z\, \phi[t, x] \leftrightarrow \vDash \bigvee z\, \phi[t, x]\ ).$$

En particular, las relaciones $\Sigma^1_2(a)$ son absolutas en el sentido siguiente:

Teorema 6.25 *Si $a \in \mathcal{N}$, $A \subset \omega^r \times \mathcal{N}^s$ es un conjunto $\Sigma^1_2(a)$ y M es un modelo transitivo de* ZF + ED *tal que $a, \omega_1 \in M$, entonces $A^M = A \cap M \in M$, y es el conjunto $\Sigma^1_2(a)^M$ definido en M por cualquiera de las fórmulas de $\mathcal{L}_a$ que definen a A (en V).*

DEMOSTRACIÓN: Basta tener en cuenta que

$$A = \{(t, x) \in \omega^r \times \mathcal{N}^s \mid \vDash \bigvee y \bigwedge z\, \phi[t, x, a]\},$$

para cierta fórmula aritmética $\phi(t, x, a, y, z)$. ■

Observaciones Obviamente lo mismo vale para las relaciones $\Pi^1_2(a)$ y en el caso de relaciones $\Sigma^1_1(a)$ o $\Pi^1_1(a)$ podemos suprimir la hipótesis de que $\omega_1 \in M$. Por otro lado, el teorema de Schoenfield no puede generalizarse a fórmulas Σ^1_3, ya que, por ejemplo, la afirmación $\phi(x) \equiv \bigvee w(w \notin L \wedge x = x)$ es Σ^1_3 y, si $V \neq L$, no es absoluta para L. ■

He aquí una consecuencia sencilla del teorema de Shoenfield:

Teorema 6.26 *Si $a \in \mathcal{N}$, todo subconjunto $\Sigma^1_2(a)$ (o $\Pi^1_2(a)$) de ω pertenece a $L[a]$. En particular, todo subconjunto Σ^1_2 o Π^1_2 de ω es constructible.*

DEMOSTRACIÓN: Basta aplicar el teorema anterior. El modelo $M = L[a]$ cumple los requisitos y $A = A \cap L[a] = A^M \in L[a]$. ■

Por consiguiente, la complejidad de un subconjunto no constructible de ω debe ser al menos Δ^1_3.

6.5 Conjuntos de Borel en modelos transitivos

Ahora estamos en condiciones de abordar un problema fundamental a la hora de tratar con conjuntos de Borel en un modelo transitivo M de ZF + ED, y es que, en principio, los subconjuntos de Borel de, digamos $\mathcal{N}^M = \mathcal{N} \cap M$ tienen poco que ver con los de $\mathcal{N}$. Por ejemplo, si M es numerable todos los subconjuntos de $\mathcal{N}^M$ son numerables, luego son nulos y de primera categoría. No podemos decir ni por asomo que "ser medible", "ser nulo", "ser de primera categoría", "tener la propiedad de Baire", etc. sean propiedades absolutas para modelos transitivos.

Sin embargo, vamos a ver que estas propiedades sí resultan ser absolutas cuando se expresan en términos de los códigos de Borel que hemos introducido en la sección 4.4. Recordemos, más precisamente, que allí hemos definido un subconjunto CB de $\mathcal{N}$ de modo que, para cualquier espacio polaco X, fijada una enumeración $\{B_n\}_{n\in\omega}$ de una base de X, cada código $c \in$ CB determina un conjunto de Borel $B_c \subset X$, y hemos visto que todo conjunto de Borel de X puede expresarse de esta forma. Puesto que el teorema 4.37 prueba que las relaciones fundamentales relacionadas con los códigos y con la codificación de los conjuntos de Borel son Π^1_1, el teorema de Shoenfield nos da ahora que son absolutas:

Teorema 6.27 *Las relaciones del teorema* 4.37 *son absolutas para modelos transitivos de* ZF + ED, *al igual que la relación sobre productos cartesianos considerada tras dicho teorema.*[5]

Nota Si M es un modelo transitivo de ZF + ED, el carácter absoluto de la relación $c \in \mathrm{CB}$ es equivalente a que $\mathrm{CB}^M = \mathrm{CB} \cap M$. Similarmente, si $c \in \mathrm{CB}^M$, el carácter absoluto de $x \in B_c$ equivale a que $(B_c)^M = B_c \cap M$. En particular, CB y B_c no son absolutos como conjuntos (como términos), salvo para modelos que cumplan $\mathcal{N} \subset M$. ■

Esto justifica la definición siguiente:

Definición 6.28 Sean $M \subset N$ modelos transitivos de ZF + ED. Si $B \in M$ es un subconjunto de Borel^M de $\mathcal{N}^M$ y $c \in \mathrm{CB}^M$ cumple que $B = B_c^M$, definimos $B^N = B_c^N$. Esta definición no depende de la elección de c, pues si $d \in \mathrm{CB}^M$ y $B_c^M = B_d^M$, entonces, aplicando dos veces 6.27, tenemos que $B_c = B_d$, luego $B_c^N = B_d^N$.

Obviamente se cumplen las propiedades siguientes:

$$B = B^N \cap M, \quad (B \cup C)^N = B^N \cup C^N, \quad (B \cap C)^N = B^N \cap C^N,$$

$$(B \triangle C)^N = B^N \triangle C^N, \quad \varnothing^N = \varnothing, \quad (\mathcal{N}^M)^N = \mathcal{N}^N, \quad (\mathcal{N}^M \setminus B)^N = \mathcal{N}^N \setminus B^N.$$

Lo mismo vale para subconjuntos de Borel de $\mathcal{N} \times \mathcal{N}$, y entonces tenemos además que $(B \times C)^N = B^N \times C^N$.

Ahora vamos a necesitar una variante del teorema 1.14 sobre existencia de conjuntos de Borel universales:

Teorema 6.29 *Si $M \subset N$ son modelos transitivos de* ZF + ED, *con $\omega_1^M = \omega_1^N$, en M existe una sucesión $\{c_\alpha\}_{\alpha < \omega_1^M} \in M$ de manera que $B_{c_\alpha}^M \subset \mathcal{C}^M \times \mathcal{C}^M$ es un conjunto $\mathcal{C}^M$-universal para $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha(\mathcal{C})^M$ e igualmente $B_{c_\alpha}^N \subset \mathcal{C}^N \times \mathcal{C}^N$ es un conjunto $\mathcal{C}^N$-universal para $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha(\mathcal{C})^N$.*

[5] No está de más hacer alguna reflexión sobre este uso del teorema 6.24. Consideremos por ejemplo la relación $R = \{(x, c) \in \mathcal{N}^2 \mid c \in \mathrm{CB} \wedge x \in B_c\}$. Aquí R es un designador del lenguaje (metamatemático) $\mathcal{L}$ de la teoría de conjuntos y $\vdash_{\mathrm{ZF+ED}} R \in \Pi^1_1(\mathcal{N}^2)$. La prueba de esto consiste en mostrar explícitamente una definición Π^1_1 de R, con la cual podríamos construir explícitamente una fórmula α (otro designador de $\mathcal{L}$) tal que

$$\vdash_{\mathrm{ZF+ED}} \bigwedge xc(R(x,c) \leftrightarrow\ \vDash \bigvee y \bigwedge n\ \alpha[x,c]).$$

Al relativizar esto a un modelo M tenemos que $\bigwedge xc \in M(R^M(x,c) \leftrightarrow R(x,c))$, pues la fórmula de la derecha de la equivalencia precedente es absoluta por 6.24.

DEMOSTRACIÓN: Seguimos la demostración del teorema 1.14. El conjunto $\mathbf{\Sigma}_1^0$-universal allí construido es

$$U = \bigcup_{n\in\omega} (C_n \times B_n),$$

donde $C_n = \{c \in \mathcal{C} \mid c(n) = 0\}$ y es fácil definir explícitamente un código $c_0 \in \Sigma_1^c$ tal que $B_{c_0} = U$ en cualquier modelo M. En particular, tanto $B_{c_0}^M$ como $B_{c_0}^N$ son universales.

Supuesta definida $\{c_\delta\}_{\delta<\alpha}$, fijamos una sucesión $\{\delta_n\}_{n\in\omega} \in M$ en las condiciones de la demostración de 1.14. El conjunto universal para $\mathbf{\Sigma}_\alpha^0(\mathcal{C})$ allí construido es

$$U = \{(y, x) \in \mathcal{C} \times \mathcal{C} \mid \bigvee n \in \omega\ (y_n, x) \notin B_{c_{\delta_n}}\}.$$

La relación

$$R(c, d) \leftrightarrow \bigwedge xy \in \mathcal{N}((y, x) \in B_c \leftrightarrow (y_n, x) \notin B_d)$$

es claramente Π_1^1, luego es absoluta para M–N. Por lo tanto, si tomamos un código c_α para U, en M se cumple que

$$\bigwedge xy \in \mathcal{N}((y, x) \in B_{c_\alpha} \leftrightarrow \bigvee n \in \omega\ R(y, c_{\delta_n})),$$

luego lo mismo se cumple en N, y esto significa que $B_{c_\alpha}^N$ es el conjunto que cumple la definición de U en N, luego también es universal en N. ■

Ahora probamos que las extensiones a través de los códigos de Borel conservan la medida y la categoría. En los dos teoremas siguientes vamos a trabajar con el espacio de Cantor $\mathcal{C}$. Observemos que $\mathcal{C}$ admite un código de Borel recursivo (y absoluto para modelos transitivos de ZF + ED), por lo que la relación $B_c \subset \mathcal{C}$ es absoluta, y esto hace que si $B \subset \mathcal{C}$, entonces $B^N \subset \mathcal{C}^N$ y que, en general, todas las consideraciones precedentes se puedan restringir al caso de los subconjuntos de $\mathcal{C}$ en lugar de $\mathcal{N}$.

Teorema 6.30 *Sea m la medida de Haar en el cubo de Cantor $\mathcal{C}$ y sea M un modelo transitivo de* ZF + ED. *Si $B \in M$ es un subconjunto de Borel de $\mathcal{C}$, entonces $m^M(B) = m(B^V)$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $\mathcal{B}$ la σ-álgebra de Borel de $\mathcal{C}$, sea $\mathcal{B}^M$ su relativización a M y sea $\mathcal{A} = \{B^V \mid B \in \mathcal{B}^M\}$. Las propiedades que hemos enunciado justo antes de este teorema implican que $\mathcal{A}$ es una subálgebra de $\mathcal{B}$. (Aquí usamos además que, como es fácil comprobar, $(\mathcal{C}^M)^V = \mathcal{C}$.)

Observemos que la aplicación $\mathcal{B}^M \longrightarrow \mathcal{A}$ dada por $B \mapsto B^V$ es un isomorfismo de álgebras, pues su inverso es el dado por $B \mapsto B \cap M$. En general, $\mathcal{A}$ no es una σ-álgebra, pues $\mathcal{B}^M$ no tiene por qué serlo (sólo es una σ-álgebra^M).

En cualquier caso, la medida m^M en $\mathcal{B}^M$ induce una medida finitamente aditiva $\lambda : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{R}$, a saber, la dada por $\lambda(B) = m^M(B \cap M)$.

Vamos a probar que λ es una medida en $\mathcal{A}$, es decir, que si $\{B_n\}_{n\in\omega}$ es una familia de elementos de $\mathcal{A}$ disjuntos dos a dos tal que $B = \bigcup\limits_{n\in\omega} B_n \in \mathcal{A}$, entonces

$$\lambda(B) = \sum_{n\in\omega} \lambda(B_n).$$

Esto sería trivial si pudiéramos suponer que la sucesión dada está en M, pero no podemos. La aditividad finita implica, en cualquier caso, la desigualdad $\geq$. Para probar la contraria tomamos un $\epsilon > 0$.

Como cada $B_n \cap M \in M$, usando la regularidad de m^M obtenemos un abierto^M tal que $B_n \cap M \subset G_n \subset \mathcal{C}^M$ y $m^M(G_n) - m^M(B_n) < \epsilon/2^{n+2}$. Puesto que G_n y G_n^V tienen el mismo código de Borel y éste ha de estar en $(\Sigma^1_1)^M$, tenemos que G_n^V es abierto en $\mathcal{C}$ y

$$B_n \subset B_n^V \subset \mathcal{C}, \qquad \lambda(G_n^V) - \lambda(B_n) < \epsilon/2^{n+2}.$$

Por otra parte, como $B\cap M \in M$, existe un compacto^M tal que $C \subset B\cap M$ y $\lambda(B\cap M) - \lambda(C) < \epsilon/2$. De nuevo por la conservación de los códigos de Borel, tenemos que C^V es un cerrado en $\mathcal{C}$ (luego compacto) y

$$C^V \subset B, \qquad \lambda(B) - \lambda(C^V) < \epsilon/2.$$

Así tenemos que

$$C^V \subset B \subset \bigcup_{n\in\omega} G_n^V,$$

luego, por compacidad, existe un $m \in \omega$ tal que $C^V \subset \bigcup\limits_{n<m} G_n^V$. Por consiguiente:

$$\lambda(B) = \lambda(B\setminus C^V) + \lambda(C^V) \leq \frac{\epsilon}{2} + \sum_{n<m} \lambda(G_n^V)$$

$$\leq \frac{\epsilon}{2} + \sum_{n<m} \lambda(B_n) + \sum_{n<m} \frac{\epsilon}{2^{n+2}} \leq \sum_{n\in\omega} \lambda(B_n) + \epsilon,$$

y, como esto es cierto para todo $\epsilon > 0$, tenemos la desigualdad $\leq$ que perseguíamos.

Ahora podemos aplicar el teorema de Caratheodory [T B.19], según el cual λ se extiende a una medida μ sobre la σ-álgebra generada por $\mathcal{A}$.

Ahora bien, $\mathcal{A}$ contiene a todos los abiertos básicos $B_s \subset \mathcal{C}$. En efecto. Si $s = s_k$, entonces un código de Borel para B_s es la sucesión c_k dada por $c_k(0) = 2$ y $c_k(n+1) = 1 \leftrightarrow n = k$, y claramente $c_k \in M$. Así pues, $B_s = B_{c_k}$ y, relativizando esto a M, $B_s^M = B_{c_k}^M$, por lo que $B_s = (B_s^M)^V \in \mathcal{A}$.

Esto implica que la σ-álgebra generada por $\mathcal{A}$ contiene a todos los abiertos de $\mathcal{C}$, luego no es sino la σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}$, y así tenemos una medida de Borel $\mu : \mathcal{B} \longrightarrow \mathbb{R}$ que extiende a λ.

Por otra parte, si B_s es un abierto básico, tenemos que

$$\mu(B_s) = \lambda(B_s) = m^M(B_s \cap M) = m^M(B_s^M) = 2^{-\ell(s)},$$

de modo que μ satisface la propiedad que determina a m y, por consiguiente, $\mu = m$ y, como había que probar, $m^M(B) = \lambda(B^V) = m(B^V)$. ■

Equivalentemente, lo que afirma el teorema anterior es que si $c \in \mathrm{CB}^M$ y $B_c \subset \mathcal{C}$, entonces $m(B_c)^M = m(B_c)$. En particular, “B_c es un conjunto nulo” es absoluto para modelos transitivos de ZF + ED. Veamos ahora el análogo para la categoría:

Teorema 6.31 *“B_c es de primera categoría” es absoluto para modelos transitivos de* ZF + ED.

DEMOSTRACIÓN: Sea M un modelo transitivo de ZF + ED. Veamos en primer lugar que si $c \in (\Pi_1^c)^M$, entonces B_c^M es diseminado^M si y sólo si B_c es diseminado.

En efecto, si B_c no es diseminado, existe un abierto básico B_s de modo que $B_s \subset B_c$. Si $s = s_k$, en la prueba del teorema anterior hemos visto que $B_s = B_{c_k}$, donde el código c_k está en M. Por consiguiente, $B_{c_k} \subset B_c$ y la inclusión es absoluta, luego $B_{c_k}^M \subset B_c^M$ y $B_{c_k}^M$ es un abierto básico (no vacío) en M, luego B_c^M tampoco es diseminado. La prueba del recíproco es idéntica.

Supongamos ahora que B_c^M es de primera categoría^M. Entonces existe una sucesión $\{F_n\}_{n\in\omega} \in M$ de conjuntos diseminados^M tal que $B_c^M = \bigcup\limits_{n\in\omega} F_n$.

Entonces $\overline{F}_n^M$ es también diseminado^M y cerrado^M. Por ED^M existe una sucesión $\{c_n\}_{n\in\omega} \in M$ de códigos de Borel $(\Pi_1^c)^M$ de modo que $\overline{F}_n^M = B_{c_n}^M$.

Podemos construir explícitamente un código de Borel $c' \in \mathrm{CB}^M$ tal que $B_{c'}^M = \bigcup\limits_{n\in\omega} B_{c_n}^M$, con lo que $B_c^M \subset B_{c'}^M$, luego $B_c \subset B'_c = \bigcup\limits_{n\in\omega} B_{c_n}$ y hemos probado que cada conjunto B_{c_n} es diseminado, luego B_c es de primera categoría.

Supongamos ahora que B_c^M es de segunda categoría^M. Puesto que B_c^M es de Borel^M, tiene la propiedad de Baire^M, luego existe un $G \in M$ abierto^M no vacío tal que $B_c^M \triangle G$ es de primera categoría^M.

Tomemos códigos de Borel $d \in (\Sigma_1^c)^M$, $e \in \mathrm{CB}^M$ tales que $G = B_d^M$ y $B_e^M = B_c^M \triangle B_d^M$. Entonces $B_e = B_c \triangle B_d$, B_d es abierto no vacío y, por la parte ya probada, B_e es de primera categoría. Esto implica que B_c es de segunda categoría. ■

Cuando comparamos dos modelos con los mismos reales, podemos enunciar los resultados sin códigos:

Teorema 6.32 *Sean $M \subset N$ dos modelos transitivos de* ZF + ED *tales que $\mathcal{N}^M = \mathcal{N}^N$. Entonces, para todo $A \in M$, $A \subset \mathcal{N}^M$:*

a) $A \subset \mathcal{C}^M$ es m-medible^M si y sólo si es m-medible^N.

b) A tiene la propiedad de Baire^M si y sólo si tiene la propiedad de Baire^N.

c) A es numerable^M si y sólo si es numerable^N.

d) A contiene un subconjunto perfecto^M si y sólo si contiene un subconjunto perfecto^N.

Demostración: Tenemos que $\mathrm{CB}^M = \mathrm{CB}^N$ y, para todo $c \in \mathrm{CB}^M$, se cumple que $A_c^M = A_c \cap \mathcal{N}^M = A_c \cap \mathcal{N}^N = A_c^N$. Por lo tanto, $\mathcal{N}^M$ y $\mathcal{N}^N$ tienen los mismos conjuntos de Borel y, si $B \in M$ es un subconjunto de Borel de $\mathcal{N}^M$, entonces $B^N = B$.

Llamemos $\mathcal{B}$ a la σ-álgebra de Borel de $\mathcal{N}$ tanto en M como en N. El teorema 6.30 nos garantiza que, si $B \in \mathcal{B}$ y $B \subset \mathcal{C}^M$, entonces $m(B)$ es el mismo calculado en M o en N, por lo que representaremos esta medida simplemente por $m(B)$. En particular, B es nulo en M si y sólo si es nulo en N. Igualmente, un $B \in \mathcal{B}$ es de primera categoría en M si y sólo si lo es en N.

a) Sea $A \in M$, $A \subset \mathcal{C}^M$. Si A es m-medible^M, entonces $A = B \cup N$, donde $B \in \mathcal{B}$ y $N = A \setminus B$ es nulo^M. Basta observar que N también es nulo^N, ya que esto equivale a que, para todo $\epsilon > 0$, existe un $B \in \mathcal{B}$ tal que $N \subset B \subset \mathcal{C}$ y $m(B) < \epsilon$, y esto sucede en M si y sólo si sucede en N. Por lo tanto, A es medible^N (y su medida en N es la misma que en M, a saber, la de B). El recíproco se prueba igualmente.

El razonamiento para b) es completamente análogo, cambiando "nulo" por "de primera categoría".

c) Si A es numerable en N, entonces existe $x \in \mathcal{N}^N$ tal que $A = \{x_n\}_{n\in\omega}$. Como $x \in M$, también A es numerable^M. El recíproco es obvio.

d) A contiene un subconjunto perfecto en M si y sólo si contiene un conjunto de Borel no numerable^M, si y sólo si contiene un conjunto de Borel no numerable^N, si y sólo si contiene un subconjunto perfecto en N. ■

Este teorema se aplica en particular a V y al modelo $L(\mathcal{N})$, del que nos ocupamos en la sección siguiente.

6.6 El modelo $L(\mathcal{N})$

Consideramos ahora el modelo $L(\mathcal{N})$ definido en la sección 3.8 de [PC], es decir, el menor modelo de ZF que contiene a todos los ordinales y a $\mathcal{N}$. Observemos en primer lugar que

$$L(\mathcal{P}\omega) = L(\mathcal{C}) = L(\mathcal{N}) = L(\mathbb{R}).$$

En efecto, cada una de estas clases es el menor modelo de ZF que contiene a todos los ordinales y a $\mathcal{P}\omega$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{N}$ o $\mathbb{R}$, respectivamente, pero todo modelo que contenga a $\mathcal{P}\omega$ contiene a $\mathcal{C}$, ya que cada $A \in \mathcal{P}\omega$ puede codificarse por su función característica $\chi_A \in \mathcal{C}$, de modo que $A \in L(\mathcal{C})$, luego $\mathcal{P}\omega \subset L(\mathcal{C})$, luego $\mathcal{P}\omega = \mathcal{P}\omega \cap L(\mathcal{C}) = (\mathcal{P}\omega)^{L(\mathcal{C})} \in L(\mathcal{C})$. Esto prueba que $L(\mathcal{P}\omega) \subset L(\mathcal{C})$, y el recíproco se prueba análogamente.

La igualdad $L(\mathcal{P}\omega) = L(\mathcal{N})$ se demuestra de forma similar. Ahora necesitamos una biyección absoluta $\omega \times \omega \longrightarrow \omega$, por ejemplo, la biyección canónica $\langle\ ,\ \rangle$ definida en 3.3. Así, si $x \in \mathcal{N}$, podemos considerar el conjunto

$$A = \{n \in \omega \mid \bigvee uv \in \omega(n = \langle u, v\rangle \wedge x(u) = v)\}.$$

Como $A \in L(\mathcal{P}\omega)$, también $x \in L(\mathcal{P}\omega)$, luego $\mathcal{N} \subset L(\mathcal{P}\omega)$, luego $\mathcal{N} = \mathcal{N}^{L(\mathcal{P}\omega)} \in L(\mathcal{P}\omega)$ y $L(\mathcal{N}) \subset L(\mathcal{P}\omega)$. Para la inclusión contraria podemos usar funciones características, como antes.

Por último, a partir de un homeomorfismo canónico (por ejemplo, el definido por las fracciones continuas) $\mathcal{N} \cong \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, se razona que $L(\mathcal{N}) = L(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = L(\mathbb{R})$, ya que $\mathbb{Q}$ está en todo modelo transitivo de ZF.

En [PC 3.51] probamos que $L(\mathcal{P}\omega)$ cumple el principio de elecciones dependientes, pero ahora vamos a ver que no cumple necesariamente el axioma de elección. Para ello necesitamos un resultado técnico:

Teorema 6.33 *Sea $\phi(x)$ una fórmula con x como única variable libre. Sea M un modelo transitivo numerable de* ZFC *y consideremos dos conjuntos no numerables^M I, J. Sea $\mathbb{P} = \mathrm{Fn}(I, 2, \aleph_0)$ y $\mathbb{Q} = \mathrm{Fn}(J, 2, \aleph_0)$. Entonces, para todo ordinal $\alpha \in M$ se cumple*

$$\mathbb{1}_{\mathbb{P}} \Vdash \phi(\check{\alpha})^{L(\mathcal{P}\omega)} \leftrightarrow \mathbb{1}_{\mathbb{Q}} \Vdash \phi(\check{\alpha})^{L(\mathcal{P}\omega)}.$$

Demostración: Supongamos, por ejemplo, que $(|I| \leq |J|)^M$. Consideremos $\mathbb{R} = \mathrm{Fn}(I, J, \aleph_1)^M$ y sea H un filtro $\mathbb{R}$-genérico sobre M. Entonces $(|I| = |J|)^{M[H]}$, pues la aplicación genérica $f_H : I \longrightarrow J$ es suprayectiva.

Sea G un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre $M[H]$ (luego $\mathbb{P}$-genérico sobre M). Veamos que $\mathcal{P}\omega \cap M[H][G] = \mathcal{P}\omega \cap M[G]$. Una inclusión es obvia. Para probar la otra tomamos $x \in \mathcal{P}\omega \cap M[H][G]$. Por el teorema [PC 5.21], existe un buen nombre $\sigma \in M[H]^{\mathbb{P}}$ para un subconjunto de $\check{\omega}$ tal que $x = \sigma_G$. Esto significa que

$$\sigma = \bigcup_{n \in \omega} \{\check{n}\} \times A_n,$$

donde A_n es una anticadena en $\mathbb{P}$. Ahora bien, $\mathbb{P}$ cumple la condición de cadena numerable$^{M[H]}$ (teorema [PC 5.15]), luego cada $A_n \subset \mathbb{P} \subset M$ es numerable$^{M[H]}$. Por consiguiente, también $\sigma \subset M$ es numerable$^{M[H]}$. Como ($\mathbb{R}$ es $\aleph_1$-cerrado)^M, el teorema [PC 5.8] nos da que, de hecho, $\sigma \in M^{\mathbb{P}}$. Por tanto, $x = \sigma_G \in M[G]$.

Tenemos, pues, que $(\mathcal{P}\omega)^{M[G]} = (\mathcal{P}\omega)^{M[H][G]}$. Como el término $L_\alpha(A)$ es absoluto para modelos transitivos de ZF, concluimos que para todo ordinal $\alpha \in M$ se cumple $L_\alpha(\mathcal{P}\omega)^{M[G]} = L_\alpha(\mathcal{P}\omega)^{M[H][G]}$. A su vez esto implica que los conjuntos $x \in M[H][G]$ que cumplen $(x \in L(\mathcal{P}\omega))^{M[H][G]}$ son exactamente los conjuntos $x \in M[G]$ que cumplen $(x \in L(\mathcal{P}\omega))^{M[G]}$. Es claro entonces que si $\alpha \in M$, se cumple

$$(\phi(\alpha)^{L(\mathcal{P}\omega)})^{M[H][G]} \leftrightarrow (\phi(\alpha)^{L(\mathcal{P}\omega)})^{M[G]},$$

pues, al relativizar, las variables ligadas quedan restringidas por condiciones equivalentes. De aquí a su vez obtenemos que

$$\bigvee p \in \mathbb{P}\ p \Vdash_M \phi(\check{\alpha})^{L(\mathcal{P}\omega)} \leftrightarrow \bigvee p \in \mathbb{P}\ p \Vdash_{M[H]} \phi(\check{\alpha})^{L(\mathcal{P}\omega)}.$$

Ahora bien, por [PC 5.14] tenemos que $\mathbb{P}$ es casi homogéneo en M y en $M[H]$, luego el teorema [PC 4.45] nos da que

$$\mathbb{1}_{\mathbb{P}} \Vdash_M \phi(\check{\alpha})^{L(\mathcal{P}\omega)} \leftrightarrow \mathbb{1}_{\mathbb{P}} \Vdash_{M[H]} \phi(\check{\alpha})^{L(\mathcal{P}\omega)}.$$

Todo el razonamiento vale para $\mathbb{Q}$ igual que para $\mathbb{P}$, luego también tenemos

$$\mathbb{1}_{\mathbb{Q}} \Vdash_M \phi(\check{\alpha})^{L(\mathcal{P}\omega)} \leftrightarrow \mathbb{1}_{\mathbb{Q}} \Vdash_{M[H]} \phi(\check{\alpha})^{L(\mathcal{P}\omega)}.$$

Por último, como $(|I| = |J|)^{M[H]}$, tenemos que $\mathbb{P}$ y $\mathbb{Q}$ son semejantes en $M[H]$, con lo que el teorema [PC 4.39] nos da que

$$\mathbb{1}_{\mathbb{P}} \Vdash_{M[H]} \phi(\check{\alpha})^{L(\mathcal{P}\omega)} \leftrightarrow \mathbb{1}_{\mathbb{Q}} \Vdash_{M[H]} \phi(\check{\alpha})^{L(\mathcal{P}\omega)}.$$

En definitiva,

$$\mathbb{1}_{\mathbb{P}} \Vdash_M \phi(\check{\alpha})^{L(\mathcal{P}\omega)} \leftrightarrow \mathbb{1}_{\mathbb{Q}} \Vdash_M \phi(\check{\alpha})^{L(\mathcal{P}\omega)}.$$

■

Ahora podemos probar que el axioma de elección no es demostrable en ZF (ni siquiera en ZF + ED):

Teorema 6.34 *Si* ZFC *es consistente, también lo es* ZF + $V = L(\mathcal{P}\omega) + \mathcal{P}\omega$ *no puede ser bien ordenado.*

Demostración: Sea M un modelo transitivo numerable de ZFC + $V = L$. Sea $I \in M$ un conjunto no numerable^M y consideremos el c.p.o. $\mathbb{P} = \mathrm{Fn}(I, 2, \aleph_0)$. Sea G un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M y sea $N = L(\mathcal{P}\omega)^{M[G]}$. Por [PC 3.46] sabemos que N es un modelo transitivo (numerable) de ZF + $V = L(\mathcal{P}\omega)$. Si suponemos que ($\mathcal{P}\omega$ puede ser bien ordenado)^N, podemos considerar

$$\kappa = |\mathcal{P}\omega|^N = (|\mathcal{P}\omega|^{L(\mathcal{P}\omega)})^{M[G]},$$

es decir, el menor ordinal biyectable con $(\mathcal{P}\omega)^N$ mediante una biyección perteneciente a N. Como $\mathbb{P}$ es casi homogéneo^M, se cumple que

$$\mathbb{1}_{\mathbb{P}} \Vdash (\check{\kappa} = |\mathcal{P}\omega|)^{L(\mathcal{P}\omega)}.$$

Sea μ un cardinal regular^M tal que $\mu > \kappa$ y sea $\mathbb{Q} = \mathrm{Fn}(\mu, 2, \aleph_0)^M$. Por el teorema anterior también $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}} \Vdash (\check{\kappa} = |\mathcal{P}\omega|)^{L(\mathcal{P}\omega)}$. Sea G' un filtro $\mathbb{Q}$-genérico sobre M. Así $\kappa = (|\mathcal{P}\omega|^{L(\mathcal{P}\omega)})^{M[G']}$, luego $|\mathcal{P}\omega|^{M[G']} = |\kappa|^{M[G']} \leq \kappa$, es decir, $(2^{\aleph_0})^{M[G']} \leq \kappa$.

Ahora bien, según [PC 5.23] tenemos que $|\mathcal{P}\omega|^{M[G']} = (2^{\aleph_0})^{M[G']} = \mu > \kappa$, contradicción. ■

Nota El teorema anterior prueba en realidad la consistencia de ZFC + $\mathcal{P}\omega$ no puede ser bien ordenado en $L(\mathcal{P}\omega)$, en particular la consistencia (con ZFC) de que $L(\mathcal{P}\omega)$ no cumpla el axioma de elección. En virtud de [PC 3.51] podemos concluir también que (en ZF) el principio de elecciones dependientes no permite probar que $\mathcal{P}\omega$ pueda ser bien ordenado. ■

Para extraer más consecuencias del teorema anterior observamos lo siguiente:

Teorema 6.35 $L(\mathcal{N})$ *contiene a todos los subconjuntos proyectivos de* $\mathcal{N}$.

DEMOSTRACIÓN: Basta observar que, como $\mathcal{N} \subset L(\mathcal{N})$, la fórmula $\vDash \phi[v]$ es absoluta para $L(\mathcal{N})$ y, como todo subconjunto proyectivo de $\mathcal{N}$ es de la forma $A = \{x \in \mathcal{N} \mid \vDash \phi[x]\}$, para cierta fórmula ϕ de $\mathcal{L}_a$, concluimos que

$$A = \{x \in \mathcal{N}^{L(\mathcal{N})} \mid \vDash^{L(\mathcal{N})} \phi[x]\} = \{x \in \mathcal{N} \mid \vDash \phi[x]\}^{L(\mathcal{N})} \in L(\mathcal{N}).$$ ■

Obviamente, $L(\mathcal{N})$ contiene en realidad a todos los subconjuntos proyectivos de cualquier espacio $\omega^r \times \mathcal{N}^s$, pues todos ellos son recursivamente homeomorfos a ω o a $\mathcal{N}$.

Según 6.7, si $\mathcal{N} \subset L[a]$ existe un buen orden $\mathbf{\Delta}_2^1$ en $\mathcal{N}$ y, por consiguiente, en cualquier espacio polaco. La pregunta es: ¿puede demostrarse la existencia de dicho buen orden en ZFC, sin suponer $\mathcal{N} \subset L[a]$? Y la respuesta es negativa. Más aún:

> *(Si* ZFC *es consistente) la existencia de un buen orden proyectivo en* $\mathcal{N}$ *(o, equivalentemente, en cualquier espacio polaco no numerable) es independiente de los axiomas de* ZFC.

En efecto, que no puede refutarse se sigue de la consistencia de $V = L$, mientras que en la prueba de 6.34 construimos un modelo transitivo M de ZFC en el que $\mathcal{P}\omega$ no puede ser bien ordenado en $L(\mathcal{P}\omega) = L(\mathcal{N})$, es decir, que en dicho modelo, $\mathcal{P}\omega$ y, por consiguiente, $\mathcal{N}$, no admite un buen orden que pertenezca a $L(\mathcal{N})$, luego por el teorema anterior no admite un buen orden proyectivo.

Ejercicio: Demostrar que $L(\mathcal{N})$ contiene a la σ-álgebra generada por el álgebra de los subconjuntos proyectivos de $\mathcal{N}$. (AYUDA: Asignar a cada uno de sus elementos un código en $\mathcal{N}$.)

6.7 Indiscernibles uniformes

Recordemos brevemente la teoría de los indiscernibles de Silver. Momentáneamente trabajamos en ZFC. Según [CG 3.20], para cada $x \subset V_\omega$ tenemos definido (aunque no podemos demostrar que existe) el conjunto $x^\sharp$, que es un conjunto de fórmulas del lenguaje $\mathcal{L}_R$ que resulta de añadir al lenguaje de la teoría de conjuntos un relator monádico R. Este lenguaje tiene por modelo natural a la clase $L[x]$, donde R se interpreta como la pertenencia a x. En principio no podemos definir la relación de satisfacción de una fórmula en una clase propia, pero en [CG 3.25] se ve que, si existe $x^\sharp$, sí que es posible definir una relación $L[x] \vDash \phi[a_1, \ldots, a_n]$ con el significado esperado.

La existencia de $x^\sharp$ es en última instancia una propiedad, no de x, sino de $L[x]$, por lo que no perdemos generalidad si, en lugar de considerar conjuntos $x \subset V_\omega$ arbitrarios, consideramos únicamente $x \in \mathcal{N}$, ya que para todo $x \subset V_\omega$ existe un $x' \in \mathcal{N}$ tal que $L[x] = L[x']$, por lo que la existencia de $x^\sharp$ equivale a la existencia de $x'^\sharp$. A su vez, el conjunto $x^\sharp$ es un conjunto de fórmulas de $\mathcal{L}_R$, las cuales pueden ser codificadas recursivamente por números naturales y $x^\sharp$ puede, a su vez, codificarse por un elemento de $\mathcal{N}$. Así pues, aquí podemos suponer que para cada $x \in \mathcal{N}$, si existe $x^\sharp$, entonces $x^\sharp \in \mathcal{N}$.

Con esta codificación recursiva no deja de cumplirse el teorema [CG 3.37], según el cual la fórmula

$$\phi(x, y) \equiv \text{ Existe } x^\sharp \land y = x^\sharp$$

es Π_1. El teorema 6.1 (usando AE) nos da que el conjunto

$$A = \{(x, y) \in \mathcal{N}^2 \mid \text{existe } x^\sharp \land y = x^\sharp\}$$

es Π^1_2 o, más explícitamente, que existe una fórmula aritmética $\psi(x, y, z, w)$ tal que (bajo AE),

$$\text{existe } x^\sharp \land y = x^\sharp \leftrightarrow \ \vDash \bigwedge z \bigvee w \ \psi[x, y].$$

Veamos que el uso de AE se puede eliminar. Trabajando en ZF + ED, podemos entender que, por definición,[6]

$$\text{existe } x^\sharp \land y = x^\sharp \equiv (\text{existe } x^\sharp \land y = x^\sharp)^{L[x,y]},$$

y, como $L[x, y]$ es un modelo de ZFC, esto equivale a

$$(\vDash \bigwedge z \bigvee w \ \psi[x, y])^{L[x,y]} \leftrightarrow \ \vDash \bigwedge z \bigvee w \ \psi[x, y],$$

donde la última equivalencia se debe al teorema de Shoenfield 6.23. Con esto hemos probado que el carácter Π^1_2 del conjunto A es demostrable en ZF + ED, sin necesidad de AE:

Teorema 6.36 (Solovay) *El conjunto* $\{(x, y) \in \mathcal{N}^2 \mid$ *existe* $x^\sharp \land y = x^\sharp\}$ *es de clase* Π^1_2.

Una consecuencia elemental de este hecho es la siguiente:

Teorema 6.37 *Si existe* $0^\sharp \in \mathcal{N}$, *entonces es*[7] Δ^1_3.

Demostración: Si llamamos A al conjunto Π^1_2 considerado en el teorema anterior, entonces $y = 0^\sharp \leftrightarrow (y, 0) \in A$, luego $\{0^\sharp\}$ es $\Pi^1_2(0)$, que es lo mismo que Π^1_2. A su vez,

$$(m, n) \in 0^\sharp \leftrightarrow \bigwedge y(y \in \{0^\sharp\} \rightarrow (m, n) \in y) \leftrightarrow \bigvee y(y \in \{0^\sharp\} \land (m, n) \in y),$$

luego $0^\sharp$ es Δ^1_3. ■

Así pues, si es consistente que exista $0^\sharp$, también es consistente que exista un subconjunto Δ^1_3 de ω no constructible. En realidad esto puede probarse a partir de la mera consistencia de ZF.

[6] Por [CG 3.38] esto equivale a que exista $x^\sharp$ en cualquier modelo interno de ZFC, y $x^\sharp$ será el mismo en cualquier modelo interno de ZFC en que se calcule.

[7] Como subconjunto de $\omega \times \omega$. Más aún, si entendemos que $0^\sharp$ es la función característica de un subconjunto de ω (un conjunto de fórmulas), una ligera variación de la prueba muestra que dicho conjunto es también Δ^1_3.

Observemos que en realidad $x \in L[x, x^\sharp] = L[x^\sharp]$, pues $x^\sharp$ codifica un conjunto de Ehrehfeucht-Mostowski $\Sigma \in L[x^\sharp]$ y

$$x(m) = n \leftrightarrow L[x] \vDash R([m],[n]) \leftrightarrow (\bigvee x_0 \ldots x_m y_1 \ldots y_n (x_0 = 0 \wedge$$

$$x_1 = x_0 + 1 \wedge \cdots \wedge x_m = x_{m-1} + 1 \wedge y_0 = 0 \wedge$$

$$y_1 = y_0 + 1 \wedge \cdots \wedge y_n = y_{n-1} + 1 \wedge R(x_m, y_n)) \in \Sigma,$$

y la última sentencia es absoluta para $L[x^\sharp]$.

La consecuencia principal de la existencia de $x^\sharp$ es la existencia de una clase de indiscernibles I_x (los indiscernibles de Silver) caracterizada por el teorema [CG 3.24]. En principio, podemos definir I_x como la clase de indiscernibles construida en $L[x^\sharp]$, pero en realidad tenemos que si M es cualquier modelo interno de ZFC que contenga a x y a $x^\sharp$, por [CG 3.38] se cumple que $x^\sharp$ existe^M y $(x^\sharp)^M = x^\sharp$ y, más aún, la clase $I_x^{L[x^\sharp]}$ cumple en M las condiciones del teorema [CG 3.24], por lo que $I_x^{L[x^\sharp]} = I_x^M$. En definitiva, no necesitamos explicitar el modelo interno en el que se calcula I_x y, en particular, tenemos que la fórmula $\alpha \in I_x$ es absoluta para modelos internos de ZFC que contengan a x y a $x^\sharp$.

Las propiedades principales de los indiscernibles de Silver $I_x \subset \Omega$ son las siguientes:

En primer lugar son indiscernibles salvo el orden, es decir, que para toda fórmula $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ y dos series de indiscernibles $\epsilon_1 < \cdots < \epsilon_n$ y $\eta_1 < \cdots < \eta_n$ se cumple que

$$L[x] \vDash \phi[\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n] \leftrightarrow L[x] \vDash \phi[\eta_1, \ldots, \eta_n].$$

En segundo lugar todo $a \in L[x]$ puede definirse en términos de los indiscernibles, es decir, existen indiscernibles $\epsilon_1 < \cdots < \epsilon_n$ y una fórmula $\phi(x, x_1, \ldots, x_n)$ tales que a es el único elemento de $L[x]$ que cumple

$$L[x] \vDash \phi[a, \epsilon_1, \ldots, \epsilon_n].$$

Equivalentemente, la fórmula ϕ tiene asociado un término de Skolem t_ϕ (y una función de Skolem que la interpreta) de modo que

$$a = L[x](t_\phi)[\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n].$$

En el caso particular en que $a \in \Omega$, digamos que

$$\epsilon_1 < \cdots < \epsilon_i \leq a < \epsilon_{i+1} < \cdots < \epsilon_n.$$

Entonces, teniendo en cuenta que $x^\sharp$ codifica un conjunto de Ehrenfeucht-Mostowski notable, el teorema [CG 3.13] implica inmediatamente que si tomamos nuevos indiscernibles $\epsilon_i < \eta_{i+1} < \cdots < \eta_n$, se cumple que

$$a = L[x](t_\phi)[\epsilon_1, \ldots, \epsilon_i, \eta_{i+1}, \ldots \eta_n],$$

lo que a su vez se traduce en que a es el único elemento[8] de $L[x]$ que cumple

$$L[x] \vDash \phi[a, \epsilon_1, \ldots, \epsilon_i, \eta_{i+1}, \ldots, \eta_n].$$

En definitiva, si en la definición de un ordinal α a partir de indiscernibles aparecen indiscernibles $> \alpha$, éstos pueden elegirse arbitrariamente entre los mayores que el máximo indiscernible $< \alpha$ que aparece en la definición (si lo hay).

Podemos generalizar esto a conjuntos que no sean ordinales. Si $a \in L[x]$ es arbitrario, podemos considerar el ordinal α tal que existe una semejanza $f : (L[x]_a^{\lhd_x}, \unlhd_x) \longrightarrow \alpha$. Dicha semejanza existe y es única en $L[x]$, luego a puede definirse a partir de α en $L[x]$ (no necesitamos decir "a partir de α y x" porque x está interpretado por el relator R incluido en el lenguaje $\mathcal{L}_R$, luego "no cuenta" como parámetro). Por consiguiente, a es definible en $L[x]$ a partir de los mismos indiscernibles que α, luego podemos elegir arbitrariamente los indiscernibles mayores que α que aparezcan en la definición.

Esto tiene especial interés cuando, por ejemplo, $a \in L_{\aleph_1^{L[x]}}[x]$ (en particular, cuando $a \in \mathcal{N}$), pues entonces el ordinal α correspondiente es numerable, mientras que todos los indiscernibles de I_x son cardinales no numerables, por lo que, si a requiere n indiscernibles para ser definido, entonces puede ser definido por n indiscernibles cualesquiera.

Definición 6.38 Suponiendo que $\bigwedge x \in \mathcal{N}$ existe $x^\sharp$, definimos la clase de los *indiscernibles uniformes* como

$$I^* = \bigcap_{x \in \mathcal{N}} I_x.$$

Teorema 6.39 *Si $\bigwedge x$ existe $x^\sharp$, la clase I^* es cerrada no acotada, contiene a todos los cardinales no numerables y, para todo $x \in \mathcal{N}$ y todo $u \in I^*$, el ordinal de $I_x \cap u$ es u.*

Demostración: La intersección de cerrados es cerrada (no importa que sean clases propias: si λ es un ordinal límite y $\lambda \cap I^*$ no está acotado en λ tampoco lo está cada $\lambda \cap I_x$, por lo que $\lambda \in I_x$, luego $\lambda \in I^*$). Como cada I_x contiene a todos los cardinales no numerables, lo mismo le sucede a I^* y en particular no es acotada.

Fijemos ahora $x \in \mathcal{N}$ y $u \in I^*$. Observemos en primer lugar que $I_x \cap u$ no está acotado en u. Si lo estuviera, sea $\beta < u$ una cota superior. Entonces en $L[x^\sharp]$ podemos definir u como el menor elemento de I_x mayor que β, es decir, en términos de x y de β. Por los mismos argumentos empleados en la prueba de [CG 3.34], en $L[x^\sharp]$ tanto x como β (y por consiguiente u) pueden definirse en términos de indiscernibles de $I_{x^\sharp}$ distintos de u, lo que lleva a la misma contradicción final.

[8]Notemos que, por indiscernibilidad, $L[x] \vDash \overset{1}{\bigvee} x\ \phi(x)[\epsilon_1, \ldots, \epsilon_i, \eta_{i+1}, \ldots, \eta_n]$.

Esto vale para todo $x \in \mathcal{N}$, luego en particular $I_{x^\sharp} \cap u$ no está acotado en u. Por lo tanto, si $\alpha < u$, podemos definir α en $L[x^\sharp]$ a partir de indiscernibles menores que u (porque el número finito de indiscernibles mayores que α que aparezcan en una definición de α se pueden sustituir por otros cualesquiera de los infinitos que hay entre α y u). También sabemos que x es definible en $L[x^\sharp]$ a partir de indiscernibles arbitrariamente pequeños, en particular menores que u.

Por otro lado, en $L[x^\sharp]$ podemos definir a partir de x una función normal $i : \Omega \longrightarrow I_x$, luego $i(\alpha)$ puede definirse a partir de x y de α, luego también a partir de indiscernibles de $I_{x^\sharp}$ menores que u. Si $i(\alpha)$ es el único $\beta \in L[x^\sharp]$ que cumple $L[x^\sharp] \vDash \phi[\beta, \xi_1, \ldots, \xi_n]$, con indiscernibles $\xi_1 < \cdots < \xi_n < u$, entonces, tomando cualquier indiscernible $\xi > \text{máx}\{\beta, u\}$, tenemos que

$$L[x^\sharp] \vDash \bigvee \beta(\phi(\beta)[\xi_1, \ldots, \xi_n] \land \beta < [\xi]),$$

donde podemos sustituir ξ por u, lo que nos lleva a que $i(\alpha) < u$. Esto prueba que I_x contiene una sección inicial de ordinal α formada por ordinales menores que u, para todo $\alpha < u$, luego $u \leq \operatorname{ord}(I_x \cap u)$, y la otra desigualdad es obvia. ■

Como I^* es cerrado no acotado en Ω, es el rango de una función normal, aunque es costumbre numerar los indiscernibles uniformes empezando con el índice 1 en lugar del 0:

Definición 6.40 Si $\bigwedge x \in \mathcal{N}$ existe $x^\sharp$, definimos $u : \Omega \setminus \{0\} \longrightarrow I^*$ como la única semejanza entre ambas clases, de modo que $I^* = \{u_\alpha \mid 1 \leq \alpha \in \Omega\}$.

Que I^* sea cerrado no acotado se traduce en que, para todo límite λ, se cumple que $u_\lambda = \sup\{u_\delta \mid \delta < \lambda\}$. La razón para empezar la numeración en 1 es el teorema siguiente:

Teorema 6.41 *Si $\bigwedge x \in \mathcal{N}$ existe $x^\sharp$, se cumple que $u_1 = \aleph_1$ y*

$$\bigwedge \alpha > 0 \ u_\alpha \leq \aleph_\alpha.$$

Demostración: La segunda parte se debe a que la aplicación $\alpha \mapsto u^{-1}(\aleph_\alpha)$ es inyectiva y creciente, luego necesariamente $\alpha \leq u^{-1}(\aleph_\alpha)$.

Ahora basta probar que ningún $\xi < \aleph_1$ es un indiscernible uniforme. Para ello tomamos $x \in \mathrm{BO}$ tal que $\|x\| = \xi$. Entonces ξ es definible en $L[x]$, luego $\xi \notin I_x$. ■

Teorema 6.42 (Solovay) *Supongamos que $\bigwedge x \in \mathcal{N}$ existe $x^\sharp$. Entonces, para todo $\alpha > 0$ se cumple que* $\operatorname{cf} u_{\alpha+1} = \operatorname{cf} u_2 \leq \aleph_2$.

Demostración: Sea $n : \Omega \times \mathcal{N} \longrightarrow \Omega$ la aplicación dada por $n(\alpha, x) = \text{mín}\, I_x \setminus (\alpha + 1)$, es decir, $n(\alpha, x)$ es el menor indiscernible de I_x mayor que α. Veamos que, para todo $\alpha > 0$, se cumple que

$$u_{\alpha+1} = \sup\{n(u_\alpha, x) \mid x \in \mathcal{N}\}.$$

Llamemos s al supremo. Como $u_\alpha < u_{\alpha+1} \in I_x$, es obvio que $u_\alpha < s \leq u_{\alpha+1}$. Basta probar que $s \in I^*$. Para ello tomamos $y \in \mathcal{N}$ y observamos que

$$s = \sup\{n(u_\alpha, x) \mid x \in \mathcal{N}\} = \sup\{n(u_\alpha, x) \mid x \in \mathcal{N} \land y \in L[x]\},$$

pues si $x \in \mathcal{N}$ existe un $x' \in \mathcal{N}$ tal que $x, y \in L[x']$ y por [CG 3.34] tenemos que $I_{x'} \subset I_x$, luego $n(u_\alpha, x) \leq n(u_\alpha, x')$, luego s es menor o igual que el supremo de la derecha, y la desigualdad contraria es obvia.

Ahora observamos que si $y \in L[x]$ entonces $n(u_\alpha, x) \in I_x \subset I_y$, luego $s \in I_y$ porque la clase I_y es cerrada. Como y es arbitrario, concluimos que $s \in I^*$.

Veamos ahora que $n(u_1, x) \leq n(u_1, y)$ si y sólo si $n(u_\alpha, x) \leq n(u_\alpha, y)$ (y en particular lo mismo vale si cambiamos $\leq$ por $=$).

En efecto, sea $z = \left\langle x, y, x^\sharp, y^\sharp \right\rangle_4$. Entonces en $L[z]$ podemos hablar de x y de y a través del relator R de $\mathcal{L}_R$, es decir, sin necesidad de introducirlos como parámetros en las fórmulas, por lo que

$$n(\alpha, x) \leq n(\alpha, y) \leftrightarrow L[z] \vDash \psi[\alpha]$$

para cierta fórmula ψ, y basta usar que los u_α son indiscernibles en $L[z]$.

Así, por una parte tenemos que los conjuntos

$$C_1 = \{n(u_1, x) \mid x \in \mathcal{N}\}, \qquad C_\alpha = \{n(u_\alpha, x) \mid x \in \mathcal{N}\}$$

son cofinales en u_2 y en $u_{\alpha+1}$ respectivamente y, por otra parte, podemos definir $f : C_1 \longrightarrow C_\alpha$ mediante $n(u_1, x) \mapsto n(u_\alpha, x)$, que está bien definida (por la última propiedad que hemos demostrado) y es una semejanza. En general, es claro que la cofinalidad de un conjunto bien ordenado coincide con la de cualquier subconjunto cofinal, por lo que

$$\operatorname{cf} u_1 = \operatorname{cf} C_1 = \operatorname{cf} C_\alpha = \operatorname{cf} u_{\alpha+1}.$$ ■

En particular:

Teorema 6.43 (AE) $u_{\aleph_3} \leq \aleph_3$.

DEMOSTRACIÓN: Basta probar por inducción que si $1 \leq \alpha < \aleph_3$ entonces $u_\alpha < \aleph_3$. Si $u_\alpha < \aleph_3$, entonces $u_{\alpha+1} \leq \aleph_3$ (porque $\aleph_3$ es un indiscernible uniforme) y no puede darse la igualdad porque la cofinalidad del primero es $\leq \aleph_2$. Si $u_\delta < \aleph_3$ para todo $\delta < \lambda < \aleph_3$, entonces $u_\lambda \leq \aleph_3$, y no puede darse la igualdad porque $\operatorname{cf} u_\lambda = \operatorname{cf} \lambda \leq \lambda < \aleph_3$. ■

Para el teorema siguiente necesitamos una observación sobre la prueba del teorema 4.29 que ya hemos usado en la prueba del teorema de Shoenfield. En ella se parte de un conjunto $A \subset \mathcal{N}^s$ de clase $\Sigma^1_2(a)$, representado en la forma

$$x \in A \leftrightarrow \bigvee y \in \mathcal{N}\ U_{(x,y)} \text{ está bien fundado,}$$

donde U (allí lo llamábamos R') es un árbol en $\omega^{s+1} \times \omega$ aritmético en a, y a partir de este árbol U se contruye otro árbol R. Lo que necesitamos señalar aquí es que en la construcción de R puede sustituirse ω_1 por cualquier ordinal no numerable α. Más precisamente, podemos definir un árbol R_U^α en $\omega^s \times \alpha$ con la propiedad de que

$$x \in A \leftrightarrow \bigvee y \in \alpha^\omega \bigwedge n \in \omega\, (x|_n, y|_n) \in R_U^\alpha \leftrightarrow R_U^\alpha(x) \text{ no está bien fundado},$$

y es fácil ver a partir de su construcción que el término R_U^α es absoluto para modelos transitivos de ZF.

Teorema 6.44 *Si $\bigwedge x \in \mathcal{N}$ existe $x^\sharp$, todo subconjunto $\Pi_2^1(a)$ de $\mathcal{N}$ admite una escala $\Delta_3^1(a)$ en u_ω.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $A \subset \mathcal{N}$ un conjunto $\Pi_2^1(a)$. Por la observación precedente, existe un árbol U en ω^3 aritmético en a tal que, para todo ordinal no numerable α, se cumple que

$$x \in A \leftrightarrow R_U^\alpha(x) \text{ está bien fundado},$$

donde $R_U^\alpha(x) = \{s \in \alpha^{<\omega} \mid (x|_{\ell(s)}, s) \in R_U^\alpha\}$.

Así, para cada $\alpha \geq \omega_1$ y cada $x \in A$ tenemos definida una función rango: $\operatorname{rang}(\alpha, x) : R_U^\alpha(x) \longrightarrow \Omega$ que podemos extender a todo $\alpha^{<\omega}$ asignando el valor 0 a todas las sucesiones de ordinales que no estén en $R_U^\alpha(x)$.

Sea $\{\phi_n(v_0, \ldots, v_{k(n)})\}_{n\in\omega}$ una enumeración del conjunto de las fórmulas de $\mathrm{Form}(\mathcal{L}_R)$ (el lenguaje de la teoría de conjuntos más un relator monádico R) tales que

$$L[a] \vDash t_{\phi_n}[\aleph_1, \ldots, \aleph_{k(n)}] \in \Omega^{<\omega}.$$

(Notemos que $\aleph_i$ no ha de entenderse como $\aleph_i^{L[a]}$, sino como el auténtico $\aleph_i$, que es indiscernible en $L[a]$.) Así, si $\kappa > \aleph_0$ es un cardinal y $\xi_1 < \cdots < \xi_{k(n)} < \kappa$ son indiscernibles de I_a, se cumple que

$$\tau_n(\xi_1, \ldots, \xi_{k(n)}) = L[a](t_n)[\xi_1, \ldots, \xi_{k(n)}] \in \Omega^{<\omega}.$$

Más aún, si $(\eta_0, \ldots, \eta_{m-1}) \in \kappa^{<\omega}$ es cualquier sucesión de ordinales, sabemos que existe una fórmula $\phi(v_0, \ldots, v_k)$ tal que $(\eta_0, \ldots, \eta_{m-1})$ es el único conjunto que cumple $L[a] \vDash \phi((\eta_0, \ldots, \eta_{m-1}), \xi_1, \ldots, \xi_k)$, para cierta sucesión de indiscernibles $\xi_1 < \cdots < \xi_k$ de I_a, que pueden tomarse $< \kappa$ (pues $(\eta_0, \ldots, \eta_{m-1}) \in L_\kappa[a]$, luego es definible a partir de $I_a \cap \kappa$).

Por la indiscernibilidad tenemos que $L[a] \vDash t_\phi[\aleph_1, \ldots, \aleph_k] \in \Omega^{<\omega}$, luego existe un n tal que $\phi = \phi_n$, $k = k(n)$, y en definitiva hemos probado que toda sucesión finita de ordinales $< \kappa$ es de la forma $\tau_n(\xi_1, \ldots, \xi_{k(n)})$ para ciertos indiscernibles $\xi_1 < \cdots < \xi_{k(n)} < \kappa$ en I_a.

Ahora definimos, para cada $x \in A$,

$$\psi_n(x) = \operatorname{rang}(u_{k(n)+1}, x)(\tau_n(u_1, \ldots, u_{k(n)})) < u_\omega,$$

y vamos a ver que $\{\psi_n\}_{n\in\omega}$ es la escala cuya existencia queremos probar. La desigualdad $\psi_n(x) < u_\omega$ se debe a que la imagen de $\operatorname{rang}(\kappa, x) : \kappa^{<\omega} \longrightarrow \alpha$ es un ordinal y $\kappa^{<\omega}$ admite un buen orden, luego tenemos una aplicación inyectiva $\alpha \longrightarrow \kappa^{<\omega}$, de donde se desprende que $|\alpha| \leq \kappa$.

Tomemos una sucesión $\{x_i\}_{i\in\omega}$ contenida en A y convergente a un $x \in \mathcal{N}$ de modo que las sucesiones $\{\psi_n(x_i)\}_{i\in\omega}$ son finalmente constantes. Digamos que $\psi_n(x_i) = \alpha_n$ para todo i suficientemente grande. Tenemos que probar que $x \in A$ y que $\psi_n(x) \leq \alpha_n$ para todo n.

Sea $y \in \mathcal{N}$ tal que $y_0 = a$ $y_{i+1} = x_i$ para todo $i \in \omega$, de modo que $x_i \in L[y]$, luego $I_y \subset I_{x_i}$. Sea $\{i_\delta\}_{\delta\in\Omega}$ la enumeración creciente de I_y. El teorema 6.39 nos da que $I_y \cap u_\omega$ tiene ordinal u_ω, luego si $\delta < u_\omega$ entonces $i_\delta < u_\omega$.

Ahora observamos que para comprobar si una fórmula $\phi(v_0, \ldots, v_k)$ cumple

$$L[a] \vDash t_\phi[\aleph_1, \ldots, \aleph_k] \in \Omega^{<\omega}$$

no es necesario considerar precisamente los cardinales $\aleph_1, \ldots, \aleph_k$, sino que podemos emplear indiscernibles cualesquiera de I_a. En particular, podemos emplear indiscernibles de $I_y \subset I_a$. Esto significa que la enumeración $\{\phi_n\}_{n\in\omega}$ puede calcularse en $L[y]$. Además, como U es aritmético en a, tenemos que $U \in L[a] \subset L[y]$, luego $T_U^\alpha \in L[y]$, porque su definición es absoluta para modelos transitivos de ZF. Esto implica que las relaciones

$$S_{ij}^n(v_1, \ldots, v_{k_n}, \kappa) \leftrightarrow \operatorname{rang}(\kappa, x_i)(\tau_n(v_1, \ldots, v_{k(n)})) = \operatorname{rang}(\kappa, x_j)(\tau_n(v_1, \ldots, v_{k(n)}))$$

son definibles en $L[y]$ y, fijado n, para i, j suficientemente grandes (en función de n), se cumplen para $(v_1, \ldots, v_{k_n}, \kappa) = (u_1, \ldots, u_{k(n)}, u_{k(n)+1})$, luego, por indiscernibilidad, se cumplen también (para los mismos i, j) cuando tomamos $(v_1, \ldots, v_{k_n}, \kappa) = (i_{\delta_1}, \ldots, i_{\delta_{k(n)}}, u_\omega)$, para cualesquiera $\delta_1 < \cdots < \delta_{k(n)} < u_\omega$.

Consideremos ahora cualquier sucesión $(\eta_0, \ldots, \eta_{m-1}) \in R_U^{u_\omega}(x)$. Hemos probado antes que existen un n e indiscernibles $\xi_1 < \ldots < \xi_{k(n)} < u_\omega$ en I_a tales que

$$(\eta_0, \ldots, \eta_{m-1}) = \tau_n(\xi_1, \ldots, \xi_{k(n)}).$$

Definimos

$$f(\eta_0, \ldots, \eta_{m-1}) = \lim_i \operatorname{rang}(u_\omega, x_i)(\tau_n(i_{\xi_1}, \ldots, i_{\xi_{k(n)}})).$$

Para ver que esto tiene sentido demostraremos que la sucesión de ordinales cuyo límite estamos considerando es finalmente constante (con lo que ciertamente existe el límite), y que no depende de la representación escogida para la sucesión $(\eta_0, \ldots, \eta_{m-1})$.

En efecto, dadas dos sucesiones de indiscernibles $\xi_1 < \cdots < \xi_{k(n)} < u_\omega$ y $\xi'_1 < \cdots < \xi'_{k(n')} < u_\omega$, entonces $i_{\xi_1} < \cdots < i_{\xi_{k(n)}} < u_\omega$ e $i_{\xi'_1} < \cdots < i_{\xi'_{k(n')}} < u_\omega$ son indiscernibles que satisfacen las mismas relaciones de orden, luego la relación

$$L[a] \vDash t_{\phi_n}(\xi_1, \ldots, \xi_{k(n)}) = t_{\phi_{n'}}(\xi'_1, \ldots, \xi'_{k(n')})$$

implica que lo mismo es válido si cambiamos cada ξ_i por i_{ξ_i} y cada ξ'_i por $i_{\xi'_i}$, luego si

$$(\eta_0, \ldots, \eta_{m-1}) = \tau_n(\xi_1, \ldots, \xi_{k(n)}) = \tau_{n'}(\xi'_1, \ldots, \xi'_{k(n')}),$$

también se cumple que $\tau_n(i_{\xi_1}, \ldots, i_{\xi_{k(n)}}) = \tau_{n'}(i_{\xi'_1}, \ldots, i_{\xi'_{k(n')}})$. Más aún, lo mismo es válido si cambiamos $=$ por $\subsetneq$, de modo que si partimos de dos sucesiones

$$(\eta_0, \ldots, \eta_{m-1}) = \tau_n(\xi_1, \ldots, \xi_{k(n)}) \subsetneq \tau_{n'}(\xi'_1, \ldots, \xi'_{k(n')}) = (\eta_0, \ldots, \eta_{m'-1}),$$

también se cumple que $\tau_n(i_{\xi_1}, \ldots, i_{\xi_{k(n)}}) \subsetneq \tau_{n'}(i_{\xi'_1}, \ldots, i_{\xi'_{k(n')}})$.

Por otra parte, como $(\eta_0, \ldots, \eta_{m-1}) \in R_U^{u_\omega}(x)$, esto es lo mismo que

$$((\eta_0, \ldots, \eta_{m-1}), x|_m) \in R_U^{u_\omega},$$

luego depende sólo de $x|_m$ y, como $\{x_i\}_{i\in\omega}$ converge a x, tenemos que

$$((\eta_0, \ldots, \eta_{m-1}), x_i|_m) \in R_U^{u_\omega},$$

para todo i suficientemente grande (en función de m). Equivalentemente,

$$L[a] \vDash (\tau_n(\xi_1, \ldots, \xi_{k(n)}), x_i|_m) \in R_U^{u_\omega}.$$

En esta expresión podemos describir la sucesión finita $x_i|_m$ de números naturales (al igual que U, que es aritmético en a, luego definible a partir de una fórmula de $\mathcal{L}_R$) y considerar que es una fórmula cuyos únicos parámetros son los indiscernibles $\xi_1 < \cdots < \xi_{k(n)} < u_\omega$, de modo que, por indiscernibilidad, también se cumple

$$L[a] \vDash (\tau_n(i_{\xi_1}, \ldots, i_{\xi_{k(n)}}), x_i|_m) \in R_U^{u_\omega}$$

para todo i suficientemente grande (en función de m). Esto prueba que, para todo i suficientemente grande, $\tau_n(i_{\xi_1}, \ldots, i_{\xi_{k(n)}}) \in R_U^{u_\omega}(x_i)$.

Por la definición de ψ_n y la hipótesis sobre la sucesión $\{x_i\}_{i\in\omega}$ sabemos que si i, j son suficientemente grandes se cumple

$$\operatorname{rang}(u_{k(n)+1}, x_i)(\tau_n(u_1, \ldots, u_{k(n)}) = \operatorname{rang}(u_{k(n)+1}, x_j)(\tau_n(u_1, \ldots, u_{k(n)}).$$

Como antes, esto puede verse como una afirmación en $L[a]$ con parámetros $u_1 < \cdots < u_{k(n)+1}$, luego por indiscernibilidad también se cumple

$$\operatorname{rang}(u_\omega, x_i)(\tau_n(i_{\xi_1}, \ldots, i_{\xi_{k(n)}})) = \operatorname{rang}(u_\omega, x_j)(\tau_n(i_{\xi_1}, \ldots, i_{\xi_{k(n)}})).$$

Esto significa que la sucesión de ordinales que define a $f(\eta_0, \ldots, \eta_{m-1})$ es finalmente constante, luego tiene límite.

Tenemos así definida una aplicación $f : R_U^{u_\omega}(x) \longrightarrow \Omega$, y hemos probado que si $s, t \in R_U^{u_\omega}(x)$ cumplen $s = \tau_n(\xi_1, \ldots, \xi_{k(n)}) \subsetneq \tau_{n'}(i_{\xi'_1}, \ldots, i_{\xi'_{k(n')}}) = t$, entonces $\tau_n(i_{\xi_1}, \ldots, i_{\xi_{k(n)}}) \subsetneq \tau_{n'}(i_{\xi'_1}, \ldots, i_{\xi'_{k(n')}})$, luego

$$\operatorname{rang}(u_\omega, x_i)(\tau_n(i_{\xi_1}, \ldots, i_{\xi_{k(n)}})) > \operatorname{rang}(u_\omega, x_i)(\tau_{n'}(i_{\xi'_1}, \ldots, i_{\xi'_{k(n')}})),$$

luego $f(t) < f(s)$. Esto implica que $R_U^{u_\omega}(x)$ está bien fundado, luego concluimos que $x \in A$. Más aún, el rango asigna a cada elemento de un conjunto bien fundado el menor ordinal posible, de modo que, para todo $s \in R_U^{u_\omega}(x)$, se cumple que $\mathrm{rang}(u_\omega, x)(s) \leq f(s)$. Esto significa que, para cualquier n y cualquier sucesión $\xi_1 < \cdots < \xi_{k(n)} < u_\omega$ de indiscernibles de I_a y todo i suficientemente grande:

$$\mathrm{rang}(u_\omega, x)(\tau_n(\xi_1, \ldots, \xi_{k(n)})) \leq \mathrm{rang}(u_\omega, x_i)(\tau_n(i_{\xi_1}, \ldots, i_{\xi_{k(n)}})).$$

Ahora bien, el teorema 6.39 implica que $i_{u_j} = u_j$, luego para todo n y todo i suficientemente grande

$$\mathrm{rang}(u_\omega, x)(\tau_n(u_1, \ldots, u_{k(n)})) \leq \mathrm{rang}(u_\omega, x_i)(\tau_n(u_1, \ldots, u_{k(n)})).$$

Por indiscernibilidad (teniendo en cuenta como antes que la relación anterior puede expresarse en $L[a]$) podemos cambiar u_ω por $u_{k(n)+1}$, con lo que queda

$$\psi_n(x) = \mathrm{rang}(u_{k(n)+1}, x)(\tau_n(u_1, \ldots, u_{k(n)}))$$

$$\leq \mathrm{rang}(u_{k(n)+1}, x_i)(\tau_n(u_1, \ldots, u_{k(n)})) = \alpha_n,$$

lo que completa la prueba de que $\{\psi_n\}_{n\in\omega}$ es una escala. Veamos que es una escala en $\Delta_3^1(a)$. De acuerdo con 2.14 esto supone comprobar que las relaciones en $\omega \times \mathcal{N}^2$ dadas por

$$x \leq_n^* y \leftrightarrow x \in A \land \psi_n(x) \leq \psi_n(y), \qquad x <_n^* y \leftrightarrow x \in A \land \psi_n(x) < \psi_n(y)$$

están en $\Delta_3^1(a)$ (donde, si $x \notin A$, se define $\psi_n(x)$ se define como mayor que la norma de cualquier elemento de A). Ahora, bien, como estamos considerando una clase de tipo Δ, la propiedad para $<_n^*$ es consecuencia de la de $\leq_n^*$, pues

$$x <_n^* y \leftrightarrow x \leq_n^* y \land \neg(y \leq_n^* x).$$

Tenemos que

$$\mathrm{rang}(\kappa, x)(\tau_n(\xi_1, \ldots, \xi_{k(n)})) \leq \mathrm{rang}(\kappa, y)(\tau_n(\xi_1, \ldots, \xi_{k(n)}))$$

$$\leftrightarrow L[a, x, y] \vDash \Phi_n[\xi_1, \ldots, \xi_{k(n)}, \kappa],$$

para cierta fórmula Φ_n, pues U es definible en $L[a]$, al igual que R_U^κ. Así,

$$x \leq_n^* y \leftrightarrow x \in A \land (y \notin A \lor (x \in A \land y \in A \land \psi_n(x) \leq \psi_n(y)))$$

$$\leftrightarrow x \in A \land (y \notin A \lor (x \in A \land y \in A \land L[a, x, y] \vDash \Phi_n[u_1, \ldots, u_{k(n)}, u_{k(n)+1}]))$$

$$\leftrightarrow x \in A \land (y \notin A \lor (x \in A \land y \in A \land \langle a, x, y\rangle^\sharp (c_n) = 1)),$$

donde $c_n \in \omega$ es el código de Φ_n en una codificación de las fórmulas de $\mathcal{L}_R$ con respecto a la cual consideramos $\langle a, x, y\rangle^\sharp \in \mathcal{N}$.

Ahora basta probar que la relación $\langle a, x, y\rangle^\sharp (c_n) = 1$ es Δ_3^1.

Ante todo observamos que la condición para que una fórmula ϕ de código c deba aparecer en la enumeración $\{\phi_n\}_{n\in\omega}$ es que la fórmula $\psi_\phi \equiv t_\phi \in \Omega^{<\omega}$ cumpla $L[a] \vDash \psi_\phi[\aleph_1, \ldots, \aleph_k]$, lo cual a su vez equivale a que $\psi_\phi \in a^\sharp$. Claramente, la función $f : \omega \longrightarrow \omega$ tal que si c es el código de ϕ entonces $f(c)$ es el código de ψ_ϕ es recursiva, luego, considerando $a^\sharp \in \mathcal{N}$, la condición para que c sea el código de una fórmula ϕ_n es que $a^\sharp(f(c)) = 1$. A partir de aquí es pura rutina construir una relación recursiva C que enumere las ϕ_n, de modo que

$$c \text{ es el código de } \phi_n \leftrightarrow C(c, n, a^\sharp).$$

A su vez, (el código de) Φ_n puede construirse recursivamente a partir del código de ϕ_n, por lo que también existe una relación recursiva R tal que

$$m = c_n \leftrightarrow R(m, n, a^\sharp).$$

Por lo tanto, $\langle a, x, y\rangle^\sharp (c_n) = 1 \leftrightarrow$

$$\bigvee wzz'm(w = \langle a, x, y\rangle \wedge z = w^\sharp \wedge z' = a^\sharp \wedge R(m, n, z') \wedge z(m) = 1)$$

$$\leftrightarrow \bigwedge wzz'm(w = \langle a, x, y\rangle \wedge z = w^\sharp \wedge z' = a^\sharp \wedge R(m, n, z') \rightarrow z(m) = 1)$$

y sabemos que las relaciones $z = w^\sharp$, $z' = a^\sharp$ son Π^1_2, luego la primera equivalencia es Σ^1_3 y la segunda Π^1_3. ■

Es claro que el teorema anterior vale en realidad para cualquier espacio producto no numerable (pues cualquiera de ellos es homeomorfo a $\mathcal{N}$ a través de un homeomorfismo Δ^1_1). Examinando la prueba del teorema 4.41 es fácil ver que el teorema anterior prueba que todo subconjunto $\Pi^1_2(a)$ puede uniformizarse por un conjunto $\Pi^1_3(a)$. Veremos más adelante (teorema 7.33) que el axioma de determinación proyectiva implica que todo conjunto $\Pi^1_3(a)$ puede uniformizarse por un conjunto $\Pi^1_3(a)$.

Una consecuencia inmediata del teorema anterior es la siguiente:

Teorema 6.45 (Martin) *Si $\bigwedge x \in \mathcal{N}$ existe $x^\sharp$, todo subconjunto $\mathbf{\Sigma}^1_3$ de $\mathcal{N}$ es u_ω-Suslin.*

Demostración: Por el teorema 2.31 (y el teorema anterior) tenemos que todo conjunto $\mathbf{\Pi}^1_2$ es u_ω-Suslin, y 2.32 implica entonces que lo mismo vale para los conjuntos $\mathbf{\Sigma}^1_3$. ■

Si suponemos el axioma de elección obtenemos un análogo de 2.26 para conjuntos $\mathbf{\Sigma}^1_3$:

Teorema 6.46 (Martin) (AE) *Si $\bigwedge x \in \mathcal{N}$ existe $x^\sharp$, todo subconjunto $\mathbf{\Sigma}^1_3$ de $\mathcal{N}$ es $\aleph_2$-Suslin, y por consiguiente es unión de $\aleph_2$ conjuntos de Borel.*

Demostración: Por 6.43 tenemos que $u_\omega < \aleph_3$, luego $|u_\omega| \leq \aleph_2$ y por lo tanto los conjuntos $\mathbf{\Sigma}^1_3$ son $\aleph_2$-Suslin. Ahora basta aplicar el teorema 2.38. ■

Terminamos con un resultado técnico que necesitaremos más adelante:

Teorema 6.47 *Supongamos que* $\bigwedge x \in \mathcal{N}$ *existe* $x^\sharp$. *Si* $\gamma < u_\alpha$, *existe un* $a \in \mathcal{N}$ *y existen ordinales* $0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_n < \alpha$ *tales que* γ *es definible en* $L[a]$ *a partir de* $u_{\alpha_1}, \ldots, u_{\alpha_n}$.

DEMOSTRACIÓN: Razonamos por inducción sobre α. Si $\alpha = 1$ entonces $\gamma < u_1 = \aleph_1$, y basta tomar $a \in \mathrm{BF}$ tal que $\gamma = \|a\|$, con lo que γ es definible en $L[a]$, sin necesidad de indiscernibles.

Si $\gamma < u_\beta$, entonces se cumple el teorema por hipótesis de inducción. Si $\gamma = u_\beta$ la conclusión es trivial. Suponemos, pues que $u_\beta < \gamma < u_{\beta+1}$. Entonces γ no es un indiscernible uniforme, luego existe un $a \in \mathcal{N}$ tal que $\gamma \notin I_a$, luego γ es el único elemento de $L[a]$ tal que

$$L[a] \vDash \phi_0[x_1, \ldots, x_m, \gamma, y_1, \ldots, y_{m'}],$$

para cierta fórmula ϕ_0 e indiscernibles de I_a tales que

$$x_1 < \cdots < x_m < \gamma < y_1 < \cdots < y_{m'}.$$

Por hipótesis de inducción, cada x_i es definible en un $L[a_i]$ a partir de indiscernibles $u_{\alpha_{i1}}, \ldots, u_{\alpha_{in_i}}$, con $\alpha_{in_i} \leq \beta$. Cambiando a por otro $a \in \mathcal{N}$ que codifique a $a, a_1, \ldots, a_m$ llegamos a que γ es el único elemento de $L[a]$ tal que

$$L[a] \vDash \phi_1[u_{\alpha_1}, \ldots, u_{\alpha_r}, \gamma, y_1, \ldots, y_{m'}],$$

con $\alpha_r \leq \beta$. Ahora bien, sabemos que $y_1, \ldots, y_{m'}$ pueden sustituirse por indiscernibles cualesquiera de I_a mayores que u_β. En particular, podemos sustituirlos por los primeros n cardinales de $L[a^\sharp]$ mayores que u_β, pero entonces los y_i son definibles en $L[a^\sharp]$ a partir de u_β, lo que nos permite definir γ en $L[a^\sharp]$ a partir de $u_{\alpha_1} < \cdots < u_{\alpha_n} = u_\beta$. ■

Capítulo VII

Juegos infinitos

En el capítulo anterior hemos visto que el axioma de constructibilidad resuelve muchas cuestiones que se plantean de forma natural en la teoría descriptiva de conjuntos y que resultan ser indecidibles en ZFC. Por ejemplo, hemos probado la existencia de conjuntos de tipo Δ_2^1 no medibles Lebesgue y sin la propiedad de Baire, y de conjuntos de tipo Π_1^1 sin subconjuntos perfectos, hemos determinado las clases de Lusin que son normadas y tienen la propiedad de aproximación, etc.

En este capítulo vamos a ver que éstas y otras propiedades posibles de las clases de Borel y de Lusin pueden reducirse a a un mismo esquema general puramente conjuntista, a saber, la determinación de ciertos juegos infinitos. Este punto de vista nos proporcionará, por una parte, demostraciones alternativas de algunos resultados que ya conocemos y, lo que es más importante, nos permitirá formular un axioma muy simple (el axioma de determinación proyectiva ADP) con el cual podremos extender a todas las clases proyectivas los resultados que en ZFC pueden ser demostrados únicamente para las primeras de la jerarquía de Lusin. Si estamos dispuestos a renunciar al axioma de elección, el axioma ADP puede extenderse al axioma de determinación (AD) que permite extender muchas propiedades a subconjuntos arbitrarios de cualquier espacio polaco.

7.1 Definiciones básicas

Definición 7.1 Sea X un conjunto, sea $R \subset X^{<\omega}$ un árbol en X y $A \subset [R]$ un conjunto de ramas de R. Llamaremos *juego* (de longitud ω) asociado al *árbol de reglas* R y al *conjunto de apuesta* A al par $J(R, A) = (R, A)$. Los elementos de R se llaman *posiciones legales* del juego $J(R, A)$. Las ramas de R (finitas o infinitas) se llaman *partidas* de $J(R, A)$.

Si x es una partida de $J(R, A)$, los elementos $x_0, x_2, x_4, \ldots$ se llaman *jugadas del jugador* I, mientras que los elementos $x_1, x_3, x_5, \ldots$ son las *jugadas del jugador* II. La partida x la *gana* el jugador I si es finita y la última jugada es del jugador I o si es infinita y $x \in A$ En caso contrario la gana el jugador II.

La idea es que podemos imaginar (aunque nuestra imaginación no forma parte de las definiciones) que cada partida se construye mediante la interacción entre dos jugadores. El jugador I realiza la primera jugada x_0, que ha de respetar las reglas del juego, es decir, que, vista como un elemento $s_1 \in X^1$, ha de cumplir que $s_1 \in R$. Seguidamente, el jugador II realiza su jugada x_1, con la condición de que $s_2 = s_1{}^\frown x_1 \in R$, y así sucesivamente. Si llega un punto en que un jugador no tiene ninguna jugada legal, éste pierde la partida. En caso contrario, la partida se prolonga hasta un elemento de $[R]$, y entonces gana I si la partida pertenece al conjunto de apuesta. Podemos interpretar esto como que I ha apostado a que es capaz de acabar la partida en A (salvo que II pierda antes), mientras que II ha apostado a que es capaz de acabarla en $[R] \setminus A$ (salvo que I pierda antes).

Una *estrategia* para el jugador I (resp. II) es una aplicación $\sigma : S \longrightarrow X$, donde $S \subset R$ es un árbol tal que:

a) Si $s \in S$ tiene longitud impar (resp. par), entonces $s^\frown x \in S$ para todo $x \in X$ tal que $s^\frown x \in R$.

b) Si $s \in S$ tiene longitud par (resp. impar), entonces $s^\frown \sigma(s) \in S$.

De este modo, si σ es una estrategia para I, el jugador I puede usar σ como criterio para determinar unívocamente sus jugadas. Más precisamente, si σ es una estrategia para I y $y \in X^\omega$, existe una única rama $\sigma * y$ de S (finita o infinita) que cumple:

$$(\sigma * y)(2n) = (\sigma * y)|_{2n}{}^\frown \sigma((\sigma * y)|_{2n}), \qquad (\sigma * y)(2n+1) = (\sigma * y)|_{2n+1}{}^\frown y_n.$$

Notemos que si $\sigma * y$ tiene longitud finita, ésta ha de ser impar, es decir, termina con una jugada de I, ya que, por definición de estrategia, toda posición en S de longitud par puede prolongarse con σ. Además, si la longitud es $2n+1$, necesariamente $(\sigma * y)^\frown y_n \notin R$.

En definitiva, $\sigma * y$ es la partida que se obtiene empezando con $x_0 = \sigma(\varnothing)$, seguido de y_0, seguido de $x_1 = \sigma(x_0, y_0)$, seguido de y_1, seguido de $x_2 = \sigma(x_0, y_0, x_1, y_1)$, etc., y que se prolonga mientras las jugadas para II determinadas por la sucesión y sean legales.

Análogamente, si σ es una estrategia para II, se define $y * \sigma$ como la única rama de S que cumple

$$(y * \sigma)(2n) = (y * \sigma)|_{2n}{}^\frown y_n, \qquad (y * \sigma)(2n+1) = (y * \sigma)|_{2n+1}{}^\frown \sigma((y * \sigma)|_{2n+1}),$$

que, en caso de ser finita, tiene longitud par.

Una estrategia σ para I (resp. para II) es *ganadora* si para toda sucesión $y \in X^\omega$ tal que $\sigma * y$ (resp. $y * \sigma$) es infinita, se cumple de hecho que $\sigma * y \in A$ (resp. $y * \sigma \in [R] \setminus A$).

En otras palabras, una estrategia es ganadora si, cuando el jugador para el que está diseñada la sigue, éste gana necesariamente la partida.

El juego $J(R, A)$ está *determinado* si uno de los dos jugadores tiene una estrategia ganadora.

Llamaremos $J(A) = J(X^{<\omega}, A)$, donde $A \subset X^\omega$, es decir, $J(A)$ es el juego cuya única regla es que cada jugada ha de estar en el conjunto X. Observemos ahora que, en realidad, todo juego de la forma $J(R, A)$ es equivalente a uno de la forma $J(A')$, en el sentido de que cada jugador tiene una estrategia ganadora en uno si y sólo si la tiene en el otro, de modo que establecer un árbol de reglas es sólo una forma de simplificar la definición de un juego.

En efecto, dado un juego $J(R, A)$, para cada $x \in X^\omega \setminus [R]$ existe un mínimo $n \in \omega$ tal que $x|_n \notin R$, descartando el caso trivial en que $R = \varnothing$, será $n = m+1$, de modo que $x|_m \in R$. Así,

$$X^\omega \setminus [R] = \bigcup_{s \in I} B_s,$$

donde $I = \{s \in X^{<\omega} \mid s \notin R \land s|_{\ell(s)-1} \in R\}$. Ahora bien, podemos dividir I en dos subconjuntos: el conjunto I_1 formado por las sucesiones de longitud impar, y el conjunto I_2 formado por las de longitud par. De este modo, si definimos los abiertos

$$U_1 = \bigcup_{s \in I_1} B_s, \qquad U_2 = \bigcup_{s \in I_2} B_s,$$

tenemos que $X^\omega \setminus [R] = U_1 \cup U_2$ y cada $x \in U_1$ es una prolongación de una partida de $J(R, A)$ en la que ha perdido el jugador I por ser el primero en realizar una jugada ilegal, mientras que cada $x \in U_2$ es una prolongación de una partida de $J(R, A)$ en la que ha perdido el jugador II por el mismo motivo. Por lo tanto, si llamamos $A' = A \cup U_2$, tenemos que todo $x \in A'$ corresponde a una partida de $J(R, A)$ en la que gana I, ya sea porque $x \in A$, ya sea porque II ha hecho una jugada ilegal, mientras que todo $x \in X^\omega \setminus A'$ corresponde a una partida de $J(R, A)$ en la que gana II, ya sea porque $x \in [R] \setminus A$, ya porque I ha hecho una jugada ilegal.

Es claro entonces que cada jugador tiene una estrategia ganadora en $J(R, A)$ si y sólo si la tiene en $J(A')$. Es importante recordar que A' es simplemente la unión de A con un abierto U_2 disjunto con A.

Diremos que un conjunto $A \subset X^\omega$ está *determinado* si lo está el juego $J(A)$.

El axioma de elección implica que existen juegos no determinados. Esto es consecuencia de [TC B.8] y el teorema siguiente:

Teorema 7.2 *Si $B \subset \mathcal{N}$ es un conjunto de Bernstein, entonces $J(B)$ no está determinado.*

Demostración: En general, si $B \subset X^\omega$ y σ es una estrategia para I en el juego $J(B)$, para cada $y \in X^\omega$ la partida $\sigma * y$ es infinita, pues no existen jugadas ilegales. Más aún, el conjunto

$$[\sigma] = \{\sigma * y \mid y \in X^\omega\} \subset X^\omega$$

es un cerrado perfecto. En efecto, si $x \in X^\omega \setminus [\sigma]$, esto significa que la partida x no está jugada de acuerdo a la estrategia σ, lo que significa a su vez que existe un mínimo n tal que la posición $x|_n$ está jugada según σ, pero $x|_{n+1}$ ya no lo está. Entonces $x \in B_{x|_{n+1}} \subset X^\omega \setminus [\sigma]$.

Según el teorema 1.1, tenemos que $[\sigma] = [A]$, donde $A \subset X^{<\omega}$ es el árbol formado por las restricciones de los elementos de $[\sigma]$, es decir, el árbol de las posiciones jugadas según la estrategia σ. Dicho árbol es perfecto. pues cada posición de longitud impar admite tantas extensiones incompatibles como elementos tiene X (suponemos que X tiene al menos dos elementos), luego 1.1 implica que $[\sigma]$ es perfecto. Todo lo dicho vale igualmente si partimos de una estrategia para II.

Concretando ahora al caso $X = \omega$, vemos que si B es un conjunto de Bernstein el jugador I no tiene estrategia ganadora para $J(B)$, pues, para cada estrategia σ, existe un $x \in (\mathcal{N} \setminus B) \cap [\sigma]$ y entonces x es una partida jugada según σ pero en la que es II quien gana. Igualmente, II no tiene estrategia ganadora, pues si τ es una estrategia para II, existe $x \in B \cap [\tau]$, y entonces x es una partida jugada según τ en la que I resulta vencedor. ■

Por otra parte, el axioma de elección garantiza también la determinación de ciertos juegos:

Teorema 7.3 (Gale-Stewart) (AE) *Sea X un conjunto, sea $R \subset X^{<\omega}$ un árbol bien podado y sea $A \subset [R]$ un abierto o un cerrado. Entonces el juego $J(R, A)$ está determinado.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos primeramente que A es cerrado, así como que II no tiene estrategia ganadora, y vamos a probar que I sí que la tiene. En general, si $s \in R$ es una posición de longitud par (en la que le corresponde jugar a I), diremos que *s no está perdida para* I si II no tiene una estrategia ganadora a partir de s, es decir, si II no tiene una estrategia ganadora en el juego $J(R_s, A_s)$, donde $R_s = \{t \in X^{<\omega} \mid s^\frown t \in R\}$ y $A_s = \{x \in [R_s] \mid s^\frown x \in A\}$.

Así pues, que II no tenga estrategia ganadora para $J(R, A)$ equivale a que $\varnothing$ no es una posición perdida para I. El punto crucial[1] es que si $s \in X^{2n}$ es una posición no perdida para I, existe un $x_{2n} \in X$ tal que $s^\frown x_{2n} \in R$ y para todo $x_{2n+1} \in X$ tal que $s^\frown x_{2n}{}^\frown x_{2n+1} \in R$, la posición $s^\frown x_{2n}{}^\frown x_{2n+1}$ no está perdida para I.

Así pues, tenemos que $\varnothing$ no está perdida para I y que, siempre que s sea una posición no perdida para I, sea cual sea la jugada legal de II, existe una jugada de I que da lugar a una posición no perdida para I. Ésta es precisamente la estrategia para I: elegir en cada momento una jugada legal[2] que dé lugar a una

[1]Esto se debe a que, si para cada jugada legal x_{2n} existiera una jugada legal x_{2n+1} tal que el jugador II tuviera una estrategia ganadora para $J(R_{s^\frown x_{2n}{}^\frown x_{2n+1}}, A_{s^\frown x_{2n}{}^\frown x_{2n+1}})$, a partir de dichas estrategias podemos construir fácilmente una estrategia ganadora para II en $J(R_s, A_s)$. Ahora bien, para ello, para cada $x_{2n} \in X$ legal hemos de elegir una jugada legal y una estrategia, lo que, en general, puede suponer una elección no numerable y requiere AE. No obstante, si particularizamos el teorema a $X = \omega$, la elección es numerable y basta ED.

[2]Nuevamente, si $X = \omega$ esta elección no requiere AE (no siquiera ED).

posición no perdida cualquiera que sea la respuesta de II. Vamos a ver que esta estrategia es ganadora. Evidentemente, siempre da lugar a partidas infinitas y, si $x \in [R]$ es una partida en la que I juega con esta estrategia, no puede ocurrir que $x \in [R] \setminus A$, pues se trata de un conjunto abierto, luego existiría un cierto $n \in \omega$ de manera que $x|_{2n} \in B_{x|_{2n}} \subset [R] \setminus A$, pero esto supone que la posición $x|_{2n}$ estaría perdida para I, ya que II tendría la estrategia trivial de jugar arbitrariamente.

El caso en que A es abierto se razona análogamente sin más que intercambiar los papeles de I y II: suponemos que I no tiene una estrategia ganadora, con lo que, ninguna posición de longitud I está perdida para II, y II siempre puede jugar de modo que pase de una posición no perdida a otra en la que cualquier respuesta de I dé lugar a una posición no perdida. La partida resultante no puede estar en A, porque si estuviera en A, al ser abierto, daría lugar a la misma contradicción que el caso precedente. ∎

Ejercicio: Sea $R \subset X^{<\omega}$ un árbol no necesariamente bien podado. Demostrar que el juego $J(R, [R])$, es decir, el juego en el que I apuesta simplemente a que no se quedará nunca sin posibilidad de jugar, está determinado.

En particular, tomando $R = X^{<\omega}$ o $A = [R]$ (y observando además que $J(R, [R]) = J([R])$), concluimos (con AE) que los abiertos y los cerrados de X^ω están determinados.

Para referencias posteriores enunciamos el siguiente caso particular del teorema anterior, donde lo único a destacar es que, como ya hemos explicado, no depende de AE:

Teorema 7.4 (Gale-Stewart) *Sea $R \subset \omega^{<\omega}$ un árbol bien podado y $A \subset [R]$ un abierto o un cerrado. Entonces el juego $J(R, A)$ está determinado. En particular, los abiertos y los cerrados de $\mathcal{N}$ están determinados.*

Definición 7.5 Si Γ es una clase de subconjuntos de un espacio X^ω, llamaremos $\mathrm{Det}_X(\Gamma)$ a la afirmación *"todo conjunto $A \in \Gamma$ está determinado".* Si $\mathbf{\Gamma}$ es una clase de conjuntos definida sobre todos los espacios X^ω, abreviaremos por $\mathrm{Det}(\mathbf{\Gamma})$ la afirmación *"para todo conjunto X, todo $A \in \mathbf{\Gamma}(X)$ está determinado".*

Así, el teorema de Gale-Stewart (que usa AE) implica[3] $\mathrm{Det}(\mathbf{\Sigma}^0_1)$ y $\mathrm{Det}(\mathbf{\Pi}^0_1)$, mientras que simplemente con ED podemos demostrar $\mathrm{Det}_\omega(\mathbf{\Sigma}^0_1)$ y $\mathrm{Det}_\omega(\mathbf{\Pi}^0_1)$. Cada uno de estos pares de resultados es en realidad uno solo:

Teorema 7.6 *Si Γ es una familia de subconjuntos de X^ω cerrada para sustituciones continuas, entonces $\mathrm{Det}_X(\Gamma) \leftrightarrow \mathrm{Det}_X(\neg\Gamma)$.*

Demostración: Dado $A \in \Gamma$, sea $B = \{x^\frown y \mid x \in X \land y \in A\}$. Notemos que $B = f^{-1}[A]$, donde $f : X^\omega \longrightarrow X^\omega$ es la aplicación continua que a cada

[3]Pero el teorema de Gale-Stewart es ligeramente más fuerte, pues implica la determinación de ciertos conjuntos de la forma "abierto" ∪ ("cerrado" ∩ "abierto"), es decir, la determinación de ciertos conjuntos $\mathbf{\Delta}^0_2$.

$y \in X^\omega$ le quita su primera componente y_0. Por lo tanto, $B \in \Gamma$, y es inmediato que si I tiene una estrategia ganadora para $J(B)$, entonces II la tiene para $J(X^\omega \setminus A)$ y que si II tiene una estrategia ganadora para $J(B)$ entonces I la tiene para $J(X^\omega \setminus A)$. Esto prueba que $\mathrm{Det}_X(\Gamma) \to \mathrm{Det}_X(\neg\Gamma)$. La implicación opuesta se debe a que $\neg\Gamma$ también es cerrado para sustituciones continuas. ■

Cabe destacar que cuando decimos que necesitamos el axioma de elección es que realmente lo necesitamos:

Teorema 7.7 (ZF) $\mathrm{Det}(\mathbf{\Pi}^0_1) \leftrightarrow AE.$

DEMOSTRACIÓN: Vamos a demostrar que, para todo conjunto Z, existe una función de elección en $\mathcal{P}Z$. Para ello tomamos $X = Z \cup \mathcal{P}Z$ y consideramos el juego $J(A)$ cuyo conjunto de apuesta es el abierto cerrado

$$A = \{x \in X^\omega \mid x_0 \subset Z \land x_0 \neq \varnothing \land x_1 \notin x_0\}.$$

Por hipótesis $J(A)$ está determinado, pero es evidente que I no puede tener una estrategia ganadora, ya que para ganar se vería obligado a jugar un $x_0 \subset Z$ no vacío, y entonces II sólo tiene que jugar un $x_1 \in x_0$ y ya tiene ganada la partida. Por lo tanto, es II quien tiene una estrategia ganadora τ. Así, la función $e : \mathcal{P}Z \setminus \{\varnothing\} \longrightarrow Z$ dada por $e(x) = \tau(x)$ es una función de elección. (Notemos que $\tau(x)$ es la respuesta de II según τ cuando I empieza la partida jugando x.) ■

7.2 Aplicaciones del teorema de Gale-Stewart

En esta sección damos demostraciones alternativas a partir del teorema de Gale-Stewart (en su versión débil, que requiere ED, pero no AE) de algunos resultados sobre conjuntos analíticos que ya hemos demostrado en los capítulos anteriores, a la vez que probamos que las generalizaciones a clases posteriores de la jerarquía proyectiva se reducen a la determinación de dichas clases.

7.2.1 Subconjuntos perfectos

Sea X un espacio polaco perfecto en el que fijamos una distancia y una base numerable $\{U_n\}_{n\in\omega}$. Dado un subconjunto A de X, consideramos el juego $J^*(A)$ que se juega según el esquema siguiente:

$$\begin{array}{c|cccccc} \mathrm{I} & U_0^0, U_1^0 & & U_0^1, U_1^1 & & \cdots & \\ \hline \mathrm{II} & & i_0 & & i_1 & & \cdots \end{array}$$

Las reglas son las siguientes:

a) U_i^n son abiertos básicos no vacíos de diámetro menor que 2^{-n}.

b) $\overline{U_0^n} \cap \overline{U_1^n} = \varnothing$.

c) $i_n \in 2$.

d) $\overline{U_0^{n+1} \cup U_1^{n+1}} \subset U_{i_n}^n$.

Si I y II juegan una partida siguiendo estas reglas, existirá un único punto $x \in \bigcap\limits_{n\in\omega} \overline{U^n_{i_n}}$. Diremos que I gana la partida si $x \in A$.

En otras palabras: I comienza el juego presentando a II dos abiertos básicos. Entonces II elige uno de los dos, luego I elige otros dos abiertos básicos dentro del que II ha elegido, y así sucesivamente.

Observemos en primer lugar que este juego es equivalente a un juego típico $J(R, A')$, para cierto árbol $R \subset \omega^{<\omega}$ y cierto $A' \subset \mathcal{N}$. En efecto, podemos fijar una biyección $\omega \longrightarrow \omega \times \omega$ que a cada $n \in \omega$ le asigne un par $(n_0, n_1) \in \omega \times \omega$ y considerar así que cada jugada de I no es más que un número natural x^n que determina dos abiertos $U^n_i = U_{x^n_i}$ a partir de la enumeración fijada para la base de X. Así, las reglas de $J^*(A)$ se traducen en condiciones sobre las jugadas x^n de I e i_n de II que definen un árbol R en ω (bien podado, pues es imposible que un jugador se encuentre sin posibilidades de realizar una jugada legal). Así, cada partida de $J^*(A)$ se corresponde biunívocamente con una partida jugada en R.

En particular, cada $y \in [R]$ determina una partida de $J^*(A)$ y, con ella, un $x \in X$ que determina qué jugador es el vencedor, por lo que tenemos una aplicación $f : [R] \longrightarrow X$ dada por $y \mapsto x$. Llamando $A' = j^{-1}[A]$, tenemos claramente que $J^*(A)$ es equivalente a $J(R, A')$.

Es importante que la aplicación f es continua. En efecto, si $U \subset X$ es abierto e $y \in f^{-1}[U]$, sea $x = f(y) \in U$ y sea $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(x) \subset U$. Si $2^{-n} < \epsilon$, entonces $y \in B_{y|_{2n+1}} \subset f^{-1}[U]$, pues si $z \in B_{y|_{2n+1}}$ el abierto $U^n_{i_n}$ determinado por z es el mismo que el determinado por y, luego $x, f(z) \in \overline{U^n_{i_n}}$, luego $d(x, f(z)) < 2^{-n} < \epsilon$, luego $f(z) \in B_\epsilon(x) \subset U$. Así pues:

Teorema 7.8 *Si X es un espacio polaco perfecto, existe un árbol bien podado $R \subset \omega^{<\omega}$ y una aplicación continua $f : [R] \longrightarrow X$ tal que, para cada $A \subset X$, el juego $J^*(A)$ está determinado si y sólo si lo está el juego $J(R, f^{-1}[A])$.*

Por otra parte:

Teorema 7.9 *Sea X un espacio polaco perfecto y $A \subset X$. Entonces*

a) I *tiene una estrategia ganadora para $J^*(A)$ si y sólo si A contiene un subespacio homeomorfo a $\mathcal{C}$.*

b) II *tiene una estrategia ganadora para $J^*(A)$ si y sólo si A es numerable.*

Demostración: Supongamos que σ es una estrategia para I. Aunque hemos definido σ como una función que actúa sobre posiciones del juego, lo cierto es que la imagen por σ de una posición está completamente determinada por las jugadas de II en dicha posición. Por lo tanto, podemos ver a σ como una aplicación que a cada $s \in 2^{<\omega}$ le asigna un par $(U_{s,0}, U_{s,1})$ de abiertos básicos de X. Así podemos definir un esquema de Hausdorff $A : 2^{<\omega} \longrightarrow \mathcal{P}X$ mediante $A(\varnothing) = X$ y $A(s^\frown i) = \overline{U}_{s,i}$.

De este modo, $A(0)$ y $A(1)$ son las clausuras de los abiertos que constituyen la primera jugada de I según σ, $A(0,0)$ y $A(0,1)$ son las clausuras de los abiertos determinados por σ como segunda jugada para I bajo el supuesto de que la primera jugada de II sea 0, mientras que $A(1,0)$ y $A(1,1)$ son las clausuras de la segunda jugada de I según σ si la primera jugada de II es 1, etc.

Las reglas de $J^*(A)$ implican que el esquema A cumple las propiedades indicadas en la demostración del teorema [T 6.18], por lo que determina una aplicación $\phi : \mathcal{C} \longrightarrow X$ que es un homeomorfismo en su imagen. Ahora bien, el hecho de que σ sea una estrategia ganadora para I se traduce en que dicha imagen está contenida en A. Por lo tanto, A contiene un subespacio homeomorfo a $\mathcal{C}$.

Recíprocamente, si $C \subset A$ es homeomorfo a $\mathcal{C}$, en particular C no tiene puntos aislados, luego I puede elegir como primera jugada un par de abiertos (legales) U_0^0 y U_1^0 con la condición adicional de que ambos corten a C, y puede mantener esta condición a lo largo de toda la partida: si U_0^n y U_1^n cortan a C y II juega i_n, entonces, como $U_{i_n}^0 \cap C$ no puede reducirse a un punto, I puede elegir dos abiertos legales U_0^{n+1} y U_1^{n+1} que siguen cortando ambos a C. Cualquier estrategia que mantenga esta condición es ganadora, ya que, para cada $n \in \omega$, existe un $c_n \in C$ tal que $c_n \in U_{i_n}^n$. La sucesión $\{c_n\}_{n\in\omega}$ es de Cauchy, luego converge a un $c \in C \subset A$ tal que $c \in \bigcap\limits_{n\in\omega} \overline{U_{i_n}^n}$. Dicho c no es sino el punto que determina el vencedor del juego, con lo que resulta que I es el vencedor.

Si $A = \{x_n\}_{n\in\omega}$ una estrategia ganadora para II consiste en jugar i_n tal que $x_n \notin U_{i_n}^n$.

Finalmente, supongamos que σ es una estrategia ganadora para II. Diremos que una posición s de longitud $2n$ (es decir, que termina con una jugada i_n de II) es *buena* para un $x \in A$ si está jugada de acuerdo con σ y $x \in U_{i_n}^n$. Convenimos en considerar que $\varnothing$ es también una posición buena para x.

Si toda posición buena para x admite una extensión de longitud $2n+2$ que también es buena para x, entonces podemos formar una partida jugada de acuerdo con σ que termina en x, lo que contradice a que σ sea una estrategia ganadora para II. Así pues, para cada $x \in A$ existe una posición s_x que es buena para x pero que no admite extensiones buenas para x. Equivalentemente:

$$A \subset \bigcup_s P_s,$$

donde s recorre las posiciones de longitud impar jugadas de acuerdo con σ y, si $\ell(s) = 2n+1$, el conjunto P_s contiene a los $x \in U_{i_n}^n$ tales que, para toda posible jugada (U_0^{n+1}, U_1^{n+1}) de I que prolongue s, si i_{n+1} es la jugada que σ determina a su vez como respuesta, se cumple que $x \notin U_{i_{n+1}}^{n+1}$.

Ahora bien, sucede que P_s no puede contener más de un punto, ya que, dados dos puntos x_0, $x_1 \in U_{i_n}^n$, siempre hay una jugada legal para I tal que $x_i \in U_i^{n+1}$, con lo que $x_{i_{n+1}} \in U_{i_{n+1}}^{n+1}$, luego $x_{i_{n+1}} \notin P_s$. Como el conjunto de posiciones es numerable, esto prueba que A es numerable. ■

En particular:

Teorema 7.10 *Sea* $\mathbf{\Gamma}$ *una clase de conjuntos cerrada para uniones e intersecciones finitas y para sustituciones continuas, y que contenga a* $\mathbf{\Sigma}_1^0 \cup \mathbf{\Pi}_1^0$. *Entonces* $\mathrm{Det}_\omega(\mathbf{\Gamma})$ *implica que, para todo espacio polaco* X, *todo* $A \in \mathbf{\Gamma}(X)$ *no numerable contiene un subconjunto perfecto.*

DEMOSTRACIÓN: Por el teorema de Cantor-Bendixson [T 6.23] podemos descomponer $X = P \cup N$, donde P es perfecto y N numerable. Como la inclusión $i : P \longrightarrow X$ es continua, $A \cap P \in \mathbf{\Gamma}(P)$ y sigue siendo no numerable, luego podemos suponer que X es perfecto. Basta probar que el juego $J^*(A)$ está determinado, para lo cual, según 7.8 es equivalente a la determinación de un juego $J(R, A')$, donde R es un árbol en ω y $A' \subset [R]$ es una antiimagen continua de A, luego $A' \in \mathbf{\Gamma}([R])$. Por el teorema 1.4 existe una retracción $r : \mathcal{N} \longrightarrow [R]$, de modo que $A'' = r^{-1}[A']$ cumple que $A' = A'' \cap [R]$. Por lo tanto $A'' \in \mathbf{\Gamma}(\mathcal{N})$ (por sustitución continua) y también $A' \in \mathbf{\Gamma}(\mathcal{N})$ (por ser intersección de dos conjuntos de la clase). Finalmente, por la observación previa al teorema 7.2, la determinación de $J(R, A')$ equivale a la determinación de un juego $J(A''')$, donde A''' es la unión de A' y un abierto, luego $A''' \in \mathbf{\Gamma}(\mathcal{N})$ y la determinación de $J(A''')$ la tenemos por hipótesis. ■

Así pues, una forma alternativa de probar [T 6.28] sería probar $\mathrm{Det}_\omega(\mathbf{\Delta}_1^1)$, pues la clase $\mathbf{\Delta}_1^1$ cumple las condiciones del teorema anterior. Esto lo probaremos en la sección siguiente. Sin embargo, vamos a ver que con una ligera modificación del juego $J^*(A)$ podemos extender el teorema [T 6.28] a conjuntos analíticos sin necesidad de nada más que el teorema de Gale-Stewart 7.4.

Para ello consideramos de nuevo un espacio polaco perfecto X, pero ahora fijamos un conjunto $F \subset X \times \mathcal{N}$. Definimos el juego $J_0^*(F)$ que se juega según el esquema siguiente:

$$\begin{array}{c|cccccc} \mathrm{I} & y_0, U_0^0, U_1^0 & & y_1, U_0^1, U_1^1 & & \cdots & \\ \hline \mathrm{II} & & i_0 & & i_1 & & \cdots \end{array}$$

con las mismas reglas que $J^*(A)$ añadiendo únicamente que $y_i \in \omega$. Así, una partida de $J_0^*(F)$ determina un par $(x, y) \in X \times \mathcal{N}$. Establecemos que I gana la partida si $(x, y) \in F$.

Como en el caso de $J^*(A)$, tenemos que $J_0^*(F)$ se puede codificar como un juego $J(R, A')$, donde R es un árbol en ω y $A' = f^{-1}[F]$, donde $f : [R] \longrightarrow X \times \mathcal{N}$ es la aplicación continua que a cada partida le hace corresponder el par (x, y) que resulta de ella.

Teorema 7.11 *Sea* X *un espacio polaco perfecto, sea* $F \subset X \times \mathcal{N}$ *y* $A = \pi_X[F]$. *Entonces*

a) Si I *tiene una estrategia ganadora para* $J_0^*(F)$ *entonces* A *contiene un subespacio homeomorfo a* $\mathcal{C}$.

b) Si II *tiene una estrategia ganadora para* $J_0^*(F)$, *entonces* A *es numerable.*

DEMOSTRACIÓN: a) Claramente, una estrategia ganadora de I para $J_0^*(F)$ da lugar a una estrategia ganadora para $J^*(A)$ sin más que no tener en cuenta los y_i.

b) Supongamos que II tiene una estrategia ganadora σ para $J_0^*(F)$. Sea $x \in A$ y sea $y_0 \in \mathcal{N}$ tal que $(x, y_0) \in F$. Razonamos como en 7.9: Diremos que una posición s de longitud $2n$ es *buena* para x si está jugada de acuerdo con σ, los y_i son los dados por $y_0|_n$ y $x \in U^n_{i_n}$. Como en 7.9 concluimos tiene que haber una posición s buena para x que no pueda prolongarse a otra mayor, con lo cual $x \in P_{s,y_0(n+1)}$, donde $P_{s,a}$ contiene los $x \in U^n_{i_n}$ tales que, para toda posible jugada $(a, U_0^{n+1}, U_1^{n+1})$ de I que prolongue a s, si i_{n+1} es la jugada que σ determina a su vez como respuesta, $x \notin U^n_{i_n}$. Por lo tanto,

$$A \subset \bigcup_{s,a} P_{s,a},$$

donde s recorre las posiciones de longitud par jugadas de acuerdo con σ y $a \in \omega$. Al igual que en 7.9, razonamos que $P_{s,a}$ contiene a lo sumo un punto, y esto implica que A es numerable. ■

Como consecuencia:

Teorema 7.12 *Todo conjunto analítico no numerable en un espacio polaco contiene un subconjunto perfecto.*

DEMOSTRACIÓN: Sea X un espacio polaco y $A \subset X$ un conjunto analítico no numerable. Por el teorema de Cantor-Bendixson podemos suponer que X es perfecto. Por definición de conjunto analítico existe un cerrado $F \subset X \times \mathcal{N}$ tal que $A = \pi_X[F]$. Por el teorema anterior basta probar que $J_0^*(F)$ está determinado, lo cual equivale a que cierto juego $J(R, F')$ esté determinado, donde R es un árbol bien podado en ω y $F' \subset [R]$ es una antiimagen continua de F, luego un cerrado en $[R]$. Basta aplicar el teorema Gale-Stewart 7.4. ■

El mismo argumento empleado para probar 7.12 nos da:

Teorema 7.13 $\mathrm{Det}_\omega(\mathbf{\Pi}^1_n)$ *implica que todo conjunto* $\mathbf{\Sigma}^1_{n+1}$ *no numerable en un espacio polaco contiene un subconjunto perfecto.*

7.2.2 La propiedad de Baire

Sea X un espacio polaco (en el que fijamos una distancia) y sea B una base numerable de X (en realidad, basta con que B sea una *base débil,* es decir, un conjunto de abiertos no vacíos tales que todo abierto no vacío de X contenga uno de ellos). Sea $F \subset X \times \mathcal{N}$. Definimos el *juego de Banach-Mazur* $G_0^{**}(F)$ como el juego que sigue el esquema siguiente:

$$\begin{array}{c|cccccc} \mathrm{I} & y_0, U_0 & & y_1, U_1 & & \cdots & \\ \hline \mathrm{II} & & V_0 & & V_1 & & \cdots \end{array}$$

con las reglas

a) U_n, V_n son abiertos de B de diámetro $\leq 2^{-n}$.

b) $\overline{U_{n+1}} \subset \overline{V_n} \subset \overline{U_n}$.

c) $y_n \in \omega$.

Así, cada partida determina un $y \in \mathcal{N}$ y un único $x \in \bigcap\limits_{n\in\omega} \overline{U_n} = \bigcap\limits_{n\in\omega} \overline{V_n}$. El jugador I gana la partida si $(x, y) \in F$.

(En realidad $G_0^{**}(F)$ es la variante del juego de Banach-Mazur $G^{**}(F)$ propiamente dicho, en el que $F \subset X$ y I no juega los enteros y_n.)

Como en el caso de los juegos que hemos tratado antes, es fácil reformularlo como un juego $J(R, F')$, donde R es un árbol en ω (obviamente bien podado) y $F' \subset [R]$. Más concretamente, existe una aplicación continua $f : [R] \longrightarrow X \times \mathcal{N}$ que a cada partida z le asigna el par (x, y), y $F' = f^{-1}[F]$.

Teorema 7.14 *Sea X un espacio polaco, sea $F \subset X \times \mathcal{N}$ y $A = \pi_X[F]$.*

a) Si I *tiene una estrategia ganadora para $G_0^{**}(F)$, entonces existe un $U \in B$ tal que $\overline{U} \setminus A$ es de primera categoría.*

b) Si II *tiene una estrategia ganadora para $G_0^{**}(F)$, entonces A es de primera categoría.*

Demostración: Veamos primero b). Sea σ una estrategia ganadora para el jugador II y sea $x \in A$. Tomamos $y_0 \in \mathcal{N}$ tal que $(x, y_0) \in F$.

Diremos que una posición s de longitud $2n$ es *buena* para x si está jugada de acuerdo con la estrategia σ, las jugadas y_i de I son las dadas por $y_0|_n$ y $x \in \overline{V_n}$. Entonces, ha de haber una posición buena para x que no pueda prolongarse a otra posición buena para x, pues, en otro caso, obtendríamos una partida jugada según σ en la que ganaría I. En otras palabras, existe una posición buena s tal que, para toda jugada posible de I (con $y_{n+1} = y_0(n+1)$), la jugada siguiente según σ hace que $x \notin \overline{V_{n+1}}$.

Si s es una posición de longitud $2n$ jugada según σ y $a \in \omega$, llamaremos $C_{s,a}$ al conjunto de todos los $x \in X$ tales que $x \in \overline{V_n}$ y, para toda jugada (legal) de I de la forma (a, U_{n+1}), el abierto V_{n+1} determinado por σ cumple que $x \notin \overline{V_{n+1}}$.

Hemos probado que, dado $x \in A$, existe una posición s de longitud par jugada según σ y un $a = y(n+1)$ de modo que $x \in C_{s,a}$ o, lo que es lo mismo $A \subset \bigcup\limits_{s,a} C_{s,a}$.

Ahora bien, sucede que $C_{s,a}$ es diseminado, pues lo contrario significa que existe un abierto no vacío $U_{n+1} \subset \overline{C}_{s,a} \subset \overline{V}_n$, que podemos tomar tal que $U_{n+1} \in B$ y $d(U_{n+1}) < 2^{-n-1}$. Sea entonces V_{n+1} el abierto determinado por σ si I prolonga s con (a, U_{n+1}). Entonces $V_{n+1} \subset \overline{V_{n+1}} \subset \overline{U_{n+1}} \subset \overline{C}_{s,a}$, luego $V_{n+1} \cap C_{s,a} \neq \varnothing$, pero esto es absurdo, por la propia definición de $C_{s,a}$.

Como los pares (s, a) recorren un conjunto numerable, concluimos que A es de primera categoría.

a) Si I tiene una estrategia ganadora para $G_0^{**}(F)$, es claro que también la tiene para el juego $G^{**}(A)$. Sólo tiene que seguir su estrategia desechando los y_n que ésta le proporciona. Si σ es una estrategia, llamemos $U = \sigma(\varnothing)$ y vamos a probar que II tiene una estrategia ganadora para $G^{**}(\overline{U} \setminus A)$. Admitiendo esto, toda la demostración del apartado b) se simplifica (al adaptarla a G^{**} en lugar de G_0^{**}) para probar que $\overline{U} \setminus A$ es de primera categoría.

Veamos cuál es la estrategia de II. Sea U_0 la primera jugada de I y supongamos en primer lugar que $\overline{U_0} \not\subset \overline{U}$. Tomamos $x \in \overline{U_0} \setminus \overline{U}$. Entonces, como $X \setminus \overline{U}$ es un entorno de x, se cumple que $U_0 \cap (X \setminus \overline{U})$ es un abierto no vacío, luego podemos tomar $V_0 \in B$, $V_0 \subset \overline{V_0} \subset U_0 \setminus \overline{U}$, $d(V_0) < 1/2$. Jugando V_0, II tiene asegurada la victoria sean cuales sean las jugadas posteriores.

Supongamos ahora que $\overline{U_0} \subset \overline{U}$. Entonces II puede responder con el abierto V_0 determinado por σ para la partida que empieza con U seguido de U_0. En general, II puede jugar de modo que cada posición de la partida se convierta en una posición según σ cuando se le antepone U. De este modo se asegura de que el punto final x esté en $\overline{U} \cap A$, luego no estará en $\overline{U} \setminus A$ y ganará la partida. ■

Como aplicación obtenemos una demostración alternativa del teorema 1.46:

Teorema 7.15 *Todo conjunto analítico tiene la propiedad de Baire*

Demostración: Sea X un espacio polaco y $A \subset X$ un conjunto analítico. Sea $F \subset X \times \mathcal{N}$ un cerrado tal que $A = \pi_X[F]$. El juego $G_0^{**}(F)$ es equivalente a un juego que cumple las hipótesis del teorema de Gale-Stewart 7.4, luego está determinado.

Si II tiene una estrategia ganadora, entonces A es de primera categoría, luego tiene la propiedad de Baire.

Supongamos que es I quien tiene la estrategia ganadora. Entonces existe un abierto básico no vacío (de una base numerable) $U_0 \subset X$ tal que $\overline{U_0} \setminus A$ es de primera categoría. Sea U la unión de todos los abiertos con esta propiedad. Entonces $U \setminus A$ está contenido en una unión numerable de conjuntos de primera categoría, luego tiene primera categoría. Si probamos que $A \setminus U$ también es de primera categoría, tendremos que lo es $A \,\Delta\, U$, y así A tendrá la propiedad de Baire.

Supongamos que $A \setminus U = \pi_X[F \setminus (U \times \mathcal{N})]$ no es de primera categoría. Como $F \setminus (U \times \mathcal{N})$ es cerrado, el juego $G_0^{**}(F \setminus (U \times \mathcal{N}))$ está determinado, de nuevo por el teorema de Gale-Stewart, pero II no puede tener una estrategia ganadora, luego la tiene I. Esto significa que existe un abierto básico no vacío U' tal que $\overline{U}' \setminus (A \setminus U)$ es de primera categoría. Como $\overline{U}' \setminus A \subset \overline{U}' \setminus (A \setminus U)$, también $\overline{U}' \setminus A$ es de primera categoría, luego $U' \subset U$ por definición de U, luego $U' \subset \overline{U}' \setminus (A \setminus U)$, luego U' es de primera categoría, lo cual es absurdo. ■

Adaptando ligeramente el argumento anterior obtenemos:

Teorema 7.16 $\mathrm{Det}_\omega(\mathbf{\Pi}_n^1)$ *implica que todo conjunto* $\mathbf{\Sigma}_{n+1}^1$ *en un espacio polaco tiene la propiedad de Baire.*

Notemos que, por una parte, $\mathrm{Det}_\omega(\mathbf{\Pi}^1_n)$ es equivalente a $\mathrm{Det}_\omega(\mathbf{\Sigma}^1_n)$ y, por otra, que todo conjunto $\mathbf{\Sigma}^1_{n+1}$ tenga la propiedad de Baire equivale a que la tengan todos los conjuntos $\mathbf{\Pi}^1_{n+1}$. En particular, hemos probado que todo conjunto $\mathbf{\Pi}^1_1$ tiene la propiedad de Baire.

7.2.3 Conjuntos universalmente medibles

El teorema 1.47 demuestra que los conjuntos $\mathbf{\Sigma}^1_1$ son universalmente medibles. Vamos a estudiar ahora bajo qué circunstancias podemos asegurar que lo mismo les sucede a los conjuntos $\mathbf{\Sigma}^1_{n+1}$. Por conveniencia estudiaremos conjuntos $\mathbf{\Pi}^1_{n+1}$, aunque el problema es equivalente, pues un conjunto es universalmente medible si y sólo si lo es su complementario.

Sea X un espacio polaco no numerable (si es numerable todos sus subconjuntos son medibles) con una medida de Borel μ. En la prueba del teorema [T 6.36] hemos visto que podemos construir otra medida unitaria en X con los mismos conjuntos medibles, por lo que no perdemos generalidad si suponemos que μ es unitaria.

Usando un isomorfismo de Borel $f : \mathcal{C} \longrightarrow X$ para transportar la medida, no perdemos generalidad si suponemos que $X = \mathcal{C}$. (Si probamos que todos los conjuntos de $\mathbf{\Pi}^1_{n+1}(\mathcal{C})$ son medibles para la medida transportada, los conjuntos de $\mathbf{\Pi}^1_{n+1}(X)$ serán μ-medibles.)

Sea $\{t_n\}_{n\in\omega}$ una enumeración de $2^{<\omega}$ y $\{s_n\}_{n<\omega}$ una enumeración de $\omega^{<\omega}$. Para cada $F \subset \mathcal{C}\times\mathcal{C}$ y cada $\epsilon > 0$, definimos el juego $J'_0(F,\epsilon)$ que se juega según el esquema:

I	x_0, y_0		x_1, y_1		$\cdots$	
II		z_0		z_1		$\cdots$

con las reglas:

a) $x_n, y_n \in 2$, $z_n \in \omega$.

b) Si $U_n = \bigcup\limits_{i<\ell(s_{z_n})} B_{t_{s_{z_n}(i)}}$, se cumple que $\mu(U_n) < \epsilon/2^{3n+3}$.

Así, cada partida determina un par $(x,y) \in \mathcal{C}\times\mathcal{C}$ y un abierto $U = \bigcup\limits_{n\in\omega} U_n$.

El jugador I gana la partida si $(x,y) \in F \cap ((\mathcal{C}\setminus U)\times\mathcal{C})$.

En la práctica podemos pensar que las jugadas de II son uniones finitas de abiertos básicos de $\mathcal{C}$. La jugada z_n determina una sucesión $s_{z_n} \in \omega^{<\omega}$, la cual determina a su vez una sucesión finita $t_{s_{z_n}(0)}, \ldots, t_{s_{z_n}(k)} \in 2^{<\omega}$, la cual determina a su vez el abierto U_n, y cualquier unión finita de abiertos básicos puede obtenerse de esta forma.

Al igual que sucedía con los juegos que hemos analizado previamente, es fácil reducir $J'_0(F,\epsilon)$ a un juego $J(R,B)$, donde R es un árbol (obviamente bien podado) en ω. Para analizar B, observamos que tenemos una aplicación continua $f : [R] \longrightarrow \mathcal{C}\times\mathcal{C}\times\mathcal{N}$ que a cada partida le asigna las sucesiones (x,y,z).

El conjunto C de las partidas $w \in [R]$ tales que, si $f(w) = (x, y, z)$, $x \in \mathcal{C} \setminus U$, es cerrado en $[R]$. En efecto, si $w \in [R] \setminus C$, tenemos que $x \in U_n$ para un $n \in \omega$, luego existe un $r \in \omega$ tal que $x \in B_{x|_r} \subset U_n$ Por continuidad, existe un $k \in \omega$ tal que $B_{z|_k} \cap [R] \subset f^{-1}[B_{x|_r} \times \mathcal{C} \times B_{z|_{n+1}}]$, con lo que $z \in B_{z|_k} \cap [R] \subset [R] \setminus C$.

Claramente, el conjunto de apuesta B es $C \cap f^{-1}[F \times \mathcal{N}]$, y es claro que si $F \in \mathbf{\Pi}^1_n(\mathcal{C} \times \mathcal{C})$, entonces $B \in \mathbf{\Pi}^1_n(\mathcal{N})$. Además, la determinación del juego $J_0'(F, \epsilon)$ equivale a la de un juego $J(B')$ donde B' es la unión de B y un abierto, luego $B' \in \mathbf{\Pi}^1_n(\mathcal{N})$. Por consiguiente, $\mathrm{Det}_\omega(\mathbf{\Pi}^1_n)$ implica que el juego $J_0'(F, \epsilon)$ está determinado siempre que $F \in \mathbf{\Pi}^1_n(\mathcal{C} \times \mathcal{C})$.

Teorema 7.17 *Sea μ una medida de Borel unitaria en $\mathcal{C}$, $\epsilon > 0$, $F \subset \mathcal{C} \times \mathcal{C}$ y $A = \pi_X[F]$.*

a) Si I *tiene una estrategia ganadora en el juego $J_0'(F, \epsilon)$, entonces A contiene un conjunto μ-medible de medida positiva.*

b) Si II *tiene una estrategia ganadora en el juego $J_0'(F, \epsilon)$, entonces existe un abierto $U \subset \mathcal{C}$ tal que $A \subset U$ y $\mu(U) < \epsilon$.*

DEMOSTRACIÓN: Si I tiene una estrategia ganadora σ, sea $C \subset \mathcal{N}$ el conjunto de las sucesiones $z \in \mathcal{N}$ tales que si II juega $z_0, z_1, \ldots$ sus jugadas son legales. Se cumple que C es cerrado, pues si $z \in \mathcal{N} \setminus C$, existe un mínimo $n \in \omega$ tal que la jugada z_n es ilegal, con lo que $z \in B_{z|_{n+1}} \subset \mathcal{N} \setminus C$.

La aplicación $C \longrightarrow \mathcal{C}$ que a cada $z \in C$ le asigna el punto x correspondiente a la partida $\sigma * z$ es continua, luego su imagen, que es el conjunto $B \subset A$ de todos los puntos de X construidos mediante partidas en las que I juega según σ, cumple $B \in \mathbf{\Sigma}^1_1(\mathcal{C})$. Por el teorema 1.47 sabemos que B es μ-medible. Sólo hemos de probar que no tiene medida nula.

Si fuera $\mu(B) = 0$, existiría un abierto G tal que $B \subset G$ y $\mu(G) < \epsilon/2^3$. Expresamos G como unión de abiertos básicos $G = \bigcup\limits_{i \in \omega} G_i$, donde cada G_i es de la forma B_t, para cierta $t \in 2^{<\omega}$. Como dos abiertos básicos distintos están uno contenido en otro o son disjuntos, podemos refinar la unión para que los G_i sean disjuntos dos a dos.

Definimos U_0 como una unión finita de abiertos G_i tal que $\mu(G \setminus U_0) < \epsilon/2^6$, y asegurando que al menos $G_0 \subset U_0$. Tenemos que $\mu(U_0) < \epsilon/2^3$. Similarmente, definimos $U_1 \subset G \setminus U_0$ como una unión finita de abiertos G_i de modo que $\mu(G \setminus (U_0 \cup U_1)) < \epsilon/2^9$, asegurando que $G_1 \subset U_0 \cup U_1$. Procediendo de este modo construimos una sucesión $\{U_n\}_{n<\omega}$ de abiertos en $\mathcal{C}$, cada uno de los cuales es una unión finita de abiertos básicos, $\mu(U_n) < \epsilon/2^{3n+3}$ y $B \subset G = \bigcup\limits_{n \in \omega} U_n$.

Entonces, la sucesión U_n determina una estrategia para II (jugar en cada paso U_n independientemente de lo que haga I), que claramente burla a la estrategia σ, pues el conjunto U resultante será G y, si I juega según σ, el punto x resultante estará en $B \subset U$. Esto contradice que σ sea una estrategia ganadora, luego B ha de tener medida positiva.

Supongamos ahora que es II quien tiene una estrategia ganadora σ. Para cada par $(s, t) \in 2^{n+1} \times 2^{n+1})$, llamemos $U_{s,t}$ al abierto U_n que determina σ como jugada n-sima de II cuando I ha jugado hasta el momento $x_i = s(i), y_i = t(i)$. Sea $G = \bigcup_{s,t} U_{s,t}$.

Claramente, U es abierto y $A \subset U$, pues si $x \in A$, existe un $y \in \mathcal{C}$ tal que $(x, y) \in F$. Entonces I puede jugar en cada turno $x(n), y(n)$ y, si II aplica su estrategia σ, al final de la partida se llega al punto $(x, y) \in F$, luego la única forma en que II puede ganar es que x esté en U, lo que significa que está en $U_n = U_{x|_{n+1}, y|_{n+1}}$, para cierto $n \in \omega$, luego $x \in G$. Por otra parte,

$$\mu(G) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \mu(\bigcup_{s,t \in 2^{n+1}} U_{s,t}) \leq \sum_{n=0}^{\infty} 2^{2n+2} \cdot \frac{\epsilon}{2^{3n+3}} = \epsilon.$$

■

Con esto podemos probar:

Teorema 7.18 $\mathrm{Det}_\omega(\mathbf{\Pi}^1_n)$ *implica que todo conjunto* $\mathbf{\Pi}^1_{n+1}$ *en un espacio polaco es universalmente medible.*

Demostración: Hemos visto que basta ver que todo $B \in \mathbf{\Pi}^1_{n+1}(\mathcal{C})$ es medible para toda medida de Borel unitaria μ en $\mathcal{C}$. En la prueba del teorema 1.47 hemos visto que existe un conjunto $\hat{B}$ que es G_δ, $B \subset \hat{B}$ y todo conjunto de Borel contenido en $\hat{B} \setminus B$ es nulo. Sea $A = \hat{B} \setminus B \in \mathbf{\Sigma}^1_{n+1}(\mathcal{C})$. Por el teorema 2.9, existe un $F \in \mathbf{\Pi}^1_n(\mathcal{C} \times \mathcal{C})$ tal que $A = \pi_X[F]$.

Por hipótesis, dado $\epsilon > 0$, el juego $J'(A, \epsilon)$ está determinado, pero por el teorema anterior I no puede tener una estrategia ganadora. Esto significa que la tiene II, luego, de nuevo por el teorema anterior, existe un abierto G tal que $A \subset G$ y $\mu(G) < \epsilon$. Esto implica que $\mu^*(A) = 0$, donde μ^* es la medida exterior asociada a μ, pero todo conjunto de medida exterior nula es medible, luego $\hat{B} \setminus B$ es medible, luego B también lo es. ■

Como en el caso de la propiedad de Baire, observemos que $\mathrm{Det}_\omega(\mathbf{\Pi}^1_n)$ es equivalente a $\mathrm{Det}_\omega(\mathbf{\Sigma}^1_n)$, así como que la medibilidad de los conjuntos $\mathbf{\Pi}^1_{n+1}$ equivale a la de los conjuntos $\mathbf{\Sigma}^1_{n+1}$.

Notemos también que en la demostración de 7.17 hemos usado que los conjuntos analíticos son universalmente medibles, luego, al contrario de lo que sucedía con la propiedad de Baire, en este caso no podemos usar el argumento para obtener una prueba alternativa de este hecho.

7.3 La determinación de los conjuntos de Borel

Más adelante veremos que no es posible demostrar en ZFC que todo conjunto $\mathbf{\Sigma}^1_2$ es universalmente medible, por lo que tampoco es posible demostrar $\mathrm{Det}_\omega(\mathbf{\Sigma}^1_1)$. El máximo resultado de determinación que puede, pues, probarse en principio en ZFC es $\mathrm{Det}(\mathbf{\Delta}^1_1)$, y vamos a ver que, en efecto, esto es posible.

Por conveniencia, vamos a representar las estrategias para un juego $J(R, A)$ de una forma ligeramente distinta de como las hemos representado hasta ahora. En lugar de considerar que una estrategia es una aplicación $\sigma : S \longrightarrow X$, donde $S \subset R$ es un árbol, podemos considerar que una estrategia es ella misma un árbol $\sigma \subset R$. Concretamente, una estrategia para I es un árbol $\sigma \subset R$ que cumpla las condiciones siguientes:

a) Si $s \in \sigma$ tiene longitud par, existe un único $x \in X$ tal que $s^\frown x \in \sigma$.

b) Si $s \in \sigma$ tiene longitud impar y $x \in X$ cumple que $s^\frown x \in R$, entonces $s^\frown x \in \sigma$.

Una estrategia para II se define análogamente, sin más que intercambiar las palabras "par" e "impar". De este modo, las partidas jugadas de acuerdo con σ son simplemente las ramas de σ, finitas o infinitas. Es obvio que toda estrategia en este sentido determina unívocamente una estrategia equivalente en el sentido anterior (equivalente en cuanto a que determina las mismas partidas en función de las jugadas del adversario) y viceversa.

Llamaremos $\Sigma^{\mathrm{I}}(R)$ y $\Sigma^{\mathrm{II}}(R)$ a los conjuntos de todas las estrategias para los jugadores I y II (respectivamente) en un juego en el conjunto X determinado por el árbol $R \subset X^{<\omega}$ (notemos que el conjunto de apuesta puede determinar si una estrategia es o no ganadora, pero no influye a la hora de decidir si un árbol es o no una estrategia).

Definimos también los conjuntos de estrategias parciales

$$\Sigma^{\mathrm{I}}_*(R) = \bigcup_{n\in\omega} \Sigma^{\mathrm{I}}(R \cap X^{<2n+1}), \qquad \Sigma^{\mathrm{II}}_*(R) = \bigcup_{n\in\omega} \Sigma^{\mathrm{II}}(R \cap X^{<2n+2}).$$

Definición 7.19 Un *cubrimiento* $c : R \longrightarrow S$ de un árbol S en un conjunto Y por un árbol R en un conjunto X es una terna $c = (c, c^{\mathrm{I}}, c^{\mathrm{II}})$, donde

c1 $c : R \longrightarrow T$ es una aplicación que conserva el orden y las longitudes de las sucesiones (es decir, que $\ell(c(r)) = \ell(r)$, para todo $r \in R$). Claramente c induce una aplicación $c : [R] \longrightarrow [S]$, a la que llamaremos con el mismo nombre. Concretamente: $c(x) = \bigcup\limits_{n\in\omega} c(x|_n)$.

c2 $c^{\mathrm{I}} : \Sigma^{\mathrm{I}}_*(R) \longrightarrow \Sigma^{\mathrm{II}}_*(S)$ es una aplicación tal que $\sigma \subset \sigma' \to c^{\mathrm{I}}(\sigma) \subset c^{\mathrm{I}}(\sigma')$ y que induce una aplicación $c^{\mathrm{I}} : \Sigma^{\mathrm{I}}(R) \longrightarrow \Sigma^{\mathrm{I}}(S)$. Para c^{II} exigimos lo mismo.

c3 Para cada $\sigma \in \Sigma^{\mathrm{I}}(S)$, si $s \in c^{\mathrm{I}}(\sigma)$, existe un $r \in \sigma$ tal que $c(r) = s$, y si $y \in [c^{\mathrm{I}}(\sigma)]$ existe un $x \in [\sigma]$ tal que $c(x) = y$. Lo mismo es válido para II.

Diremos que un cubrimiento $c : R \longrightarrow S$ *resuelve* un juego $J(S, A)$ si se cumple que $c^{-1}[A \cap [S]] = [R] \cap C$, donde C es abierto y cerrado en X^ω.

Observemos que si un cubrimiento resuelve un juego $J(S, A)$, también resuelve el juego $J(S, [S] \setminus A)$.

Esta propiedad nos permite aplicar el teorema de Gale-Stewart:

Teorema 7.20 (AE) *Si un cubrimiento $c : R \longrightarrow S$ resuelve un juego $J(S, A)$, entonces $J(S, A)$ está determinado.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $B = c^{-1}[A \cap [S]]$, que por hipótesis es abierto y cerrado en $[R]$. Por el teorema de Gale-Stewart sabemos que $J(R, B)$ está determinado.

Supongamos que σ es una estrategia ganadora para I en $J(R, B)$ y veamos que $c^{\mathrm{I}}(\sigma)$ es una estrategia ganadora para I en $J(S, A)$. Sólo hemos de probar que $[c^{\mathrm{I}}(\sigma)] \subset A$. Ahora bien, si $y \in [c^{\mathrm{I}}(\sigma)]$, entonces existe un $x \in [\sigma]$ tal que $\sigma^{\mathrm{I}}(x) = y$. Entonces $x \in B$, puesto que σ es ganadora, luego $y \in A$.

El mismo razonamiento prueba que si σ es una estrategia ganadora para II en $J(R, B)$, entonces $c^{\mathrm{II}}(\sigma)$ es una estrategia ganadora para II en $J(S, A)$. ■

Definición 7.21 Diremos que un cubrimiento $c : R \longrightarrow S$ es un *k-cubrimiento,* donde $k \in \omega$, si $R \cap X^{<k} = S \cap Y^{<k}$ y

a) Si $r \in R \cap X^{<k}$, entonces $c(r) = r$.

b) Si $2n < k$ y $\sigma \in \Sigma^{\mathrm{I}}(R \cap X^{<2n+1})$, entonces $c^{\mathrm{I}}(\sigma) = \sigma$, e igualmente con c^{II} cambiando $2n$ por $2n + 1$.

Diremos que un conjunto $A \subset Y^\omega$ es *absolutamente resoluble* si para todo árbol S en Y, para toda función continua $f : [S] \longrightarrow Y^\omega$ y todo $k \in \omega$, existe un k-cubrimiento $c : R \longrightarrow S$ que resuelve el juego $J(S, f^{-1}[A])$.

Llamamos $\mathbf{U}$ a la clase de conjuntos definida sobre todos los espacios de la forma Y^ω, para todo conjunto Y, de modo que $\mathbf{U}(Y^\omega)$ es la clase de todos los subconjuntos de Y^ω absolutamente resolubles.

Vamos a demostrar las propiedades siguientes:

a) (AE) Si $A \in \mathbf{U}(Y^\omega)$ y S es cualquier árbol en Y, entonces $J(S, A)$ está determinado.

b) La clase $\mathbf{U}$ contiene a los cerrados.

c) La clase $\mathbf{U}$ es cerrada para complementos.

d) La clase $\mathbf{U}$ es cerrada para intersecciones numerables.

La propiedad a) es inmediata: tomando como $f : [S] \longrightarrow Y^\omega$ la inclusión, el juego $J(S, [S] \cap A)$ está determinado por el teorema anterior, pero esto equivale a que lo esté el juego $J(S, A)$.

La propiedad c) también es obvia: si tomamos $A \in \mathbf{U}(Y^\omega)$ y S es un árbol en Y, $f : [S] \longrightarrow Y^\omega$ es una aplicación continua y $k \in \omega$, entonces existe un k-cubrimiento $c : R \longrightarrow S$ que resuelve el juego $J(S, f^{-1}[A])$, luego también resuelve el juego $J(S, [S] \setminus f^{-1}[A]) = J(S, f^{-1}[Y^\omega \setminus A])$, luego $Y^\omega \setminus A$ es absolutamente resoluble.

Nos falta probar b) y d), pero antes observemos que estas cuatro propiedades implican inmediatamente el teorema central de esta sección:

Teorema 7.22 (AE) (Martin) *Se cumple* $\mathrm{Det}(\mathbf{\Delta}_1^1)$.

DEMOSTRACIÓN: Las propiedades b), c) y d) implican que $\mathbf{U}(Y^\omega)$ es una σ-álgebra en Y^ω que contiene a los abiertos, luego contiene a la σ-álgebra de Borel, luego la propiedad a) implica que todo conjunto de Borel está determinado. ■

La parte más delicada es la demostración de b):

Teorema 7.23 *Todo conjunto cerrado es absolutamente resoluble.*

DEMOSTRACIÓN: En las condiciones de la definición de resolución absoluta, llamamos $F = f^{-1}[A]$, que es un cerrado en $[S]$, luego existe un árbol J en Y^ω tal que $F = [J]$.

Notemos que si $k < k'$, todo k'-cubrimiento es también un k-cubrimiento, luego basta probar que se cumple la definición de resolución absoluta para k arbitrariamente grande. En particular, podemos suponer que $k = 2m$.

Consideramos a continuación el juego J^* que se juega según el esquema siguiente:

I	x_0		$\cdots$	x_{2m-2}		(x_{2m}, P)		x_{2m+2}		$\cdots$
II		x_1	$\cdots$		x_{2m-1}		(x_{2m+1}, u)		x_{2m+3}	$\cdots$

y con las reglas siguientes:

a) $(x_0, \ldots, x_n) \in S$ para todo $n \in \omega$.

b) $P \subset S$ y $(x_0, \ldots, x_{2m}) \in P$.

c) O bien $u = \varnothing$ o bien $u = (x_0, x_1, \ldots, x_{2m+1}, x'_{2m+2}, \ldots, x'_{2l+1}) \in P \setminus J$.

d) Si $u = \varnothing$, a partir de la jugada $2m + 2$ ambos jugadores han de respetar las reglas adicionales siguientes:

   1. I debe jugar de modo que, para todo $y \in Y$, si $(x_0, \ldots, x_{2t}, y) \in S$, entonces $(x_0, \ldots, x_{2t}, y) \in P$ (es decir, I debe garantizar que cualquier jugada legal que pueda hacer II quede dentro de P, y si no puede lograrlo pierde).
   2. II debe garantizar que las posiciones siguientes estén en J.

e) Si $u = (x_0, x_1, \ldots, x_{2m+1}, x'_{2m+2}, \ldots, x'_{2l+1})$, entonces las jugadas siguientes de ambos jugadores deben ser precisamente

$$x_{2m+1} = x'_{2m+2}, \ldots, x_{2l+1} = x'_{2l+1}.$$

A partir de la jugada x_{2l+2} ambos jugadores son libres de jugar sin someterse más que a la regla a).

Más informalmente: En la jugada $2m$, el jugador I hace una oferta a II consistente en que II se comprometa a jugar en J (y rendirse si no lo consigue) a cambio de que I se comprometa a rendirse si II logra salirse de P. No obstante, II puede rechazar la oferta, y entonces ambos jugadores se comprometen a hacer sus próximas jugadas de acuerdo con la sucesión u fijada por II.

Estas reglas determinan un árbol R sobre un cierto conjunto X y podemos definir $c : R \longrightarrow S$ de forma obvia (eliminando P y u en las posiciones de longitud mayor que $2m$). En particular, $R \cap X^{<k} = S \cap Y^{<k}$, como exige la definición de k-cubrimiento. Definimos

$$C = \{\bar{x} \in X^\omega \mid (x_0, \ldots, x_{2m}) \in P \subset S \wedge u = 0\}.$$

Claramente C es un abierto cerrado en X^ω y $c^{-1}[F] = [R] \cap C$, pues una partida $\bar{x} \in [R] \cap C$ cumple que $u = 0$, luego todas las sucesiones finitas $(x_0, \ldots, x_{2t+1})$ están en J, luego $c(\bar{x}) \in F$. Recíprocamente, si $c(\bar{x}) \in F$, ha de ser $u = 0$, por las reglas c) y e).

De este modo, si definimos adecuadamente aplicaciones c^{I} y c^{II}, tendremos que c es un k-cubrimiento que resuelve el juego $J(S, F)$.

Aunque aquí va a ser irrelevante, podemos completar la definición de J^* estableciendo que el conjunto de apuesta es $B = c^{-1}[F]$, en consonancia con la demostración de 7.20, de modo que $J^* = J(R, B)$.

Sea $\sigma \in \Sigma^{\mathrm{I}}_*(R)$ una estrategia parcial y vamos a definir $c^{\mathrm{I}}(\sigma)$. Para $i \leq m$, la jugada x_{2i} prescrita por $c^{\mathrm{I}}(\sigma)$ para $J(S, F)$ es la misma prescrita por σ para J^* (de acuerdo con la definición de k-cubrimiento). En ese punto, si II juega x_{2m+1}, la respuesta de I consiste en aplicar σ a la jugada $(x_{2m+1}, \varnothing)$, supuesto que $(x_0, \ldots, x_{2m+1}) \in J$ y continuará así salvo que llegue un momento en que $u = (x_0, \ldots, x_{2l+1}) \notin J$. Si se da el caso, I pasará a aplicar σ tomando como jugada de II en el turno $2m+1$ el par (x_{2m+1}, u). Notemos que, como σ respeta la regla d) 1, se cumplirá que $u \in P \setminus J$, luego la jugada (x_{2m+1}, u) es legal. Por la regla e), las respuestas de σ a las jugadas que ha hecho II hasta el turno $2l+1$ serán las dadas por u, es decir, las mismas que antes, luego I podrá seguir aplicando la estrategia parcial σ a partir de la posición $2l + 2$ mientras σ esté definida.

Con esto queda definida la estrategia $c^{\mathrm{I}}(\sigma)$. Observamos que si $\sigma \in \Sigma^{\mathrm{I}}(R)$, es decir, si σ proporciona una jugada legal a I en J^* mientras II juegue legalmente, al aplicar c^{I} a las restricciones de σ obtenemos una estrategia $c^{\mathrm{I}}(\sigma)$ que proporciona una jugada legal a I en $J(S, F)$ mientras II juegue legalmente (es decir, mientras mantenga la partida en S).

Así, c^{I} cumple claramente las propiedades **c1, c2** y la primera parte de **c3** de la definición de cubrimiento. La segunda parte afirma que si $\sigma \in \Sigma^{\mathrm{I}}(R)$ e $y \in [c^{\mathrm{I}}(\sigma)]$, entonces existe un $x \in [\sigma]$ tal que $c^{\mathrm{I}}(x) = y$. Sólo hemos de observar que, aun en el supuesto de que I deba cambiar la partida de J^* que construye a partir de las jugadas de II, a lo sumo lo hará una vez y, si lo hace, las posiciones finitas suficientemente grandes convergen a una partida $x \in [\sigma]$

(es decir, se extienden mutuamente) que cumple lo requerido. También es obvio que c^{I} cumple la definición de k-cubrimiento.

Consideremos ahora una estrategia parcial $\tau \in \Sigma_*^{\mathrm{II}}(R)$ y vamos a construir una estrategia parcial $c^{\mathrm{II}}(\tau)$. Como en el caso anterior, para las primeras jugadas, II se limita a aplicar τ a las jugadas de I. Puede hacer esto hasta la jugada $2m$ (mientras τ esté definida), en la que debe proporcionar a τ un conjunto P como parte de la jugada de I. En tal caso juega

$$P = \{u \in S \mid \bigwedge Q \subset S \bigwedge x_{2m+1} \in Y\ (x_0, \ldots, x_{2m-1}, (x_{2m}, Q), (x_{2m+1}, u)) \notin \tau\}.$$

La jugada (x_{2m}, P) es legal. Esto significa que $u = (x_0, \ldots, x_{2m}) \in P$, lo cual significa a su vez que, dados, Q y x_{2m+1}, no puede suceder que τ recomiende jugar (x_{2m+1}, u), ya que la sucesión u tiene que tener al menos longitud $2m+2$.

Más aún, para cualquier $u \neq \varnothing$ y cualquier x_{2m+1}, se cumple que

$$(x_0, \ldots, x_{2m-1}, (x_{2m}, P), (x_{2m+1}, u)) \notin \tau,$$

pues en caso contrario tendríamos que $u \notin P$ por definición de P, mientras que la regla c) (a la que τ está sometida) exige que $u \in P$. Así pues, tras la jugada (x_{2m}, P), la estrategia τ proporcionará una jugada de la forma $(x_{2m+1}, \varnothing)$. Entonces la jugada determinada por $c^{\mathrm{II}}(\tau)$ es x_{2m+1}, y II seguirá empleando la estrategia τ con el conjunto P indicado y con $u = \varnothing$ mientras se cumpla la condición d) 1. Si se da el caso de que, para una cierta jugada x_{2l} de I, existe un x_{2l+1} tal que $u = (x_0, \ldots, x_{2l+1}) \in S \setminus P$, esto significa que existe un $Q \subset S$ y un cierto x_{2m+1} tal que

$$(x_0, \ldots, x_{2m-1}, (x_{2m}, Q), (x_{2m+1}, u)) \in \tau.$$

Para que esto sea posible, x_{2n+1} tiene que ser el que figura en u, es decir, el mismo que ya estábamos considerando. Si aplicamos la estrategia τ a la partida que resulta de considerar como jugada $2m$ de I el par (x_{2m}, Q), la jugada siguiente será el par (x_{2m+1}, u), y las jugadas siguientes hasta x_{2l+1} serán las dadas por u, es decir, las mismas que ya habíamos establecido. A partir de ahí, II puede jugar aplicando la estrategia σ con el conjunto Q y la sucesión u indicadas.

Con esto queda definida la estrategia $c^{\mathrm{II}}(\tau)$. Como en el caso anterior, si $\tau \in \Sigma^{\mathrm{II}}(R)$, es decir, si τ proporciona una jugada legal para II ante cada jugada legal de I, al aplicar c^{II} a las restricciones de τ obtenemos una estrategia $c^{\mathrm{II}}(\tau)$ que proporciona una jugada legal para cada jugada de I que mantenga la partida en S. Las comprobaciones restantes son idénticas a las del caso anterior. ■

Ahora sólo nos falta demostrar que la intersección numerable de conjuntos absolutamente resolubles es absolutamente resoluble. Para ello necesitamos construir límites inductivos de cubrimientos.

En primer lugar observemos que si tenemos dos cubrimientos $c_1 : S_2 \longrightarrow S_1$ y $c_0 : S_1 \longrightarrow S_0$, la composición $c_0 \circ c_1 : S_2 \longrightarrow S_0$, definida como la terna formada por las composiciones $(c_0 \circ c_1, c_0^{\mathrm{I}} \circ c_1^{\mathrm{I}}, c_0^{\mathrm{II}} \circ c_1^{\mathrm{II}})$, es claramente un cubrimiento, y si c_0 y c_1 son ambos k-cubrimientos, su composición también lo es.

Teorema 7.24 *Si, para cada $i \in \omega$, $c_i : S_{i+1} \longrightarrow S_i$ es un $k+i$-cubrimiento, existe un árbol S y una familia de $k+i$-cubrimientos $d_i : S \longrightarrow S_i$ tales que el diagrama siguiente es conmutativo:*

$$\begin{tikzcd} S_{i+1} \arrow[r, "c_i"] & S_i \\ S \arrow[u, "d_{i+1}"] \arrow[ur, "d_i"'] & \end{tikzcd}$$

Demostración: Componiendo los cubrimientos dados podemos construir $k+i$-cubrimientos $c_{ji} : S_j \longrightarrow S_i$, para $i \leq j$ (tomando como c_{ii} la identidad).

Si S_i es un árbol sobre el conjunto X_i, vamos a definir un árbol S sobre el conjunto $X = \bigcup\limits_{i\in\omega} X_i$. Para ello observamos que los árboles $X^{<n} \cap S_i$ son el mismo para todo n suficientemente grande, debido a que los cubrimientos c_{ji} son n-cubrimientos para todo j suficientemente grande.

Por lo tanto, podemos definir S de modo que un $s \in X^{<\omega}$ está en S si y sólo si $s \in S_i$ para todo i suficientemente grande. Es inmediato que S definido de este modo es un árbol en X. Más precisamente, se cumple que $s \in S$ si y sólo si $s \in S_i$ para todo $i > \ell(s)$. En efecto, si $s \in S$ e $i > \ell(s)$, sabemos que $s \in S_j$, para un cierto $j > i$, pero si c_{ji} es un $k+i$-cubrimiento, luego $s = c_{ji}(s) \in S_i$.

Similarmente, es claro que si $s \in S$, $i \in \omega$ y j, j' son suficientemente grandes (mayores que $\ell(s)$ y que i), entonces $c_{ji}(s) = c_{j'i}(s)$. Esto se debe a que si, por ejemplo, $j < j'$, entonces $c_{j'i}(s) = c_{ji}(c_{j'j}(s))$, pero $c_{j'j}$ es un $k+j$-cubrimiento, luego $c_{j'j}(s) = s$.

Esto nos permite definir $d_i : S \longrightarrow S_i$ mediante $d_i(s) = c_{ji}(s)$, donde j es cualquier índice mayor que i y que $\ell(s)$.

Es inmediato comprobar que d_i conserva el orden y las longitudes, así como que hace conmutativo el diagrama del enunciado.

Ahora observamos que si $j > 2n+1$ entonces $S \cap X^{<2n+1} = S_j \cap X_j^{2n+1}$, luego $\Sigma^{\mathrm{I}}(S \cap X^{<2n+1}) = \Sigma^{\mathrm{I}}(S_j \cap X_j^{<2n+1})$. Más aún, se comprueba inmediatamente que si $j' > j > i$ y $\sigma \in \Sigma^{\mathrm{I}}(S \cap X^{<2n+1})$, entonces $c^{\mathrm{I}}_{j'i}(\sigma) = c^{\mathrm{I}}_{ji}(\sigma)$.

De este modo, si $\sigma \in \Sigma^{\mathrm{I}}_*(S)$, existe un $n \in \omega$ tal que $\sigma \in \Sigma^{\mathrm{I}}(S \cap X^{<2n+1})$, y podemos definir $d^{\mathrm{I}}_i(\sigma) = c^{\mathrm{I}}_{ji}(\sigma)$, para cualquier $j > 2n+1$. Tenemos así una aplicación $d^{\mathrm{I}}_i : \Sigma^{\mathrm{I}}_*(S) \longrightarrow \Sigma^{\mathrm{I}}_*(S_j)$, y es fácil ver que cumple las condiciones de la definición de cubrimiento, así como que hace conmutativo el diagrama del enunciado. Similarmente se define y se razona con d^{II}_i. ■

El teorema siguiente completa la demostración de 7.22:

Teorema 7.25 *La clase* $\mathbf{U}$ *es cerrada para intersecciones numerables.*

Demostración: Sea $\{A_i\}_{i\in\omega}$ una familia de conjuntos en $\mathbf{U}(Y^\omega)$. Hemos de probar que $A = \bigcap\limits_{i\in\omega} A_i \in \mathbf{U}(Y^\omega)$.

Para ello tomamos un árbol S_0 en Y, una aplicación continua $f : [S_0] \longrightarrow Y^\omega$ y un $k \in \omega$, y hemos de encontrar un k-cubrimiento de S_0 que resuelva el juego $J(S_0, f^{-1}[A])$.

Como A_0 es absolutamente resoluble, existe un k-cubrimiento $c_0 : S_1 \longrightarrow S_0$ que resuelve el juego $J(S_0, f^{-1}[A_0])$. Igualmente, como A_1 es completamente resoluble, existe un $k+1$-cubrimiento $c_1 : S_2 \longrightarrow S_1$ que resuelve el juego $J(S_1, (c_0 \circ f)^{-1}[A_1])$. Procediendo de este modo obtenemos una familia de cubrimientos $c_i : S_{i+1} \longrightarrow S_i$ en las condiciones del teorema anterior, de modo que, si llamamos c_{ji} a las composiciones $c_{j-1} \circ \cdots \circ c_i$, tenemos que c_i resuelve el juego $J(S_i, (c_{i0} \circ f)^{-1}[A_i])$.

Esto significa que existe un abierto cerrado $B_i \subset X_{i+1}^\omega$ tal que

$$c_{i+1,0}^{-1}[f^{-1}[A_i]] = c_i^{-1}[(c_{i0} \circ f)^{-1}[A_i]] = [S_{i+1}] \cap B_i.$$

Sea S el árbol (en un conjunto X) dado por el teorema anterior, de modo que tenemos también $k+i$-cubrimientos $d_i : S \longrightarrow S_i$, y sea $B = \bigcap\limits_{i\in\omega} d_{i+1}^{-1}[B_i]$, que es un cerrado en X.

Necesitaríamos que B fuera abierto cerrado, así que aplicamos el teorema 7.23, según el cual existe un árbol R en un conjunto X' y un k-cubrimiento $e : R \longrightarrow S$ que resuelve el juego $J(S, B)$. Esto significa que existe un abierto cerrado $C \subset X'^\omega$ tal que $e^{-1}[B] = [R] \cap C$.

Vamos a probar que el k-cubrimiento $c = e \circ d_0 : R \longrightarrow S_0$ resuelve el juego $J(S_0, f^{-1}[A])$. Basta ver que

$$\bigcap_{i\in\omega} c^{-1}[f^{-1}[A_i]] = c^{-1}[f^{-1}[A]] = [R] \cap C$$

o, equivalentemente, que si $x \in [R]$, entonces

$$x \in C \leftrightarrow \bigwedge i \in \omega\ d_0(e(x)) \in f^{-1}[A_i].$$

En efecto:

$$x \in C \leftrightarrow e(x) \in B \leftrightarrow \bigwedge i \in \omega\ d_{i+1}(e(x)) \in B_i$$

$$\leftrightarrow \bigwedge i \in \omega\ c_{i+1,0}(d_{i+1}(e(x))) \in f^{-1}[A_i] \leftrightarrow \bigwedge i \in \omega\ d_0(e(x)) \in f^{-1}[A_i],$$

donde hemos usado que, trivialmente, $d_0 = d_{i+1} \circ c_{i+1,0}$. ■

Observemos que en la demostración de 7.22 sólo hemos empleado AE al usar el teorema de Gale-Stewart en la demostración de 7.20. El teorema 7.7 prueba que dicho uso de AE es inevitable. Ahora bien, si llamamos $\mathbf{U_0}$ a la restricción de la clase $\mathbf{U}$ a espacios X^ω con X numerable (lo que supone exigir en la definición de conjunto absolutamente resoluble que el árbol R esté definido sobre un conjunto numerable), todo el argumento sigue siendo válido particularizado a $\mathbf{U_0}$, y así ya no es necesario AE. En efecto, es obvio que la versión 7.4 del teorema de Gale-Stewart es válida —más en general— para juegos definidos en árboles sobre conjuntos numerables cualesquiera (no necesariamente ω), y esto es lo único que necesitamos ahora en la prueba de 7.20. Sólo hay que tener presente que los únicos árboles que construimos en la demostración son el árbol R construido en la prueba de 7.23 —cuyo conjunto X es claramente numerable si el conjunto Y de partida lo es— y el árbol S construido en el teorema 7.24, cuyo conjunto X es numerable si lo son todos los conjuntos X_i correspondientes a los cubrimientos dados (pues es la unión de todos ellos). Consecuentemente:

Teorema 7.26 (Martin) $\mathrm{Det}_\omega(\mathbf{\Delta}_1^1)$.

Aunque en principio este teorema es un caso particular de 7.22, lo destacable es que se puede demostrar en ZF+ED. (Por ejemplo, la sucesión de cubrimientos c_i construida en la demostración del teorema 7.25 es un caso típico de aplicación de ED.)

7.4 El axioma de determinación proyectiva

Los resultados de la sección 7.2 muestran el impacto que tiene sobre la teoría descriptiva de conjuntos la determinación de los juegos infinitos, por lo que resulta natural estudiar las consecuencias del *axioma de determinación proyectiva:*

(ADP) Si $A \subset \mathcal{N}$ es un conjunto proyectivo, el juego $J(A)$ está determinado.

Más brevemente, el axioma ADP es la sentencia $\mathrm{Det}_\omega(P)$, donde P es la clase de los subconjuntos proyectivos de $\mathcal{N}$. Según hemos anunciado en la sección anterior, la única porción de ADP demostrable en ZFC (de hecho, en ZF + ED) es la determinación de los conjuntos de Borel. Aunque al tomar como hipótesis adicional ADP nos estamos saliendo de la teoría axiomática ZF + ED, a la que se supone que está dedicada esta parte del libro, estudiaremos aquí las consecuencias de este axioma porque las técnicas necesarias para ello son las mismas que hemos venido empleando hasta ahora, sin necesidad de ningún conocimiento de la lógica matemática ni de teoría de conjuntos más avanzada. Dejaremos para la tercera parte del libro el estudio de la consistencia de ADP con los axiomas de ZFC. No obstante, en esta sección seguimos tomando la axiomática ZF + ED como teoría básica, y señalaremos explícitamente todo uso que hagamos de ADP al igual que venimos haciendo con los usos de AE.

Para empezar, a partir de los resultados obtenidos en la sección 7.2, se obtiene inmediatamente el teorema siguiente:

Teorema 7.27 (ADP) *Todo conjunto proyectivo en un espacio polaco es universalmente medible, tiene la propiedad de Baire y, si es no numerable, contiene un subconjunto perfecto.*

Por el teorema 2.7, otra consecuencia de ADP es que no existen bases de Hamel proyectivas. Ahora vamos a ver que ADP resuelve también otras cuestiones sobre las clases superiores de la jerarquía proyectiva.

7.4.1 Clases normadas

Empezamos estudiando cuáles de las clases de Kleene y de Lusin son normadas. La cuestión la resuelve completamente el teorema siguiente (debido a Moskovakis), dual de 4.40:

Teorema 7.28 (Primer teorema de periodicidad) *Para cada $a \in \mathcal{N}$, si la clase $\Sigma^1_n(a)$ es normada y se cumple* $\mathrm{Det}_\omega(\boldsymbol{\Delta}^1_n)$, *también lo es $\Pi^1_{n+1}(a)$.*

Demostración: Sea X un espacio producto y sea $A \subset X$ un conjunto $\Pi^1_{n+1}(a)$, de modo que existe un conjunto $B \subset X \times \mathcal{N}$ de clase $\Sigma^1_n(a)$ tal que $A = \bigwedge x\, B$. Por hipótesis existe una norma $\phi : B \longrightarrow \Omega$ en $\Sigma^1_n(a)$. Fijados x, $y \in \mathcal{N}$, consideramos el juego $J_{x,y}$ en el que, si I juega la sucesión u y II juega la sucesión v, entonces

I gana si y sólo si $(y, v) <^*_\phi (x, u) \leftrightarrow (y, v) \in B \wedge \phi(y, v) < \phi(x, u)$.

Equivalentemente:

II gana si y sólo si $(y, v) \notin B \vee \phi(x, u) \leq \phi(y, v) \leftrightarrow (y, v) \notin B \vee (x, u) \leq^*_\phi (y, v)$.

Para todo x, $y \in X$, el juego $J_{x,y}$ está determinado.

En efecto, si $y \notin A$, el jugador II gana la partida jugando cualquier v tal que $(y, v) \notin B$, mientras que si $y \in A$, entonces

$$\text{I gana} \leftrightarrow (y, v) <^*_\phi (x, u) \leftrightarrow (x, u) \not\leq^*_\phi (y, v)$$

Como ϕ es una norma en $\boldsymbol{\Sigma}^1_n$, el conjunto de los (u, v, x, y) que cumplen las dos equivalencias es $\boldsymbol{\Delta}^1_n$ en $X \times X \times \mathcal{N} \times \mathcal{N}$ el conjunto de las partidas $\langle u, v\rangle$ ganadas por I (es decir, el conjunto de apuestas del juego $J_{x,y}$) es una antiimagen continua del anterior (por la aplicación $p \mapsto (p_0, p_1, x, y)$), luego también es $\boldsymbol{\Delta}^1_n$ y, por hipótesis, está determinado.

Ahora definimos $x \leq y \leftrightarrow$ II tiene una estrategia ganadora en $J_{x,y}$.

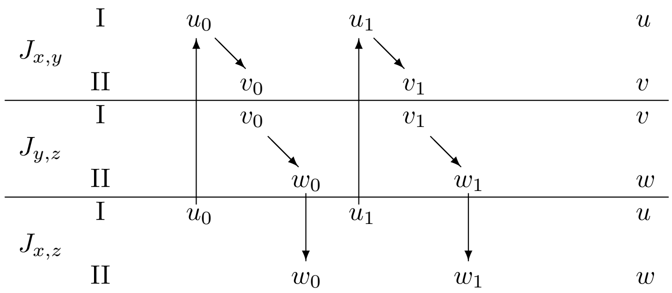
Vamos a demostrar que la restricción de $\leq$ a A es un pre-buen orden, es decir, se trata de una relación reflexiva, transitiva, conexa y bien fundada. Esto hace que el cociente de A respecto de la relación de equivalencia dada por $x \sim y \leftrightarrow x \leq y \wedge y \leq x$ esté bien ordenado por la relación inducida por $\leq$.

Para todo $x \in A$, se cumple que $x \leq x$.

En efecto, para ganar en $J_{x,x}$ lo único que tiene que hacer II es repetir las jugadas de I, de modo que la partida resultante es de la forma (u, u), con lo que obviamente $(x, u) \notin B \vee \phi(x, u) \leq \phi(x, u)$.

Si $x, y, z \in A$, entonces $x \leq y \wedge y \leq z \rightarrow x \leq z$.

En efecto, suponemos que II tiene estrategias ganadoras para $J_{x,y}$ y $J_{x,z}$, y hemos de describir una estrategia ganadora para $J_{x,z}$. La figura ilustra cómo obtenerla:

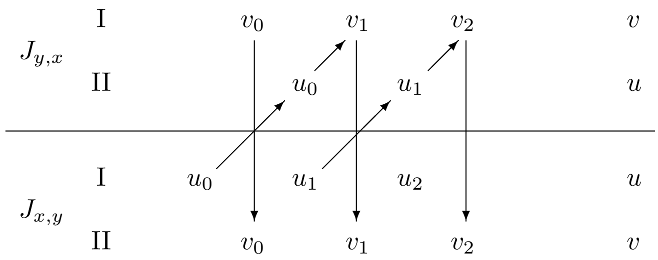


Si I juega u_0 en el juego $J_{x,z}$, llevamos su jugada al juego $J_{x,y}$ y obtenemos la jugada v_0 determinada por la estrategia de II para dicho juego. A continuación convertimos esta jugada de II en una jugada de I en el juego $J_{y,z}$ y obtenemos la jugada w_0 determinada por la estrategia de II en dicho juego. El resultado lo convertimos en la respuesta de II para el juego $J_{x,z}$. A partir de aquí I realiza su jugada u_1 y repetimos el proceso indefinidamente. Como x, y, $z \in A$, tenemos que (x, u), (y, v), $(z, w) \in B$ y, como las estrategias empleadas por II en $J_{x,y}$ y $J_{y,z}$ son ganadoras, tenemos que $\phi(x, u) \leq \phi(y, v) \leq \phi(z, w)$, y esto implica que II gana siempre el juego $J_{x,z}$, luego $x \leq z$.

Definimos ahora $x < y \leftrightarrow x \leq y \land y \not\leq x$. Entonces

Si x, $y \in A$, entonces $x < y \leftrightarrow$ I tiene una estrategia ganadora para $J_{y,x}$.

En efecto, si $x < y$ entonces $y \not\leq x$, luego II no tiene una estrategia ganadora para $J_{y,x}$ y, como el juego está determinado, la ha de tener I. Recíprocamente, si I tiene una estrategia ganadora para $J_{y,x}$, entonces II no la tiene, luego $y \not\leq x$, pero falta probar que $x \leq y$, es decir, que II sí que tiene una estrategia ganadora para $J_{x,y}$. La figura ilustra dicha estrategia:



Si la primera jugada de I en $J_{x,y}$ es u_0, la respuesta de II es la primera jugada v_0 de I según su estrategia para el juego $J_{y,x}$. Luego I juega arbitrariamente u_1 y II juega u_0 en $J_{y,x}$ y toma la respuesta v_1 de I como su jugada en $J_{x,y}$, y así sucesivamente. El juego $J_{x,y}$ termina con una partida (u, v) tal que I ha ganado $J_{y,x}$ con (v, u), es decir, se cumple que $(x, u) \in B \land \phi(x, u) < \phi(y, v)$. En particular $\phi(x, u) \leq \phi(y, v)$, luego II gana la partida de $J_{x,y}$.

Por consiguiente, *si x, $y \in A$, o bien $x \leq y$, o bien $y \leq x$* (pues si no se da el primer caso, es que II no tiene una estrategia ganadora en $J_{x,y}$, luego la tiene I, luego $y < x$).

La relación $<$ está bien fundada en A.

Supongamos, en caso contrario, que existe una sucesión decreciente

$$x_0 > x_1 > x_2 > \cdots$$

De modo que I tiene una estrategia ganadora para $J_{x_i,x_{i+1}}$. Entonces podríamos establecer una sucesión de partidas según este esquema:

$$\begin{array}{llllllll}
 & \mathrm{I} & u_0^0 & & u_1^0 & & u_2^0 & \quad u^0 \\
J_{x_0,x_1} & & & & & & & \\
 & \mathrm{II} & & u_0^1 & & u_1^1 & & \quad u^1 \\
\hline
 & \mathrm{I} & u_0^1 & & u_1^1 & & u_2^1 & \quad u^1 \\
J_{x_1,x_2} & & & & & & & \\
 & \mathrm{II} & & u_0^2 & & u_1^2 & & \quad u^2 \\
\hline
 & \mathrm{I} & u_0^2 & & u_1^2 & & u_2^2 & \quad u^2 \\
J_{x_2,x_3} & & & & & & & \\
 & \mathrm{II} & & u_0^3 & & u_1^3 & & \quad u^3 \\
\hline
 & \mathrm{I} & u_0^3 & & u_1^3 & & u_2^3 & \quad u^3 \\
J_{x_3,x_4} & & & & & & & \\
 & \mathrm{II} & & u_0^4 & & u_1^4 & & \quad u^4 \\
\vdots & & & & & & & \quad \vdots
\end{array}$$

En cada una de ellas I juega con una estrategia ganadora y por consiguiente obtenemos una sucesión decreciente de ordinales:

$$\phi(x_0, u^0) > \phi(x_1, u^1) > \phi(x_2, u^2) > \cdots$$

Con esto tenemos probado que $A/\sim$ está bien ordenado por la relación de orden inducida por $\leq$, lo cual nos da una aplicación $\psi : A \longrightarrow \Omega$ que induce sobre el cociente una semejanza en un ordinal. Así pues, si $x, y \in A$, se cumple

$$x \leq y \leftrightarrow \psi(x) \leq \psi(y).$$

Vamos a probar que ψ es una norma en $\Pi^1_{n+1}(a)$. En efecto, tenemos que

$$\begin{aligned}
x \leq^*_\psi y &\leftrightarrow x \in A \wedge \text{II tiene una estrategia ganadora para } J_{x,y} \\
&\leftrightarrow x \in A \wedge \text{I no tiene una estrategia ganadora para } J_{x,y} \\
&\leftrightarrow x \in A \wedge \bigwedge \sigma \bigvee v \in \mathcal{N}\ (x, \sigma * v) \leq^*_\phi (y, v),
\end{aligned}$$

donde aquí representamos por $\sigma * v$ la sucesión u de jugadas de I que determina la estrategia σ cuando II juega v.

Ahora observamos que toda aplicación $\sigma : \omega^{<\omega} \longrightarrow \omega$ define una estrategia para cualquiera de los dos jugadores, y que, recíprocamente, toda estrategia se puede extender a una aplicación en estas condiciones. A su vez, a través de la biyección canónica entre $\omega^{<\omega}$ y ω, podemos identificar a las estrategias para I con los elementos de $\mathcal{N}$. Es fácil ver que $(x, y, \sigma, v) \mapsto (x, \sigma * v, y, v)$ es una aplicación $f : \mathcal{N}^4 \longrightarrow \mathcal{N}^4$ de clase Δ^1_1, luego

$$\{(x, y, \sigma, v) \in \mathcal{N}^4 \mid (x, \sigma * v) \leq^*_\phi (y, v)\} \in \Sigma^1_n(a),$$

pues es la antiimagen de $\leq^*_\phi$ por f. Es claro entonces que $\leq^*_\psi$ es $\Pi^1_{n+1}(a)$. Similarmente:

$$x <^*_\psi y \leftrightarrow x \in A \land \text{I tiene una estrategia ganadora para } J_{y,x}$$

$$\leftrightarrow x \in A \land \text{II no tiene una estrategia ganadora pra } J_{y,x}$$

$$\leftrightarrow x \in A \land \bigwedge \tau \bigvee u \ (x, u) <^*_\phi (y, u * \tau),$$

y se razona análogamente que $<^*_\psi$ es $\Pi^1_{n+1}(a)$. ■

Teniendo en cuenta que la clase $\Pi^1_1(a)$ es normada (teorema 4.39) así como el teorema 4.40, concluimos inmediatamente:

Teorema 7.29 (ADP) *Las clases $\Pi^1_{2n+1}(a)$ y $\Sigma^1_{2n+2}(a)$ son normadas, pero sus complementarias no lo son.*

El hecho de que las clases complementarias no sean normadas se sigue del teorema 4.38, que nos dice además que las clases indicadas en el teorema anterior tienen la propiedad de uniformización numérica y la propiedad de reducción, mientras que las complementarias tienen la propiedad de separación.

A su vez, del teorema anterior se sigue inmediatamente la versión para las clases de Lusin, que a su vez se extiende a espacios polacos cualesquiera. (Alternativamente, en la demostración de 7.28 el espacio X puede ser un espacio polaco arbitrario.)

Teorema 7.30 (ADP) *Las clases de Lusin*

$$\begin{array}{ccccccc} & \mathbf{\Sigma}^1_2 & & \mathbf{\Sigma}^1_4 & & \mathbf{\Sigma}^1_6 & \cdots \\ \mathbf{\Pi}^1_1 & & \mathbf{\Pi}^1_3 & & \mathbf{\Pi}^1_5 & & \cdots \end{array}$$

son normadas, pero sus complementarias no lo son.

El teorema 2.15 nos da que las clases indicadas tienen la propiedad de uniformización numérica y la propiedad de reducción generalizada, mientras que sus complementarias tienen la propiedad de separación generalizada.

7.4.2 Clases con escalas

Nos ocupamos ahora de la existencia de escalas y, a su vez, de la propiedad de uniformización. Vamos a necesitar un resultado técnico:

Teorema 7.31 *Sea $a \in \mathcal{N}$ y X un espacio producto no numerable. Si un conjunto $A \subset X$ admite una escala en $\Sigma_n^1(a)$ o en $\Pi_n^1(a)$, entonces admite una escala $\{\phi_n\}_{n\in\omega}$ con las propiedades adicionales siguientes:*

a) Si $\{x_m\}_{m\in\omega}$ es una sucesión en A tal que, para todo $n \in \omega$, cada sucesión $\{\phi_n(x_m)\}_{m\in\omega}$ es finalmente constante igual a α_n, entonces existe un $x \in A$ tal que $\lim\limits_m x_m = x$ (y entonces, por definición de escala, $\phi_n(x) \leq \alpha_n$).

b) Si $x, y \in A$ cumplen $\phi_n(x) \leq \phi_n(y)$, entonces $\bigwedge i \leq n\ \phi_i(x) \leq \phi_i(y)$.

Demostración: Supondremos en primer lugar que $X = \mathcal{N}$. Sea $\{\psi_n\}_{n\in\omega}$ una escala en A y sea λ un ordinal suficientemente grande como para que todas las normas ψ_n tomen imágenes en λ. Sea S_n el conjunto de las $2n+2$-tuplas de la forma $(\xi_0, k_0, \ldots, \xi_n, k_n)$ con $\xi_i < \lambda$, $k_i < \omega$. Consideramos en S_n el buen orden lexicográfico (de modo que, para comparar dos de sus elementos, empezamos comparando su primera componente, en caso de empate la segunda, etc.) y sea $(\xi_0, k_0, \ldots, \xi_n, k_n) \mapsto \langle \xi_0, k_0, \ldots, \xi_n, k_n\rangle$ la semejanza de S_n en su ordinal. Definimos

$$\phi_n(x) = \langle \psi_0(x), x(0), \psi_1(x), x(1), \ldots, \psi_n(x), x(n)\rangle .$$

Vamos a probar que $\{\phi_n\}_{n\in\omega}$ es una escala con las propiedades adicionales indicadas. Conviene abreviar $x \sim_{\psi_i} y \leftrightarrow x \leq^*_{\psi_i} y \land y \leq^*_{\psi_i} x$, que es una relación $\Sigma_n^1(a)$ o $\Pi_n^1(a)$ en $\mathcal{N}\times\mathcal{N}\times\omega$. Ahora:

$$x \leq^*_{\phi_m} y \leftrightarrow x <^*_{\psi_0} y \lor (x \sim_{\psi_0} y \land x(0) < y(0)) \lor$$

$$\cdots \lor (x \sim_{\psi_0} y \land x(0) = y(0) \land \cdots \land x \sim_{\psi_m} y \land x(m) \leq y(m))$$

$$\leftrightarrow \bigvee i \leq m (\bigwedge j < i (x \sim_{\psi_j} y \land x(j) = y(j)) \land$$

$$(x <^*_{\psi_i} y \lor (x \sim_{\psi_i} y \land x(i) < y(i))) \lor (i = m \land x \sim_{\psi_m} y \land x(m) \leq y(m))).$$

Es claro que esta relación (triádica) está en la clase correspondiente $\Sigma_n^1(a)$ o $\Pi_n^1(a)$, y con una mínima variación se prueba lo mismo para $x <^*_{\phi_m} y$.

Consideremos una sucesión $\{x_m\}_{m\in\omega}$ en A tal que $\phi_n(x_m) = \alpha_n$ para todo m suficientemente grande. Entonces

$$(\psi_0(x_m), x_m(0), \ldots, \psi_n(x_m), x_m(n)) = (\xi_0^n, k_0^n, \ldots, \xi_n^n, k_n^n)$$

para todo m suficientemente grande. Como $k_j^n = x_m(j)$ para todo m suficientemente grande, resulta que $k_j^n = k_j$ no depende de n y la sucesión $\{x_m\}_{m\in\omega}$ converge a $x = (k_j)_{j\in\omega}$. Igualmente $\xi_j^n = \xi_j$ no depende de n y $\psi_j(x_m) = \xi_j$ para todo j suficientemente grande. Como $\{\psi_n\}_{n\in\omega}$ es una escala, tenemos que

$x \in A$ y $\psi_j(x) \leq \xi_j$. Con esto queda probado que $\{\phi_n\}_{n\in\omega}$ es una escala, y además es claro que $\phi_n(x) \leq \langle \xi_0, k_0, \ldots, \xi_n, k_n\rangle = \alpha_n$, luego se cumple la propiedad a). La propiedad b) es inmediata.

Consideremos ahora el caso general en que X es un espacio producto no numerable. Basta considerar un homeomorfismo $f : \mathcal{N} \longrightarrow X$ que sea Δ^1_1. Es fácil ver que f transforma una escala en A en otra escala en $f^{-1}[A]$, la parte ya probada nos da una escala en $f^{-1}[A]$ con las propiedades adicionales, y ésta se transforma a través de f en una escala en A con las propiedades adicionales. ■

Ahora ya podemos probar el teorema fundamental, también de Moskovakis, dual de 4.43:

Teorema 7.32 (Segundo teorema de periodicidad) *Para cada $a \in \mathcal{N}$, si la clase $\Sigma^1_n(a)$ tiene escalas y se cumple $\mathrm{Det}_\omega(\boldsymbol{\Delta}^1_n)$, también las tiene $\Pi^1_{n+1}(a)$.*

Demostración: Sea X un espacio producto y sea $A \subset X$ un conjunto $\Pi^1_{n+1}(a)$, de modo que existe un conjunto $B \subset X \times \mathcal{N}$ de clase $\Sigma^1_n(a)$ tal que $A = \bigwedge x\, B$. Sea $\{\phi_n\}_{n\in\omega}$ una escala en A que cumpla las condiciones del teorema anterior. Consideremos la biyección canónica $s : \omega \longrightarrow \omega^{<\omega}$, de modo que $s_0 = \varnothing$. Se comprueba además que si $s_i \subset s_j$ entonces $i \leq j$. Definimos

$$A_n = \{x \in X \mid \bigwedge y \in \mathcal{N}(s_n \subset y \rightarrow (x, y) \in B)\}.$$

Así $A_0 = A$ y $\bigwedge n \in \omega\ A \subset A_n$. Vamos a definir una norma ψ_n sobre A_n. Dados $x, y \in X$, consideramos el juego $J^n_{x,y}$ en el que, si I juega la sucesión u' y II juega la sucesión v', entonces, llamando $u = s_n{}^\frown u'$, $v = s_n{}^\frown v'$, se cumple que

I gana si y sólo si $(y, v) <^*_{\phi_n} (x, u) \leftrightarrow (y, v) \in B \land \phi_n(y, v) < \phi_n(x, u)$.

Equivalentemente:

II gana syss $(y, v) \notin B \lor \phi_n(x, u) \leq \phi_n(y, v) \leftrightarrow (y, v) \notin B \lor (x, u) \leq^*_{\phi_n} (y, v)$.

Ahora definimos $x \leq_n y \leftrightarrow$ II tiene una estrategia ganadora en $J^n_{x,y}$.

Los mismos razonamientos empleados en la prueba del teorema 7.28 (mínimamente adaptados) nos permiten construir una norma ψ_n sobre A_n cuya relación $\leq_{\psi_n}$ sea precisamente la relación $\leq_n$ que acabamos de definir. Más aún, las relaciones triádicas $\leq^*_{\psi_m}$ y $<^*_{\psi_m}$ están en la clase $\Pi^1_{n+1}(a)$ (donde la última n es la constante que aparece en el enunciado).

Vamos a probar que $\{\psi_n\}_{n\in\omega}$ es una escala en A. Para ello tomamos una sucesión $\{x_m\}_{m\in\omega}$ en A que converja a un $x \in X$ y tal que las sucesiones $\{\psi_n(x_m)\}_{m\in\omega}$ tomen finalmente un valor constante α_n. Tomando una subsucesión podemos suponer que $\bigwedge m \geq n\ \psi_n(x_m) = \alpha_n$.

En primer lugar vamos a probar que $x \in A$, para lo cual hemos de probar que, para todo $y \in \mathcal{N}$, se cumple que $(x, y) \in B$. Sea n_i tal que $s_{n_i} = y|_i$. De este modo $n_0 < n_1 < n_2 < \cdots$

Entonces $\psi_{n_i}(x_{n_i}) = \psi_{n_i}(x_{n_{i+1}}) = \alpha_{n_i}$, luego $x_{n_{i+1}} \leq_{n_i} x_{n_i}$, luego II tiene una estrategia ganadora en el juego $J^{n_i}_{x_{n_{i+1}},x_{n_i}}$. Consideramos ahora las partidas descritas por la figura siguiente, en las que II aplica siempre una estrategia ganadora:

$\vdots$									$\vdots$
$J^{n_3}_{x_{n_4},x_{n_3}}$	$y_0\ y_1\ y_2$	I	y_3		y^4_4		y^4_5	$\cdots$	y^4
	$y_0\ y_1\ y_2$	II		y^3_3		y^3_4		$\cdots$	y^3
$J^{n_2}_{x_{n_3},x_{n_2}}$	$y_0\ y_1$	I	y_2		y^3_3		y^3_4	$\cdots$	y^3
	$y_0\ y_1$	II		y^2_2		y^2_3		$\cdots$	y^2
$J^{n_1}_{x_{n_2},x_{n_1}}$	y_0	I	y_1		y^2_2		y^2_3	$\cdots$	y^2
	y_0	II		y^1_1		y^1_2		$\cdots$	y^1
$J^{n_0}_{x_{n_1},x_{n_0}}$		I	y_0		y^1_1		y^1_2	$\cdots$	y^1
		II		y^0_0		y^0_1		$\cdots$	y^0

El jugador I empieza la primera partida con y_0, la siguiente con y_1, y así sucesivamente. La segunda jugada de I en la primera partida es la respuesta de II en la segunda, la segunda jugada de I en la segunda es la respuesta de II en la tercera, y así sucesivamente. Llamamos y^i a las sucesiones que resultan de completar las sucesiones jugadas por cada jugador con la sucesión $s_{n_i} = y|_i$ correspondiente a cada juego, de modo que $\lim_i y^i = y$. Como II gana todas las partidas, se cumple que $\phi_{n_i}(x_{n_{i+1}}, y^{i+1}) \leq \phi_{n_i}(x_{n_i}, y^i)$.

Por la propiedad b) del teorema anterior, para todo i suficientemente grande se cumple que

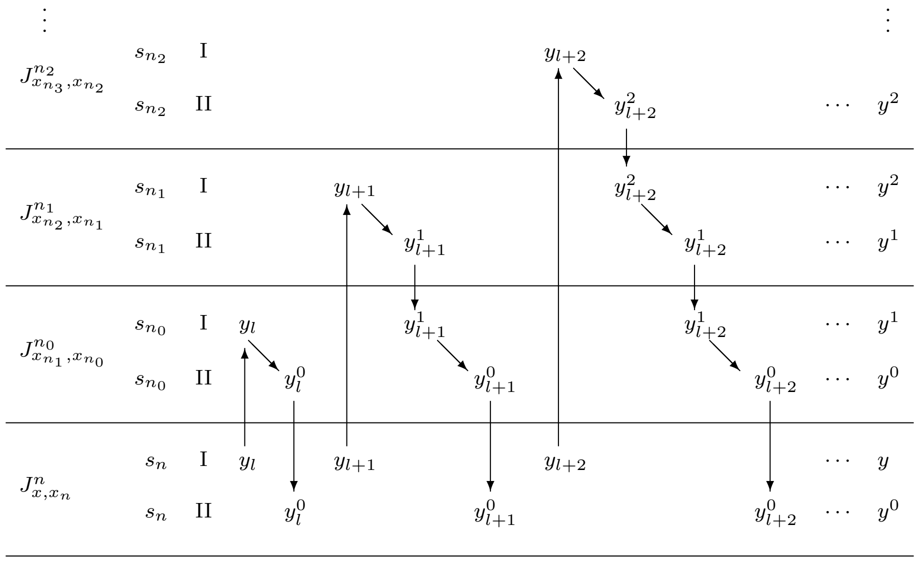
$$\phi_k(x_{n_{i+1}}, y^{i+1}) \leq \phi_k(x_{n_i}, y^i),$$

pero toda sucesión decreciente de ordinales ha de ser finalmente constante, luego la sucesión $\{\phi_k(x_{n_i}, y^i)\}_{i\in\omega}$ es finalmente constante. Como $(x_{n_i}, y^i) \to (x, y)$, la definición de escala nos da que $(x, y) \in B$, para todo y, luego $x \in A$.

Ahora falta probar que $\psi_n(x) \leq \alpha_n = \psi_n(x_n)$. Esto equivale a que $x \leq_n x_n$, es decir, a que II tenga una estrategia ganadora en el juego J^n_{x,x_n}. Veamos cómo construir dicha estrategia.

Observemos que si $k \leq m$, entonces $\psi_k(x_k) \leq \psi_k(x_m)$, luego $x_m \leq_k x_k$, luego II tiene una estrategia ganadora para $J^k_{x_m,x_k}$ (para todo $k \leq m$).

Llamemos $n_0 = n$ y $l = \ell(s_n)$. La figura siguiente explica la estrategia que vamos a considerar:



Llamamos y_l a la primera jugada de I en el juego J^n_{x,x_n}. Para responder, II la lleva a una primera jugada de I en el juego $J^{n_0}_{x_{n_1},x_{n_0}}$, donde n_1 es el número natural que cumple que $s_{n_1} = s_{n_0}{}^\frown y_l$. Luego II aplica su estrategia para este juego y copia la respuesta en el juego inicial.

Seguidamente I juega un y_{l+1} arbitrario y II lo toma como primera jugada de I en el juego $J^{n_1}_{x_{n_2},x_{n_1}}$, donde n_2 es el número natural tal que $s_{n_2} = s_{n_1}{}^\frown y_{l+1}$. Después aplica su estrategia para este juego, copia la respuesta como jugada de I en el juego anterior, aplica su estrategia y copia la respuesta en el juego inicial, y así sucesivamente.

Si llamamos y^i a las sucesiones resultantes (con la sucesión s_{n_i} correspondiente incorporada), es claro que $\lim_i y^i = y$ (donde y es la sucesión jugada por I en el juego inicial). Como II gana todas las partidas salvo quizá la primera, sabemos que $\phi_{n_i}(x_{n_{i+1}}, y^{i+1}) \leq \phi_{n_i}(x_{n_i}, y^i)$. Por la propiedad b) del teorema anterior, para todo i suficientemente grande,

$$\phi_k(x_{n_{i+1}}, y^{i+1}) \leq \phi_k(x_{n_i}, y^i). \tag{7.1}$$

Como toda sucesión decreciente de ordinales es finalmente constante, cada sucesión $\{\phi_k(x_{n_i}, y^i)\}_{i\in\omega}$ es finalmente constante, digamos igual a β_k, luego, por definición de escala, $(x, y) \in B$ y $\phi_k(x, y) \leq \beta_k$. Tomando $k = n = n_0$ en (7.1) obtenemos que

$$\phi_n(x_{n_0}, y^0) \geq \phi_n(x_{n_1}, y^1) \geq \phi_n(x_{n_2}, y^2) \geq \cdots \geq \beta_n \geq \phi_n(x, y),$$

y esto significa que II gana la partida de J^n_{x,x_n}.

Con esto hemos probado que $\{\psi_n\}_{n\in\omega}$ es una escala en A. Sin embargo, hay un detalle a causa del cual todavía no podemos dar el teorema por demostrado: Tenemos que las relaciones

$$x \leq^*_{\psi_m} y \leftrightarrow x \in A_m \wedge \psi_m(x) \leq \psi_m(y),$$

$$x <^*_{\psi_m} y \leftrightarrow x \in A_m \wedge \psi_n(x) < \psi_m(y),$$

son $\Pi^1_{n+1}(a)$, donde n es el natural fijo dado por el enunciado, mientras que necesitamos que se cumpla esto mismo cambiando A_m por A y que ψ_m tome su valor máximo sobre todos los elementos de $X \setminus A$, en lugar de sobre los elementos de $X \setminus A_m$. La forma más sencilla de corregir estos inconvenientes es la siguiente: sea λ un ordinal suficientemente grande como para que todas las aplicaciones ψ_m tomen valores menores que λ, consideramos la semejanza $\lambda \times \lambda$ y sea $(\alpha, \beta) \mapsto \langle \alpha, \beta \rangle$ de $\lambda \times \lambda$ (con el orden lexicográfico) en su ordinal y definimos

$$\psi'_m(x) = \langle \psi_0(x), \psi_m(x) \rangle .$$

Una simple adaptación del argumento del teorema anterior muestra que $\{\psi'_n\}_{n\in\omega}$ es una escala en A y, además,

$$x \leq^*_{\psi'_m} y \leftrightarrow x \in A \wedge \psi'_m(x) \leq \psi'_m(y) \leftrightarrow$$

$$x \in A \wedge (\psi_0(x) < \psi_0(y) \vee (\psi_0(x) = \psi_0(y) \wedge \psi_m(x) \leq \psi_m(y))) \leftrightarrow$$

$$x <^*_{\psi_0} y \vee (x \leq^*_{\psi_0} y \wedge y \leq^*_{\psi_0} x \wedge x \leq^*_{\psi_m} y),$$

donde usamos que $A = A_0 \subset A_m$, de modo que $x \in A \leftrightarrow x \in A \wedge x \in A_m$. Esta expresión muestra que la relación triádica $x \leq^*_{\psi'_m} y$ es $\Pi^1_{n+1}(a)$, e igualmente se razona con $x <^*_{\psi'_m} y$. ■

Combinando esto con los teoremas 4.41 y 4.43 obtenemos:

Teorema 7.33 (ADP) *Las clases $\Pi^1_{2n+1}(a)$ y $\Sigma^1_{2n+2}(a)$ tienen escalas y la propiedad de uniformización.*

La prueba del teorema 7.32 es válida sin cambio alguno para la clase $\mathbf{\Sigma}^1_n$ y entonces podemos tomar como X un espacio polaco arbitrario. Por consiguiente:

Teorema 7.34 (ADP) *Las clases de Lusin*

$$\begin{array}{ccccccc} & \mathbf{\Sigma}^1_2 & & \mathbf{\Sigma}^1_4 & & \mathbf{\Sigma}^1_6 & \cdots \\ \mathbf{\Pi}^1_1 & & \mathbf{\Pi}^1_3 & & \mathbf{\Pi}^1_5 & & \cdots \end{array}$$

tienen escalas y la propiedad de uniformización.

Nota (ADP) Partiendo de que $\mathbf{\Pi}^1_{2n+1}$ no tiene la propiedad de separación (por los teoremas 4.38 y 7.29), el argumento del teorema 2.20 nos da que existen conjuntos $\mathbf{\Pi}^1_{2n}$ en $\mathcal{N} \times \mathcal{N}$ que no pueden ser uniformizados por conjuntos $\mathbf{\Sigma}^1_{2n+1}$. Por consiguiente, ni $\mathbf{\Pi}^1_{2n}$ ni $\mathbf{\Sigma}^1_{2n+1}$ tienen la propiedad de uniformización. A su vez, esto implica que $\mathbf{\Pi}^1_{2n}$ no tiene escalas y, por (la versión para clases de Lusin de) 7.32, $\mathbf{\Sigma}^1_{2n-1}$ tampoco las tiene. ■

7.5 El axioma de determinación

El *axioma de determinación* es la sentencia siguiente:

(AD) *Para todo $A \subset \mathcal{N}$, el juego $J(A)$ está determinado.*

Más brevemente, AD es la sentencia $\mathrm{Det}_\omega(\mathcal{PN})$. El teorema 7.2 nos da la implicación AD $\rightarrow \neg$AE, luego ZFD = ZF + ED + AD es una extensión de ZF incompatible con ZFC. La razón principal por la que hemos desarrollado la teoría descriptiva de conjuntos en ZF + ED es para asegurar que todos los resultados que hemos visto en este libro (excepto aquellos pocos que han requerido AE) siguen siendo válidos en ZFD. Demostraremos más adelante que i la existencia de ciertos cardinales grandes es consistente, entonces ZFD es también consistente.

En la sección 7.1 hemos visto que todo juego $J(R, A)$ puede reducirse a un juego $J(A')$, por lo que el axioma de determinación implica que todo juego $J(R, A)$ está determinado.

Bajo AD tenemos la siguiente generalización del teorema 7.27:

Teorema 7.35 (AD) *Todo subconjunto de todo espacio polaco es universalmente medible, tiene la propiedad de Baire y, si no es numerable, contiene un subconjunto perfecto.*

La afirmación sobre subconjuntos perfectos es consecuencia inmediata de 7.10 tomando $\mathbf{\Gamma} = \mathcal{PN}$.

La afirmación sobre la propiedad de Baire se puede probar particularizando la demostración del teorema 7.16. En efecto, allí se parte de un conjunto $A \subset X$ de clase $\mathbf{\Sigma}^1_{n+1}$ y se expresa como $A = \pi[F]$, con $F \subset X \times \mathcal{N}$ de clase $\mathbf{\Pi}^1_n$ y se usa $\mathrm{Det}(\mathbf{\Pi}^1_n)$ para probar que A tiene la propiedad de Baire. Ahora partimos de un $A \subset X$ arbitrario y la prueba sigue siendo válida tomando $F = A \times \mathcal{N}$ y usando AD (con lo que no hemos de preocuparnos de ver qué tipo de conjunto es F). No obstante, el argumento puede simplificarse eliminando el paso a F por completo. Vamos a verlo con detalle:

Fijamos un espacio polaco X y en él una base $B = \{B_n\}_{n\in\omega}$ de abiertos no vacíos. Para cada conjunto $A \subset X$, consideramos *juego de Banach-Mazur* $G^{**}(A)$ que sigue el esquema siguiente:

$$
\begin{array}{c|cccccc}
\mathrm{I} & U_0 & & U_1 & & \cdots & \\
\hline
\mathrm{II} & & V_0 & & V_1 & & \cdots
\end{array}
$$

con las reglas

a) U_n, V_n son abiertos de básicos de $\mathcal{N}$ de diámetro $\leq 2^{-n}$.

b) $\overline{U_{n+1}} \subset \overline{V_n} \subset \overline{U_n}$.

Así, cada partida determina un único $x \in \bigcap\limits_{n\in\omega} \overline{U_n} = \bigcap\limits_{n\in\omega} \overline{V_n}$. El jugador I gana la partida si $x \in A$.

Observemos que a través de la enumeración de la base podemos considerar que cada jugada es en realidad un número natural. Las dos reglas del juego determinan entonces un árbol bien podado $R \subset \omega^{<\omega}$ y el juego es equivalente al juego $J(R, A')$, donde A' es el conjunto de los $x \in [R]$ tales que el único punto de

$$\bigcap_{n\in\omega} \overline{B_{x(2n)}} = \bigcap_{n\in\omega} \overline{B_{x(2n+1)}}$$

está en A. Por lo tanto, AD implica que el juego $G^{**}(A)$ está determinado.

Teorema 7.36 *Sea X un espacio polaco y sea $A \subset X$*

a) Si I *tiene una estrategia ganadora para $G^{**}(A)$, entonces existe un $U \in B$ tal que $\overline{U} \setminus A$ es de primera categoría.*

b) Si II *tiene una estrategia ganadora para $G^{**}(A)$, entonces A es de primera categoría.*

Demostración: Veamos primero b). Sea σ una estrategia ganadora para el jugador II y sea $x \in A$.

Diremos que una posición s de longitud $2n$ es *buena* para x si está jugada de acuerdo con la estrategia σ y $x \in \overline{V_n}$. Entonces, ha de haber una posición buena para x que no pueda prolongarse a otra posición buena para x, pues, en otro caso, obtendríamos una partida jugada según σ en la que ganaría I. En otras palabras, existe una posición buena s tal que, para toda jugada posible de I, la jugada siguiente según σ hace que $x \notin \overline{V_{n+1}}$.

Si s es una posición de longitud $2n$ jugada según σ, llamaremos C_s al conjunto de todos los $x \in X$ tales que $x \in \overline{V_n}$ y, para toda jugada (legal) de I dada por U_{n+1}, el abierto V_{n+1} determinado por σ cumple que $x \notin \overline{V_{n+1}}$.

Hemos probado que, dado $x \in F$, existe una posición s de longitud par jugada según σ de modo que $x \in C_s$ o, lo que es lo mismo $F \subset \bigcup\limits_s C_s$.

Ahora bien, sucede que C_s es diseminado, pues lo contrario significa que existe un abierto no vacío $U_{n+1} \subset \overline{C}_s \subset \overline{V}_n$, que podemos tomar de manera que $U_{n+1} \in B$ y $d(U_{n+1}) < 2^{-n-1}$. Sea entonces V_{n+1} el abierto determinado por σ si I prolonga s con U_{n+1}. Entonces $V_{n+1} \subset \overline{V_{n+1}} \subset \overline{U_{n+1}} \subset \overline{C}_s$, luego $V_{n+1} \cap C_s \neq \varnothing$, pero esto es absurdo, por la propia definición de C_s.

Como s recorre un conjunto numerable, concluimos que F es de primera categoría.

a) Si I tiene una estrategia ganadora σ para $G^{**}(A)$, llamemos $U = \sigma(\varnothing)$ y vamos a probar que II tiene una estrategia ganadora para $G^{**}(\overline{U} \setminus A)$. Admitiendo esto, el apartado b) ya probado nos da que $\overline{U} \setminus A$ es de primera categoría.

Veamos cuál es la estrategia de II. Sea U_0 la primera jugada de I y supongamos en primer lugar que $\overline{U_0} \not\subset \overline{U}$. Tomamos $x \in \overline{U_0} \setminus \overline{U}$. Entonces, como $X \setminus \overline{U}$ es un entorno de x, se cumple que $U_0 \cap (X \setminus \overline{U})$ es un abierto no vacío, luego podemos tomar $V_0 \in B$, $V_0 \subset \overline{V_0} \subset U_0 \setminus \overline{U}$, $d(V_0) < 1/2$. Jugando V_0, II tiene asegurada la victoria sean cuales sean las jugadas posteriores.

Supongamos ahora que $\overline{U_0} \subset \overline{U}$. Entonces II puede responder con el abierto V_0 determinado por σ para la partida que empieza con U seguido de U_0. En general, II puede jugar de modo que cada posición de la partida se convierta en una posición según σ cuando se le antepone U. De este modo se asegura de que el punto final x esté en $\overline{U} \cap A$, luego no estará en $\overline{U} \setminus A$ y ganará la partida. ∎

Ahora ya podemos probar que todo $A \subset X$ tiene la propiedad de Baire. En principio, lo que sabemos es que todo $A \subset X$ es de primera categoría (en cuyo caso tiene la propiedad de Baire) o bien existe un abierto básico U_0 tal que $\overline{U}_0 \setminus A$ es de primera categoría. En el segundo caso llamamos U a la unión de todos los abiertos con dicha propiedad. Así $U \setminus A$ está contenido en una unión numerable de conjuntos de primera categoría, luego es de primera categoría. Basta probar que $A \setminus U$ también es de primera categoría, pues entonces lo será $A\Delta U$ y A tendrá la propiedad de Baire.

Si $A \setminus U$ no es de primera categoría, por el teorema anterior existe un abierto básico U_0 tal que $\overline{U}_0 \setminus (A \setminus U)$ es de primera categoría, luego $\overline{U}_0 \setminus A$ también lo es, luego $U_0 \subset U$ por definición de U, luego $U_0 \subset \overline{U}_0 \setminus (A \setminus U)$, luego U_0 es de primera categoría, lo cual es absurdo.[4] ∎

Para estudiar la medibilidad, por los mismos argumentos empleados en la prueba del teorema 7.18, no perdemos generalidad si nos restringimos a $X = \mathcal{C}$, el espacio de Cantor. Como en el caso anterior, la prueba de 7.18 vale en nuestro contexto actual sin más que trivializar el paso de $\mathcal{C}$ a $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$, pero de hecho podemos simplificarla eliminando ese paso:

Sea $\{t_n\}_{n\in\omega}$ una enumeración de $2^{<\omega}$ y $\{s_n\}_{n<\omega}$ una enumeración de $\omega^{<\omega}$. Para cada $A \subset \mathcal{C}$ y cada $\epsilon > 0$, definimos el juego $J'(A, \epsilon)$ que se juega según el esquema:

$$\begin{array}{c|ccccccc} \mathrm{I} & x_0 & & x_1 & & \cdots & \\ \hline \mathrm{II} & & z_0 & & z_1 & & \cdots \end{array}$$

con las reglas:

a) $x_n \in 2$, $z_n \in \omega$.

b) Si $U_n = \bigcup\limits_{i<\ell(s_{z_n})} B_{t_{s_{z_n}(i)}}$, se cumple que $\mu(U_n) < \epsilon/2^{2n+2}$.

Así, cada partida determina un $x \in \mathcal{C}$ y un abierto $U = \bigcup\limits_{n\in\omega} U_n$.

El jugador I gana la partida si $x \in A \setminus U$.

En la práctica podemos pensar que las jugadas de II son uniones finitas de abiertos básicos de $\mathcal{C}$. La jugada z_n determina una sucesión $s_{z_n} \in \omega^{<\omega}$, la cual determina a su vez una sucesión finita $t_{s_{z_n}(0)}, \ldots, t_{s_{z_n}(k)} \in 2^{<\omega}$, la cual determina a su vez el abierto U_n, y cualquier unión finita de abiertos básicos puede obtenerse de esta forma.

[4] Analizando con más detalle este argumento se ve fácilmente que con él también puede probarse que $\mathrm{Det}(\boldsymbol{\Pi}^1_n)$ implica la propiedad de Baire para los conjuntos $\boldsymbol{\Pi}^1_n$, que es un resultado menos fino que 7.16.

Obviamente $J'(A, \epsilon)$ es equivalente a un juego $J(R, B)$, donde R es un árbol (claramente bien podado) en ω y B es el conjunto de los $y \in [R]$ tales que el punto $x \in \mathcal{N}$ formado por los términos pares de y está en A y no en el abierto U determinado por la sucesión z de los términos pares de y. Por lo tanto, AD implica que el juego $J'(A, \epsilon)$ está determinado.

Teorema 7.37 *Sea μ una medida de Borel unitaria en $\mathcal{C}$, $\epsilon > 0$ y $A \subset \mathcal{C}$.*

a) Si I *tiene una estrategia ganadora en el juego $J'(A, \epsilon)$, entonces A contiene un conjunto μ-medible de medida positiva.*

b) Si II *tiene una estrategia ganadora en el juego $J'(A, \epsilon)$, entonces existe un abierto $U \subset \mathcal{C}$ tal que $A \subset U$ y $\mu(U) < \epsilon$.*

DEMOSTRACIÓN: Si I tiene una estrategia ganadora σ, sea $C \subset \mathcal{N}$ el conjunto de las sucesiones $z \in \mathcal{N}$ tales que si II juega $z_0, z_1, \ldots$ sus jugadas son legales. Se cumple que C es cerrado, pues si $z \in \mathcal{N} \setminus C$, existe un mínimo $n \in \omega$ tal que la jugada z_n es ilegal, con lo que $z \in B_{z|_{n+1}} \subset \mathcal{N} \setminus C$.

La aplicación $C \longrightarrow \mathcal{C}$ dada por $z \mapsto x = (\sigma * z)_{\mathrm{I}}$ es continua, luego su imagen, que es el conjunto $B \subset A$ de todos los puntos de X construidos mediante partidas en las que I juega según σ, es un conjunto analítico, luego μ-medible. Sólo hemos de probar que no tiene medida nula.

Si fuera $\mu(B) = 0$, existiría un abierto G tal que $B \subset G$ y $\mu(G) < \epsilon/2^2$. Expresamos G como unión de abiertos básicos $G = \bigcup\limits_{i \in \omega} G_i$, donde cada G_i es de la forma B_t, para cierta $t \in 2^{<\omega}$. Como dos abiertos básicos distintos están uno contenido en otro o son disjuntos, podemos refinar la unión para que los G_i sean disjuntos dos a dos.

Definimos U_0 como una unión finita de abiertos G_i tal que $\mu(G \setminus U_0) < \epsilon/2^4$, y asegurando que al menos $G_0 \subset U_0$. Tenemos que $\mu(U_0) < \epsilon/2^2$. Similarmente, definimos $U_1 \subset G \setminus U_0$ como una unión finita de abiertos G_i de modo que $\mu(G \setminus (U_0 \cup U_1)) < \epsilon/2^6$, asegurando que $G_1 \subset U_0 \cup U_1$. Procediendo de este modo construimos una sucesión $\{U_n\}_{n<\omega}$ de abiertos en $\mathcal{C}$, cada uno de los cuales es una unión finita de abiertos básicos, $\mu(U_n) < \epsilon/2^{2n+2}$ y $B \subset G = \bigcup\limits_{n \in \omega} U_n$.

Entonces, la sucesión U_n determina una estrategia para II (jugar en cada paso U_n independientemente de lo que haga I), que claramente burla a la estrategia σ, pues el conjunto U resultante será G y, si I juega según σ, el punto x resultante estará en $B \subset U$. Esto contradice que σ sea una estrategia ganadora, luego B ha de tener medida positiva.

Supongamos ahora que es II quien tiene una estrategia ganadora σ. Para cada $s \in 2^{n+1}$), llamemos U_s al abierto U_n que determina σ como jugada n-sima de II cuando I ha jugado hasta el momento $x_i = s(i)$. Sea $G = \bigcup\limits_s U_s$.

Claramente, U es abierto y $A \subset U$, pues si $x \in A$, I puede jugar en cada turno $x(n)$ y, si II aplica su estrategia σ, al final de la partida se llega al punto $x \in A$, luego la única forma en que II puede ganar es que x esté en U, lo que significa que está en $U_n = U_{x|_{n+1}}$, para cierto $n \in \omega$, luego $x \in G$. Por otra parte,

$$\mu(G) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \mu(\bigcup_{s \in 2^{n+1}} U_s) \leq \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n+1} \cdot \frac{\epsilon}{2^{2n+2}} = \epsilon.$$

■

Ahora tomamos un conjunto $B \subset \mathcal{C}$ arbitrario. Por la regularidad de las medidas de Borel existe un conjunto $\hat{B}$ de tipo G_δ tal que $B \subset \hat{B}$ y todo conjunto de Borel contenido en $A = \hat{B} \setminus B$ es nulo.

Dado $\epsilon > 0$, el juego $J'(A, \epsilon)$ está determinado, pero por el teorema anterior I no puede tener una estrategia ganadora. Esto significa que la tiene II, luego, de nuevo por el teorema anterior, existe un abierto G tal que $A \subset G$ y $\mu(G) < \epsilon$. Esto implica que $\mu^*(A) = 0$, donde μ^* es la medida exterior asociada a μ, pero todo conjunto de medida exterior nula es medible, luego $\hat{B} \setminus B$ es medible, luego B también lo es. ■

En particular tenemos que todo subconjunto de $\mathbb{R}^n$ es medible Lebesgue.

El lema de Wadge Veamos ahora otra consecuencia sencilla de AD que es útil a menudo. Para enunciarla necesitamos una definición:

Definición 7.38 Sean $A, B \subset \mathcal{N}$. Diremos que A es *reducible Wadge* a B si existe $f : \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{N}$ continua tal que $A = f^{-1}[B]$. Lo representaremos por $A \leq_W B$.

Se trata de una relación reflexiva y transitiva, por lo que define una relación de equivalencia dada por

$$A \equiv_W B \leftrightarrow A \leq_W B \land B \leq_W A.$$

Las clases de equivalencia en $\mathcal{PN}$ dadas por esta relación se llaman *grados de Wadge*. Sucede que AD determina una estructura muy rica en el conjunto de los grados de Wadge. La estudiaremos con detalle en los capítulos VIII y IX, pero aquí probaremos únicamente el que resulta ser el resultado fundamental de la teoría de reducibilidad Wadge, cuya prueba es muy sencilla:

Teorema 7.39 (Lema de Wadge) (AD) *Si $A, B \in \mathcal{PN}$, o bien $A \leq_W B$ o bien $B \leq_W \neg A$.*

Demostración: Si $A, B \subset \mathcal{N}$, consideramos el juego $J(A, B)$ en el que si I juega a y II juega b entonces II gana si y sólo si $a \in A \leftrightarrow b \in B$. Más explícitamente, $J(A, B)$ es el juego $J(C)$, donde

$$C = X^\omega \setminus \{z \in X^\omega \mid z_{\mathrm{I}} \in A \leftrightarrow z_{\mathrm{II}} \in B\} = \pi_{\mathrm{I}}^{-1}[A] \,\Delta\, \pi_{\mathrm{II}}^{-1}[B],$$

donde a su vez $\pi_{\mathrm{I}}(z) = z_{\mathrm{I}}$ y $\pi_{\mathrm{II}}(z) = z_{\mathrm{II}}$ son las subsucesiones de términos pares (resp. impares) de z.

Si τ es una estrategia ganadora para II, entonces la aplicación $a \mapsto (a * \tau)_{\mathrm{II}}$ es una función continua que prueba que $A \leq_W B$.

Si I tiene una estrategia ganadora σ, entonces $b \mapsto (\sigma * b)_{\mathrm{I}}$ es una función continua que prueba $B \leq_W \neg A$. ■

7.6 El cardinal Θ bajo AD

El teorema 7.35, junto con [TC 3.10], implica que $\aleph_1 \not\leq 2^{\aleph_0}$, lo cual equivale a que si $f : \alpha \longrightarrow \mathcal{N}$ es una aplicación inyectiva, entonces el ordinal α es numerable, lo cual puede interpretarse como una versión sin AE de la hipótesis del continuo. Sin embargo, cuando tratamos de comparar el tamaño de $\mathcal{N}$ con la sucesión de los álefs a través de aplicaciones suprayectivas llegamos al cardinal Θ definido en 4.26, y bajo AD resulta ser muy grande. Lo que sigue es sólo una pequeña muestra:

Teorema 7.40 (Moskovakis) (AD) *Si α es un ordinal tal que existe una aplicación suprayectiva $\mathcal{N} \longrightarrow \alpha$, entonces también existe una aplicación suprayectiva $\mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{P}\alpha$.*

Demostración: Sea $f : \mathcal{N} \longrightarrow \alpha$ suprayectiva. Vamos a definir recurrentemente una sucesión $\{g_\delta\}_{\delta\leq\alpha}$ de aplicaciones suprayectivas $g_\delta : \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{P}\delta$. Definimos $\delta_0 : \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{P}0$ como la única aplicación posible. Supongamos definida g_δ y vamos a definir $g_{\delta+1}$. Para ello, si $\delta < \omega$ definimos explícitamente $g_{\delta+1}$, por ejemplo, $g_{\delta+1}(x) = x[\omega] \cap (\delta + 1)$. Si $\omega \leq \delta$ definimos $g_{\delta+1}(x) = h[g_\delta(x)]$, donde $h : \delta \longrightarrow \delta + 1$ es la biyección dada por

$$h(\beta) = \begin{cases} \beta - 1 & \text{si } 0 < \beta < \omega, \\ \beta & \text{si } \omega \leq \beta, \\ \delta & \text{si } \beta = 0. \end{cases}$$

Por último supongamos definidas $\{g_\delta\}_{\delta<\lambda}$, para un ordinal límite $\lambda \leq \alpha$ y veamos cómo definir g_λ.

Para cada $\delta < \lambda$ y cada $y \subset \delta$ diremos que $z \in \mathcal{N}$ codifica y si $f(z^2_0) = \delta$ y $g_\delta(z^2_1) = y$. Para cada $X \subset \lambda$ consideramos el juego J^X en el que I pierde salvo si sus jugadas x_{I} codifican $X \cap \delta$, para cierto $\delta < \lambda$, en cuyo caso II pierde salvo si sus jugadas x_{II} codifican $X \cap \eta$ con $\delta < \eta < \lambda$.

Veamos qué sucede si I tiene una estrategia ganadora σ para J^X. Entonces, para toda posible sucesión de jugadas $y \in \mathcal{N}$, tenemos que $(\sigma * y)_{\mathrm{I}}$ codifica $X \cap \delta$ para cierto $\delta < \lambda$. Más aún, el conjunto X está completamente determinado por σ, es decir, que σ no puede ser una estrategia ganadora para I en ningún otro juego J^Y, con $Y \subset \lambda$, ya que podemos tomar $\beta \in X\Delta Y$ y un $y \in \mathcal{N}$ que codifique a $X \cap (\beta + 1)$. Entonces $(\sigma * y)_{\mathrm{I}}$ debería codificar $X \cap \delta$ para cierto $\delta \geq \beta + 1$, pero entonces $X \cap \delta \neq Y \cap \delta$, luego I no gana el juego J^Y.

Supongamos ahora que II tiene una estrategia ganadora σ para J^X. Entonces, para todo $z \in \mathcal{N}$ que codifique a $X \cap \delta$, para cierto $\delta < \lambda$, se cumple que $(z * \sigma)_{\mathrm{II}}$ codifica a $X \cap \eta$, con $\delta < \eta < \lambda$. Nuevamente, la estrategia σ no puede ser ganadora para ningún otro juego J^Y, ya que podemos tomar $\delta = \min X\Delta Y$ y considerar un $z \in \mathcal{N}$ que codifique $X \cap \delta = Y \cap \delta$. Entonces $(z * \sigma)_{\mathrm{II}}$ debe codificar a $X \cap \eta$ para cierto $\eta > \delta$, pero entonces no codifica a $Y \cap \eta \neq X \cap \eta$.

Ahora podemos definir $g_\lambda : \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{P}\lambda$ suprayectiva mediante

$$g_\lambda(x) = \begin{cases} X & \text{si } x \text{ codifica una estrategia ganadora para } J^X, \\ \varnothing & \text{si } x \text{ no codifica ninguna estrategia ganadora para ningún } X. \end{cases}$$

■

Como consecuencia:

Teorema 7.41 (Friedman) (AD) Θ *es un cardinal límite.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $\kappa < \Theta$. Entonces existe $f : \mathcal{N} \longrightarrow \kappa$ suprayectiva, luego por el teorema anterior existe una aplicación $\mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{P}\kappa$ suprayectiva, luego también una aplicación $\mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{P}(\kappa \times \kappa)$ suprayectiva. Por otra parte tenemos una aplicación $g : \mathcal{P}(\kappa \times \kappa) \longrightarrow \kappa^+$ suprayectiva dada por

$$g(R) = \begin{cases} \operatorname{ord}(R, \leq) & \text{si } R \text{ es un buen orden en } \kappa, \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Componiendo obtenemos una aplicación $\mathcal{N} \longrightarrow \kappa^+$ suprayectiva, luego $\kappa^+ < \Theta$. ■

Podemos refinar este resultado:

Teorema 7.42 (Solovay) (AD) $\Theta = \aleph_\Theta$.

DEMOSTRACIÓN: Todo ordinal cumple $\Theta \leq \aleph_\Theta$. Hemos de probar la desigualdad opuesta. Concretamente, basta probar que si $\alpha < \Theta$, entonces $\aleph_\alpha < \Theta$. Tenemos una aplicación $f : \mathcal{N} \longrightarrow \alpha$ suprayectiva. Vamos a construir recurrentemente una sucesión $\{g_\delta\}_{\delta \leq \alpha}$ de aplicaciones $g_\delta : \mathcal{N} \longrightarrow \aleph_\delta$ suprayectivas.

Definimos $g_0 : \mathcal{N} \longrightarrow \aleph_0$ mediante $g(x) = x(0)$. Supuesta definida g_δ, el teorema 7.40 nos construye explícitamente (sin ninguna elección arbitraria que implicaría aquí el uso de AE) una aplicación $\mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{P}\aleph_\delta$ suprayectiva y en la prueba del teorema anterior hemos visto cómo construir explícitamente a partir de aquí una aplicación $g_{\delta+1} : \mathcal{N} \longrightarrow \aleph_{\delta+1}$ suprayectiva.

Supongamos ahora construidas las aplicaciones $\{g_\delta\}_{\delta<\lambda}$, con $\lambda \leq \alpha$ y veamos cómo construir g_λ. Es fácil definir explícitamente una aplicación $\alpha \longrightarrow \lambda$ suprayectiva, con la cual obtenemos $h : \mathcal{N} \longrightarrow \lambda$ suprayectiva, componiendo con la aplicación f. Ahora definimos $g_\lambda : \mathcal{N} \longrightarrow \aleph_\lambda$ mediante $g_\lambda(x) = g_{h(x_0^2)}(x_1^2)$. ■

Observemos que $\operatorname{cf}\Theta > \aleph_0$, pues si existiera una sucesión $\{\alpha_n\}_{n<\omega}$ cofinal en Θ, usando el axioma de elección numerable, podríamos fijar aplicaciones $g_n : \mathcal{N} \longrightarrow \alpha_n$ suprayectivas, y la construcción del teorema anterior nos daría una aplicación $g_\omega : \mathcal{N} \longrightarrow \Theta$ suprayectiva.

Teorema 7.43 (Solovay) ($V = L(\mathcal{N})$) Θ *es un cardinal regular.*

DEMOSTRACIÓN: Basta probar (sin AE) que existe una sucesión $\{g_\alpha\}_{0<\alpha<\Theta}$ de aplicaciones suprayectivas $g_\alpha : \mathcal{N} \longrightarrow \alpha$. Admitiendo esto, si se cumpliera $\kappa = \operatorname{cf}\Theta < \Theta$, tendríamos una aplicación $f : \mathcal{N} \longrightarrow \kappa$ suprayectiva, y podríamos definir $h : \mathcal{N} \longrightarrow \Theta$ suprayectiva mediante $h(x) = g_{f(x_0^2)}(x_1^2)$.

Para cada $0 < \alpha < \Theta$ existe un (mínimo) ordinal γ_α tal que existe una aplicación $f : \mathcal{N} \longrightarrow \alpha$ suprayectiva tal que $f \in L_{\gamma_\alpha}(\mathcal{N})$. Sea $\gamma = \bigcup\limits_{0<\alpha<\Theta} \gamma_\alpha$. Así, para cada $0 < \alpha < \Theta$ existe $f : \mathcal{N} \longrightarrow \alpha$ suprayectiva tal que $f \in L_\gamma(\mathcal{N})$.

Por el teorema [PC 3.49] existe un ordinal λ y una aplicación $\Phi : \lambda\times\mathcal{N} \longrightarrow L_\gamma(\mathcal{N})$ suprayectiva.

Definimos $t : \Theta \setminus \{0\} \longrightarrow \lambda$ de modo que $t(\alpha)$ sea el menor ordinal tal que existe $y \in \mathcal{N}$ tal que $\phi(t(\alpha), y) : \mathcal{N} \longrightarrow \alpha$ suprayectiva. Ahora definimos g_α mediante

$$g_\alpha(x) = \begin{cases} \Phi(t(\alpha), x_0^2)(x_1^2) & \text{si } \Phi(t(\alpha), x_0^2) : \mathcal{N} \longrightarrow \alpha, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

■

Así pues, suponiendo $V = L(\mathcal{N})$ + AD tenemos que Θ es un cardinal inaccesible. Puede probarse que, de hecho, es débilmente Θ-Mahlo.

7.7 El lema de codificación

En esta sección presentamos un resultado técnico debido a Moschovakis que permite extraer muchas implicaciones del axioma de determinación en la teoría descriptiva de conjuntos. Como veremos, su prueba requiere el teorema de recursión de Kleene, con lo que es un testimonio más de la importancia de este resultado.

Sean X, Y dos espacios producto, sea $S \subset X$, sea $<$ una relación bien fundada en S y sea $\rho : S \longrightarrow \lambda$ su función rango asociada. Podemos pensar que los elementos de S codifican ordinales a través de ρ. Sea $f : \lambda^n \longrightarrow \mathcal{P}Y$. Un *conjunto de elección* para f respecto a $<$ es un conjunto $C \subset X^n \times Y$ tal que

a) Si $(x_1, \ldots, x_n, y) \in C$, entonces $x_1, \ldots, x_n \in S$ y $y \in f(\rho(x_1), \ldots, \rho(x_n))$.

b) Si $f(\xi_1, \ldots, \xi_n) \neq \varnothing$, entonces existe un $x \in S^n$ de manera que $\rho(x_i) = \xi_i$, y existe un $y \in f(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ tal que $(x_1, \ldots, x_n, y) \in C$.

El teorema siguiente contiene el núcleo del lema de codificación, si bien a continuación veremos como consecuencia la forma en que realmente lo usaremos y que explica su nombre:

Teorema 7.44 (Lema de codificación I) (Moschovakis) (AD) *Sea Γ una clase de conjuntos ω-parametrizada, que contenga a Σ_1^1 y cerrada para sustituciones recursivas, uniones, intersecciones, $\bigwedge n \in \omega$, $\bigvee n \in \omega$ y $\bigvee x \in \mathcal{N}$. Sean X, Y dos espacios producto, sea $<$ una relación bien fundada en un conjunto $S \subset X$, sea $\rho : S \longrightarrow \lambda$ su función rango. Si la relación $<$ está en Γ, toda función $f : \lambda^n \longrightarrow \mathcal{P}Y$ tiene un conjunto de elección en $\mathbf{\Gamma}$.*

DEMOSTRACIÓN: Consideremos primero una función $f : \lambda \longrightarrow \mathcal{P}Y$. Para cada $\xi \leq \lambda$ sea

$$f_\xi(\eta) = \begin{cases} f(\eta) & \text{si } \eta < \xi, \\ \varnothing & \text{si } \xi \leq \eta < \lambda. \end{cases}$$

Basta demostrar que todas las funciones f_ξ tienen un conjunto de elección en $\mathbf{\Gamma}$. En caso contrario, sea $\delta \leq \lambda$ el mínimo ordinal tal que f_δ no tiene un conjunto de elección en $\mathbf{\Gamma}$. Observemos que se trata de un ordinal límite, pues si f_ξ tiene un conjunto de elección $C \in \mathbf{\Gamma}$ y $f(\xi) = \varnothing$, entonces es claro que C también es un conjunto de elección para $f_{\xi+1}$, mientras que si existe un $y_0 \in f(\xi)$, tomamos $x_0 \in S$ tal que $\rho(x_0) = y_0$ y es claro que $C \cup \{(x_0, y_0)\}$ es un conjunto de elección en $\mathbf{\Gamma}$ para $f_{\xi+1}$.

Fijemos una buena parametrización de Γ según la definición 3.56 y tomemos $G \subset X \times Y \times \mathcal{N}$ un buen conjunto universal. Para cada $a \in \mathcal{N}$ llamamos, como es usual, $G_a = \{(x, y) \in X \times Y \mid (x, y, a) \in \mathcal{N}\}$.

Consideramos el juego en el que si I juega $a \in \mathcal{N}$ y II juega $b \in \mathcal{N}$ entonces II gana si y sólo si G_a no es un conjunto de elección en $\mathbf{\Gamma}$ para ninguna f_ξ con $\xi < \delta$ o bien existe un $\xi < \delta$ tal que G_a es un conjunto de elección en $\mathbf{\Gamma}$ para f_ξ y un $\delta > \eta > \xi$ tal que G_b es un conjunto de elección en $\mathbf{\Gamma}$ para f_η.

Por AD tenemos que el juego está determinado. Distingamos dos casos:

Si I tiene una estrategia ganadora σ, entonces para cada $b \in \mathcal{N}$ existe un $\xi(b) < \delta$ tal que $G_{(\sigma * b)_{\mathrm{I}}}$ es un conjunto de elección en $\mathbf{\Gamma}$ para $f_{\xi(b)}$. Sea

$$\xi = \sup\{\xi(b) \mid b \in \mathcal{N}\}.$$

Entonces $C_\xi = \bigcup_{b \in \mathcal{N}} G_{(\sigma * b)_{\mathrm{I}}}$ es un conjunto de elección en $\mathbf{\Gamma}$ para f_ξ, luego $\xi < \delta$, pero, como δ es un ordinal límite, existe un $\xi < \eta < \delta$, de modo que existe un conjunto de elección en $\mathbf{\Gamma}$ para f_η, que será de la forma G_b, para cierto $b \in \mathcal{N}$. Entonces, si II juega b, gana a I, contradicción.

Supongamos ahora que II tiene una estrategia ganadora τ. Consideramos ahora la función parcial $\{\epsilon\}^{X\mathcal{N}}_{\Sigma^0_1}(x)$ definida en 3.58 (aunque por simplicidad suprimiremos el subíndice y los superíndices). Para cada $\epsilon \in \mathcal{N}$ y cada $w \in X$ definimos

$$A_{\epsilon,w}(x, y) \leftrightarrow \bigvee z \in X(z < w \wedge \{\epsilon\}(z)\!\downarrow \wedge\, G(x, y, \{\epsilon\}(z))).$$

Se cumple que $A_{\epsilon w} \in \mathbf{\Gamma}$. En efecto, podemos desarrollar su definición:

$$A_{\epsilon,w}(x, y) \leftrightarrow \bigvee z \in X \bigvee z' \in \mathcal{N}(z < w \wedge \bigwedge n \in \omega(z' \in B_n \leftrightarrow G^{\omega \times X}_{\Sigma^0_1}(n, x, \epsilon))$$
$$\wedge\, G(x, y, z')).$$

La relación tras $\bigwedge n \in \omega$ es Σ^1_1, luego está en Γ, al igual que $<$ y G. De hecho, esta expresión prueba que la relación

$$R(x, y, \epsilon, w) \leftrightarrow A_{\epsilon,w}(x, y)$$

está en Γ, luego puede expresarse en la forma

$$A_{\epsilon,w}(x, y) \leftrightarrow G^*(x, y, \epsilon, w, a),$$

para cierto $a \in \mathcal{N}$ recursivo, donde G^* es el buen conjunto $\mathcal{N}$-universal para $\Gamma(X \times Y \times \mathcal{N} \times X)$ asociado a la parametrización fijada. Por 3.55 tenemos que

$$A_{\epsilon,w}(x, y) \leftrightarrow G(x, y, S^{\mathcal{N} \times X, X \times Y}(\epsilon, w, a)),$$

de modo que $\pi(\epsilon, w) = S^{\mathcal{N}\times X, X\times Y}(\epsilon, w, a)$ es una función recursiva tal que

$$A_{\epsilon,w} = \{(x,y) \in X \times Y \mid G(x, y, \pi(\epsilon, w))\}.$$

La función (total) $(\epsilon, w) \mapsto (\pi(\epsilon, w) * \tau)_{\mathrm{II}}$ es recursiva en τ (es decir, en la codificación de la estrategia por un elemento de $\mathcal{N}$), luego por el teorema de recursión 3.61 existe un $\epsilon^* \in \mathcal{N}$ tal que

$$g(w) = \{\epsilon^*\}(w) = (\pi(\epsilon^*, w) * \tau)_{\mathrm{II}}.$$

Vamos a probar que para todo $w \in S$ existe un $\delta > \eta(w) > \rho(w)$ tal que $G_{g(w)}$ es un conjunto de elección para $f_{\eta(w)}$.

En efecto, razonamos por recursión respecto a la relación bien fundada dada en S. Si esto se cumple para todo $z \in S$ tal que $z < w$, definimos

$$\xi = \sup\{\eta(z) \mid z < w\} \geq \rho(w).$$

Entonces

$$A_{\epsilon^*,w}(x,y) \leftrightarrow \bigvee z \in X(z < w \land (x,y) \in G_{g(z)}),$$

luego

$$A_{\epsilon^*,w} = \bigcup_{z<w} G_{g(z)}$$

es un conjunto de elección para f_ξ en $\mathbf{\Gamma}$ (luego en particular $\xi < \delta$), y por otra parte $g(w) = (\pi(\epsilon^*, w) * \tau)_{\mathrm{II}}$ es la jugada de II cuando I juega $\pi(\epsilon^*, w)$, luego $G_{g(w)}$ debe ser un conjunto de elección para un f_η, con $\eta > \xi \geq \rho(w)$.

Tenemos, pues, que $\sup\{\eta(w) \mid w \in S\} = \delta$, pero $C = \bigcup_{w\in S} G_{g(w)}$ es un conjunto de elección para f_δ en $\mathbf{\Gamma}$, contradicción.

Con esto hemos probado el teorema para funciones $f : \lambda \longrightarrow \mathcal{P}Y$. Para el caso general razonamos por inducción sobre n. Supongamos ahora que tenemos $f : \lambda^{n+1} \longrightarrow \mathcal{P}Y$. Para cada $\eta < \lambda$ sea $f^\eta(\xi_1, \ldots, \xi_n) = f(\xi_1, \ldots, \xi_n, \eta)$, sea $G \subset X^n \times Y \times \mathcal{N}$ un buen conjunto universal y sea $g : \lambda \longrightarrow \mathcal{P}\mathcal{N}$ la aplicación dada por $g(\eta) = \{a \in \mathcal{N} \mid G_a$ es un conjunto de elección para $f^\eta\}$.

Por hipótesis de inducción cada $g(\eta) \neq \varnothing$ y, por el caso $n = 1$ ya probado, g tiene un conjunto de elección en $\mathbf{\Gamma}$, digamos $C_g \subset X \times \mathcal{N}$. Basta comprobar que

$$C(x_1, \ldots, x_n, x, y) \leftrightarrow \bigvee a \in \mathcal{N}(C_g(x,a) \land G(x_1, \ldots, x_n, y, a))$$

es un conjunto de elección para f, pues ciertamente está en $\mathbf{\Gamma}$. En efecto, comprobamos las dos propiedades:

Si $C(x_1, \ldots, x_n, x, y)$, sea $a \in \mathcal{N}$ tal que $C_g(x,a) \land G_a(x_1, \ldots, x_n, y)$. La primera condición implica que $x \in S \land a \in g(\rho(x))$, luego G_a es un conjunto de elección para f^η, con $\eta = \rho(x)$. Por lo tanto tenemos que cada $x_i \in S$ y además $y \in f^\eta(\rho(x_1), \ldots, \rho(x_n)) = f(\rho(x_1), \ldots, \rho(x_n), \rho(x))$.

Si $f(\xi_1, \ldots, \xi_n, \xi) \neq \varnothing$, entonces $f^\xi(\xi_1, \ldots, \xi_n) \neq \varnothing$. Como C_g es un conjunto de elección, existe un $x \in S$ tal que $\rho(x) = \xi$ y un $a \in g(\xi)$ de manera que $(x, a) \in C_g$. Entonces G_a es un conjunto de elección para f^ξ, luego existen $x_i \in S$ tales que $\rho(x_i) = \xi_i$ y un $y \in f^\xi(\xi_1, \ldots, \xi_n) = f(\xi_1, \ldots, \xi_n, \xi)$ tal que $(x_1, \ldots, x_n, y) \in G_a$, pero entonces $(x_1, \ldots, x_n, x, y) \in C$. ■

Consideremos espacios producto $X_1, \ldots, X_n$, sea $S_i \subset X_i$, sea $\leq_i$ un buen preorden en S_i y sea $\rho_i : X_i \longrightarrow \lambda_i$ su norma regular asociada (que es también el rango de la relación bien fundada $<_i$). Para cada $A \subset \lambda_1 \times \cdots \times \lambda_n$, definimos el *código*

$$\mathrm{Cod}(A) = \{(x_1, \ldots, x_n) \in S_1 \times \cdots \times S_n \mid (\rho_1(x_1), \ldots, \rho_n(x_n)) \in A\}.$$

Así codificamos conjuntos de n-tuplas de ordinales mediante subconjuntos de un espacio producto. La versión siguiente del lema de codificación muestra que la complejidad de los códigos es la misma que la de los buenos preórdenes que los definen, independientemente del conjunto codificado:

Teorema 7.45 (Lema de codificación II) (Moschovakis) (AD) *Consideremos una clase de conjuntos Γ ω-parametrizada, que contenga a Σ^1_1 y cerrada para sustituciones recursivas, uniones, intersecciones, $\bigwedge n \in \omega$, $\bigvee n \in \omega$ y $\bigvee x \in \mathcal{N}$. Sean $X_1, \ldots, X_n$ espacios producto, sean $S_i \subset X_i$, sean $\leq_i$ buenos preórdenes en S_i y sean $\rho_i : S_i \longrightarrow \lambda_i$ las normas regulares asociadas. Si cada $\leq_i$ está en la clase ambigua $\boldsymbol{\Delta}$, entonces, para cada $A \subset \lambda_1 \times \cdots \times \lambda_n$, el código* $\mathrm{Cod}(A)$ *está también en $\boldsymbol{\Delta}$.*

Demostración: Observemos que las relaciones

$$x <_i y \leftrightarrow x \leq_i y \land y \not\leq_i x, \qquad x \sim_i y \leftrightarrow x \leq_i y \land y \leq_i x$$

están también en $\boldsymbol{\Delta}$, al igual que la relación en $S = S_1 \times \cdots \times S_n$ dada por

$$x < x' \leftrightarrow x_1 <_1 x'_1 \lor (x_1 \sim_1 x'_1 \land x_2 <_2 x'_2) \lor \cdots$$

$$\lor ((x_1 \sim_1 x'_1 \land \cdots \land x_{n-1} \sim_{n-1} x'_{n-1}) \land x_n <_n x'_n).$$

Esta relación está bien fundada, y su rango es la aplicación

$$\rho(x_1, \ldots, x_n) = \langle \rho_1(x_1), \ldots, \rho_n(x_n) \rangle,$$

donde $(\xi_1, \ldots, \xi_n) \mapsto \langle \xi_1, \ldots, \xi_n \rangle$ es la semejanza entre $\lambda_1 \times \cdots \times \lambda_n$ con el orden lexicográfico y su ordinal λ. Sea $f : \lambda \longrightarrow \mathcal{P}\omega$ la función dada por

$$f(\langle \xi_1, \ldots, \xi_n \rangle) = \begin{cases} \{1\} & \text{si } (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in A, \\ \{0\} & \text{si } (\xi_1, \ldots, \xi_n) \notin A. \end{cases}$$

Aplicamos el teorema anterior con $X = X_1 \times \cdots \times X_n$, $Y = \omega$ y con la n (del teorema anterior) igual a 1, según el cual f tiene un conjunto de elección $C \subset X \times \omega$ en $\boldsymbol{\Gamma}$. Ahora basta observar que

$$(x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{Cod}(A) \leftrightarrow \xi = (\rho_1(x_1), \ldots, \rho_n(x_n)) \in A \leftrightarrow f(\xi) = \{1\}$$

$$\leftrightarrow \bigvee x' \in S(\rho_1(x'_1) = \xi_1 \land \cdots \land \rho_n(x'_n) = \xi_n \land (x', 1) \in C)$$

$$\leftrightarrow \bigvee x_1' \in X_1 \cdots \bigvee x_n' \in X_n(x_1 \sim_1 x_1' \wedge \cdots \wedge x_n \sim_n x_n' \wedge C(x_1', \ldots, x_n', 1))$$

e igualmente

$$(x_1, \ldots, x_n) \notin \mathrm{Cod}(A) \leftrightarrow \bigvee x_1' \in X_1 \cdots \bigvee x_n' \in X_n(x_1 \sim_1 x_1' \wedge \cdots \wedge x_n \sim_n x_n' \wedge C(x_1', \ldots, x_n', 0))$$

Esto prueba que $\mathrm{Cod}(A)$ está en $\boldsymbol{\Delta}$. ■

7.8 Los ordinales proyectivos bajo AD

Ahora estamos en condiciones de obtener mucha información sobre los ordinales proyectivos definidos en 4.47. Para empezar demostramos que son cardinales:

Teorema 7.46 (AD) *Sea Γ una clase de conjuntos ω-parametrizada, que contenga a Σ_1^1 y cerrada para sustituciones recursivas, uniones, intersecciones, $\bigwedge n \in \omega$, $\bigvee n \in \omega$ y $\bigvee x \in \mathcal{N}$. Entonces $\boldsymbol{\delta}_\Gamma$ es un cardinal de cofinalidad no numerable y $\boldsymbol{\gamma}_\Gamma$ es un cardinal regular.*

Demostración: Supongamos que existe un cardinal $\kappa < \boldsymbol{\delta}_\Gamma$ y una biyección $f : \kappa \longrightarrow \boldsymbol{\delta}_\Gamma$. Entonces existe una norma regular $\rho : \mathcal{N} \longrightarrow \kappa$ en $\boldsymbol{\Delta}$, que es el rango de un buen preorden $\leq$ en $\boldsymbol{\Delta}$. Sea $A \subset \kappa \times \kappa$ la relación dada por

$$A(\alpha, \beta) \leftrightarrow f(\alpha) \leq f(\beta).$$

Por el lema de codificación 7.45 tenemos que

$$\mathrm{Cod}(A) = \{(x, y) \in \mathcal{N} \times \mathcal{N} \mid f(\rho(x)) \leq f(\rho(y))\} \in \boldsymbol{\Delta},$$

pero es claro que este código es el buen preorden asociado a la norma regular $\rho \circ f : \mathcal{N} \longrightarrow \boldsymbol{\delta}_\Gamma$, lo cual es absurdo, pues significa que hay una norma en $\boldsymbol{\Delta}$ de longitud $\boldsymbol{\delta}_\Gamma$. La cofinalidad es no numerable por 4.48.

Supongamos que existe un ordinal $\kappa < \boldsymbol{\gamma}_\Gamma$ y una aplicación $g : \kappa \longrightarrow \boldsymbol{\gamma}_\Gamma$ cofinal. Sea $<$ una relación bien fundada en $\mathcal{N}$ de longitud κ y de clase $\boldsymbol{\Gamma}$. Sea $\rho : \mathcal{N} \longrightarrow \kappa$ su rango, sea $G \subset \mathcal{N} \times \mathcal{N} \times \mathcal{N}$ un buen conjunto $\mathcal{N}$-universal para $\boldsymbol{\Gamma}(\mathcal{N} \times \mathcal{N})$ y sea $f : \kappa \longrightarrow \mathcal{PN}$ la aplicación dada por

$$f(\alpha) = \{y \in \mathcal{N} \mid G_y \text{ es una relación bien fundada en } \mathcal{N} \text{ de longitud} = g(\alpha)\}.$$

Por el lema de codificación 7.44 la función f tiene un conjunto de elección $C \in \boldsymbol{\Gamma}$. Definimos

$$(x, y, z) < (x', y', z') \leftrightarrow x = x' \wedge y = y' \wedge C(x, y) \wedge G(z, z', y).$$

La relación está obviamente en $\boldsymbol{\Gamma}$ y está bien fundada en $\mathcal{N}^3$, pues una sucesión decreciente tendría que ser de la forma

$$\cdots < (x, y, z_3) < (x, y, z_2) < (x, y, z_1) < (x, y, z_0),$$

de modo que $<_y = G_y$ es una relación bien fundada en $\mathcal{N}$ y

$$\cdots <_y z_3 <_y z_2 <_y z_1 <_y < z_0,$$

contradicción. Además $<$ tiene longitud $\boldsymbol{\gamma}_\Gamma$, pues si $\delta < \boldsymbol{\gamma}_\Gamma$ existe un $\alpha < \kappa$ tal que $\delta < g(\alpha)$. Como $g(\alpha) < \boldsymbol{\gamma}_\Gamma$, tenemos que $f(\alpha) \neq \varnothing$ y, como C es un conjunto de elección para f, existe un $x \in \mathcal{N}$ tal que $\rho(x) = \alpha$ y existe un $y \in f(\alpha)$ tal que $C(x, y)$. Llamando $<_y = G_y$, tenemos que es una relación bien fundada en $\mathcal{N}$ de longitud $g(\alpha) > \delta$, luego existe un $z \in \mathcal{N}$ cuyo rango respecto a $<_y$ es $\geq \delta$, luego el rango de (x, y, z) en $\mathcal{N}^3$ es $\geq \delta$.

Esto prueba que la longitud de $<$ en $\mathcal{N}^3$ es $\geq \boldsymbol{\gamma}_\Gamma$. A través de un homeomorfismo recursivo podemos obtener una relación bien fundada en $\mathcal{N}$ de clase $\boldsymbol{\Gamma}$ y de longitud $\geq \boldsymbol{\gamma}_\Gamma$, pero esto es absurdo, pues implica que $\boldsymbol{\gamma}_\Gamma \in \boldsymbol{\gamma}_\Gamma$. ■

Vamos a probar ahora lo que se puede considerar una generalización del teorema de Suslin a los niveles impares de la jerarquía proyectiva. En primer lugar demostramos una versión abstracta del resultado:

Teorema 7.47 (Martin, Moschovakis) (AD) *Sea Γ una clase de Spector cerrada para $\bigwedge x \in \mathcal{N}$. Sea X un espacio producto, sea $\lambda < \boldsymbol{\delta}_\Gamma$ y sea $\{A_\alpha\}_{\alpha<\lambda}$ una familia de conjuntos en $\boldsymbol{\Delta}(X)$. Entonces $\bigcup\limits_{\alpha<\lambda} A_\alpha$ está en $\boldsymbol{\Delta}$.*

Demostración: El teorema es trivial si X es numerable, por lo que no perdemos generalidad si suponemos que $X = \mathcal{N}$. Supongamos que el teorema no es cierto y sea λ el mínimo ordinal para el que falla. Obviamente es un ordinal límite. Tenemos entonces que existe una familia $\{A_\alpha\}_{\alpha<\lambda}$ de elementos de $\boldsymbol{\Delta}(\mathcal{N})$ cuya unión no está en $\boldsymbol{\Delta}(\mathcal{N})$. Como $\lambda < \boldsymbol{\delta}_\Gamma$ existe una norma regular $\rho : \mathcal{N} \longrightarrow \lambda$ asociada a un buen preorden $\leq$ en $\boldsymbol{\Delta}$. Así ρ es el rango de la relación bien fundada $<$, que también está en $\boldsymbol{\Delta}$.

Sea $G \subset \mathcal{N} \times \mathcal{N}$ un buen conjunto universal para Γ y sea $f : \lambda \longrightarrow \mathcal{PN}$ la función dada por $f(\xi) = \{b \in \mathcal{N} \mid A_\xi = \mathcal{N} \setminus G_b\}$. Por el lema de codificación 7.44 existe un conjunto de elección $C \subset \mathcal{N} \times \mathcal{N}$ para f en $\neg\boldsymbol{\Gamma}$. Así

$$x \in A_{\rho(a)} \leftrightarrow \bigvee a' \bigvee b(a' \sim a \land C(a', b) \land \neg G(x, b)),$$

luego la relación $P(x, a) \leftrightarrow x \in A_{\rho(a)}$ está en $\neg\boldsymbol{\Gamma}$.

Por otra parte sabemos que, para todo $\delta < \lambda$, se cumple $\bigcup\limits_{\alpha<\delta} A_\alpha, \bigcup\limits_{\alpha\leq\delta} A_\alpha \in \boldsymbol{\Delta}$. Definimos

$$g_1(\delta) = \{b \in \mathcal{N} \mid \bigcup_{\alpha<\delta} A_\alpha = G_b\}, \qquad g_2(\delta) = \{b \in \mathcal{N} \mid \bigcup_{\alpha\leq\delta} A_\alpha = G_b\}$$

y tomamos conjuntos de elección $C_1, C_2 \subset \mathcal{N} \times \mathcal{N}$ en $\neg\boldsymbol{\Gamma}$ para estas funciones. Como antes concluimos que las relaciones

$$Q(x, a) \leftrightarrow x \notin \bigcup_{\alpha<\rho(a)} A_\alpha, \qquad R(x, a) \leftrightarrow x \notin \bigcup_{\alpha\leq\rho(a)} A_\alpha$$

están en $\neg\boldsymbol{\Gamma}$. A continuación observamos que

$$x \in A = \bigcup_{\alpha<\lambda} A_\alpha \leftrightarrow \bigvee a \in \mathcal{N}\, P(x, a),$$

luego la unión A está en $\neg\mathbf{\Gamma}$. En esta unión podemos definir la norma $\phi : A \longrightarrow \lambda$ mediante $\phi(x) = \text{mín}\{\alpha < \lambda \mid x \in A_\alpha\}$, y las relaciones

$$x \leq^*_\phi y \leftrightarrow \bigvee a \in \mathcal{N}(P(x,a) \wedge Q(y,a)), \qquad x <^*_\phi y \leftrightarrow \bigvee a \in \mathcal{N}(P(x,a) \wedge R(y,a))$$

están en $\neg\mathbf{\Gamma}$, luego ϕ es una norma en $\neg\mathbf{\Gamma}$.

Tenemos que probar que $A \in \mathbf{\Gamma}$. En caso contrario, dado cualquier conjunto $B \in \neg\mathbf{\Gamma}(\mathcal{N})$, el teorema 7.39 nos da que $B \leq_W A$ o bien $A \leq_W \neg B$, pero lo segundo es imposible, pues implicaría que $A \in \mathbf{\Gamma}$, luego existe $f : \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{N}$ continua tal que $f^{-1}[A] = B$. Es claro que $f \circ \phi : B \longrightarrow \lambda$ es una norma en $\neg\mathbf{\Gamma}$, pero esto significa que tanto $\mathbf{\Gamma}$ como $\neg\mathbf{\Gamma}$ son clases normadas, pero 2.15 implica que esto es imposible. ■

Para particularizar este resultado a las clases $\mathbf{\Delta}$ necesitamos un hecho sencillo. Recordemos la situación sobre existencia de escalas en las clases de Suslin:

Teorema 2.23 *La clase $\mathbf{\Pi}^1_1$ tiene escalas.*

Teorema 2.24 *Si la clase $\mathbf{\Pi}^1_n$ tiene escalas, también las tiene la clase $\mathbf{\Sigma}^1_{n+1}$.*

Teorema 7.32 (Det($\mathbf{\Delta}^1_n$)) *Si la clase $\mathbf{\Sigma}^1_n$ tiene escalas, también las tiene $\mathbf{\Pi}^1_{n+1}$.*

Por lo tanto, suponiendo ADP, las clases de Suslin con escalas son las clases $\mathbf{\Pi}^1_{2n+1}$ y $\mathbf{\Sigma}^1_{2n}$ (y en particular son clases de Spector).

Teorema 7.48 (Moschovakis) *Supongamos* Det($\mathbf{\Delta}^1_{2n}$). *Entonces todo conjunto $\mathbf{\Sigma}^1_{2n+2}$ es $\boldsymbol{\delta}^1_{2n+1}$-Suslin y todo conjunto $\mathbf{\Sigma}^1_{2n+1}$ es γ-Suslin, para cierto $\gamma < \boldsymbol{\delta}^1_{2n+1}$.*

Demostración: Por el teorema 2.32 basta probar los dos resultados para conjuntos $\mathbf{\Pi}^1_{2n+1}$ y $\mathbf{\Pi}^1_{2n}$, respectivamente. Por las observaciones previas al teorema tenemos que la clase $\mathbf{\Pi}^1_{2n+1}$ tiene escalas. Si A es un conjunto $\mathbf{\Pi}^1_{2n+1}$, entonces tiene una escala cuyas normas pueden tomarse regulares (teorema 4.53), luego por 4.46 se trata de una $\boldsymbol{\delta}^1_{2n+1}$-escala. El teorema 2.31 nos da entonces que A es $\boldsymbol{\delta}^1_{2n+1}$-Suslin.

Tomemos ahora un conjunto A de clase $\mathbf{\Pi}^1_{2n}$. No perdemos generalidad si suponemos que $A \subset \mathcal{N}$. Como antes, A tiene una escala $\{\phi_k\}_{k\in\omega}$ en $\mathbf{\Pi}^1_{2n+1}$, pero A es de clase $\mathbf{\Delta}^1_{2n+1}$, luego podemos definir un buen preorden en $\mathcal{N}$ mediante

$$x \leq y \leftrightarrow (x \in A \wedge y \in A \wedge x \leq_{k,\Pi^1_{2n+1}} y) \vee (x \notin A \wedge y \in A) \vee (x \notin A \wedge y \notin A)$$

y si cambiamos $\leq_{k,\Pi^1_{2n+1}}$ por $\leq_{k,\Sigma^1_{2n+1}}$ obtenemos la misma relación, luego $\leq$ está en $\mathbf{\Delta}^1_{2n+1}$, luego $\|\phi_k\| = \|\leq\| < \boldsymbol{\delta}^1_{2n+1}$. El teorema 4.48 nos da que $\boldsymbol{\delta}^1_{2n+1}$ tiene cofinalidad no numerable, luego existe un $\gamma < \boldsymbol{\delta}^1_{2n+1}$ tal que cada $\|\phi_k\| < \gamma$, luego la escala es una γ-escala y A es γ-Suslin. ■

Ahora podemos demostrar:

Teorema 7.49 (Martin, Moschovakis) (AD) *Para cada espacio polaco X y cada $n \in \omega$ impar, el álgebra $\boldsymbol{\Delta}_n^1(X)$ es la $\boldsymbol{\delta}_n^1$-álgebra de Borel de X.*

DEMOSTRACIÓN: El teorema 7.47 (aplicado a la clase Π_n^1) implica que $\boldsymbol{\Delta}_n^1(X)$ es una $\boldsymbol{\delta}_n$-álgebra. El teorema anterior implica que todo conjunto $\boldsymbol{\Delta}_n^1$ es γ-Suslin, para cierto $\gamma < \boldsymbol{\delta}_n^1$. Por el teorema 2.42 (véase la observación posterior), todo conjunto $\boldsymbol{\Delta}_n^1$ es $\gamma + 1$-Borel, luego $\boldsymbol{\delta}_n^1$-Borel. En definitiva, $\boldsymbol{\Delta}_n^1(X) \subset B_{\boldsymbol{\delta}_n^1}(X)$ y es una $\boldsymbol{\delta}_n^1$-álgebra, luego, $\boldsymbol{\Delta}_n^1(X) = B_{\boldsymbol{\delta}_n^1}(X)$. ■

Un poco más adelante (tras el teorema 7.52) probaremos que si n es par $\boldsymbol{\Delta}_n^1(X)$ no es una $\boldsymbol{\delta}_n^1$-álgebra. Veamos ahora una serie de propiedades fundamentales de los ordinales proyectivos:

Teorema 7.50 (AD) *Para cada número natural $n \geq 1$ se cumple:*

a) $\boldsymbol{\delta}_n^1 = \{\| < \| \mid <$ *es una relación bien fundada en $\mathcal{N}$ de clase* $\boldsymbol{\Sigma}_n^1\}$.

b) $\boldsymbol{\delta}_n^1$ *es un cardinal regular.*

c) $\aleph_1 = \boldsymbol{\delta}_1^1 < \boldsymbol{\delta}_2^1 < \boldsymbol{\delta}_3^1 < \cdots$

d) Si n es par $\boldsymbol{\delta}_n^1 = (\boldsymbol{\delta}_{n-1}^1)^+$. *En particular* $\boldsymbol{\delta}_2^1 = \aleph_2$.

e) Si $n > 1$ es impar existe un cardinal κ_n de cofinalidad numerable tal que $\boldsymbol{\delta}_{n-1}^1 < \kappa_n < \boldsymbol{\delta}_n^1$ *y* $\boldsymbol{\delta}_n^1 = \kappa_n^+$.

DEMOSTRACIÓN: Si n es par, entonces Π_{n-1}^1 es una clase de Spector y el teorema 4.52 nos da que $\boldsymbol{\delta}_{n-1}^1$ es la longitud de un buen preorden en $\mathcal{N}$ de clase Π_{n-1}^1, luego también de clase Δ_n^1. Según hemos visto en el capítulo anterior, esta norma se extiende a una norma en $\mathcal{N}$ de clase Δ_n^1 y de la misma longitud $\boldsymbol{\delta}_{n-1}^1$, luego $\boldsymbol{\delta}_{n-1}^1 < \boldsymbol{\delta}_n^1$.

El miembro derecho de (a) es el cardinal $\boldsymbol{\gamma}_{\Sigma_n^1}$. Si n es par, las relaciones $\boldsymbol{\Sigma}_n^1$ son $\boldsymbol{\delta}_{n-1}^1$-Suslin, por 7.48, luego el teorema de Kunen-Martin 2.36 nos da que $\boldsymbol{\gamma}_{\Sigma_n^1} \leq (\boldsymbol{\delta}_{n-1}^1)^+$. La desigualdad $\boldsymbol{\delta}_n^1 \leq \boldsymbol{\gamma}_{\Sigma_n^1}$ es trivial, pues todo buen preorden de clase $\boldsymbol{\Delta}_n^1$ determina una relación bien fundada de clase $\boldsymbol{\Delta}_n^1$ y la misma longitud. En total tenemos que

$$\boldsymbol{\delta}_{n-1}^1 < \boldsymbol{\delta}_n^1 \leq \boldsymbol{\gamma}_{\Sigma_n^1} \leq (\boldsymbol{\delta}_{n-1}^1)^+,$$

y todos ellos son cardinales, luego $\boldsymbol{\delta}_n^1 = \boldsymbol{\gamma}_{\Sigma_n^1} = (\boldsymbol{\delta}_{n-1}^1)^+$, para n par.

Si n es impar, aplicamos 4.52 a la clase Π_n^1, que es una clase de Spector cerrada para $\bigwedge x \in \mathcal{N}$, luego $\boldsymbol{\delta}_n^1 = \boldsymbol{\gamma}_{\Sigma_n^1}$. Esto termina la prueba de a), lo que nos da b) por 7.46. También tenemos probado d). Si probamos e) tendremos la mitad que falta de c) como caso particular.

Sea n impar y sea $G \subset \mathcal{N}^3$ un buen conjunto $\mathcal{N}$-universal para $\mathbf{\Sigma}_n^1(\mathcal{N}^2)$. El teorema 7.48 nos da que G es γ-Suslin, para cierto $\gamma < \boldsymbol{\delta}_n^1$. Sea $\kappa_n < \boldsymbol{\delta}_n^1$ el mínimo ordinal tal que G es γ-Suslin. Claramente κ_n es un cardinal y es inmediato que todo conjunto G_a, con $a \in \mathcal{N}$, es decir, todo subconjunto $\mathbf{\Sigma}_n^1$ de $\mathcal{N}^2$ es κ_n-suslin (por ejemplo, porque una κ_n-escala en G induce obviamente una κ_n escala en G_a). El teorema de Kunen-Martin 2.36 nos da entonces que $\boldsymbol{\delta}_n^1 = \boldsymbol{\gamma}_{\Sigma_n^1} \leq \kappa_n^+$, luego de hecho $\boldsymbol{\delta}_n^1 = \kappa_n^+$.

Veamos ahora que κ_n tiene cofinalidad numerable. Supongamos lo contrario. Sea $A \subset \mathcal{N}$ un conjunto $\mathbf{\Sigma}_n^1$ arbitrario. Por la elección de κ_n tenemos que A es κ_n-Suslin (hemos visto que todos los subconjuntos $\mathbf{\Sigma}_n^1$ de $\mathcal{N}^2$ son κ_n-Suslin, y obviamente lo mismo vale para todo espacio producto). Por 2.30 tenemos que $A = \bigcup\limits_{\delta<\kappa_n} A_\delta$ con cada A_δ es μ-Suslin para un cierto $\mu < \kappa_n$ (que depende de δ). Como $\mu^+ \leq \kappa_n$, el teorema 2.41 nos da que A_δ es unión de κ_n conjuntos κ_n-Borel. Como $\kappa_n < \boldsymbol{\delta}_n^1$ concluimos que A es $\boldsymbol{\delta}_n^1$-Borel, y el teorema 7.49 implica que es $\mathbf{\Delta}_n^1$, pero esto es absurdo, porque A era un conjunto $\mathbf{\Sigma}_n^1$ arbitrario.

Ya sólo falta probar que (para $n > 1$ impar) $\boldsymbol{\delta}_{n-1}^1 < \kappa_n$. La igualdad no puede darse, pues $\boldsymbol{\delta}_{n-1}^1$ es regular y κ_n tiene cofinalidad numerable. Por lo tanto, si no se cumple la desigualdad, tenemos $\kappa_n < \boldsymbol{\delta}_{n-1}^1$, luego $\boldsymbol{\delta}_n^1 = \kappa_n^+ \leq \boldsymbol{\delta}_{n-1}^1$ y, de hecho, $\kappa_n^+ = \boldsymbol{\delta}_n^1 = \boldsymbol{\delta}_{n-1}^1 = (\boldsymbol{\delta}_{n-2}^1)^+$, luego $\kappa_n = \boldsymbol{\delta}_{n-2}^1$, pero esto es imposible, de nuevo porque $\boldsymbol{\delta}_{n-2}^+$ es regular y κ_n tiene cofinalidad numerable. ■

Veremos más adelante que no todos los cardinales $\aleph_n$, con $n \in \omega$ son regulares bajo AE, pero el mismo argumento que prueba bajo AE que κ^+ es un cardinal regular demuestra[5] bajo ED que $\operatorname{cf} \kappa^+ > \aleph_0$. Por lo tanto, el menor valor posible para $\boldsymbol{\delta}_3^1$ teniendo en cuenta el teorema anterior es $\aleph_{\omega+1}$.

Nota De hecho, Jackson demostró que, bajo AD, se cumple

$$\boldsymbol{\delta}_3^1 = \aleph_{\omega+1}, \quad \boldsymbol{\delta}_5^1 = \aleph_{\omega^{\omega^\omega}+1}, \quad \boldsymbol{\delta}_7 = \aleph_{\omega^{\omega^{\omega^{\omega^\omega}}}+1}, \qquad \ldots$$

donde la exponenciación de los subíndices es la exponenciación ordinal. ■

El teorema siguiente se aplica en particular a las clases Σ_n^1, y nos da en este caso que $\mathbf{\Sigma}_n^1$ es cerrada para uniones de menos de $\boldsymbol{\delta}_n^1$ conjuntos:

Teorema 7.51 (AD) *Sea Γ una clase de conjuntos ω-parametrizada, que contenga a Σ_1^1 y cerrada para sustituciones recursivas, uniones, intersecciones, $\bigwedge n \in \omega$, $\bigvee n \in \omega$ y $\bigvee x \in \mathcal{N}$. Sea X un espacio producto y sea $\{A_\delta\}_{\delta<\alpha}$ una familia de conjuntos en $\mathbf{\Gamma}(X)$, con $\alpha < \boldsymbol{\gamma}_\Gamma$. Entonces $\bigcup\limits_{\delta<\alpha} A_\delta \in \mathbf{\Gamma}(X)$.*

[5]Si κ^+ fuera supremo de una sucesión de ordinales $\{\alpha_n\}_{n\in\omega}$ con $\alpha_n < \kappa^+$, existirían aplicaciones $f_n : \kappa \longrightarrow \alpha_n$ suprayectivas (aquí realizamos una elección numerable, lo cual es lícito bajo ED), con las cuales podríamos construir $f : \kappa \times \omega \longrightarrow \kappa^+$ suprayectiva, pero también existe $g : \kappa \longrightarrow \kappa \times \omega$ biyectiva, luego tendríamos $h : \kappa \longrightarrow \kappa^+$ suprayectiva, y también $h^* : \kappa^+ \longrightarrow \kappa$ inyectiva, contradicción.

DEMOSTRACIÓN: Como $\alpha < \boldsymbol{\gamma}_\Gamma$, existe una relación bien fundada $<$ en $\mathcal{N}$ con rango $\rho : X \longrightarrow \alpha$. Sea $G \subset X \times \mathcal{N}$ un buen conjunto universal y consideremos la aplicación $f : \alpha \longrightarrow \mathcal{PN}$ dada por $f(\delta) = \{a \in \mathcal{N} \mid G_a = A_\delta\}$. Por el lema de codificación 7.44 existe un conjunto de elección $C \subset \mathcal{N}\times\mathcal{N}$ para f en $\mathbf{\Gamma}$. Basta probar que

$$x \in \bigcup_{\delta<\alpha} A_\delta \leftrightarrow \bigvee ab \in \mathcal{N}(C(b,a) \land G(x,a)).$$

En efecto, si x está en la unión, digamos en A_δ, entonces existe un $b \in \mathcal{N}$ tal que $\rho(b) = \delta$ y un $a \in f(\delta)$ tal que $C(b,a)$, con lo que $G_a = A_\delta$, luego $G(x,a)$. El recíproco es similar. ■

Cuando aplicamos este teorema a las clases Σ^1_n con n par podemos decir más:

Teorema 7.52 (AD) *Para cada número par $n \geq 2$ se cumple que un conjunto es $\mathbf{\Sigma}^1_n$ si y sólo si es unión de $\boldsymbol{\delta}^1_{n-1}$ conjuntos en $\mathbf{\Delta}^1_{n-1}$. En particular un conjunto es $\mathbf{\Sigma}^1_2$ si y sólo si es unión de $\aleph_1$ conjuntos de Borel.*

DEMOSTRACIÓN: Por el teorema anterior la unión de $\boldsymbol{\delta}^1_{n-1}(< \boldsymbol{\delta}^1_n)$ conjuntos de $\mathbf{\Delta}^1_{n-1}(\subset \mathbf{\Sigma}^1_n)$ es un conjunto $\mathbf{\Sigma}^1_n$. Tomemos ahora $A \subset X$ un conjunto $\mathbf{\Sigma}^1_n$. Sea $B \subset X \times \mathcal{N}$ un conjunto $\mathbf{\Pi}^1_{n-1}$ tal que $A = \bigvee a \in \mathcal{N}\, B$. Por 7.34 sabemos que $\mathbf{\Pi}^1_{n-1}$ tiene la propiedad de uniformización, luego podemos tomar $B^* \subset B$ de clase $\mathbf{\Pi}^1_{n-1}$ que uniformice a B.

Puesto que $\mathbf{\Pi}^1_{n-1}$ es una clase normada, los resultados tras la definición 2.14 muestran que $B^* = \bigcup\limits_{\delta<\boldsymbol{\delta}^1_{n-1}} A_\delta$, para ciertos conjuntos $A_\delta \in \mathbf{\Delta}^1_{n-1}$. Así pues,

$$x \in A \leftrightarrow \bigvee \delta < \boldsymbol{\delta}^1_{n-1} \bigvee a \in \mathcal{N}\ A_\delta(x,a).$$

Además, como $A_\delta \subset B^*$, tenemos que $A_\delta(x,a) \land A_\delta(x,b) \to a = b$. Definimos

$$D_\delta = \{x \in X \mid \bigvee a \in \mathcal{N}\ A_\delta(x,a)\},$$

de modo que $A = \bigcup\limits_{\delta<\boldsymbol{\delta}^1_{n-1}} D_\delta$ y se cumple que $D_\delta \in \mathbf{\Delta}^1_{n-1}$ por el teorema 4.58, ya que D_δ es la imagen de A_δ por la aplicación recursiva $(x,a) \mapsto x$, que es inyectiva sobre A_δ. ■

Como consecuencia, cuando n es par, $\mathbf{\Delta}^1_n$ no es una $\boldsymbol{\delta}^1_n$-álgebra, pues todo conjunto $\mathbf{\Sigma}^1_n$ se expresa como unión de $< \boldsymbol{\delta}^1_n$ conjuntos de $\mathbf{\Delta}^1_{n-1}$, luego el teorema 7.49 no es válido para n par.

A continuación demostramos el recíproco del teorema 7.48:

Teorema 7.53 (AD) *Un conjunto es $\mathbf{\Sigma}_{2n+2}$ si y sólo si es $\boldsymbol{\delta}^1_{2n+1}$-Suslin y es $\mathbf{\Sigma}^1_{2n+1}$ si y sólo si es κ_{2n+1}-Suslin.*

Demostración: Por abreviar escribiremos $\kappa = \kappa_{2n+1}$. Sea $A \subset \mathcal{N}$ un conjunto κ-Suslin. Entonces $A = p[T]$, donde T es un árbol en $\omega \times \kappa$. Como $\kappa < \boldsymbol{\delta}^1_{2n+1}$, existe un buen preorden $\leq$ en $\mathcal{N}$ de clase $\boldsymbol{\Delta}^1_{2n+1}$ y longitud κ. Sea $\rho : \mathcal{N} \longrightarrow \kappa$ su norma regular asociada. Fijemos una biyección $f : \kappa^{<\omega} \longrightarrow \kappa$ y sea

$$\tilde{C} = \{(m, \alpha) \in \omega \times \kappa \mid (s_m, f^{-1}(\alpha)) \in T\},$$

donde $\{s_m\}_{m\in\omega}$ es la enumeración canónica de $\omega^{<\omega}$. Aplicamos el lema de codificación 7.45 a ρ y a la identidad $\omega \longrightarrow \omega$, lo que nos da que el conjunto

$$C = \{(m, y) \in \omega\times\mathcal{N} \mid (m, \phi(y)) \in \tilde{C}_0\} = \{(m, y) \in \omega\times\mathcal{N} \mid (s_m, f^{-1}(\phi(y))) \in T\}$$

está en $\boldsymbol{\Delta}^1_{2n+1}$. Similarmente, definimos

$$\tilde{R} = \{(\alpha, \beta) \in \kappa \times \kappa \mid f^{-1}(\alpha) \subset f^{-1}(\beta)\},$$

de modo que el conjunto

$$R = \{(x, y) \in \mathcal{N}^2 \mid (\phi(x), \phi(y)) \in \tilde{R}\} = \{(x, y) \in \mathcal{N}^2 \mid f^{-1}(\phi(x)) \subset f^{-1}(\phi(y))\}$$

está también en $\boldsymbol{\Delta}^1_{2n+1}$. Así

$$A(x) \leftrightarrow \bigvee h \in \kappa^\omega \bigwedge m \in \omega (x|_m, h|_m) \in T \leftrightarrow$$

$$\bigvee y \in \mathcal{N}(\bigwedge m \in \omega(\langle x|_m\rangle, y_m) \in C \wedge \bigwedge mm' \in \omega(m \leq m' \rightarrow (y_m, y_{m'}) \in R)).$$

Esto prueba que $A \in \boldsymbol{\Sigma}^1_{2n+1}$.

Supongamos ahora que A es $\boldsymbol{\delta}^1_{2n+1}$-Suslin. Como $\operatorname{cf} \boldsymbol{\delta}^1_{2n+1} > \omega$, el teorema 5.62 nos permite expresarlo como unión de $\boldsymbol{\delta}^1_{2n+1}$ conjuntos κ_{2n+1}-Suslin, los cuales son $\boldsymbol{\Sigma}^1_{2n+1}$ por la parte ya probada (y en particular son $\boldsymbol{\Sigma}^1_{2n+2}$), luego A es $\boldsymbol{\Sigma}^1_{2n+1}$ por el teorema 7.51 (véase la observación precedente). ■

Así pues, bajo AD, los ordinales proyectivos determinan completamente la jerarquía proyectiva.

7.9 Cardinales medibles bajo AD

La existencia de ultrafiltros no principales sobre un conjunto infinito depende del axioma de elección, por lo que no es de extrañar que suceda lo siguiente:

Teorema 7.54 (AD) *No existen ultrafiltros no principales sobre ω.*

Demostración: Por [TC B.6], si existe un ultrafiltro no principal sobre ω, entonces existe un subconjunto del espacio de Cantor $\mathcal{C}$ que no es medible (respecto a cualquier medida de Borel no trivial), mientras que según 7.35 todo subconjunto de $\mathcal{C}$ es medible Lebesgue. ■

A su vez, de aquí se deduce una consecuencia curiosa:

Teorema 7.55 (AD) *Todo ultrafiltro sobre cualquier conjunto es σ-completo.*

DEMOSTRACIÓN: Sea X un conjunto y U un ultrafiltro en X. Si no fuera σ-completo, existiría una sucesión $\{A_n\}_{n\in\omega}$ de elementos del ideal primo $I = U'$ cuya unión $X_0 = \bigcup\limits_{n\in\omega} A_n$ estaría en U. Si cambiamos A_n por $A_n \setminus \bigcup\limits_{m<n} A_m$ la unión no se modifica, luego podemos suponer que los conjuntos A_n son disjuntos dos a dos. Más aún, si $X_0 \neq X$ podemos añadir $X \setminus X_0$ a la sucesión y así ésta resulta ser una partición de X.

Definimos $f : X \longrightarrow \omega$ de modo que $f(x) = n$ si y sólo si $x \in A_n$. Así, $F = \{A \subset \omega \mid f^{-1}[A] \in U\}$ es claramente un ultrafiltro no principal en ω, en contradicción con el teorema anterior. ■

El lector podría sospechar que este teorema es vacío, ya que tal vez bajo AD no existan ultrafiltros no principales sobre los conjuntos infinitos. Sin embargo no es así. Solovay demostró que, bajo AD, $\aleph_1$ resulta ser un cardinal medible, es decir, que posee un ultrafiltro no principal $\aleph_1$-completo. Aquí vamos a probar un resultado mucho más general:

Teorema 7.56 (AD) *Los cardinales proyectivos $\boldsymbol{\delta}^1_n$ son cardinales medibles.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $W \subset \mathcal{N}^3$ un conjunto $\mathcal{N}$-universal para $\boldsymbol{\Sigma}^1_n(\mathcal{N}^2)$ y sea $S = \{x \in \mathcal{N} \mid W_x \text{ es una relación bien fundada en } \mathcal{N}\}$. Si $\|x\| = \|W_x\|$, por 7.49 sabemos que

$$\boldsymbol{\delta}^1_n = \{\|x\| \mid x \in S\}.$$

Para cada $A \subset \boldsymbol{\delta}^1_n$ definimos como sigue un juego J_A: si I juega x y II juega y, entonces II gana si se da uno de los dos casos siguientes:

a) Existe un $i \in \omega$ tal que $x_i \notin S \lor y_i \notin S$ y, si i_0 es el mínimo natural que cumple esto, entonces $x_{i_0} \notin S$.

b) Para todo $i \in \omega$ se cumple que $x_i \in S \land y_i \in S$ y

$$\sup\{\|x_i\| \cup \|y_i\| \mid i \in \omega\} \in A.$$

Definimos $U \subset \mathcal{P}\boldsymbol{\delta}^1_n$ de modo que $A \in U$ si y sólo si II tiene una estrategia ganadora en J_A. Vamos a probar que U es un ultrafiltro no principal $\boldsymbol{\delta}^1_n$-completo en $\boldsymbol{\delta}^1_n$.

Es obvio que si $A \in U \land A \subset B$ entonces $B \in U$, así como que $\boldsymbol{\delta}^1_n \in U$. Veamos ahora que si $A, B \in U$ entonces $A \cap B \in U$. Para ello fijamos una estrategia ganadora σ para II en J_A y otra τ en J_B y vamos a definir una estrategia ganadora para $J_{A\cap B}$.

Recordemos que si $x \in \mathcal{N}$, entonces $x_i(j) = x(\langle i, j\rangle)$, donde $\langle i, j\rangle$ es la imagen de (i, j) por la semejanza $\omega \times \omega \longrightarrow \omega$ determinada por el buen orden canónico, en el que para comparar dos pares comparamos primero sus máximas componentes, en caso de empate las primeras y en caso de empate las segundas. Explícitamente, los primeros pares según este orden son:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	$\cdots$
$(0,0)$	$(0,1)$	$(1,0)$	$(1,1)$	$(0,2)$	$(1,2)$	$(2,0)$	$(2,1)$	$(2,2)$	$\cdots$

Dados $x, y \in \mathcal{N}$, definimos $x \oplus y \in \mathcal{N}$ como el único elemento que cumple

$$(x \oplus y)_{2i} = x_i, \qquad (x \oplus y)_{2i+1} = y_i.$$

Explícitamente,

$$(x \oplus y)(k) = \begin{cases} x(\langle k_0/2, k_1\rangle) & \text{si } k_0 \text{ es par,} \\ y(\langle (k_0-1)/2), k_1\rangle) & \text{si } k_0 \text{ es impar.} \end{cases}$$

Observemos que, en general, si $i < i'$, entonces $\langle i, j\rangle < \langle i', j\rangle$, luego siempre se cumple $\langle (k_0 - 1)/2), k_1\rangle < k$ y también $\langle k_0/2, k_1\rangle < k$ salvo si $k_0 = 0$, en cuyo caso se da la igualdad. La tabla siguiente ilustra la estrategia que II puede seguir para ganar en $J_{A\cap B}$. La parte superior representa una partida arbitraria jugada con dicha estrategia, mientras que las otras dos partes son dos partidas auxiliares jugadas con las estrategias σ y τ respectivamente:

x	I	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	$\cdots$
$y' \oplus y''$	II	b_0'	b_1'	b_0''	b_1''	b_4'	b_4''	b_2'	b_3'	b_5'	$\cdots$
$x \oplus y''$	I	a_0	a_1	b_0''	b_1''	a_4	b_4''	a_2	a_3	a_5	$\cdots$
σ y'	II	b_0'	b_1'	b_2'	b_3'	b_4'	b_5'	b_6'	b_7'	b_8'	$\cdots$
$x \oplus y'$	I	a_0	a_1	b_0'	b_1'	a_4	b_4'	a_2	a_3	a_5	$\cdots$
τ y''	II	b_0''	b_1''	b_2''	b_3''	b_4''	b_5''	b_6''	b_7''	b_8''	$\cdots$

Aquí estamos llamando $x = (a_i)$ a la jugada de I en la partida principal, e $y' = (b_i')$, $y'' = (b_i'')$ a las jugadas de II en las dos partidas auxiliares, respectivamente. En dichas partidas auxiliares, I juega $x \oplus y''$ y $x \oplus y'$, respectivamente, y la estrategia de II para la partida principal es jugar $y' \oplus y''$. Para ilustrar el proceso vamos a detallar cómo se ha construido la última columna:

Partimos de que I juega a_8 en la partida principal. Entonces la respuesta de II es $(y' \oplus y'')(8)$. Como $8 = \langle 2, 2\rangle$ y la primera componente es par, pasamos a $\langle 1, 2\rangle = 5$ y el valor buscado es $y'(5) = b_5'$. Similarmente, la jugada que II asigna a I en la primera partida auxiliar es la quinta componente de la primera sucesión de $x \oplus y''$, es decir, a_5, lo que nos da b_8' aplicando la estrategia σ. Igualmente I juega a_5 en la segunda partida auxiliar y esto nos da b_8''.

En general, debemos comprobar que cada jugada de cada jugador en cada partida (excepto las jugadas de I en la partida principal, que son arbitrarias) puede calcularse a partir de los datos disponibles en ese momento. Esto se debe a que al pasar de un número $k = \langle k_0, k_1\rangle$ al número $\langle k_0/2, k_1\rangle$ o $\langle (k_0 - 1)/2), k_1\rangle$ siempre vamos a un número menor (es decir, que el dato de la columna k-ésima de la tabla se obtiene copiando un dato de una columna anterior) salvo si $k_0 = 0$, como sucede por ejemplo en las columnas de a_1 o a_4, pero en ellas se empieza con la jugada arbitraria a_k, la cual debe ser copiada como jugada de I en las dos partidas auxiliares, esto nos da los valores de b'_k y b''_k, y por último copiamos b'_k como jugada de II en la partida principal. Esto justifica que la estrategia está bien definida. En resumen, si I juega x, la respuesta y de II con la estrategia que acabamos de describir satisface las relaciones:

$$y = y' \oplus y'', \qquad y' = ((x \oplus y'') * \sigma)_{\mathrm{II}}, \qquad y'' = ((x \oplus y') * \tau)_{\mathrm{II}}.$$

Veamos que la estrategia es ganadora. Supongamos que existe un mínimo $i_0 \in \omega$ tal que $x_{i_0} \notin S$ o $y_{i_0} \notin S$. No puede suceder que sea $y_{i_0} \notin S$, pues si, por ejemplo, i_0 es par, resulta que $y_{i_0} = y'_{i_0/2} \notin S$, mientras que $(x \oplus y'')_i \in S$ para todo $i \leq i_0/2$ (porque $(x \oplus y'')_i = x_{i/2} \in S$ o bien $(x \oplus y'')_i = y''_{(i-1)/2}$, que a su vez es de la forma x_j o bien y'_j con $j < i_0/2$). Esto significa que II habría perdido la partida del primer juego auxiliar, contradicción. Si i_0 es impar el razonamiento es similar.

Así pues, II no puede perder la partida por el caso a) de las reglas del juego. Supongamos ahora que $x_i, y_i \in S$ para todo i y veamos que II tampoco puede perder en el caso b). En efecto, tenemos que

$$\begin{aligned} \sup\{\|x_i\| \cup \|y_i\| \mid i \in \omega\} &= \sup\{\|(x \oplus y'')_i\| \cup \|y'\|_i \mid i \in \omega\} \\ &= \sup\{\|(x \oplus y')_i\| \cup \|y''\| \mid i \in \omega\} \in A \cap B. \end{aligned}$$

Con esto tenemos que U es un filtro. Para probar que no es principal veamos que no contiene ningún conjunto acotado. En efecto, si A está acotado, podemos tomar un $a \in S$ tal que $\|a\|$ sea mayor que todos los elementos de A, y I gana el juego J_A sin más que jugar el $x \in \mathcal{N}$ que cumple $x_n = a$ para todo n.

Para probar que U es un ultrafiltro suponemos que $A \notin U$ y veamos que $\boldsymbol{\delta}^1_n \setminus A \in U$. Como II no tiene una estrategia ganadora para J_A, por AD existe una estrategia ganadora σ para I. Fijamos un $u = (u_i) \in S$ tal que $\|u\| = 0$. Entonces, una estrategia ganadora para II en $J_{\boldsymbol{\delta}^1_n \setminus A}$ se obtiene jugando como indica la tabla siguiente (en la que la parte inferior es un juego auxiliar):

	x	I	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	$\cdots$
	y	II	u_0	u_1	b_0	b_1	u_2	b_4	b_2	b_3	b_5	$\cdots$
σ	y'	I	b_0	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8	$\cdots$
	x	II	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	$\cdots$

La estrategia consiste en jugar u_i en las posiciones $\langle 0, i\rangle$ (lo que nos garantiza que $y_0 = u \in S$) y las posiciones $\langle i, j\rangle$ con $i > 0$ jugar la jugada $\langle i-1, j\rangle$ de I en la partida auxiliar jugada con σ en las que las jugadas de II son las jugadas de I en la partida principal. Esto es correcto porque siempre se cumple que $\langle i-1, j\rangle < \langle i, j\rangle$. De este modo, si I juega x, la jugada y de II según la estrategia descrita cumple que $y_0 = u$ y, para $i > 0$, tenemos que $y_i = (\sigma * x)_{\mathrm{I}\ i-1}$.

La estrategia es claramente ganadora: si $y_i \notin S$, entonces $i > 0$, luego $(\sigma * x)_{\mathrm{I}\ i-1} \notin S$ y, como σ es una estrategia ganadora, necesariamente existe un

$j < i-1$ tal que $x_j \notin S$, luego II gana la partida principal. Si, por el contrario, $x_i, y_i \in S$ para todo $i \in \omega$, entonces

$$\sup\{\|x_i\| \cup \|y_i\| \mid i \in \omega\} = \sup\{\|x_i\| \cup \|(\sigma * x)_{\mathrm{I}\ i}\| \mid i \in \omega\} \in \boldsymbol{\delta}^1_n \setminus A,$$

porque σ es una estrategia ganadora para I en J_A, luego II gana también en este caso.

Por último probemos que U es $\boldsymbol{\delta}^1_n$-completo. Basta probar que si $\{A_\alpha\}_{\alpha<\lambda}$ es una familia de elementos de U, con $\lambda < \boldsymbol{\delta}^1_n$, entonces $\bigcap\limits_{\alpha<\lambda} A_\alpha \neq \varnothing$, pues esto implica que estas intersecciones generan un filtro $\boldsymbol{\delta}^1_n$-completo en $\boldsymbol{\delta}^1_n$ que contiene a U y, como U es un ultrafiltro, tiene que ser el propio U.

Fijemos un buen preorden $< \mathcal{N}$ de longitud λ y de clase $\boldsymbol{\Delta}^1_n$. Sea $\phi : \mathcal{N} \longrightarrow \lambda$ su norma asociada. Sea $f : \lambda \longrightarrow \mathcal{PN}$ tal que $f(\alpha)$ es el conjunto (no vacío) de los $x \in \mathcal{N}$ que codifican una estrategia ganadora para II en J_{A_α}. Por el lema de codificación 7.44 sabemos que f tiene un conjunto de elección $C \subset \mathcal{N} \times \mathcal{N}$ de clase $\boldsymbol{\Sigma}^1_n$. Sea $y \in \mathcal{N}$ tal que $C \in \Sigma^1_n(y)$.

Veamos ahora que para cada $m \geq 0$ existe una función $f_m : S^{m+1} \longrightarrow S$ tal que si $x^0, \ldots, x^m \in S$ y $x \in \mathcal{N}$ cumple que $\bigwedge i \leq m x_i = x^i$, entonces para toda $\tau \in \bigvee uC$ se cumple que

$$\|f_m(x^0, \ldots, x^m)\| \geq \|(x * \tau)_{\mathrm{II}\ m}\|.$$

Observemos que esto tiene sentido, pues τ es una estrategia ganadora para II y $x_i \in S$ para $i \leq m$, luego necesariamente $(x * \tau)_{\mathrm{II}\ m} \in S$.

Para probarlo consideramos la relación en $\mathcal{N}^4$ dada por

$$(x, u, \tau, v) \prec (x', u', \tau', v') \leftrightarrow x = x' \land u = u' \land \tau = \tau' \land$$

$$\bigwedge i \leq m\ x_i = x^i \land (u, \tau) \in C \land (v, v') \in W_{(\alpha*\tau)_m}.$$

Claramente es una relación bien fundada, pues una sucesión decreciente respecto a ella daría lugar a una sucesión decreciente respecto a $W_{(\alpha*\tau)_{\mathrm{II}\ m}}$, lo cual es imposible porque $(\alpha * \tau)_{\mathrm{II}\ m} \in S$. Además $\| \prec \| \geq \|W_{(\alpha*\tau)_{\mathrm{II}\ m}}\|$, para toda estrategia $\tau \in \bigvee uC$. Notemos que

$$(x, u, \tau, v) \prec (x', u', \tau', v') \leftrightarrow T(x, u, \tau, v, x', u', \tau', v', x^0, \ldots, x^m, y),$$

para cierto conjunto $T \in \Sigma^1_n(\mathcal{N}^{m+10})$, que será de la forma $G^{\mathcal{N}^{m+10}}_a$, donde $G^{\mathcal{N}^{m+10}}$ es un buen conjunto universal para Σ^1_n. Así

$$(x, u, \tau, v) \prec (x', u', \tau', v') \leftrightarrow T(x, u, \tau, v, x', u', \tau', v', x^0, \ldots, x^m, y) \leftrightarrow$$

$$G^{\mathcal{N}^{m+10}}(x, u, \tau, v, x', u', \tau', v', x^0, \ldots, x^m, y, a) \leftrightarrow$$

$$G^{\mathcal{N}^8}(x, u, \tau, v, x', u', \tau', v', S^{\mathcal{N}^8, \mathcal{N}^{m+2}}(x^0, \ldots, x^m, y, a)).$$

A través del homeomorfismo canónico $\mathcal{N}^4 \cong \mathcal{N}$ podemos transformar $\prec$ en una relación sobre $\mathcal{N}$ de la misma longitud, y $G^{\mathcal{N}^8}$ se transforma en un conjunto $\mathcal{N}$-universal para $\Sigma^1_n(\mathcal{N}^2)$, que podemos suponer que es el W tomado inicialmente. Así tenemos una relación bien fundada $<$ en $\mathcal{N}$ codificada por $f_m(x^0,\ldots,x^m) = S^{\mathcal{N}^8,\mathcal{N}^{m+2}}(x^0,\ldots,x^m,y,a) \in S$ que cumple lo pedido.

Ahora tomamos cualquier $x^0 \in S$ y definimos inductivamente la sucesión $x^{m+1} = f_m(x^0,\ldots,x^m)$. Sea $x \in \mathcal{N}$ tal que $x_i = x^i$ para todo $i \in \omega$. Sea $\theta = \sup\{\|x_i\| \mid i \in \omega\}$.

Para cada $\alpha < \lambda$, sea $u \in \mathcal{N}$ tal que $\phi(u) = \alpha$ y sea $\tau \in \mathcal{N}$ tal que $(u,\tau) \in C$, de modo que τ es una estrategia ganadora para II en el juego J_{A_α}. Consideramos $y = (x * \tau)_{\mathrm{II}}$. Como cada $x_i \in S$, necesariamente cada $y_i \in S$ también. Por construcción $\|x_{m+1}\| \geq \|(x*\tau)_{\mathrm{II}\ m}\| = \|y_m\|$, luego

$$\theta = \sup\{\|x\|_i \mid i \in \omega\} = \sup\{\|x_i\| \cup \|y_i\| \mid i \in \omega\} \in A_\alpha,$$

luego $\theta \in \bigcap\limits_{\alpha<\lambda} A_\alpha \neq \varnothing$. ■

Más aún, puede probarse que todos los cardinales regulares menores que Θ son medibles.

Naturalmente, en ausencia del axioma de elección, los cardinales medibles no tienen las propiedades "usuales". Por ejemplo, acabamos de comprobar que no tienen por qué ser cardinales límite (pues $\boldsymbol{\delta}^1_1 = \aleph_1$ y $\boldsymbol{\delta}^1_2 = \aleph_2$ son medibles). En cambio, sí que podemos asegurar que son cardinales regulares[6] (aunque en el caso de $\aleph_1$ lo sabemos directamente por el principio de elecciones dependientes).

No obstante, si κ es un cardinal medible, U es una medida en κ y llamamos $\bar{U} = U \cap L[U] \in L[U]$, se comprueba trivialmente que $\bar{U}$ es una medida$^{L[U]}$ en κ, de modo que κ es medible$^{L[U]}$, y $L[U]$ es un modelo de ZFC.

Por lo tanto, tenemos así una prueba de que la consistencia de AD implica la consistencia de ZFC más la existencia de un cardinal medible. Por otro lado:

Teorema 7.57 (AD) *Para todo $a \in \mathcal{N}$, existe $a^\sharp$.*

DEMOSTRACIÓN: Si κ es un cardinal medible (por ejemplo $\kappa = \aleph_1$), para cada $a \in \mathcal{N}$ podemos considerar el modelo $L[a,U]$, y sigue siendo cierto que κ es medible en él, lo que implica la existencia de $a^\sharp$ en dicho modelo, y en particular en $L[a,a^\sharp] = L[a^\sharp]$, y es precisamente esto lo que hemos tomado como definición de existencia de $a^\sharp$ en la sección 6.7 en ausencia de AE. ■

En particular existen los indiscernibles uniformes, y bajo AD podemos obtener más resultados sobre ellos. Sabemos que el primero es $u_1 = \aleph_1$. Ahora podemos calcular otro:

Teorema 7.58 (AD) $u_\omega = \aleph_\omega$

[6] Si κ es un cardinal medible y U es un ultrafiltro no principal κ-completo en κ, no puede suceder que $\operatorname{cf}\kappa < \kappa$, pues si $f : \operatorname{cf}\kappa \longrightarrow \kappa$ es una aplicación cofinal, para cada $\delta < \kappa$ tenemos que $\kappa \setminus f(\delta) \in U$, por la completitud, luego $\varnothing = \bigcup\limits_\delta(\kappa \setminus f(\delta)) \in U$, contradicción.

Demostración: Hemos visto que bajo AD existen los indiscernibles uniformes. Claramente $u_\omega \leq \aleph_\omega$, pues todos los cardinales $\aleph_n$ son indiscernibles uniformes, luego la posición de $\aleph_\omega$ en la sucesión $\{u_\alpha\}_{\alpha\in\Omega}$ no puede ser la dada por un número natural. Supongamos que $u_\omega < \aleph_\omega$, de modo que existe un natural n tal que $\aleph_n = |u_\omega| \leq u_\omega$. Según 6.45, todo conjunto $\mathbf{\Sigma}_3^1$ es u_ω-Suslin, luego también $\aleph_n$-Suslin. El teorema 6.44 nos da que $\aleph_n \leq u_\omega < \boldsymbol{\delta}_3^1$. Por lo tanto, tenemos que todo conjunto $\mathbf{\Sigma}_3^1$ es $\aleph_n$-Suslin, luego $\aleph_n + 1$-Borel por 2.41, pues obviamente $n > 0$ y ya hemos observado (tras 7.50) que $\operatorname{cf} \aleph_n > \aleph_0$. Por lo tanto, $\boldsymbol{\delta}_3^1$-Borel, luego $\mathbf{\Delta}_3^1$ (por 7.49, y éste es el único punto de la prueba donde se usa plenamente AD), pero esto es absurdo, pues no todo conjunto $\mathbf{\Sigma}_3^1$ es $\mathbf{\Delta}_3^1$. ∎

Esto a su vez nos determina dos ordinales proyectivos más:

Teorema 7.59 (AD) $\boldsymbol{\delta}_1^1 = \aleph_1$, $\boldsymbol{\delta}_2^1 = \aleph_2$, $\boldsymbol{\delta}_3^1 = \aleph_{\omega+1}$, $\boldsymbol{\delta}_4^1 = \aleph_{\omega+2}$.

Demostración: Los dos primeros ordinales proyectivos los teníamos ya calculados en 7.50. Por 6.45, todo conjunto $\mathbf{\Delta}_3^1$ es u_ω-Suslin, es decir, $\aleph_\omega$-Suslin, luego el teorema de Kunen-Martin 5.68 implica que $\boldsymbol{\delta}_3^1 \leq \aleph_{\omega+1}$, pero ya observamos tras el teorema 7.50 que $\aleph_{\omega+1}$ era el menor valor posible para $\boldsymbol{\delta}_3^1$, por lo que tenemos la igualdad. El valor de $\boldsymbol{\delta}_4^1$ lo proporciona entonces 7.50. ∎

Vamos a estudiar con más detalle la medibilidad de $\aleph_1$. Necesitamos un resultado técnico que no depende de AD:

Teorema 7.60 *Sea $a \in \mathcal{N}$ y sea $S \subset \aleph_1$ tal que $\{x \in \mathrm{BO} \mid \|x\| \in S\}$ es $\Sigma_2^1(a)$. Entonces $S \in L[a]$.*

Demostración: Sea $A \subset \mathcal{N}$ el conjunto $\Sigma_2^1(a)$ dado en el enunciado. Entonces el teorema 4.14 nos da una fórmula aritmética $\phi(u, v, x, a)$ (donde las cuatro variables son de segundo orden) tal que

$$x \in A \leftrightarrow \vDash \bigvee u \bigwedge v\, \phi[x, a].$$

El teorema de Shoenfield 6.23 nos da que la fórmula

$$\psi(x, a) \equiv \vDash \bigvee u \bigwedge v\, \phi[x, a]$$

es absoluta para modelos transitivos de ZF + ED que contengan a $\aleph_1$.

Sea $M = L[S, a]$. Así M es un modelo transitivo de ZFC tal que $S, a \in M$ y, para cada $x \in \mathcal{N}^M$ tenemos que

$$(x \in \mathrm{BO} \wedge \|x\| \in S)^M \leftrightarrow x \in \mathrm{BO} \wedge \|x\| \in S \leftrightarrow \psi(x, a) \leftrightarrow \psi(x, a)^M,$$

de donde se sigue que $(\{x \in \mathcal{N} \mid \|x\| \in S\}$ es $\Sigma_2^1(a))^M$. Si demostramos que $(S \in L[a])^M$, eso es lo mismo que $S \in L[a]$. Por lo tanto, podemos demostrar el teorema en ZFC en lugar de en ZF + ED sin pérdida de generalidad. A su vez, por el teorema de reflexión, basta probar que el teorema es cierto en todo modelo transitivo numerable M de ZFC.

Suponemos, pues, que $S, a \in M$, $S \subset \aleph_1^M$, y que, para todo $x \in \mathcal{N}^M$,

$$x \in \mathrm{BO} \land \|x\| \in S \leftrightarrow \psi(x,a)^M.$$

Así,

$$\alpha \in S \leftrightarrow \bigvee x \in \mathcal{N}^M(\psi^M(x,a) \land \|x\| = \alpha).$$

El problema es que esto no es necesariamente absoluto para $L[a]$ (aunque la fórmula $\psi^M(x,a)$ sí que lo es) porque x no tiene por qué pertenecer a $L[a]$. De hecho, si α no es numerable$^{L[a]}$ no puede existir tal x.

Para cada $\alpha < \aleph_1^M$, sea $\mathbb{P}_\alpha$ el c.p.o. formado por las funciones parciales finitas de ω en α. Vamos a probar que

$$(\alpha \in S \leftrightarrow (\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\alpha} \Vdash \bigvee x \in \mathcal{N}(\psi(x,\check{a}) \land \|x\| = \check{\alpha}))^{L[a]})^M.$$

Claramente, esto implica que $S \in L[a]^M$, y el teorema quedará demostrado.

Llamemos $M_0 = L[a]^M$ y sea N una extensión genérica de M tal que $\aleph_1^M$ sea numerable^N. Así $\mathbb{P}_\alpha$ es numerable^{M_0} y, como M_0 cumple la hipótesis del continuo, el número de subconjuntos densos en $\mathbb{P}_\alpha$ que están en M_0 es numerable^N, luego podemos tomar un filtro $G \in N$ que sea $\mathbb{P}_\alpha$-genérico sobre M_0.

Basta probar que

$$\alpha \in S \leftrightarrow \bigvee x \in \mathcal{N}^{M_0[G]}(\psi^{M_0[G]}(x,a) \land \|x\| = \alpha),$$

pues esto implica que existe una condición $p \in \mathbb{P}_\alpha$ que fuerza la fórmula, pero como $\mathbb{P}_\alpha$ es casi-homogéneo, por [PC 6.10] la condición $\mathbb{1}$ cumple lo mismo.

Ahora usamos que la relación $x \in \mathrm{BO} \land y \in \mathrm{BO} \land \|x\| = \|z\|$ es Π^1_1 (por 4.18), luego existe una fórmula aritmética (que podríamos escribir explícitamente) $\phi'(v,x,z)$ tal que

$$\vdash_{\mathrm{ZFC}} \bigwedge xy \in \mathcal{N}(x \in \mathrm{BO} \land y \in \mathrm{BO} \land \|x\| = \|y\| \leftrightarrow \models \bigwedge v\, \phi'[x,y]).$$

La fórmula

$$\psi'(y,a) \equiv \models \bigvee x(\bigvee u \bigwedge v\, \phi[a] \land \bigwedge v\, \phi'[y])$$

es claramente equivalente a otra en las condiciones del teorema de Schoenfield, por lo que es absoluta para modelos transitivos de ZFC con los mismos ordinales.

Así pues, si tomamos $y \in M$ tal que $z \in \mathrm{BO} \land \|y\| = \alpha$, tenemos que

$$\alpha \in S \leftrightarrow (\bigvee x \in \mathcal{N}(\psi(x,a) \land \|x\| = \|y\|)^M \leftrightarrow \psi'(y,a)^M \leftrightarrow \psi'(y,a)^N$$

$$\leftrightarrow \bigvee x \in \mathcal{N}^N(\psi(x,a)^N \land \|x\| = \|y\|) \leftrightarrow \bigvee x \in \mathcal{N}^N(\psi(x,a)^N \land \|x\| = \alpha).$$

Por otro lado, como α es numerable en $M_0[G]$, podemos tomar también un $y \in M_0[G] \subset N$ tal que $y \in \mathrm{BO} \land \|y\| = \alpha$, y entonces

$$\bigvee x \in \mathcal{N}^N(\psi(x,a)^N \land \|x\| = \alpha) \leftrightarrow \bigvee x \in \mathcal{N}^N(\psi(x,a)^N \land \|x\| = \|y\|)$$

$$\leftrightarrow \psi'(y,a)^N \leftrightarrow \psi'(y,a)^{M_0[G]} \leftrightarrow \bigvee x \in \mathcal{N}^{M_0[G]}(\psi^{M_0[G]}(x,a) \wedge \|x\| = \|y\|)$$
$$\leftrightarrow \bigvee x \in \mathcal{N}^{M_0[G]}(\psi^{M_0[G]}(x,a) \wedge \|x\| = \alpha).$$

■

Con el axioma de determinación podemos generalizar drásticamente el teorema anterior. Para ello consideramos un nuevo juego:

El juego de Solovay Dado $S \subset \aleph_1$, el *juego de Solovay* asociado a S es el juego en el que, cuando I ha jugado $a \in \mathcal{N}$ y II ha jugado $b \in \mathcal{N}$, gana II si y sólo si $a \notin \mathrm{BO}$ o bien, si $a \in \mathrm{BO}$, cuando también $\bigwedge n \in \omega\ b_n \in \mathrm{BO}$ y

$$\{\alpha \in S \mid \alpha \leq \|a\|\} \subset \{\|b_n\| \mid n \in \omega\} \subset S,$$

donde $(b_n)_{n\in\omega}$ es la imagen de b por el homeomorfismo natural $\mathcal{N} \cong \mathcal{N}^\omega$.

Veamos en primer lugar que I no puede tener una estrategia ganadora. Supongamos que σ fuera tal estrategia y sea $f : \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{N}$ la aplicación que a cada $b \in \mathcal{N}$ le asigna la sucesión a de jugadas para I prescritas por σ cuando II juega b. Claramente es una aplicación continua y su imagen está contenida en BO. Por 5.3 concluimos que existe un $\beta < \aleph_1$ tal que $\|f(b)\| < \beta$ para todo $b \in \mathcal{N}$. Por lo tanto, podemos construir un $b \in \mathcal{N}$ tal que

$$S \cap \beta = \{\|b_n\| \mid n \in \omega\}.$$

Es claro entonces que cuando II juega b gana la partida, contradicción.

Así pues, AD implica que II tiene una estrategia ganadora para el juego de Solovay. De aquí deducimos lo siguiente:

Teorema 7.61 (AD) *Para todo $S \subset \aleph_1$, el conjunto $\{x \in \mathrm{BO} \mid \|x\| \in S\}$ es de clase $\mathbf{\Pi}^1_1$*

Demostración: Sea τ una estrategia ganadora para II en el juego de Solovay correspondiente a S. Sea $g : \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{N}$ la aplicación que a cada $a \in \mathcal{N}$ le asigna la sucesión b de jugadas de II prescritas por τ cuando I juega a. Entonces, para cada $a \in \mathrm{BO}$, tenemos que

$$\|a\| \in S \leftrightarrow \bigvee n \in \omega\ \|a\| = \|(g(a))_n\|.$$

Teniendo en cuenta que $\{(x,y) \in \mathcal{N}^2 \mid x, y \in \mathrm{BO} \wedge \|x\| = \|y\|\}$ es $\mathbf{\Pi}^1_1$ (por 4.18), es fácil concluir que el conjunto del enunciado también lo es. ■

Combinando los dos últimos teoremas obtenemos:

Teorema 7.62 (AD) *Para cada $S \subset \aleph_1$ existe un $a \in \mathcal{N}$ tal que $S \in L[a]$.*

Con esto podemos probar un hecho notable:

Teorema 7.63 (AD) *El filtro generado por los conjuntos cerrados no acotados en $\aleph_1$ es un ultrafiltro, y por lo tanto es la única medida normal en $\aleph_1$.*

DEMOSTRACIÓN: Dado $S \subset \aleph_1$, por el teorema anterior existe un $a \in \mathcal{N}$ tal que $S \in L[a]$. Por otra parte existe $a^\sharp$, luego existe una clase I_a de indiscernibles de modo que existen

$$\alpha_1 < \cdots < \alpha_n < \aleph_1 < \alpha_{n+1} < \cdots \alpha_m$$

en I_a tales que S está determinado como el único conjunto en $L[a]$ que cumple

$$L[a] \vDash \phi[S, \alpha_1, \ldots, \alpha_m],$$

para cierta fórmula ϕ. Si $\alpha \in I_a$ cumple $\alpha_n < \alpha < \aleph_1$, o bien

$$L[a] \vDash \bigvee S([\alpha] \in S \land \phi[S, \alpha_1, \ldots, \alpha_n])$$

o bien

$$L[a] \vDash \bigvee S([\alpha] \notin S \land \phi[S, \alpha_1, \ldots, \alpha_n]),$$

y el caso que se cumpla para un α, se cumple para todos los indiscernibles α en las mismas condiciones. Por lo tanto, o bien $I_a \cap (\aleph_1 \setminus \alpha_n) \subset S$ o bien $I_a \cap (\aleph_1 \setminus \alpha_n) \subset \aleph_1 \setminus S$, y $I_a \cap (\aleph_1 \setminus \alpha_n)$ es un cerrado no acotado, pues $I_\alpha \cap \aleph_1$ lo es [CG 3.18].

Esto prueba que el filtro D generado por los conjuntos cerrados no acotados en $\aleph_1$ es un ultrafiltro, es $\aleph_1$-completo porque todos lo son, y obviamente no es principal, luego es una medida no trivial en $\aleph_1$. Es normal porque la intersección diagonal de cerrados no acotados es cerrada y no acotada. Falta probar que es la única medida normal, pero esto se debe a que si D' es cualquier medida normal en $\aleph_1$ y $C \subset \aleph_1$ es un cerrado no acotado, entonces en $M = L[C, D']$ se cumple que $D' \cap M$ es una medida normal^M en $\aleph_1$, y M es un modelo de ZFC. Entonces, como $C \in M$ es cerrado no acotado en $\aleph_1$, sabemos que $C \in D' \cap M$, luego $D \subset D'$ y, como ambos son ultrafiltros, $D = D'$. ■

Así pues, no sólo existe una medida en $\aleph_1$, sino que tiene una descripción explícita que no depende de una aplicación del lema de Zorn o algo similar para obtener un ultrafiltro a partir de un filtro (ni de la existencia de estrategias meramente postuladas por el axioma de determinación).

El teorema 7.62 nos permite calcular otro indiscernible uniforme:

Teorema 7.64 (AD) $u_2 = \aleph_2$.

DEMOSTRACIÓN: Sabemos que $\aleph_1 < u_2 \leq \aleph_2$. Si fuera $u_2 < \aleph_2$ podemos considerar un buen orden $A \subset \aleph_1 \times \aleph_1$ de ordinal u_2. Codificándolo a través de una biyección constructible de $\aleph_1 \times \aleph_1$ en $\aleph_1$ el teorema anterior nos da que existe un $a \in \mathcal{N}$ tal que $A \in L[a]$, pero entonces $u_1 = \aleph_1$ y u_2 serían equipotentes en $L[a]$, cuando ambos son indiscernibles. ■

A su vez, de aquí deducimos lo siguiente:

Teorema 7.65 (AD) *Para todo natural $n \geq 2$, se cumple que* $\operatorname{cf} \aleph_n = \aleph_2$.

Demostración: Como $\aleph_n$ es un indiscernible uniforme, por el teorema anterior existe un $m \in \omega$ tal que $\aleph_n = u_m$. Obviamente $m \geq 2$, luego por 6.42 se cumple que $\operatorname{cf} \aleph_n = \operatorname{cf} u_2 = \operatorname{cf} \aleph_2 = \aleph_2$. ∎

Más aún:

Teorema 7.66 (Kunen, Solovay) (AD) *Para todo número natural n se cumple que $u_n = \aleph_n$.*

Demostración: Llamemos U al filtro generado por los cerrados no acotados en $\aleph_1$ que, según sabemos, es una medida normal. Consideramos la ultrapotencia $\operatorname{Ult}_U(u_n)$, es decir, el conjunto cociente de ${}^{\omega_1}u_n$ respecto de la relación que identifica dos aplicaciones si coinciden en un elemento de U. La relación de orden en u_n (es decir, la pertenencia) induce una relación en $\operatorname{Ult}_U(u_n)$, dada por

$$[f] < [g] \leftrightarrow \{\alpha \in \aleph_1 \mid f(\alpha) < g(\alpha)\} \in U.$$

Por el teorema fundamental de las ultrapotencias se trata de una relación de orden en $\operatorname{Ult}_U(u_n)$. El hecho de que U es $\aleph_1$-completo se traduce claramente en que no existen sucesiones decrecientes respecto a esta relación, luego por ED está bien fundada. Equivalentemente, la relación correspondiente $\leq$ es un buen orden en la ultrapotencia.

Vamos a ver que para todo $n \geq 1$ se cumple que $\operatorname{ord}(\operatorname{Ult}_U(u_n), \leq) = u_{n+1}$.

Aceptando que se cumple esto, si existiera un n tal que $|u_n| = |u_{n+1}|$, entonces

$$|u_{n+2}| = |\operatorname{Ult}_U(u_{n+1})| = |\operatorname{Ult}_U(u_n)| = |u_{n+1}|,$$

pues una biyección entre dos conjuntos induce obviamente una biyección entre sus ultrapotencias. Por inducción resulta que $|u_{n+m}| = |u_n|$ para todo $m \in \omega$, luego $u_{n+m} \leq \aleph_{n+1}$, luego $u_\omega \leq \aleph_{n+1}$, en contradicción con 7.58. Por consiguiente, tenemos que $|u_n| < |u_{n+1}|$ para $1 \leq n < \omega$ y esto, junto con que $u_n \leq \aleph_n$, implica claramente que $u_n = \aleph_n$.

Observemos en primer lugar que si un ordinal no numerable α es un cardinal en todas las clases $L[a]$, entonces es un indiscernible uniforme. En efecto, si existe un a tal que $i < \alpha < i'$, donde $i, i' \in I_a$ son indiscernibles consecutivos, entonces i, i' son equipotentes en $L[a^\sharp]$, ya que cada cardinal de $L[a^\sharp]$ es un límite de elementos de I_a, luego resulta que α no es un cardinal en $L[a^\sharp]$.

Llamemos $\tilde{L} = \bigcup\limits_{a \in \mathcal{N}} L[a]$ y veamos que si $\alpha < u_\omega$, entonces ${}^{\omega_1}\alpha \subset \tilde{L}$. En efecto, si $\alpha \leq \omega_1$, toda $f : \omega_1 \longrightarrow \alpha$ cumple $f \subset \omega_1 \times \omega_1$ y, puede ser codificado por un subconjunto de ω_1 a través de una biyección constructible. El teorema 7.62 implica entonces que $f \in \tilde{L}$.

Si $u_1 = \aleph_1 < \alpha < \aleph_2 = u_2$ el razonamiento anterior se adapta ligeramente: tenemos que α no es un un indiscernible uniforme, luego $\alpha = \alpha_0$ no es un cardinal en cierto $L[a_0]$, luego existe $\alpha_1 < \alpha_0$ y una biyección entre ambos en $L[a_0]$. Si $\omega_1 < \alpha_1$ razonamos igualmente la existencia de un $\alpha_2 < \alpha_1$ y una biyección entre ambos en un $L[a_1]$. Como no podemos construir una sucesión decreciente infinita, tras un número finito de pasos encontramos un $\alpha_n = \omega_1$ y codificando todos los $a_0, \ldots, a_n$ en un mismo $a^* \in \mathcal{N}$, existe una biyección $g : \alpha \longrightarrow \omega_1$ en $L[a^*]$. Así, toda $f : \omega_1 \longrightarrow \alpha$ se codifica mediante un subconjunto de ω_1 a través de g y de una biyección constructible de $\omega_1 \times \omega_1$ en ω_1, lo que nos permite concluir igualmente que $f \in \tilde{L}$.

Para $u_2 \leq \alpha < u_\omega$ razonamos por inducción sobre α. Si α es un cardinal en todo $L[a]$, hemos visto que es un indiscernible uniforme, luego $\alpha = u_n$ con $n \geq 2$. Así 6.42 nos da que $\operatorname{cf} \alpha = \operatorname{cf} u_2 = \aleph_2$. Por lo tanto

$$^{\omega_1}\alpha = \bigcup_{\delta<\alpha} {}^{\omega_1}\delta \subset \tilde{L},$$

por hipótesis de inducción o por la parte ya probada si $\alpha = u_2 = \aleph_2$. Supongamos ahora que α no es un cardinal en cierto $L[a]$. Entonces existe $\delta < \alpha$ y $g : \delta \longrightarrow \alpha$ biyectiva en $L[a]$. Dada $f : \omega_1 \longrightarrow \alpha$, por hipótesis de inducción tenemos que $f \circ g^{-1} \in L[b]$, para cierto $b \in \mathcal{N}$ y basta tomar $c = \langle a, b \rangle$ para concluir que $f \in L[c] \subset \tilde{L}$.

Pasamos ya a calcular el ordinal de $\mathrm{Ult}_U(u_n)$. Para ello tomamos $f \in {}^{\aleph_1}u_n$. Hemos probado que existe un $a \in \mathcal{N}$ tal que $f \in L[a]$. Más concretamente, $f \subset L_{u_n}[a]$, luego $|L[a]_f^{\lhd_a}|^{L[a]} \leq u_n$, luego $\alpha = \operatorname{ord}(L[a]_f, \unlhd_a) < u_{n+1}$. El teorema 6.47 nos da un $b \in \mathcal{N}$ tal que α es definible en $L[b]$ a partir de $u_1, \ldots, u_n$. Como f es definible a partir de α en $L[a]$, cambiando a por otro $a \in \mathcal{N}$ que codifique a a y a b, concluimos que f es definible en $L[a]$ a partir de $u_1, \ldots, u_n$. Por consiguiente, existe una fórmula ϕ tal que, para todo $\xi < \omega_1$, se cumple que $f(\xi)$ es el único elemento de $L[a]$ tal que

$$L[a] \vDash \phi[f(\xi), \xi, u_1, \ldots, u_n].$$

(Podemos tomar ϕ de modo que si ξ no es un elemento de $\aleph_1 = u_1$, entonces el único elemento que cumple ϕ es 0.) Equivalentemente, llamando t al término de Skolem asociado a ϕ tenemos que

$$f(\xi) = L[a](t)[\xi, u_1, \ldots, u_n].$$

Definimos $\eta(f, a, t) = L[a](t)[u_1, \ldots, u_n, u_{n+1}] < u_{n+1}$. La desigualdad se cumple porque

$$L[a] \vDash \bigwedge \xi \; t(\xi)[u_1, \ldots, u_n] < [u_n],$$

luego por indiscernibilidad $L[a] \vDash \bigwedge \xi \; t(\xi)[u_2, \ldots, u_{n+1}] < [u_{n+1}]$.

Veamos ahora que si a otra $\bar{f} \in {}^{\aleph_1}u_n$ le asociamos del mismo modo un $\bar{a} \in \mathcal{N}$ y un término $\bar{t}$ de modo que $\bar{f}(\xi) = L[\bar{a}](\bar{t})[\xi, u_1, \ldots, u_n]$ y además $[f] \leq [\bar{f}]$, es decir,

$$\{\xi < \omega_1 \mid f(\xi) \leq \bar{f}(\xi)\} \in U,$$

entonces $\eta(f, a, t) \leq \eta(\bar{f}, \bar{a}, \bar{t})$. En particular, esto implica que si $[f] = [\bar{f}]$ entonces $\eta(f, a, t) = \eta(\bar{f}, \bar{a}, \bar{t})$, luego la aplicación $\mathrm{Ult}_U(u_n) \longrightarrow u_{n+1}$ dada por $[f] \mapsto \eta(f, a, t)$, para cualquier elección de a y t, está bien definida y conserva el orden.

Sea $b = \langle a, \bar{a} \rangle \in \mathcal{N}$. Sabemos que $I_b \subset I_a \cap I_{\bar{a}}$ (teorema [CG 3.34]) y además $I_b \cap \aleph_1 \in U$, luego podemos tomar $\xi_0 \in I_b \cap \aleph_1$ tal que $f(\xi_0) \leq \bar{f}(\xi_0)$. Pero esto equivale a que

$$L[a](t)(\xi_0, u_1, \ldots, u_n) \leq L[\bar{a}](\bar{t})[\xi_0, u_1, \ldots, u_n]$$

y esto puede verse como una fórmula que se cumple en $L[b]$ con parámetros $\xi_0, u_1, \ldots, u_n$ (pues a y $\bar{a}$ son definibles a partir de b y no cuentan como parámetros). Como todos los parámetros están en I_b, esto implica que

$$L[a](t)(u_1, \ldots, u_n, u_{n+1}) \leq L[\bar{a}](\bar{t})[u_1, \ldots, u_n, u_{n+1}],$$

es decir, que $\eta(f, a, t) \leq \eta(\bar{f}, \bar{a}, \bar{t})$. Más aún, toda la prueba vale igual si cambiamos $\leq$ por $<$, con lo que la aplicación $\mathrm{Ult}_U(u_n) \longrightarrow u_{n+1}$ que ahora tenemos definida es inyectiva. Sólo falta probar que es suprayectiva.

Si $\gamma < u_{n+1}$, el teorema 6.47 nos da que γ es definible en un cierto $L[a]$ a partir de $u_1, \ldots, u_n$. Por lo tanto, γ es el único elemento de $L[a]$ que cumple

$$L[a] \vDash ((\phi[\gamma, u_1, \ldots, u_n] \wedge [\gamma] < [u_{n+1}])$$
$$\vee (\neg \bigvee x < [u_{n+1}] \phi(x)[u_1, \ldots, u_n] \wedge [\gamma] = 0)),$$

para cierta fórmula ϕ. Si llamamos $t(x_1, \ldots, x_{n+1})$ al término de Skolem asociado a esta fórmula, es claro que, para todo $\xi < \aleph_1$, se cumple que

$$L(a)(t)[\xi, u_1, \ldots, u_n] < u_n,$$

luego podemos definir $f \in {}^{\omega_1}u_n$ mediante $f(\xi) = L[a](t)(\xi, u_1, \ldots, u_n)$, y así la imagen de $[f]$ por la aplicación que hemos definido en $\mathrm{Ult}_U(u_n)$ es γ. ■

No se cumple que $u_{\omega+1} = \aleph_{\omega+1}$. Por el contrario, $\aleph_{\omega+1} = u_{\omega_{\omega+1}}$, con lo que hay muchos indiscernibles uniformes entre $\aleph_\omega = u_\omega$ y $\aleph_{\omega+1} = u_{\omega_{\omega+1}}$. Probamos algo más general:

Teorema 7.67 *Para $n \geq 3$ se cumple que $\boldsymbol{\delta}^1_n = u_{\boldsymbol{\delta}^1_n}$.*

DEMOSTRACIÓN: Obviamente $\boldsymbol{\delta}^1_n \leq u_{\boldsymbol{\delta}^1_n}$. Si se da la desigualdad estricta, existe un $\delta < \boldsymbol{\delta}^1_n$ tal que $\boldsymbol{\delta}^1_n = u_\delta$ (porque $\boldsymbol{\delta}^1_n$ es un cardinal, luego un indiscernible uniforme). Pero δ no puede ser un cardinal sucesor, ya que entonces el teorema 6.42 nos daría que $\mathrm{cf}\, \boldsymbol{\delta}^1_n = \aleph_2$, pero tampoco puede ser un ordinal límite, pues entonces $\mathrm{cf}\, \boldsymbol{\delta}^1_n = \mathrm{cf}\, \delta < \boldsymbol{\delta}^1_n$ y $\boldsymbol{\delta}^1_n$ sería singular, cuando sabemos que es regular. ■

Capítulo VIII

Grados de Wadge

En este capítulo mostraremos cómo el axioma de determinación permite distribuir los elementos de $\mathcal{PN}$ en una jerarquía de grados en orden creciente de complejidad en la cual se puede enmarcar todas las clases $\mathbf{\Gamma}$ de subconjuntos de $\mathcal{N}$ cerradas para sustituciones continuas. Conviene tener presente que si restringimos la teoría a conjuntos de Borel no necesitamos AD (puesto que entonces sólo se necesita la determinación de los conjuntos de Borel y ésta es demostrable en ZF + ED).

Antes de entrar en materia probaremos algunos resultados sobre funciones continuas entre espacios de sucesiones.

8.1 Funciones continuas, funciones lipschitzianas y contracciones

Consideremos de momento un espacio de sucesiones X^ω donde X es un conjunto arbitrario. Por 1.1 los cerrados en X^ω son de la forma $C = [A]$, donde A es un árbol bien podado en X. Recordemos de 1.2 que si A y B son árboles bien podados en un conjunto X, una aplicación $\phi : A \longrightarrow B$ se dice *propia* si es monótona, es decir, si $\bigwedge st \in A(s \subset t \rightarrow \phi(s) \subset \phi(t))$, y además, para todo $x \in [A]$, se cumple que

$$\lim_n \ell(\phi(x|_n)) = \infty.$$

En estas condiciones, el teorema 1.3 prueba que si ϕ es propia, entonces la aplicación $\phi^* : [A] \longrightarrow [B]$ dada por $\phi^*(x) = \bigcup_n \phi(x|_n)$ es continua. Vamos a necesitar el recíproco:

Teorema 8.1 *Sean A y B dos árboles bien podados en un conjunto X y sea $f : [A] \longrightarrow [B]$ una aplicación continua. Entonces existe una aplicación propia $\phi : A \longrightarrow B$ tal que $f = \phi^*$.*

Demostración: Para cada $s \in A$, llamamos $B_s = \{x \in [A] \mid s \subset x\}$, que claramente es una base de $[A]$. Consideramos también la base de $[B]$ definida de igual modo. Dado $s \in A$, siempre existe un $t \in B$ tal que $f[B_s] \subset B_t$ (por ejemplo, $t = \varnothing$) y, si $f[B_s] \subset B_t \cap B_{t'}$, entonces $t \subset t' \lor t' \subset t$. Por lo tanto, podemos definir $\phi(s)$ como el mayor elemento $t \in T$ tal que $\ell(t) \leq \ell(s)$ y $f[B_s] \subset B_t$. Tenemos así una aplicación $\phi : A \longrightarrow B$ claramente monótona.

Dado $x \in [A]$ y $m \in \omega$, tenemos que $x \in f^{-1}[B_{f(x)|_m}]$, luego por continuidad existe un $n \in \omega$ (que podemos tomar $n \geq m$) tal que $x \in B_{x|_n} \subset f^{-1}[B_{f(x)|_m}]$, luego $f[B_{x|_n}] \subset B_{f(x)|_m}$, luego $f(x)|_m \subset \phi(x|_n)$. En particular $\ell(\phi(x|_n)) \geq m$.

Esto prueba a la vez que ϕ es propia y que $f(x) \subset \phi^*(x)$, luego $f = \phi^*$. ■

Definición 8.2 Sean A y B dos árboles bien podados en un conjunto X. Una aplicación $\phi : A \longrightarrow B$ es *lipschitziana* si es monótona y $\bigwedge s \in A\ \ell(\phi(s)) = \ell(s)$.

Claramente toda aplicación lipschitziana es propia, luego define una función continua $\phi^* : [A] \longrightarrow [B]$. Pero las funciones definidas por funciones lipschitzianas cumplen una propiedad más fuerte que la continuidad:

Sean $C, D \subset X^\omega$ subespacios cerrados. Diremos que una función $f : C \longrightarrow D$ es *lipschitziana* si

$$\bigwedge n \in \omega \bigwedge xy \in C(x|_n = y|_n \rightarrow f(x)|_n = f(y)|_n).$$

Diremos que f es una *contracción* si

$$\bigwedge n \in \omega \bigwedge xy \in C(x|_n = y|_n \rightarrow f(x)|_{n+1} = f(y)|_{n+1}).$$

Es inmediato que toda contracción es lipschitziana y que toda función lipschitziana es continua. Más concretamente, si $C = [A]$ y $D = [B]$, donde A y B son árboles bien podados en X, entonces f es lipschitziana si y sólo si $f = \phi^*$, para cierta función lipschitziana $\phi : A \longrightarrow B$, que necesariamente es la caracterizada por la relación $\phi(x|_n) = f(x)|_n$.

Notemos que en general una igualdad de funciones continuas $\phi^* = \psi^*$ no implica necesariamente que $\phi = \psi$, pero si ϕ y ψ son lipschitzianas entonces la conclusión sí que es cierta, por la relación precedente.

Nota Estas definiciones son casos particulares de las usuales en topología si tenemos en cuenta que una métrica en X^ω es la dada por $d(x, y) = 1/2^n$, donde n es el mínimo número natural tal que $x|_n \neq y|_n$ (y $d(x, x) = 0$). Entonces, la propiedad de Lipschitz equivale a que $d(f(x), f(y)) \leq d(x, y)$, mientras que las contracciones cumplen $d(f(x), f(y)) \leq \frac{1}{2} d(x, y)$ o, más en general, cualquier aplicación que cumpla $d(f(x), f(y)) \leq k\, d(x, y)$ con $k < 1$ es una contracción. ■

Vamos a construir explícitamente una biyección

$$\mathcal{N} \longrightarrow \{\phi \mid \phi : \omega^{<\omega} \longrightarrow \omega^{<\omega} \text{ lipschitziana}\}.$$

Para ello observamos que la enumeración canónica $\{s_n\}_{n\in\omega}$ de $\omega^{<\omega}$ cumple que si $s_m \subset s_n$ entonces $m \leq n$. Fijado $x \in \mathcal{N}$, definimos $\phi_x : \omega^{<\omega} \longrightarrow \omega^{<\omega}$

como sigue: para cada $(a_0, \ldots, a_k) \in \omega^{<\omega}$, sean $n_0, \ldots, n_k$ los números naturales que cumplen

$$s_{n_0} = \langle a_0 \rangle \,, \quad s_{n_1} = \langle a_0, a_1 \rangle \,, \quad \ldots \quad s_{n_k} = \langle a_0, \ldots, a_k \rangle \,,$$

sea $b_i = x(n_i - 1)$ y sea $\phi_x(a_0, \ldots, a_k) = (b_0, \ldots, b_k)$. Claramente, ϕ_x es una función lipschitziana. Además, toda función lipschitziana $\phi : \omega^{<\omega} \longrightarrow \omega^{<\omega}$ es de la forma ϕ_x, para cierto $x \in \mathcal{N}$, pues basta definir $x(n)$ como el último elemento de $\phi(s_{n+1})$. Por último, la aplicación $x \mapsto \phi_x$ es inyectiva, pues si $x, x' \in \mathcal{N}$ cumplen $x \neq x'$, entonces $\phi_x(s_{n+1}) \neq \phi_{x'}(s_{n+1})$, ya que el último elemento de cada sucesión es, respectivamente, $x(n)$ y $x'(n)$.

Como cada función $\phi : \omega^{<\omega} \longrightarrow \omega^{<\omega}$ lipschitziana se corresponde biunívocamente con una función $\phi^* : \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{N}$ lipschitziana, tenemos casi probado el teorema siguiente:

Teorema 8.3 *Existe una biyección*

$$L : \mathcal{N} \longrightarrow \{f \mid f : \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{N} \text{ lipschitziana}\}$$

tal que la aplicación $\mathcal{N}^2 \longrightarrow \mathcal{N}$ dada por $(x, y) \mapsto L_x(y)$ es continua.

Demostración: Basta definir $L_x = \phi_x^*$. La continuidad se debe a que $L_x(y)|_n = \phi_x^*(y)|_n = \phi_x(y|_n)$ y, si $y|_n = s_m$, concluimos que $L_x(y)|_n$ depende únicamente de $(x|_m, y|_n)$. ■

El interés de las funciones lipschitzianas se debe a que si τ es una estrategia ganadora para II en un juego J definido sobre un conjunto X, entonces la aplicación $X^\omega \longrightarrow X^\omega$ dada por $x \mapsto (x * \tau)_{\mathrm{I}}$ es lipschitziana, pues $(x * \tau)_{\mathrm{I}}|_n$ está determinado por $x|_n$.

Recíprocamente, toda función lipschitziana $f : X^\omega \longrightarrow X^\omega$ $(f = \phi^*)$ determina una estrategia para II, a saber, la dada por $\sigma(s) = \phi(s_{\mathrm{I}})((\ell(s) - 1)/2)$.

Si σ es una estrategia para I, entonces $x \mapsto (\sigma * x)_{\mathrm{I}}$ es una contracción, pues $(\sigma * x)_I|_{n+1}$ está determinado por $x|_n$. Recíprocamente, toda contracción ϕ determina una estrategia para I dada por $\sigma(s) = \phi(s_{\mathrm{II}})(\ell(s)/2)$.

Terminamos con un caso particular de un teorema de punto fijo clásico del análisis matemático:

Teorema 8.4 *Toda contracción $f : \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{N}$ tiene un punto fijo, es decir, existe un $x \in \mathcal{N}$ tal que $f(x) = x$.*

Demostración: Tomamos cualquier $x_0 \in \mathcal{N}$ y definimos $x_{n+1} = f(x_n)$. Así, como $x_0|_0 = x_1|_0$, la definición de contracción nos da que $x_1|_1 = x_2|_1$, luego $x_2|_2 = x_3|_2$, etc. De aquí se sigue que la sucesión $\{x_n\}_{n \in \omega}$ es convergente al $x \in \mathcal{N}$ dado por $x(i) = \lim\limits_n x_n(i)$ (las sucesiones son finalmente constantes). Además, como f es continua, $f(x) = \lim\limits_n f(x_n) = \lim\limits_n x_{n+1} = x$. ■

8.2 Reducibilidad Wadge y Lipschitz

El concepto fundamental de este capítulo es el de reducibilidad Wadge introducido en 7.38. Recordamos aquí la definición a la vez que introducimos el concepto auxiliar de reducibilidad Lipschitz.

Definición 8.5 Sean $A, B \subset \mathcal{N}$. Diremos que A es *reducible Lipschitz* (resp. *reducible Wadge*) a B si existe $f : \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{N}$ lipschitziana (resp. continua) tal que $A = f^{-1}[B]$. Lo representaremos por $A \leq_L B$ (resp. $A \leq_W B$). Ambas relaciones son reflexivas y transitivas, luego definen relaciones de equivalencia dadas por

$$A \equiv_L B \leftrightarrow A \leq_L B \land B \leq_L A, \qquad A \equiv_W B \leftrightarrow A \leq_W B \land B \leq_W A.$$

También es obvio que $A \leq_L B \to A \leq_W B$ y que $A \equiv_L B \to A \equiv_W B$.

Representaremos por $\mathbb{G}_L$ y $\mathbb{G}_W$, respectivamente, a los conjuntos cociente de $\mathcal{PN}$ respecto de las relaciones de equivalencia que acabamos de definir. A sus elementos los llamaremos *grados de Lipschitz* (resp. *grados de Wadge*). Usaremos la notación $[A]_L$ y $[A]_W$ para referirnos al grado de Lipschitz y el grado de Wadge de un conjunto A, respectivamente, y escribiremos $[A]_*$ (así como $\leq_*$, $\equiv_*$, $\mathbb{G}_*$) en los enunciados que valgan para grados de los dos tipos.[1]

Claramente podemos definir en $\mathbb{G}_*$ la relación de orden de orden (parcial) dada por $[A]_* \leq_* [B]_* \leftrightarrow A \leq_* B$. Igualmente, como $A \leq_* B \to \neg A \leq_* \neg B$, podemos definir también el grado complementario $\neg[A]_* = [\neg A]_*$.

Ahora veamos que existe una conexión muy estrecha entre los conceptos de reducibilidad que acabamos de introducir y los juegos infinitos:

El juego de Lipschitz Si $A, B \subset \mathcal{N}$, consideramos el juego $J(A, B)$ en el que si I juega a y II juega b entonces II gana si y sólo si $a \in A \leftrightarrow b \in B$. Más explícitamente, $J(A, B)$ es el juego $J(C)$, donde

$$C = X^\omega \setminus \{z \in X^\omega \mid z_{\mathrm{I}} \in A \leftrightarrow z_{\mathrm{II}} \in B\} = \pi_{\mathrm{I}}^{-1}[A] \,\Delta\, \pi_{\mathrm{II}}^{-1}[B],$$

donde a su vez[2] $\pi_{\mathrm{I}}(z) = z_{\mathrm{I}}$ y $\pi_{\mathrm{II}}(z) = z_{\mathrm{II}}$.

Teorema 8.6 *Sean $A, B \subset \mathcal{N}$. Entonces*

a) II *tiene una estrategia ganadora para $J(A, B)$ si y sólo si $A \leq_L B$.*

b) Si I *tiene una estrategia ganadora para $J(A, B)$ entonces $B \leq_L \neg A$.*

---

[1] Tal y como indicábamos al principio del capítulo, podemos restringir la teoría considerando que $\mathbb{G}_*$ es el conjunto cociente de la σ-álgebra de Borel de $\mathcal{N}$ respecto a la relación $\equiv_*$, y en ese caso todos los usos que vamos a hacer de AD son evitables. Notemos que si $A \leq_* B$ y B es un conjunto de Borel entonces A también lo es, por lo que el grado de un conjunto de Borel es el mismo si se calcula en la σ-álgebra de Borel o en $\mathcal{PN}$.

[2] Como las funciones π_{I} y π_{II} son continuas, es obvio que si A y B son conjuntos de Borel entonces C también lo es, luego en este caso podemos asegurar que el juego $J(A, B)$ está determinado sin necesidad de recurrir al axioma AD.

DEMOSTRACIÓN: Si τ es una estrategia ganadora para II, entonces la aplicación $a \mapsto (a * \tau)_{\mathrm{II}}$ es una función lipschitziana que prueba que $A \leq_L B$. Recíprocamente, si existe $f : \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{N}$ lipschitziana tal que $A = f^{-1}[B]$, entonces existe una estrategia τ para II que hace que $f(a) = (a * \tau)_{\mathrm{II}}$, con lo que resulta ser una estrategia ganadora.

Si I tiene una estrategia ganadora σ, entonces $b \mapsto (\sigma * b)_{\mathrm{I}}$ es una función lipschitziana que prueba $B \leq_L \neg A$, pero la implicación contraria falla porque no basta con que una función sea lipschitziana para definir una estrategia para I, sino que se necesita que sea una contracción. ■

Naturalmente, la reducibilidad Lipschitz implica la reducibilidad Wadge, por lo que la implicación del apartado b) del teorema anterior, al igual que la implicación análoga del apartado a), también son válidas para $\leq_W$. Dichas implicaciones son las únicas necesarias para demostrar el teorema siguiente, que generaliza a 7.39 y es la piedra angular de toda la teoría sobre reducibilidad:

Teorema 8.7 (Lema de Wadge) (AD) *Si $A, B \in \mathcal{PN}$, o bien $A \leq_* B$ o bien $B \leq_* \neg A$.*

Veamos ahora que modificando levemente el juego $J(A, B)$ podemos obtener otro juego que cumple la versión equivalente del teorema 8.6 para la reducibilidad Wadge:

El juego de Wadge Dados $A, B \subset \mathcal{N}$, consideramos el juego $J_p(A, B)$ que es como $J(A, B)$ salvo que el jugador II tiene permitido pasar su turno sin jugar. Más precisamente, se trata de un juego en $(\omega \cup \{p\})^{<\omega}$, donde p es cualquier conjunto prefijado tal que $p \notin \omega$. Llamaremos *jugadas propias* de un jugador a sus jugadas distintas de p. Entonces:

a) I no puede pasar (es decir, si I juega p pierde la partida).

b) II debe jugar infinitas jugadas propias (es decir, supuesto que I no haya pasado nunca, si II sólo juega un número finito de jugadas propias entonces I gana la partida).

c) En el supuesto de que I no haya pasado nunca y II haya jugado infinitas jugadas propias, si a es la sucesión de jugadas de I y b es la sucesión de jugadas propias de II, entonces II gana si y sólo si $a \in A \leftrightarrow b \in B$.

Ahora podemos probar:

Teorema 8.8 *Sean $A, B \subset \mathcal{N}$. Entonces*

a) II *tiene una estrategia ganadora para $J_p(A, B)$ si y sólo si $A \leq_W B$.*

b) Si I *tiene una estrategia ganadora para $J_p(A, B)$ entonces $B \leq_L \neg A$.*

DEMOSTRACIÓN: Si τ es una estrategia para II tal que $(x*\tau)_{\rm II}$ tiene siempre infinitas jugadas propias, sea cual sea $x \in \mathcal{N}$, entonces la aplicación $x \mapsto (x*\tau)_{\rm IIp}$ que a cada x le asigna la sucesión de jugadas propias de II según τ es claramente continua, pues, dado $m \in \omega$, si la restricción $(x*\tau)_{\rm IIp}|_m$ proviene de eliminar las jugadas p de $(x*\tau)_{\rm II}|_n$, entonces todo $y \in \mathcal{N}$ tal que $y|_n = x|_n$ cumple $(y*\tau)_{\rm IIp}|_m = (x*\tau)_{\rm IIp}|_m$. Si además la estrategia es ganadora, tenemos que $x \in A \leftrightarrow (x*\tau)_{\rm IIp} \in B$, luego $A \leq_W B$.

Supongamos ahora que $f : \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{N}$ cumple que $A = f^{-1}[B]$. Sabemos que $f = \phi^*$, para una función propia $\phi : \omega^{<\omega} \longrightarrow \omega^{<\omega}$. Definimos la estrategia τ para II que fija la jugada n-sima considerando la sucesión s de las n primeras jugadas de I, calculando $\phi(s)$ y, en caso de que $\ell(\phi(s)) > n$ la jugada es $\phi(s)(n)$, mientras que en caso contrario II pasa.

Es claro entonces que si II aplica esta estrategia y I juega a (sin pasar nunca), entonces las jugadas propias de II terminan siendo las que forman $b = f(a)$, luego II gana necesariamente la partida.

Supongamos ahora que I tiene una estrategia ganadora σ para $J_p(A, B)$. Entonces la función $y \mapsto (\sigma * y)_{\rm I}$ (para todo $y \in \mathcal{N}$, es decir, consideramos todas las partidas posibles en las que II no pasa nunca) es lipschitziana y claramente prueba que $B \leq_L \neg A$. ■

Observemos que cada juego $J_p(A, B)$ es reducible a un juego de la forma $J(C)$, con $C \subset (\omega \cup \{p\})^\omega$, y es claro entonces que AD implica que todos los juegos $J_p(A, B)$ están determinados,[3] pues AD implica obviamente su generalización a juegos en cualquier espacio de la forma X^ω con X numerable.

---

[3]Explícitamente, si llamamos $\mathcal{N}_p = (\omega \cup \{p\})^\omega$,

$$C = R_{\rm I} \cap (\neg R_{\rm II} \cup (R_{\rm II} \cap (\pi_{\rm I}^{-1}[A] \,\Delta\, \pi_{\rm IIp}^{-1}[B]))),$$

donde $R_{\rm I} = \{z \in \mathcal{N}_p \mid \bigwedge n \in \omega\; z_{\rm I}(n) \neq p\}$ es el conjunto de partidas en las que I no pasa nunca (claramente de Borel), $R_{\rm II} = \{z \in \mathcal{N}_p \mid \bigwedge m \in \omega \bigvee n \in \omega (m \leq n \land z_{\rm II}(n) \neq p)\}$ es el conjunto de partidas en las que II juega infinitas jugadas no nulas (también de Borel), $\pi_{\rm I}(z) = z_{\rm I}$ es una aplicación continua y $\pi_{\rm IIp} = \pi_{\rm II} \circ \pi_p$, donde $\pi_{\rm II}(z) = z_{\rm II}$ (continua) y $\pi_p(z)$ es la sucesión de componentes de z distintas de p si son infinitas o la sucesión constante p en caso contrario. Esta última aplicación es medible Borel, pues si $s \in (\omega \cup p)^{<\omega}$ no toma nunca el valor p, entonces

$$\pi_p^{-1}[B_s] = \{z \in \mathcal{N}_p \mid \bigwedge m \in \omega \bigvee n \in \omega (m \leq n \land z(n) \neq p)\} \cap \bigcup_t B_t,$$

donde t recorre las sucesiones de $(\omega \cup \{p\})^{<\omega}$ cuyas primeras componentes son las de s. Si s tiene todas sus componentes iguales a p entonces

$$\pi_p^{-1}[B_s] = \neg\{z \in \mathcal{N}_p \mid \bigwedge m \in \omega \bigvee n \in \omega (m \leq n \land z(n) \neq p)\}$$

y si s tiene algunas componentes iguales a p, pero no todas, entonces $\pi_p^{-1}[B_s] = \varnothing$. En cualquier caso $\pi_p^{-1}[B_s]$ es un conjunto de Borel.

Esto prueba que si A y B son conjuntos de Borel en $\mathcal{N}$ (luego claramente también en $\mathcal{N}_p$) entonces podemos afirmar que $J_p(A, B)$ está determinado sin necesidad de AD.

8.3 La ordenación de los grados

Si $a \in \mathbb{G}_*$, los grados a y $\neg a$ pueden ser iguales o no, pero si no son iguales entonces son incomparables, ya que $a \leq_* \neg a$ implica que $\neg a \leq_* a$, y entonces $a = \neg a$. El teorema 8.7 afirma en esencia (bajo AD) que la única posibilidad para que dos grados a, $b \in \mathbb{G}_*$ sean incomparables es que $a = \neg b$. En efecto, en principio el teorema afirma que $a \leq_* b \vee b \leq_* \neg a$. Si se da el caso $a \leq_* b$ y no de da la igualdad, también tiene que suceder $\neg a \leq_* b$, pues la alternativa según 8.7 sería $b \leq_* \neg a$, en cuyo caso $a \leq \neg a$, luego $a = b = \neg a$. Similarmente, si se da el caso $b \leq_* \neg a$ y no se da la igualdad entonces también $b \leq_* a$, pues la alternativa es $\neg a \leq_* b$ y de nuevo $a = b = \neg a$.

Por consiguiente, si $b \neq a$, $\neg a$, se tiene que dar de hecho uno de los dos casos siguientes:

$$a \leq_* b \wedge \neg a \leq_* b \qquad \text{o bien} \qquad b \leq_* a \wedge b \leq_* \neg a.$$

O también: dados dos grados $a, b \in \mathbb{G}_*$, se cumple $a \leq_* b \vee b \leq_* a$ salvo a lo sumo si $b = \neg a$, en cuyo caso (y sólo en este caso) los grados pueden ser incomparables.

Definición 8.9 Diremos que un conjunto $A \subset \mathcal{N}$ es *autodual* si $A \equiv_* \neg A$ y, análogamente un grado $a \in \mathbb{G}_*$ es *autodual* si $a = \neg a$, de modo que los grados autoduales son los grados de los conjuntos autoduales.

En estos términos, los pares de grados formados por un grado no autodual y su grado complementario son los únicos pares de grados incomparables por la relación $\leq_*$. Para obtener una relación de orden total sólo tenemos que identificar estos pares. Podemos hacerlo mediante la relación

$$A \leq_*^- B \leftrightarrow A \leq_* B \vee A \leq_* \neg B.$$

Se trata de una relación reflexiva y transitiva que induce la relación de equivalencia

$$A \equiv_*^- B \leftrightarrow A \leq_*^- B \wedge B \leq_*^- A \leftrightarrow A \equiv_* B \vee A \equiv_* \neg B$$

Si representamos por $\mathbb{G}_*^-$ el conjunto cociente de $\mathcal{PN}$ respecto de esta relación de equivalencia, tenemos que cada grado débil $[A]_*^- = [A]_* \cup \neg[A]_*$ coincide con un grado fuerte autodual o bien con la unión de dos grados fuertes complementarios. (Esto nos permite hablar de *grados débiles autoduales* y *no autoduales*).

En otros términos, la aplicación $\mathbb{G}_* \longrightarrow \mathbb{G}_*^-$ dada por $[A]_* \mapsto [A]_*^-$ es suprayectiva y cada grado débil tiene una única antiimagen autodual o bien dos antiimágenes, que son grados (complementarios) incomparables.

En $\mathbb{G}_*^-$ está definida la relación de orden dada por $[A]_*^- \leq_*^- [B]_*^-$ si y sólo si $A \leq_*^- B$, pero ahora (suponiendo AD) tenemos que se trata de un orden total. En realidad se cumple mucho más que esto:

Teorema 8.10 (AD) $(\mathbb{G}_*^-, \leq_*^-)$ *es un conjunto bien ordenado.*

DEMOSTRACIÓN: Ya sabemos que $(\mathbb{G}_*^-, \leq_*^-)$ está totalmente ordenado. Por consiguiente, basta probar que no existe ninguna sucesión decreciente

$$\cdots A_3 <_*^- A_2 <_*^- A_1 <_*^- A_0$$

de conjuntos de $\mathbb{B}$, donde

$$A <_*^- B \leftrightarrow A \leq_*^- B \land B \not\leq_*^- A.$$

En tal caso, como $A_n \not\leq_L A_{n+1}$, resulta que I tiene una estrategia ganadora σ_n^0 en el juego de Lipschitz $J(A_n, A_{n+1})$, y como también $A_n \not\leq_L \neg A_{n+1}$, por otra parte I tiene una estrategia ganadora σ_n^1 para el juego $J(A_n, \neg A_{n+1})$.

Fijamos un $x \in 2^\omega$ y consideramos la concatenación de partidas descrita en la figura siguiente:

$$\begin{array}{cc|cccccccc}
\sigma_0^{x(0)} & \mathrm{I} & y_0^0 & & y_1^0 & & y_2^0 & & y_3^0 & \cdots \\
 & \mathrm{II} & & y_0^1 & & y_1^1 & & y_2^1 & & \\
\hline
\sigma_1^{x(1)} & \mathrm{I} & y_0^1 & & y_1^1 & & y_2^1 & & y_3^1 & \cdots \\
 & \mathrm{II} & & y_0^2 & & y_1^2 & & y_2^2 & & \\
\hline
\sigma_2^{x(2)} & \mathrm{I} & y_0^2 & & y_1^2 & & y_2^2 & & y_3^2 & \cdots \\
 & \mathrm{II} & & y_0^3 & & y_1^3 & & y_2^3 & & \\
\hline
\sigma_3^{x(3)} & \mathrm{I} & y_0^3 & & y_1^3 & & y_2^3 & & y_3^3 & \cdots \\
 & \mathrm{II} & & y_0^4 & & y_1^4 & & y_2^4 & & \\
\hline
\end{array}$$

En la partida n-sima, I juega con su estrategia $\sigma_n^{x(n)}$, mientras que II copia en la partida n-sima la última respuesta de I en la partida $n+1$-ésima. Llamemos $y_n(x) = \{y_k^n\}_{k\in\omega}$. Entonces

$$y_n(x) \notin A_n \leftrightarrow y_{n+1}(x) \in A_{n+1}^{x(n)},$$

donde $A_n^0 = A_n$ y $A_n^1 = \neg A_n$. Sea $Y = \{x \in 2^\omega \mid y_0(x) \in A_0\}$. Por 7.35 sabemos que Y tiene la propiedad de Baire.[4]

Veamos que si $x, x' \in 2^\omega$ difieren únicamente en su valor sobre $k \in \omega$, entonces $x \in Y \leftrightarrow x' \notin Y$. En efecto, observamos que $y_n(x)$ depende únicamente de $x(n), x(n+1), x(n+2), \ldots$, luego tenemos que $y_l(x) = y_l(x')$ para todo $l > k$. Así,

$$\begin{aligned} y_k(x) \notin A_k \leftrightarrow y_{k+1}(x) \in A_{k+1}^{x(k)} \leftrightarrow y_{k+1}(x') \in A_{k+1}^{x(k)} \\ \leftrightarrow y_{k+1}(x') \notin A_{k+1}^{x'(k)} \leftrightarrow y_k(x') \in A_k. \end{aligned}$$

[4]La aplicación $x \mapsto y_0(x)$ es claramente continua, por lo que si A_0 es un conjunto de Borel también lo es Y, y podemos afirmar que Y tiene la propiedad de Baire sin recurrir a AD.

A su vez,

$$y_{k-1}(x) \notin A_{k-1}(x) \leftrightarrow y_k(x) \in A_k^{x(k-1)} = A_k^{x'(k-1)}$$

$$\leftrightarrow y_k(x') \notin A_k^{x'(k-1)} \leftrightarrow y_{k-1}(x') \in A_{k-1}(x'),$$

y descendiendo de este modo llegamos a que $y_0(x) \in A_0 \leftrightarrow y_0(x') \notin A_0$.

Como Y tiene la propiedad de Baire, existe un abierto $U \subset 2^\omega$ tal que $Y \Delta U$ es de primera categoría. Si Y no es de primera categoría entonces $U \neq \varnothing$, y podemos sustituirlo por un abierto básico B_s, con $s \in 2^n$, de modo que $Y \cap B_s$ es de segunda categoría y $B_s \setminus (Y \cap B_s)$ es de primera categoría. Si Y es de primera categoría tomamos cualquier B_s, y entonces $Y \cap B_s$ es del primera categoría, luego $B_s \setminus (Y \cap B_s)$ es de segunda categoría.

Sea $\phi : 2^\omega \longrightarrow 2^\omega$ el homeomorfismo que intercambia la coordenada n-sima, de modo que deja invariante a B_s. Hemos probado que $\phi[Y] = \neg Y$, luego $\phi[Y \cap B_s] = B_s \setminus (Y \cap B_s)$, pero esto es absurdo, porque estos dos conjuntos tienen categoría distinta. ■

Por ejemplo, trivialmente $\varnothing \leq_* A$, para todo $A \subsetneq \mathcal{N}$ (basta tomar una función constante que tome su valor en $\mathcal{N} \setminus A$), mientras que, también trivialmente, $A \leq_* \varnothing \rightarrow A = \varnothing$. Esto se traduce en que $1 = \{\varnothing\}$ es un grado de Lipschitz y de Wadge, y es menor o igual que cualquier otro a excepción de $\neg 1 = \{\mathcal{N}\}$. Así pues, el grado mínimo de $\mathbb{G}_*^-$ se corresponde con un par de grados incomparables, 1 y $\neg 1$.

Resulta natural preguntarse cuál es el ordinal[5] de $\mathbb{G}_*^-$:

Teorema 8.11 (AD) $\operatorname{ord}(\mathbb{G}_*^-, \leq_*^-) = \Theta$.

DEMOSTRACIÓN: Sea $\psi : \mathbb{G}_L^- \longrightarrow \Omega$ la semejanza de $\mathbb{G}_L^-$ en su ordinal y recordemos la aplicación L construida en 8.3. Si $\psi([A]_L^-) = \alpha$, entonces la aplicación $\mathcal{N} \longrightarrow \alpha + 1$ dada por $x \mapsto \psi(L_x^{-1}[A])$ es suprayectiva, luego $\alpha < \Theta$. Por lo tanto, $\psi : \mathbb{G}_L^- \longrightarrow \Theta$ y por consiguiente $\operatorname{ord}(\mathbb{G}_L^-, \leq_L^-) \leq \Theta$.

Por otro lado, la aplicación $\mathbb{G}_W^- \longrightarrow \mathbb{G}_L^-$ que a cada grado de Wadge le asigna el menor grado de Lipschitz de sus elementos es inyectiva y conserva el orden. Por lo tanto, $\operatorname{ord}(\mathbb{G}_W^-, \leq_W^-) \leq \operatorname{ord}(\mathbb{G}_L^-, \leq_L^-) \leq \Theta$.

Observemos que si $f : \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{N}$ es continua, entonces $f \subset \mathcal{N} \times \mathcal{N}$ es un conjunto cerrado (por ejemplo, porque es la antiimagen de la diagonal de $\mathcal{N} \times \mathcal{N}$ a través de la aplicación $\mathcal{N} \times \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{N} \times \mathcal{N}$ dada por $(x, y) \mapsto (f(x), y)$). Por lo tanto, tomando un conjunto $\mathcal{N}$-universal $G \subset \mathcal{N}^3$ para $\mathbf{\Pi}_1^0(\mathcal{N} \times \mathcal{N})$, tenemos que $f = G_a$, para cierto $a \in \mathcal{N}$.

Esto nos permite definir una aplicación $\phi : \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{N}^\mathcal{N}$ cuya imagen está formada por todas las funciones continuas de $\mathcal{N}$ en sí mismo. Por simplicidad escribiremos $f_x = \phi(x)$. Consideremos ahora $J : \mathcal{PN} \longrightarrow \mathcal{PN}$ dada por

$$J(A) = \{0^\frown x \mid f_x(0^\frown x) \notin A\} \cup \{1^\frown x \mid f_x(1^\frown x) \in A\}.$$

[5]Naturalmente este teorema no es valido si lo restringimos a conjuntos de Borel. El ordinal θ del conjunto de los grados de Borel es mucho menor que Θ y lo calcularemos más adelante.

No puede ser $J(A) \leq_W A$, pues existiría $x \in \mathcal{N}$ tal que $J(A) = f_x^{-1}[A]$, pero

$$0^\frown x \in J(A) \leftrightarrow f_x(0^\frown x) \in A \leftrightarrow 0^\frown x \notin J(A),$$

contradicción, e igualmente descartamos que $J(A) \leq_W \neg A$. Por lo tanto, todo $A \in \mathcal{PN}$ cumple $A, \neg A <_W J(A)$.

Si $\alpha < \Theta$, existe una aplicación $g : \mathcal{N} \longrightarrow \alpha$ suprayectiva. Para cada $\delta < \alpha$ definimos recurrentemente

$$A_\delta = J(\{x \in \mathcal{N} \mid g(x_0^2) < \delta \wedge x_1^2 \in A_{f(x_0^2)}\}).$$

Así, si $\epsilon < \delta < \alpha$ se cumple que $A_\epsilon <_W A_\delta$. En efecto, si llamamos

$$B_\delta = \{x \in X^\omega \mid g(x_0^2) < \delta \wedge x_1^2 \in A_{f(x_0^2)}\},$$

tenemos que $B_\delta <_W J(B_\delta) = A_\delta$. Por otra parte, tomamos $u \in \mathcal{N}$ tal que $g(u) = \epsilon$ y consideramos $h : \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{N}$ dada por $h(x) = \langle u, x \rangle_2$, de modo que $h(x) \in B_\delta \leftrightarrow x \in A_\epsilon$, luego $A_\epsilon \leq_W B_\delta <_W A_\delta$.

Esto prueba que $\operatorname{ord}(\mathbb{G}_W^-, \leq_W^-) \geq \alpha$, para todo $\alpha < \Theta$, luego concluimos que

$$\Theta \leq \operatorname{ord}(\mathbb{G}_W^-, \leq_W^-) \leq \operatorname{ord}(\mathbb{G}_L^-, \leq_L^-) \leq \Theta.$$

■

Definición 8.12 Si $\phi : \mathbb{G}_*^- \longrightarrow \Theta$ es la semejanza de $\mathbb{G}_*^-$ en su ordinal, definimos el *rango* de un grado débil a como $\|a\| = 1 + \phi(a)$. A su vez podemos definir el *rango* de un grado fuerte a como el rango $\|a\| = \|a^-\|$ de su grado débil asociado, y también el *rango* de un conjunto $A \in \mathbb{B}$ como $\|A\| = \|[A]_*\|$.

Notemos que hemos sumado un 1 para hacer que $\|1\| = \|\neg 1\| = 1$. Esta modificación sólo afecta a los ω primeros rangos, pues $1 + \omega = \omega$.

Observemos que si $\mathbf{\Gamma}$ es una clase de subconjuntos de $\mathcal{N}$ cerrada para sustituciones continuas, esto significa que si $A \in \mathbf{\Gamma}$ y $B \leq_* A$ entonces $B \in \mathbf{\Gamma}$, luego todos los elementos de un grado q están en $\mathbf{\Gamma}$ o bien ninguno lo está, y si representamos el primer caso mediante $q \in \mathbf{\Gamma}$, además se cumple que si $p \leq_* q$ son dos grados y $q \in \mathbf{\Gamma}$, entonces también $p \in \mathbf{\Gamma}$. Más aún:

Teorema 8.13 (AD) *Sea $\mathbf{\Gamma} \subsetneq \mathcal{PN}$ una clase de subconjuntos de $\mathcal{N}$ cerrada para sustituciones continuas. Entonces existe $A \in \mathcal{PN}$ tal que*[6]

$$\mathbf{\Gamma} = \{B \in \mathcal{PN} \mid B <_W A\} \quad \textit{o bien} \quad \mathbf{\Gamma} = \{B \in \mathcal{PN} \mid B \leq_W A\}.$$

[6]Si restringimos este teorema a una clase de conjuntos de Borel debemos exigir que $\mathbf{\Gamma}$ no sea toda la σ-álgebra de Borel para poder concluir que A es un conjunto de Borel.

DEMOSTRACIÓN: Sea $q^- \in \mathbb{G}_W^-$ el menor grado que contiene un conjunto que no esté en $\mathbf{\Gamma}$. Distinguimos dos casos, según que q^- sea la unión de dos grados $q^- = q \cup \neg q$ o bien que $q^- = q$ sea un grado autodual. En el primer caso podemos elegir q de modo que $q \notin \mathbf{\Gamma}$, y esto se cumple trivialmente en el segundo caso.

Si q no es autodual, puede ocurrir que $\neg q \in \mathbf{\Gamma}$ o bien $\neg q \notin \mathbf{\Gamma}$. En el primer caso, tomamos $A \in \neg q$ y es claro que $\mathbf{\Gamma} = \{B \in \mathcal{PN} \mid B \leq_W A\}$. En el segundo caso tomamos $A \in q$ y es claro que $\mathbf{\Gamma} = \{B \in \mathcal{PN} \mid B <_W A\}$.

Por otra parte, si q es autodual, basta tomar $A \in q$ para que se cumpla la primera igualdad del enunciado. ■

El teorema anterior es válido igualmente para grados de Lipschitz, pero nos hemos restringido a grados de Wadge porque así es cierto el recíproco: toda clase expresable en una de las dos formas indicadas en el enunciado es cerrada para sustituciones continuas. Observemos además que si se cumple el teorema con $<_* A$ entonces la clase $\mathbf{\Gamma}$ es autodual, es decir, $\mathbf{\Gamma} = \neg\mathbf{\Gamma}$, mientras que si se cumple el teorema con $\leq_* A$, entonces

$$\neg\mathbf{\Gamma} = \{B \in \mathcal{PN} \mid B \leq_W \neg A\},$$

luego $\mathbf{\Gamma}$ es autodual si y sólo si lo es el grado $[A]_W$.

Definición 8.14 Si $a \in \mathbb{G}_W(\mathbb{B})$, definimos

$$\mathrm{In}_W(a) = \{B \in \mathcal{PN} \mid \bigvee A \in a(B \leq_W A)\}$$

Una clase $\mathbf{\Gamma}$ es *principal* si es de la forma

$$\mathbf{\Gamma} = \{B \in \mathcal{PN} \mid B \leq_W A\} = \mathrm{In}(a),$$

para cierto conjunto A (necesariamente en $\mathbf{\Gamma}$) o, equivalentemente, para cierto grado $a = [A]_W$. Se dice entonces que A (o a) es un *generador* de $\mathbf{\Gamma}$ o un conjunto (resp. grado) $\mathbf{\Gamma}$-*completo.*

Teorema 8.15 (AD) *Las clases $\mathbf{\Gamma} \subset \mathcal{PN}$ cerradas para sustituciones continuas y no autoduales son exactamente las clases principales generadas por conjuntos no autoduales de $\mathcal{PN}$. Además, cualquier $A \in \mathbf{\Gamma} \setminus \neg\mathbf{\Gamma}$ es un generador.*

DEMOSTRACIÓN: La primera parte es inmediata. Si $A \in \mathbf{\Gamma} \setminus \neg\mathbf{\Gamma}$, dado cualquier $B \in \mathbf{\Gamma}$, tiene que cumplir $B \leq_W A$, pues la alternativa es $\neg A \leq_W B$, con lo que $\neg A \in \mathbf{\Gamma}$ y $A \in \neg\mathbf{\Gamma}$. ■

Tenemos así que la jerarquía de Wadge ordena (bajo AD) todas las clases de conjuntos cerradas para sustituciones continuas, de modo que cada una de ellas constituye una sección inicial de la jerarquía completa. El teorema siguiente contiene algunas consecuencias elementales de este hecho:

Teorema 8.16 (AD) *Si $\mathbf{\Gamma}$ y $\mathbf{\Gamma}'$ son dos clases de subconjuntos de $\mathcal{N}$ cerradas para sustituciones continuas, entonces:*

a) $\mathbf{\Gamma} \subset \mathbf{\Gamma}'$ *o bien* $\neg\mathbf{\Gamma}' \subset \mathbf{\Gamma}$.

b) Si $\mathbf{\Gamma} \subsetneq \mathbf{\Gamma}'$ *entonces* $\mathbf{\Gamma} \cup \neg\mathbf{\Gamma} \subset \mathbf{\Gamma}' \cap \neg\mathbf{\Gamma}'$.

c) $\mathbf{\Gamma} \subset \mathbf{\Gamma}'$ *o* $\mathbf{\Gamma}' \subset \mathbf{\Gamma}$ *o* $\mathbf{\Gamma} = \neg\mathbf{\Gamma}'$.

DEMOSTRACIÓN: a) Sea A tal que

$$\mathbf{\Gamma} = \{B \in \mathcal{PN} \mid B <_W A\} \quad \text{o bien} \quad \mathbf{\Gamma} = \{B \in \mathcal{PN} \mid B \leq_W A\},$$

y sea A' que cumpla lo mismo para $\mathbf{\Gamma}'$. Si $[A]_W = [A']_W$, entonces $\mathbf{\Gamma} \subset \mathbf{\Gamma}'$ salvo que $\mathbf{\Gamma}'$ no sea principal y $\mathbf{\Gamma}$ sí que lo sea, en cuyo caso $\neg\mathbf{\Gamma}' = \mathbf{\Gamma}' \subset \mathbf{\Gamma}$. Si $[A]_W = \neg[A']_W$ tenemos $\neg\mathbf{\Gamma}' \subset \mathbf{\Gamma}$ salvo si $\mathbf{\Gamma}$ no es principal y $\mathbf{\Gamma}'$ sí que lo es, en cuyo caso $\mathbf{\Gamma} = \neg\mathbf{\Gamma} \subset \mathbf{\Gamma}'$. En otro caso, o bien $A <_W A'$ o bien $\neg A' <_W A$, de donde se siguen claramente las inclusiones.

b) Por a) o bien $\mathbf{\Gamma}' \subset \mathbf{\Gamma}$ o bien $\neg\mathbf{\Gamma} \subset \mathbf{\Gamma}'$, pero el primer caso no puede darse, luego $\mathbf{\Gamma} \cup \neg\mathbf{\Gamma} \subset \mathbf{\Gamma}'$, y el resto es obvio.

c) Se sigue de a) y b), pues si $\neg\mathbf{\Gamma}' \subset \mathbf{\Gamma}$ y no se da la igualdad, entonces $\mathbf{\Gamma}' \subset \mathbf{\Gamma}$. ■

Ejemplo Veamos cómo se distribuyen las primeras clases de Borel en la jerarquía de Wadge. Ya hemos visto que los dos primeros grados de Wadge son $1 = \{\varnothing\}$ y $\neg 1 = \{\mathcal{N}\}$. Éstas son las dos clases más elementales cerradas para sustituciones continuas. En otras palabras, los únicos subconjuntos de $\mathcal{N}$ de rango 1 son $\varnothing$ y $\mathcal{N}$.

Veamos ahora que los subconjuntos de rango 2 son los abiertos cerrados no triviales. En efecto, si A es cualquier abierto cerrado y B es cualquier conjunto distinto de $\varnothing$ o $\mathcal{N}$, se cumple $A \leq_W B$, pues para todo $x \in \mathcal{N}$ existe un $k \in \omega$ tal que $B_{x|_k} \subset A$ o bien $B_{x|_k} \subset \neg A$, luego una estrategia para II en $J_p(A, B)$ consiste en pasar hasta que las jugadas de I formen una sucesión finita s tal que $B_s \subset A$ o bien $B_s \subset \neg A$. A partir de ahí II empieza a jugar las componentes de un elemento de B o de uno de $\neg B$, según sea el caso.

Cuando A y B son ambos abiertos cerrados no triviales, concluimos que $A \equiv_W B$, luego todos están en el mismo grado y, por otra parte, es trivial que si $A \leq_W B$ y B es abierto cerrado, entonces A también es abierto cerrado. Esto prueba que el conjunto de los abiertos cerrados no triviales forman exactamente un grado de Wadge, obviamente autodual, y también hemos probado que es menor o igual que cualquier otro grado de Wadge distinto de 1 y $\neg 1$.

Más aún, los primeros cinco grados de Wadge son:

$$\begin{array}{cccc} \{\varnothing\} & & \mathbf{\Sigma}_1^0 \setminus \mathbf{\Pi}_1^0 & \\ & \mathbf{\Delta}_1^0 \setminus \{\varnothing, \mathcal{N}\} & & \cdots \\ \{\mathcal{N}\} & & \mathbf{\Pi}_1^0 \setminus \mathbf{\Sigma}_1^0 & \end{array}$$

En efecto, si A es un abierto y B no es un cerrado, una estrategia ganadora para II en $J_p(A, B)$ consiste en tomar un $y \in \overline{B} \setminus B$ e ir jugando las componentes de y mientras la sucesión s de las jugadas de I no cumpla $B_s \subset A$. Si esto llega a suceder al cabo de k jugadas, como $B_{y|_k} \cap B \neq \varnothing$, el jugador II puede tomar un y' en este conjunto (de modo que $y|_k = y'|_k$) y a partir de ese momento prolonga sus jugadas siguiendo a y' en lugar de a y.

Esto prueba que todos los abiertos no cerrados son equivalentes y, como todo conjunto reducible a un abierto tiene que ser abierto, concluimos que todo conjunto equivalente a un abierto no cerrado es abierto no cerrado (no puede ser cerrado porque los abiertos cerrados no triviales forman su propio grado). En suma, $\mathbf{\Sigma}_1^0 \setminus \mathbf{\Pi}_1^0$ es un grado, y su grado dual es $\mathbf{\Pi}_1^0 \setminus \mathbf{\Sigma}_1^0$. Del argumento también se sigue que estos dos grados son los inmediatamente posteriores al grado de los abiertos cerrados.

Así pues, los subconjuntos de $\mathcal{N}$ de rango 3 son los abiertos no cerrados y los cerrados no abiertos. Alternativamente, la clase $\mathbf{\Delta}_1^0$ está formada por los conjuntos de rango ≤ 2, mientras que los conjuntos de rango ≤ 3 son los de $\mathbf{\Sigma}_1^0 \cup \mathbf{\Pi}_1^0$.

Veremos más adelante que la siguiente clase de Borel, es decir, $\mathbf{\Delta}_2^0$ se extiende mucho más allá en la jerarquía de Wadge, pues está formada por todos los conjuntos de rango $< \omega_1$. ■

8.4 Algunas operaciones con grados

En esta sección introduciremos algunas operaciones que nos ayudarán a describir las jerarquías de Wadge y Lipschitz. Empezamos con las siguientes:

Definición 8.17 Si $A \subset \mathcal{N}$ y $s \in \omega^{<\omega}$ definimos[7]

$$s^\frown A = \{s^\frown x \mid x \in A\}, \qquad A/s = \{x \in \mathcal{N} \mid s^\frown x \in A\}.$$

Teorema 8.18 *Sean $A, B \subset \mathcal{N}$ y $s, t \in \omega^{<\omega}$.*

a) $A/s \leq_* A \leq_* s^\frown A$.

b) Si $\ell(s) \leq \ell(t)$ y $A \leq_* B$ entonces $s^\frown A \leq_* t^\frown B$.

c) Si $A \leq_* \neg A$ entonces $s^\frown A \leq_* \neg s^\frown A$.

Demostración: a) y b) Una estrategia ganadora para II tanto en el juego $J_*(A, s^\frown A)$ como en $J_*(A/s, A)$ consiste en jugar primero s y luego copiar (con retraso) las jugadas de I.

b) Sea σ una estrategia ganadora para II en $J_*(A, B)$. Para ganar en el juego $J_*(s^\frown A, t^\frown B)$, en el caso en que I empiece jugando s, II debe jugar t y luego

[7]Notemos que si A es un conjunto de Borel también lo son $s^\frown A$ y A/s. En efecto, si $A = \mathcal{N}$ entonces $s^\frown A = B_s \in \mathbf{\Sigma}_1^0$. En caso contrario tomamos $b \in \neg A$, y una estrategia ganadora para II en $J_p(s^\frown A, A)$ es pasar los primeros $\ell(s)$ turnos y luego copiar las jugadas de I o bien jugar b según si las primeras jugadas de I han sido s o no. Por lo tanto, $s^\frown A \leq_W A$. Por otra parte, el teorema 8.18 prueba que $A/s \leq_* A$.

aplicar la estrategia σ (con retraso) a las jugadas de I posteriores a las de s. Si en sus primeras jugadas I deja de seguir s, entonces II deja de seguir t y luego juega cualquier cosa.

Notemos, no obstante, que para grados de Wadge la hipótesis $\ell(s) \leq \ell(t)$ es innecesaria (salvo si $t = \varnothing$ y $B = \mathcal{N}$), pues II puede pasar hasta comprobar si I empieza jugando s o no.

c) Si II tiene una estrategia ganadora para $J_*(A, \neg A)$, para ganar el juego $J_*(s^\frown A, \neg s^\frown A)$ sólo tiene que hacer lo siguiente: si I empieza jugando s, entonces II juega también s y luego aplica su estrategia para $J(A, \neg A)$. Si en las primeras jugadas I deja de jugar lo marcado por s, entonces II termina de jugar s y luego juega un elemento de A. (Si $A = \varnothing$ el resultado es trivial.) ■

La propiedad b) del teorema anterior nos da que si $\ell(s) = \ell(t)$ y $[A]_L = [B]_L$ entonces $[s^\frown A]_L = [t^\frown B]_L$, por lo que podemos definir:

Definición 8.19 Si a es un grado de Lipschitz, llamamos $[n]^\frown a = [s^\frown A]$, donde $s \in \omega^{<\omega}$ cumple $\ell(s) = n$ y $a = [A]_L$.

Evidentemente, $[m+n]^\frown a = [m]^\frown([n]^\frown a)$.

Podríamos dar la definición también para grados de Wadge, pero sería trivial, pues el apartado b) del teorema anterior (junto con la observación de que la hipótesis sobre las longitudes es superflua en este caso) implican que (salvo si $A = \mathcal{N}$) $s^\frown A \equiv_W A$, por lo que tendríamos que $[n]^\frown a = a$. En cambio, la operación no es trivial sobre los grados de Lipschitz:

Teorema 8.20 *Si $a \in \mathbb{G}_L$ es un grado autodual y $n \in \omega$, entonces $a < [n]^\frown a$ y, suponiendo* AD*, se cumple que $[1]^\frown a$ es el menor grado mayor que a.*

Demostración: Sea $a = [A]_L$ y sea $s \in \omega^{<\omega}$. Como $A \leq_L \neg A$, el jugador II tiene una estrategia ganadora τ para $J(A, \neg A)$. Entonces I gana $J(s^\frown A, A)$ jugando s en sus primeras jugadas y luego aplicando τ (con retraso) sobre las jugadas de II. Por lo tanto II no gana este juego y $s^\frown A \not\leq_L A$, luego $a <_L [n]^\frown a$.

Tomemos ahora un $B <_L 0^\frown A$ y veamos que $B \leq_L A$. Como $0^\frown A \not\leq_L B$, también $0^\frown A \not\leq_L \neg B$, por el teorema anterior. Por AD, el jugador I tiene una estrategia ganadora σ en $J(0^\frown A, \neg B)$. Dicha estrategia tiene que exigir que la primera jugada sea 0, pues si I juega otra cosa entonces II gana la partida jugando un elemento de B (el caso $B = \varnothing$ es trivial). Por lo tanto, II gana $J(B, A)$ jugando $\sigma(0^\frown s)$ cuando el estado de la partida en su turno es s. ■

Observemos que 8.18 c) implica que si a es autodual, entonces $[n]^\frown a$ también lo es. Por lo tanto, hemos demostrado que el siguiente grado de Lipschitz tras un grado autodual es también autodual. El ejemplo al final de la sección anterior prueba que esto es falso para grados de Wadge.

Para calcular el grado siguiente tras un par de grados incomparables introducimos una nueva operación:

Definición 8.21 Si $A, B \subset \mathcal{N}$, definimos $A \oplus B = (0^\frown A) \cup (1^\frown A)$. Si $\{A_n\}_{n\in\omega}$ es una familia de subconjuntos de $\mathcal{N}$, definimos[8]

$$\bigoplus_{n\in\omega} A_n = \bigcup_{n\in\omega} (n^\frown A_n).$$

Obviamente, la primera definición es un caso particular de la segunda (tomando $A_n = \varnothing$ para $n \geq 2$).

Teorema 8.22 *Sea $\{A_n\}_{n\in\omega}$ una familia de subconjuntos de $\mathcal{N}$.*

a) $A_n \leq_* \bigoplus\limits_{n\in\omega} A_n$.

b) Si $\bigwedge n \in \omega\ A_n \leq_* A'_n$, *entonces* $\bigoplus\limits_{n\in\omega} A_n \leq_* \bigoplus\limits_{n\in\omega} A'_n$.

c) $\neg \bigoplus\limits_{n\in\omega} A_n \equiv_* \bigoplus\limits_{n\in\omega} \neg A_n$.

d) Si $j : \omega \longrightarrow \omega$ *suprayectiva,* $\bigoplus\limits_{n\in\omega} A_n \equiv_* \bigoplus\limits_{n\in\omega} A_{j(n)}$.

Demostración: a) Basta observar que $A_n = (\bigoplus\limits_{n\in\omega} A_n)/n$ y aplicar el teorema 8.18.

b) Ahora tenemos estrategias σ_n ganadoras para $J_*(A_n, A'_n)$ y la estrategia adecuada es mirar la primera jugada n de I, responder con n y luego aplicar la estrategia σ_n.

c) Los dos conjuntos son iguales.

d) La estrategia, si I empieza con n, es jugar $j(n)$ (para probar $\leq_*$) o una antiimagen de n por j (para probar $\geq_*$) y luego copiar las jugadas de I. ■

La propiedad b) implica que las sumas de grados estén bien definidas:

$$[A]_* \oplus [B]_* = [A \oplus B]_*, \qquad \bigoplus_{n\in\omega} [A_n]_* = [\bigoplus_{n\in\omega} A_n]_*.$$

La propiedad d) implica que si I es un conjunto numerable y $\{A_i\}_{i\in I}$ es una familia de subconjuntos de $\mathcal{N}$, podemos definir

$$\bigoplus_{i\in I} [A_i]_* = [\bigoplus_{n\in\omega} A_{j(n)}]_*,$$

donde $j : \omega \longrightarrow I$ es cualquier aplicación suprayectiva.

En el caso de los grados de Wadge, es fácil ver que la suma directa de grados no es sino su supremo:

Teorema 8.23 *Sea $\{a_i\}_{i\in I}$ una familia numerable en $\mathbb{G}_W$ y sea $a \in \mathbb{G}_W$ una cota superior, es decir, un grado tal que $\bigwedge i \in I\ a_i \leq_W a$. Entonces se cumple que* $\bigoplus\limits_{i\in I} a_i \leq_W a$.

[8] Obviamente la suma de conjuntos de Borel es de nuevo un conjunto de Borel.

DEMOSTRACIÓN: No perdemos generalidad si suponemos que $I = \omega$. Sea $a_n = [A_n]_W$, sea $a = [A]_W$ y sea $f_n : \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{N}$ continua tal que $f_n^{-1}[A] = A_n$. Definimos entonces $f : \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{N}$ mediante $f(n^\frown x) = f_n(x)$. Claramente es continua y $f^{-1}[A] = \bigoplus\limits_{n\in\omega} A_n$. ■

En el caso de grados de Lipschitz necesitamos imponer una restricción:

Teorema 8.24 (AD) *Sea $\{a_i\}_{i\in I}$ una familia numerable en $\mathbb{G}_*$ tal que ninguno de ellos sea mayor o igual que todos los demás. Entonces $\bigoplus\limits_{i\in I} a_i$ es autodual y es el menor grado estrictamente mayor que todos los a_i.*

DEMOSTRACIÓN: No perdemos generalidad si suponemos que $I = \omega$. Sea $a_n = [A_n]_*$. Veamos en primer lugar que la suma es autodual. Una estrategia para II en el juego $J_*(\bigoplus\limits_{n\in\omega} A_n, \bigoplus\limits_{n\in\omega} \neg A_n)$ es la siguiente: consideramos la primera jugada de I, digamos m. Entonces existe un n tal que $A_m \not\leq_* A_n$, por lo que $A_n \leq_* \neg A_m$, luego existe una estrategia τ para II en $J_*(A_n, \neg A_m)$. Lo único que tiene que hacer II es jugar m y luego aplicar τ.

Tenemos que $a_n <_* \bigoplus\limits_{n\in\omega} a_n$, porque si se diera la desigualdad opuesta todos los sumandos serían menores o iguales que a_n, en contra de lo supuesto. Basta probar que si $a_n <_* b = [B]_*$ entonces $\bigoplus\limits_{n\in\omega} a_n \leq_* b$.

Como $B \not\leq_* A_n$ el jugador I tiene una estrategia ganadora σ_n en $J_*(B, A_n)$. Entonces, una estrategia ganadora para II en $J(\bigoplus\limits_{n\in\omega} \neg A_n, B)$ consiste en esperar la primera jugada de I, digamos n y aplicar la estrategia σ_n. Como la suma es autodual, la desigualdad $\bigoplus\limits_{n\in\omega} \neg a_n \leq_* b$ equivale a $\bigoplus\limits_{n\in\omega} a_n \leq_* b$. ■

Nota: Para grados de Wadge, la restricción sobre que la familia no tenga máximo es necesaria para que a suma sea autodual, pues si a es un grado no autodual, entonces la suma $a \oplus a = a$ no es autodual. En el caso de grados de Lipschitz la situación es más delicada. Por ejemplo, de la propia definición de suma se sigue que $1 \oplus 1 = 1$, por lo que la suma no es estrictamente mayor que los sumandos. En cambio, si a es autodual se cumple que $a \oplus a = [1] \oplus a >_L a$. En efecto, para ganar en $J(A \oplus A, 0^\frown A)$ el jugador II sólo tiene que jugar un 0 y luego copiar las jugadas de I. Para ganar en $J(0^\frown A, A \oplus A)$ la estrategia es copiar las jugadas de I si la primera es un 0 y en caso contrario, jugar, por ejemplo, un 2 y luego cualquier cosa. ■

El teorema anterior se aplica en particular a las sumas $a\oplus\neg a$, donde $a \neq \neg a$, con lo que vemos que el grado siguiente a un par de grados incomparables es siempre un grado autodual. Combinando esto con la observación tras el teorema 8.20 concluimos:

Teorema 8.25 (AD) *Los grados autoduales de $\mathbb{G}_L^-$ son exactamente los grados sucesores.*

Por lo tanto, un grado no autodual debe ser el grado inicial, formado por el par $1, \neg 1$ o bien un grado límite. Sin embargo, del propio teorema 8.24 se sigue fácilmente que también hay grados límite autoduales.

El teorema anterior es falso para grados de Wadge, como se deduce del ejemplo final de la sección anterior. No obstante, el teorema 8.24 implica que el sucesor de un par de grados de Wadge incomparables es un grado autodual. Ahora conviene introducir un concepto:

Definición 8.26 Diremos que un grado $a \in \mathbb{G}_*$ es un *supremo numerable* si es el supremo de una familia numerable de grados que no tenga máximo.

Por el teorema 8.24 (suponiendo AD) los supremos numerables son de la forma $a = \bigoplus\limits_{i \in I} a_i$, donde I es un conjunto numerable y ningún a_i es mayor o igual que todos los demás. En realidad para grados de Wadge no hace falta suponer AD, pues podemos aplicar 8.23, pero necesitamos igualmente la hipótesis de determinación para concluir que los supremos numerables son autoduales.

Es importante destacar que los supremos numerables no sólo incluyen a los grados límite de cofinalidad numerable (es decir, grados cuyo rango es un ordinal límite de cofinalidad numerable), sino también a los grados sucesores de la forma $a \oplus \neg a$.

Con esto estamos en condiciones de determinar qué grados de Lipschitz son autoduales:

Teorema 8.27 (AD) *Un grado de $\mathbb{G}_L^-$ es autodual si y sólo si es un grado sucesor o bien un grado límite de cofinalidad numerable.*

Demostración: Ya hemos probado que los grados sucesores son todos autoduales, y sabemos que el grado inicial no es autodual, luego sólo falta estudiar los grados límite. Los grados límite de cofinalidad numerable son claramente supremos numerables, luego son autoduales. Consideremos ahora un grado límite autodual a y veamos que es un supremo numerable (con lo que tiene cofinalidad numerable).

Pongamos que $a = [A]_L$ y veamos que $A/n <_L A$. En caso contrario, como $A/n \leq_L A$, lo que tendríamos sería $A/n \equiv_L A$, luego, A/n sería autodual. Aplicamos entonces 8.20, que nos da que $A/n <_L n^\frown A/n \leq_L A$, contradicción. La última desigualdad se justifica, por ejemplo, con la siguiente estrategia para II en $J(n^\frown(A/n), A)$: si I empieza jugando n, entonces II copia sus jugadas, y en caso contrario II juega un elemento de fuera de A (no puede ser $A = \mathcal{N}$ porque no es autodual).

Ahora basta probar que a es el menor grado estrictamente mayor que los grados $[A/n]_L$. Esto es suficiente, porque implica a su vez que la familia $\{[A/n]\}_{n \in \omega}$ no puede tener un máximo elemento, ya que entonces a sería el siguiente a dicho máximo, cuando estamos suponiendo que es un grado límite. La conclusión es que a tiene cofinalidad numerable.

Supongamos, pues, que $\bigwedge n \in \omega\ A/n <_L B$. Como $B \not\leq_L A/n$, podemos elegir una estrategia ganadora σ_n para I en el juego $J(B, A/n)$. Entonces, una estrategia ganadora para II en $J(A, \neg B)$ consiste en esperar la primera jugada n de I y a partir de ahí aplicar la estrategia σ_n. Por lo tanto $A \leq_L \neg B$ y, como a es autodual, $a \leq_L [B]_L$. ■

Con esto concluimos que la jerarquía de Lipschitz tiene el aspecto que indica el esquema siguiente:

$$\begin{array}{ccccccc} \bullet & & \bullet & & \bullet & & \\ & \underbrace{\bullet\ \bullet\ \bullet\ \ \cdots}_{\omega_1} & & \underbrace{\bullet\ \bullet\ \bullet\ \ \cdots}_{\omega_1} & & \bullet\ \bullet\ \cdots \\ \bullet & & \bullet & & \bullet & & \end{array}$$

teniendo en cuenta que, por ejemplo, el supremo de los primeros ω grados no autoduales es autodual, etc.

Nos ocupamos ahora de los grados de Wadge sucesores. Ya sabemos que el sucesor de un grado no autodual es autodual. Ahora vamos a probar que el sucesor de un grado autodual no es autodual, de modo que los grados duales se alternan con los no autoduales.

Definición 8.28 Dado $B \subset \mathcal{N}$, definimos[9]

$$B^* = \{0^{(n)}{}^\frown(m+1)^\frown x \mid n, m \in \omega, x \in B\}, \qquad B^\circ = B^* \cup \{0\},$$

donde $0^{(n)}$ representa una sucesión de n ceros y 0 (en la definición de B°) representa la sucesión constante igual a 0.

El teorema siguiente prueba que estas dos operaciones entre conjuntos inducen operaciones entre grados:

Teorema 8.29 *Si $B \leq_W C$, entonces $B^* \leq_W C^*$ y $B^\circ \leq_W C^\circ$.*

Demostración: Sea τ una estrategia ganadora para II en el juego $J_p(B, C)$. Entonces, una estrategia ganadora II para el juego $J_p(B^*, C^*)$ (y también para $J_p(B^\circ, C^\circ)$) consiste en jugar 0 mientras I juegue 0 (de modo que si I juega sólo ceros II gana ambos juegos), jugar $n+1$ la primera vez que I juegue un $n+1$, y a partir de ahí aplicar τ. ■

Definición 8.30 Si $b = [B]_W \in \mathbb{G}_W$, definimos $b^* = [B^*]_W$ y $b^\circ = [B^\circ]_W$.

Notemos que $B = B^*/1 = B^\circ/1$, por lo que $b \leq_W b^*$ y $b \leq_W b^\circ$.

[9] Notemos que, si B es un conjunto de Borel, también lo son B^* y B°. En efecto, uno de los dos (según si $0 \in B$ o no) es la antiimagen de B por la aplicación $f : \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{N}$ que a cada sucesión no nula le quita sus primeros términos hasta el primero no nulo, y a la sucesión nula le asigna ella misma, y f es claramente medible Borel. En efecto, si $s \in \omega^{<\omega}$ no es idénticamente nula, $f^{-1}[B_s]$ es abierto, mientras que si s es idénticamente nula la antiimagen es la unión de un abierto y $\{0\}$, luego es $\mathbf{\Sigma}^1_2$.

Teorema 8.31 *Si b es un grado de Wadge supremo numerable, entonces se cumple $b <_W b^*$ y $b <_W b^\circ$, y b^*, b° son incompatibles.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $b = [B]_W$ y sea $\{A_n\}_{n\in\omega}$ una sucesión de conjuntos tal que $B = \bigoplus\limits_{n\in\omega} A_n$, pero $A_n <_W B$ para todo n.

Supongamos que $b^* \leq_W b$, de modo que II tiene una estrategia ganadora τ para $J_p(B^*, B)$. Consideremos la partida en la que I empieza jugando k ceros hasta que II deja de pasar y juega n. Si a partir de ahí I juega x y II juega y, para que II gane la partida se tiene que cumplir que $x \in B$ si y sólo si $y \in A_n$, lo que prueba que II tiene una estrategia ganadora para $J_p(B, A_n)$, luego $B \leq_W A_n$, contradicción. Así pues, $b <_W b^*$.

Ahora basta probar que B^* y B° son incomparables, pues esto ya implica que $B <_W B^\circ$.

Supongamos que II tiene una estrategia ganadora para $J_p(B^*, B^\circ)$. Nuevamente, I puede jugar ceros hasta que II haga su primera jugada distinta de 0 (si juega siempre ceros pierde). A partir de ese momento razonamos como en el caso anterior para concluir que $B \leq_W B^* \leq_W A_{n+1}$, contradicción.

En $J_p(B^\circ, B^*)$ hacemos que I juegue ceros hasta que II realice su primera jugada no nula $k+1$ y luego otra jugada cualquiera n. Concluimos que $B^\circ \leq_W A_n$, luego $B \leq_W A_n$ y de nuevo tenemos una contradicción. ■

Teorema 8.32 (AD) *Si $b \in \mathbb{G}_W$ es un grado autodual y $b <_W c$, entonces $b^* \leq_W c$ o bien $b^\circ \leq_W c$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $b = [B]_W$, $c = [C]_W$, de modo que $B <_W C$. No puede suceder que $\bigwedge y \in \mathcal{N} \bigvee k \in \omega\ C/(y|_k) \leq_W B$, pues en tal caso II ganaría el juego $J_p(C, B)$ sin más que ir pasando hasta que las jugadas de I cumplieran $C/(y|_k) \leq_W B$ y a partir de ahí aplicar una estrategia ganadora para $J_p(C/(y|_k), B)$. Así pues, existe un $y \in \mathcal{N}$ tal que $C/(y|_k) \not\leq_W B$ y, como B es autodual, esto implica $B <_W C/(y|_k)$, para todo k.

Supongamos que $y \in \neg C$ y veamos que $B^* \leq_W C$. Una estrategia ganadora para II en $J_p(B^*, C)$ consiste en ir jugando y mientras I juegue ceros. Si I juega constantemente ceros, es claro que II gana la partida. Si I hace una jugada no nula, de modo que sus jugadas hasta el momento son $0^{(n)\frown}(m+1)$, II juega una vez más según y, con lo que sus jugadas son $y|_{n+2}$, y a partir de ahí usa una estrategia ganadora para $J_p(B, C/(y|_{n+2}))$, lo que le garantiza que las jugadas de I estarán en B^* si y sólo si las suyas están en C.

El mismo razonamiento prueba que si $y \in C$ entonces $B^\circ \leq_W C$. ■

Combinando los dos teoremas anteriores (teniendo en cuenta que los grados supremos numerables son autoduales), tenemos:

Teorema 8.33 (AD) *Si b es un grado supremo numerable, entonces los grados b^* y b° forman el par de grados duales inmediatamente siguientes a b.*

Notemos que esto se aplica al caso en que $b = c \oplus \neg c$, donde c es un grado no autodual. Con esto tenemos probado que la jerarquía de Wadge empieza con este aspecto:

$$\begin{array}{ccccccccccccc} \bullet & & \bullet & & \bullet & & \bullet & & & \bullet & & \bullet & \\ & \bullet & & \bullet & & \bullet & & \cdots & \bullet & & \bullet & & \cdots \\ \bullet & & \bullet & & \bullet & & \bullet & & & \bullet & & \bullet & \end{array}$$

y se prolonga según este patrón los primeros ω_1 niveles (los grados límite de cofinalidad numerable son siempre autoduales, porque son grados supremos numerables). Veremos en la sección siguiente que, al igual que sucede en la jerarquía de Lipschitz, los grados de cofinalidad no numerable son, en cambio, dobles.

8.5 Comparación de las jerarquías

En esta sección estudiamos la aplicación $\pi : \mathbb{G}_L \longrightarrow \mathbb{G}_W$ definida mediante $[A]_L \mapsto [A]_W$. Más precisamente, tenemos dos aplicaciones conectadas a su vez por un diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{G}_L^- \arrow[r, "\pi"] & \mathbb{G}_W^- \\ \mathbb{G}_L \arrow[u, "i"] \arrow[r, "\pi"'] & \mathbb{G}_W \arrow[u, "i"'] \end{tikzcd}$$

donde $i(a) = a^-$. Todas las aplicaciones son suprayectivas y conservan el orden. Los fallos en la inyectividad de i (es decir, los casos de grados fuertes incomparables que se funden en un único grado débil) los hemos determinado completamente en la sección precedente para el caso de los grados de Lipschitz y sólo nos falta probar que los grados de Wadge límite de cofinalidad no numerable son autoduales. En cuanto a π, como la relación $\equiv_L$ es más fina que $\equiv_W$, es claro que cada grado de Wadge q es unión de uno o más grados de Lipschitz (concretamente, $q = \bigcup \pi^{-1}[q]$).

Por ejemplo, según el teorema 8.20, si $[A]_L$ es un grado autodual, entonces $[A]_L < [0^\frown A]_L$. En cambio, justo antes del teorema hemos observado que $[A]_W = [0^\frown A]_W$. Suponiendo AD sabemos que $[0^\frown A]_L$ es el grado siguiente a $[A]_L$, luego hemos probado que cada grado de Lipschitz autodual tiene la misma imagen por π que su grado siguiente.

Más aún: Si q_λ es el grado de rango λ en $\mathbb{G}_L^-$ y existe una sucesión $\{\alpha_n\}_{n\in\omega}$ cofinal creciente en λ tal que $\bigwedge n \in \omega\ \pi(q_{\alpha_n}) = q$, para un cierto $q = [B]_W^-$, entonces $\pi(q_\lambda) = q$.

En efecto, sea $q_{\alpha_n} = [A_n]_L^-$ y sea $A = \bigoplus\limits_{n\in\omega} A_n$, de modo que $[A]_L^- = q_\lambda$, por el teorema 8.24. El teorema 8.23 nos da que $A \leq_W B$, y trivialmente $B \leq_W A_0 \leq_W A$, luego $\pi(q_\lambda) = [A]_W^- = [B]_W^- = q$.

Ahora es claro que si $q_\alpha \in \mathbb{G}_L^-$ es un grado autodual, todos los grados $\{q_{\alpha+\delta}\}_{\delta<\omega_1}$ tienen la misma imagen por π (se prueba trivialmente por inducción sobre δ).

Observemos que las imágenes por π de grados de Lipschitz autoduales son trivialmente grados de Wadge autoduales, y acabamos de ver que en dichas imágenes se funden al menos $\aleph_1$ grados de Lipschitz. Con los grados no autoduales, la situación es muy distinta:

Teorema 8.34 (AD) *Si $[A]_W \in \mathbb{G}_W$ no es autodual, entonces $[A]_W = [A]_L$.*

Demostración: Obviamente $[A]_L \subset [A]_W$. Supongamos que existe un conjunto $B \in [A]_W \setminus [A]_L$. No puede ser $B \equiv_L \neg A$, porque entonces también $B \equiv_W \neg A$ y concluiríamos que $[A]_W$ es autodual. Por lo tanto, o bien $B <_L A$ o bien $A <_L B$.

Si se cumple $B <_L A$, entonces también $\neg B <_L A$, luego $B, \neg B \leq_W A$, luego $B \oplus \neg B \leq_W A \leq_W B \leq_W B \oplus \neg B$, luego resulta que $A \equiv_W B \oplus \neg B$, luego $[A]_W$ es, autodual, contradicción.

Si $A <_L B$, también $\neg A <_L B$, luego $A \oplus \neg A \leq_W B \leq_W A \leq_W A \oplus \neg A$, luego $A \equiv_W A \oplus \neg A$ y de nuevo tenemos una contradicción. ■

Los casos considerados hasta aquí dejan abierta la posibilidad de que un grado de Lipschitz no autodual tenga por imagen un grado de Wadge autodual. Lo cierto es que tal caso no puede darse, si bien este hecho no es trivial en absoluto:

Teorema 8.35 (Steel, Van-Wessep) (AD) *Dado $q \in \mathbb{G}_L$, si $\pi(q)$ es autodual, entonces q también lo es.*

Demostración: Sea $q = [A]_L$ y supongamos que $A \leq_W \neg A$ pero $A \not\leq_L \neg A$. Sea σ_1 una estrategia ganadora para II en $J_p(A, \neg A)$, y sea σ_2 una estrategia ganadora para I en $J(A, \neg A)$. Por otra parte, sea σ_0 la estrategia de II para $J_p(A, \neg A)$ consistente en copiar las jugadas de I (con lo que, siguiendo esta estrategia, II nunca pasa, y en realidad es también una estrategia para $J(A, \neg A)$).

Vamos a definir una sucesión $\{m_n\}_{n\in\omega}$ estrictamente creciente de números naturales con $m_0 = 0$ de manera que, para todo $w \in 3^\omega$ tal que $w(m_n) \in 2$ y $w(i) = 2$ siempre que $i \notin \{m_n \mid n \in \omega\}$, los juegos

$$J_i = \begin{cases} J_p(A, \neg A) & \text{si } i = m_n, \\ J(A, \neg A) & \text{si } i \neq m_n \end{cases}$$

se pueden encadenar, en el sentido de que se puede emplear la estrategia $\sigma_{w(0)}$ en el juego J_0 contra las jugadas generadas con la estrategia $\sigma_{w(1)}$ en el juego J_1 contra las jugadas generadas con la estrategia $\sigma_{w(2)}$ en el juego J_2, y así sucesivamente, de modo que todas las partidas se completan.

La razón por la que las partidas podrían "estancarse" es que la estrategia σ_1 permite pasar turno. Explicaremos la situación y la forma exacta en la que pretendemos encadenar los infinitos juegos al mismo tiempo que explicamos la construcción de la sucesión $\{m_n\}_{n\in\omega}$. Observemos la tabla siguiente:

$$\begin{array}{r|c|ccc} m_0 = 0 & \mathrm{II} & - & - & a_0^0 \\ 1 & \mathrm{I} & a_0^1 & a_1^1 & a_2^1 \\ 2 & \mathrm{I} & a_0^2 & a_1^2 & \\ 3 & \mathrm{I} & a_0^3 & & \end{array}$$

Sus filas 0 y 1 constituyen el inicio de una partida de J_0 en la que II usa la estrategia $\sigma_{w(0)}$, las filas 1 y 2 constituyen el inicio de una partida de J_1 en la que I usa la estrategia σ_2, etc.

Establecemos $m_0 = 0$, lo que significa que la estrategia $\sigma_{w(0)}$ es una estrategia para II que debemos emplear en el juego J_0. Por lo tanto, para empezar dicho juego, necesitamos que empiece antes el juego J_1. Para ello exigimos que $m_1 > 1$, con lo que el juego J_1 empezará con la jugada a_0^1 establecida por la estrategia σ_2.

Por ponernos en el peor de los casos, supongamos que $\sigma_{w(0)} = \sigma_1$ y que esta estrategia pasa en su primer turno. Entonces necesitamos una nueva jugada de J_1, lo cual requiere a su vez una jugada de J_2. Para ello establecemos que $m_1 > 2$, con lo que J_2 empieza con $a_0^2 (= a_0^1)$, lo que permite obtener a_1^1 mediante la estrategia σ_2. Con esto II está en condiciones de jugar de nuevo en J_0. Si también pasa esta vez, repetimos el proceso: establecemos que $m_1 > 3$, con lo que J_3 empieza con la jugada $a_0^3 (= a_0^2)$ determinada por la estrategia σ_2, a partir de la cual podemos generar a_1^2 y a_2^1, lo que pone de nuevo a II en condición de jugar en J_0. En la tabla se considera el caso en que ya no pasa, sino que juega a_0^0.

Observemos que, en general, tras un número finito de pasos (es decir, de fijar la estrategia σ_2 para la fila i-ésima de la tabla) tenemos que obtener una jugada de II en la primera fila, porque en caso contrario habríamos obtenido una partida para $J_p(A, \neg A)$ jugada con la estrategia σ_1 en la que II perdería por pasar indefinidamente, pero σ_1 es una estrategia ganadora, y esto no puede ocurrir.

Así pues, existe un (mínimo) $m_1 > 0$ ($m_1 = 4$ en el caso reflejado en la tabla) tal que si II juega con σ_1 en la primera fila, el mero hecho de que sea I el jugador de las filas $0 < i < m_1$ garantiza que II realiza al menos una jugada en la primera fila. Notemos que con dicho m_1 esto último es cierto trivialmente si II juega con σ_0, pues esta estrategia no pasa nunca. Por ejemplo, en el caso considerado en la tabla, que determina $m_1 = 4$, si II emplea la estrategia σ_0 en la primera fila el resultado es:

$$\begin{array}{r|c|ccc} m_0 = 0 & \mathrm{II} & a_0^0 & a_1^0 & a_2^0 \\ 1 & \mathrm{I} & a_0^1 & a_1^1 & a_2^1 \\ 2 & \mathrm{I} & a_0^2 & a_1^2 & \\ 3 & \mathrm{I} & a_0^3 & & \\ m_1 = 4 & \mathrm{II} & & & \end{array}$$

y también tenemos al menos una jugada en la primera fila (de hecho tenemos tres). En resumen: fijando adecuadamente un $m_1 > 0$ podemos garantizar que en la primera fila habrá al menos una jugada independientemente de que la estrategia empleada por II sea σ_0 o σ_1.

Similarmente, a base de asignar a I suficientes filas posteriores a m_1 podemos garantizar que II jugará al menos una vez en la fila m_1. La figura siguiente muestra el caso en que II pasa tres veces antes de decidirse a jugar.

$$\begin{array}{r|c|cccccccc}
m_0 = 0 & \mathrm{II} & - & - & a_0^0 & & & & & - \\
1 & \mathrm{I} & a_0^1 & a_1^1 & a_2^1 & & & & & a_3^1 \\
2 & \mathrm{I} & a_0^2 & a_1^2 & & & & & a_2^2 & \\
3 & \mathrm{I} & a_0^3 & & & & & a_1^3 & & \\
m_1 = 4 & \mathrm{II} & - & - & - & a_0^4 & & & & \\
5 & \mathrm{I} & a_0^5 & a_1^5 & a_2^5 & a_3^5 & & & & \\
6 & \mathrm{I} & a_0^6 & a_1^6 & a_2^6 & & & & & \\
7 & \mathrm{I} & a_0^7 & a_1^7 & & & & & & \\
8 & \mathrm{I} & a_0^8 & & & & & & &
\end{array}$$

La jugada a_0^4 es la que I necesita en la tercera fila para responder a_1^3, que a su vez genera a_2^2 y a_3^1. Esto pone a II en situación de jugar en la primera fila, y la tabla considera el caso en que pasa. Si se da este caso, podemos añadir más filas a cargo del jugador I hasta forzar una nueva jugada de II en la fila m_1, con la cual podemos poner de nuevo a II en situación de jugar en la primera fila, y repetimos el proceso hasta que deje de pasar.

En definitiva, podemos tomar $m_2 > m_1$ suficientemente grande como para forzar a que en las filas m_0 y m_1 haya al menos dos jugadas. Si hacemos las cuentas en el peor de los casos, es decir, en el caso en que la estrategia de II es σ_1 tanto en m_0 como en m_1, concluimos que el m_2 así calculado garantiza lo exigido también en cualquier otro caso. Similarmente podemos definir un $m_3 > m_2$ que garantice que II juegue al menos tres veces en la fila m_0, al menos dos veces en la fila m_1 y al menos una vez en la fila m_2.

Es claro que procediendo de este modo podemos construir toda la sucesión $\{m_n\}_{n\in\omega}$ de forma que para todo $z \in 2^\omega$, si llamamos $w \in 3^\omega$ a la sucesión dada por

$$w(i) = \begin{cases} \sigma_{z(n)} & \text{si } i = m_n, \\ 2 & \text{si } i \neq m_n, \end{cases}$$

entonces existe una sucesión $\{a^i(z)\}_{i\in\omega}$ en $\mathcal{N}$ tal que $a_i(z) = (\sigma_2 * a_{i+1}(z))_{\mathrm{I}}$ si $w(i) = 2$ y $a_i(z) = (a_{i+1}(z) * \sigma_{w(i)})_{\mathrm{IIp}}$ si $w(i) \in 2$.

Entonces, cuando $w(i) = 0, 2$ se cumple que $a_i(z) \in A \leftrightarrow a^{i+1}(z) \in A$, mientras que si $w(i) = 1$ entonces $a^i(z) \in A \leftrightarrow a^{i+1}(z) \notin A$.

Definimos $h : 2^\omega \longrightarrow \mathcal{N}$ mediante $h(z) = a^0(z)$, que es una aplicación continua (lipschitziana, de hecho), pues $z|_n$ determina $w|_{m_n}$, que a su vez determina a $h(z)|_n$. Definimos $Y = h^{-1}[A] \subset 2^\omega$. Es claro entonces que si $z, z' \in 2^\omega$ se diferencian únicamente en su valor sobre un $k \in \omega$, entonces $z \in Y \leftrightarrow z' \notin Y$, pues obviamente $a^i(z) = a^i(z')$ para todo $i > k$, luego $a^0(z)$ y $a^0(z')$ deben estar en casos opuestos.

Ahora basta razonar exactamente igual que en 8.10 que Y tiene la propiedad de Baire, y llegar a la misma contradicción. ■

Así pues, la imagen de un grado de Lipschitz autodual es (trivialmente) autodual, y la imagen de un grado de Lipschitz no autodual es un grado de Wadge no autodual (por el teorema anterior). En resumen, π conserva la autodualidad y la no autodualidad. Ahora ya podemos probar:

Teorema 8.36 (AD) *Se cumple:*

a) Si $q \in \mathbb{G}_W^-$ es un grado autodual, entonces su grado sucesor no es autodual, y viceversa.

b) Los grados límite en $\mathbb{G}_W^-$ son autoduales si su cofinalidad es numerable y no autoduales en caso contrario.

Demostración: a) Pongamos que $q = \pi(q_\alpha)$ donde $q_\alpha \in \mathbb{G}_L^-$ es el grado de Lipschitz de rango α. Si q es autodual, sabemos que q_α también lo es.

Sabemos que todos los grados $q_{\alpha+\delta}$, con $\delta < \omega_1$ tienen la misma imagen por π, mientras que $q_{\delta+\omega_1}$ ya no tiene la misma imagen, porque es un grado no autodual, luego su imagen también es no autodual. Concluimos que $\pi(q_{\delta+\omega_1})$ es el sucesor de $q = \pi(q_\alpha)$, luego no es autodual.

Recíprocamente, si q no es autodual, entonces sabemos que q_α tampoco lo es, pero $q_{\alpha+1}$ sí que lo es (por ser sucesor), luego $\pi(q_{\alpha+1})$ también es autodual, luego es el grado siguiente a q.

b) Sea q un grado de Wadge límite, y sea λ el mínimo ordinal que cumpla $q = \pi(q_\lambda)$. Tiene que ser un ordinal límite, pues si fuera sucesor, digamos $\lambda = \alpha + 1$, entonces $q = \pi(q_{\alpha+1})$ sería el sucesor de $\pi(q_\alpha)$. Se cumple que q tiene cofinalidad numerable si y sólo si la tiene λ, pues si $\{\alpha_n\}_{n\in\omega}$ es cofinal en λ, entonces $\{\pi(q_{\alpha_n})\}_{n\in\omega}$ es cofinal en q, con $\pi(q_{\alpha_n}) < q$ (por la minimalidad de λ), y si $\{c_n\}_{n<\omega}$ es cofinal en q, entonces $c_n = \pi(q_{\alpha_n})$, con $\alpha_n < \lambda$ y la sucesión $\{\alpha_n\}_{n\in\omega}$ es cofinal en λ. Por lo tanto, q es autodual si y sólo si lo es q_λ, si y sólo si λ tiene cofinalidad numerable, si y sólo si la tiene q. ■

Una consecuencia no trivial del teorema 8.34 es la siguiente:

Teorema 8.37 (AD) *Si $A \in \mathcal{PN}$ cumple $[A]_W \neq \neg[A]_W$, entonces*

$$\{B \in \mathcal{PN} \mid B \leq_L A\} = \{B \in \mathcal{PN} \mid B \leq_W A\}.$$

Demostración: Supongamos que $B \leq_W A$, pero $B \not\leq_L A$, entonces, o bien $[B]_L = \neg[A]_L$ o bien $[A]_L \leq_L [B]_L$. En el primer caso $\neg A \leq_W B \leq_W A$, en contradicción con que A no es autodual. En el segundo caso $[A]_W = [B]_W$, pero el teorema 8.34 implica entonces que $[A]_L = [B]_L$ y tenemos de nuevo una contradicción. ■

A su vez de aquí extraemos otra consecuencia:

Notemos que toda clase $\mathbf{\Gamma}$ cerrada para sustituciones continuas definida sobre los subconjuntos de $\mathcal{N}$ se puede considerar definida sobre los subconjuntos de $\mathcal{N}^s$ a través de cualquier homeomorfismo $\mathcal{N} \cong \mathcal{N}^s$. En particular podemos hablar de conjuntos $\mathcal{N}$-universales para $\mathbf{\Gamma}(\mathcal{N})$.

Teorema 8.38 (AD) *Si $\mathbf{\Gamma} \subset \mathcal{PN}$ es una clase cerrada para sustituciones continuas y no es autodual, entonces tiene un conjunto $\mathcal{N}$-universal para $\mathbf{\Gamma}(\mathcal{N})$. Además, la imagen en $\mathcal{N}$ de cualquiera de ellos por un homeomorfismo $\mathcal{N}^2 \cong \mathcal{N}$ es $\mathbf{\Gamma}$-completa.*

Demostración: Sea $A \subset \mathcal{N}$ un conjunto $\mathbf{\Gamma}$-completo (necesariamente no autodual). Recordemos la función L dada por el teorema 8.3 y definamos

$$U = \{(x, y) \in \mathcal{N}^2 \mid L_y(x) \in A\}.$$

Entonces U es la antiimagen de A por la función L (vista como función de dos variables, que es continua), luego, si $f : \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{N}^2$ es cualquier homeomorfismo, tenemos que $f^{-1}[U] = (f \circ L)^{-1}[A] \leq_W A$, luego $f^{-1}[U] \in \mathbf{\Gamma}$, luego $U \in \mathbf{\Gamma}$ por definición de la extensión de $\mathbf{\Gamma}$ a $\mathcal{N}^2$.

Ahora observamos que $U_y = L_y^{-1}[A]$, luego, por 8.37,

$$\{U_y \mid y \in \mathcal{N}\} = \{B \in \mathbf{\Gamma} \mid B \leq_L A\} = \{B \in \mathbf{\Gamma} \mid B \leq_W A\} = \mathbf{\Gamma}.$$

Esto prueba que U es $\mathcal{N}$-universal para $\mathbf{\Gamma}(\mathcal{N})$.

Ahora, si U es cualquier conjunto $\mathcal{N}$-universal para $\mathbf{\Gamma}(\mathcal{N})$, existe un $y \in \mathcal{N}$ tal que $U_y = A$. Por lo tanto, la composición $\mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{N}^2 \xrightarrow{f} \mathcal{N}$ dada por $x \mapsto (x, y)$ seguida de un homeomorfismo prueba que $A \leq_W f[U]$, luego $f[U]$ es $\mathbf{\Gamma}$-completo. ■

Veamos otra aplicación:

Teorema 8.39 (AD) *Si $\mathbf{\Delta} \subset \mathcal{PN}$ es una clase autodual cerrada para sustituciones $\mathbf{\Sigma}_2^0$-medibles, entonces existe un ordinal límite λ tal que*

$$\mathbf{\Delta} = \{B \in \mathcal{PN} \mid \|B\| < \lambda\}.$$

Demostración: Por el teorema 8.13 sabemos que existe un conjunto A tal que

$$\mathbf{\Delta} = \{B \in \mathcal{PN} \mid B <_W A\} \quad \text{o bien} \quad \mathbf{\Delta} = \{B \in \mathcal{PN} \mid B \leq_W A\},$$

y, según las observaciones posteriores, en el segundo caso A debe ser autodual. Basta descartar este segundo caso, pues en el primero se cumple el teorema con $\lambda = \|A\|$. Si A es autodual, entonces $a = [A]_W$ debe ser un supremo numerable. En efecto, o bien $[A]_W^-$ es un grado sucesor, en cuyo caso su anterior no puede ser autodual, por 8.36, luego $a = b \oplus \neg b$, para cierto $b <_W a$ (con lo que a es supremo numerable), o bien $[A]_W^-$ es un grado límite de cofinalidad numerable, luego igualmente a es un supremo numerable. El teorema 8.33 implica entonces que $a <_W a^*$, luego $A^* \notin \mathbf{\Delta}$.

Sin embargo, podemos probar también que $A^* \in \mathbf{\Delta}$, ya que en la nota al pie de la definición 8.28 hemos probado que A^* es la antiimagen de A por una aplicación $\mathbf{\Sigma}_2^0$-medible. ■

El teorema anterior se aplica (sin necesidad de AD) a las clases $\mathbf{\Delta}_\alpha^0$ para $2 \leq \alpha < \omega_1$ así como a la clase $\mathbf{\Delta}_1^1$ de los conjuntos de Borel y (con AD) a todas las clases $\mathbf{\Delta}_n^1$.

En efecto, todas ellas son autoduales y cerradas para sustituciones $\mathbf{\Sigma}_2^0$-medibles. En efecto, si $f : \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{N}$ es $\mathbf{\Sigma}_2^0$-medible, tenemos que $f^{-1}[\mathbf{\Sigma}_1^0] \subset \mathbf{\Sigma}_2^0$ por definición de $\mathbf{\Sigma}_2^0$-medible, luego $f^{-1}[\mathbf{\Pi}_1^0] \subset \mathbf{\Pi}_2^0$, de donde se sigue inmediatamente que $f^{-1}[\mathbf{\Sigma}_2^0] \subset \mathbf{\Sigma}_2^0$ y $f^{-1}[\mathbf{\Pi}_2^0] \subset \mathbf{\Pi}_2^0$. A partir de aquí una simple inducción prueba que $f^{-1}[\mathbf{\Sigma}_\alpha^0] \subset \mathbf{\Sigma}_\alpha^0$ y $f^{-1}[\mathbf{\Pi}_\alpha^0] \subset \mathbf{\Pi}_\alpha^0$ para $2 \leq \alpha < \omega_1$. En particular $f^{-1}[\mathbf{\Delta}_\alpha^0] \subset \mathbf{\Delta}_\alpha^0$. Respecto de las clases $\mathbf{\Delta}_n^1$, sabemos que son cerradas para sustituciones de Borel. Así pues,

$$\mathbf{\Delta}_\alpha^0 = \{B \in \mathcal{PN} \mid \|B\| < \lambda\}.$$

Si $\alpha = 1$ sabemos que esto se cumple con $\lambda = 3$, y ahora hemos probado que si $\alpha \geq 2$ el ordinal λ debe ser un ordinal límite. En ambos casos, los conjuntos de rango λ son los $\mathbf{\Sigma}_\alpha^0$ completos y sus complementarios, los $\mathbf{\Pi}_\alpha^0$-completos. Lo mismo se aplica a $\mathbf{\Delta}_1^1$ y, bajo AD, a las clases $\mathbf{\Delta}_n^1$.

Calcularemos los ordinales λ que determinan la distribución de las clases $\mathbf{\Delta}_\alpha^0$ (luego también $\mathbf{\Sigma}_\alpha^0$ y $\mathbf{\Pi}_\alpha^0$) en la jerarquía de Wadge, para lo cual serán útiles las consideraciones siguientes:

Definición 8.40 (AD) Llamaremos $\{r_\alpha\}_{1\leq\alpha<\Theta}$ a la sucesión de grados de Wadge autoduales.

Notemos que, según el teorema 8.11 el ordinal del conjunto de todos los grados de Wadge (débiles) es Θ, y esto implica que el ordinal del conjunto de los grados de Wadge autoduales es también Θ, tal y como está implícito en la definición anterior. En efecto, más en general, si $\{q_\alpha\}_{1\leq\alpha<\Theta}$ es la sucesión de todos los grados de Wadge débiles, $\theta \leq \Theta$ es cualquier ordinal límite y

$$S = \{\alpha \in \theta \mid 1 \leq \alpha \wedge q_\alpha \text{ es autodual}\},$$

entonces $\operatorname{ord} S = \theta$. En efecto, sea $T = \{\lambda \in \theta \mid \lambda = 0 \vee \lambda \text{ es un ordinal límite}\}$. Para cada $\lambda \in T$ sea $A_\lambda = \{\lambda + n \mid n \in \omega\}$ y sea

$$A'_\lambda = \begin{cases} \{\lambda + 2n + 1 \mid n \in \omega\} & \text{si } \lambda = 0 \vee \operatorname{cf} \lambda > \aleph_0, \\ \{\lambda + 2n \mid n \in \omega\} & \text{si } \operatorname{cf} \lambda = \aleph_0. \end{cases}$$

Teniendo en cuenta el teorema 8.36, es claro que

$$\theta = \bigcup_{\lambda \in T} A_\lambda, \qquad S = \bigcup_{\lambda \in T} A'_\lambda,$$

así como que ambas uniones son disjuntas y que $\lambda < \lambda'$ implica que todo elemento de A_λ es menor que todo elemento de $A_{\lambda'}$. Además, tenemos que $\operatorname{ord}(A_\lambda) = \operatorname{ord}(A'_\lambda) = \omega$, por lo que la unión de las semejanzas entre estos pares de conjuntos es una semejanza entre θ y S. ■

En particular, el ordinal del conjunto de los grados (débiles) de conjuntos $\mathbf{\Delta}^0_\alpha$ o $\mathbf{\Delta}^1_1$ (y, bajo AD, de los de conjuntos $\mathbf{\Delta}^1_n$) es el mismo que el del conjunto de los grados autoduales en dichas clases.

8.6 Más operaciones con grados de Wadge

En esta sección introduciremos nuevas operaciones con grados que nos permitirán localizar la clase $\mathbf{\Delta}^0_2$ en la jerarquía de Wadge.

Definición 8.41 Si $A, B \subset \mathcal{N}$, definimos[10]

$$A + B = \{s^{+\frown}0^\frown x \mid s \in \omega^{<\omega} \land x \in A\} \cup \{y^+ \mid y \in B\},$$

donde y^+, s^+ es la sucesión (finita o infinita) que resulta de sumar 1 a cada componente de y, s.

El teorema siguiente nos permite convertir esta suma de conjuntos en una suma de grados:

Teorema 8.42 *Si $A \leq_W A'$ y $B \leq_W B'$, entonces $A + B \leq_W A' + B'$.*

Demostración: Sean τ' y τ'' estrategias ganadoras para II en los juegos $J_p(A, A')$ y $J_p(B, B')$. Entonces una estrategia ganadora para $J_p(A+B, A'+B')$ es la siguiente: mientras I no juegue ningún 0, II resta 1 a las jugadas de I, aplica la estrategia τ'' y suma 1 al resultado (así, si I nunca juega ningún 0, la sucesión x de sus jugadas estará en $A+B$ si y sólo si x^- (el resultado de restar 1 a todas ellas) está en B, si y sólo si y^- está en B', si y sólo si $y \in A' + B'$), y si I juega un primer 0, entonces II juega otro 0 y a partir de ese momento aplica la estrategia τ' a las jugadas de I. En este caso $x \in A + B$ si y sólo si la sucesión que resulta de "olvidar" las jugadas hasta el primer 0 está en A, si y sólo si la sucesión que resulta de "olvidar" las jugadas de II hasta el primer 0 está en A', si y sólo si $y \in A' + B'$. ■

Definición 8.43 Definimos la suma de dos grados de Wadge como

$$[A]_W + [B]_W = [A + B]_W.$$

[10]Observemos que si A y B son conjuntos de Borel también lo es $A + B$. En efecto, la aplicación $f : \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{N}$ que resta uno a cada componente no nula de cada sucesión es claramente continua y

$$\{y^+ \mid y \in B\} = f^{-1}[B] \cup \{y \in \mathcal{N} \mid \bigwedge n \in \omega\ y(n) \neq 0\},$$

claramente de Borel. La primera parte de la definición de $A + B$ es de Borel porque es unión numerable de los conjuntos de Borel $s^{+\frown}0^\frown A$.

El teorema siguiente explica por qué hemos llamado 1 y $\neg 1$ a los primeros grados de Wadge en lugar de 0 y $\neg 0$:

Teorema 8.44 *Si $b \in \mathbb{G}_W$, entonces $b^* = b + 1$, $b^\circ = b + \neg 1$.*

Demostración: Sea $b = [B]_W$. Entonces

$$B + \varnothing = \{s^{+\frown}0^\frown x \mid s \in \omega^{<\omega}, x \in B\},$$

Una estrategia ganadora para II en $J_p(B^*, B + \varnothing)$ es jugar 1 mientras las jugadas de I son 0 (así si I siempre juega 0 es claro que II gana la partida) y en cuanto I juegue algo diferente de 0 entonces II responde con un 0 y a partir de ahí copia las jugadas de I. Esto prueba que $B^* \leq B + \varnothing$.

Para ganar en $J_p(B + \varnothing, B^*)$, el jugador II sólo tiene que jugar 0 mientras I no juegue 0, y si I juega un 0 entonces II juega 1 y a partir de ahí copia las jugadas de I. Esto prueba que $b^* = b + 1$.

Por otra parte,

$$B + \mathcal{N} = \{y^+ \mid y \in \mathcal{N}\} \cup \{s^{+\frown}0^\frown x \mid s \in \omega^{<\omega}, x \in B\}.$$

Es fácil ver que exactamente las mismas estrategias que le valían a II para los dos juegos precedentes le valen también para $J_p(B^\circ, B + \mathcal{N})$ y $J_p(B + \mathcal{N}, B^\circ)$. ■

La suma de grados no es conmutativa, pero sí asociativa:

Teorema 8.45 *Para todos los grados a, b, c, se cumple $(a+b)+c = a+(b+c)$.*

Demostración: Sean $a = [A]_W$, $b = [B]_W$, $c = [C]_W$. Una estrategia ganadora para II en $J_p(A + (B + C), (A + B) + C)$ consiste en restar 1 a las jugadas de I mientras sean distintas de $0, 1$; Si I juega un 1, entonces II juega un 0 y pasa a copiar las jugadas de I; si I juega un 0 (antes que un 1), entonces II juega dos ceros seguidos y pasa a copiar las jugadas de I (con una de retraso).

Así, si I juega x^{++}, entonces II juega x^+ y gana la partida; si I juega $s^{++\frown}1^\frown x^+$, entonces II juega $s^{+\frown}0^\frown x^+$ y también gana; si I juega en cambio $s^{++\frown}1^\frown t^{+\frown}0^\frown x$, entonces II juega $s^{+\frown}0^\frown t^{+\frown}0^\frown x$ y también gana; si I juega $s^{++\frown}0^\frown x$, entonces II juega $s^{+\frown}00^\frown x$ y también gana. Y no hay más posibilidades.

Para ganar el juego $J_p((A + B) + C, A + (B + C))$ el jugador II debe sumar 1 a las jugadas de I mientras no sean nulas, y si I juega un 0, entonces II juega un 1 y pasa a copiar las jugadas de I. ■

Otras propiedades básicas son las siguientes:

Teorema 8.46 *Sean b, c y $\{d_n\}_{n\in\omega}$ grados de Wadge. Entonces*

a) $\bigoplus\limits_{n\in\omega}(b + d_n) = b + \bigoplus\limits_{n\in\omega} d_n$.

b) $\neg(b + c) = \neg b + \neg c$.

Demostración: Sean $b = [B]_W$, $c = [C]_W$, $d_n = [D_n]_W$. Veamos que

$$\bigoplus_{n\in\omega}(B + D_n) \equiv_W B + \bigoplus_{n\in\omega} D_n.$$

Para ganar en $J_p(\bigoplus\limits_{n\in\omega}(B + D_n), B + \bigoplus\limits_{n\in\omega} D_n)$, lo único que necesita hacer II es sumar 1 a la primera jugada de I y copiar las siguientes. Para el juego $J_p(B + \bigoplus\limits_{n\in\omega} D_n, \bigoplus\limits_{n\in\omega}(B + D_n))$ la estrategia es restar 1 a la primera jugada de I (si no es nula) o jugar 00 (si es nula) y a continuación copiar las jugadas de I (con una de retraso en el segundo caso).

Por otra parte, $\neg(B + C) = \neg B + \neg C$. ■

Veamos ahora que la suma es simplificable por la derecha:

Teorema 8.47 *Dados grados de Wadge b, d y d', si b es un supremo numerable, entonces $b <_W b + d$ y*

$$b + d \leq_W b + d' \leftrightarrow d \leq_W d',$$

$$b + d = b + d' \to d = d',$$

$$b + d < b + d' \to d < d'.$$

Demostración: Sabemos que $1 \leq_W d \vee \neg 1 \leq_W d$, luego $b + 1 \leq_W b + d$ o bien $b + \neg 1 \leq_W b + d$, es decir, $b^* \leq_W b + d$ o bien $b^\circ \leq_W b + d$. Por 8.31 concluimos que $b <_W b + d$.

De la segunda parte conocemos ya una implicación. Para probar la otra sean $b = [B]_W$, $d = [D]_W$, $d' = [D']_W$ y supongamos que $B + D \leq_W B + D'$. Sea τ una estrategia ganadora para II en el juego $J_p(B + D, B + D')$. Veamos que, si II sigue esta estrategia, no puede ser el primero en jugar un 0. En efecto, si cuando I ha jugado s^+ las jugadas de II fueran $t^+\frown 0$, entonces tendríamos que $(B + D)/t^+ \leq_W (B + D')/t^+\frown 0$, pero esto equivale a $B + D/t \leq_W B$, y esto contradice a la parte del teorema ya probada.

Entonces, una estrategia para II en $J_p(D, D')$ es jugar una partida auxiliar sumando 1 a las jugadas de I, aplicar la estrategia τ y restar 1 a sus jugadas para la partida principal. De este modo, si I ha jugado x en la partida principal, en la auxiliar ha jugado x^+, con lo que II habrá jugado en ésta y^+ y habrá jugado y en la principal. Así, $x^+ \in B + D \leftrightarrow y^+ \in B + D'$, luego $x \in D \leftrightarrow y \in D'$. Esto prueba que II gana la partida principal.

Las propiedades restantes son consecuencias inmediatas de las ya probadas. ■

Los grados también se pueden restar:

Teorema 8.48 (AD) *Si $b, c \in \mathbb{G}_W$ de modo que b es un grado supremo numerable y $b < c$, entonces existe un $d \in \mathbb{G}_W$ tal que $b + d = c$.*

Demostración: Sean $b = [B]_W$ y $c = [C]_W$. Sea

$$E = \{x \in \mathcal{N} \mid \bigwedge k \in \omega\ C/x|_k \not\leq_W B\}.$$

Notemos que E es cerrado (sin el $\bigwedge k$ sería trivialmente abierto y cerrado, luego E es una intersección de cerrados). Además $E \neq \varnothing$ pues en caso contrario II podría ganar el juego $J_p(C, B)$ sin más que pasar hasta que las jugadas de I cumplieran $C/x|_k \leq_W B$ y a partir de ahí emplear una estrategia ganadora para $J_p(C/x|_k, B)$). Por 1.4 existe una retracción $r : \mathcal{N} \longrightarrow E$. Sea $D = r^{-1}[C]$ (de modo que $D \cap E = C \cap E$) y vamos a ver que $b + [D]_W = c$.

En primer lugar probamos que $C \leq_W B + D$, para lo cual consideramos la estrategia siguiente de II para $J_p(C, B + D)$: mientras las jugadas de I tengan una extensión en E, el jugador II suma 1 a cada jugada de I (así, si I termina con una sucesión de jugadas $x \in E$, el jugador II habrá jugado x^+, y claramente habrá ganado la partida); si llega un punto en que las jugadas de I ya no admiten extensión a E, esto significa que para cualquier $x \in \mathcal{N}$ que prolongue a las jugadas de I en ese punto existe un $k \in \omega$ tal que $C/x|_k \leq_W B$, y entonces II sólo tiene que jugar 0 y pasar hasta que las jugadas de I cumplan $C/s \leq_W B$. A partir de ese instante aplica una estrategia ganadora para $J_p(C/s, B)$, de modo que si I acaba con $s^\frown x$, entonces II acaba con una partida de la forma $t^{+\frown}0^\frown y$, donde $x \in C/s \leftrightarrow y \in B$ o, equivalentemente, $s^\frown x \in C \leftrightarrow t^{+\frown}0^\frown y \in B + D$.

Veamos ahora que $B + D \leq_W C$. En primer lugar observamos que, como $r : \mathcal{N} \longrightarrow E$ es continua, está inducida por una función $\phi : \omega^{<\omega} \longrightarrow T$, donde $T \subset \omega^{<\omega}$ es un árbol bien podado tal que $E = [T]$. Entonces, la estrategia para II en $J_p(D, C)$ obtenida a partir de esta ϕ tiene la propiedad adicional de que $(x*\tau)_{\mathrm{II}} \in E$ para todo $x \in \mathcal{N}$. Teniendo esto en cuenta, una estrategia ganadora para II en $J_p(B + D, C)$ consiste en jugar una partida auxiliar restando 1 a las jugadas de I y aplicando τ, mientras las jugadas de I no sean nulas (así, si I nunca juega 0 y sus jugadas forman la sucesión x^+, entonces II ha jugado un y tal que $x \in D \leftrightarrow y \in C$, pero $x \in D$ equivale a $x^+ \in B+D$ y II gana la partida); en caso de que I juegue un 0, sabemos que las jugadas de II hasta ese momento (digamos t) admiten una extensión a E, luego $C_t \not\leq_W B$, luego $B \leq_W C_t$, y II sólo tiene que seguir una estrategia ganadora para $J_p(B, C_t)$, pues si I juega $s^{+\frown}0^\frown x$, entonces la jugada y de II obtenida a partir de x con dicha estrategia cumple $t^\frown y \in C \leftrightarrow x \in B \leftrightarrow s^{+\frown}0^\frown x \in B + D$. ■

Ahora probamos que la suma de grados se puede iterar para definir el producto de un grado por un ordinal:

Definición 8.49 Si a es un grado de Wadge, definimos $a\alpha$ para todo ordinal $1 \leq \alpha < \omega_1$ mediante

$$a \cdot 1 = a, \quad a(\alpha + 1) = a\alpha + a, \quad a\lambda = \bigoplus_{1 \leq \delta < \lambda} a\delta.$$

Una forma de unificar los dos últimos casos de la definición es observar que

$$a\alpha = \bigoplus_{1 \leq \delta < \alpha} (a\delta + a)$$

En efecto, si tomamos esta igualdad como definición, vemos que

$$a(\alpha+1) = \bigoplus_{1\leq\delta<\alpha+1}(a\delta+a) = \sup\{\bigoplus_{1\leq\delta<\alpha}(a\delta+a), a\alpha+a\}$$

$$= \sup\{a\alpha, a\alpha+a\} = a\alpha+a,$$

$$a\lambda = \bigoplus_{1\leq\delta<\lambda}(a\delta+a) = \bigoplus_{1\leq\delta<\lambda}a(\delta+1) = \bigoplus_{1\leq\delta<\lambda}a\delta,$$

pues en la última igualdad hemos añadido $a\cdot 1 = a \leq a+a = a\cdot 2$, luego la suma (que es el supremo de los grados) no se modifica. Como las propiedades de la definición anterior caracterizan una única operación, concluimos que las dos definiciones son equivalentes.

Más en general, si $\{\delta_n\}_{n\in\omega}$ es cofinal en λ, tenemos que

$$a\lambda = \bigoplus_{n\in\omega}a\delta_n,$$

pues $\bigoplus\limits_{n\in\omega}a\delta_n = \bigoplus\limits_{\delta<\lambda}a\delta$. Para probar esto tenemos en cuenta que si $\alpha \leq \beta$ entonces $a\alpha \leq_W a\beta$, lo cual es inmediato por inducción sobre β.

El teorema siguiente se demuestra sin dificultad por inducción transfinita:

Teorema 8.50 $a(\alpha+\beta) = a\alpha+a\beta, \qquad a(\alpha\beta) = (a\alpha)\beta.$

Teorema 8.51 *Si $a\in\mathbb{G}_W$ es un supremo numerable y $1\leq\alpha<\omega_1$, entonces $a\alpha$ también es un supremo numerable.*

Demostración: Sea $a = \bigoplus\limits_n a_n$. Razonamos por inducción sobre α. Para $\alpha = 1$ es obvio. Si $\alpha = \beta+1$, entonces $a\beta$ es un supremo numerable por hipótesis de inducción, luego

$$a(\beta+1) = a\beta+a = \bigoplus_n(a\beta+a_n)$$

por 8.46 y $a\beta+a_n <_W a\beta+a$ por 8.47.

Si α es un límite entonces $a\alpha = \bigoplus\limits_{\delta<\alpha}a\delta$ y, usando 8.47 y la hipótesis de inducción,

$$a\delta <_W a\delta+a = a(\delta+1) \leq_W a\alpha.$$

■

Veamos ahora cómo construir grados límite que no sean supremos numerables:

Definición 8.52 Si $B\subset\mathcal{N}$, definimos[11]

$$B^\sharp = \{x^+ \mid x\in B\}\cup\{s^\frown 0^\frown x^+ \mid s\in\omega^{<\omega}\wedge x\in B\},$$

$$B^\flat = B^\sharp\cup\{x\in\mathcal{N} \mid \bigwedge n\in\omega\bigvee m\in\omega(n\leq m\wedge x(m)=0)\}.$$

[11]Dejamos al lector la prueba de que si B es de Borel también lo son $B^\sharp$ y $B^\flat$. Es muy similar a la correspondiente a la suma $A+B$.

Como es habitual, empezamos probando el resultado que nos permite pasar a operaciones sobre grados:

Teorema 8.53 *Si $B \leq_W C$, entonces $B^\sharp \leq_W C^\sharp$ y $B^\flat \leq_W C^\flat$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea τ una estrategia ganadora para II en el juego $J_p(B, C)$. Entonces, una estrategia ganadora en $J_p(B^\sharp, C^\sharp)$ consiste en jugar una partida auxiliar en la que las jugadas de I son una unidad menor que sus jugadas en la partida principal (mientras sean no nulas) y las jugadas de II en la partida principal son una unidad más que sus jugadas en la partida auxiliar. Si I juega un 0, entonces II juega también 0 mientras I siga jugando ceros y empieza una nueva partida auxiliar con la primera jugada no nula que haga I. La misma estrategia sirve para $J_p(B^\flat, C^\flat)$. ■

Definición 8.54 Para cada grado $b = [B]_W$, definimos los grados $b^\sharp = [B^\sharp]_W$ y $b^\flat = [B^\flat]_W$.

Observemos que, de las propias definiciones, se sigue que $B^\sharp = B^\sharp + B$ y $B^\flat = B^\flat + B$, luego $b^\sharp = b^\sharp + b$ y $b^\flat = b^\flat + b$.

Teorema 8.55 *Para todo grado b y todo ordinal $1 \leq \alpha < \omega_1$, se cumple que $b\alpha \leq_W b^\sharp$ y $b\alpha \leq_W b^\flat$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $b = [B]_W$. Probamos el teorema por inducción sobre α. Si $\alpha = 1$ hay que probar que $B \leq_W B^\sharp$ y $B \leq_W B^\flat$. La estrategia ganadora para II en el juego correspondiente consiste en sumar 1 a cada jugada de I.

Si el resultado es cierto para todo $\delta < \alpha$, entonces $b\delta \leq_W b^\sharp, b^\flat$, luego

$$b\alpha = \bigoplus_{1 \leq \delta < \alpha} (b\delta + b) \leq_W \bigoplus_{1 \leq \delta < \alpha} (b^\sharp + b) = b^\sharp,$$

pues $b^\sharp + b = b^\sharp$. Lo mismo sucede con $b^\flat$. ■

Ahora necesitamos un resultado técnico:

Teorema 8.56 *Si $A \leq_W B^\sharp$ y $A \leq_W B^\flat$, entonces existe una estrategia ganadora para* II *en $J_p(A, B^\sharp)$ tal que las jugadas de* II *decididas según ella nunca tienen infinitos ceros.*

DEMOSTRACIÓN: Sean τ_0 y τ_1 estrategias ganadoras para II en los juegos $J_p(A, B^\sharp)$ y $J_p(A, B^\flat)$, y vamos a diseñar una nueva estrategia τ para $J_p(A, B^\sharp)$. Para ello jugamos dos partidas auxiliares, en una de las cuales II usa la estrategia τ_0 y en la otra τ_1. Las jugadas de II en la partida principal empiezan siendo (por ejemplo) las de la primera partida auxiliar, hasta que aparece el primer 0. A partir de ese momento II pasa a jugar las primeras jugadas de la segunda partida auxiliar, hasta que aparezca el siguiente 0, en cuyo caso retoma las respuestas de la primera partida, y así sucesivamente.

x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	$\cdots$
y_0	y_1	y_2	0	z_0	z_1	0	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	0	z_3	z_4	$\cdots$
x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	$\cdots$
y_0	y_1	y_2	0	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	0	y_{10}	y_{11}	y_{12}	y_{13}	y_{14}	$\cdots$
x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	$\cdots$
z_0	z_1	0	z_3	z_4	z_5	z_6	0	z_8	z_9	z_{10}	z_{11}	z_{12}	z_{13}	0	$\cdots$

La clave está en que las jugadas y, z de II en las dos partidas auxiliares no pueden tener ambas infinitos ceros, pues si y tiene infinitos ceros, entonces $y \notin B^\sharp$, luego $x \notin A$, luego $z \notin B^\flat$, luego z no tiene infinitos ceros. Por lo tanto, tras un número finito de oscilaciones entre ambas estrategias, las jugadas de II en la partida principal seguirán todas la misma estrategia, sin tomar nunca el valor 0.

Además, τ es una estrategia ganadora para II, pues la jugada de II está en $B^\sharp$ si y sólo si tras el último 0 es de la forma b^+, con $b \in B$, lo que equivale a que, tras el último 0, o bien y o bien z sea de la forma b^+ con $b \in B$, lo cual equivale a que $y \in B^\sharp$ o $z \in B^\flat$ (teniendo en cuenta que en el segundo caso z no puede tener infinitos ceros), y esto equivale a que $x \in A$. ■

Con esto estamos en condiciones de probar que $b^\sharp$ y $b^\flat$ son los supremos de los grados $b\alpha$:

Teorema 8.57 *Si $a \leq_W b^\sharp$ y $a \leq_W b^\flat$, entonces existe $1 \leq \alpha < \omega_1$ tal que $a \leq_W b\alpha$.*

Demostración: Sean $[A]_W = a$, $[B]_W = b$ y sea τ una estrategia ganadora para II en el juego $J_p(A, B^\sharp)$ que, según el teorema anterior, puede tomarse con la condición de que no produzca nunca jugadas con infinitos ceros. Para cada $\alpha < \omega_1$ definimos P_α como el conjunto de sucesiones $s \in \omega^{<\omega}$ tales que si $s' \supset s$ y la respuesta por τ cuando I juega s' tiene más ceros que la respuesta cuando sólo ha jugado s, entonces $s' \in P_\delta$ para cierto $\delta < \alpha$.

Observemos en primer lugar que todo $s \in \omega^{<\omega}$ está en un P_α. Para ello observamos antes que s está en un P_α si y sólo si toda extensión de s que fuerce a II a jugar un 0 más está en un P_α. Una implicación es obvia, y para la otra, si s tiene esta propiedad, como tiene una cantidad numerable de extensiones, podemos encontrar un $\alpha < \omega_1$ tal que todas las extensiones de s que fuerzan a II a jugar un 0 más están en un P_δ con $\delta < \alpha$, luego $s \in P_\alpha$. Entonces, si s no está en ningún P_α, tiene una extensión que fuerza a II a jugar un 0 más y que no está en ningún P_α, la cual tiene una extensión que fuerza a II a jugar un 0 más y que no está en ningún P_α, y de este modo podemos construir una sucesión de jugadas x para I que fuerzan a II a jugar infinitos ceros, contradicción.

A continuación probamos por inducción que si $s \in P_\alpha$ entonces se cumple $[A/s]_W \leq b(\alpha + 1)$. Aplicando esto a $s = \varnothing$ obtenemos la conclusión.

Consideremos el caso $\alpha = 0$. Notemos que P_0 es el conjunto de $s \in \omega^{<\omega}$ tales que, cuando I juega s, a partir de ese momento II ya nunca más necesitará jugar un 0. Veamos, pues, que $A/s \leq_W B$. Pongamos que la respuesta de II a s es de la forma $u^\frown 0^\frown t^+$ (entendiendo que puede ser simplemente t^+). Entonces una estrategia para II en $J_p(A/s, B/t)$ consiste en anteponer s a las jugadas de I y responder con las jugadas que siguen a $u^\frown 0^\frown t^+$ al aplicar la estrategia τ restándoles 1 (pues sabemos que van a ser no nulas). Así, si I juega x y la respuesta de II es y, tenemos que $x \in A/s$ si y sólo si $s^\frown x \in A$, si y sólo si $u^\frown 0^\frown t^{+\frown} y^+ \in B^\sharp$, si y sólo si $t^\frown y \in B$, si y sólo si $y \in B/t$, luego $[A/s]_W \leq_W [B/t]_W \leq b$.

Supongamos ahora que $\alpha > 0$ y que el resultado es cierto para todo $\delta < \alpha$, y supongamos que $s \in P_\alpha$. Sea T el conjunto de sucesiones de $\omega^{<\omega}$ que extienden a s y que fuerzan a II a jugar al menos un 0 más que en su respuesta a s. Podemos suponer que $T \neq \varnothing$, pues en caso contrario $s \in P_0$. Sea $\{w_i\}_{i\in\omega}$ una enumeración de los elementos de T (con repeticiones, si T es finito), y sea $C = \bigoplus\limits_{i\in\omega} A/w_i$.

Cada w_i está en un P_{δ_i} con $\delta_i < \alpha$, luego por hipótesis de inducción $[A/w_i]_W \leq b(\delta_i + 1) \leq b\alpha$, luego $[C]_W \leq b\alpha$ y $C + B \leq_W b(\alpha + 1)$. Basta probar que $A/s \leq_W C + B$. Para ello consideramos el juego $J_p(A/s, C + B)$. Pongamos que la respuesta a s según τ es de la forma $u^\frown 0^\frown t^+$ (entendiendo que puede ser simplemente t^+). La estrategia para II en el juego que estamos considerando consiste, como antes, en anteponer s a las jugadas de I y responder con las jugadas según τ que siguen a $u^\frown 0$ restándoles 1 mientras sean no nulas. De este modo, si τ no exige nunca jugar un 0 y las jugadas de I y II han sido x e y^+, tenemos que

$$x \in A/s \leftrightarrow s^\frown x \in A \leftrightarrow u^\frown 0^\frown y^+ \in B^\sharp \leftrightarrow y \in B \leftrightarrow y^+ \in C + B.$$

Por lo tanto, II gana la partida. Supongamos ahora que llega un punto en que I ha jugado s' y τ exige jugar un 0, es decir que $s^\frown s'$ es una extensión de s que exige a II jugar un cero más que s. Esto significa que $s^\frown s' \in T$, o también que $s^\frown s' = w_i$ para cierto i. Entonces $A/(s^\frown s') \leq_W C$, y II (después de jugar el 0 requerido por τ) puede continuar la partida con una estrategia para el juego $J_p(A/(s^\frown s'), C)$. De este modo, si I ha terminado jugando $s'^\frown x$ y II ha jugado $t^{+\frown} 0^\frown y$, se cumple que

$$s'^\frown x \in A/s \leftrightarrow x \in A/(s^\frown s') \leftrightarrow y \in C \leftrightarrow t^{+\frown} 0^\frown y \in C + B,$$

luego II también gana la partida. ■

Falta probar que realmente $b^\sharp$ y $b^\flat$ son grados distintos:

Teorema 8.58 *Si b es un supremo numerable, entonces $b^\sharp \not\leq_W b^\flat$ y $b^\flat \not\leq_W b^\sharp$.*

DEMOSTRACIÓN: Si $b^\sharp \leq_W b^\flat$, como también $b^\sharp \leq_W b^\sharp$, por el teorema anterior $b^\sharp \leq_W b\alpha$, para cierto α, pero entonces

$$b^\sharp = b\alpha <_W b\alpha + b = b(\alpha + 1) \leq_W b^\sharp,$$

contradicción. Lo mismo sucede si se da la otra desigualdad. ■

Teorema 8.59 (AD) *Si b es un supremo numerable, entonces $b^\sharp$ y $b^\flat$ son grados duales incompatibles y son los supremos del conjunto de grados $b\alpha$, con $1 \leq \alpha < \omega_1$.*

Demostración: Sólo hay que ver que si $b\alpha \leq_W c$ para todo α, entonces $b^\sharp \leq_W c$ o bien $b^\flat \leq_W c$. Ahora bien, en caso contrario sería $c <_W b^\sharp$ y $c <_W b^\flat$. Entonces $c \leq_W b\alpha$, para cierto ordinal α, luego $c = b\alpha <_W b(\alpha+1) \leq_W c$, contradicción. ■

El teorema siguiente nos da una especie de división euclídea de grados con cociente ordinal:

Teorema 8.60 (AD) *Si a es un supremo numerable y $b <_W a^\sharp$, entonces*

$$b = c \vee b = a\alpha \vee b = a\alpha + c,$$

con $c <_W a$ y $1 \leq \alpha < \omega_1$.

Demostración: Como $b <_W a^\sharp$, también $b <_W a^\flat$, luego $b \leq_W a\alpha$, para cierto α, que podemos tomar mínimo. Si $b = a\alpha$ ya tenemos el resultado buscado, luego podemos suponer que $b < a\alpha$, así como que $\alpha > 1$. Es claro que α no puede ser un ordinal límite, luego $\alpha = \beta + 1$ y, por la minimalidad de α, se cumple que $a\beta <_W b <_W a\beta + a$. Hemos probado que $a\beta$ es supremo no máximo, luego existe un c tal que $a\beta + c = b$. Si fuera $a \leq_W c$ entonces $a\beta + a \leq_W a\beta + c = b$, contradicción. ■

Con esto estamos en condiciones de determinar la situación de los conjuntos $\mathbf{\Delta}^0_2$ en la jerarquía de Wadge:

Definición 8.61 *Si $1 \leq \alpha < \omega_1$, definimos $r_\alpha = (1 \oplus \neg 1)\alpha$.*

Los resultados precedentes prueban que los grados r_α son autoduales y forman una sucesión estrictamente creciente. El teorema siguiente implica en particular que esta definición es compatible con 8.40:

Teorema 8.62 *Los grados de los conjuntos $\mathbf{\Delta}^1_2$ son exactamente los de la forma $1, \neg 1, r_\alpha, r_\alpha + 1, r_\alpha + \neg 1$.*

Demostración: Vamos a probar que $r_1^\sharp$ es el grado de un conjunto $\mathbf{\Sigma}^0_2$-completo (es decir, de un conjunto en $\mathbf{\Sigma}^0_2 \setminus \mathbf{\Pi}^0_2$, con lo que $r_1^\flat$ es el grado de un conjunto $\mathbf{\Pi}^0_2$-completo). Aceptando esto, si D es un conjunto $\mathbf{\Delta}^0_2$ de grado d, tenemos que $d \leq_W r_1^\sharp$ y $d \leq_W r_1^\flat$, luego $d < r_1^\sharp$, luego, por el teorema anterior, o bien $d <_W r_1$ (lo cual implica $d = 1 \vee d = \neg 1$) o bien $d = r_1\alpha = r_\alpha$, o bien $d = r_1\alpha + c$, con $c <_W r_1$, lo que implica que $d = r_\alpha + 1 \vee d = r_\alpha + \neg 1$.

Por otra parte, todo grado de una de estas formas es menor que $r_1^\sharp$, luego también es menor que $r_1^\flat$ (que corresponde a un conjunto $\mathbf{\Pi}^0_2$-completo), luego el grado dado es $\mathbf{\Delta}^0_2$. Observemos que

$$x \in \mathcal{N}^\sharp \leftrightarrow \bigvee n \in \omega \bigwedge m \in \omega (n \leq m \rightarrow x(m) \neq 0)$$

es claramente Σ_2^0. Sin embargo, no es $\mathbf{\Pi}_2^0$, pues ello significaría que es intersección numerable de abiertos, pero $\mathcal{N}^\sharp$ es claramente denso en $\mathcal{N}$, luego los abiertos serían densos y $\mathcal{N}^\sharp$ sería de segunda categoría. Ahora bien, en realidad es de primera categoría, pues es unión de los cerrados de interior vacío $C_n = \{x \in \mathcal{N} \mid \bigwedge m \geq n\ x(m) \neq 0\}$. Esto implica que $\mathcal{N}^\sharp$ es $\mathbf{\Sigma}_2^0$-completo.

Como $[\mathcal{N}] = \neg 1 \leq r_1$, también $(\neg 1)^\sharp \leq r_1^\sharp$. Por otra parte,

$$\mathcal{N}^{\sharp\sharp} = \{x \in \mathcal{N} \mid \bigvee n \in \omega \bigwedge m \in \omega (n \leq m \to x(m) \geq 2)\},$$

que es también $\mathbf{\Sigma}_2^0$-completo, por el mismo argumento que en el caso de $\mathcal{N}^\sharp$. Pero ahora $r_1 \leq (\neg 1)^\sharp$, luego $r_1^\sharp \leq (\neg 1)^{\sharp\sharp} = (\neg 1)^\sharp$, luego $r_1^\sharp = (\neg 1)^\sharp$ es $\mathbf{\Sigma}_2^0$-completo, como queríamos probar. ■

Como $\mathbf{\Delta}_2^0$ es cerrada para sustituciones continuas y sus grados son, por consiguiente, una sección inicial en el conjunto de todos los grados de Wadge, concluimos que los grados r_α que acabamos de definir son los primeros grados autoduales de toda la jerarquía de Wadge, luego la definición 8.61 es un caso particular de la definición 8.40. Más aún, las observaciones posteriores a la definición 8.40 implican que

$$\mathbf{\Delta}_2^0 = \{A \in \mathcal{PN} \mid \|A\| < \omega_1\},$$

de donde a su vez concluimos que los conjuntos $\mathbf{\Sigma}_2^0$-completos o $\mathbf{\Pi}_2^0$-completos son los conjuntos de rango ω_1.

La extensión de estos resultados a las clases superiores de la jerarquía de Borel requiere nuevos conceptos y nuevas técnicas, así que nos ocuparemos de ello en el capítulo siguiente.

Capítulo IX

La jerarquía de Wadge de los conjuntos de Borel

En este capítulo estudiaremos la situación en la jerarquía de Wadge de las distintas clases de la jerarquía de Borel. Para ello necesitaremos presentar una serie de resultados sobre construcción de conjuntos en general y sobre la construcción de conjuntos de Borel en particular, a lo cual dedicamos la primera sección. Como vamos a trabajar exclusivamente con grados de Wadge suprimiremos el subíndice W en las clases y en la relación de orden.

9.1 Construcción de conjuntos $\mathbf{\Delta}_\alpha^0$

Los conjuntos $\mathbf{\Sigma}_\alpha^0$ se construyen como uniones numerables de conjuntos $\mathbf{\Sigma}_\delta^0$, para $\delta < \alpha$, y los conjuntos $\mathbf{\Pi}_\alpha^0$ se construyen como intersecciones numerables de conjuntos $\mathbf{\Pi}_\delta^0$, para $\delta < \alpha$. De este modo, sabemos construir los conjuntos $\mathbf{\Sigma}_\alpha^0$ y $\mathbf{\Pi}_\alpha^0$ a partir de los conjuntos anteriores de la jerarquía de Borel, pero esto no significa que sepamos construir los conjuntos $\mathbf{\Delta}_\alpha^0$. Cuando construimos conjuntos $\mathbf{\Sigma}_\alpha^0$ como uniones numerables, el resultado puede ser $\mathbf{\Pi}_\alpha^0$ o no. Si da la casualidad de que sí, entonces tenemos un conjunto $\mathbf{\Delta}_\alpha^0$, pero si no, no. En esta sección encontraremos un método de construcción que nos proporciona los conjuntos $\mathbf{\Delta}_\alpha^0$ a partir de los conjuntos anteriores de la jerarquía de Borel, sin tener que descartar "falsos intentos".

En esta dirección conviene introducir los conceptos siguientes:

Definición 9.1 Para cada conjunto X y cada ordinal $1 \leq \alpha < \omega_1$ definimos la aplicación $\partial_\alpha : (\mathcal{P}X)^\alpha \longrightarrow \mathcal{P}X$ mediante

$$x \in \partial_\alpha(\{A_\delta\}_{\delta<\alpha}) \leftrightarrow x \in \bigcup_{\delta<\alpha} A_\delta \wedge \min\{\delta < \alpha \mid x \in A_\delta\} \text{ tiene}$$

$$\text{paridad opuesta a } \alpha.$$

Aquí entendemos que un ordinal es par o impar según sea de la forma $\alpha = 2\epsilon$ o bien $\alpha = 2\epsilon + 1$.

La tabla siguiente muestra la expresión explícita para un conjunto de la forma $\partial_\alpha(\{A_\delta\}_{\delta<\alpha})$ para algunos valores de α:

α	$\partial_\alpha(\{A_\delta\}_{\delta\leq\alpha})$
1	A_0
2	$A_1 \setminus A_0$
3	$(A_2 \setminus A_1) \cup A_0$
4	$(A_3 \setminus A_2) \cup (A_1 \setminus A_0)$
5	$(A_4 \setminus A_3) \cup (A_2 \setminus A_1) \cup A_0$
$\vdots$	$\vdots$
ω	$\bigcup\limits_{n\in\omega} (A_{2n+1} \setminus A_{2n})$
$\omega + 1$	$(A_\omega \setminus \bigcup\limits_{n\in\omega} A_n) \cup \bigcup\limits_{n\in\omega} (A_{2n+2} \setminus A_{2n+1}) \cup A_0$
$\omega + 2$	$(A_{\omega+1} \setminus A_\omega) \cup \bigcup\limits_{n\in\omega} (A_{2n+1} \setminus A_{2n})$

Si $\{\varnothing, X\} \subset H \subset \mathcal{P}X$, definimos la clase de *diferencias* de orden α de H como la clase $\mathrm{Df}_\alpha(H)$ formada por todos los conjuntos de la forma $\partial_\alpha(\{A_\delta\}_{\delta<\alpha})$, donde $\{A_\delta\}_{\delta<\alpha}$ es una sucesión creciente de elementos de H (es decir, tal que $\alpha \leq \beta \rightarrow A_\alpha \subset A_\beta$). Se cumplen las relaciones siguientes de monotonía:

Teorema 9.2 $\mathrm{Df}_1(H) = H$ *y si* $1 \leq \alpha < \beta < \omega_1$, *entonces*

$$\mathrm{Df}_\alpha(H) \cup \neg\mathrm{Df}_\alpha(H) \subset \mathrm{Df}_\beta(H) \cap \neg\mathrm{Df}_\beta(H).$$

Demostración: Como $\mathrm{Df}_1(\{A_\delta\}_{\delta<1}) = A_0$, es obvio que $\mathrm{Df}_1(H) = H$.

Tomemos $\partial_\alpha(\{A_\delta\}_{\delta<\alpha}) \in \mathrm{Df}_\alpha(H)$. Si β tiene la misma paridad que α, definimos

$$B_\delta = \begin{cases} A_\delta & \text{si } \delta < \alpha, \\ \bigcup\limits_{\epsilon<\alpha} A_\epsilon & \text{si } \alpha \leq \delta < \beta. \end{cases}$$

Es claro entonces que $\partial_\alpha(\{A_\delta\}_{\delta<\alpha}) = \partial_\beta(\{B_\delta\}_{\delta<\beta})$, pues ambas sucesiones tienen la misma unión y, para cada $x \in X$ en dicha unión, el mínimo ordinal tal que $x \in A_\delta$ es el mismo que el mínimo ordinal tal que $x \in B_\delta$.

Si β tiene paridad opuesta a α definimos

$$B_\delta = \begin{cases} \varnothing & \text{si } \delta = 0, \\ A_\epsilon & \text{si } \delta = \epsilon + 1 < \alpha, \\ \bigcup\limits_{\epsilon<\delta} A_\epsilon & \text{si } \delta < \alpha \text{ es un ordinal límite}, \\ \bigcup\limits_{\epsilon<\alpha} A_\epsilon & \text{si } \alpha \leq \delta < \beta. \end{cases}$$

Ahora la sucesión también es creciente y su unión sigue siendo la misma, pero el mínimo δ tal que $x \in B_\delta$ es una unidad superior al correspondiente a la sucesión dada. Esto prueba que $\mathrm{Df}_\alpha(H) \subset \mathrm{Df}_\beta(H)$.

Ahora basta probar que $\neg\mathrm{Df}_\alpha(H) \subset \mathrm{Df}_{\alpha+1}(H)$, pues ya hemos visto que el segundo conjunto está contenido en $\mathrm{Df}_\beta(H)$. Definimos

$$B_\delta = \begin{cases} A_\delta & \text{si } \delta < \alpha, \\ X & \text{si } \delta = \alpha. \end{cases}$$

Se cumple que $\neg\partial_\alpha(\{A_\delta\}_{\delta<\alpha}) = \partial_{\alpha+1}(\{B_\delta\}_{\delta<\alpha+1})$, pues si tenemos que $x \in \neg\partial_\alpha(\{A_\delta\}_{\delta<\alpha})$, o bien no está en la unión, en cuyo caso el mínimo δ tal que $x \in B_\delta$ es $\delta = \alpha$, que tiene paridad opuesta a $\alpha+1$, luego $x \in \partial_{\alpha+1}(\{B_\delta\}_{\delta<\alpha+1})$, o bien el mínimo δ tal que $x \in A_\delta$ tiene paridad igual a α, y es el mismo que el mínimo δ tal que $x \in B_\delta$, y tiene paridad opuesta a $\alpha + 1$, luego también $x \in \partial_{\alpha+1}(\{B_\delta\}_{\delta<\alpha+1})$. Igualmente se prueba la inclusión opuesta. ■

Demostraremos que

$$\mathbf{\Delta}^0_{\alpha+1} = \bigcup_{1\leq\delta<\omega_1} \mathrm{Df}_\delta(\mathbf{\Sigma}^0_\alpha),$$

lo que nos da una forma explícita de construir los conjuntos $\mathbf{\Delta}^0_{\alpha+1}$ a partir de los conjuntos $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha$. El propósito de esta sección es demostrar este resultado (debido a Hausdorff) y otro más complejo debido a Wadge y que nos da un proceso de construcción para los conjuntos $\mathbf{\Delta}^0_\lambda$, con λ límite. Para ello conviene desarrollar una teoría general sobre cómo generar unos conjuntos a partir de otros por procedimientos puramente conjuntistas.

9.1.1 Transformaciones booleanas

Definición 9.3 En general, dados tres conjuntos I, J, X, llamaremos *transformaciones conjuntistas* de orden (I, J) en X a las aplicaciones arbitrarias $F : \mathcal{P}(X)^I \longrightarrow (\mathcal{P}X)^J$.

Cuando $J = 1$ identificaremos $(\mathcal{P}X)^J = \mathcal{P}X$, con lo que un caso particular de esta definición es el caso de una *operación* $F : \mathcal{P}(X)^I \longrightarrow \mathcal{P}X$ que asigne un subconjunto de X a cada familia de subconjuntos de X.

Diremos que F es *booleana* si existe $g : \mathcal{P}I \longrightarrow \mathcal{P}J$ tal que, para toda familia $\{A_i\}_{i\in I} \in (\mathcal{P}X)^I$ y cada $x \in X$ se cumple que

$$\{j \in J \mid x \in F(\{A_i\}_{i\in I})_j\} = g(\{i \in I \mid x \in A_i\}).$$

Es, decir, si los conjuntos de la imagen a los que pertenece un x dependen únicamente de los conjuntos de la familia dada a los que pertenece x, pero no de la familia misma. Es en este sentido en el que podemos decir que las transformaciones booleanas son las transformaciones "puramente conjuntistas".

Ejemplos La aplicación $\neg : \mathcal{P}X \longrightarrow \mathcal{P}X$ dada por $\neg A = X \setminus A$ es booleana, pues su aplicación asociada es $g : \mathcal{P}1 \longrightarrow \mathcal{P}1$ dada por

$$g(I) = \begin{cases} 1 & \text{si } I = \varnothing, \\ \varnothing & \text{si } I = 1. \end{cases}$$

Sean $\sigma, \delta : (\mathcal{P}X)^\omega \longrightarrow \mathcal{P}X$ las aplicaciones dadas por

$$\sigma(\{A_i\}_{i\in\omega}) = \bigcup_{i\in\omega} A_i, \qquad \delta(\{A_i\}_{i\in\omega}) = \bigcap_{i\in\omega} A_i.$$

Claramente, son operaciones booleanas, pues las aplicaciones $g : \mathcal{P}\omega \longrightarrow \mathcal{P}1$ que cumplen la definición son, respectivamente:

$$g_\sigma(I) = \begin{cases} 1 & \text{si } I \neq \varnothing, \\ \varnothing & \text{si } I = \varnothing, \end{cases} \qquad g_\delta(I) = \begin{cases} 1 & \text{si } I = \omega, \\ \varnothing & \text{si } I \neq \omega. \end{cases}$$

Si $\alpha < \omega_1$, consideramos la transformación $D_\alpha : (\mathcal{P}X)^\alpha \longrightarrow (\mathcal{P}X)^\alpha$ dada por

$$D_\alpha(\{A_\delta\}_{\delta<\alpha})_\gamma = \bigcup_{\delta<\gamma} A_\delta.$$

Es fácil ver que es una transformación son conjuntista, como también lo es la transformación $\partial_\alpha : (\mathcal{P}X)^\alpha \longrightarrow \mathcal{P}X$ definida al principio de la sección, pues basta tomar $g : \mathcal{P}\alpha \longrightarrow \mathcal{P}1$ dada por

$$g(I) = \begin{cases} 1 & \text{si } I \neq \varnothing \land \min I \text{ tiene paridad opuesta a } \alpha, \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

■

El teorema siguiente muestra que propiedades conocidas como

$$f^{-1}[A \cup B] = f^{-1}[A] \cup f^{-1}[B], \qquad f^{-1}[A \cap B] = f^{-1}[A] \cap f^{-1}[B]$$

se cumplen en general para toda transformación booleana (para aplicaciones f arbitrarias), y de hecho esto caracteriza a las transformaciones booleanas:

Teorema 9.4 *Una transformación $F : (\mathcal{P}X)^I \longrightarrow (\mathcal{P}X)^J$ es booleana si y sólo si para toda función $f : X \longrightarrow X$ y toda familia $\{A_i\}_{i\in I}$ de subconjuntos de X se cumple que $f^{-1}[F(\{A_i\}_{i\in I})_j] = F(\{f^{-1}[A_i]\}_{i\in I})_j$, para todo $j \in J$.*

Demostración: Si F es booleana sea $g : \mathcal{P}I \longrightarrow \mathcal{P}J$ según la definición. Para cada $x \in X$ tenemos que

$$\{j \in J \mid x \in f^{-1}[F(\{A_i\}_{i\in I})_j]\} = \{j \in J \mid f(x) \in F(\{A_i\}_{i\in I})_j\}$$
$$= g(\{i \in I \mid f(x) \in A_i\}) = g(\{i \in I \mid x \in f^{-1}[A_i]\})$$
$$= \{j \in J \mid x \in F(\{f^{-1}[A_i]\}_{i\in I})_j\}.$$

Así pues $x \in f^{-1}[F(\{A_i\}_{i\in I})_j] \leftrightarrow x \in F(\{f^{-1}[A_i]\}_{i\in I})_j$, luego ambos conjuntos coinciden.

Si se cumple la condición del enunciado, para cada subconjunto $I_0 \subset I$ definimos $B(I_0) = \{B_i\}_{i\in I}$ como la familia dada por

$$B_i = \begin{cases} X & \text{si } i \in I_0, \\ \varnothing & \text{si } i \notin I_0 \end{cases},$$

y a su vez definimos $g : \mathcal{P}I \longrightarrow \mathcal{P}J$ mediante

$$g(I_0) = \{j \in J \mid F(B(I_0))_j = X\}.$$

Ahora, dada una familia $\{A_i\}_{i\in I}$, para cada $x \in X$ sea $c_x : X \longrightarrow X$ la función constante igual a x. Así $x_x^{-1}[B]$ es X o $\varnothing$ según si $x \in B$ o si $x \notin B$, luego

$$\{j \in J \mid x \in F(\{A_i\}_{i\in I})_j\} = \{j \in J \mid c_x^{-1}[F(\{A_i\}_{i\in I})_j] = X\}$$
$$= \{j \in J \mid F(\{c_x^{-1}[A_i]\}_{i\in I})_j = X\} = \{j \in J \mid F(B(\{i \in I \mid x \in A_i\}))_j = X\}$$
$$= g(\{i \in I \mid x \in A_i\}).$$

■

Usando esta caracterización o la propia definición el teorema siguiente se demuestra sin dificultad:

Teorema 9.5 *Si* $F : (\mathcal{P}X)^I \longrightarrow (\mathcal{P}X)^J$ *y* $G : (\mathcal{P}X)^J \longrightarrow (\mathcal{P}X)^K$ *son transformaciones booleanas, entonces* $F \circ G$ *también lo es.*

Definición 9.6 Si $H \subset (\mathcal{PN})^I$ y $F : (\mathcal{PN})^I \longrightarrow (\mathcal{PN})^J$ es una transformación booleana, llamaremos

$$H_F = \{F(\{A_i\}_{i\in I}) \mid \{A_i\}_{i\in I} \in H\}.$$

Diremos que una clase $E \subset (\mathcal{PN})^J$ es H-*booleana* si es de la forma $E = H_F$ para cierta transformación booleana F.

Es obvio que si $E \subset (\mathcal{PN})^I$ es una clase H-booleana y $F : (\mathcal{PN})^I \longrightarrow (\mathcal{PN})^J$ es una transformación booleana, entonces E_F también es H-booleana.

Nos va a interesar especialmente el caso en que $G = \mathbf{\Sigma}^0_1(\mathcal{N})$ es la familia de los abiertos de $\mathcal{N}$ y $H = G^\omega$ la familia de las sucesiones de abiertos. Así, las clases G^ω-booleanas son las clases cuyos elementos se pueden construir a partir de una sucesión numerable de abiertos mediante una transformación booleana.

Del teorema anterior se sigue inmediatamente:

Teorema 9.7 *Si* $H \subset (\mathcal{PN})^I$ *es una clase* G^ω*-booleana y* $H' \subset (\mathcal{PN})^J$ *es una clase* H*-booleana, entonces* H' *es* G^ω*-booleana.*

Usar a ω como conjunto de índices no es esencial:

Teorema 9.8 *Una clase* $H \subset (\mathcal{PN})^I$ *es* G^ω*-Booleana si y sólo si es* G^J*-booleana, para un conjunto* J *finito o numerable.*

DEMOSTRACIÓN: Por el teorema anterior basta probar que la clase G^J es G^ω-booleana. Sea $k : J \longrightarrow \omega$ inyectiva y sea $F : G^\omega \longrightarrow G^I$ la transformación dada por $F(\{A_n\}_{n\in\omega}) = \{A_{k(j)}\}_{j\in J}$. Claramente es booleana, y es claro que $G^J = (G^\omega)_F$. ■

Conviene relajar ligeramente la notación:

Definición 9.9 *Si $H \subset \mathcal{PN}$ y $F : (\mathcal{PN})^I \longrightarrow \mathcal{PN}$, escribiremos $H_F = (H^I)_F$, que es la clase resultante de aplicar F a las familias de conjuntos de H.*

Por ejemplo, la clase G_δ es la clase de las intersecciones numerables de abiertos y, si F es la clase de todos los cerrados de $\mathcal{N}$, entonces F_σ es la clase de todas las uniones numerables de cerrados, de acuerdo con la notación clásica.

Teorema 9.10 *Si I es un conjunto numerable y $\{H_i\}_{i\in I}$ es una familia de subclases G^ω-booleanas de $\mathcal{PN}$, entonces $\prod\limits_{i\in I} H_i$ es una clase G^ω-booleana.*

DEMOSTRACIÓN: Tomemos transformaciones F_i tales que $H_i = (G^\omega)_{F_i}$ y sea $F : G^{I\times\omega} \longrightarrow (\mathcal{PN})^I$ la transformación dada por

$$F(\{A_{i,n}\}_{(i,n)\in I\times\omega})_i = F_i(\{A_{i,n}\}_{n\in\omega}).$$

Claramente F es booleana, pues la aplicación g que lo justifica es la dada por $g(T) = \bigcup\limits_{i\in I} g_i(\{n \in \omega \mid (i,n) \in T\})$, donde g_i es la aplicación que justifica que F_i es booleana. También es fácil ver que $\prod\limits_{i\in I} H_i = (G^{I\times\omega})_F$, luego el producto es $G^{I\times\omega}$-booleano, luego G^ω-booleano por el teorema 9.8. ■

Con esto podemos probar:

Teorema 9.11 *Si $1 \leq \alpha < \omega_1$, las clases $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha$ y $\mathbf{\Pi}^0_\alpha$ son G^ω-booleanas.*

DEMOSTRACIÓN: Es trivial que $\mathbf{\Sigma}^0_1 = G$ es una clase G^ω-booleana. Si $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha$ es G^ω-booleana, también lo es $\mathbf{\Pi}^0_\alpha = \neg\mathbf{\Sigma}^0_\alpha$, porque $\neg$ es un operador booleano. Si las clases $\mathbf{\Sigma}^0_\delta$ son G^ω-booleanas, para todo $\delta < \alpha$, entonces también lo son las clases $\mathbf{\Pi}^0_\delta$, y también lo es la clase $(\prod\limits_{(\delta,n)\in\alpha\times\omega} \mathbf{\Pi}^0_\delta)_\sigma$ (donde aquí σ representa el operador unión sobre $(\mathcal{PN})^{\delta\times\omega}$, en lugar de sobre $(\mathcal{PN})^\omega$, que también es claramente booleano), pero esta clase es $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha$. ■

Teorema 9.12 *Si $\{\varnothing, X\} \subset H \subset \mathcal{N}$ es una clase G^ω-booleana cerrada para uniones numerables y $1 \leq \alpha < \omega_1$, entonces $\mathrm{Df}_\alpha(H)$ es G^ω-booleana.*

DEMOSTRACIÓN: Observemos que $H_{D_\alpha} \subset (\mathcal{PN})^\alpha$ es la clase de todas las sucesiones crecientes $\{A_\delta\}_{\delta\leq\alpha}$ de elementos de H, y es también G^ω-booleana, pues H^α lo es por el teorema anterior y la transformación D_α es booleana. A su vez, $\mathrm{Df}_\alpha(H) = (H_{D_\alpha})_{\partial_\alpha}$ también es G^ω-booleana. ■

Nos van a interesar especialmente las clases cerradas para sustituciones continuas, pero conviene extender este concepto para incluir clases de sucesiones de conjuntos:

Definición 9.13 *Consideramos el preorden en el conjunto* $(\mathcal{PN})^I$ *definido por* $\{A_i\}_{i\in I} \leq \{B_i\}_{i\in I}$ *si existe una función continua* $f : \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{N}$ *de modo que* $\bigwedge i \in I\ A_i = f^{-1}[B_i]$.

Notemos que esto es más fuerte que exigir únicamente $\bigwedge i \in I\ A_i \leq B_i$, pues estamos exigiendo que la función continua $f : \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{N}$ que realiza cada reducción sea la misma para todo $i \in I$.

Diremos que una clase $H \subset (\mathcal{PN})^I$ es *cerrada para sustituciones continuas* si cuando $B \in H$ y $A \leq B$ entonces $A \in H$.

Si $H \subset (\mathcal{PN})^I$, definimos

$$\mathrm{In}(H) = \{A \in (\mathcal{PN})^I \mid \bigvee B \in H\ A \leq B\}.$$

Claramente $\mathrm{In}(H)$ es la menor clase cerrada para sustituciones continuas que contiene a H.

Si H es cerrada para sustituciones continuas, un elemento H-*completo* es un $B \in H$ tal que

$$H = \{A \in (\mathcal{PN})^I \mid A \leq B\}.$$

Teorema 9.14 *Sea* $F : (\mathcal{PN})^I \longrightarrow (\mathcal{PN})^J$ *una transformación booleana y sea* $H \subset (\mathcal{PN})^I$. *Entonces* $\mathrm{In}_W(H)_F = \mathrm{In}_W(H_F)$.

DEMOSTRACIÓN: Un elemento de $\mathrm{In}_W(H)_F$ es de la forma $F(\{A_i\}_{i\in I})$ para cierta familia $\{A_i\}_{i\in I} \in \mathrm{In}(H)$, que a su vez es de la forma $A_i = f^{-1}[B_i]$, para cierta $f : \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{N}$ continua y cierta familia $\{B_i\}_{i\in I} \in H$. Por el teorema 9.4 tenemos que $F(\{A_i\}_{i\in I}) = \{f^{-1}[F(\{B_i\}_{i\in I})]_j\}_{j\in J}$, donde $F(\{B_i\}_{i\in I}) \in H_F$, luego la sucesión de partida está en $\mathrm{In}_W(H_F)$. La inclusión opuesta se prueba análogamente. ■

Teorema 9.15 *Sea* $F : (\mathcal{PN})^I \longrightarrow (\mathcal{PN})^J$ *una transformación booleana y sea* $H \subset (\mathcal{PN})^I$. *Entonces:*

a) Si H *es cerrada para sustituciones continuas también lo es* H_F.

b) Si B *es* H*-completo, entonces* $F(B)$ *es* H_F*-completo.*

DEMOSTRACIÓN: a) Que H sea cerrada para sustituciones continuas equivale a que $H = \mathrm{In}(H)$, luego por el teorema anterior $H_F = \mathrm{In}(H)_F = \mathrm{In}(H_F)$, luego H_F es también cerrada.

b) Que B sea H-completo equivale a que $H = \mathrm{In}(\{B\})$, luego por el teorema anterior $H_F = \mathrm{In}(\{B\}_F) = \mathrm{Im}(\{F(B)\})$, luego $F(B)$ es H_F-completo. ■

De aquí deducimos un primer resultado no trivial válido para toda clase G^ω-booleana:

Teorema 9.16 *Toda clase* G^ω*-booleana* $\mathbf{\Gamma} \subset \mathcal{PN}$ *es cerrada para sustituciones continuas y tiene un elemento* $\mathbf{\Gamma}$*-completo no autodual.*

DEMOSTRACIÓN: La clase G^ω es trivialmente cerrada para sustituciones continuas, luego el teorema anterior implica que lo mismo vale para toda clase G^ω-booleana. Igualmente, para probar que existe un elemento $\mathbf{\Gamma}$-completo basta ver que existe una sucesión $\{A_n\}_{n\in\omega} \in G^\omega$ que sea G^ω-completa.

Definimos $A_n = \{x \in \mathcal{N} \mid \bigvee i \in \omega\ x(i) = n+1\}$, que claramente es abierto en $\mathcal{N}$. Para probar que esta sucesión es G^ω-completa tomamos otra sucesión cualquiera $\{B_n\}_{n\in\omega}$ y consideramos el juego J^* en el que, cuando I juega x y II juega y, gana II si y sólo si $\bigwedge n \in \omega(x \in B_n \leftrightarrow y \in A_n)$. Veamos que II tiene una estrategia ganadora τ.

Ésta consiste en jugar 0 en primer lugar y, cuando I ha jugado $x|_{i+1}$, entonces $y(i) = n+1$, donde n es el menor número tal que II todavía no ha jugado $n+1$ y $B_{x|_i} \subset B_n$, si existe tal n, o bien $y(i) = 0$ si no hay tal n.

Así, si I juega x y II ha jugado y según esta estrategia, si $x \in B_n$ entonces existe un i tal que $B_{x|_i} \in G_n$, luego, en algún momento de la partida, II habrá jugado $y(i) = n+1$, luego $y \in A_n$. Recíprocamente, si $y \in A_n$ es porque en algún momento II ha jugado $y(i) = n+1$, lo cual implica que $B_{x|_i} \subset B_n$, luego $x \in B_n$.

Esto prueba que la estrategia τ es ganadora, o también, que la función $f : \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{N}$ dada por $x \mapsto (x * \tau)|_{\mathrm{II}}$ cumple $f^{-1}[A_n] = B_n$ para todo n, y claramente es continua, luego $\{B_n\}_{n\in\omega} \leq \{A_n\}_{n\in\omega}$.

Notemos ahora que en realidad $x|_i$ determina $f(x)|_{i+1}$ (para eso hemos exigido que τ empiece por una jugada nula independiente de $x(0)$), lo cual significa que f no sólo es continua, sino que es una contracción.

Podemos definir una relación $\leq_c$ en $\mathcal{N}^\omega$ análoga a $\leq_W$ pero usando contracciones en lugar de aplicaciones continuas, y claramente es una relación transitiva (aunque no necesariamente reflexiva), y acabamos de probar que $G^\omega = \mathrm{In}_c(\{A_n\}_{n\in\omega})$, con la definición obvia de In_c. La prueba del teorema 9.14 vale sin cambio alguno con c en lugar de W, y concluimos que si $\mathbf{\Gamma}$ es G^ω-booleana, entonces existe un $A \in \mathbf{\Gamma}$ tal que $\mathbf{\Gamma} = \mathrm{In}_c(\{A\})$. De aquí se sigue que A no puede ser autodual, pues si lo fuera, es decir, si $\neg A \leq_W A$, entonces $\neg A \in \mathbf{\Gamma}$, luego $\neg A \leq_c A$, pero esto es imposible.

En efecto, supongamos que existe una contracción $f : \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{N}$ tal que

$$\bigwedge x \in \mathcal{N}(x \notin A \leftrightarrow f(x) \in A).$$

Por 8.4 existe un $x \in \mathcal{N}$ tal que $f(x) = x$, lo que nos da una contradicción, pues entonces $x \in A \leftrightarrow x \notin A$. ■

En particular, si $\mathbf{\Gamma} \subset \mathcal{PN}$ es una clase G^ω-booleana cerrada para uniones numerables y que contenga a $\varnothing$ y $\mathcal{N}$, se cumple que $\mathrm{Df}_\alpha(\mathbf{\Gamma}) \neq \neg\mathrm{Df}_\alpha(\mathbf{\Gamma})$, lo que a su vez implica que $\mathrm{Df}_\alpha(\mathbf{\Gamma}) \subset \mathrm{Df}_{\alpha+1}(\mathbf{\Gamma}) \cap \neg\mathrm{Df}_{\alpha+1}(\mathbf{\Gamma}) \subsetneq \mathrm{Df}_{\alpha+1}(\mathbf{\Gamma})$, luego las clases de diferencias $\{\mathrm{Df}_\alpha(\mathbf{\Gamma})\}_{1\leq\alpha<\omega_1}$ forman una jerarquía estricta.

9.1.2 Construcción de $\mathbf{\Delta}^0_2$

Ahora estamos en condiciones de probar que

$$\mathbf{\Delta}^0_2 = \bigcup_{1\leq\alpha<\omega_1} \mathrm{Df}_\alpha(\mathbf{\Sigma}^0_1).$$

Más, precisamente, se cumple lo siguiente:

Teorema 9.17 *Si* $1 \leq \alpha < \omega_1$*, se cumple que* $\mathrm{Df}_\alpha(\mathbf{\Sigma}^0_1) = \mathrm{In}(r_\alpha + 1)$.

Demostración: Recordemos que $r_1 = [B]$, donde B es cualquier abierto básico, y es claro entonces que $B + \varnothing$ es una unión de abiertos básicos, luego $r_1 + 1 = \mathbf{\Sigma}^0_1 \setminus \mathbf{\Pi}^0_1$, luego $\mathrm{In}(r_1 + 1) = \mathbf{\Sigma}^0_1 = \mathrm{Df}_1(\mathbf{\Sigma}^0_1)$.

Consideremos ahora $\alpha > 1$ y supongamos que la igualdad es cierta para todo $\delta < \alpha$. Sea $D = \partial_\alpha(\{A_\delta\}_{\delta<\alpha}) \in \mathrm{Df}_\alpha(\mathbf{\Sigma}^0_1)$ y sea $r_\alpha = [R]$. Veamos que II tiene una estrategia ganadora para $J_p(D, R + \varnothing)$.

La estrategia consiste en jugar 1 mientras las jugadas s de I no cumplan $B_s \subset A_\delta$ para ningún $\delta < \alpha$. Si esto sucede durante toda la partida, la jugada final de I estará fuera de $\bigcup\limits_{\delta<\alpha} A_\delta$, luego fuera de D, y II habrá jugado la sucesión constante 1, que está fuera de $R + \varnothing$.

Supongamos ahora que en un momento dado las jugadas de I terminan cumpliendo $B_s \subset A_{\delta_0}$, para un cierto $\delta_0 < \alpha$. Si α es un ordinal sucesor podemos tomar δ_0 igual a su inmediato anterior (luego de paridad opuesta), mientras que si α es un ordinal límite, cambiando si hace falta δ_0 por $\delta_0 + 1$ podemos exigir igualmente que la paridad de δ_0 sea opuesta a la de α. Observamos que

$$D/s = \neg\partial_\alpha(\{A_\delta/s\}_{\delta<\delta_0}).$$

En efecto, $x \in D/s$ si y sólo si $s^\frown x \in D$, pero, como $s^\frown x \in A_{\delta_0}$, el mínimo δ tal que $s^\frown x \in A_\delta$ es $\delta \leq \delta_0$, luego tendrá paridad opuesta a α si y sólo si es δ_0 o bien es $< \delta_0$ y tiene la misma paridad que δ_0, si y sólo si $s^\frown x \in \neg\partial_\alpha(\{A_\delta\}_{\delta<\delta_0})$, si y sólo si $x \in \neg\partial_\alpha(\{A_\delta/s\}_{\delta<\delta_0})$. Por hipótesis de inducción tenemos que

$$D/s \in \neg\mathrm{Df}_{\delta_0}(\mathbf{\Sigma}^0_1) = \mathrm{In}(r_{\delta_0} + \neg 1) \subset \mathrm{In}(r_\alpha),$$

luego II tiene una estrategia ganadora τ para $J_p(D/s, R)$, luego II sólo tiene que jugar un 0 y, a partir de ese momento, usar la estrategia τ. Así, si I juega $s^\frown x$ y II juega $(1, \ldots, 1, 0)^\frown y$, tenemos que

$$s^\frown x \in D \leftrightarrow y \in R \leftrightarrow (1, \ldots, 1, 0)^\frown y \in R + \varnothing.$$

Con esto hemos probado que $\mathrm{Df}_\alpha(\mathbf{\Sigma}^0_1) \subset \mathrm{In}(r_\alpha + 1)$. Por el teorema 8.15 sabemos que $q = \mathrm{Df}_\alpha(\mathbf{\Sigma}^0_1) \setminus \neg\mathrm{Df}_\alpha(\mathbf{\Sigma}^0_1)$ es un grado de Wadge no autodual, y acabamos de probar que $q \leq r_\alpha + 1$. Si no se diera la igualdad, por el teorema 8.62 tendría que ser $q = r_\delta + 1$ o bien $q = r_\delta + \neg 1$, para un $\delta < \alpha$, pero, por hipótesis de inducción esto supondría que $\mathrm{Df}_\alpha(\mathbf{\Sigma}^0_1) \subset \mathrm{Df}_\delta(\mathbf{\Sigma}^0_1)$ o bien $\mathrm{Df}_\alpha(\mathbf{\Sigma}^0_1) \subset \neg\mathrm{Df}_\delta(\mathbf{\Sigma}^0_1)$, en contra del carácter estricto de la jerarquía de diferencias. Así pues, se da la igualdad. ■

El teorema 8.62 implica ahora trivialmente la expresión de $\mathbf{\Delta}^0_2$ indicada al inicio de esta subsección. Más aún, podemos afirmar que las clases de diferencias, sus complementos y sus clases ambiguas correspondientes son las únicas clases cerradas para sustituciones continuas contenidas en $\mathbf{\Delta}^0_2$.

9.1.3 Expansión

En esta sección generalizaremos el resultado precedente, para lo cual introduciremos una nueva operación sobre clases. Primeramente necesitamos una propiedad elemental de las funciones $\mathbf{\Sigma}^0_{1+\alpha}$-medibles:

Definición 9.18 Si $\alpha < \omega_1$, diremos que una función $f : X \longrightarrow Y$ entre espacios polacos es de clase α si es $\mathbf{\Sigma}^0_{1+\alpha}$-medible, es decir, si la antiimagen de un abierto es $\mathbf{\Sigma}^0_{1+\alpha}$.

De este modo, las funciones de clase 0 son las funciones continuas.

Teorema 9.19 *Si $f : X \longrightarrow Y$ es una función de clase α y $A \in \mathbf{\Sigma}^0_{1+\beta}(Y)$, entonces $f^{-1}[A] \in \mathbf{\Sigma}^0_{1+\alpha+\beta}(X)$.*

Demostración: Por inducción sobre β. Si $\beta = 0$ se trata de la definición de función de función de clase α. Supongamos que el teorema es cierto para todo $\delta < \beta$ y sea $A \in \mathbf{\Sigma}^0_{1+\beta}(Y)$. Entonces existe una sucesión $\{A_n\}_{n\in\omega}$ de conjuntos $A_n \in \mathbf{\Sigma}^0_{\delta_n}(\mathcal{N})$ con $\delta_n < \beta$ tal que $A = \bigcup\limits_n \neg A_n$, con lo que $f^{-1}[A] = \bigcup\limits_n \neg f^{-1}[A_n]$ y, por hipótesis de inducción, $f^{-1}[A_n] \in \mathbf{\Sigma}^0_{1+\alpha+\delta_n}(X) \subset \mathbf{\Sigma}^0_{1+\alpha+\beta}(X)$, luego $f^{-1}[A] \in \mathbf{\Sigma}^0_{1+\alpha+\beta}(X)$. ■

De aquí se sigue inmediatamente que si $f : X \longrightarrow Y$ es una aplicación de clase α y $g : Y \longrightarrow Z$ es de clase β, entonces $f \circ g$ es de clase $\alpha + \beta$.

Veamos ya la definición de expansión de una clase. Por razones técnicas es algo compleja, pero veremos luego que para clases G^ω-booleanas es equivalente a otra mucho más natural.

Definición 9.20 Sean $\{A_i\}_{i\in I}$ y $\{B_i\}_{i\in I}$ dos familias en $(\mathcal{PN})^I$, sea $E \subset \mathcal{N}$ un cerrado y $\alpha < \omega_1$. Diremos que $\{B_i\}_{i\in I} \cong_\alpha \{A_i\}_{i\in I}$ (mód E) si $h : \mathcal{N} \longrightarrow E$ biyectiva, de clase α, con h^{-1} continua y tal que $\bigwedge i \in I\ B_i = h^{-1}[A_i]$. En tal caso diremos que h es una *reducción de clase* α de $\{B_i\}_{i\in I}$ a $\{A_i\}_{i\in I}$ módulo E.

Si $H \subset (\mathcal{PN})^I$, definimos la *expansión* H^α como la clase de todas las familias $\{B_i\}_{i\in I}$ que cumplen $\{B_i\}_{i\in I} \cong_\alpha \{A_i\}_{i\in I}$ (mód E) para cierta familia $\{A_i\}_{i\in I} \in H$ y cierto cerrado $E \subset \mathcal{N}$.

Notemos que en general $H \subset H^\alpha$, pues la identidad en $\mathcal{N}$ es una reducción.

Empezamos probando que las expansiones conmutan con las transformaciones booleanas, para lo cual probamos primero lo siguiente:

Teorema 9.21 *Sea* $\alpha < \omega_1$, *sea* $F : (\mathcal{PN})^I \longrightarrow (\mathcal{PN})^J$ *una transformación booleana, sea* $E \subset \mathcal{N}$ *cerrado y supongamos que* $\{A_i\}_{i\in I} \cong_\alpha \{B_i\}_{i\in I}$ (mód E). *Entonces* $F(\{A_i\}_{i\in I}) \cong_\alpha F(\{B_i\}_{i\in I})$ (mód E).

Demostración: Sea $h : \mathcal{N} \longrightarrow E$ una reducción. En particular $A_i = h^{-1}[B_i]$ y el teorema 9.4 nos da entonces que $F(\{A_i\}_{i\in I})_j = h^{-1}[F(\{B_i\}_{i\in I})_j]$, lo que a su vez implica que $F(\{A_i\}_{i\in I}) \cong_\alpha F(\{B_i\}_{i\in I})$ (mód E). ■

Teorema 9.22 *Dada una transformación booleana* $F : (\mathcal{PN})^I \longrightarrow (\mathcal{PN})^J$, *si* $H \subset (\mathcal{PN})^I$ *y* $\alpha < \omega_1$, *se cumple que* $(H_F)^\alpha = (H^\alpha)_F$.

Demostración: Si $\{C_j\}_{j\in J} \in (H_F)^\alpha$, entonces existe una sucesión en H_F, que será de la forma $F(\{A_i\}_{i\in I})$, para cierta familia $\{A_i\}_{i\in I} \in H$, tal que $\{C_j\}_{j\in J} \cong_\alpha F(\{A_i\}_{i\in I})$ (mód E), para cierto cerrado E. Sea $h : \mathcal{N} \longrightarrow E$ una reducción. En particular $C_j = h^{-1}[F(\{A_i\}_{i\in I})_j] = F[\{h^{-1}[A_i]\}_{i\in I}]_j$, por 9.4. Si llamamos $B_i = h^{-1}[A_i]$, tenemos que $\{B_i\}_{i\in I} \cong_\alpha \{A_i\}_{i\in I}$ (mód E), luego $\{B_i\}_{i\in I} \in H^\alpha$ y $\{C_j\}_{j\in J} = F(\{B_i\}_{i\in I}) \in (H^\alpha)_F$.

Recíprocamente, un elemento de $(H^\alpha)_F$ es de la forma $F(\{B_i\}_{i\in I})$, para cierta familia $\{B_i\}_{i\in I} \in H^\alpha$, que a su vez cumplirá $\{B_i\}_{i\in I} \cong_\alpha \{A_i\}_{i\in I}$ (mód E), con $\{A_i\}_{i\in I} \in H$. Por el teorema anterior $F(\{B_i\}_{i\in I}) \cong_\alpha F(\{A_i\}_{i\in I})$ (mód E), luego $F(\{B_i\}_{i\in I}) \in (H_F)^\alpha$. ■

En particular, $(\neg H)^\alpha = \neg H^\alpha$. Teniendo en cuenta que $\mathrm{Df}_\delta(H) = (H_{D_\delta})_{\partial_\delta}$, también tenemos que $\mathrm{Df}_\delta(H)^\alpha = \mathrm{Df}_\delta(H^\alpha)$.

El teorema siguiente (como se pone de manifiesto en su demostración) viene a decir que cuando tenemos una cantidad numerable de reducciones podemos realizarlas todas módulo un mismo cerrado E.

Teorema 9.23 *Sea* $\{\alpha_n\}_{n\in\omega}$ *una sucesión de ordinales numerables, sea* α *su supremo y sea* $\{H_n\}_{n\in\omega}$ *una sucesión de subconjuntos de* $\mathcal{PN}$ *cerrados para sustituciones continuas. Entonces*

$$\prod_{n\in\omega} H_n^{\alpha_n} \subset (\prod_{n\in\omega} H_n)^\alpha.$$

Más aún, si la sucesión $\{\alpha_n\}_n$ *es monótona creciente, cada familia en* $\prod\limits_{n\in\omega} H_n^{\alpha_n}$ *tiene una reducción* $h : \mathcal{N} \longrightarrow E$ *de clase* α *a un elemento de* $\prod\limits_{n\in\omega} H_n$ *con la propiedad de que para cada* $s \in \omega^n$ *se cumple que* $h^{-1}[B_s] \in \mathbf{\Sigma}^0_{1+\alpha_n}(\mathcal{N})$.

Demostración: Tomemos $\{D_n\}_{n\in\omega} \in \prod\limits_{n\in\omega} H_n^{\alpha_n}$. Así, para cada $n \in \omega$ existe $C_n \in H_n$, un cerrado $E_n \subset \mathcal{N}$ y una reducción $h_n : \mathcal{N} \longrightarrow E_n$ de clase α_n tal que $D_n = h_n^{-1}[C_n]$.

Sea $C'_n = \{\phi \in \mathcal{N}^\omega \mid \phi_n \in C_n\}$, sea $h' : \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{N}^\omega$ dada por $h'(x) = (h_n(x))$, sea

$$E' = \{\phi \in \prod_{n\in\omega} E_n \mid \bigwedge ij \in \omega(h_i^{-1}(\phi_i) = h_j^{-1}(\phi_j))\}.$$

Claramente $h' : \mathcal{N} \longrightarrow E'$ y E' es cerrado en $\mathcal{N}^\omega$. Más aún, así h' es biyectiva y su inversa $h'^{-1} : E' \longrightarrow \mathcal{N}$ viene dada por $h'^{-1}(\phi) = h_0^{-1}(\phi_0)$, que es continua, por ser composición de una proyección con h_0^{-1}. De hecho, h' es una función de clase α, pues para comprobarlo basta ver que la antiimagen de todo abierto básico del producto está en $\mathbf{\Sigma}^0_{1+\alpha}$ (pues todo abierto es unión numerable de abiertos básicos), pero tal antiimagen es intersección de un número finito de conjuntos $h_i^{-1}[G_i]$, con G_i abierto en E_n, y cada una de ellas está en la clase $\mathbf{\Sigma}^0_{1+\alpha_i} \subset \mathbf{\Sigma}^0_{1+\alpha}$. Observemos por último que $D_n = h'^{-1}[C'_n]$.

Ahora transportamos todo esto a través de un homeomorfismo $q : \mathcal{N}^\omega \longrightarrow \mathcal{N}$, es decir, llamamos $E'' = q[E']$, $C''_n = q[C'_n]$ y tomamos $h'' : \mathcal{N} \longrightarrow E''$ dada por $h'' = h' \circ q$, y así h'' prueba que $\{D_n\}_{n\in\omega} \cong_\alpha \{C''_n\}_{n\in\omega}$ (mód E''). Además, por construcción, $C''_n \leq C_n$, luego $C''_n \in H_n$, ya que esta clase es cerrada para sustituciones continuas. Así pues, $\{C''_n\}_{n\in\omega} \in \prod\limits_{n\in\omega} H_n$.

Sólo falta probar que h'' cumple la propiedad adicional que exige el enunciado. Para ello, si consideramos, concretamente, que q es el homeomorfismo canónico dado por $q(\{x_i\}_{i\in\omega})(\langle i,j\rangle) = x_i(j)$, como $i \leq \langle i,j\rangle$ (porque $i \mapsto \langle i,0\rangle$ es creciente, luego $i \leq \langle i,0\rangle \leq \langle i,j\rangle$), resulta que la condición $q(\{x_i\}_{i\in\omega})|_n = s$ depende únicamente de $x_0|_n, \ldots, x_n|_n$, luego $q^{-1}[B_s] = \bigcap\limits_{i\in n} p_i^{-1}[G_i]$, donde G_i es abierto en $\mathcal{N}$ y $p_i : \mathcal{N}^\omega \longrightarrow \mathcal{N}$ es la proyección i-ésima. Por lo tanto, $h''^{-1}[B_s] = \bigcap\limits_{i\in n} h_i^{-1}[G_i]$ y cada antiimagen es de clase $\mathbf{\Sigma}^0_{1+\alpha_i}$, luego la intersección está en $\mathbf{\Sigma}^0_{1+\alpha_n}$. ■

Como primera aplicación probamos:

Teorema 9.24 *Sea $\alpha < \omega_1$, sea I un conjunto numerable y sea $\{H_i\}_{i\in I}$ una familia de subconjuntos de $\mathcal{PN}$ cerrados para sustituciones continuas. Entonces*

$$\prod_{i\in I} H_i^\alpha = (\prod_{i\in I} H_i)^\alpha, \qquad \bigcap_{i\in I} H_i^\alpha = (\bigcap_{i\in I} H_i)^\alpha.$$

Demostración: Del teorema anterior obtenemos que $\prod\limits_{i\in I} H_i^\alpha \subset (\prod\limits_{i\in I} H_i)^\alpha$. Supongamos ahora que $\{B_i\}_{i\in I} \in (\prod\limits_{i\in I} H_i)^\alpha$. Entonces

$$\{B_i\}_{i\in I} \cong_\alpha \{A_i\}_{i\in I} \text{ (mód } E),$$

con $\{A_i\}_{i\in I} \in \prod\limits_{i\in I} H_i$ y $E \subset \mathcal{N}$ cerrado. Pero entonces $B_i \equiv_\alpha A_i$ (mód E), luego $B_i \in H_i^\alpha$, luego $\{B_i\}_{i\in I} \in (\bigcap\limits_{i\in I} H_i)^\alpha$.

Supongamos ahora que $B \in (\bigcap\limits_{i\in I} H_i)^\alpha$, de modo que $B \cong_\alpha A$ (mód E), con $A \in \bigcap\limits_{i\in I} H_i$. Esto implica que $B \in H_i^\alpha$ para cada i, luego $B \in \bigcap\limits_{i\in I} H_i^\alpha$.

Recíprocamente, si $B \in \bigcap\limits_{i\in I} H_i^\alpha$, entonces la sucesión constante $\{B\}_{i\in I}$ está en $\prod\limits_{i\in I} H_i^\alpha$, luego por la parte ya probada está en $(\prod\limits_{i\in I} H_i)^\alpha$. Esto significa que existe una familia $\{A_i\}_{i\in I} \in \prod\limits_{i\in I} H_i$ tal que $\{B\}_{i\in I} \cong \{A_i\}_{i\in I}$ (mód E), para cierto cerrado E. Si $h : \mathcal{N} \longrightarrow E$ es la reducción correspondiente, como $h^{-1}[A_i] = B$ para todo i, tiene que cumplirse que $A_i \cap E$ sea independiente del índice i.

Sea $r : \mathcal{N} \longrightarrow E$ una retracción (véase 1.4) y, fijado un $i_0 \in I$, sea $A' = r^{-1}[A_{i_0}]$, de modo que de hecho $A' = r^{-1}[A_i]$ para todo $i \in I$, luego $A' \leq A_i$, luego $A' \in \bigcap\limits_{i\in I} H_i$. Además, como $A' \cap E = A_i \cap E$, también se tiene que $B = h^{-1}[A']$, luego $B \cong_\alpha A'$ (mód E), luego $B \in (\bigcap\limits_{i\in I} H_i)^\alpha$. ■

El resultado análogo para uniones es trivial. Dejamos la comprobación al lector:

Teorema 9.25 *Sea $\alpha < \omega_1$ y sea $\{H_i\}_{i\in I}$ una familia de subconjuntos de $\mathcal{PN}$. Entonces $\bigcup\limits_{i\in I} H_i^\alpha = (\bigcup\limits_{i\in I} H_i)^\alpha$.*

Seguidamente demostraremos que $G^\alpha = \mathbf{\Sigma}^0_{1+\alpha}$. Empezamos probando un caso particular:

Teorema 9.26 *Si $G = \mathbf{\Sigma}^0_1$ es la clase de los abiertos en $\mathcal{N}$, entonces $G^1 = \mathbf{\Sigma}^0_2$.*

Demostración: Veamos en primer lugar que $\mathbf{\Pi}^0_1 \subset G^1$. Para ello tomamos $F \in \mathbf{\Pi}^0_1$, es decir, un subconjunto cerrado de $\mathcal{N}$, que podemos suponer distinto de $\mathcal{N}$ y de $\varnothing$ (pues claramente $G \subset G^1$). Sea $\{s_i\}_{i<\alpha}$ (donde $\alpha \leq \omega$) una enumeración sin repeticiones de los elementos de $\omega^{<\omega}$ que no admiten una extensión a F, pero tales que todos sus segmentos iniciales estrictos sí que la admiten. Es claro entonces que $\neg F = \bigcup\limits_{i<\alpha} B_{s_i}$, así como que $B_{s_i} \cap B_{s_j} = \varnothing$ siempre que $i \neq j$.

Por lo tanto, para cada $x \in \neg F$ existe un único $i < \alpha$ y un único $x' \in \mathcal{N}$ de modo que $x = s_i{}^\frown x'$. Definimos $h : \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{N}$ mediante

$$h(x) = \begin{cases} (i+1)^\frown x & \text{si } x \in \neg F \land x = s_i{}^\frown x', \\ 0^\frown x & \text{si } x \in F. \end{cases}$$

Claramente la imagen de h es $E = \{0^\frown x \mid x \in F\} \cup \bigcup\limits_{i<\alpha} B_{s_i}$, que es cerrado en $\mathcal{N}$. Además h es biyectiva en esta imagen, y su inversa es

$$h^{-1}(x) = \begin{cases} s_i{}^\frown x' & \text{si } x = (i+1)^\frown x', \\ x' & \text{si } x = 0^\frown x'. \end{cases}$$

Es claro que h^{-1} es continua, así como que $F = h^{-1}[B_0]$. Para probar que $F \cong_1 B_0$ (mód E) (y por tanto que $F \in G^1$) sólo falta probar que h es de clase 1, para lo cual basta a su vez probar que $h^{-1}[B_t]$ es $\mathbf{\Sigma}^0_2$ para todo $t \in \omega^{<\omega}$. Ahora bien, si $t = 0^\frown t'$ entonces $h^{-1}[B_t] = F \cap B_{t'}$, mientras que si $t = (i+1)^\frown t'$ entonces $h^{-1}[B_t] = \neg F \cap B_{s_i} \cap B_{t'}$, que ciertamente es $\mathbf{\Sigma}^0_2$ en ambos casos.

Ahora tenemos que $(\mathbf{\Pi}^0_1)^\omega \subset (G^1)^\omega$, luego, usando los resultados precedentes,

$$\mathbf{\Sigma}^0_2 = F_\sigma = ((\mathbf{\Pi}^0_1)^\omega)_\sigma \subset ((G^1)^\omega)_\sigma = (G^1)_\sigma = (G_\sigma)^1 = G^1.$$

Recíprocamente, si $A \in G^1$, entonces existe una reducción $h : \mathcal{N} \longrightarrow E$ de clase 1 y un abierto $B \in G$ de modo que $A = h^{-1}[B]$, lo que implica que $A \in \mathbf{\Sigma}^0_2$, por definición de aplicación de clase 1. ■

Notemos que trivialmente $G^0 = G$. En efecto, si $A \in G^0$ existe un homeomorfismo $h : \mathcal{N} \longrightarrow E$ y un abierto B en $\mathcal{N}$ tal que $A = h^{-1}[B]$, luego $A \in G$.

Teorema 9.27 *Si $H \subset (\mathcal{PN})^I$ y $\alpha, \beta < \omega_1$, entonces $(H^\alpha)^\beta \subset H^{\beta+\alpha}$.*

Luego veremos que para clases G^ω-booleanas se da la igualdad.

Demostración: Si $\{C_i\}_{i\in I} \in (H^\alpha)^\beta$, existe una reducción $h : \mathcal{N} \longrightarrow E$ de clase β y una familia $\{B_i\}_{i\in I} \in H^\alpha$ tal que $C_i = h^{-1}[B_i]$ para todo i. A su vez, existe una reducción $h' : \mathcal{N} \longrightarrow E'$ de clase α y una familia $\{A_i\}_{i\in I} \in H$ tal que $B_i = h'^{-1}[A_i]$. Es claro entonces que $h \circ h'$ es una reducción de clase $\beta + \alpha$ que prueba que $\{C_i\}_{i\in I} \in H^{\beta+\alpha}$. ■

Teorema 9.28 *Si $\alpha < \omega_1$, entonces $G^\alpha = \mathbf{\Sigma}^0_{1+\alpha}$.*

Demostración: Lo tenemos ya probado cuando $\alpha = 0, 1$. Supongamos ahora que $\alpha > 1$ y que el teorema es cierto para ordinales menores que α. Si $A \in G^\mu$, entonces A es la antiimagen de un abierto por una aplicación de clase α, luego $A \in \mathbf{\Sigma}^0_{1+\alpha}$.

Supongamos ahora que $A \in \mathbf{\Sigma}^0_{1+\alpha}$, entonces $A = \bigcup\limits_{n\in\omega} F_n$, con $F_n \in \mathbf{\Pi}^0_{1+\alpha_n}$, con $\alpha_n < \alpha$. Por hipótesis de inducción $\neg F_n \in G^{\alpha_n}$, luego, usando que $\neg$ es una operación booleana y que éstas conmutan con las expansiones, $F_n \in F^{\alpha_n}$, donde F es la clase de los cerrados. Hemos visto que $F \subset G^1$, y por el teorema anterior $F^{\alpha_n} \subset (G^1)^{\alpha_n} \subset G^{1+\alpha_n} \subset G^\alpha$, luego

$$A \in (\prod_{n\in\omega} G^\alpha)_\sigma = ((^\omega G)^\alpha)_\sigma = ((^\omega G)_\sigma)^\alpha = G^\alpha,$$

donde hemos escrito $^\omega G$ en lugar de G^ω para que no se confunda la familia de sucesiones numerables de abiertos con la expansión de orden ω. ■

Teorema 9.29 *Si H es una clase G^ω-booleana en $(\mathcal{PN})^I$ y $\alpha < \omega_1$, entonces H^α también es G^ω-booleana.*

Demostración: Tenemos que $H = (G^\omega)_F$, para cierta transformación booleana F, luego $H^\alpha = ((^\omega G)_F)^\alpha = ((^\omega G)^\alpha)_F = (^\omega(G^\alpha))_F = ((\mathbf{\Sigma}^0_{1+\alpha})^\omega)_F$ y, como $\mathbf{\Sigma}^0_{1+\alpha}$ es G^ω-booleana por 9.11 y $(\mathbf{\Sigma}^0_{1+\alpha})^\omega$ lo es por 9.10, concluimos que H^α también lo es. ■

Teorema 9.30 *Si $H \subset (\mathcal{PN})^I$ es una clase G^ω-booleana y $\alpha, \beta < \omega_1$, entonces $(H^\alpha)^\beta = H^{\beta+\alpha}$.*

Demostración: Basta probar el teorema cuando $H = G$ pues, aceptando esto,

$$(H^\alpha)^\beta = ((({}^\omega G)_F)^\alpha)^\beta = ({}^\omega((G^\alpha)^\beta))_F = ({}^\omega(G^{\beta+\alpha}))_F = (({}^\omega G)_F)^{\beta+\alpha} = H^{\beta+\alpha}.$$

Veamos que $(G^\alpha)^\beta = G^{\alpha+\beta}$ por inducción sobre α. Para $\alpha = 0$ es trivial, pues $G^0 = G$. Supongamos que el resultado es cierto para ordinales menores que $\alpha > 0$. Sea $\{\alpha_n\}_{n\in\omega}$ una enumeración de los ordinales menores que α en la que cada uno aparezca infinitas veces. Entonces, como $G^\alpha = \mathbf{\Sigma}^0_{1+\alpha}$, cada elemento de G^α es de la forma $\bigcup\limits_{n\in\omega} A_n$ con $A_n \in \mathbf{\Pi}^0_{1+\alpha_n} = F^{\alpha_n}$, luego

$$(G^\alpha)^\beta = ((\prod_{n\in\omega} F^{\alpha_n})_\sigma)^\beta = ((\prod_{n\in\omega} F^{\alpha_n})^\beta)_\sigma = (\prod_{n\in\omega} (F^{\alpha_n})^\beta)_\sigma$$

$$= (\prod_{n\in\omega} F^{\beta+\alpha_n})_\sigma = (\prod_{n\in\omega} \mathbf{\Pi}^0_{1+\beta+\alpha_n})_\sigma = \mathbf{\Sigma}^0_{1+\beta+\alpha} = G^{\beta+\alpha},$$

donde hemos usado que, por hipótesis de inducción, $(G^{\alpha_n})^\beta = G^{\beta+\alpha_n}$, luego, aplicando el operador booleano $\neg$, también $(F^{\alpha_n})^\beta = F^{\beta+\alpha_n}$. ■

Finalmente veamos que, tal y como anunciábamos, las expansiones de las clases G^ω-booleanas tienen una caracterización mucho más simple:

Teorema 9.31 *Sea $H \subset (\mathcal{PN})^I$ una clase G^ω-booleana y $\alpha < \omega_1$. Entonces*

$$H^\alpha = \{\{f^{-1}[A_i]\}_{i\in I} \mid \{A_i\}_{i\in I} \in H \land f : \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{N} \textit{ es de clase } \alpha\}.$$

Demostración: Llamemos H' al término derecho de la igualdad. Claramente $H^\alpha \subset H'$ porque las reducciones de clase α son aplicaciones de clase α. Sea $F : (\mathcal{PN})^\omega \longrightarrow (\mathcal{PN})^I$ una transformación booleana tal que $H = (G^\omega)_F$. Entonces $H' \subset ({}^\omega(G^\alpha))_F$. En efecto, toda sucesión $\{A_i\}_{i\in I} \in H$ es de la forma $\{A_i\}_{i\in I} = F(\{B_n\}_{n\in\omega})$, con $B_n \in G$ y, si $f : \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{N}$ es de clase α, entonces

$$\{f^{-1}[A_i]\}_{i\in I} = \{f^{-1}[F(\{B_n\}_{n\in\omega})_i]\}_{i\in I} = \{F(\{f^{-1}[B_n]\}_{n\in\omega})_i\}_{i\in I}$$

y claramente $\{f^{-1}[B_n]\}_{n\in\omega} \in {}^\omega(\mathbf{\Sigma}^0_\alpha) = {}^\omega(G^\alpha)$.

Pero $({}^\omega(G^\alpha))_F = (({}^\omega G)^\alpha)_F = ((G^\omega)_F)^\alpha = H^\alpha$, luego $H' \subset H^\alpha$. ■

Finalmente podemos probar:

Teorema 9.32 *Si $1 \leq \alpha < \omega_1$, se cumple*

$$\mathbf{\Delta}^0_{\alpha+1} = \bigcup_{1\leq\delta<\omega_1} \mathrm{Df}_\delta(\mathbf{\Sigma}^0_\alpha).$$

Demostración: Podemos cambiar α por $1+\alpha$, con $0 \leq \alpha < \omega_1$. Sabemos que

$$\mathbf{\Delta}^0_2 = \bigcup_{1\leq\delta<\omega_1} \mathrm{Df}_\delta(\mathbf{\Sigma}^0_1).$$

Por 9.25, 9.28 y la observación tras el teorema 9.22 tenemos que

$$(\mathbf{\Delta}_2^0)^\alpha = \bigcup_{1\leq\delta<\omega_1} \mathrm{Df}_\delta((\mathbf{\Sigma}_1^0)^\alpha) = \bigcup_{1\leq\delta<\omega_1} \mathrm{Df}_\delta(\mathbf{\Sigma}_{1+\alpha}^0).$$

Por otra parte,

$$(\mathbf{\Delta}_2^0)^\alpha = ((\mathbf{\Sigma}_1^0)^1 \cap \neg(\mathbf{\Sigma}_1^0)^1)^\alpha = ((\mathbf{\Sigma}_1^0)^1)^\alpha \cap \neg((\mathbf{\Sigma}_1^0)^1)^\alpha = (\mathbf{\Sigma}_1^0)^{\alpha+1} \cap \neg(\mathbf{\Sigma}_1^0)^{\alpha+1}$$

$$= \mathbf{\Sigma}_{1+\alpha+1}^0 \cap \neg\mathbf{\Sigma}_{1+\alpha+1}^0 = \mathbf{\Delta}_{1+\alpha+1}^0.$$

■

9.1.4 Uniones separadas y partidas

Introducimos ahora varias familias de operaciones sobre clases con las cuales estaremos en condiciones de construir los conjuntos $\mathbf{\Delta}_\lambda^0$, donde λ es un ordinal límite.

Definición 9.33 Si $H \subset \mathcal{PN}$ y $\alpha < \omega_1$, definimos $\mathrm{Pt}_\alpha(H)$ como la clase de todos los conjuntos de la forma

$$\bigcup_{n\in\omega} (A_n \cap G_n),$$

donde $\{A_n\}_{n\in\omega} \in H^\omega$ y $\{G_n\}_{n\in\omega}$ es una partición de $\mathcal{N}$ en conjuntos $\mathbf{\Sigma}_{1+\alpha}^0$ disjuntos dos a dos.

Notemos que $\mathrm{Pt}_\alpha(H)$ contiene también las uniones finitas de esta forma, pues siempre se pueden completar a uniones numerables tomando $G_n = \varnothing$ para n grande.

La clase $\mathrm{Sp}_\alpha^+(H)$ se define igual, salvo que no exigimos que la unión de los conjuntos G_n sea $\mathcal{N}$ (pero sí que sean disjuntos dos a dos).

Definimos también $\mathrm{Sp}_\alpha^-(H) = \neg\mathrm{Sp}_\alpha^+(\neg H)$ y $\mathrm{Sp}_\alpha(H) = \mathrm{Sp}_\alpha^+(H) \cup \mathrm{Sp}_\alpha^-(H)$.

El teorema siguiente nos da las relaciones básicas entre estas clases:

Teorema 9.34 *Si $\alpha < \beta$, entonces*

$$H \subset \mathrm{Pt}_\alpha(H) = \mathrm{Sp}_\alpha^+(H) \cap \mathrm{Sp}_\alpha^-(H) \subset \mathrm{Pt}_\beta(H).$$

Demostración: Dado un conjunto $A \in H$, basta tomar $A_n = A$, $G_0 = \mathcal{N}$ y $G_{n+1} = \varnothing$ para justificar que $A \in \mathrm{Pt}_\alpha(H)$. Por otra parte, la inclusión $\mathrm{Pt}_\alpha(H) \subset \mathrm{Pt}_\beta(H)$ es trivial, al igual que $\mathrm{Pt}_\alpha(H) \subset \mathrm{Sp}_\alpha^+(H) \cap \mathrm{Sp}_\alpha^-(H)$.

Tomemos $B \in \mathrm{Sp}_\alpha^+(H) \cap \mathrm{Sp}_\alpha^-(H)$. Entonces

$$B = \bigcup_{n\in\omega} (A_n \cap G_n),$$

donde $\{A_n\}_{n\in\omega} \in H^\omega$ y $\{G_n\}_{n\in\omega}$ es una sucesión de conjuntos $\mathbf{\Sigma}^0_{1+\alpha}$ disjuntos dos a dos. Por otro lado,

$$\neg B = \bigcup_{n\in\omega} (\neg A'_n \cap G'_n),$$

con $\{A'_n\}_{n\in\omega}$ y $\{G'_n\}_{n\in\omega}$ en las mismas condiciones que $\{A_n\}_{n\in\omega}$ y $\{G_n\}_{n\in\omega}$.

Así $B\cap G_n = A_n\cap G_n$ y $B\cap G'_n = A'_n\cap G'_n$. Además $\bigcup\limits_{n\in\omega} G_n \cup \bigcup\limits_{n\in\omega} G'_n = \mathcal{N}$, pues contiene a $B\cup\neg B$.

Sea $\{G''_n\}_{n\in\omega}$ una enumeración de los G_n y los G'_n y sea $\{A''_n\}_{n\in\omega}$ la enumeración correspondiente de los A_n y A'_n. Así $B\cap G''_n = A''_n \cap G''_n$ y $\bigcup\limits_{n\in\omega} G''_n = \mathcal{N}$.

Según 1.19 la clase $\mathbf{\Sigma}^0_{1+\alpha}$ tiene la propiedad de reducción generalizada, lo cual significa que existen conjuntos $G'''_n \subset G'_n$ de clase $\mathbf{\Sigma}^0_{1+\alpha}$ disjuntos dos a dos tales que $\bigcup\limits_{n\in\omega} G'''_n = \mathcal{N}$.

Claramente sigue siendo cierto que $B\cap G'''_n = A''_n\cap G'''_n$, así como que

$$B = \bigcup_{n\in\omega} (A''_n \cap G'''_n),$$

lo que prueba que $B\in \mathrm{Pt}_\alpha(H)$. ■

El resultado de componer dos de estas operaciones es trivial en muchos casos:

Teorema 9.35 *Para todo par de ordinales $\alpha\leq\beta<\omega_1$ se cumple*

$$\mathrm{Sp}^+_\alpha\circ\mathrm{Sp}^+_\alpha = \mathrm{Sp}^+_\alpha, \quad \mathrm{Sp}^-_\alpha\circ\mathrm{Sp}^-_\alpha = \mathrm{Sp}^-_\alpha, \quad \mathrm{Pt}_\alpha\circ\mathrm{Pt}_\alpha = \mathrm{Pt}_\alpha,$$

$$\mathrm{Pt}_\alpha\circ\mathrm{Sp}^+_\beta = \mathrm{Sp}^+_\beta, \quad \mathrm{Pt}_\alpha\circ\mathrm{Sp}^-_\beta = \mathrm{Sp}^-_\beta \quad \mathrm{Pt}_\alpha\circ\mathrm{Sp}_\beta = \mathrm{Sp}_\beta$$

Demostración: Todas las pruebas son sencillas. Veamos por ejemplo la cuarta igualdad. Dado $H\subset \mathcal{PN}$, vemos que $H\subset \mathrm{Pt}_\alpha(H)$, de donde concluimos que $\mathrm{Sp}^+_\beta(H)\subset \mathrm{Sp}^+_\beta(\mathrm{Pt}_\alpha(H))$. Tomemos ahora $C\in \mathrm{Sp}^+_\beta(\mathrm{Pt}_\alpha(H))$. Esto significa que

$$C = \bigcup_{n\in\omega}(C_n\cap G_n),$$

con $C_n\in \mathrm{Pt}_\alpha(H)$ y $\{G_n\}_{n\in\omega}$ una familia de conjuntos $\mathbf{\Sigma}^0_{1+\beta}$ disjuntos dos a dos. A su vez,

$$C_n = \bigcup_{m\in\omega}(C_{nm}\cap G'_{nm}),$$

con $C_{nm}\in H$ y $\{G'_{nm}\}_{m\in\omega}$ una partición de $\mathcal{N}$ en conjuntos $\mathbf{\Sigma}^0_{1+\alpha}$. Sea $\{G''_n\}_{n\in\omega}$ una enumeración de los conjuntos $G_n\cap G'_{nm}$. Es claro que se trata de una familia de conjuntos $\mathbf{\Sigma}^0_{1+\beta}$ disjuntos dos a dos. Sea $\{C''_n\}_{n\in\omega}$ la enumeración de los C_{nm} correspondiente a G''_{nm}. Es claro que

$$C = \bigcup_{n\in\omega}(C''_n\cap G''_n)\in \mathrm{Sp}^+_\beta(H).$$

■

Veamos ahora un hecho elemental:

Teorema 9.36 *Si $H \subset \mathcal{PN}$ es una clase cerrada para sustituciones continuas, también lo son* $\mathrm{Sp}_\alpha(H)$, $\mathrm{Sp}^+_\alpha(H)$, $\mathrm{Sp}^-_\alpha(H)$ *y* $\mathrm{Pt}_\alpha(H)$.

Demostración: Si $C \in \mathrm{Sp}^+_\alpha(H)$, entonces

$$C = \bigcup_{n\in\omega} (C_n \cap G_n),$$

en las condiciones de la definición. Si $B = f^{-1}[C]$, para cierta función continua $f : \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{N}$, entonces

$$f^{-1}[C] = \bigcup_{n\in\omega} (f^{-1}[C_n] \cap f^{-1}[G_n]),$$

también cumple la definición, luego $f^{-1}[C] \in \mathrm{Sp}^+_\alpha(H)$. Las pruebas restantes son similares. ■

Veamos ahora el efecto que tiene la expansión sobre estas clases:

Teorema 9.37 *Si $\alpha, \beta < \omega_1$ y $H \subset \mathcal{PN}$ es una clase cerrada para sustituciones continuas, entones* $\mathrm{Pt}_\beta(H)^\alpha = \mathrm{Pt}_{\alpha+\beta}(H^\alpha)$*, e igualmente sucede con las operaciones* Sp_β, Sp^+_β *y* Sp^-_β.

Demostración: Tomemos $C \in \mathrm{Pt}_\beta(H)^\alpha$. Entonces existe un $B \in \mathrm{Pt}_\beta(H)$ y un $E \subset \mathcal{N}$ cerrado tal que $C \equiv_\alpha B$ (mód E). Sea $h : \mathcal{N} \longrightarrow E$ una reducción. A su vez

$$B = \bigcup_{n\in\omega} (A_n \cap G_n),$$

donde $A_n \in H$ y $\{G_n\}_{n\in\omega}$ es una partición de $\mathcal{N}$ en conjuntos $\mathbf{\Sigma}^0_{1+\beta}$. Entonces

$$C = h^{-1}[B] = \bigcup_{n\in\omega} (h^{-1}[A_n] \cap h^{-1}[G_n]).$$

Se cumple que $h^{-1}[A_n] \equiv A_n$ (mód E), luego $h^{-1}[A_n] \in H^\alpha$. Por otra parte, $\{h^{-1}[G_n]\}_{n\in\omega}$ es una partición de $\mathcal{N}$ en conjuntos $\mathbf{\Sigma}^0_{1+\alpha+\beta}$, por 9.19. Esto prueba que $C \in \mathrm{Pt}_{\alpha+\beta}(H^\alpha)$.

Tomemos ahora $C \in \mathrm{Pt}_{\alpha+\beta}(H^\alpha)$, de modo que

$$C = \bigcup_{n\in\omega} (A'_n \cap G'_n),$$

donde $A'_n \in H^\alpha$ y $\{G'_n\}_{n\in\omega}$ es una partición de $\mathcal{N}$ en conjuntos de clase $\mathbf{\Sigma}^0_{1+\alpha+\beta} = G^{\alpha+\beta} = (G^\beta)^\alpha = (\mathbf{\Sigma}^0_{1+\beta})^\alpha$, por 9.27 y 9.28.

El teorema 9.23 nos da que $\{A_n\}_{n\in\omega} \in (H^\omega)^\alpha$. Esto significa que existe un (mismo) cerrado $E \subset \mathcal{N}$ y una (misma) reducción $h : \mathcal{N} \longrightarrow E$ de clase α tal que $A'_n = h^{-1}[A''_n]$ y $G'_n = h^{-1}[G''_n]$, para ciertos conjuntos $A''_n \in H$ y $G''_n \in \mathbf{\Sigma}^0_{1+\beta}$.

Usando el teorema 9.21 concluimos que

$$C \equiv_\alpha \bigcup_{n\in\omega} (A''_n \cap G''_n) \text{ (mód } E).$$

Los conjuntos $G''_n \cap E$ tienen que ser disjuntos dos a dos, pues si no los G'_n no lo serían, pero no podemos asegurar que los G''_n sean una partición de $\mathcal{N}$. Para arreglar esto tomamos una retracción $r : \mathcal{N} \longrightarrow E$ y llamamos $G_n = r^{-1}[G''_n]$, $A_n = r^{-1}[A''_n]$. Así los $\{G_n\}_{n\in\omega}$ son una partición de $\mathcal{N}$ en conjuntos $\mathbf{\Sigma}^0_{1+\beta}$ y $A_n \in H$. Como $A_n \cap E = A''_n \cap E$ y $G_n \cap E = G''_n \cap E$, es claro que

$$C \equiv_\alpha \bigcup_{n\in\omega} (A_n \cap G_n) \text{ (mód } E),$$

y ahora sí que podemos concluir que $C \in \mathrm{Pt}_\beta(H)^\alpha$. Las pruebas para las otras operaciones son análogas. ■

Finalmente necesitamos un resultado técnico que nos permitirá obtener las primeras aplicaciones de las operaciones que hemos introducido aquí:

Teorema 9.38 *Si $H \subset \mathcal{PN}$ es cerrada para sustituciones continuas, entonces*

$$A \in \mathrm{Pt}_0(H) \leftrightarrow \bigwedge x \in \mathcal{N} \bigvee k \in \omega\ A/(x|_k) \in H.$$

Demostración: Supongamos que $A \in \mathrm{Pt}_0(H)$. Entonces

$$A = \bigcup_{n\in\omega} (A_n \cap G_n),$$

en las condiciones de la definición anterior. Dado $x \in \mathcal{N}$, existe un n tal que $x \in G_n$, luego existe un k tal que $B_{x|_k} \subset G_n$. Como los abiertos son disjuntos, $B_{x|_k} \cap G_m = \varnothing$ para todo $m \neq n$. Así pues,

$$A/(x|_k) = A_n/(x|_k) \leq A_n,$$

luego $A/(x|_k) \in H$.

Recíprocamente, si A tiene la propiedad del enunciado, sea

$$L = \{s \in \omega^{<\omega} \mid A/s \in H \land \bigwedge t \in \omega^{<\omega} (t \subsetneq s \to A/t \notin H)\}.$$

Claramente $\bigwedge x \in \mathcal{N} \bigvee k \in \omega\ x|_k \in L$, y los elementos de L son incompatibles dos a dos. Esto implica que, $\{B_s\}_{s\in L}$ es una partición de $\mathcal{N}$.

Para cada $s \in L$ sea

$$A_s = \{t^\frown x \mid t \in \omega^{<\omega} \land x \in \mathcal{N} \land \ell(t) = \ell(s) \land s^\frown x \in A\}.$$

Así $B_s \cap A_s = B_s \cap A$ y $A^s \leq A$, pues para ganar $J_p(A_s, A)$ el jugador II sólo tiene que jugar s y luego copiar las jugadas siguientes de I. Esta última condición implica que $A_s \in H$. Así, $A = \bigcup_{s\in L} (A_s \cap B_s) \in \mathrm{Pt}_0(H)$. ■

Ahora podemos probar que Pt_0 determina la clase inicial de un supremo:

Teorema 9.39 *Se cumple que*

$$\mathrm{In}(\bigoplus_{n\in\omega} a_n) = \mathrm{Pt}_0(\bigcup_{n\in\omega} \mathrm{In}(a_n)).$$

DEMOSTRACIÓN: La clase $H = \bigcup\limits_{n\in\omega} \mathrm{In}(a_n)$ es cerrada para sustituciones continuas, luego podemos aplicar el teorema anterior.

Sea $\{A_n\}_{n\in\omega}$ tal que $a_n = [A_n]$ y sea $C = \bigoplus\limits_{n\in\omega} A_n$. Dado $A \in \mathcal{PN}$, se cumple que $A \leq C$ si y sólo si II tiene una estrategia ganadora para $J_p(A, C)$. Teniendo en cuenta que II puede pasar, esto equivale a que, para cualquier sucesión $x \in \mathcal{N}$ de posibles jugadas de I, existen un k y un n tales que si I juega $x|_k$ y II ha pasado hasta ese momento para después jugar n, entonces II tiene una estrategia ganadora para el juego $J_p(A/(x|_k), A_n)$. Equivalentemente,

$$\bigwedge x \in \mathcal{N} \bigvee kn \in \omega\ A/(x|_k) \leq A_n),$$

y esto a su vez equivale a

$$\bigwedge x \in \mathcal{N} \bigvee k \in \omega\ A/(x|_k) \in H.$$

El teorema anterior nos da que esto equivale a que $A \in \mathrm{Pt}_0(H)$. ■

Similarmente, las operaciones Sp_0^+ y Sp_0^- determinan las clases iniciales de los grados b^* y b°:

Teorema 9.40 *Para todo grado b se cumple:*

$$\mathrm{In}(b^*) = \mathrm{Sp}_0^+(\mathrm{In}(b)), \qquad \mathrm{In}(b^\circ) = \mathrm{Sp}_0^-(\mathrm{In}(b)).$$

DEMOSTRACIÓN: Sea $b = [B]$ y tomemos $C \in \mathrm{Sp}_0^+(\mathrm{In}(B))$. Entonces

$$C = \bigcup_{n\in\omega} (A_n \cap G_n),$$

donde $A_n \leq B$ y los G_n son abiertos disjuntos dos a dos. Tenemos que probar que $C \leq B^*$. En efecto, una estrategia ganadora para II en $J_p(C, B^*)$ es la siguiente:

II empieza jugando ceros, y sigue así hasta que las jugadas s de I cumplan $B_s \subset G_n$ para algún n. Si esto nunca sucede, entonces las jugadas de I terminan fuera de C y las jugadas de II (todas nulas) terminan fuera de B^*, luego II gana la partida.

Si se da el caso de que las jugadas de I cumplen $B_s \subset G_n$, entonces sucede que $C/s = A_n/s \leq A_n \leq B$, luego II puede jugar un 1 y continuar aplicando una estrategia ganadora para $J_p(C/s, B)$.

Como $\mathrm{Sp}_0^+(\mathrm{In}(b))$ es cerrada para sustituciones continuas, basta probar que $B^* \in \mathrm{Sp}_0^+(\mathrm{In}(b))$. Sea $\{r_n\}_{n\in\omega}$ una enumeración de todas las sucesiones de $\omega^{<\omega}$ que tienen nulas todas sus componentes menos la última. Definimos

$$A_n = \{t^\frown x \mid t \in \omega^{<\omega} \land \ell(t) = \ell(r_n) \land x \in B\}.$$

Así $B^* = \bigcup\limits_{n\in\omega} (A_n \cap B_{r_n})$, los B_{r_n} son abiertos disjuntos dos a dos y $A_n \leq B$, pues para ganar en $J_p(A_n, B)$ el jugador II sólo tiene que pasar $\ell(r_n)$ veces y luego copiar las jugadas siguientes de I. Esto prueba que $B^* \in \mathrm{Sp}_0^+(\mathrm{In}(b))$.

La prueba para b° se obtiene modificando ligeramente la anterior, aunque en la práctica nos interesará únicamente el caso en que b es autodual, y entonces la igualdad se sigue trivialmente de la ya probada. ■

Análogamente, las operaciones $\mathrm{Sp}_1^\pm$ determinan las clases iniciales de los grados $b^\sharp$ y $b^\flat$:

Teorema 9.41 *Para todo grado b se cumple:*

$$\mathrm{In}(b^\sharp) = \mathrm{Sp}_1^+(\mathrm{In}(b)), \qquad \mathrm{In}(b^\flat) = \mathrm{Sp}_1^-(\mathrm{In}(b)).$$

Demostración: Sea $b = [B]$. Hemos de probar que

$$\mathrm{In}(B^\sharp) = \mathrm{Sp}_1^+(\mathrm{In}(B)), \qquad \mathrm{In}(B^\flat) = \mathrm{Sp}_1^-(\mathrm{In}(B)).$$

Veremos la primera igualdad únicamente, pues la segunda es muy similar. Sea $\{s_n\}_{n\in\omega}$ la enumeración canónica de $\omega^{<\omega}$ y sea

$$G_0 = \{x^+ \mid x \in \mathcal{N}\}, \qquad G_{n+1} = \{s_n{}^\frown 0^\frown x^+ \mid x \in \mathcal{N}\}$$

Es claro que $G_n \in \mathbf{\Pi}^0_1 \subset \mathbf{\Sigma}^0_2$, así como que los G_n son disjuntos dos a dos. Sea

$$A_0 = \{x \mid x^- \in B\}, \quad A_{n+1} = \{w^\frown x \mid w \in \omega^{<\omega} \land \ell(w) = \ell(s_n) + 1 \land x^- \in B\},$$

donde x^- es la sucesión que resulta de restar 1 a las componentes no nulas de x. Claramente $A_n \cap G_n = B^\sharp \cap G_n$ y $B^\sharp \subset \bigcup\limits_{n\in\omega} G_n$, luego

$$B^\sharp = \bigcup_{n\in\omega} (A_n \cap G_n).$$

Además $A_n \leq B$, pues para ganar en $J_p(A_n, B)$ el jugador II sólo tiene que pasar las primeras $\ell(s_{n-1}) + 1$ jugadas (ninguna si $n = 0$) y luego copiar las jugadas de I restándoles 1 si son no nulas. Por lo tanto, $A_n \in \mathrm{In}(b)$ y $B^\sharp \in \mathrm{Sp}_1^+(\mathrm{In}(b))$. Como esta clase es cerrada para sustituciones continuas, $\mathrm{In}(b^\sharp) \subset \mathrm{Sp}_1^+(\mathrm{In}(b))$.

Tomemos ahora $C \in \mathrm{Sp}_1^+(\mathrm{In}(b))$, de modo que

$$C = \bigcup_{n\in\omega} (A_n \cap G_n)$$

con $G_n \in \mathbf{\Sigma}^0_2$ disjuntos dos a dos y $A_n \leq B$. Sea τ_n una estrategia ganadora para II en $J_p(A_n, B)$. En la prueba de 8.62 vimos que $\mathcal{N}^\sharp$ es $\mathbf{\Sigma}^0_2$-completo, luego existe una estrategia ganadora ρ_n para II en $J_p(G_n, \mathcal{N}^\sharp)$. Esto significa que si se aplica la estrategia ρ_n a una sucesión x de jugadas de I, se cumple $x \in G_n$ si y sólo si las respuestas de II tienen un número finito de ceros. Fijemos una enumeración $\{k_n\}_{n\in\omega}$ de ω en la que cada número natural aparezca infinitas veces.

La estrategia para II en $J_p(C, B^\sharp)$ es la siguiente: II empieza aplicando la estrategia $\tau_{k_0}^+$ a las jugadas de I (esto significa sumar 1 a cada jugada recomendada por la estrategia τ_{k_0}), pero inicia una partida auxiliar en la que les aplica la estrategia ρ_{k_0}. Sigue así hasta que en el juego auxiliar ρ_{k_0} le lleva a jugar un 0. Entonces juega 0 en la partida principal y pasa aplicar la estrategia $\tau_{k_1}^+$ desde la primera jugada de I, a la vez que inicia una partida auxiliar con k_1 también desde la primera jugada de I (salvo que $k_1 = k_0$, en cuyo caso continua la partida auxiliar ya iniciada). En general, si II está aplicando la estrategia $\sigma_{k_n}^+$ en la partida principal y juega a la vez el juego auxiliar ρ_{k_n}, continúa así mientras ρ_{k_n} no le lleve a jugar un 0 y, si esto ocurre, juega un 0 en la partida principal y pasa a aplicar $\tau_{k_{n+1}}^+$ en la partida principal (empezando con la primera jugada de I), a la vez que continúa la partida con $\rho_{k_{n+1}}$ donde la dejó (si es que $k_{n+1} = k_i$, para un $i \leq n$) o inicia una nueva partida auxiliar con esta estrategia, si es que k_{n+1} no había aparecido antes.

La estrategia es ganadora, pues si las jugadas de I forman una sucesión $x \notin \bigcup\limits_{n\in\omega} G_n$, entonces todas las estrategias ρ_{k_n} llevan a jugar un 0 tras un número finito de pasos, por lo que II nunca dejará de jugar 0 de tanto en tanto, y la sucesión de sus jugadas no estará en $B^\sharp$. Por el contrario, si las jugadas de I forman una sucesión $x \in G_{k^*}$, entonces la estrategia ρ_{k^*} aplicada a x tendrá un número finito de ceros, digamos m, y si $n \in \omega$ es el número natural que hace que k_n sea el $m+1$-ésimo k^* que aparece en la sucesión $\{k_n\}_{n\in\omega}$, tenemos que II descartará todas las estrategias ρ_{k_l} para $l < n$, pero cuando pase a adoptar la estrategia ρ_{k_n}, el juego auxiliar correspondiente ya tendrá jugados sus m ceros, por lo que no habrá ningún cambio más de estrategia, y la jugada final de II será de la forma $s^\frown 0^\frown (x * \tau_{k^*})_{\mathrm{II}}^+$, que estará en $B^\sharp$ si y sólo si $(x * \tau_{k^*})_{\mathrm{II}} \in B$, si y sólo si $x \in A_n$, si y sólo si $x \in C$ (dado que estamos suponiendo que $x \in G_n$). Así pues, $C \in \mathrm{In}(B^\sharp)$. ■

Veamos un par de aplicaciones de las expresiones que acabamos de obtener:

Teorema 9.42 *Si H es una unión numerable de clases G^ω-booleanas, entonces $\mathrm{Sp}_0^+(H)$ es G^ω-booleana.*

Demostración: Sea $H = \bigcup\limits_{n\in\omega} H_n$, donde cada H_n es G^ω-booleana. Por 9.16 se cumple que $H_n = \mathrm{In}(b_n)$, para cierto grado b_n no autodual. Llamemos $b = \bigoplus\limits_{n\in\omega} b_n$. Entonces, por 9.39 y 9.40,

$$\mathrm{Sp}_0^+(H) = \mathrm{Sp}_0^+(\mathrm{Pt}_0(\bigcup_{n\in\omega} \mathrm{In}(b_n))) = \mathrm{Sp}_0^+(\mathrm{In}(b)) = \mathrm{In}(b+1).$$

Supongamos en primer lugar que cada $b_n \in \mathbf{\Delta}_2^0$, con lo que también $b \in \mathbf{\Delta}_2^0$ (ya que esto equivale a tener rango numerable). Entonces $b = r_\alpha$ para cierto $\alpha < \omega_1$ (pues b es autodual por ser un supremo numerable), y entonces 9.17 nos da que $\mathrm{In}(b+1) = \mathrm{Df}_\alpha(\mathbf{\Sigma}_1^0)$, que es una clase G^ω-booleana por 9.12.

Así pues, podemos suponer que algún b_n no está en $\mathbf{\Delta}_2^0$ y, como al eliminar los b_i que sí lo sean el supremo no varía, podemos suponer de hecho que ningún $b_n \in \mathbf{\Delta}_2^0$, y en particular que $r_\omega \leq b_n$ para todo n.

Fijemos una sucesión $\{m_n\}_{n\in\omega}$ en ω en la que cada número natural aparezca infinitas veces. Llamemos $K_n = H_{m_n}$ y $c_n = b_{m_n}$, de modo que $K_n = \mathrm{In}(c_n)$. Es claro entonces que $\mathrm{Sp}_0^+(H)$ está formado por los conjuntos de la forma

$$\bigcup_{n\in\omega}(A_n \cap G_n),$$

donde $\{G_n\}_{n\in\omega}$ es una sucesión de abiertos disjuntos dos a dos y $A_n \in K_n$. Esto significa que $\mathrm{Sp}_0^+(H)$ resulta de aplicar una transformación booleana al producto de $\prod\limits_{n\in\omega} K_n$ por la clase de las sucesiones de abiertos disjuntos, pero sucede que ésta no es G^ω-booleana, por lo que no podemos concluir directamente que $\mathrm{Sp}_0^+(H)$ lo sea. Para resolver esto demostramos que $\mathrm{Sp}_0^+(H)$ coincide con la clase L formada por los conjuntos de la forma

$$D = \bigcup_{n\in\omega}(A_n \cap G_n) \setminus \bigcup_{m\neq n}(G_m \cap G_n),$$

con $\{A_n\}_{n\in\omega} \in \prod\limits_{n\in\omega} K_n$ y $\{G_n\}_{n\in\omega} \in G^\omega$. Como ambas clases son G^ω-booleanas y su producto también, resulta que L es G^ω-booleana.

La inclusión $\mathrm{Sp}_0^+(H) \subset L$ es trivial. Tomemos ahora $D \in L$, de modo que tiene la expresión anterior. Sea $E = \bigcup\limits_{m\neq n}(G_m \cap G_n)$. Por la propiedad de reducción generalizada 1.19, existe una familia $\{G'_n\}_{n\in\omega}$ de abiertos disjuntos dos a dos tal que $G'_n \subset G_n$ y $\bigcup\limits_{n\in\omega} G'_n = \bigcup\limits_{n\in\omega} G_n$. Es fácil ver que

$$D = \bigcup_{n\in\omega}((A_n \setminus E) \cap G'_n).$$

Veamos ahora que $A_n \setminus E \leq \varnothing + A_n$ (notemos que E es abierto). En efecto, II gana el juego $J_p(A_n \setminus E, \varnothing + A_n)$ sin más que sumar 1 a las jugadas de I mientras estas formen una sucesión s tal que B_s no esté contenido en E. Si esto pasa durante toda la partida, si I ha jugado $x \notin E$, entonces II ha jugado x^+, de modo que $x \in A_n \setminus E \leftrightarrow x \in A_n \leftrightarrow x^+ \in \varnothing + A_n$.

Si en un momento dado se cumple $B_s \subset E$, entonces II juega un 0 y luego cualquier cosa, y entonces $x \notin A_n \setminus E$ y las jugadas de II no están tampoco en $\varnothing + A_n$. Así pues

$$[A_n \setminus E] \leq 1 + [A_n] \leq 1 + c_n.$$

Pero $r_\omega < c_n$, luego por 8.48 existe un grado d_n tal que $c_n = r_\omega + d_n$, luego

$$[A_n \setminus E] \leq 1 + r_\omega + d_n = r_\omega + d_n = c_n,$$

donde hemos usado que $1 + r_\omega = r_\omega$, pues

$$1 + r_\omega = 1 + r_1\omega = 1 + \bigoplus_{1\leq n<\omega} r_1 n = \bigoplus_{1\leq n<\omega}(1 + r_1 n)$$

$$\leq \bigoplus_{1\leq n<\omega}(r_1 + r_1 n) = \bigoplus_{1\leq n<\omega} r_1(1+n) = r_1\omega = r_\omega.$$

Concluimos que $A_n \setminus E \in K_n$, luego $D \in \mathrm{Sp}_0^+(H)$. ■

Teorema 9.43 *Si H es una unión numerable de clases G^ω-booleanas, entonces $\mathrm{Sp}_1^+(H)$ es G^ω-booleana.*

Demostración: Sea $H = \bigcup_{n\in\omega} H_n$, donde cada H_n es G^ω-booleana. Por 9.16 se cumple que $H_n = \mathrm{In}(b_n)$, para cierto grado b_n no autodual. Llamemos $b = \bigoplus_{n\in\omega} b_n$. Entonces, por 9.39 y 9.41,

$$\mathrm{Sp}_1^+(H) = \mathrm{Sp}_1^+(\mathrm{Pt}_0(H)) = \mathrm{Sp}_1^+(\mathrm{In}(b)) = \mathrm{In}(b^\sharp).$$

Supongamos que $b \in \mathbf{\Delta}_2^0$. En la prueba del teorema 8.62 hemos visto que $(\neg 1)^\sharp = (\neg 1)^{\sharp\sharp}$ es un grado $\mathbf{\Sigma}_2^0$-completo, por lo que $b \leq (\neg 1)^\sharp$, de donde $b^\sharp \leq (\neg 1)^{\sharp\sharp} = (\neg 1)^\sharp$. Salvo si $b = 1$, tenemos que $\neg 1 \leq b$, luego $(\neg 1)^\sharp \leq b^\sharp$. En definitiva, $b^\sharp = (\neg 1)^\sharp$ o bien $b^\sharp = 1^\sharp = 1$. Por consiguiente, $\mathrm{In}(b^\sharp) = \mathbf{\Sigma}_2^0$ o bien $\mathrm{In}(b^\sharp) = 1$, y ambas clases son G^ω-booleanas.

Supongamos ahora que $b \notin \mathbf{\Delta}_2^0$. Definimos L como la clase formada por los conjuntos de la forma

$$D = \bigcup_{n\in\omega} (A_n \cap (G_n \setminus G_{n+1})),$$

donde $\{G_n\}_{n\in\omega}$ es una sucesión decreciente de abiertos y $A_n \in \mathrm{In}(b^*)$. Por el teorema anterior y 9.40 tenemos que $\mathrm{In}(b^*) = \mathrm{Sp}_0^+(\mathrm{In}(b))$ es una clase G^ω-booleana, luego también lo es $\mathrm{In}(b^*)^\omega$, así como la clase de sucesiones decrecientes de abiertos. Como el operador que define D es claramente booleano, concluimos que L es una clase G^ω-booleana, y sólo tenemos que probar que $\mathrm{In}(b^\sharp) = L$.

Como los conjuntos $G_n \setminus G_{n+1}$ son $\mathbf{\Sigma}_2^0$ y disjuntos dos a dos, es obvio que

$$L \subset \mathrm{Sp}_1^+(\mathrm{In}(b^*)) = \mathrm{Sp}_1^+(\mathrm{Sp}_0^+(\mathrm{In}(b))) = \mathrm{Sp}_1^+(\mathrm{In}(b)) = \mathrm{In}(b^\sharp).$$

Como L es G^ω-booleana, es cerrada para sustituciones continuas, luego para probar la inclusión opuesta basta ver que $b^\sharp \subset L$. Para ello, tomamos $B \in b$ y tenemos que ver que $B^\sharp \in L$. Para ello tomamos la sucesión $\{G_n\}_{n\in\omega}$ en la que G_n es el conjunto de los elementos de $\mathcal{N}$ con al menos n ceros. Claramente es una sucesión decreciente de abiertos. Sea $A_n = A^\sharp \cap (G_n \setminus G_{n+1})$. Claramente

$$B^\sharp = \bigcup_{n\in\omega} (A_n \cap (G_n \setminus G_{n+1})),$$

luego sólo necesitamos demostrar que $A_n \leq B^* \equiv B + \varnothing$.

Observemos que A_0 está formado por las sucesiones x^+ con $x \in B$. Equivalentemente, $A_0 = \varnothing + B$. Para $n > 0$, tenemos que A_n está formado por las sucesiones de la forma $s^\frown 0^\frown x^+$, donde s tiene exactamente $n-1$ ceros y $x \in B$. De la propia definición de suma se sigue entonces que

$$A_n = \varnothing + B + \underbrace{\varnothing + \cdots + \varnothing}_{n}.$$

Como $\varnothing + \varnothing = \varnothing$, resulta que $[A_n] = 1 + b + 1$. Ahora usamos que $r_\omega \leq b$ por lo que, como en la prueba del teorema anterior, $1 + b = b$, luego $[A_n] = b + 1 = [B^*]$. ■

Seguidamente demostramos que las diferencias de $\mathbf{\Sigma}^0_\beta$ pueden obtenerse iterando el operador Sp_β. Primer definimos las iteraciones, luego lo probamos para $\beta = 0$ y luego en general:

Definición 9.44 Si $\mathbf{\Gamma} \subset \mathcal{PN}$, $\alpha < \omega_1$ y $\beta \leq \omega_1$, definimos

$$\mathrm{Sp}^0_\alpha(\mathbf{\Gamma}) = \mathbf{\Gamma}, \qquad \mathrm{Sp}^\beta_\alpha(\mathbf{\Gamma}) = \mathrm{Sp}_\alpha(\bigcup_{\delta<\beta} \mathrm{Sp}^\delta_\alpha(\mathbf{\Gamma})).$$

Usando 9.37 es fácil ver (por inducción sobre β) que

$$\mathrm{Sp}^\beta_\alpha(\mathbf{\Gamma})^\gamma = \mathrm{Sp}^\beta_{\gamma+\alpha}(\mathbf{\Gamma}^\gamma).$$

Teorema 9.45 *Si $1 \leq \alpha < \omega_1$, se cumple que*

$$\mathrm{Df}_\alpha(\mathbf{\Sigma}^0_1) \cup \neg\mathrm{Df}_\alpha(\mathbf{\Sigma}^0_1) = \mathrm{Sp}^\alpha_0(\{\varnothing, \mathcal{N}\}).$$

Demostración: Para $\alpha = 1$ es fácil comprobar que

$$\mathrm{Sp}^1_0(\{\varnothing,\mathcal{N}\}) = \mathrm{Sp}^+_0(\{\varnothing,\mathcal{N}\}) \cup \mathrm{Sp}^-_0(\{\varnothing,\mathcal{N}\}) = \mathbf{\Sigma}^0_1 \cup \mathbf{\Pi}^0_1 = \mathrm{Df}_1(\mathbf{\Sigma}^0_1) \cup \mathrm{Df}_1(\mathbf{\Pi}^0_1).$$

Tomemos ahora $\alpha > 1$ y supongamos el teorema cierto para $\delta < \alpha$. Entonces

$$\begin{aligned}
\mathrm{Sp}^\alpha_0(\{\varnothing,\mathcal{N}\}) &= \mathrm{Sp}_0(\bigcup_{1\leq\delta<\alpha} \mathrm{Sp}^\delta_0(\{\varnothing,\mathcal{N}\})) \\
&= \mathrm{Sp}_0(\mathrm{Pt}_0(\bigcup_{1\leq\delta<\alpha} (\mathrm{In}(r_\delta + 1) \cup \mathrm{Im}(r_\delta + \neg 1)))) \\
&= \mathrm{Sp}_0(\mathrm{In}(\bigoplus_{1\leq\delta<\alpha} ((r_\delta + 1) \oplus (r_\delta + \neg 1))) = \mathrm{Sp}_0(\mathrm{In}(r_\alpha)) \\
&= \mathrm{Sp}^+_0(\mathrm{In}(r_\alpha)) \cup \mathrm{Sp}^-_0(\mathrm{In}(r_\alpha)) = \mathrm{In}(r_\alpha + 1) \cup \mathrm{In}(r_\alpha + \neg 1) \\
&= \mathrm{Df}_\alpha(\mathbf{\Sigma}^0_1) \cup \neg\mathrm{Df}_\alpha(\mathbf{\Sigma}^0_1)
\end{aligned}$$

Notemos que podemos tomar la unión para $1 \leq \delta < \alpha$ porque tenemos la inclusión $\mathrm{Sp}^0_0(\{\varnothing,\mathcal{N}\}) \subset \mathrm{Sp}^1_0(\{\varnothing,\mathcal{N}\})$, luego hemos usado la hipótesis de inducción más 9.17 y luego 9.39 aplicado a la familia numerable formada por todos los $r_\delta + 1$ y $r_\delta + \neg 1$. ■

Teorema 9.46 *Si $1 \leq \alpha, \beta < \omega_1$, se cumple que*

$$\mathrm{Df}_\alpha(\mathbf{\Sigma}^0_\beta) \cup \neg\mathrm{Df}_\alpha(\mathbf{\Sigma}^0_\beta) = \mathrm{Sp}^\alpha_\beta(\{\varnothing, \mathcal{N}\}).$$

Demostración:

$$\begin{aligned}\mathrm{Df}_\alpha(\mathbf{\Sigma}^0_{1+\beta}) \cup \neg\mathrm{Df}_\alpha(\mathbf{\Sigma}^0_{1+\beta}) &= \mathrm{Df}_\alpha((\mathbf{\Sigma}^0_1)^\beta) \cup \neg\mathrm{Df}_\alpha((\mathbf{\Sigma}^0_1)^\beta)\\ = (\mathrm{Df}_\alpha(\mathbf{\Sigma}^0_1))^\beta \cup \neg(\mathrm{Df}_\alpha(\mathbf{\Sigma}^0_1))^\beta &= (\mathrm{Df}_\alpha(\mathbf{\Sigma}^0_1) \cup \neg\mathrm{Df}_\alpha(\mathbf{\Sigma}^0_1))^\beta\\ = (\mathrm{Sp}^\alpha_0(\{\varnothing, \mathcal{N}\}))^\beta &= \mathrm{Sp}^\alpha_\beta(\{\varnothing, \mathcal{N}\}^\beta) = \mathrm{Sp}^\alpha_\beta(\{\varnothing, \mathcal{N}\}).\end{aligned}$$

■

En estos términos, el teorema 9.32 se puede expresar en la forma

$$\mathbf{\Delta}^0_{\alpha+1} = \bigcup_{1\leq\delta<\omega_1} \mathrm{Sp}^\delta_\alpha(\{\varnothing, \mathcal{N}\}) = \mathrm{Sp}^{\omega_1}_\alpha(\{\varnothing, \mathcal{N}\}).$$

La ventaja de esta expresión es que es generalizable al caso de ordinales límite. Para ello, si λ es un ordinal límite, definimos

$$\mathrm{Sp}_{(\lambda)}(\mathbf{\Gamma}) = \bigcup_{\delta<\lambda} \mathrm{Sp}_\delta(\mathbf{\Gamma})$$

y para cada ordinal $\beta \leq \omega_1$ definimos $\mathrm{Sp}^\beta_{(\lambda)}(\mathbf{\Gamma})$ análogamente a como hemos definido $\mathrm{Sp}^\beta_\lambda(\mathbf{\Gamma})$, pero cambiando Sp_λ por $\mathrm{Sp}_{(\lambda)}$.

Observemos que esta definición sólo tiene interés para ordinales límite, pues $\mathrm{Sp}_{(\alpha+1)} = \mathrm{Sp}_\alpha$, luego también $\mathrm{Sp}^\beta_{(\alpha+1)} = \mathrm{Sp}^\beta_\alpha$.

Teorema 9.47 *Si una clase $\mathbf{\Gamma} \subset \mathcal{PN}$ contiene a $\varnothing$ y a $\mathcal{N}$, entonces, para todo ordinal límite λ, se cumple que*

$$\mathrm{Pt}_\lambda(\mathbf{\Gamma}) = \mathrm{Sp}^{\omega_1}_{(\lambda)}(\mathbf{\Gamma}).$$

Demostración: Observemos en primer lugar que si $H \subset \mathrm{Pt}_\lambda(\mathbf{\Gamma})$ y $\delta < \lambda$, entonces, por 9.34 tenemos que

$$\mathrm{Sp}_\delta(H) \subset \mathrm{Pt}_\lambda(H) \subset \mathrm{Pt}_\lambda(\mathrm{Pt}_\lambda(\mathbf{\Gamma})) = \mathrm{Pt}_\lambda(\mathbf{\Gamma}),$$

luego $\mathrm{Sp}_{(\lambda)}(H) \subset \mathrm{Pt}_\lambda(\mathbf{\Gamma})$. De aquí deducimos por inducción sobre β que $\mathrm{Sp}^\beta_{(\lambda)}(\mathbf{\Gamma}) \subset \mathrm{Pt}_\lambda(\mathbf{\Gamma})$. En efecto, es trivialmente cierto para $\beta = 0$ y, si vale para $\delta < \beta$, entonces

$$\mathrm{Sp}^\beta_{(\lambda)}(\mathbf{\Gamma}) = \mathrm{Sp}_{(\lambda)}(\bigcup_{\delta<\lambda} \mathrm{Sp}^\delta_{(\lambda)}(\mathbf{\Gamma})) \subset \mathrm{Pt}_\lambda(\mathbf{\Gamma}),$$

aplicando lo anterior a la clase $H = \bigcup\limits_{\delta<\lambda} \mathrm{Sp}^\delta_{(\lambda)}(\mathbf{\Gamma})$. En particular tenemos la inclusión $\mathrm{Sp}^{\omega_1}_{(\lambda)}(\mathbf{\Gamma}) \subset \mathrm{Pt}_\lambda(\mathbf{\Gamma})$.

Para probar la inclusión opuesta tomamos $B \in \mathrm{Pt}_\lambda(\mathbf{\Gamma})$. Esto significa que

$$B = \bigcup_{n\in\omega} (A'_n \cap G'_n),$$

donde $\{G'_n\}_{n\in\omega}$ es una partición de $\mathcal{N}$ en conjuntos $\mathbf{\Sigma}^0_\lambda$ y $\{A'_n\}_{n\in\omega} \in \mathbf{\Gamma}^\omega$.

Podemos expresar

$$G'_n = \bigcup_{m\in\omega} D''_{nm},$$

con $D''_{nm} \in \bigcup\limits_{\delta<\lambda} \mathbf{\Delta}^0_\delta$ y, como esta unión es un álgebra de Boole, podemos suponer que los conjuntos $\{D''_{nm}\}_{m\in\omega}$ son disjuntos dos a dos. Si llamamos $A''_{nm} = A''_n$, tenemos que

$$B = \bigcup_{n,m\in\omega} (A''_{nm} \cap D''_{nm}).$$

Reordenando estos conjuntos tenemos que

$$B = \bigcup_{n\in\omega} (A_n \cap D'_n),$$

donde $A_n \in \mathbf{\Gamma}$ y $D'_n \in \mathbf{\Delta}^0_{1+\delta_n}$ con $\delta_n < \lambda$ y la sucesión $\{D'_n\}_{n\in\omega}$ es una partición de $\mathcal{N}$. Ahora,

$$D'_n \in \mathbf{\Sigma}^0_{1+\delta_n} \cap \mathbf{\Pi}^0_{1+\delta_n} = (\mathbf{\Sigma}^0_1)^{\delta_n} \cap (\mathbf{\Pi}^0_1)^{\delta_n} = (\mathbf{\Sigma}^0_1 \cap \mathbf{\Pi}^0_1)^{\delta_n} = (\mathbf{\Delta}^0_1)^{\delta_n}.$$

Por 9.23 existe un $E \subset \mathcal{N}$ cerrado y una reducción $h : \mathcal{N} \longrightarrow E$ de clase λ y una sucesión $\{D_n\}_{n\in\omega}$ de conjuntos $\mathbf{\Delta}^0_1$ de modo que $D'_n = h^{-1}[D_n]$. Más aún, podemos exigir que la sucesión $\{\delta_n\}_{n\in\omega}$ sea creciente (pues podemos sustituir cualquiera de sus términos por otro mayor), luego el teorema nos asegura que si $s \in \omega^n$ entonces $h^{-1}[B_s] \in \mathbf{\Sigma}^0_{1+\delta_n}$. De hecho, $h^{-1}[B_s] \in \mathbf{\Delta}^0_{1+\delta_n}$, pues su complementario es unión finita de conjuntos del mismo tipo.

Para cada $s \in \omega^n$ sea $C_s = B \cap h^{-1}[B_s]$. Como $B_s = \bigcup\limits_{k\in\omega} B_{s^\frown k}$, resulta que $C_s = \bigcup\limits_{k\in\omega} C_{s^\frown k} = \bigcup\limits_{k\in\omega} (C_{s^\frown k} \cap h^{-1}[B_{s^\frown k}])$.

Observemos que $h^{-1}[B_{s^\frown k}] \in \mathbf{\Delta}^0_{1+\delta_{n+1}}$ y que los conjuntos $\{h^{-1}[B_{s^\frown k}]\}_{k\in\omega}$ son disjuntos dos a dos. Llamemos

$$V = \{s \in \omega^{<\omega} \mid C_s \in \mathrm{Sp}^{\omega_1}_{(\lambda)}(\mathbf{\Gamma})\}.$$

Así, hemos probado que, dado $s \in \omega^n$ si $n^\frown k \in V$ para todo $k \in \omega$, entonces

$$C_s \in \mathrm{Sp}_{\delta_{n+1}}(\mathrm{Sp}^{\omega_1}_{(\lambda)}(\mathbf{\Gamma})) \subset \mathrm{Sp}^{\omega_1}_{(\lambda)}(\mathbf{\Gamma}).$$

La última inclusión se prueba como sigue:

$$\mathrm{Sp}_{\delta_{n+1}}(\mathrm{Sp}^{\omega_1}_{(\lambda)}(\mathbf{\Gamma})) = \mathrm{Sp}_{\delta_{n+1}}(\bigcup_{\beta<\omega_1} \mathrm{Sp}^{\beta}_{(\lambda)}(\mathbf{\Gamma})) = \bigcup_{\beta<\omega_1} \mathrm{Sp}_{\delta_{n+1}}(\mathrm{Sp}^{\beta}_{(\lambda)}(\mathbf{\Gamma}))$$

$$\subset \bigcup_{\beta<\omega_1} \mathrm{Sp}_{(\lambda)}(\mathrm{Sp}^{\beta}_{(\lambda)}(\mathbf{\Gamma})) = \bigcup_{\beta<\omega_1} \mathrm{Sp}^{\beta+1}_{(\lambda)}(\mathbf{\Gamma}) = \mathrm{Sp}^{\omega_1}_{(\lambda)}(\mathbf{\Gamma}).$$

Notemos que hemos podido extraer la unión para $\beta < \omega_1$ porque las clases Sp_δ se definen mediante uniones numerables.

Ahora probamos que $\varnothing \in V$. En caso contrario, por lo que acabamos de probar existiría un $k_0 \in \omega$ tal que $(k_0) \notin V$, luego existiría un $k_1 \in \omega$ tal que $(k_0, k_1) \notin V$ y, en general, existiría un $x \in \mathcal{N}$ tal que $x|_n \notin V$ para todo $n \in \omega$.

Si $x \notin E$, entonces existe un $n \in \omega$ tal que $B_{x|_n} \subset \neg E$. Si, por el contrario, $x \in E$, entonces, tomamos un $m \in \omega$ tal que $x \in D_m$ y un $n \in \omega$ tal que $B_{x|_n} \subset D_m$.

En el primer caso $C_{x|_n} = B \cap h^{-1}[B_{x|_n}] = B \cap \varnothing = \varnothing \in \mathbf{\Gamma} \subset \mathrm{Sp}^{\omega_1}_{(\lambda)}(\mathbf{\Gamma})$, luego $x|_n \in V$, contradicción. En el segundo caso $h^{-1}[B_{x|_n}] \subset D'_m$, luego

$$C_{x|_n} = B \cap h^{-1}[B_{x|_n}] = \bigcup_{k \in \omega} (A_k \cap D'_k) \cap h^{-1}[B_{x|_n}]$$

$$= A_m \cap h^{-1}[B_{x|_n}] \in \mathrm{Sp}_{\delta_n}(\mathbf{\Gamma}) \subset \mathrm{Sp}^{\omega_1}_{(\lambda)}(\mathbf{\Gamma}),$$

y de nuevo llegamos a la contradicción $x|_n \in V$. Esto prueba que $\varnothing \in V$, lo que significa que $B = C_\varnothing \in \mathrm{Sp}^{\omega_1}_{(\lambda)}(\mathbf{\Gamma})$, como queríamos probar. ■

Con esto podemos concluir:

Teorema 9.48 *Si* $1 \leq \lambda < \omega_1$*, se cumple que*

$$\mathbf{\Delta}^0_{1+\lambda} = \mathrm{Sp}^{\omega_1}_{(\lambda)}(\{\varnothing, \mathcal{N}\}).$$

DEMOSTRACIÓN: Para $\lambda = \alpha + 1$ la igualdad equivale a la que hemos obtenido tras el teorema 9.46. Si λ es un ordinal límite, usamos el teorema anterior:

$$\mathbf{\Delta}_{1+\lambda} = \mathrm{Pt}_\lambda(\{\varnothing, \mathcal{N}\}) = \mathrm{Sp}^{\omega_1}_{(\lambda)}(\{\varnothing, \mathcal{N}\}).$$

(Notemos que, por definición $\mathrm{Pt}_\lambda(\{\varnothing, \mathcal{N}\})$ está formada por las uniones numerables disjuntas de conjuntos $\mathbf{\Sigma}^0_{1+\lambda}$, pero, como $\mathbf{\Sigma}^0_{1+\lambda}$ es cerrada para uniones numerables, cada conjunto de la unión es de hecho $\mathbf{\Delta}^0_{1+\lambda}$, porque su complementario también es $\mathbf{\Sigma}^0_{1+\lambda}$.) ■

Notemos que la definición de $\mathrm{Sp}^{\omega_1}_{(\lambda)}(\{\varnothing, \mathcal{N}\})$ sólo involucra conjuntos $\mathbf{\Sigma}^0_\delta$ para $\delta < \lambda$, luego el teorema describe una construcción de $\mathbf{\Delta}^0_\lambda$ a partir de los conjuntos anteriores en la jerarquía de Borel.

9.2 Grados de conjuntos de Borel

En esta sección relacionaremos los conceptos de la sección precedente con los grados de Wadge de los conjuntos de Borel. En particular, siempre que hablemos de grados de Wadge se sobrentenderá que se trata de grados de Wadge de conjuntos de Borel.

9.2.1 Grados booleanos

Definición 9.49 Un grado $a \in \mathbb{G}$ es *booleano* si la clase $\mathrm{In}(a)$ es G^ω-booleana. Diremos que a es un *supremo booleano* si es el supremo (pero no el máximo) de una familia numerable de grados booleanos.

El teorema 9.16 nos da que la clase $\mathrm{In}(a)$ no es autodual, y como claramente $\neg\mathrm{In}(a) = \mathrm{In}(\neg a)$, concluimos que los grados booleanos no son autoduales. Más aún, esta misma relación implica que el complementario de un grado booleano es también booleano (pues $\neg$ es un operador booleano).

Teorema 9.50 *Si $\{b_n\}_{\in\omega}$ es una familia de grados booleanos o supremos booleanos, su supremo es booleano o supremo booleano.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $\{a_{nm}\}_{m\in\omega}$ una sucesión de grados booleanos cuyo supremo sea b_n (si b_n es booleano, podemos tomar $a_{nm} = b_n$ para todo m). Es claro entonces que $\sup_n\{b_n\} = \sup_{\mathrm{n,m}} a_{nm}$. Si dicho supremo es uno de los a_{nm} es booleano, y en caso contrario es supremo booleano. ■

Teorema 9.51 *Si a es un supremo booleano, entonces $a+1$ es booleano.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $a = \bigoplus\limits_{n\in\omega} b_n$, donde cada b_n es booleano y ninguno de ellos es a. Entonces, usando 9.40 y 9.39

$$\mathrm{In}(a+1) = \mathrm{Sp}_0^+(\mathrm{In}(a)) = \mathrm{Sp}_0^+(\mathrm{Pt}_0(\bigcup_{n\in\omega}\mathrm{In}(b_n))) = \mathrm{Sp}_0^+(\bigcup_{n\in\omega}\mathrm{In}(b_n)),$$

que es una clase G^ω-booleana por 9.42. ■

Teorema 9.52 *Sea b un grado supremo booleano. Si c es booleano o supremo booleano, lo mismo cumple $b+c$.*

DEMOSTRACIÓN: Veamos en primer lugar que el teorema es cierto cuando $c \in \mathbf{\Delta}_2^0$, de modo que $c = 1, \neg 1, r_\alpha, r_\alpha + 1, r_\alpha + \neg 1$. Lo probamos por inducción sobre el rango de c.

Si $c = 1$ el resultado es cierto por el teorema anterior y si $c = \neg 1$ porque $b + \neg 1 = \neg(b+1)$.

Si $c = r_1 = 1 \oplus \neg 1$, entonces $b + c = (b+1) \oplus (b + \neg 1)$ y por hipótesis de inducción los dos sumandos son booleanos (e incomparables), luego $b+c$ es supremo booleano.

Si $c = r_{\alpha+1} = r_\alpha + (1 \oplus \neg 1) = (r_\alpha + 1) \oplus (r_\alpha + \neg 1)$ el razonamiento es el mismo.

Si $c = r_\lambda = \bigoplus\limits_{\delta<\lambda} r_\delta$, entonces $b + c = \bigoplus\limits_{\delta<\lambda}(b + r_\delta) =$ es supremo booleano, por hipótesis de inducción y el teorema 9.50.

Si $c = r_\alpha + 1$ entonces $b + c = (b + r_\alpha) + 1$, que es booleano por el teorema anterior y la hipótesis de inducción. Por último, $b + r_\alpha + \neg 1 = \neg(b + r_\alpha + 1)$.

Así pues, podemos suponer que $c \notin \mathbf{\Delta}_2^0$ y, en particular, que $c = 1 + c$ (está demostrado al final de la prueba de 9.42). Supongamos además que c es booleano. Sea $H \subset \mathcal{PN}$ la clase formada por los conjuntos de la forma

$$D = (B \cap G) \cup (\neg G \cap C),$$

donde $G \in \mathbf{\Sigma}_1^0$, $B \in \mathrm{In}(b+1)$, $C \in \mathrm{In}(c)$. Como estas tres clases son G^ω-booleanas y el operador que define a D es claramente booleano, concluimos que la clase H es G^ω-booleana. Por consiguiente, basta probar que $\mathrm{In}(b+c) = H$.

Si $D \in H$ tiene la forma indicada, como $b + c = b + 1 + c$, vemos que $B + C \in \mathrm{In}(b+c)$, y una estrategia ganadora para II en $J_p(D, B+C)$ es sumar 1 a las jugadas de I mientras no cumplan $B_s \subset G$ y, si esto sucede, jugar un 0 y copiar las jugadas de I desde la primera. Por lo tanto, $D \in \mathrm{In}(b+c)$.

Tomemos ahora $B \in b$ y $C \in c$ y veamos que $B + C \in H$. En efecto,

$$B + C = \{s^{+\frown}0^\frown x \mid s \in \omega^{<\omega} \wedge x \in B\} \cup \{y^+ \mid y \in C\} = (B + \varnothing) \cup (\varnothing + C),$$

y observamos que $[B + \varnothing] = b + 1$, $[\varnothing + C] = 1 + c = c$. Además, si definimos

$$G = \{x \in \mathcal{N} \mid \bigvee n \in \omega\ x(n) = 0\} = \mathcal{N} + \varnothing,$$

tenemos que G es abierto, $B + \varnothing \subset G$ y $\varnothing + C \subset \neg G$, luego $B + C \in H$.

Supongamos ahora que c es supremo booleano. Entonces $c = \bigoplus\limits_{n\in\omega} c_n$, donde cada c_n es booleano y ninguno de ellos es c. Entonces $b+c = \bigoplus\limits_{n\in\omega}(b+c_n)$, donde cada $b + c_n$ es booleano por la parte ya probada y ninguno de ellos es $b + c$, por el teorema 8.47. Por lo tanto, $b + c$ es supremo booleano. ■

Teorema 9.53 *Si b es supremo booleano y $1 \leq \alpha < \omega_1$, entonces $b\alpha$ es supremo booleano.*

Demostración: Por inducción sobre α. Si $\alpha = 1$ es obvio. En general

$$b\alpha = \bigoplus_{1\leq\delta<\alpha} (b\delta + b),$$

y cada sumando es supremo booleano por hipótesis de inducción y por el teorema anterior. Por lo tanto $b\alpha$ es supremo booleano por 9.50. ■

Teorema 9.54 *Si b es supremo booleano, también lo es $b^\sharp$.*

Demostración: Sea $b = \bigoplus\limits_{n\in\omega} b_n$, donde cada b_n es booleano. Entonces

$$\mathrm{In}(b^\sharp) = \mathrm{Sp}_1^+(\mathrm{In}(b)) = \mathrm{Sp}_1^+(\mathrm{Pt}_0(\bigcup_{n\in\omega} \mathrm{In}(b_n))) = \mathrm{Sp}_1^+(\bigcup_{n\in\omega} \mathrm{In}(b_n)),$$

que es una clase G^ω-booleana por el teorema 9.43. ■

9.2.2 Las funciones j_α

Observemos que si a es un grado booleano y $\alpha < \omega_1$, entonces $\mathrm{In}(a)$ es una clase G^ω-booleana, luego $\mathrm{In}(a)^\alpha$ también lo es por 9.29, luego por 9.16 sabemos que $\mathrm{In}(a)^\alpha = \mathrm{In}(b)$, para un único grado booleano b. Esto nos permite definir:

Definición 9.55 Si a es un grado booleano y $\alpha < \omega_1$, definimos $j_\alpha(a)$ como el único grado booleano que cumple

$$\mathrm{In}(a)^\alpha = \mathrm{In}(j_\alpha(a)).$$

Observemos que $j_\alpha(\neg a) = \neg j_\alpha(a)$. El teorema siguiente nos permite extender la definición a supremos booleanos:

Teorema 9.56 *Si $\alpha < \omega_1$ y $\{a_i\}_{i\in I}$ y $\{a'_j\}_{j\in J}$ son dos familias de grados booleanos tales que $\sup\limits_{i\in I} a_i \leq \sup\limits_{j\in J} a'_j$, entonces $\sup\limits_{i\in I} j_\alpha(a_i) \leq \sup\limits_{j\in J} j_\alpha(a'_j)$.*

DEMOSTRACIÓN: Dado $i \in I$, debe existir un $j \in J$ tal que $a_i \leq a'_j$, pues en caso contrario $a'_j \leq \neg a_i$ para todo $j \in J$, luego

$$a_i \leq \sup_{i\in I} a_n \leq \sup_{j\in J} a'_j \leq \neg a_i,$$

contradicción, pues los grados booleanos no son autoduales. Así pues, tenemos que $a_i \leq a'_j$, luego $\mathrm{In}(a_i) \subset \mathrm{In}(a'_j)$, luego $\mathrm{In}(a_i)^\alpha \subset \mathrm{In}(a'_j)^\alpha$, luego $j_\alpha(a_i) \leq j_\alpha(a'_j) \leq \sup\limits_{j\in J} j_\alpha(a'_j)$, luego $\sup\limits_{i\in I} j_\alpha(a_i) \leq \sup\limits_{j\in J} j_\alpha(a'_j)$. ■

Definición 9.57 Si b es un grado supremo booleano y $\alpha < \omega_1$, definimos $j_\alpha(b) = \sup\limits_{n\in\omega} j_\alpha(a_n)$, donde $\{a_n\}_{n\in\omega}$ es cualquier sucesión de grados booleanos cuyo supremo sea b.

Teorema 9.58 *Si b y b' son grados booleanos o supremos booleanos y $\alpha < \omega_1$, entonces $b \leq b'$ si y sólo si $j_\alpha(b) \leq j_\alpha(b')$.*

DEMOSTRACIÓN: Pongamos que $b = \sup\limits_{n\in\omega} a_n$ y $b' = \sup\limits_{n\in\omega} a'_n$, donde los grados a_n y a'_n son booleanos (si, por ejemplo, b es booleano, basta tomar $a_n = b$ para todo n). Por el teorema anterior, si $b \leq b'$, también $j_\alpha(b) \leq j_\alpha(b')$.

Supongamos ahora que $j_\alpha(b) \leq j_\alpha(b')$. Entonces, por el mismo argumento empleado en el teorema anterior, para cada $n \in \omega$ existe un $m \in \omega$ tal que $j_\alpha(a_n) \leq j_\alpha(a'_m)$. Esto implica que $a_n \leq a'_m$, pues en caso contrario $\neg a'_m \leq a_n$, luego $\neg j_\alpha(a'_m) \leq j_\alpha(a_n) \leq j_\alpha(a'_m)$, lo cual es imposible, porque $j_\alpha(a'_m)$ es booleano, luego no es autodual.

Así pues, $a_n \leq a'_m \leq b'$, luego $b = \sup\limits_{n\in\omega} a_n \leq b'$. ■

Teorema 9.59 *Sea $\alpha < \omega_1$, sea I un conjunto arbitrario y sean c y $\{a_i\}_{i\in I}$ grados booleanos o supremos booleanos. Entonces, si $c = \sup\limits_{i\in I} a_i$, también*

$$j_\alpha(c) = \sup_{i\in I} j_\alpha(a_i).$$

Demostración: Como cada a_i es supremo de una cantidad numerable de grados booleanos, no perdemos generalidad si suponemos que todos los a_i son booleanos. Por otra parte, podemos expresar $c = \sup\limits_{n\in\omega} b_n$, donde los grados b_n también son booleanos. El teorema 9.56 nos da entonces que

$$j_\alpha(c) = \sup_{n\in\omega} j_\alpha(b_n) = \sup_{i\in I} j_\alpha(a_i).$$

■

9.2.3 Grados regulares

Definición 9.60 *Un grado b es regular si todos los grados $c \leq b$ son booleanos o supremos booleanos.*

Veremos que en realidad todos los grados de Borel son regulares.

Teorema 9.61 *Se cumple:*

a) Si b es un grado regular, también lo es $\neg b$.

b) Si b es un grado supremo booleano regular, entonces b^* y $b^\sharp$ son regulares.

c) Todo supremo numerable de grados regulares es regular.

d) La suma de un grado supremo booleano regular y un grado regular es regular.

e) Si b es un grado supremo booleano regular y $1 \leq \alpha < \omega_1$, entonces $b\alpha$ es regular.

Demostración: a) Si b no es autodual, los grados $c \leq \neg b$ son los $c \leq b$ menos b y más $\neg b$. Como b es booleano, $\neg b$ también lo es luego es regular.

b) Los grados $c \leq b^*$ son los grados $c \leq b$ y b^*. Como b es supremo booleano, b^* es booleano, luego es regular. El caso de $b^\sharp$ se sigue del teorema 8.57 y del apartado e) (cuya prueba, por supuesto, no se basa en ésta).

c) Teniendo en cuenta que un supremo numerable de grados booleanos o supremos booleanos es supremo booleano, el resultado es inmediato.

d) Sea b un supremo booleano regular y c regular. Si $d \leq b + c$, entonces, o bien $d \leq b$, en cuyo caso es regular, o bien $b \leq d$, en cuyo caso, por 8.48, es de la forma $d = b + e \leq b + c$, para un cierto grado $e \leq c$, luego e es regular y entonces d es booleano o supremo booleano por 9.52. Por lo tanto $b + c$ es regular.

e) Se prueba inmediatamente por inducción sobre α usando los apartados c) y d). ■

Ahora es inmediato que todos los grados $\mathbf{\Delta}_2^0$ son regulares. En particular $r_{1+\alpha}$ es el α-ésimo grado supremo booleano regular, para $\alpha < \omega_1$. Si Λ es el ordinal de los grados supremos booleanos regulares, podemos extender la notación para todo $\alpha < \Lambda$, es decir:

Definición 9.62 Llamaremos Λ al ordinal del conjunto de grados supremos booleanos regulares. Para cada $\alpha < \Lambda$, llamaremos $r_{1+\alpha}$ al α-ésimo grado supremo booleano regular.

Teorema 9.63 Λ *es un ordinal límite de cofinalidad no numerable cerrado para sumas y multiplicación por ordinales* $\leq \omega_1$. *Además:*

a) Si $\{\alpha_n\}_{n\in\omega}$ *es una sucesión en* Λ*, entonces* $r_{\sup_n \alpha_n} = \sup_n r_{\alpha_n}$.

b) $r_{\alpha+1} = r_\alpha^* \oplus r_\alpha^\circ$.

c) $r_{\alpha+\beta} = r_\alpha + r_\beta$.

d) $r_{\alpha\beta} = r_\alpha\beta$.

e) $r_{\alpha\omega_1} = r_\alpha^\sharp \oplus r_\alpha^\flat$.

Demostración: a) Por 9.61 sabemos que $b = \sup_n r_{\alpha_n}$ es un grado regular. Si existe un m tal que $b = r_{\alpha_m}$, entonces es claro que $\alpha_m = \sup_n \alpha_n$ y la conclusión es trivial. En caso contrario b es un supremo booleano y tiene que ser de la forma r_α, para cierto $\alpha < \Lambda$, que claramente tiene que ser $\alpha = \sup_n \alpha_n$. Esto prueba además que Λ tiene cofinalidad no numerable (supuesto que sea un ordinal límite, cosa que probamos en b).

b) Por 9.61 sabemos que $r_\alpha^* \oplus r_\alpha^\circ$ es un grado regular supremo booleano, y obviamente es el menor grado en estas condiciones estrictamente mayor que r_α, luego es $r_{\alpha+1}$. Esto prueba que Λ es un ordinal límite.

c) Por 9.61 sabemos que $r_\alpha + r_\beta$ es regular, y por 9.52 es un supremo booleano. Por lo tanto $r_\alpha + r_\beta = r_\gamma$, para cierto $\gamma < \Lambda$. Más aún, en la prueba de 9.61 hemos visto que todo grado $d \leq r_\gamma$ es, o bien $d \leq r_\alpha$, o bien $d = r_\alpha + e$, con $e \leq r_\beta$. En particular, el conjunto de grados supremos booleanos $c < r_\alpha + r_\beta$ es

$$\{r_\delta \mid 1 \leq \delta \leq \alpha\} \cup \{r_\alpha + r_\delta \mid 1 \leq \delta < \beta\}.$$

Ambos son disjuntos, y todos los grados del primer conjunto son menores que los del segundo. Por lo tanto, el ordinal de este conjunto es la suma de los ordinales de los dos conjuntos en que lo hemos descompuesto. Aquí hay que distinguir casos: Si α y β son finitos, este conjunto es finito, luego γ también lo es, y tenemos la relación $\gamma - 1 = \alpha + \beta - 1$, luego $\gamma = \alpha + \beta$. Si α es finito y β infinito (luego γ también), la relación es $\gamma = \alpha + \beta$. Si α es infinito y β es finito, entonces $\gamma = \alpha + 1 + \beta - 1 = \alpha + \beta$, y si todos son infinitos, $\gamma = \alpha + 1 + \beta = \alpha + \beta$. En particular esto prueba que Λ es cerrado para sumas de ordinales.

d) Se prueba trivialmente por inducción sobre β.

e) Por el apartado anterior están definidos todos los grados $\{r_{\alpha\beta}\}_{\beta<\omega_1}$, con $r_{\alpha\beta} = r_\alpha\beta$. Por 9.61 sabemos que $r_\alpha^\sharp \oplus r_\alpha^\flat$ es regular, y es mayor que todos los grados $r_{\alpha\beta}$, por 8.59. Por lo tanto, $r_\alpha^\sharp \oplus r_\alpha^\flat = r_\lambda$, para cierto $\lambda > \alpha\beta$, para todo $\beta < \omega_1$, luego $\lambda \geq \alpha\omega_1$. En particular $\alpha\omega_1 \in \Lambda$ y queda probado que Λ es cerrado para la multiplicación por ω_1. Ahora bien, sabemos de hecho que $r_\alpha^\sharp$ y $r_\alpha^\flat$ son los menores grados mayores que todos los $r_{\alpha\beta}$, pero no son supremos booleanos. Por lo tanto, el grado siguiente, $r_\lambda = r_\alpha^\sharp \oplus r_\alpha^\flat$, es el menor supremo booleano mayor que todos los grados $r_{\alpha\beta}$. Necesariamente entonces $\lambda = \alpha\omega_1$. ■

Esto implica que Λ es al menos $\omega_1^{\omega_1}$ (exponenciación ordinal). Veremos que en realidad es bastante mayor.

9.2.4 Las funciones θ_α

Introducimos ahora una funciones θ_α que se corresponden con las funciones j_α a través de la enumeración $\{r_{1+\delta}\}_{\delta\in\Lambda}$ de los grados regulares:

Definición 9.64 Si $\alpha < \omega_1$, definimos

$$\theta_\alpha = \{(\beta,\gamma) \in \Lambda \times \Lambda \mid j_\alpha(r_{1+\beta}) = r_{1+\gamma}\}.$$

Teorema 9.65 $\theta_\alpha : \Lambda_\alpha \longrightarrow \Lambda$ *es una función creciente, continua cuyo dominio es un ordinal* Λ_α *cerrado en* Λ.

DEMOSTRACIÓN: Veamos en primer lugar que Λ_α es un ordinal. Si $\beta \in \Lambda_\alpha$ y $\delta < \beta$, entonces $r_{1+\delta} < r_{1+\beta}$, luego $j_\alpha(r_{1+\delta}) < j_\alpha(r_{1+\beta}) = r_{1+\theta_\alpha(\beta)}$, luego $j_\alpha(r_{1+\delta})$ es regular, y es un supremo booleano, por la propia definición de j_α. Por lo tanto $j_\alpha(r_{1+\delta}) = r_{1+\delta'}$, para cierto $\delta' < \theta_\alpha(\beta)$. Vemos entonces que existe $\theta_\alpha(\delta) = \delta' < \theta_\alpha(\beta)$.

En particular acabamos de probar que θ_α es creciente. Supongamos ahora que $\lambda \subset \Lambda_\alpha$ es un ordinal límite $\lambda \in \Lambda$ y veamos que $\lambda \in \Lambda_\alpha$, así como que $\theta_\alpha(\lambda) = \bigcup\limits_{\delta<\lambda} \theta_\alpha(\delta)$. Esto probará que Λ_α es cerrado en Λ y que θ_α es continua.

Supongamos en primer lugar que λ tiene cofinalidad numerable, de modo que $\lambda = \bigcup\limits_{n\in\omega} \delta_n$, luego $1 + \lambda = \bigcup\limits_{n\in\omega} (1 + \delta_n)$ y $r_{1+\lambda} = \sup_n r_{1+\delta_n}$, luego

$$j_\alpha(r_{1+\lambda}) = \sup_n j_\alpha(r_{1+\delta_n}) = \sup_n r_{1+\theta_\alpha(\delta_n)} = r_{1+\sup_n \theta_\alpha(\delta_n)}.$$

Esto prueba que $\lambda \in \Lambda_\alpha$ y que $\theta_\alpha(\lambda) = \bigcup\limits_{n\in\omega} \theta_\alpha(\delta_n) = \bigcup\limits_{\delta<\lambda} \theta_\alpha(\delta)$.

Si λ tiene cofinalidad no numerable, aun así, $r_{1+\lambda}$ es un supremo booleano, luego es el supremo (pero no el máximo) de un conjunto numerable de grados booleanos. La única posibilidad es que dicho conjunto tenga dos maximales de la forma c y $\neg c$, pues en caso contrario $r_{1+\lambda}$ sería booleano o λ tendría cofinalidad numerable. En definitiva, $r_{1+\lambda} = c \oplus \neg c$, donde c es un grado regular booleano.

Supongamos que un grado d cumple $d \leq c \wedge d \leq \neg c$. Si d es supremo booleano, entonces $d = r_{1+\delta}$, con $\delta < \lambda$. Si d es booleano, entonces tenemos $d \leq d \oplus \neg d < r_{1+\lambda}$, luego $d \leq r_{1+\delta} = d \oplus \neg d$, con $\delta < \lambda$. En definitiva:

$$\mathrm{In}(c) \cap \mathrm{In}(\neg c) = \bigcup_{\delta<\lambda} \mathrm{In}(r_{1+\delta}).$$

Tomando expansiones:

$$\mathrm{In}(c)^\alpha \cap \mathrm{In}(\neg c)^\alpha = \bigcup_{\delta<\lambda} \mathrm{In}(r_{1+\delta})^\alpha.$$

Ahora observamos que

$$\mathrm{In}(r_{1+\delta})^\alpha \subset \mathrm{In}(r_{1+\delta}+1)^\alpha = \mathrm{In}(j_\alpha(r_{1+\delta}+1)) \subset \mathrm{In}(j_\alpha(r_{1+\delta+1}))$$

$$\subset \mathrm{In}(j_\alpha(r_{1+\delta+1}+1)) = \mathrm{In}(r_{1+\delta+1}+1)^\alpha \subset \mathrm{In}(r_{1+\delta+2})^\alpha$$

luego

$$\mathrm{In}(j_\alpha(c)) \cap \mathrm{In}(\neg j_\alpha(c)) = \bigcup_{\delta<\lambda} \mathrm{In}(j_\alpha(r_{1+\delta+1})) = \bigcup_{\delta<\lambda} \mathrm{In}(j_\alpha(r_{1+\delta}))$$

$$= \bigcup_{\delta<\lambda} \mathrm{In}(r_{1+\theta_\alpha(\delta)}).$$

Así, todo grado estrictamente menor que $j_\alpha(c)$ es menor o igual que un $r_{1+\theta_\alpha(\delta)}$, luego es regular y, como $j_\alpha(c)$ es booleano por definición, concluimos que $j_\alpha(c)$ es regular, luego $j_\alpha(r_{1+\lambda}) = j_\alpha(c) \oplus \neg j_\alpha(c)$ también lo es. Así pues, $j_\alpha(r_{1+\lambda}) = r_{1+\beta}$, para cierto $\beta \in \Lambda$. Esto prueba que $\lambda \in \Lambda_\alpha$ y además $\theta_\alpha(\lambda) = \beta$.

Si $\epsilon < \theta_\alpha(\lambda)$, entonces $r_{1+\epsilon} < r_{1+\theta_\alpha(\lambda)} = j_\alpha(c) \oplus \neg j_\alpha(c)$, luego, según hemos visto, $r_{1+\epsilon} \leq r_{1+\theta_\alpha(\delta)}$, para cierto $\delta < \lambda$, luego $\epsilon \leq \theta_\alpha(\delta)$. Esto prueba que $\theta_\alpha(\lambda) = \bigcup\limits_{\delta<\lambda} \theta_\alpha(\delta)$. Por lo tanto, θ_α es continua en λ. ■

Notemos que si demostramos que Λ_α es cerrado para la operación $\delta \mapsto \delta+1$, el teorema anterior nos da que $\Lambda_\alpha = \Lambda$ (y veremos que siempre se da esta igualdad). Observemos que

$$j_\alpha(r_1) = j_\alpha(1 \oplus \neg 1) = j_\alpha(1) \oplus \neg j_\alpha(1) = 1 \oplus \neg 1 = r_1,$$

por lo que $\theta_\alpha(0) = 0$. Ahora podemos calcular la función θ_1:

Teorema 9.66 $\Lambda_1 = \Lambda$ *y para todo* $0 < \delta \in \Lambda$ *se cumple que* $\theta_1(\delta) = \omega_1^\delta$.

Demostración: Observemos que

$$j_1(r_2) = j_1((r_1+1) \oplus (r_1 + \neg 1) = j_1(r_1+1) \oplus j_1(r_1 + \neg 1).$$

Ahora,

$$\mathrm{In}(j_1(r_1+1)) = \mathrm{In}(r_1+1)^1 = (\mathbf{\Sigma}_1^0)^1 = \mathbf{\Sigma}_2^0 = \mathrm{In}(r_1^\sharp),$$

e igualmente $\mathrm{In}(j_1(r_1+1)) = \mathrm{In}(r_1^\flat)$, luego $j_1(r_1+1) = r_1^\sharp$, $j_1(r_1+\neg 1) = r_1^\flat$, luego, según el teorema 9.63:

$$j_1(r_2) = r_1^\sharp \oplus r_1^\flat = r_{\omega_1}.$$

Esto implica que $\theta_1(1) = \omega_1 = \omega_1^1$, como indica el enunciado. El caso general lo probamos por inducción sobre δ. Para ello observemos que si $b = \bigoplus\limits_{n\in\omega} a_n$, donde los grados a_n son regulares booleanos (no autoduales), entonces

$$\mathrm{In}(b^*) = \mathrm{Sp}_0^+(\mathrm{In}(b)) = \mathrm{Sp}_0^+(\mathrm{Pt}_0^+(\bigcup_{n\in\omega}\mathrm{In}(a_n))) = \mathrm{Sp}_0^+(\bigcup_{n\in\omega}\mathrm{In}(a_n)).$$

Por lo tanto, usando 9.37,

$$\mathrm{In}(j_1(b^*)) = \mathrm{In}(b^*)^1 = \mathrm{Sp}_1^+(\bigcup_{n\in\omega}\mathrm{In}(a_n)^1) = \mathrm{Sp}_1^+(\bigcup_{n\in\omega}\mathrm{In}(j_1(a_n)))$$

$$= \mathrm{Sp}_1^+(\mathrm{Pt}_0^+(\bigcup_{n\in\omega}\mathrm{In}(j_1(a_n)))) = \mathrm{Sp}_1^+(\mathrm{In}(\bigoplus_{n\in\omega} j_1(a_n)))$$

$$= \mathrm{Sp}_1^+(\mathrm{In}(j_1(b))) = \mathrm{In}(b^\sharp).$$

Por consiguiente:

$$j_1((b+1)\oplus(b+\neg 1)) = j_1(b)^\sharp \oplus j_1(b)^\flat.$$

De este modo, si $\delta \in \Lambda_1$ y $\theta_1(\delta) = \omega_1^\delta$, entonces, por 9.63,

$$j_1(r_{1+\delta+1}) = j_1((r_{1+\delta}+1)\oplus(r_{1+\delta}+\neg 1)) = j_1(r_{1+\delta})^\sharp \oplus j_1(r_{1+\delta})^\flat$$

$$= r^\sharp_{1+\theta_1(\delta)} \oplus r^\flat_{1+\theta_1(\delta)} = r^\sharp_{\omega_1^\delta} \oplus r^\flat_{\omega_1^\delta} = r_{\omega_1^{\delta+1}}.$$

Esto prueba que $\delta+1 \in \Lambda_1$ y que $\theta_1(\delta+1) = \omega_1^{\delta+1}$. En particular, con esto ya tenemos probado que $\Lambda_1 = \Lambda$, por la observación tras el teorema 9.65. Para terminar la prueba suponemos que $\lambda \in \Lambda$ es un ordinal límite y que $\theta_1(\delta) = \omega_1^\delta$ para todo $\delta < \lambda$. Entonces

$$\theta_1(\lambda) = \bigcup_{\delta<\lambda}\theta_1(\delta) = \bigcup_{\delta<\lambda}\omega_1^\delta = \omega_1^\lambda.$$

■

Conviene introducir la definición siguiente:

Definición 9.67 Para cada $\delta \in \Lambda$ definimos $R_\delta = \{A \in \mathcal{PN} \mid [A] < r_{1+\delta}\}$.

La importancia de estas clases es que sus expansiones se corresponden con las funciones θ_α en el sentido siguiente:

Teorema 9.68 *Si $\delta \in \Lambda$, entonces R_δ es una unión numerable de clases G^ω-booleanas y $(R_\delta)^\alpha = R_\beta$ si y sólo si $\delta \in \Lambda_\alpha \land \theta_\alpha(\delta) = \beta$.*

Demostración: Como $r_{1+\delta}$ es supremo booleano, podemos expresarlo en la forma $r_{1+\delta} = \bigoplus\limits_{n\in\omega} a_n$, donde los grados a_n son booleanos. Entonces, se cumple $[A] < r_{1+\delta}$ si y sólo si $[A] \leq a_n$ para algún n, es decir, que

$$R_\delta = \bigcup_{n\in\omega} \mathrm{In}(a_n),$$

que es una unión numerable de clases G^ω-booleanas.

Supongamos que $(R_\delta)^\alpha = R_\beta$ (lo que supone en particular que $\delta, \beta \in \Lambda$). Con la notación precedente,

$$R_\beta = \bigcup_{n\in\omega} \mathrm{In}(a_n)^\alpha = \bigcup_{n\in\omega} \mathrm{In}(j_\alpha(a_n)).$$

Como la sucesión $\{a_n\}_{n\in\omega}$ no tiene un elemento máximo, tampoco lo tiene $\{j_\alpha(a_n)\}_{n\in\omega}$, sino que su supremo es $j_\alpha(r_{1+\delta})$ y entonces es claro que

$$R_\beta = \{A \in \mathcal{PN} \mid [A] < j_\alpha(r_{1+\delta})\}.$$

Por tanto, $r_{1+\beta} = j_\alpha(r_{1+\delta})$, lo que a su vez implica que $\delta \in \Lambda_\alpha$ y $\theta_\alpha(\delta) = \beta$.

El recíproco es similar: como antes

$$(R_\delta)^\alpha = \{A \in \mathcal{PN} \mid [A] < j_\alpha(r_{1+\delta})\},$$

pero ahora $j_\alpha(r_{1+\delta}) = r_{1+\theta_\alpha(\delta)}$, luego $(R_\delta)^\alpha = R_{1+\theta_\alpha(\delta)}$. ■

Como primera aplicación probamos lo siguiente:

Teorema 9.69 *Si $\alpha, \beta < \omega_1$ cumplen que $\Lambda_\alpha = \Lambda_\beta = \Lambda$, entonces $\Lambda_{\alpha+\beta} = \Lambda$ y, para todo $\delta \in \Lambda$, se cumple que $\theta_{\alpha+\beta}(\delta) = \theta_\alpha(\theta_\beta(\delta))$.*

Demostración: Como R_δ es unión numerable de clases G^ω-booleanas, es fácil concluir mediante 9.30 que $(R_\delta)^{\alpha+\beta} = ((R_\delta)^\beta)^\alpha$. Por el teorema anterior $(R_\delta)^\beta = R_{\theta_\beta(\delta)}$, de donde a su vez $(R_\delta)^{\alpha+\beta} = R_{\theta_\alpha(\theta_\beta(\delta))}$ y, por la implicación opuesta que da el mismo teorema, $\delta \in \Lambda_{\alpha+\beta} \land \theta_{\alpha+\beta}(\delta) = \theta_\alpha(\theta_\beta(\delta))$. ■

Este teorema junto con 9.66 implica que para todo $n \in \omega$, $n > 0$ se cumple que $\Lambda_n = \Lambda$ y

$$\theta_n(\delta) = \omega_1^{\omega_1^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\omega_1^\delta}}}}},$$

donde ω_1 aparece n veces. En particular, $j_n(r_2) = r_{1+\theta_n(1)} = r_{\theta_n(1)}$ y, por otra parte,

$$j_n(r_2) = j_n(r_1 + 1) \oplus j_n(r_1 + \neg 1)$$
$$\mathrm{In}(j_n(r_1 + 1)) = \mathrm{In}(r_1 + 1)^n = (\mathbf{\Sigma}^0_1)^n = \mathbf{\Sigma}^0_{n+1},$$

luego $r_{\theta_n(1)}$ es el supremo del grado formado por los conjuntos $\mathbf{\Sigma}^0_{n+1} \setminus \mathbf{\Pi}^0_{n+1}$ y el formado por los conjuntos $\mathbf{\Pi}^0_{n+1} \setminus \mathbf{\Sigma}^0_{n+1}$, los grados menores que ambos son los grados de los conjuntos $\mathbf{\Delta}^0_{n+1}$, luego

$$\mathbf{\Delta}^0_{n+1} = \bigcup_{\delta<\theta_n(1)} \mathrm{In}(r_\delta).$$

Las clases R_δ pueden obtenerse recurrentemente como indican los dos teoremas siguientes:

Teorema 9.70 *Si $\delta \in \Lambda$, entonces $R_{\delta+1} = \mathrm{Sp}_0(R_\delta)$.*

DEMOSTRACIÓN: Como $r_{1+\delta}$ es un supremo booleano, existe una sucesión $\{a_n\}_{n\in\omega}$ de grados booleanos (regulares) cuyo supremo es $r_{1+\delta}$. Entonces, un conjunto $A \in \mathcal{PN}$ cumple $[A] < r_{1+\delta}$ si y sólo si $[A] \leq a_n$ para algún n, luego

$$R_{\delta+1} = \bigcup_{n\in\omega} \mathrm{In}(a_n).$$

Por otra parte, $r_{1+\delta+1} = \sup\{r^*_{1+\delta}, r^\circ_{1+\delta}\}$, luego, usando 9.40, 9.39,

$$R_{\delta+1} = \mathrm{In}(r^*_{1+\delta}) \cup \mathrm{In}(r^\circ_{1+\delta}) = \mathrm{Sp}_0^+(\mathrm{In}(r_{1+\delta})) \cup \mathrm{Sp}_0^-(\mathrm{In}(r_{1+\delta})) = \mathrm{Sp}_0(\mathrm{In}(r_{1+\delta}))$$

$$= \mathrm{Sp}_0(\mathrm{Pt}_0(\bigcup_{n\in\omega} \mathrm{In}(a_n))) = \mathrm{Sp}_0(\bigcup_{n\in\omega} \mathrm{In}(a_n)) = \mathrm{Sp}_0(R_{\delta+1}).$$

■

Teorema 9.71 *Sea $\lambda = \sup_n \delta_n$, para ciertos ordinales $\delta_n \in \Lambda$. Entonces $\lambda \in \Lambda$ y $R_\lambda = \bigcup\limits_n R_{\delta_n}$.*

DEMOSTRACIÓN: Por 9.63 sabemos que $\lambda \in \Lambda$, así como que $r_{1+\lambda} = \sup\limits_n r_{1+\delta_n}$. La conclusión es obvia. ■

En lo sucesivo, si ϕ es una función definida sobre un ordinal, representaremos por $F(\phi)$ el conjunto de sus puntos fijos. Una propiedad elemental es la siguiente:

Teorema 9.72 *Si ϕ y ψ son funciones crecientes, $F(\phi\circ\psi) = F(\phi) \cap F(\psi)$.*

DEMOSTRACIÓN: Si $\delta \in F(\phi\circ\psi)$, esto quiere decir, por definición de composición, que $\delta \in \mathcal{D}\phi$, $\phi(\delta) \in \mathcal{D}\psi$ y $\psi(\phi(\delta)) = \delta$. Entonces, como las funciones son crecientes, $\delta \leq \phi(\delta) \leq \psi(\phi(\delta)) = \delta$, luego $\phi(\delta) = \delta$, luego $\psi(\delta) = \delta$, luego $\delta \in F(\phi) \cap F(\psi)$. Recíprocamente, si $\delta \in F(\phi) \cap F(\psi)$, tenemos que $\phi(\delta) = \delta$ y $\psi(\delta) = \delta$, luego $\psi(\phi(\delta)) = \delta$ y $\delta \in F(\phi\circ\psi)$. ■

Teorema 9.73 *Sea λ una potencia de ω tal que $\Lambda_\alpha = \Lambda$ para todo $\alpha < \lambda$ y sea $\eta \in \bigcap\limits_{\alpha<\lambda} F(\theta_\alpha)$. Entonces $\mathrm{Sp}_{(\lambda)}(R_\eta) = R_{\eta'}$, donde η' es el menor elemento de $\bigcap\limits_{\alpha<\lambda} F(\theta_\alpha)$ mayor que η.*

DEMOSTRACIÓN: Si $\alpha < \lambda$, tenemos que $\eta \in F(\theta_\alpha) \subset \Lambda_\alpha = \Lambda$. Entonces, según 9.68 tenemos que $(R_\eta)^\alpha = R_{\theta_\alpha(\eta)} = R_\eta$, luego, por 9.37 y 9.70:

$$\mathrm{Sp}_\alpha(R_\eta) = \mathrm{Sp}_\alpha((R_\eta)^\alpha) = \mathrm{Sp}_0(R_\eta)^\alpha = (R_{\eta+1})^\alpha = R_{\theta_\alpha(\eta+1)}.$$

Por lo tanto

$$\mathrm{Sp}_{(\lambda)}(R_\eta) = \bigcup_{\alpha<\lambda} \mathrm{Sp}_\alpha(R_\eta) = \bigcup_{\alpha<\lambda} R_{\theta_\alpha(\eta+1)}.$$

Sea $\eta' = \bigcup\limits_{\alpha<\lambda} \theta_\alpha(\eta+1)$. Como $\theta_\alpha(\eta+1) \in \Lambda$, el teorema anterior nos da que $\eta' \in \Lambda$ y que $\mathrm{Sp}_{(\lambda)}(R_\eta) = R_{\eta'}$. Hemos de probar que η' es el ordinal descrito en el enunciado.

Si $\alpha' < \lambda$, usando 9.69 vemos que

$$\theta_{\alpha'}(\eta') = \theta_{\alpha'}(\bigcup_{\alpha<\lambda} \theta_\alpha(\eta+1)) = \bigcup_{\alpha<\lambda} \theta_{\alpha'}(\theta_\alpha(\eta+1)) = \bigcup_{\alpha<\lambda} \theta_{\alpha'+\alpha}(\eta+1).$$

Ahora bien, es fácil ver que las potencias de ω son cerradas para la suma ordinal, luego $\theta_{\alpha'}(\eta') = \eta'$.

Por otra parte, si $\eta'' > \eta$ es un punto fijo de las funciones θ_α, entonces $\theta_\alpha(\eta+1) \leq \eta_\alpha(\eta'') = \eta''$, luego $\eta' \leq \eta''$. ■

Con esto obtenemos una primera expresión recurrente (todavía no muy práctica) para las funciones θ_α:

Teorema 9.74 *Sea λ una potencia de ω. Si $\Lambda_\alpha = \Lambda$ para todo $\alpha < \lambda$ y ψ enumera el conjunto $\bigcap\limits_{\alpha<\lambda} F(\theta_\alpha)$, entonces $\Lambda_\lambda = \Lambda$ y $\theta_\lambda(\delta) = \psi(\omega_1 \cdot \delta)$, para todo $\delta \in \Lambda$.*

DEMOSTRACIÓN: Razonamos por inducción sobre δ. Notemos que $\theta_\alpha(0) = 0$ para todo α, luego $\psi(0) = 0$, y el resultado es trivialmente cierto para $\delta = 0$. Supongamos ahora que $\delta = \epsilon + 1$ y que el resultado vale para ϵ, es decir, que $\epsilon \in \Lambda_\lambda$ y que $\theta_\lambda(\epsilon) = \psi(\omega_1 \cdot \epsilon)$.

El teorema anterior muestra que $\bigcap\limits_{\alpha<\lambda} F(\theta_\alpha)$ no tiene un máximo elemento, luego $\omega_1 \cdot \epsilon + 1$ está en el dominio de ψ y $\mathrm{Sp}_{(\lambda)}(R_{\psi(\omega_1\cdot\epsilon)}) = R_{\psi(\omega_1\cdot\epsilon+1)}$. Aplicando de nuevo el teorema anterior tenemos que $\omega_1 \cdot \epsilon + 2$ también está en el dominio de ψ, y

$$\mathrm{Sp}^2_{(\lambda)}(R_{\psi(\omega_1\cdot\epsilon)}) = \mathrm{Sp}_{(\lambda)}(\mathrm{Sp}_{(\lambda)}(R_{\psi(\omega_1\cdot\epsilon)})) = \mathrm{Sp}_{(\lambda)}(R_{\psi(\omega_1\cdot\epsilon+1)}) = R_{\psi(\omega_1\cdot\epsilon+2)}.$$

En general llegamos a que $\mathrm{Sp}^n_{(\lambda)}(R_{\psi(\omega_1\cdot\epsilon)}) = R_{\psi(\omega_1\cdot\epsilon+n)}$, para todo $n < \omega$.

Cada $\psi(\omega_1 \cdot \epsilon + n)$ es un punto fijo de cada θ_α, con $\alpha < \lambda$. En particular está en Λ, luego $\sup_n \psi(\omega_1 \cdot \epsilon + n) \in \Lambda$, porque Λ tiene cofinalidad no numerable. La continuidad de las θ_α hace que el supremo también sea un punto fijo, luego $\omega_1 \cdot \epsilon + \omega$ está en el dominio de ψ y $\psi(\omega_1 \cdot \epsilon + \omega) = \sup_n \psi(\omega_1 \cdot \epsilon + n)$. Además

$$\mathrm{Sp}^\omega_{(\lambda)}(R_{\psi(\omega_1\cdot\epsilon)}) = \mathrm{Sp}_{(\lambda)}(\bigcup_n \mathrm{Sp}^n_{(\lambda)}(R_{\psi(\omega_1\cdot\epsilon)})) = \mathrm{Sp}_{(\lambda)}(\bigcup_n R_{\psi(\omega_1\cdot\epsilon+n)})$$

$$= \mathrm{Sp}_{(\lambda)}(R_{\psi(\omega_1\cdot\epsilon+\omega)}) = R_{\psi(\omega_1\cdot\epsilon+\omega+1)},$$

donde hemos usado 9.71 y 9.73. Una simple inducción demuestra ahora que, para todo $\beta < \omega_1$ infinito, se cumple que $\omega_1 \cdot \epsilon + \beta + 1$ está en el dominio de ψ y

$$\mathrm{Sp}^\beta_{(\lambda)}(R_{\psi(\omega_1\cdot\epsilon)}) = R_{\psi(\omega_1\cdot\epsilon+\beta+1)},$$

de donde a su vez

$$\mathrm{Sp}^{\omega_1}_{(\lambda)}(R_{\psi(\omega_1\cdot\epsilon)}) = \bigcup_{\omega\leq\beta<\omega_1}\mathrm{Sp}^{\beta}_{(\lambda)}(R_{\psi(\omega_1\cdot\epsilon)})$$

$$= \bigcup_{\omega\leq\beta<\omega_1} R_{\psi(\omega_1\cdot\epsilon+\beta+1)} = \bigcup_{\beta<\omega_1} R_{\psi(\omega_1\cdot\epsilon+\beta)}.$$

Tenemos que $(R_\epsilon)^\lambda = R_{\theta_\lambda(\epsilon)} = R_{\psi(\omega_1\cdot\epsilon)}$, luego, por 9.37,

$$\mathrm{Sp}^+_\lambda(R_{\psi(\omega_1\cdot\epsilon)}) = \mathrm{Sp}^+_\lambda((R_\epsilon)^\lambda) = \mathrm{Sp}^+_0(R_\epsilon)^\lambda.$$

Por 9.68 sabemos que R_ϵ es unión numerable de clases G^ω-booleanas, luego por 9.42 concluimos que $\mathrm{Sp}^+_0(R_\epsilon)$ es G^ω-booleana, luego $\mathrm{Sp}^+_\lambda(R_{\psi(\omega_1\cdot\epsilon)})$ también lo es, al igual que su dual $\mathrm{Sp}^-_\lambda(R_{\psi(\omega_1\cdot\epsilon)})$. Por lo tanto, estas dos clases determinan dos grados duales b^+ y b^-. Todo grado menor que ambos es el grado de un conjunto que está en $\mathrm{Sp}^+_\lambda(R_{\psi(\omega_1\cdot\epsilon)})\cap\mathrm{Sp}^-_\lambda(R_{\psi(\omega_1\cdot\epsilon)}) = \mathrm{Pt}_\lambda(R_{\psi(\omega_1\cdot\epsilon)})$ (por 9.34), pero, por 9.47 tenemos que

$$\mathrm{Pt}_\lambda(R_{\psi(\omega_1\cdot\epsilon)}) = \mathrm{Sp}^{\omega_1}_{(\lambda)}(R_{\psi(\omega_1\cdot\epsilon)}) = \bigcup_{\beta<\omega_1} R_{\psi(\omega_1\cdot\epsilon+\beta)},$$

luego todo grado menor que b^+ y b^- es menor que $r_{1+\psi(\omega_1\cdot\epsilon+\beta)}$, para cierto ordinal $\beta<\omega_1$. Esto prueba que b^+ y b^- son regulares. Más aún, si llamamos $\gamma = \bigcup_{\beta<\omega_1}\psi(\omega_1\cdot\epsilon+\beta)$, tenemos que $\gamma\in\Lambda$, pues está definido $r_\gamma = b^+\oplus b^-$.

Más aún, γ está en el dominio de cada θ_α y es límite de puntos fijos de cada θ_α, luego γ es punto fijo de cada θ_α. Esto implica que $\omega_1\cdot\delta = \omega_1\cdot\epsilon+\omega_1$ está en el dominio de ψ y $\psi(\omega_1\cdot\delta)=\gamma$. Entonces, por 9.70,

$$(R_\delta)^\lambda = \mathrm{Sp}_0(R_\epsilon)^\lambda = \mathrm{Sp}_\lambda((R_\epsilon)^\lambda) = \mathrm{Sp}_\lambda(R_{\psi(\omega_1\cdot\epsilon)}) = \mathrm{In}(b^+)\cup\mathrm{In}(b^-) = R_{\psi(\omega_1\cdot\delta)}.$$

Por consiguiente $\delta\in\Lambda_\lambda$ y $\theta_\lambda(\delta)=\psi(\omega_1\cdot\delta)$, como había que probar.

Supongamos ahora que $\delta\in\Lambda$ es un ordinal límite y que el teorema es válido para todo $\epsilon<\delta$. Entonces $\delta\subset\Lambda_\lambda$ y, como Λ_λ es cerrado en Λ, de hecho $\delta\in\Lambda_\lambda$ y

$$\theta_\lambda(\delta) = \bigcup_{\epsilon<\delta}\theta_\lambda(\epsilon) = \bigcup_{\epsilon<\delta}\psi(\omega_1\cdot\epsilon).$$

De este modo, $\theta_\lambda(\delta)$ es límite de puntos fijos de cada θ_α (y está en el dominio de θ_α) luego $\theta_\lambda(\delta)$ es punto fijo de cada θ_α. Esto a su vez implica que $\omega_1\cdot\delta$ debe estar en el dominio de ψ y que $\theta_\lambda(\delta)=\psi(\omega_1\cdot\delta)$. ■

De aquí obtenemos una expresión para las funciones θ_{ω^α} en términos de las derivadas sucesivas de la función θ_1 (véase [TC 6.48]):

Teorema 9.75 *Si $0<\alpha<\omega_1$, se cumple que $\Lambda_{\omega^\alpha}=\Lambda$ y para todo $\delta\in\Lambda$*

$$\theta_{\omega^\alpha}(\delta) = \theta_1^{(\alpha)}(\omega_1\cdot\delta).$$

DEMOSTRACIÓN: Por inducción sobre α. Para $\alpha = 1$ aplicamos el teorema 9.74 con $\lambda = \omega$. Tenemos entonces que ψ es una enumeración de $\bigcap_{n<\omega} F(\theta_n)$, pero según 9.69 tenemos que $\Lambda_n = \Lambda$ y θ_n es la composición de θ_1 consigo misma n veces, luego $F(\theta_n) = F(\theta_1)$ por 9.72, luego $\psi = \theta_1'$ y, en definitiva, concluimos que $\Lambda_\omega = \Lambda$ y $\theta_\omega(\delta) = \theta_1'(\omega_1 \cdot \delta)$.

Supongamos ahora que $\Lambda_{\omega^\beta} = \Lambda$ para todo $\beta < \alpha$ (y vale incluso para $\beta = 0$ por 9.66). Por el teorema 9.69 sabemos que $\Lambda_\tau = \Lambda$ para todo ordinal τ de la forma

$$\tau = \omega^{\beta_0} + \cdots + \omega^{\beta_n}, \qquad \text{con } \beta_i < \alpha.$$

Ahora bien, es fácil ver que todo ordinal menor que ω^α es de esta forma. En definitiva, $\Lambda_\tau = \Lambda$ para todo $\tau < \omega^\alpha$. El teorema 9.74 implica entonces que $\Lambda_{\omega^\alpha} = \Lambda$, así como que $\theta_{\omega^\alpha}(\delta) = \psi(\omega_1 \cdot \delta)$, donde ψ enumera $\bigcap_{\tau<\omega^\alpha} F(\theta_\tau)$. Ahora bien, según hemos dicho, todo $\tau < \omega^\alpha$ es de la forma

$$\tau = \omega^{\beta_0} + \cdots + \omega^{\beta_n}, \qquad \text{con } \beta_i < \alpha,$$

y entonces $\theta_\tau = \theta_{\omega^{\beta_0}} \circ \cdots \circ \theta_{\omega^{\beta_n}}$, luego, por 9.72, $F(\theta_\tau) = \bigcap_i F(\theta_{\omega^{\beta_i}})$. Por consiguiente, $\bigcap_{\tau<\omega^\alpha} F(\theta_\tau) = \bigcap_{\beta<\alpha} F(\theta_{\omega^\beta})$.

También sabemos por hipótesis de inducción que $\theta_{\omega^\beta}(\delta) = \theta_1^{(\beta)}(\omega_1 \cdot \delta)$. Consideremos la función $\phi : \Lambda \longrightarrow \Lambda$ dada por $\phi(\delta) = \omega_1 \cdot \delta$. Así, $\theta_{\omega^\beta} = \phi \circ \theta_1^{(\beta)}$ y $F(\theta_{\omega^\beta}) = F(\phi) \cap F(\theta_1^{(\beta)})$.

Ahora bien, $F(\theta_1^{(\beta)}) \subset F(\theta_1) \subset F(\phi)$. En efecto, la última inclusión se debe a que si $\delta \in F(\theta_1)$, o bien $\delta = 0$, en cuyo caso $\phi(\delta) = \delta$, o bien $\delta = \omega_1^\delta$ es un ordinal límite, luego $\phi(\delta) = \omega_1 \cdot \omega_1^\delta = \omega_1^{1+\delta} = \omega_1^\delta = \delta$.

En definitiva, $F(\theta_{\omega^\beta}) = F(\theta_1^{(\beta)})$ y $\bigcap_{\tau<\omega^\alpha} F(\theta_\tau) = \bigcap_{\beta<\alpha} F(\theta_1^{(\beta)})$, luego $\psi = \theta_1^{(\alpha)}$, como había que probar. ■

Sucede que las derivadas de θ_1 se expresan de forma sencilla en términos de las derivadas de la función ϵ [TC 6.51]:

Teorema 9.76 *Si $\delta < \omega_1$ y $0 < \alpha \in \Lambda$, entonces $\theta_1^{(1+\delta)}(\alpha) = \epsilon^{(\delta)}(\omega_1 + \alpha)$.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos en primer lugar que $\delta = 0$. La función $\theta_1^{(1)}$ enumera los puntos fijos de θ_1, que, según 9.66 son 0 y los puntos fijos de $\alpha \mapsto \omega_1^\alpha$. Equivalentemente, $\theta_1^{(1)}(1+\alpha)$ enumera los puntos fijos de $\alpha \mapsto \omega_1^\alpha$, al igual que lo hace $\epsilon(\omega_1 + 1 + \alpha)$, luego $\theta_1^{(1)}(1+\alpha) = \epsilon(\omega_1 + 1 + \alpha)$, para todo $\alpha \geq 0$ en Λ.

Supongamos ahora que $\delta > 0$ y que la igualdad es válida para todo ordinal menor. Las funciones $\theta_1^{(1+\delta)}$ y $\epsilon^{(\delta)}$ enumeran respectivamente a

$$\bigcap_{\beta<1+\delta} F(\theta_1^{(\beta)}), \qquad \bigcap_{\beta<\delta} F(\epsilon^{(\beta)}),$$

y el primero es claramente igual a $\bigcap_{\beta<\delta} F(\theta_1^{(1+\beta)})$. Vamos a probar que ambos conjuntos tienen los mismos elementos $\alpha \in \Lambda$ mayores que ω_1. En efecto, si α está en el segundo conjunto, para cada $\beta < \delta$ tenemos que $\alpha = \epsilon^{(\beta)}(\alpha)$, luego $\alpha = \omega_1^\alpha$, luego $\alpha = \omega_1 + \alpha$, luego $\alpha = \epsilon^{(\beta)}(\alpha) = \epsilon^{(\beta)}(\omega_1 + \alpha) = \theta_1^{(1+\beta)}(\alpha)$. Igualmente se prueba que si $\alpha = \theta_1^{(1+\beta)}(\alpha)$ entonces $\alpha = \epsilon^{(\beta)}(\alpha)$.

Ahora observamos que el único elemento de $\bigcap_{\beta<\delta} F(\theta_1^{(1+\beta)})$ que cumple $\alpha \leq \omega_1$ es $\alpha = 0$, mientras que $\omega_1 \cap \bigcap_{\beta<\delta} F(\epsilon^{(\beta)})$ tiene ordinal ω_1 (es una intersección numerable de conjuntos cerrados no acotados en ω_1). En particular tenemos que $\epsilon^{(\delta)}(\omega_1) = \omega_1$ y $\theta_1^{(1+\delta)}(1 + \alpha) = \epsilon^{(\delta)}(\omega_1 + 1 + \alpha)$, para todo $\alpha \in \Lambda$. ■

Combinando los teoremas precedentes concluimos:

Teorema 9.77 *Si $\delta < \omega_1$ y $0 < \alpha \in \Lambda$, entonces $\theta_{\omega^{1+\delta}}(\alpha) = \epsilon^{(\delta)}(\omega_1(1 + \alpha))$.*

DEMOSTRACIÓN: Basta usar los dos resultados anteriores:

$$\theta_{\omega^{1+\delta}}(\alpha) = \theta_1^{(1+\delta)}(\omega_1 \cdot \alpha) = \epsilon^{(\delta)}(\omega_1 + \omega_1 \cdot \alpha) = \epsilon^{(\delta)}(\omega_1(1 + \alpha)).$$

■

Observemos ahora que si

$$\eta = \omega^{1+\delta_0} + \omega^{1+\delta_1} + \cdots + \omega^{1+\delta_n} + m,$$

donde los ordinales δ_i son numerables y $m \in \omega$, entonces

$$\theta_\eta(\alpha) = (\epsilon^{(\delta_n)} \circ \cdots \circ \epsilon^{(\delta_0)})(\omega_1 + \omega_1 \cdot \omega_1^{\omega_1^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\omega_1^\alpha}}}}}),$$

donde en la sucesión final de exponentes ω_1 aparece m veces y se reduce a α si $m = 0$. En efecto, aplicando 9.69 obtenemos que

$$\theta_\eta(\alpha) = (\theta_{\omega^{1+\delta_n}} \circ \cdots \circ \theta_{\omega^{1+\delta_0}})(\theta_m(\alpha)).$$

Por la observación posterior a este teorema y 9.75 (llamando $f(\alpha) = \omega_1 \cdot \alpha$):

$$\begin{aligned}\theta_\eta(\alpha) &= (f \circ \theta_1^{(1+\delta_n)} \circ \cdots \circ f \circ \theta_1^{(1+\delta_0)})(\omega_1^{\omega_1^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\omega_1^\alpha}}}}})\\ &= (\theta_1^{(1+\delta_n)} \circ f \circ \cdots \circ f \circ \theta_1^{(1+\delta_0)})(\omega_1 \cdot \omega_1^{\omega_1^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\omega_1^\alpha}}}}})\\ &= (f \circ \theta_1^{(1+\delta_{n-1})} \circ \cdots \circ f \circ \theta_1^{(1+\delta_0)})(\epsilon^{(\delta_n)}(\omega_1 + \omega_1 \cdot \omega_1^{\omega_1^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\omega_1^\alpha}}}}})),\end{aligned}$$

donde hemos usado 9.76. Ahora usamos que si $\omega_1^\alpha = \alpha$ entonces $\omega_1\alpha = \alpha$, y que esto se aplica a las imágenes de $\epsilon^{(\delta_n)}$, luego podemos suprimir la primera f:

$$\theta_\eta(\alpha) = (\theta_1^{(1+\delta_{n-1})} \circ f \circ \cdots \circ f \circ \theta_1^{(1+\delta_0)})(\epsilon^{(\delta_n)}(\omega_1 + \omega_1 \cdot \omega_1^{\omega_1^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\omega_1^\alpha}}}}})).$$

Repitiendo el proceso es claro que llegamos a la expresión anunciada. ■

9.2.5 La jerarquía de Borel

Finalmente estamos en condiciones de determinar el ordinal de la jerarquía de Wadge sobre los conjuntos de Borel, y los de las subclases de la jerarquía de Suslin:

Teorema 9.78 *Si $\eta = \omega^{1+\delta_0} + \omega^{1+\delta_1} + \cdots + \omega^{1+\delta_n} + m$, los grados de Wadge autoduales correspondientes a conjuntos en $\mathrm{Df}_{1+\alpha}(\mathbf{\Sigma}^0_{1+\eta}) \cup \neg\mathrm{Df}_{1+\alpha}(\mathbf{\Sigma}^0_{1+\eta})$ tienen ordinal*

$$(\epsilon^{(\delta_n)} \circ \cdots \circ \epsilon^{(\delta_0)})(\omega_1 + \omega_1 \cdot \omega_1^{\omega_1^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\omega_1^{\alpha+1}}}}}}),$$

donde en la última parte hay m exponentes ω_1.

Demostración: Tenemos que

$$\mathrm{Df}_{1+\alpha}(\mathbf{\Sigma}^0_{1+\eta}) \cup \neg\mathrm{Df}_{1+\alpha}(\mathbf{\Sigma}^0_{1+\eta}) = (\mathrm{Df}_{1+\alpha}(\mathbf{\Sigma}^0_1) \cup \neg\mathrm{Df}_{1+\alpha}(\mathbf{\Sigma}^0_1))^\eta$$

$$= (\mathrm{In}(r_{1+\alpha} + 1) \cup \mathrm{In}(r_{1+\alpha} + \neg 1))^\eta = R^\eta_{\alpha+1} = R_{\theta_\eta(\alpha+1)}.$$

Por lo tanto, los grados autoduales de conjuntos en esta clase son los r_δ con $\delta < \theta_\eta(\alpha+1)$, y este ordinal es el del enunciado por la observación final de la subsección anterior.[1] ■

En particular, para $\alpha = 0$ tenemos que

$$\mathrm{Df}_1(\mathbf{\Sigma}^0_{1+\eta}) \cup \neg\mathrm{Df}_1(\mathbf{\Sigma}^0_{1+\eta}) = \mathbf{\Sigma}^0_{1+\eta} \cup \mathbf{\Pi}^0_{1+\eta},$$

y los conjuntos autoduales en esta clase son los de clase $\mathbf{\Delta}^0_{1+\eta}$. Por las observaciones tras el teorema 8.39 sabemos que

$$\mathbf{\Delta}^0_{1+\eta} = \{B \in \mathcal{PN} \mid \|B\| < \lambda\},$$

para un cierto ordinal límite λ que (según las observaciones tras 8.40) coincide con el ordinal del conjunto de grados autoduales en dicha clase. Dicho ordinal viene dado por el teorema anterior:

Teorema 9.79 *Si $\eta = \omega^{1+\delta_0} + \omega^{1+\delta_1} + \cdots + \omega^{1+\delta_n} + m$, los grados de Wadge correspondientes a conjuntos en $\mathbf{\Delta}^0_{1+\eta}$ son los de rango menor que*

$$(\epsilon^{(\delta_n)} \circ \cdots \circ \epsilon^{(\delta_0)})(\omega_1 + \omega_1 \cdot \omega_1^{\omega_1^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\omega_1}}}}}),$$

donde la torre final tiene m veces ω_1, y si $\eta = m$ la expresión se reduce a dicha torre.

[1] Notemos que cuando $\eta = m$ queda $\theta_m(\alpha+1)$, que sabemos que se reduce a la última torre de m exponentes ω_1 seguidos de $\alpha+1$.

En particular recuperamos que los grados de Wadge en Δ_2^0 tienen ordinal ω_1, como ya sabíamos, pero ahora tenemos que los grados en Δ_3^0 tienen ordinal $\omega_1^{\omega_1}$, etc. Más aún, los grados de Wadge en $\mathbf{\Delta}_\omega^0$ son los de rango menor que $\epsilon(\omega_1 \cdot 2)$.

Vamos a necesitar un resultado elemental sobre puntos fijos:

Teorema 9.80 *Sea β un número épsilon. Si $\alpha > \beta$, entonces $\omega^\alpha = \alpha$ es equivalente a $\beta^\alpha = \alpha$. En otras palabras, los puntos fijos de $\alpha \mapsto \beta^\alpha$ son los números épsilon mayores que β.*

Demostración: Si $\beta^\alpha = \alpha$ entonces $\alpha \leq \omega^\alpha \leq \beta^\alpha = \alpha$, luego $\omega^\alpha = \alpha$.

Si $\omega^\alpha = \alpha$, entonces $\beta\omega = \omega^\beta\omega = \omega^{\beta+1} \leq \omega^\alpha = \alpha$. Por lo tanto $\beta + \alpha = \alpha$, luego $\beta\alpha = \omega^\beta\omega^\alpha = \omega^{\beta+\alpha} = \omega^\alpha = \alpha$, luego

$$\beta^\alpha = (\omega^\beta)^\alpha = \omega^{\beta\alpha} = \omega^\alpha = \alpha.$$

■

Por lo tanto, la derivada de la función $\alpha \mapsto \beta^\alpha$ es $\alpha \mapsto \epsilon_{\beta+1+\alpha}$ (pues si $\beta^\alpha = \alpha$ entonces $\alpha > 1$, luego $\alpha = \beta^\alpha > \beta^1 = \beta$).

Sabemos que $\epsilon^{(\omega_1)}(0) = \omega_1$, mientras que $\epsilon^{(\omega_1)}(1)$, es decir, el segundo punto fijo simultáneo de todas las derivadas numerables de ϵ, es precisamente el ordinal de los grados de Wadge de Borel:

Teorema 9.81 *El conjunto de grados de Wadge de los conjuntos de Borel tiene ordinal $\epsilon^{(\omega_1)}(1)$.*

Demostración: El ordinal de los grados de Wadge de los conjuntos de Borel es el supremo de los ordinales de los grados de Wadge de los conjuntos $\mathbf{\Delta}^0_{\omega^{1+\delta}}$, con $\delta < \omega_1$, luego por el teorema anterior es

$$\bigcup_{\delta<\omega_1} \epsilon^{(\delta)}(\omega_1 \cdot 2).$$

Tenemos que $\omega_1 \cdot 2 \leq \omega_1^{\omega_1} = \omega_1^{\epsilon^{(\omega_1)}(0)} \leq \omega_1^{\epsilon^{(\omega_1)}(1)} = \epsilon^{(\omega_1)}(1)$, (por el teorema anterior, porque $\epsilon^{(\omega_1)}(1)$ es un número ϵ mayor que ω_1), luego

$$\epsilon^{(\delta)}(\omega_1 \cdot 2) \leq \epsilon^{(\delta)}(\epsilon^{(\omega_1)}(1)) = \epsilon^{(\omega_1)}(1).$$

Por consiguiente

$$\bigcup_{\delta<\omega_1} \epsilon^{(\delta)}(\omega_1 \cdot 2) \leq \epsilon^{(\omega_1)}(1).$$

Por otra parte, si $\delta_0 < \delta < \omega_1$ tenemos que $\epsilon^{(\delta)}(\omega_1 \cdot 2)$ es punto fijo de $\epsilon^{(\delta_0)}$, luego lo mismo vale para la unión, y como ésta es mayor que $\omega_1 = \epsilon^{(\omega_1)}(0)$, tenemos la desigualdad contraria (pues $\epsilon^{(\omega_1)}(1)$ es el menor punto fijo de todas las funciones $\epsilon^{(\delta)}$ mayor que ω_1). ■

Capítulo X

La consistencia de ADP

El resultado central de este capítulo es que si existe una sucesión de cardinales

$$\delta_1 < \delta_2 < \cdots < \delta_n < \delta_{n+1} < \cdots < \kappa,$$

donde cada δ_i es un cardinal de Woodin y κ es un cardinal medible, entonces se cumple el axioma de determinación proyectiva. Más aún, demostraremos que $V_{\delta_1} \vDash \mathrm{ZFC} + \mathrm{Det}(\mathbf{P})$, donde $\mathbf{P}$ es la clase de todos los conjuntos proyectivos (de todos los espacios X^ω, para todo conjunto X). Así pues, si es consistente ZFC más la existencia de los cardinales indicados, también lo es ZFC + $\mathrm{Det}(\mathbf{P})$.

10.1 Determinación $\mathbf{\Pi}_1^1$

La demostración de la consistencia de ADP es una generalización de la prueba debida a Martin según la cual la existencia de un cardinal medible implica la determinación de los conjuntos $\mathbf{\Pi}_1^1$. La prueba puede dividirse en dos partes: en la primera daremos una condición suficiente para que un conjunto esté determinado, y en la segunda probaremos que la cumplen los conjuntos $\mathbf{\Pi}_1^1$.

Definición 10.1 Si κ es un cardinal infinito, una *medida* κ-completa en un conjunto A es un ultrafiltro $U \subset \mathcal{P}A$ cerrado para intersecciones de menos de κ conjuntos.

Sea γ un ordinal y sean $m < n < \omega$. Para cada $Z \subset \gamma^m$ definimos

$$Z^* = \{f \in \gamma^n \mid f|_m \in Z\}.$$

Diremos que una medida U sobre γ^n *extiende* a una medida U' sobre γ^m si para cada $Z \in U'$ se cumple que $Z^* \in U$.

Una *torre* de medidas sobre γ es una sucesión $\{U_n\}_{n\in\omega}$ tal que U_n es una medida sobre γ^n y si $m < n < \omega$ entonces U_n extiende a U_m. La torre es *numerablemente completa* si dada una sucesión $\{Z_n\}_{n\in\omega}$ de conjuntos tales que $\bigwedge n \in \omega\ Z_n \in U_n$, existe un $f \in \gamma^\omega$ tal que $\bigwedge n \in \omega\ f|_n \in Z_n$.

Un árbol R en $X \times \gamma$ es *homogéneo* si existe una sucesión de medidas $\{U_s\}_{s \in X^{<\omega}}$ tal que

a) Para cada $s \in X^{<\omega}$, U_s es una medida en R_s (o, equivalentemente, en γ^n con $R_s \in U_s$, donde $n = \ell(s)$) y es $|X|^+$-completa.

b) Si $s \leq t$, entonces U_t extiende a U_s.

c) Si $x \in p[R]$, la torre $\{U_{x|_n}\}_{n \in \omega}$ es numerablemente completa.

Notemos que la propiedad b) implica que la sucesión de c) es realmente una torre. Diremos que R es κ-homogéneo si las medidas U_s son κ-completas.

Si γ es un ordinal, un conjunto $A \subset X^\omega$ es γ-*Suslin*[1] si existe un árbol R en $X \times \gamma$ tal que $A = p[R]$.

Por ejemplo, en estos términos, los conjuntos $\mathbf{\Sigma}_1^1$ son los conjuntos ω-Suslin, mientras que todo conjunto $A \subset X^\omega$ es γ-Suslin para $\gamma = |A|$. En efecto, basta numerar $A = \{x_\alpha\}_{\alpha \in \gamma}$ y tomar $R = \{(x_\alpha|_n, c_\alpha|_n)\} \mid n \in \omega\}$, donde c_α es la sucesión constante igual a α.

Un conjunto $A \subset X^\omega$ es un *conjunto de Suslin homogéneo* si existe un ordinal γ tal que $A = p[R]$, donde R es un árbol homogéneo en $X \times \gamma$. Si R puede tomarse κ-homogéneo diremos que A es un *conjunto de Suslin κ-homogéneo.*

El resultado fundamental sobre determinación es el siguiente:

Teorema 10.2 (Martin) *Todo conjunto de Suslin homogéneo está determinado.*

Demostración: Sea $A \subset X^\omega$ un conjunto de Suslin homogéneo. Fijamos un árbol $R \subset (X \times \gamma)^{<\omega}$ y unas medidas $\{U_s\}_{s \in X^{<\omega}}$ según la definición anterior.

Definimos un juego G^* en el que dos jugadores construyen una sucesión con esta pauta:

I	x_0, α_0		α_1, x_2, α_2		α_3, x_4, α_4		$\cdots$
II		x_1		x_3		x_4	$\cdots$

Las reglas son las siguientes:

- $x_n \in X$.
- $((x_0, \ldots, x_{n-1}), (\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1})) \in R$.

El jugador I pierde la partida si no puede encontrar una jugada legal, y gana si llega a construirse una rama infinita de R.

El teorema de Gale-Stewart 7.3 implica que G^* está determinado, puesto que, como I gana siempre que se completa una partida infinita, es un juego de la forma $J(R^*, [R^*])$, donde R^* es el árbol determinado por las reglas del juego.

[1]Observemos que esta definición es un caso particular de 2.27 salvo por el hecho de que X^ω no es necesariamente polaco.

Ahora probamos que si I tiene una estrategia ganadora en G^*, también la tiene en $G(A)$.

Sea σ^* una estrategia ganadora para I en G^*. Diremos que una posición $p = (x_0, \ldots, x_{n-1}) \in X^n$ para el juego $G(A)$ es *buena* si puede extenderse a una posición $p^* = ((x_0, \ldots, x_{n-1}), (\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}))$ acorde con σ^*, es decir, la que se obtendría si I jugara según σ^* y II replicara con x_1, x_3, ... Notemos que si existe tal extensión es única.

Definimos $\sigma(p)$ como la estrategia consistente en jugar la componente x_n de $\sigma^*(p^*)$ cuando p es una posición buena, y cualquier cosa en otro caso. Veamos que σ es una estrategia ganadora para I en $G(A)$. En efecto, si σ^* recomienda jugar (x_0, α_0) y I juega x_0 en $G(A)$, entonces, sea cual sea la respuesta x_1 de II, la jugada $((x_0, x_1), (\alpha_0))$ estará prevista por σ^*, por lo que existirá una respuesta ganadora $((x_0, x_1, x_2), (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2))$. Si I juega x_2 en $G(A)$, cualquiera que sea la respuesta de II dará lugar a una buena posición, y así el juego $G(A)$ se prolongará indefinidamente siempre de acuerdo con la estrategia σ. El resultado será un $x \in X^\omega$ tal que existirá un $f \in \gamma^\omega$ de modo que (x, f) es una rama infinita en R, luego $x \in p[R] = A$, y I gana la partida.

La parte delicada es probar que si II tiene una estrategia ganadora en G^* también la tiene en $G(A)$. Con esto quedará demostrado el teorema.

Sea σ^* una estrategia ganadora para II en G^* y consideremos una posición $s = (x_0, \ldots, x_{i-1})$ de longitud impar en el juego $G(A)$. Para cada $f = (\alpha_0, \ldots, \alpha_{i-1}) \in R_s$, sea $h_s(f) \in X$ la jugada estipulada por σ^*. Tenemos que $R_s \in U_s$ y U_s es $|X|^+$-completo, luego ha de existir un $x_i \in X$ tal que $\{f \in R_s \mid h_s(f) = x_i\} \in U_s$. Definimos $\sigma(s) = x_i$ y vamos a probar que σ es una estrategia ganadora para II en $G(A)$.

Supongamos que $x \in X^\omega$ es una partida jugada de acuerdo con σ pero $x \in A$. Para cada $i \in \omega$ impar, tenemos que $Z_i = \{f \in R_{x|_i} \mid h_{x|_i}(f) = x_i\} \in U_{x|_i}$. Para i par definimos $Z_i = R_{x|_i} \in U_{x|_i}$. Por la numerabilidad completa de las torres de medidas, existe un $f \in \gamma^\omega$ de modo que $f|_i \in Z_i$, luego, para i impar, $h_{x|_i}(f|_i) = x_i$, luego (x, f) es una partida de G^* acorde con la estrategia σ^*, y esto es una contradicción, pues implica que I gana la partida. ■

Pasamos ahora a la segunda parte de la prueba:

Teorema 10.3 (Martin) *Si κ es un cardinal medible y $X \in V_\kappa$, entonces todo subconjunto $\mathbf{\Pi}^1_1$ de X es un conjunto de Suslin κ-homogéneo.*

Demostración: Sea $A \subset X^{<\omega}$ un subconjunto $\mathbf{\Pi}^1_1$. Sea R un árbol en $X \times \omega$ tal que $p[R] = X^\omega \setminus A$. Veamos en primer lugar que existe una aplicación $s \mapsto \prec_s$ definida sobre $X^{<\omega}$ tal que:

a) Si $s \in X^n$, entonces $\prec_s$ es un orden total en n.

b) Si $s \leq t$, entonces $\prec_s \subset \prec_t$.

c) Para cada $x \in X^\omega$, se cumple que $x \in A$ si y sólo si $\prec_x = \bigcup\limits_{n \in \omega} \prec_{x|_n}$ está bien fundada en ω.

Es claro que, por recursión sobre el árbol $X^{<\omega}$, podemos asignar a cada $s \in X^{<\omega}$ una función f_s de modo que

a) $f_s : \bigcup_{t \leq s} R_t \longrightarrow \omega$ es inyectiva.

b) Si $t < s$, entonces f_s extiende a f_t.

c) La imagen de f_s tiene complemento infinito en ω y, si $R_s \neq \varnothing$, entonces dicha imagen contiene a los números menores que $\ell(s)$.

De este modo, si $x \in X^\omega$, las aplicaciones $f_{x|_n}$ se extienden a una aplicación inyectiva $f_x : R_x \longrightarrow \omega$ (que será biyectiva si R_x tiene altura infinita).

Para cada $s \in X^n$ definimos como sigue la relación $\prec_s$: dados $u, v < n$,

a) Si u, v están ambos en la imagen de f_s, entonces $u \prec_s v$ si y sólo si $f_s^{-1}(u) \prec f_s^{-1}(v)$, donde $\prec$ es el orden de Brouwer-Kleene en $\omega^{<\omega}$ (definición 4.20).

b) Si u está en la imagen de f_s pero v no, entonces $u \prec_s v$.

c) Si u, v no están en la imagen de f_s, entonces $u \prec_s v$ si y sólo si $u < v$.

Así tenemos que $\prec_s$ es un orden total en n que extiende a los anteriores, porque si un u no está en la imagen de f_s es porque $R_s = \varnothing$, con lo que $R_t = \varnothing$ para toda extensión t de s, luego u tampoco estará en la imagen de f_t. Además, dado $x \in X^\omega$, la aplicación $f_x : R_x \longrightarrow \omega$ es una semejanza entre R_x con el orden de Brouwer-Kleene y un segmento inicial de $(\omega, \prec_x)$, y los números naturales por encima de dicho segmento están bien ordenados por $\prec_x$ (pues en ellos coincide con la relación de orden usual). Por consiguiente, $\prec_x$ está bien fundada en ω si y sólo si R_x está bien fundado respecto al orden de Brouwer-Kleene, si y sólo si (teorema 4.21) R_x no posee ramas infinitas, si y sólo si $x \notin p[R]$, si y sólo si $x \in A$.

Definimos ahora $S \subset (X \times \kappa)^{<\omega}$ como el árbol formado por los pares (s, f) tales que, si $s \in X^n$, para cada $i, j < n$ se cumple que $f(i) < f(j)$ si y sólo si $i \prec_s j$.

Se cumple entonces que $p[S] = A$. En efecto, si $x \in p[S]$, entonces existe un $f \in \kappa^{<\omega}$ tal que $(x, f) \in S$, pero entonces $f : \omega \longrightarrow \Omega$ es creciente para el orden $\prec_x$, luego éste está bien fundado, luego $x \in A$. Recíprocamente, si $x \in A$ entonces $\prec_x$ está bien fundado en ω y, como es un orden total, de hecho es un buen orden, luego existe una aplicación $f : \omega \longrightarrow \Omega$ que transforma $\prec_x$ en el orden usual, luego $(x, f) \in S$, luego $x \in p[S]$.

Sea D una medida normal en κ y, para cada $s \in X^n$, sea U_s el conjunto de los $Z \subset \kappa^n$ tales que existe un $C \in D$ tal que $C^n \cap S_s \subset Z$. Vamos a probar que U_s es una medida κ-completa en κ^n. Es inmediato que se trata de un filtro κ-completo.

Para probar que es un ultrafiltro consideramos $Z \subset \kappa^n$ y sea $F : [\kappa]^n \longrightarrow 2$ la aplicación que a cada subconjunto $u \subset \kappa$ con n elementos le asigna 1 la n-tupla

$v \in \kappa^n$ que resulta de ordenar los elementos de u según s (de modo que $v \in S_s$) está en Z y 0 en caso contrario. Como κ es débilmente compacto, la partición F tiene un conjunto homogéneo C de cardinal κ. Más aún, podemos tomar[2] $C \in D$. La homogeneidad significa que F es constante en $[C]^n$, de modo que $C^n \cap S_s \subset Z$ o bien $C^n \cap S_s \subset \kappa^n \setminus Z$, luego $Z \in U_s$ o bien $\kappa^n \setminus Z \in U_s$.

Obviamente, $S_s \in U_s$.

Veamos ahora que si $s \leq t \in \kappa^m$, entonces U_t extiende a U_s. Para ello tomamos $Z \in U_s$ y el correspondiente conjunto $C \in D$. Queremos ver que $C^m \cap S_t \subset Z^*$, lo cual equivale a probar que si $f \in C^m \cap S_t$ entonces $f|_n \in Z$, pero es que $f|_n \in C^n \cap S_s \subset Z$.

Para probar que el árbol S es homogéneo sólo falta ver que si $x \in A = p[S]$ la torre $\{U_{x|_n}\}_{n\in\omega}$ es numerablemente completa. Para ello tomamos conjuntos $Z_n \in U_n$ y sus correspondientes $C_n \in D$. Sustituyéndolos por su intersección, podemos suponer que todos ellos son iguales a un mismo conjunto $C \in D$. Como $x \in A$, sabemos que $\prec_x$ es un buen orden en ω, luego existe una aplicación $f : \omega \longrightarrow C$ que transforma $\prec_x$ en el orden usual. Es claro entonces que $f|_n \in Z_n$ para todo n.

Con esto hemos probado que A es un conjunto de Suslin κ-homogéneo. ■

Así pues, combinando los dos teoremas anteriores obtenemos que la existencia de un cardinal medible κ implica $\mathrm{Det}_\omega(\mathbf{\Pi}^1_1)$ o, equivalentemente, $\mathrm{Det}_\omega(\mathbf{\Sigma}^1_1)$. Más aún, implica que $V_\kappa \vDash \mathrm{ZFC} + \mathrm{Det}(\mathbf{\Pi}^1_1)$.

En particular, según los resultados de la sección 7.2, la existencia de un cardinal medible implica que todo conjunto $\mathbf{\Sigma}^1_2$ en un espacio polaco es universalmente medible, tiene la propiedad de Baire y, si es no numerable, contiene un subconjunto perfecto. (Lo destacable es que implica estos hechos, no la mera consistencia de estos hechos.)

Puede probarse que la existencia de un cardinal medible no implica $\mathrm{Det}_\omega(\mathbf{\Sigma}^1_2)$ ni tan sólo la medibilidad de los conjuntos $\mathbf{\Delta}^1_3$. No daremos aquí los detalles pues son muy prolijos, pero la idea es muy simple: Si U es una medida en un cardinal κ según la definición de cardinal medible, entonces κ sigue siendo un cardinal medible en el modelo $L[U]$, en el cual está definido el buen orden $\trianglelefteq_U$ y Silver demostró que su restricción a $\mathcal{N}$ define un subconjunto $\mathbf{\Delta}^1_3$ de $\mathcal{N}^2$. A partir de aquí, todos los argumentos vistos en la sección 6.2 bajo la hipótesis $\mathcal{N} \subset L$ se trasladan a este contexto salvo un salto de una posición en la jerarquía de Lusin: existen conjuntos $\mathbf{\Delta}^1_3$ no medibles Lebesgue, etc.

Nuestro propósito es demostrar que, en presencia de una sucesión de cardinales como la indicada al principio del capítulo, todo conjunto proyectivo en $\mathcal{N}$ es un conjunto de Suslin homogéneo, lo que, en virtud del teorema 10.2, implica ADP. Para llegar a este resultado necesitaremos una caracterización de los árboles homogéneos en términos de inmersiones elementales que probaremos en la sección 10.3, pero antes necesitamos algunos preliminares.

[2]Véase [CG 5.6] para la propiedad de Ramsey, que es más general.

10.2 Modelos e inmersiones elementales

Nuestra intención es trabajar con modelos transitivos de ZFC, pero en ocasiones nos encontraremos con modelos M más generales, en los que la relación de pertenencia se interpreta como una cierta relación $R \subset M \times M$. En tales casos, si podemos garantizar que la relación R está bien fundada en M (y es conjuntista, aunque esta propiedad se cumplirá en todos los casos) pasaremos a identificar M con su colapso transitivo, que es un modelo isomorfo.

Aunque en general R no esté bien fundada, el teorema [PC 2.37] afirma que la parte bien fundada M_{bf} de M es un modelo de KP (que identificaremos con su colapso transitivo[3]) es un modelo de KP. En la sección 2.2 de [PC] se prueba que los conceptos conjuntistas básicos son absolutos para M_{bf}.

Por ejemplo, se cumple que

$$\bigwedge x \in M(x \in M_{\mathrm{bf}} \leftrightarrow \operatorname{rang}^M x \in M_{\mathrm{bf}}) \land \bigwedge x \in M_{\mathrm{bf}} \operatorname{rang}^M x = \operatorname{rang} x.$$

En efecto, sea $\alpha = \operatorname{rang}^M x$ y sea $c \in M$ la clausura transitiva^M de x. Entonces existe una $f \in M$ tal que

$$(f : c \longrightarrow \alpha)^M \land \bigwedge uv \in M(u\, R\, v\, R\, c \to f(u)^M\, R\, f(v)^M\, R\, \alpha).$$

Por lo tanto, si $\alpha \in M_{\mathrm{bf}}$, también $x \in M_{\mathrm{bf}}$, ya que una sucesión R-decreciente desde x daría lugar a otra desde α. Por otra parte,

$$\bigwedge x \in M_{\mathrm{bf}} \operatorname{rang}^M x = \operatorname{rang} x \in M_{\mathrm{bf}}$$

se demuestra por $\in$-inducción sobre x. Basta comparar:

$$\operatorname{rang} x = \bigcup_{y \in x} (\operatorname{rang} y + 1)$$

con su relativización a M, que por hipótesis de inducción es la misma expresión y está en M_{bf}. ■

Como consecuencia, $\bigwedge \alpha \in M_{\mathrm{bf}}\, V_\alpha^M = V_\alpha \cap M_{\mathrm{bf}}$.

Un caso en el que nos encontramos con modelos que, en principio, no tienen por qué estar bien fundados, es al construir el límite inductivo de una familia de modelos transitivos (véase la sección 1.5 de [CG]). El teorema [CG 1.27] nos garantiza que si tenemos inmersiones elementales de los modelos de un sistema inductivo de modelos transitivos en un mismo modelo transitivo (que conmuten con las inmersiones del sistema) entonces el límite inductivo está bien fundado, pero en general no tiene por qué ser así.

A continuación refinamos la técnica para obtener un submodelo elemental numerable de un modelo dado P.

[3]Si $C = M \setminus M_{\mathrm{bf}}$, puede ocurrir que C no sea disjunto con el colapso transitivo de M_{bf}, en cuyo caso podemos sustituir los elementos de C por otros y pasar a un modelo isomorfo a M en el que M_{bf} pueda colapsarse sin entrar en conflicto con el resto del modelo.

Definición 10.4 Sea P un conjunto y $h : \omega \longrightarrow \omega$ la aplicación que a cada $n = \langle u, v\rangle \in \omega$ le asigna $h(n) = u$. De este modo

$$\bigwedge um \in \omega \bigvee r \in \omega (r \geq m \wedge h(r) = u).$$

Sea $\mathcal{L}$ el lenguaje de la teoría de conjuntos, sea $\{x_0, x_1, \ldots\}$ el conjunto de sus variables y sea $\{\phi_i\}_{i\in\omega}$ una enumeración de las fórmulas de $\mathcal{L}$ con alguna variable libre.

Llamaremos *árbol de intentos de construir un submodelo elemental de* P al conjunto $A \subset P^{<\omega}$ formado por las funciones f tales que si $\mathcal{D}f = n$, para todo $r \in \omega$ tal que $2r < n$ se cumple:

> Si $h(r) = \langle u, v\rangle$, ϕ_u es una fórmula con $m+1$ variables libres, $v = \langle n_1, \ldots, n_m\rangle$ con $n_1, \ldots, n_m < 2r$ y
>
> $$\bigvee x \in P \ P \vDash \phi_u[f(n_1), \ldots, f(n_m), x],$$
>
> entonces $P \vDash \phi_u[f(n_1), \ldots, f(n_m), f(2r)]$.

Teorema 10.5 *Si A es el árbol de intentos de construir un submodelo elemental de un conjunto P y f es una rama infinita en A, entonces $Q = \{f(n) \mid n \in \omega\}$ es un submodelo elemental de P.*

Demostración: Aplicaremos el teorema [TC 10.22], según el cual basta ver que para toda fórmula ϕ_u con $m+1$ variables libres y para todos los $f(n_1), \ldots, f(n_m) \in Q$ tales que

$$\bigvee x \in P \ P \vDash \phi_u[f(n_1), \ldots, f(n_m), x]$$

existe un $f(2r) \in Q$ tal que $P \vDash \phi_u[f(n_1), \ldots, f(n_m), f(2r)]$. En efecto, basta tomar $v = \langle n_1, \ldots, n_m\rangle$, elegir un $r > \text{máx}\{n_1, \ldots, n_m\}$ tal que $h(r) = \langle u, v\rangle$ y tener en cuenta que $f|_{2r+1} \in A$. ■

Nota Observemos que la demostración del teorema anterior sólo utiliza que los valores que toman los nodos de A sobre los números naturales pares suficientemente grandes cumplen la definición 10.4. Por lo tanto, la prueba es válida igualmente si en lugar de considerar todo el árbol A consideramos un subárbol resultante de imponer condiciones arbitrarias sobre los valores que toman los nodos sobre los números naturales impares, o incluso si modificamos la definición de A para que la condición impuesta sobre los valores pares sea satisfecha únicamente cuando r es mayor que un $r_0 \in \omega$ fijo. De este modo podemos obtener submodelos elementales de P que contengan elementos de P prefijados.

Ahora demostramos un resultado sobre el carácter absoluto de la existencia de una inmersión elemental:

Teorema 10.6 *Sea M un modelo transitivo de* ZFC*, sea $i : P \longrightarrow Q$ una inmersión elemental entre modelos transitivos del lenguaje de la teoría de conjuntos tales que $P, Q \in M$ y P sea numerable^M. Entonces existe una inmersión elemental $j : P \longrightarrow Q$ tal que $j \in M$.*

DEMOSTRACIÓN: Partimos de la misma aplicación $h : \omega \longrightarrow \omega$ considerada en la definición 10.4. Notemos que $h \in M$ e igualmente podemos suponer que el lenguaje $\mathcal{L} \in M$ y considerar una enumeración $\{\phi_i\}_{i\in\omega} \in M$ de sus fórmulas con una variable libre y otra de sus variables.

Sea $p : \omega \longrightarrow P$ una biyección tal que $p \in M$, de modo que $P = \{p_i\}_{i\in\omega}$. Sea $I_r = \{p_i \mid i < r\}$. Llamemos A al conjunto de todas las aplicaciones de un conjunto I_k en Q, y consideramos en A la relación de orden dada por $f \prec g$ si y sólo si:

a) $f \subset g$.

b) Si $\mathcal{D}f = I_r$, $k \leq r$, $h(k) = \langle u, v\rangle$, ϕ_u es una fórmula con $m + 1$ variables libres, $v = \langle n_1, \ldots, n_m\rangle$ con $n_1, \ldots, n_m < k$ y

$$\bigvee x \in Q\ Q \vDash \phi_u[f(p_{n_1}), \ldots, f(p_{n_m}), x],$$

entonces existe un $p \in \mathcal{D}g$ tal que $Q \vDash \phi_u[g(p_{n_1}), \ldots, g(p_{n_m}), g(p)]$.

Es inmediato que $(A, \prec) \in M$ y toda cadena infinita

$$f_0 \prec f_1 \prec f_2 \prec \cdots$$

determina una inmersión elemental $f = \bigcup\limits_{i\in\omega} f_i : P \longrightarrow Q$. En efecto, la unión es ciertamente una aplicación de P en Q. Para ver que es una inmersión elemental observamos que esto equivale a que $f[P]$ sea un submodelo elemental de Q, y para probar esto aplicamos el teorema [TC 10.22], según el cual basta ver que para toda fórmula ϕ_u con $m+1$ variables libres y para todos los $p_{n_1}, \ldots, p_{n_m} \in P$ tales que $\bigvee x \in Q\ Q \vDash \phi_u[f(p_{n_1}), \ldots, f(p_{n_m}), x]$, existe un $p \in P$ tal que $Q \vDash \phi_u[f(p_{n_1}), \ldots, f(p_{n_m}), f(p)]$.

Para probar esto a su vez tomamos $v = \langle n_1, \ldots, n_m\rangle$, y $k > n_1, \ldots, n_m$ tal que $f(k) = \langle u, v\rangle$. Sea $i \in \omega$ tal que $I_k \subset \mathcal{D}f_i$ y sea $j \in \omega$ tal que $f_i \prec f_j$. Así $\bigvee x \in Q\ Q \vDash \phi_u[f_i(p_{n_1}), \ldots, f_i(p_{n_m}), x]$, luego existe un $p \in \mathcal{D}f_j$ tal que $Q \vDash \phi_u[f_j(p_{n_1}), \ldots, f_j(p_{n_m}), f_j(p)]$, es decir, $Q \vDash \phi_u[f(p_{n_1}), \ldots, f(p_{n_m}), f(p)]$.

Recíprocamente, $\bigwedge r \in \omega\ i|_{I_r} \in A$ y para todo $r \in \omega$ existe un $r' \in \omega$ tal que $i|_{I_r} \prec i|_{I_{r'}}$, luego A tiene cadenas infinitas. Esto implica que A tiene cadenas infinitas en M (pues si no las tuviera, la inversa de la relación $\prec$ estaría bien fundada^M, luego existiría una función rango $\mathrm{rang} : A \longrightarrow \Omega$ en M tal que $f \prec g \rightarrow \mathrm{rang}\, g < \mathrm{rang}\, f$, luego no existirían cadenas infinitas^V). De una cadena infinita en M obtenemos una inmersión elemental $j \in M$. ■

Dedicamos el resto de esta sección a probar algunos resultados sobre ultrapotencias de extensores [CG, Sección 7.1].

Definición 10.7 Si μ es un cardinal, diremos que un modelo transitivo M es *μ-cerrado* si $M^\mu \subset M$.

Si M es un modelo no necesariamente bien fundado, diremos que es μ-cerrado si $\mu \in M_{\mathrm{bf}}$ y para cada aplicación $f : \mu \longrightarrow M$ existe $\bar{f} \in M$ tal que $(f : \mu \longrightarrow V)^M \wedge \bigwedge \alpha < \mu\ \bar{f}(\alpha)^M = f(\alpha)$.

Es claro entonces que si un modelo M es numerablemente cerrado en este sentido, entonces está bien fundado. En efecto, si existe una sucesión $\{x_i\}_{i\in\omega}$ de elementos de M tal que $\bigwedge i \in \omega\ x_{i+1}\, R\ x_i$, entonces existe $\bar{f} \in M$ tal que $(f : \omega \longrightarrow V)^M \wedge \bigwedge i \in \omega\, \bar{f}(i) = x_i$, luego $(\bigwedge i \in \omega\, \bar{f}(i+1) \in \bar{f}(i))^M$, lo que contradice al axioma de regularidad^M.

Diremos que dos modelos P y Q de ZFC *concuerdan* hasta un cierto ordinal $\kappa \in P \cap Q$ si $V^P_{\kappa+1} = V^Q_{\kappa+1}$.

Así, si $E \in P$ es un preextensor^P con punto crítico κ, también es un preextensor sobre Q en el sentido de [CG 7.2], luego está definida la ultrapotencia $\mathrm{Ult}^*_E(Q)$, No obstante, aunque E sea un extensor^P, eso no garantiza que $\mathrm{Ult}^*_E(Q)$ esté bien fundada. El teorema siguiente nos da una condición suficiente para que lo esté:

Teorema 10.8 *Sean P y Q modelos transitivos de* ZFC *que sean μ-cerrados y que concuerden hasta un ordinal $\kappa > \mu$, sea $E \in P$ un extensor^P de punto crítico κ y soporte λ. Supongamos que λ es inaccesible^P y que la fortaleza^P de E es precisamente λ. Entonces* $\mathrm{Ult}_E(Q)$ *es μ-cerrado.*

Demostración: Sean $P^* = \mathrm{Ult}_E(P)$ y $Q^* = \mathrm{Ult}^*_E(Q)$ y sean $j : P \longrightarrow P^*$, $i : Q \longrightarrow Q^*$ las inmersiones canónicas. La relativización a P de [CG 7.7] nos da que la ultrapotencia P^* está bien fundada, por lo que podemos considerarla como un modelo transitivo, pero en principio Q^* no tiene por qué estarlo. (Podremos asegurar que lo está cuando tengamos probado el teorema).

Observemos que $\mu \leq i(\mu) \in Q^*_{\mathrm{bf}}$, luego $\mu \in Q^*_{\mathrm{bf}}$. En efecto, por la observación tras [CG 7.6], todo $x\, R\, i(m) = [c_\mu, 0]$ es de la forma $[f, a]$, con $f \in Q$, $f : \kappa \longrightarrow \mu$. Que P y Q concuerden hasta κ implica claramente que $f \in P$, por lo que podemos considerar $x' = [f, a] \in P^*$. Es claro entonces que una sucesión decreciente en Q^* de elementos de $i(\mu)$ da lugar a una sucesión análoga en P^*, lo cual es imposible. Por lo tanto $i(\mu) \in Q^*_{\mathrm{bf}}$.

Consideremos una aplicación $f : \mu \longrightarrow Q^*$. Para cada ordinal $\xi < \mu$, tenemos que $f(\xi) = [f_\xi, a_\xi]$, para ciertas $f_\xi \in Q$ tales que $f_\xi : \kappa \longrightarrow Q$ y ciertos $a_\xi \in \lambda$.

Como Q es μ-cerrado se cumple que $\{f_\xi\}_{\xi\in\mu} \in Q$, como P es μ-cerrado, $\{a_\xi\}_{\xi<\mu} \in P$ y, como E es λ-fuerte^P, también tenemos que $\{a_\xi\}_{\xi<\mu} \in P^*$. (Notemos que la sucesión está acotada en λ, por lo que está en $V^P_\lambda = V^{P^*}_\lambda$.)

Como κ es inaccesible^P, tenemos que $(\kappa^\mu)^P = \kappa$. Para cada cardinal^P $\pi < \kappa$ tal que $\pi^\mu = \pi$, tomamos $h_\pi \in P$ tal que $h_\pi : ({}^\mu\pi)^P \longrightarrow \pi$ biyectiva. Sea $h = \{h_\pi\}_\pi \in V^P_{\kappa+1} = V^Q_{\kappa+1}$, luego $h \in P \cap Q$.

Tenemos que $j(h) \in P^*$ es de la forma $j(h) = \{j(h)_\pi\}_\pi$, donde π recorre los cardinales$^{P^*}$ menores que $j(\kappa)$ tales que $(\pi^\mu)^{P^*} = \pi$ y $j(h)_\pi : ({}^\mu\pi)^{P^*} \longrightarrow \pi$ biyectiva.

Ahora observamos que la sucesión $\{a_\xi\}_{\xi<\mu}$ está acotada por un $\pi < \lambda$ y, cambiando π por $(\pi^\mu)^P < \lambda$, podemos suponer que $(\pi^\mu)^P = \pi$, pero se cumple que $(\pi^\mu)^{P^*} = (\pi^\mu)^P = \pi < \lambda$ porque E es λ-fuerte^P. Por lo tanto, podemos tomar $a = (\pi, j(h)_\pi(\{a_\xi\}_{\xi<\mu})) \in \lambda$.

Definimos $F : \kappa \longrightarrow Q$ de modo que, para cada $\alpha < \kappa$, se cumple que $F(\alpha) : \mu \longrightarrow Q$ es la aplicación dada por

$$F(\alpha)(\xi) = \begin{cases} f_\xi(h_\pi^{-1}(\gamma)(\xi)) & \text{si } \alpha = (\pi, \gamma) \text{ con } \pi \in \mathcal{D}h \text{ y } \gamma < \pi, \\ \varnothing & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Es claro que $F \in Q$, por lo que $[F, a] \in Q^*$. También es inmediato que $([F, a] : \mu \longrightarrow V)^{Q^*}$. Ahora vamos a comprobar que $([F, a](\xi))^{Q^*} = [f_\xi, a_\xi]$ o, lo que es lo mismo, $([F, a]([c_\xi, 0]) = [f_\xi, a_\xi])^{Q^*}$. Esto equivale a que

$$(a, a_\xi) \in E(\{(\alpha, \beta) \mid F(\alpha)(\xi) = f_\xi(\beta)\}).$$

Para probar esto basta ver que

$$(a, a_\xi) \in E(\{(\alpha, \beta) \in \kappa \mid \bigvee \pi\gamma(\alpha = (\pi, \gamma) \land \pi \in \mathcal{D}h \land \gamma < \pi \land \beta = h_\pi^{-1}(\gamma)(\xi))\}).$$

Ahora usamos que $E(A) = j(A) \cap \lambda$, de modo que hemos de probar que

$$(a, a_\xi) \in \{(\alpha, \beta) \in \lambda \mid \bigvee \pi\gamma(\alpha = (\pi, \gamma) \land \pi \in \mathcal{D}j(h)$$
$$\land \gamma < \pi \land \beta = j(h)_\pi^{-1}(\gamma)(\xi))\}$$

o, equivalentemente, que

$$\bigvee \pi\gamma(a = (\pi, \gamma) \land \pi \in \mathcal{D}j(h) \land \gamma < \pi \land a_\xi = j(h)_\pi^{-1}(\gamma)(\xi)),$$

lo cual es cierto por la elección de a.

Así pues, llamando $\bar{f} = [F, a]$, hemos probado que $\bigwedge \xi < \mu \ \bar{f}(\xi)^{Q^*} = f(\xi)$. ■

Así pues, si partimos de modelos numerablemente cerrados, las ultrapotencias por preextensores en las condiciones del teorema anterior están bien fundadas. A continuación contemplamos una situación aún más general:

Consideremos dos inmersiones elementales $\pi : P \longrightarrow P^*$, $\sigma : Q \longrightarrow Q^*$ entre modelos transitivos de ZFC . Supongamos que P y Q concuerdan hasta un ordinal κ y que π, σ coinciden sobre $V_{\kappa+1}^P = V_{\kappa+1}^Q$ (es decir, que toman el mismo valor sobre sus elementos y, además, que $\pi(V_{\kappa+1}^P) = \sigma(V_{\kappa+1}^Q)$, de modo que P^* y Q^* concuerdan hasta $\pi(\kappa) = \sigma(\kappa)$).

Sea $E \in P$ un extensor^P de punto crítico κ y soporte λ. Entonces $E^* = \pi(E)$ es un extensor$^{P^*}$ de punto crítico $\pi(\kappa)$ y soporte $\pi(\lambda)$. Tomemos $x \in \mathrm{Ult}_E^*(Q)$ y consideremos dos expresiones $x = [f, a] = [g, b]$. Entonces

$$(a, b) \in E(\{(\alpha, \beta) \in \kappa \mid f(\alpha) = g(\beta)\}).$$

Vamos a aplicar π a esta fórmula, teniendo en cuenta que el conjunto sobre el que actúa E está en $V_{\kappa+1}^P = V_{\kappa+1}^Q$, con lo que su imagen por π es la misma que su imagen por σ. Así pues:

$$(\pi(a), \pi(b)) \in E^*(\{(\alpha, \beta) \in \kappa \mid \sigma(f)(\alpha) = \sigma(g)(\beta)\}).$$

Esto significa que $[\sigma(f),\pi(a)] = [\sigma(g),\pi(b)]$ como elementos de $\mathrm{Ult}^*_{E^*}(Q^*)$. Por consiguiente, podemos definir una aplicación $\tau : \mathrm{Ult}^*_E(Q) \longrightarrow \mathrm{Ult}^*_{E^*}(Q^*)$ mediante $\tau([f,a]) = [\sigma(f),\pi(a)]$. Se trata de una inmersión elemental, pues, si se cumple $\phi^{\mathrm{Ult}^*_E(Q)}([f_1,a_1],\ldots,[f_n,a_n])$, entonces

$$(a_1,\ldots,a_n) \in E(\{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in\kappa \mid \phi^Q(f_1(\alpha_1),\ldots,f_n(\alpha_n))\}),$$

al aplicar π obtenemos:

$$(\pi(a_1),\ldots,\pi(a_n)) \in E^*(\{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in\kappa \mid \phi^{Q^*}(\sigma(f_1)(\alpha_1),\ldots,\sigma(f_n)(\alpha_n))\})$$

y esto equivale a $\phi^{\mathrm{Ult}^*_{E^*}(Q^*)}(\tau([f_1,a_1]),\ldots,\tau([f_n,a_n]))$.

Es claro que el diagrama siguiente es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} Q^* \arrow[r, "j^*"] & \mathrm{Ult}^*_{E^*}(Q^*) \\ Q \arrow[u, "\sigma"] \arrow[r, "j"'] & \mathrm{Ult}^*_E(Q) \arrow[u, "\tau"'] \end{tikzcd}$$

Notemos también que si $\alpha < \lambda$ entonces $\alpha = [d,\alpha]$, con lo que $\tau(\alpha) = [d,\pi(\alpha)] = \pi(\alpha)$, es decir, que $\tau|_\lambda = \pi|_\lambda$.

Definición 10.9 En las condiciones anteriores diremos que $\mathrm{Ult}^*_{E^*}(Q^*)$ es la *copia* de $\mathrm{Ult}^*_E(Q)$ a través de las inmersiones π y σ.

Notemos que si P^* y Q^* son numerablemente cerrados, entonces la ultrapotencia $\mathrm{Ult}_{E^*}(Q^*)$ está bien fundada, y la inmersión τ justifica que $\mathrm{Ult}_E(Q)$ también lo está. De este modo, para que una ultrapotencia por un preextensor esté bien fundada, no es necesario que los modelos de partida P y Q sean numerablemente cerrados, sino que basta con que se puedan sumergir en modelos numerablemente cerrados.

Teorema 10.10 *Sean P y Q modelos transitivos de* ZFC *que concuerden sobre un ordinal κ, sea $E\in P$ un extensor^P de punto crítico κ y soporte λ y llamemos $i : P \longrightarrow \mathrm{Ult}_E(P)$, $j : Q \longrightarrow \mathrm{Ult}_E(Q)$ a las inmersiones canónicas en las ultrapotencias (que supondremos bien fundadas). Entonces i, j coinciden sobre $V^P_{\kappa+1} = V^Q_{\kappa+1}$ y $\mathrm{Ult}_E(P)$, $\mathrm{Ult}_E(Q)$ concuerdan sobre $i(\kappa) = j(\kappa)$.*

DEMOSTRACIÓN: Llamemos P^* y Q^* a las ultrapotencias respectivas. Todo $x = [f,a] \in V^P_{i(\kappa)+1}$ cumple que $[f,a] \subset V^P_{i(\kappa)} = i(V^P_\kappa)$, lo que implica que $a \in E(\{\alpha\in\kappa \mid f(\alpha)\subset V^P_\kappa\})$. Por consiguiente, podemos tomar f tal que $f:\kappa\longrightarrow \mathcal{P}V^P_\kappa$. Lo mismo vale si cambiamos P por Q e i por j.

Sea $C^P = (V^\kappa_\kappa)^P$ y análogamente con Q en lugar de P. Se cumple que $C^P = C^Q$, pues cada $f\in C^P$ está completamente determinada por el conjunto $A_f = \{(\alpha,x)\in\kappa\times V_\kappa \mid x\in f(\alpha)\}^P \in V^P_{\kappa+1} = V^Q_{\kappa+1}$, luego $A_f\in Q$, luego $f\in Q$, luego $f\in C^Q$. Igualmente se tiene la inclusión opuesta.

Si consideramos dos representaciones $x = [f, a] = [g, b]$ con $f, g \in C^P = C^Q$, se cumple que

$$[f, a] = [g, b] \leftrightarrow (a, b) \in E(\{(\alpha, \beta) \in \kappa \times \kappa \mid f(\alpha) = g(\beta)\}).$$

Ahora bien, el conjunto sobre el que actúa E es el mismo relativizado a P o a Q, luego $[f, a] = [g, b]$ como elementos de P^* si y sólo si se da la igualdad como elementos de Q^*. Esto significa que la aplicación $k : V^{P^*}_{i(\kappa)+1} \longrightarrow V^{Q^*}_{j(\kappa)+1}$ dada por $k([f, a]) = [f, a]$ es una biyección bien definida y, por el mismo argumento cambiando la igualdad por la relación R que define la pertenencia en cada ultrapotencia, concluimos que k transforma la pertenencia en P^* en la pertenencia en Q^*. Como ambos conjuntos son transitivos, esto implica que $V^{P^*}_{i(\kappa)+1} = V^{Q^*}_{j(\kappa)+1}$. En particular

$$i(\kappa) = \Omega \cap V^{P^*}_{i(\kappa)} = \Omega \cap V^{Q^*}_{j(\kappa)} = j(\kappa).$$

Además, es claro que el diagrama siguiente es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
V^P_{\kappa+1} \arrow[r, "\mathrm{Id}"] \arrow[d, "i"'] & V^Q_{\kappa+1} \arrow[d, "j"] \\
V^{P^*}_{i(\kappa)+1} \arrow[r, "k"'] & V^{Q^*}_{j(\kappa)+1}
\end{tikzcd}$$

lo que significa que i y j coinciden sobre $V^P_{\kappa+1} = V^Q_{\kappa+1}$. ■

Consideremos el caso en que $\pi : P \longrightarrow P^*$, $\sigma : Q \longrightarrow Q^*$ son inmersiones entre modelos transitivos en las condiciones de la definición 10.9, de modo que podemos considerar las copias

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "i"'] & P^* \arrow[d, "i^*"] \\
\mathrm{Ult}_E(P) \arrow[r, "\tau'"] \arrow[d, dashed, "k"'] & \mathrm{Ult}_{E^*}(P^*) \arrow[d, dashed, "k^*"] \\
\mathrm{Ult}_E(Q) \arrow[r, "\tau"'] & \mathrm{Ult}_{E^*}(Q^*)
\end{tikzcd}$$

Aquí τ' es la copia a través de las inmersiones (π, π), mientras que τ es la copia a través de (π, σ). Las flechas verticales representan las aplicaciones definidas en el teorema anterior, que están definidas sobre $V^{\mathrm{Ult}_E(P)}_{i(\kappa)}$ y $V^{\mathrm{Ult}_{E^*}(P^*)}_{i(\kappa)}$ respectivamente, y no son sino la identidad. Ahora bien, las definiciones dadas en el teorema anterior implican que el diagrama es conmutativo (si $x \in V^{\mathrm{Ult}_E(P)}_{i(\kappa)}$, entonces $x = [f, a]$, con $f : \kappa \longrightarrow V_\kappa$, y se cumple que $\pi(f) = \sigma(f)$).

Si el extensor E es α-fuerte^P, para $\alpha < i(\kappa)$, la conmutatividad del cuadrado superior se traduce en que τ' coincide con π sobre V^P_α (pues todo $x \in V^P_\alpha$ es de la forma $x = [f, a]$ y, como esto vale en P, también

$$\pi(x) = [\pi(f), \pi(a)] = \tau'([f, a]) = \tau'(x)$$

en P^*), y la conmutatividad del cuadrado inferior se traduce a su vez en que lo mismo le sucede a τ. ∎

10.3 Caracterización de los árboles homogéneos

Vamos a probar que la homogeneidad de un árbol es equivalente a la existencia de una familia de modelos transitivos de ZFC conectados adecuadamente por inmersiones elementales.

Sea R un árbol de Suslin κ-homogéneo. Definimos $M_s = \mathrm{Ult}_{U_s}(V)$ (de modo que $M_\varnothing = V$) y sea $j_{\varnothing s} : V \longrightarrow M_s$ la inmersión canónica. Sea $f_s = [d] \in M_s$, donde $d : \gamma^n \longrightarrow \gamma^n$ es la identidad y $n = \ell(s)$.

Notemos que $f_s \in j_{\varnothing s}(R_s)$, pues esto equivale a que $\{i \in \gamma^n \mid i \in R_s\} \in U_s$, lo cual es cierto. En particular, $f_s \in j_{\varnothing s}(\gamma)^n$.

Notemos también que todo elemento de M_s es de la forma $j_{\varnothing s}(g)(f_s)$, donde $g : \gamma^n \longrightarrow V$. En efecto, en principio será de la forma $[g]$, para cierta función g, y la igualdad $[g] = j_{\varnothing s}(g)[f_s]$ (es decir, $[g] = [c_g]([f_s])$) equivale a que

$$\{i \in \gamma^n \mid g(i) = g(i)\} \in U_s.$$

Ahora observamos que si $s \leq t$ y $j_{\varnothing,s}(g)(f_s) = j_{\varnothing s}(h)(f_s)$, también se cumple que $j_{\varnothing t}(g)(f_t|_n) = j_{\varnothing t}(h)(f_t|_n)$. En efecto, ambas afirmaciones equivalen respectivamente a que

$$\{i \in \gamma^n \mid g(i) = h(i)\} \in U_s, \qquad \{i \in \gamma^m \mid g(i|_n) = h(i|_n)\} \in U_t$$

y la primera afirmación implica la segunda porque U_t extiende a U_s.

Por consiguiente, si $s \leq t$, podemos definir $j_{s,t} : M_s \longrightarrow M_t$ mediante $j_{s,t}(j_{\varnothing,s}(g)(f_s)) = j_{\varnothing t}(g)(f_t|_n)$. Es fácil ver que, cuando $s = \varnothing$, la aplicación $j_{\varnothing,t}$ es la que ya teníamos definida, que $j_{s,s}$ es la identidad y que si $s \leq t \leq u$ entonces $j_{s,t} \circ j_{t,u} = j_{s,u}$. Además, $j_{s,t}$ es una inmersión elemental, pues,

$$\phi^{M_s}(j_{\varnothing s}(g_1)(f_s), \ldots, j_{\varnothing s}(g_r)(f_s)) \leftrightarrow \{i \in \gamma^n \mid \phi(g_1(i), \ldots, g_r(i))\} \in U_s,$$

$$\phi^{M_t}(j_{\varnothing t}(g_1)(f_t|_n), \ldots, j_{\varnothing t}(g_r)(f_t|_n)) \leftrightarrow \{i \in \gamma^m \mid \phi(h_1(i), \ldots, h_r(i))\} \in U_t,$$

donde $h_u(i) = g_u(i|_m)$ (pues así $j_{\varnothing t}(g_u)(f_t|_n) = [h_u]$), y la primera afirmación implica la segunda porque U_t extiende a U_s.

Teorema 10.11 *Si R es un árbol κ-homogéneo en un conjunto $X \times \gamma$ (donde $\kappa \geq |X|^+$), existen modelos transitivos M_s de* ZFC *para cada $s \in X^{<\omega}$ (con $M_\varnothing = V$), conectados por inmersiones elementales $j_{s,t} : M_s \longrightarrow M_t$ (para $s \leq t$) y existen sucesiones $f_s \in j_{\varnothing s}(R_s)$ tales que:*

- *Las inmersiones $j_{s,t}$ fijan a los ordinales menores que κ y conmutan de forma natural (es decir, si $s \leq t \leq u$, entonces $j_{s,t} \circ j_{t,u} = j_{s,u}$).*
- *Si $s < t$ entonces $j_{s,t}(f_s) < f_t$.*
- *Para cada $x \in p[R]$, el límite inductivo de los modelos $\{M_{x|_n}\}_{n\in\omega}$ está bien fundado.*

DEMOSTRACIÓN: Ya hemos construido todos los objetos cuya existencia afirma el teorema. Falta probar que cumplen todas las condiciones indicadas. La condición sobre los ordinales fijados no es sino [CG 1.13].

La condición sobre los f_s se cumple debido a que $f_d = [d]$, donde d es la identidad en γ^n, luego $f_s = j_{\varnothing s}(d)(f_s)$, luego $j_{s,t}(f_s) = j_{\varnothing t}(d)(f_t|_n)$, pero $j_{\varnothing t}(d)$ es la identidad, luego $j_{s,t}(f_s) = f_t|_n < f_t$.

Tomemos ahora $x \in p[R]$ y supongamos que el límite directo M de los modelos $\{M_{x|_n}\}_{n\in\omega}$ no estuviera bien fundado, es decir, que existiera una sucesión $\{[m_k]\}_{k\in\omega}$ decreciente para la pertenencia en M. Podemos exigir que $m_k \in M_{x|_{n_k}}$, donde la sucesión $\{n_k\}_{k\in\omega}$ es estrictamente creciente. Así, $m_{k+1} \in j_{x|_{n_k},x|_{n_{k+1}}}(m_k)$. Pongamos que $m_{n_k} = [g_{n_k}]$, de modo que la condición anterior se traduce a que

$$Z_{n_{k+1}} = \{i \in \gamma^{n_{k+1}} \mid g_{n_{k+1}}(i) \in g_{n_k}(i|_{n_k})\} \in U_{n_{k+1}}.$$

Entonces tenemos definida una sucesión $\{Z_n\}_{n\in\omega}$, donde $Z_n = \gamma^n$ cuando $n \neq n_{k+1}$ para ningún k y, como la torre $\{U_{x|_n}\}_{n\in\omega}$ es numerablemente completa, existe una sucesión de ordinales $i = \{\alpha_n\}_{n\in\omega}$ tal que $i|_n \in Z_n$. En particular

$$\cdots \in g_{n_2}(i|_{n_2}) \in g_{n_1}(i|_{n_1}) \in g_{n_0}(i|_{n_0}),$$

lo cual es imposible. ■

Teorema 10.12 *Dado un árbol R en $X \times \gamma$, si existen modelos en las condiciones del teorema anterior, entonces R es κ-homogéneo.*

DEMOSTRACIÓN: Definimos $U_s = \{Z \subset \gamma^n \mid f_s \in j_{\varnothing s}(Z)\}$. Es obvio que U_s es un ultrafiltro en γ^n. Veamos que U_s es κ-completo (y como estamos suponiendo que $\kappa \geq |X|^+$) esto implica en particular una de las condiciones de la definición de árbol homogéneo).

Tomamos una sucesión $\{Z_\alpha\}_{\alpha<\xi}$ de elementos de U_s, para cierto cardinal $\xi < \kappa$ y sea $Z = \bigcap\limits_{\alpha<\xi} Z_\alpha$.

Si llamamos $S = \{Z_\alpha\}_{\alpha<\xi}$, tenemos que $j(S)$ es una sucesión de conjuntos de longitud $j_{\varnothing,s}(\xi) = \xi$ y, para todo $\alpha < \xi$, de $(\alpha, Z_\alpha) \in S$ se sigue que $(\alpha, j_{\varnothing,s}(Z_\alpha)) \in j_{\varnothing,s}(S)$. En definitiva, $j_{\varnothing,s}(\{Z_\alpha\}_{\alpha<\xi}) = \{j_{\varnothing,s}(Z_\alpha)\}_{\alpha<\xi}$. Como

$$\bigwedge i(i \in Z \leftrightarrow \bigwedge \alpha < \xi\ i \in Z_\alpha),$$

también se cumple que

$$\bigwedge i(i \in j_{\varnothing s}(Z) \leftrightarrow \bigwedge \alpha < \xi\ i \in j_{\varnothing s}(Z_\alpha)),$$

de modo que $j_{\varnothing s}(Z) = \bigcap\limits_{\alpha<\xi} j(Z_\alpha)$. De aquí se sigue que $f_s \in j_{\varnothing s}(Z)$, es decir, que $Z \in U_s$.

Supongamos ahora que $s \leq t$ y sea $Z \in U_s$. Entonces, $\bigwedge i(i \in Z^* \leftrightarrow i|_n \in Z)$, luego $\bigwedge i(i \in j_{\varnothing t}(Z^*) \leftrightarrow i|_n \in j_{\varnothing t}(Z))$. Aplicamos esto a $i = f_t$, de modo que $f_t \in j_{\varnothing t}(Z^*) \leftrightarrow f_t|_n \in j_{\varnothing t}(Z)$, pero $f_t|_n = j_{s,t}(f_s)$, luego

$$Z \in U_s \to f_s \in j_{\varnothing s}(Z) \to f_t|_n \in j_{\varnothing t}(Z) \to f_t \in j_{\varnothing t}(Z^*) \to Z^* \in U_t.$$

Por último, tomamos $x \in p[R]$ y una sucesión $\{Z_n\}_{n\in\omega}$ tal que $Z_n \in U_{x|_n}$. Esto significa que $f_{x|_n} \in j_{\varnothing x|_n}(Z_n)$. Sea M el límite inductivo de los modelos $\{M_{x|_n}\}_n$, que está bien fundado y sea $f_n = j_{x|_n}(f_{x|_n}) \in M$. La propiedad de compatibilidad entre los $f_{x|_n}$ implica que cada f_n extiende a los anteriores, y la unión de todos ellos determina una aplicación $f : \omega \longrightarrow \Omega$, de modo que $f|_n \in j(Z_n)$, donde $j : V = M_{x|_0} \longrightarrow M$ es la inmersión canónica en el límite inductivo.

Sea B el árbol de las sucesiones finitas de ordinales $s \in \gamma^{<\omega}$ tales que si $s \in \gamma^n$ y $m \leq n$, entonces $s|_m \in Z_m$. Basta probar que B tiene una rama infinita o, lo que es lo mismo, que no está bien fundado con la relación inversa de la inclusión, pero esto equivale a que $j(B)$ no esté bien fundado^M, que a su vez (teniendo en cuenta que M está bien fundado) equivale a que $j(B)$ no esté bien fundado, y esto es cierto, porque $\{f_n\}_n$ es una rama infinita en $j(B)$ (no necesariamente en M). ■

Necesitaremos también este hecho:

Teorema 10.13 *En las condiciones del teorema* 10.11, *si x es una rama infinita en $X^{<\omega}$ tal que el límite inductivo M_x de los modelos $M_{x|_n}$ está bien fundado, entonces $x \in p[R]$.*

Demostración: Como en la prueba del teorema anterior, consideramos las funciones $f_n = j_{x|_n}(f_{x|_n}) \in M_x$, que determinan una función $f : \omega \longrightarrow \Omega$.

Como $f_{x|_n} \in j_{\varnothing x|_n}(R_{x|_n})$, se cumple que $f_n \in j_\varnothing(R_{x|_n})$, luego f determina una rama infinita en el árbol $j_\varnothing(R_x)$. Dicha rama no está necesariamente en M_x, pero, como el modelo está bien fundado, podemos concluir que $j_\varnothing(R_x)$ no está bien fundado^{M_x}, luego R_x no está bien fundado. Esto significa que existe una rama infinita en R_x que determina una sucesión $g \in \gamma^\omega$ tal que $(x, g) \in R$, luego $x \in p[R]$.

A su vez, esto implica que la condición c) en la definición de árbol homogéneo es una coimplicación, pues si se cumple que la torre de medidas es numerablemente completa, el argumento del teorema 10.11 prueba que el modelo M_x está bien fundado, y acabamos de ver que esto implica que $x \in p[R]$. ■

10.4 Iteraciones de modelos

Definición 10.14 Un *árbol de índices* es una relación de orden parcial $\trianglelefteq$ en ω que cumpla las propiedades siguientes:

a) $\bigwedge mn \in \omega\ (m \trianglelefteq n \to m \leq n)$.

b) $\bigwedge n \in \omega\ 0 \trianglelefteq n$.

c) Para todo $n \in \omega$, el conjunto (finito) $\{m \in \omega \mid m \trianglelefteq n\}$ está totalmente ordenado (luego, de hecho, bien ordenado) y tiene a 0 como mínimo elemento.

Un *árbol de iteraciones* $\mathcal{A}$ de un modelo transitivo M es un par $(\trianglelefteq, \{E_n\}_{n\in\omega})$ donde $\trianglelefteq$ es un árbol de índices y existen sucesiones $\{M_n\}_{n\in\omega}$, $\{j_{m,n}\}_{m\trianglelefteq n}$ de modo que se cumplan las propiedades siguientes (las cuales, de hecho, determinan completamente las sucesiones $\{M_n\}_{n\in\omega}$ y $\{j_{m,n}\}_{m\trianglelefteq n}$):

a) Cada M_n es un modelo transitivo de ZFC y $M_0 = M$.

b) Para cada $n \in \omega$, o bien $E_n = \varnothing$, o bien $E_n \in M_n$ es un extensor^{M_n}.

c) 1. Si $E_n = \varnothing$, entonces $n+1$ es inmediatamente posterior a n en el árbol de índices, $M_{n+1} = M_n$ y $j_{n,n+1}$ es la identidad en M_n.

   2. Si $E_n \neq \varnothing$, entonces, llamando m al anterior de $n+1$ en el árbol de índices, se cumple que M_m y M_n concuerdan hasta el punto crítico de E_n (de modo que E_n es un preextensor sobre M_m), $M_{n+1} = \mathrm{Ult}_{E_n}(M_m)$ y $j_{m,n+1} : M_m \longrightarrow M_{n+1}$ es la inmersión canónica en la ultrapotencia.

d) Si $j_{n,n}$ es la identidad en M_n y si $m \lhd n$, $j_{m,n}$ es la composición de las inmersiones determinadas por el apartado anterior para cada par de nodos consecutivos en el árbol de índices. Así, si $m \trianglelefteq n \trianglelefteq p$, se cumple que $j_{m,n} \circ j_{n,p} = j_{m,p}$.

En los árboles de iteraciones que vamos a considerar supondremos siempre las propiedades adicionales siguientes:

a) Si $E_n \neq \varnothing$, su soporte λ_n es un cardinal inaccesible^{M_n} y coincide con su fortaleza^{M_n}.

b) Si $m < n$ y E_m, $E_n \neq \varnothing$, entonces la fortaleza de E_m es estrictamente menor que la de E_n.

c) Si $E_n \neq \varnothing$, m es el anterior de $n+1$ en el árbol de índices y $M_m \neq M_n$, entonces[4] el punto crítico de E_n es menor que λ_m.

Así, en las condiciones del punto c) 2. de la definición anterior, tenemos que M_m y M_n concuerdan hasta el punto crítico κ_n de E_n, luego, por 10.10, las ultrapotencias $\mathrm{Ult}_{E_n}(M_n)$ y $\mathrm{Ult}_{E_n}(M_m)$ concuerdan hasta $j_{m,n+1}(\kappa_n) \geq \lambda_n$. Por la propiedad adicional a) tenemos que $V_{\lambda_n}^{M_n} = V_{\lambda_n}^{\mathrm{Ult}_{E_n}(M_n)}$, luego también $V_{\lambda_n}^{M_n} = V_{\lambda_n}^{M_{n+1}}$. Teniendo en cuenta la propiedad adicional b), concluimos que, en general, los modelos de todo árbol de iteraciones cumplen lo siguiente:

Si $n < n'$, entonces $V_{\lambda_n}^{M_n} = V_{\lambda_n}^{M_{n'}}$.

A su vez la propiedad adicional c) hace que la condición impuesta en c) 2. de que M_m y M_n coincidan hasta el punto crítico de E_n se cumpla trivialmente, pues éste está por debajo de λ_m y ya sabemos que $V_{\lambda_m}^{M_m} = V_{\lambda_m}^{M_n}$.

[4]La condición $M_m \neq M_n$ ha de entenderse, más precisamente, como que no existe una cadena de índices $m = i_0 \lhd \cdots \lhd i_r = n$ tal que $E_{i_j} = \varnothing$ para todo j.

Más explícitamente: si estamos construyendo recurrentemente un árbol de iteraciones y tenemos definidos los modelos, inmersiones y extensores hasta M_n de modo que se cumpla la definición de árbol de iteraciones con las propiedades adicionales, en ese punto tenemos garantizado que $V_{\lambda_m}^{M_m} = V_{\lambda_m}^{M_n}$, luego al tomar un extensor $E_n \in M_n$ con la condición de que su punto crítico sea menor que λ_m ya tenemos asegurado que los modelos M_m y M_n coinciden hasta dicho punto crítico.

Teorema 10.15 *Si M es un modelo transitivo de* ZFC *numerablemente cerrado, entonces los modelos de todo árbol de iteraciones sobre M son numerablemente cerrados.*

DEMOSTRACIÓN: Comprobamos por inducción que cada uno de los modelos M_n es numerablemente cerrado. Si es cierto para $m \leq n$, entonces $M_{n+1} = \mathrm{Ult}_{E_n}(M_m)$, donde E_n es un extensor^{M_m} y M_n concuerda con M_m hasta el punto crítico de E_n. Por hipótesis de inducción tanto M_n como M_m son numerablemente cerrados. El teorema 10.8 implica que M_{n+1} también es numerablemente cerrado. ■

Notemos que el teorema es válido igualmente si cambiamos "numerablemente cerrado" por $2^{\aleph_0}$-cerrado.

En la práctica, la demostración inductiva del teorema anterior implica que si estamos construyendo un árbol de iteraciones por recurrencia partiendo de un modelo transitivo numerablemente cerrado, no tendremos que preocuparnos por que las ultrapotencias que vamos construyendo estén bien fundadas, tal y como exige la definición de árbol de iteraciones, sino que, si tenemos definidos los modelos (bien fundados) y la relación de orden $\trianglelefteq$ hasta n y podemos elegir un número natural m sobre el que situar el nodo $n+1$ y un extensor E_n en M_n con punto crítico menor que λ_m, etc., la ultrapotencia $M_{n+1} = \mathrm{Ult}_{E_n}(M_m)$ será numerablemente cerrada y estará automáticamente bien fundada.

Obviamente, un modelo transitivo numerable de ZFC no puede ser numerablemente cerrado, pero podemos dar un otro criterio de buena fundación:

Teorema 10.16 *Sea M un modelo transitivo de* ZFC *tal que exista una inmersión elemental $\pi : M \longrightarrow V$ y sea $\mathcal{A}$ un árbol de iteraciones sobre M. Entonces existe un árbol de iteraciones $\pi\mathcal{A}$ sobre V con el mismo árbol de índices que $\mathcal{A}$ y una familia de inmersiones elementales $\pi_n : M_n \longrightarrow M_n^*$, donde los modelos M_n^* son los correspondientes a $\pi\mathcal{A}$, de forma que, si $m \trianglelefteq n$ en dicho árbol de índices, el diagrama siguiente es conmutativo:*

$$\begin{tikzcd} M_n \arrow[r, "\pi_n"] & M_n^* \\ M_m \arrow[u, "j_{m,n}"] \arrow[r, "\pi_m"'] & M_m^* \arrow[u, "j^*_{m,n}"'] \end{tikzcd}$$

Más aún, $\pi_0 = \pi$ y los extensores de $\pi\mathcal{A}$ son los dados por $E_n^* = \pi_n(E_n)$.

Nota La demostración siguiente muestra que, si construimos el árbol $\mathcal{A}$ recurrentemente, la construcción de $\pi\mathcal{A}$ puede realizarse simultáneamente, de modo que, como V es numerablemente cerrado, los modelos M_n^* resultan estar bien fundados automáticamente, y la existencia de las inmersiones π_n hace que los modelos M_n también lo estén.

Demostración: Definimos $M_0^* = V$ y $\pi_0 = \pi : M \longrightarrow V$. Supongamos que ya hemos definido los modelos $\{M_m^*\}_{m\leq n}$, las inmersiones $\{\pi_m\}_{m\leq n}$ y los extensores $\{E_m^*\}_{m<n}$. Tomaremos también como parte de la hipótesis de inducción que si $u < v$ entonces π_u y π_v coinciden sobre $V_{\lambda_u}^{M_u}$.

Llamamos $E_n^* = \pi_n(E_n)$. Si $E_n = \varnothing$, también tenemos que $E_n^* = \varnothing$ y M_{n+1}^* se define de acuerdo con la definición de árbol de iteraciones. Si $E_n \neq \varnothing$, entonces resulta que E_n^* es un extensor$^{M_n^*}$ con soporte y fortaleza iguales a $\pi_n(\lambda_n)$. Es claro que así E_n^* cumple las tres propiedades adicionales que estamos exigiendo a los árboles de iteraciones.

Sea m el anterior a $n+1$ en el árbol de índices. Entonces M_m y M_n coinciden hasta κ_n y $M_{n+1} = \mathrm{Ult}_{E_n}(M_m)$. Queremos definir M_{n+1}^* como la copia de esta ultrapotencia a través de las inmersiones π_m y π_n (definición 10.9). Para que esto tenga sentido es necesario que ambas inmersiones coincidan sobre $V_{\kappa_m+1}^{M_m} = V_{\kappa_n+1}^{M_n}$, lo cual es cierto porque, por hipótesis de inducción, ambas coinciden sobre $V_{\lambda_m}^{M_n}$ y por la propiedad adicional c) de la definición de extensor $\kappa_n < \lambda_m$ (salvo que $M_m = M_n$, en cuyo caso también $M_m^* = M_n^*$ y no hay problema).

Definimos $\pi_{n+1} : M_{n+1} \longrightarrow M_{m+1}^*$ como la inmersión natural asociada a la copia. Como E_n es λ_n fuerte^{M_n}, la observación tras el teorema 10.10 implica que π_{n+1} coincide con π_n sobre $V_{\lambda_n}^{M_n}$. Además, tenemos la conmutatividad del diagrama

$$\begin{tikzcd}
M_{n+1} \arrow[r, "\pi_{n+1}"] & M_{n+1}^* \\
M_m \arrow[u, "j_{m,n+1}"] \arrow[r, "\pi_m"'] & M_m^* \arrow[u, "j_{m,n+1}^*"']
\end{tikzcd}$$

y de aquí se sigue la conmutatividad de todos los diagramas análogos construidos hasta este punto. ■

Definición 10.17 Una *rama* r en un árbol de iteraciones es una rama de su árbol de índices. Si r es una rama infinita, llamamos M_r al límite inductivo del sistema formado por los modelos $\{M_n\}_{n\in r}$ y las inmersiones $\{j_{m,n}\}_{m\trianglelefteq n}$. Para cada $n \in r$, representaremos mediante $j_{n,r} : M_n \longrightarrow M_r$ a la inmersión elemental natural en el límite inductivo.

Diremos que una rama infinita r está *bien fundada* si lo está el modelo M_r.

Vamos a demostrar un hecho que no es trivial en absoluto, y es que todo árbol de iteraciones con al menos una rama infinita tiene al menos una rama infinita bien fundada. Veremos que el problema se puede reducir a estudiar el caso extremo siguiente:

Definición 10.18 Un árbol de iteraciones $\mathcal{A}$ está *continuamente mal fundado* si existe una sucesión de ordinales $\{\alpha_n\}_{n\in\omega}$ tal que $\alpha_n \in M_n$ y, siempre que $m \lhd n$, se cumple $j_{m,n}(\alpha_m) > \alpha_n$.

Un árbol de iteraciones continuamente mal fundado no puede tener ramas infinitas bien fundadas, pues si r es una rama infinita es claro que la sucesión $\{j_{n,r}(\alpha_n)\}_{n\in r}$ es decreciente para la relación de pertenencia en M_r. Ahora bien:

Teorema 10.19 *Sea $\mathcal{B}$ un árbol de iteraciones (en V) que tenga al menos una rama infinita. Entonces $\mathcal{B}$ no está continuamente mal fundado.*

Demostración: Supongamos que $\mathcal{B}$ está continuamente mal fundado y sea $\{\beta_n\}_{n\in\omega}$ una sucesión de ordinales según la definición 10.18. Sea η tal que $\mathcal{B} \in V_\eta$ y sea β'_n el β_n-simo cardinal regular^{M_n} mayor que $j_{0,n}(\eta)$. Observamos que la sucesión $\{\beta'_n\}_{n\in\omega}$ también cumple la definición 10.18. En efecto, si $m \lhd n$, tenemos que (β'_m es el β_m-simo cardinal regular mayor que $j_{0,m}(\eta))^{M_m}$, luego $j_{m,n}(\beta'_m)$ es el $j_{m,n}(\beta_m)$-simo cardinal regular^{M_n} mayor que $j_{0,n}(\eta)$, luego es menor que el β_n-simo cardinal regular^{M_n} mayor que $j_{0,n}(\eta)$, es decir, que β'_n, ya que $j_{m,n}(\beta_m) > \beta_n$. Por lo tanto, cambiando β_n por β'_n podemos suponer que β_n es un cardinal regular^{M_n} y que $\beta_n > j_{0,n}(\eta)$.

Por el teorema de reflexión existe un ordinal θ tal que $\mathcal{B}$, $\{\beta_n\}_{n\in\omega} \in V_\theta$ y V_θ es un modelo de ZFC en el que $\mathcal{B}$ y $\{\beta_n\}_{n\in\omega}$ cumplen todo lo anterior. Sea N el núcleo de Skolem de V_θ que contiene a $\mathcal{B}$ y a $\{\beta_n\}_{n\in\omega} \in V_\theta$, sea M su colapso transitivo, que es un modelo transitivo numerable de ZFC, y sea $\pi : M \longrightarrow V_\theta$ la inversa de la función colapsante, que es una inmersión elemental. Llamemos $\mathcal{A} = \pi^{-1}(\mathcal{B})$ y $\{\alpha_n\}_{n\in\omega} = \pi^{-1}(\{\beta_n\}_{n\in\omega})$.

De este modo, se cumple que $\mathcal{A}$ es un árbol de iteraciones en M continuamente mal fundado, la sucesión $\{\alpha_n\}_{n\in\omega}$ cumple la definición 10.18 y α_n es regular^{M_n}. Más aún, para todo par de naturales m y n se cumple que $E_n \in V_{\alpha_m}^{M_m}$. En efecto, por la elección de η tenemos que

$$E_n^{\mathcal{B}} \in V_\eta \subset V_{j_{0,m}(\eta)} \subset V_{\beta_m},$$

luego esto sigue siendo cierto en N y se cumple en M cambiando $\mathcal{B}$ por $\mathcal{A}$ y β_m por α_m.

A partir de aquí se entenderá que todos los extensores, modelos, inmersiones, etc. se refieren al árbol de iteraciones $\mathcal{A}$. Llamaremos ρ_n a la fortaleza del extensor E_n. Sabemos que si $n < n'$ entonces $V_{\rho_n}^{M_n} = V_{\rho_n}^{M_{n'}}$. Además, para todo par de naturales m y n, como $E_n \in V_{\alpha_m}^{M_m}$ y ρ_n es también el soporte de E_n, se cumple que $\rho_n < \alpha_m$.

Ahora vamos a construir recurrentemente una familia de inmersiones elementales $\sigma_n : V_{\alpha_n}^{M_n} \longrightarrow P_n$ de modo que se cumplan las propiedades siguientes:

a) $V_{\aleph_1} \subset P_n$.

b) Si $k < n$, entonces σ_k y σ_n coinciden en $V_{\rho_k}^{M_k}$

c) $\sigma_n \in P_n$.

d) Para todo $n \in \omega$, $P_{n+1} \in P_n$.

La última propiedad es una contradicción que probará el teorema.

Notemos que, como M es un modelo transitivo numerable de ZFC, se cumple que $M \in V_{\aleph_1}$, luego M pertenece a todos los modelos P_n y es numerable en todos ellos.

Definimos $P_0 = V_{\beta_0}$ y $\sigma_0 = \pi|_{V_{\alpha_0}^{M_0}}$. Como $\pi(\alpha_0) = \beta_0$ y $\pi : M_0 \longrightarrow V_\theta$ es una inmersión elemental, es claro que $\sigma_0 : V_{\alpha_0}^{M_0} \longrightarrow V_{\beta_0}$ también es una inmersión elemental. Como β_0 es un cardinal regular no numerable, se cumple también que $V_{\aleph_1} \subset M_0$.

Supongamos construidas las inmersiones σ_i para $i \leq n$ y veamos cómo construir σ_{n+1}.

Sea k el anterior a $n+1$ en el árbol de índices. Así[5] $M_{n+1} = \mathrm{Ult}_{E_n}(M_k)$. Llamemos $\gamma = j_{k,n+1}(\alpha_k)$. Entonces $V_\gamma^{M_{n+1}} = \mathrm{Ult}_{E_n}(V_{\alpha_k}^{M_k})$. Notemos que $V_{\alpha_k}^{M_k}$ no cumple necesariamente el axioma de reemplazo, pero esto no impide construir la ultrapotencia. En realidad, sabemos que los elementos de $V_\gamma^{M_{n+1}}$ son los de la forma $[f, a]$ con $f : \kappa_n \longrightarrow V_{\alpha_k}^{M_k}$ y $a \in \rho_n$, y en este sentido podemos entender la igualdad anterior.

Las inmersiones σ_k y σ_n coinciden sobre $V_{\rho_k}^{M_k}$ y el punto crítico de E_n es menor que ρ_k. Por lo tanto, se cumplen las condiciones necesarias para construir la copia P_n^* de la ultrapotencia $\mathrm{Ult}_{E_n}(V_{\alpha_k}^{M_k})$, es decir, $P_n^* = \mathrm{Ult}_{F_n}(P_k)$, donde $F_n = \sigma_n(E_n) \in P_n$. Sea $\sigma_n^* : V_\gamma^{M_{n+1}} \longrightarrow P_n^*$ la inmersión elemental correspondiente y sea $\phi_n = \sigma_n(\rho_n)$, de modo que F_n es ϕ_n-fuerte^{P_n}. Por 10.10 tenemos que $V_{\phi_n}^{P_n} = V_{\phi_n}^{\mathrm{Ult}_{F_n}(P_n)} = V_{\phi_n}^{P_n^*}$. En particular, $V_{\aleph_1} \subset V_{\phi_n}^{P_n} \subset P_n^*$.

Por la observación tras el teorema 10.10, como E_n es ρ_n-fuerte^{M_n}, tenemos que σ_n^* coincide con σ_n en $V_{\rho_n}^{M_n}$.

Puesto que $\{\alpha_n\}_n$ cumple 10.18, tenemos que $\alpha_{n+1} < j_{k,n+1}(\alpha_k) = \gamma$, luego está definido $\alpha_n^* = \sigma_n^*(\alpha_{n+1}) \in P_n^*$ (y es un ordinal grande en P_n^*, pues tiene por debajo cardinales inaccesibles$^{P_n^*}$).

De este modo, $\sigma_n^*|_{V_{\alpha_{n+1}}^{M_{n+1}}} : V_{\alpha_{n+1}}^{M_{n+1}} \longrightarrow V_{\alpha_n^*}^{P_n^*}$ es una inmersión elemental tal que si la tomáramos como σ_{n+1} cumpliría las propiedades a) y b). No obstante, para garantizar las otras dos propiedades hemos de hacer algunas manipulaciones más.

Por hipótesis de inducción $\sigma_n \in P_n$ y, como ϕ_n es inaccesible^{P_n}, es claro que $\sigma_n^*|_{\rho_n} = \sigma_n|_{\rho_n} \in V_{\phi_n}^{P_n} = V_{\phi_n}^{P_n^*}$. Veamos que $\tau = \sigma_n^*|_{V_{\rho_n}^{M_{n+1}}} \in P_n^*$.

[5] La definición de árbol de iteraciones contempla la posibilidad de que $E_n = \varnothing$. En este caso definimos $\sigma_{n+1} = \sigma_n$. El decrecimiento de la sucesión de modelos P_n se cumple en realidad para aquellos valores de n para los que $E_n \neq \varnothing$.

En efecto, ante todo, $\rho_n \leq \sigma_n(\rho_n) = \phi_n$, pero, de hecho, $\rho_n < \phi_n$, porque, como $\rho_n \in M$, sucede que ρ_n es numerable^{P_n}, mientras que, como ρ_n es inaccesible^{M_n}, se cumple que ϕ_n es inaccesible^{P_n}.

Por otra parte, ρ_n es inaccesible^{M_n} y la igualdad $V_{\rho_n}^{M_n} = V_{\rho_n}^{M_{n+1}}$ implica que ρ_n es límite fuerte$^{M_{n+1}}$. Por lo tanto, existe $f \in M_{n+1}$ tal que $f : \rho_n \longrightarrow V_{\rho_n}^{M_{n+1}}$ biyectiva.

De hecho, $f \in V_{\rho_n+1}^{M_{n+1}} \subset V_{\phi_n}^{M_{n+1}} \subset P_n^*$ y también $f \in V_\gamma^{M_{n+1}}$, de donde $g = \sigma_n^*(f) \in P_n^*$. Así, si $x \in V_{\rho_n}^{M_{n+1}}$, existe un $\delta < \rho_n$ tal que $x = f(\delta)$, luego $\tau(x) = g(\sigma_n^*(\delta))$. En suma, $\tau = f^{-1} \circ \sigma_n^*|_{\rho_n} \circ g \in P_n^*$.

Veamos que existe una inmersión elemental $\sigma_n^{**} : V_{\alpha_{n+1}}^{M_{n+1}} \longrightarrow V_{\alpha_n^*}^{P_n^*}$ tal que:

- $\sigma_n^{**}|_{V_{\rho_n}^{M_{n+1}}} = \tau$.
- $\sigma_n^{**}(\rho_n) = \phi_n$.
- $\sigma_n^{**} \in P_n^*$.

Notemos que $\sigma_n^*|_{V_{\alpha_{n+1}}^{M_{n+1}}} : V_{\alpha_{n+1}}^{M_{n+1}} \longrightarrow V_{\alpha_n^*}^{P_n^*}$ es una inmersión elemental que cumple las dos primeras condiciones, pero no necesariamente la tercera. A su vez, una inmersión σ_n^{**} que cumpla estas tres condiciones cumpliría las propiedades a), b), c) si la tomáramos como σ_{n+1}.

La existencia de σ_n^{**} se sigue de una leve adaptación de la prueba del teorema 10.6, consistente en no considerar el conjunto A de todas las aplicaciones de un segmento finito de $V_{\alpha_{n+1}}^{M_{n+1}}$ en $V_{\alpha_n^*}^{P_n^*}$, sino únicamente aquellas que sobre los elementos de $V_{\rho_n}^{M_{n+1}}$ coinciden con τ y sobre ρ_n (si es que está en su dominio) toman el valor ϕ_n. Como $\tau \in P_n^*$, sigue siendo cierto que $A \in P_n^*$ y la demostración del teorema indicado vale sin ningún otro cambio.

Ahora hemos de hacer un último ajuste para garantizar que $P_{n+1} \in P_n$. Notemos que la mala fundación del árbol de partida la hemos usado al probar que $\alpha_{n+1} < \gamma$ y que, en consecuencia existe $\alpha_n^* \in P_n^*$. Esto a su vez implica que $P_n^{**} = V_{\alpha_n^*}^{P_n^*} \in P_n^*$. Sea H el núcleo de Skolem de $P_n^{**}|_{\phi_n} \cup \{\phi_n, \sigma_n^{**}\}$ en P_n^{**}. Definimos P_{n+1} como el colapso transitivo de H y sea $j : P_{n+1} \longrightarrow P_n^{**}$ la inversa de la función colapsante, que es una inmersión elemental.

Así, es claro que $\phi_n \in P_{n+1}$ y $V_{\phi_n}^{P_{n+1}} = V_{\phi_n}^{P_n^{**}}$, lo que implica que P_{n+1} cumple la propiedad a).

Sea $\sigma_{n+1} \in P_{n+1}$ tal que $j(\sigma_{n+1}) = \sigma_n^{**}$. Como j es una inmersión elemental, tenemos que $\sigma_{n+1} : V_{\alpha_{n+1}}^{M_{n+1}} \longrightarrow P_{n+1}$ es una inmersión elemental y se cumple la propiedad c).

Más explícitamente, si $x \in V_{\alpha_{n+1}}^{M_{n+1}}$ y $\sigma_{n+1}(x) = y$, entonces, aplicando j, vemos que $\sigma_n^{**}(x) = j(y)$, pues j es la identidad sobre $V_{\phi_n}^{P_{n+1}}$. Por esto mismo, dado que $\sigma_{n+1} = \sigma_n^{**} \circ j^{-1}$, se cumple que $\sigma_{n+1}|_{V_{\rho_n}^{M_n}} = \sigma_n^{**}|_{V_{\rho_n}^{M_n}} = \sigma_n|_{V_{\rho_n}^{M_n}}$ y se cumple la propiedad b).

Terminaremos la demostración probando que $P_{n+1} \in P_n$.

Como P_n^{**} y $\sigma_n^{**} \in P_n^*$, tenemos que $H \in P_n^*$ y el cardinal$^{P_n^*}$ de H es ϕ_n, ya que ϕ_n es un límite fuerte$^{P_n^*}$. Por consiguiente, también $|P_{n+1}|^{P_n^*} = \phi_n$ y podemos expresar P_{n+1} como el colapso transitivo de un conjunto $A \subset \phi_n$, $A \in P_n^*$. Basta probar que $A \in P_n$. Ahora bien, $P_n^* = \mathrm{Ult}_{F_n}(P_k)$ y P_k y P_n concuerdan sobre el punto crítico κ de F_n, luego por 10.10 las ultrapotencias P_n^* y $\mathrm{Ult}_{F_n}(P_n)$ concuerdan sobre $i(\kappa)$, pero como F_n es ϕ_n-fuerte, el teorema [CG 7.23] nos da que $\phi_n \leq i(\kappa)$, luego

$$A \in V_{\phi_n+1}^{P_n^*} \subset V_{i(k)+1}^{P_n^*} = V_{i(\kappa)+1}^{\mathrm{Ult}_{F_n}(P_n)} \subset P_n,$$

donde la última inclusión se debe a que la ultrapotencia es definible en P_n, ya que $F_n \in P_n$. ■

Ahora ya es fácil probar:

Teorema 10.20 *Todo árbol de iteraciones con una rama infinita tiene una rama bien fundada.*

Demostración: Consideremos un árbol con una rama infinita y supongamos que no tiene ramas bien fundadas. No perdemos generalidad si suponemos que $M_0 = V$. Para cada rama infinita r sea $\{\alpha_n^r\}_{n\in r}$ una sucesión de ordinales tal que, si $m \lhd n$ están en r, se cumple que $j_{m,n}(\alpha_m^r) > \alpha_n^r$. Sea θ un ordinal mayor que todos los ordinales α_n^r para toda rama infinita r y todo $n \in \omega$.

Para cada $n \in \omega$, sea R_n el conjunto de todas las ramas infinitas que contienen a n, sea F_n el conjunto de funciones de R_n en θ y sea $\mathcal{C}$ el conjunto de todos los pares (n, f) tales que $n \in \omega$ y $f \in F_n$. Definimos en $\mathcal{C}$ la relación dada por $(n, f) \prec (m, g)$ si y sólo si $m \lhd n$ y $f(r) < g(r)$ para todo $r \in R_n$.

Observemos que la relación $\prec$ está bien fundada, pues si $\{(n_i, f_i)\}_{i\in\omega}$ fuera una sucesión decreciente, entonces existe una rama r que contiene a todos los n_i, y $\{f_i(r)\}_{i\in\omega}$ sería una sucesión decreciente de ordinales.

Para cada $n \in \omega$ sea $\phi_n : R_n \longrightarrow \theta$ la función dada por $\phi_n(r) = \alpha_n^r$. Por la observación tras 10.15 sabemos que cada modelo M_n es $2^{\aleph_0}$-cerrado, luego $\phi_n \in M_n$. La inmersión $j_{0,n}$ fija al árbol de índices, luego $j_{0,n}(R_n) = R_n$ y claramente $(n, \phi_n) \in j_{0,n}(\mathcal{C})$. Llamemos $\prec_n = j_{0,n}(\prec)$. Vamos a probar que si $m \lhd n$ entonces $(n, \phi_n) \prec_n (m, j_{m,n}(\phi_m)) = j_{m,n}(n, \phi_m)$. En efecto, esto significa que $\phi_n(r) < j_{m,n}(\phi_m)(r)$ para toda rama $r \in R_n$, lo que equivale a su vez a que $\alpha_n^r < j_{m,n}(\alpha_m^r)$, y con esta condición hemos elegido los ordinales α_n^r.

Como la relación $\prec_n$ está bien fundada, podemos considerar el rango γ_n de (n, ϕ_n) respecto a ella, y acabamos de probar que $\gamma_n < j_{m,n}(\gamma_m)$. Así pues, la sucesión $\{\gamma_n\}_{n\in\omega}$ demuestra que el árbol está continuamente mal fundado, en contradicción con el teorema anterior. ■

El resto de esta sección no será necesario para la demostración de la consistencia de ADP, pero nos hará falta en el capítulo siguiente para probar la consistencia de AD.

Definición 10.21 Una *iteración* de longitud α de un modelo transitivo M es una sucesión de objetos M_ξ, $\mathcal{A}_\xi$, r_ξ para $\xi < \alpha$ y una sucesión de inmersiones elementales $j_{\mu,\xi} : M_\mu \longrightarrow M_\xi$ para $\mu < \xi < \alpha$ de modo que:

a) $M_0 = M$.

b) Para cada $\xi < \alpha$, se cumple que $\mathcal{A}_\xi$ es un árbol de iteraciones de M_ξ, r_ξ es una rama infinita bien fundada en $\mathcal{A}_\xi$, $M_{\xi+1}$ es el límite inductivo de $\mathcal{A}_\xi$ a lo largo de r_ξ y $j_{\xi,\xi+1} : M_\xi \longrightarrow M_{\xi+1}$ es la inmersión asociada al límite inductivo.

c) Para cada ordinal límite $\lambda < \alpha$ el modelo M_λ es el límite inductivo (que ha de estar bien fundado) del sistema $\{M_\xi\}_{\xi<\lambda}$ con las inmersiones elementales $\{j_{\mu,\xi}\}_{\mu<\xi<\lambda}$.

d) Las inmersiones restantes $j_{\mu,\xi}$ son las determinadas por composición para que conmuten entre sí de forma natural.

Llamaremos *juego de iteraciones* de un modelo transitivo $M = M_0$ de ZFC al juego siguiente entre dos jugadores, a los que podemos llamar “bueno” y “malo”. El jugador malo construye un árbol de iteraciones $\mathcal{A}_0$ de M_0 que tenga al menos una rama infinita. Seguidamente, el jugador bueno escoge una de estas ramas r_0 (que esté bien fundada), con lo que determina un modelo M_1 (el límite inductivo de la rama). A continuación juega el malo construyendo un nuevo árbol $\mathcal{A}_1$, esta vez de M_1, con al menos una rama infinita, y entonces el bueno juega una rama infinita r_1 que determina un modelo M_2, y así sucesivamente hasta llegar a un modelo M_{ω_1}. (Los modelos M_λ, para los ordinales límite λ, están determinados de forma automática por los modelos anteriores, luego no los elige ninguno de los dos jugadores.)

La partida se interrumpe si un modelo M_λ (para un ordinal límite λ) resulta no estar bien fundado. En tal caso el malo gana la partida. Por el contrario, si el bueno logra llegar a un modelo M_{ω_1} bien fundado, es él quien gana la partida.

Se dice que un modelo M es *iterable* si el jugador bueno tiene una estrategia ganadora, es decir, que existe una forma de responder a cada jugada posible del jugador malo para acabar ganando siempre la partida.

Teorema 10.22 *Sea M un modelo transitivo numerable de* ZFC *tal que existe una inmersión elemental $\pi : M \longrightarrow V_\theta$, para cierto ordinal θ tal que V_θ sea un submodelo elemental de V. Si $\mathcal{A}$ es un árbol de iteraciones de M con al menos una rama infinita, entonces existe una rama infinita r y una inmersión elemental $\sigma : M_r \longrightarrow V_\theta$ tal que $j_{0,r} \circ \sigma = \pi$. (En particular, M_r está bien fundado, pues puede sumergirse en V_θ).*

De aquí se sigue inmediatamente que si M es un modelo transitivo numerable de ZFC para el que existe una inmersión elemental $j : M \longrightarrow V_\theta$, entonces M es iterable, pues el jugador bueno sólo tiene que elegir cada vez una rama infinita de las que el teorema asegura la existencia, pues así en cada nuevo paso sigue existiendo una inmersión análoga, y también la hay para los modelos M_λ, donde

λ es un ordinal límite, por el teorema [CG 1.27], que se puede aplicar también al construir M_{ω_1}. En este punto M_{ω_1} ya no tiene por qué ser numerable y el jugador bueno ya no podría seguir aplicando el teorema, pero es que ahí se acaba el juego.

Demostración: Vamos a suponer que el teorema es falso y construiremos un árbol de iteraciones (en V) continuamente mal fundado, en contradicción con el teorema 10.19.

Consideramos el árbol $\pi\mathcal{A}$ construido en la demostración del teorema 10.16. Conservando la notación empleada allí, llamaremos M_i^* a sus modelos, de modo que $M_0^* = V$, llamaremos j_{ij}^* a sus inmersiones elementales y $\pi_i : M_i \longrightarrow M_i^*$ a las inmersiones elementales que conectan ambos árboles de iteraciones, de modo que $\pi_0 = \pi$. Como partimos de una inmersión elemental $\pi : M \longrightarrow V_\theta$, en realidad cada π_i factoriza como una inmersión elemental $\pi_i : M_i \longrightarrow j_{0i}^*(V_\theta)$ seguida de la inclusión en M_i^*. Vamos a probar que $\pi\mathcal{A}$ está continuamente mal fundado.

Sea R el conjunto formado por los elementos de la forma $(a, \{\sigma_i\}_{i\in a})$, donde a es una sección inicial finita del árbol de índices de $\mathcal{A}$ y $\sigma_i : M_i \longrightarrow V_\theta$ es una inmersión elemental, de modo que $\sigma_0 = \pi$ y, si $i \trianglelefteq i'$ son dos elementos de a, se tiene el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} M_{i'} \arrow[r, "\sigma_{i'}"] & V_\theta \\ M_i \arrow[u, "j_{i,i'}"] \arrow[ur, "\sigma_i"'] & \end{tikzcd}$$

Definimos en R la relación de orden dada por

$$(a, \{\sigma_i\}_{i\in a}) \preceq (b, \{\tau_i\}_{i\in b}) \quad \text{si y sólo si} \quad a \subset b \land \bigwedge i \in a\ \sigma_i = \tau_i.$$

Es inmediato que R es un árbol, en el sentido general de que sus secciones iniciales son finitas y están bien ordenadas. En principio, sólo conocemos un elemento de R (de hecho su mínimo elemento), dado por $(\{0\}, \{\pi\})$. Bajo la hipótesis que estamos suponiendo, podemos asegurar que R no posee ramas infinitas, pues una de ellas daría lugar a una rama r en el árbol de índices de $\mathcal{A}$ junto con una familia de inmersiones elementales $\{\sigma_i\}_{i\in r}$ que conmutan con las inmersiones $j_{i,i'}$, luego inducirían una inmersión elemental $\sigma : M_r \longrightarrow V_\theta$ que cumpliría $j_{0,r} \circ \sigma = \pi$.

El hecho de que R no tenga ramas infinitas equivale a que está bien fundado para la relación inversa de $\preceq$, de modo que podemos considerar la aplicación rango $\phi : R \longrightarrow \Omega$ de dicha relación inversa, de modo que

$$\bigwedge ii' \in R(i \prec i' \to \phi(i') < \phi(i)).$$

Observemos ahora que, como M es un conjunto transitivo numerable, está contenido en $V_{\aleph_1}$, luego queda fijo por cualquiera de las inmersiones elementales $j_{0,n}^* : V \longrightarrow M_n^*$, al igual que todos sus elementos. Esto implica que todos los modelos M_i son invariantes por $j_{0,n}^*$. Por lo tanto, como $\pi : M \longrightarrow V_\theta$, se cumple que $j_{0,n}^*(\pi) : M \longrightarrow j_{0,n}^*(V_\theta)$. Más concretamente, $j_{0,n}^*(\pi) = \pi \circ j_{0,n}^*$.

Al aplicar $j^*_{0,n}$ a la definición de R obtenemos que $j^*_{0,n}(R)$ está formado por los objetos de la forma $(a, \{\sigma_i\}_{i\in a})$, donde a es una sección inicial finita del árbol de índices de $\mathcal{A}$ y las $\sigma_i : M_i \longrightarrow j^*_{0,n}(V_\theta)$ son inmersiones elementales que conmutan con las inmersiones $j_{i,i'}$ y de modo que $\sigma_0 = \pi \circ j^*_{0,n} = j_{0,n} \circ \pi_n$.

Por consiguiente, si $a = \{0 = n_0 \lhd n_1 \lhd \cdots \lhd n_{l-1}\}$ es cualquier sección inicial finita del árbol de índices de $\mathcal{A}$, se cumple que

$$s_a = (a, \{j_{i,n_{l-1}} \circ \pi_{n_{l-1}}\}_{i\in a}) \in j^*_{0,n_{l-1}}(R).$$

En particular vemos que $j^*_{n_{l-1}}(R)$ contiene elementos de altura l, luego lo mismo vale para R (para todo número natural l).

Para cada $k \in \omega$, sea $s_k = s_a$, donde $a = \{i \in \omega \mid i \unlhd k\}$. Según acabamos de probar, $s_k \in j^*_{0,k}(R)$. Es inmediato que si $k \lhd k'$, entonces $j^*_{k,k'}(s_k) \prec s_{k'}$.

Finalmente, llamamos $\alpha_k = j^*_{0,k}(\phi)(s_k)$. Así

$$j^*_{k,k'}(\alpha_k) = j^*_{0,k'}(\phi)(j^*_{k,k'}(s_k)) > j^*_{0,k'}(\phi)(s_{k'}) = \alpha_{k'}.$$

La sucesión $\{\alpha_k\}_{k\in\omega}$ prueba que $\pi\mathcal{A}$ está continuamente mal fundado. ■

Vamos a necesitar también una variante del teorema anterior mucho más simple:

Teorema 10.23 *Sea M un modelo transitivo numerable de* ZFC *tal que existe una inmersión elemental $\pi : M \longrightarrow V_\theta$, para cierto ordinal θ tal que V_θ sea un submodelo elemental de V. Sea κ un cardinal medible^M, sea $D \in M$ una medida normal^M en κ y sea $\mathcal{A}$ el árbol de iteraciones lineal (es decir, cuyo árbol de índices es ω con el orden usual) dado por $M_0 = M$ y $M_{n+1} = \mathrm{Ult}_{j_{0,n}(D)}(M_n)$. Sea M_ω el límite inductivo a lo largo de la única rama de $\mathcal{A}$. Entonces existe una inmersión elemental $\sigma : M_\omega \longrightarrow V_\theta$ tal que $j_{0,\omega} \circ \sigma = \pi$.*

DEMOSTRACIÓN: Por el teorema [CG 7.11] sabemos que las ultrapotencias asociadas a medidas normales están también asociadas a extensores, por lo que $\mathcal{A}$ es un árbol de iteraciones salvo por el hecho de que no tiene por qué cumplir las propiedades adicionales a), b), c) que hemos incluido en la definición. Ahora bien, estas propiedades sólo son necesarias para garantizar la posibilidad de extender un modelo con un extensor de otro modelo, pero en la construcción de $\mathcal{A}$ cada extensor está siempre en el mismo modelo a extender. En particular, no hay ningún problema en construir la copia $\pi\mathcal{A}$ descrita en el teorema 10.16. La prueba del teorema anterior tampoco se apoya en ningún momento en las propiedades adicionales de la definición de árbol de iteraciones. El mismo argumento prueba literalmente que el árbol R tiene nodos de cualquier altura y, como no tiene más que una rama, concluimos directamente que tiene una rama infinita, sin necesidad de suponer lo contrario y contradecir al teorema 10.19. ■

10.5 Tipos

La construcción de árboles de iteraciones requiere elegir los extensores de forma que haya una cierta concordancia entre el modelo en el que elegimos el extensor y el modelo que extendemos. Esto resulta trivial si ambos son el mismo modelo, pero si recurrimos a esta técnica sistemáticamente obtenemos un árbol lineal con una única rama. En esta sección presentamos una técnica para construir árboles más complicados a partir de un cardinal de Woodin. Al final mostraremos un ejemplo de cómo puede aplicarse.

Definición 10.24 Un *tipo* (κ, n), donde κ es un ordinal límite y $n \in \omega$, es un conjunto u de fórmulas con a lo sumo las variables libres $v_0, \ldots, v_{n-1}$ del lenguaje de la teoría de conjuntos extendido con una constante $\tilde{\delta}$ y un conjunto de constantes $\{\tilde{c}\}_{c \in V_\kappa \cup \{\kappa\}}$.

Cada fórmula del lenguaje indicado puede definirse como una cierta sucesión finita en V_κ y, como κ es un ordinal límite, podemos definir las fórmulas para que sean elementos de V_κ. Por consiguiente, los tipos (κ, n) son subconjuntos de V_κ. Si u es un tipo (κ, n) diremos que κ es el *dominio* de u, y lo representaremos por $\mathcal{D}u$.

Si η y δ son ordinales tales que κ, $\delta < \eta$, diremos que un tipo (κ, n) u está *realizado* respecto de δ por $x_0, \ldots, x_{n-1}$ en V_η si $x_0, \ldots, x_{n-1} \in V_\eta$ y una fórmula ϕ pertenece a u si y sólo si $V_\eta \vDash \phi[x_0, \ldots, x_{n-1}]$, entendiendo que la constante $\tilde{\delta}$ se interpreta como δ y que cada constante $\tilde{c}$ se interpreta como c.

Evidentemente, fijados $\delta, x_0, \ldots, x_{n-1} \in V_\eta$, existe un único tipo (κ, n) u realizado respecto de δ por $x_0, \ldots, x_{n-1}$ (el formado por todas las fórmulas verdaderas en V_η al interpretar las variables por los conjuntos dados). Nos referiremos a él como el κ-tipo de $x_0, \ldots, x_{n-1}$ en V_η relativo a δ. Diremos que un tipo u es *realizable* respecto de δ si existe un η y unos $x_0, \ldots, x_{n-1} \in V_\eta$ que realizan u en V_η.

Si $\tau \leq \kappa$ y $m \leq n$, llamaremos $\operatorname{proy}_\tau^m(u)$ al tipo formado por las fórmulas $\phi \in u$ en las que a lo sumo aparecen las variables libres $v_0, \ldots, v_{m-1}$ y en las que todas las constantes que aparecen corresponden a elementos de $V_\tau \cup \{\tau\}$. Escribiremos $\operatorname{proy}_\tau(u)$ cuando $m = n$ y $\operatorname{proy}^m(u)$ cuando $\tau = \kappa$.

Es claro que si u está realizado respecto de δ por $x_0, \ldots, x_{n-1}$ en V_η, entonces $\operatorname{proy}_\tau^m(u)$ está realizado respecto de δ por $x_0, \ldots, x_{m-1}$ en V_η.

Si u es un tipo (κ, n) que contiene a la fórmula

$$\bigvee \nu(\nu \text{ es el máximo ordinal} \land \tilde{\kappa}, \tilde{\delta}, v_0, \ldots, v_{n-1} \in V_\nu)$$

definimos u^- como el conjunto de las fórmulas $\phi(v_0, \ldots, v_{n-1})$ tales que la fórmula

$$\bigvee \nu(\nu \text{ es el máximo ordinal} \land V_\nu \vDash \phi[v_0, \ldots, v_{n-1}])$$

pertenece a u.

De este modo, si u está realizado respecto a δ por $x_0, \ldots, x_{n-1}$ en V_α, entonces $\alpha = \eta + 1$, existe u^- y está realizado por $x_0, \ldots, x_{n-1}$ en V_η.

Sea u un tipo (κ, n) y sea w un tipo (τ, m). Diremos que w es un *subtipo* de u, y lo representaremos por $w < u$, si $\tau < \kappa$, $m \geq n$ y la fórmula "existe un ordinal ν y existen $v_n, \ldots, v_{m-1} \in V_\nu$ tales que $\tilde{w}$ está realizado por una permutación[6] de $v_0, \ldots, v_{m-1}$ respecto de $\tilde{\delta}$ en V_ν" pertenece a u.

Así, si u es el κ-tipo de $x_0, \ldots, x_{n-1}$ respecto de δ en V_η, entonces w es un subtipo de u si y sólo si existen conjuntos $x_n, \ldots, x_{m-1}$ y un $\nu < \eta$ tales que w es el τ-tipo de cierta permutación de $x_0, \ldots, x_{m-1}$ en V_ν.

Es evidente que la fórmula $w < u$ (como todos los conceptos que estamos definiendo que no involucran la realización de un tipo) es absoluta para modelos transitivos de ZFC.

Diremos que un tipo (τ, m) w *excede* a un tipo (κ, n) u (respecto de δ) si $\tau > \kappa$, $m \geq n$ y existen ordinales $\nu + 1 < \eta$ y conjuntos $x_0, \ldots, x_{m-1} \in V_\nu$ tales que u está realizado respecto de δ en V_η por $x_0, \ldots, x_{n-1}$, y w está realizado respecto de δ en V_ν por una permutación de $x_0, \ldots, x_{m-1}$.

Así, si u es el κ-tipo respecto de δ de $x_0, \ldots, x_{n-1}$ en V_η, $\tau > \kappa$, $m \geq n$, $\nu+1 < \eta$, $x_n, \ldots, x_{m-1} \in V_\nu$ y w es el τ-tipo de una permutación de $x_0, \ldots, x_{m-1}$ en V_ν, entonces w excede a u.

Sean $\kappa < \lambda$, sea E un extensor λ-fuerte con punto crítico κ y sea u un tipo (κ, n). Sea $i_E : V \longrightarrow \mathrm{Ult}_E(V)$ la inmersión en la ultrapotencia. Definimos la *ampliación* de u como $\mathrm{amp}_\lambda^E(u) = \mathrm{proy}_\lambda(i_E(u))$, que es un tipo (λ, n).

Esto tiene sentido, pues $i_E(u)$ es un tipo$^{\mathrm{Ult}_E(V)}$ $(i_E(\kappa), n)$ y $\lambda \leq i_E(\kappa)$, por lo que $\mathrm{amp}_\lambda^E(u)$ es un tipo$^{\mathrm{Ult}_E(V)}$ (λ, n), pero, como $V_\lambda^{\mathrm{Ult}_E(V)} = V_\lambda$, la ampliación es también un tipo en V.

Diremos que un tipo (κ, n) es *elástico* si está definido u^- y u contiene las fórmulas "$\tilde{\delta}$ es un cardinal inaccesible" y

> Existe un ordinal ν tal que ν es el máximo ordinal y, para todo $\lambda < \tilde{\delta}$, existe un extensor $E \in V_{\tilde{\delta}}$ con punto crítico $\tilde{\kappa}$ y cuyo soporte es igual a su fortaleza y es un cardinal inaccesible mayor que λ. Además $\mathrm{amp}_\lambda^E(u^-)$ está realizado (respecto a $\tilde{\delta}$) por $v_0, \ldots, v_{n-1}$ en V_ν.

donde $v_0, \ldots, v_{n-1}$ son variables libres.

Técnicamente, la última parte de la fórmula descrita en el párrafo destacado debería decir que "existe un w tal que es el $\tilde{\kappa}$-tipo de $v_0, \ldots, v_{n-1}$ en V_ν y $\mathrm{amp}_\lambda^E(w)$ está realizado…", pues u^- no es una constante que pueda aparecer en las fórmulas de u.

[6] En esta definición, al igual que en la definición siguiente de "w excede a u", por "permutación" hemos de entender una permutación que respete el orden de $v_0, \ldots, v_{n-1}$, es decir, que intercale las nuevas variables entre las viejas, pero sin desordenarlas.

Notemos que esta definición sólo requiere que ciertas fórmulas pertenezcan a u (en ella no se habla de realización de tipos), por lo que es absoluta para modelos transitivos de ZFC.

El teorema siguiente muestra el interés que tienen para nosotros los cardinales de Woodin: garantizan la existencia de muchos tipos elásticos:

Teorema 10.25 *Sea δ un cardinal de Woodin, $\eta > \delta$ y $x_0, \ldots, x_{n-1} \in V_\eta$. Entonces existe un conjunto no acotado de cardinales $\kappa < \delta$ tales que el κ-tipo de $x_0, \ldots, x_{n-1}$ en $V_{\eta+1}$ respecto a δ es elástico.*

Demostración: Para cada cardinal inaccesible $\gamma < \delta$ sea A_γ el γ-tipo de $x_0, \ldots, x_{n-1}$ respecto de δ en V_η. En principio $A_\gamma \subset V_\gamma$, pero, como $|V_\gamma| = \gamma$, podemos codificar A_γ mediante un subconjunto de γ. Por ejemplo, consideramos la relación en γ cuyo colapso transitivo es V_γ y el subconjunto de γ formado por los ordinales correspondientes a A_γ. Así tenemos dos subconjuntos de γ, que se pueden codificar fácilmente como uno solo.

Sea $H = \{(\xi, \gamma) \in \delta \mid \xi \in A_\gamma\} \subset \delta$, sea $\kappa < \delta$ un cardinal $< \delta$-fuerte respecto de H y sea u el κ-tipo de $x_0, \ldots, x_{n-1}$ respecto de δ en $V_{\eta+1}$. Vamos a probar que u es elástico.

Ciertamente, u^- está definido y "$\tilde{\delta}$ es inaccesible" pertenece a u. Fijemos $\lambda < \delta$ y tomemos un cardinal inaccesible $\lambda < \lambda' < \delta$. Por el teorema [CG 7.33] existe un extensor $E \in V_\delta$ con punto crítico κ y cuyo soporte $\lambda^* > \lambda'$ es igual a su fortaleza y es un cardinal inaccesible tal que $j_E(H \cap \kappa) \cap \lambda^* = H \cap \lambda^*$.

Para que u sea elástico basta con que $\mathrm{amp}^E_\lambda(u^-)$ esté realizado respecto a δ en V_η por $x_0, \ldots, x_{n-1}$, para lo cual basta a su vez con que esto le suceda a $\mathrm{amp}^E_{\lambda'}(u^-)$ y, como λ' es inaccesible, esto a su vez equivale a probar que $\mathrm{amp}^E_{\lambda'}(u^-) = A_{\lambda'}$.

Observamos que H codifica la sucesión $\{A_\gamma\}_\gamma$, donde γ recorre los cardinales inaccesibles menores que δ, luego $j_E(H)$ codifica igualmente una sucesión $\{j_E(A)_\gamma\}_\gamma$, donde ahora γ recorre los cardinales inaccesibles$^{\mathrm{Ult}_E(V)}$ menores que $j_E(\delta)$ y $j_E(A)_\gamma$ es el γ-tipo$^{\mathrm{Ult}_E(V)}$ de $j_E(x_0), \ldots, j_E(x_{n-1})$ respecto de $j_E(\delta)$ en $V^{\mathrm{Ult}_E(V)}_{j_E(\eta)}$.

Por otra parte, como u^- está realizado por $x_0, \ldots, x_{n-1}$ respecto de δ en V_η, tenemos que $j_E(u^-)$ está realizado$^{\mathrm{Ult}_E(V)}$ por $j_E(x_0), \ldots, j_E(x_{n-1})$ respecto de $j_E(\delta)$ en $V^{\mathrm{Ult}_E(V)}_{j_E(\eta)}$, luego lo mismo vale para $\mathrm{amp}^E_{\lambda'}(u^-)$, es decir, tenemos que $\mathrm{amp}^E_{\lambda'}(u^-) = j_E(A)_{\lambda'}$.

Así pues, todo se reduce a probar que $j_E(A)_{\lambda'} = A_{\lambda'}$ y aquí es donde interviene que el extensor E sea λ^*-fuerte respecto a H:

Puesto que $H \cap \kappa = \{(\xi, \gamma) \in \kappa \mid \xi \in A_\gamma\}$ y $H \cap \lambda^* = \{(\xi, \gamma) \in \lambda^* \mid \xi \in A_\gamma\}$,

$$j_E(H \cap \kappa) \cap \lambda^* = \{(\xi, \gamma) \in \lambda^* \mid \xi \in j_E(A)_\gamma\} = H \cap \lambda^*$$

implica que $j_E(A)_{\lambda'} = A_{\lambda'}$ (en general, para todo inaccesible $\lambda' < \lambda^*$).

Con esto hemos encontrado un cardinal κ en las condiciones del enunciado, pero, dado $\beta < \delta$, podemos cambiar H por $H' = \beta + H \subset \delta$, y llegamos al mismo resultado porque H' codifica igualmente los tipos A_γ, pero, teniendo en cuenta que $H' \cap \beta = \varnothing$ y que κ ha de cortar a H', ha de ser $\kappa \geq \beta$, luego el conjunto de los cardinales que cumplen el enunciado no está acotado en δ. ■

Teorema 10.26 *Sea u un tipo (κ, n) elástico y sea w un tipo (τ, m) que exceda a u respecto a un ordinal $\delta > \tau$. Entonces existe un extensor $E \in V_\delta$ con punto crítico κ, cuyo soporte es igual a su fortaleza y es un cardinal inaccesible $\lambda > \tau$ y además $w < \mathrm{amp}^E_{\tau+\omega}(u)$.*

Demostración: Por hipótesis existen ordinales $\delta < \nu < \eta$ y unos conjuntos $x_0, \ldots, x_{m-1} \in V_\nu$ tales que u está realizado por $x_0, \ldots, x_{n-1}$ respecto de δ en $V_{\eta+1}$ y w está realizado respecto de δ en V_ν por una permutación de $x_0, \ldots, x_{m-1}$.

Notemos que hemos tomado $V_{\eta+1}$ porque, como u es elástico, existe u^-, lo que significa que si está realizado en un conjunto V_α, ha de ser $\alpha = \eta + 1$.

La definición de tipo elástico nos da también que δ es un cardinal inaccesible y que existe un extensor $E \in V_\delta$ con punto crítico κ y soporte $\lambda > \tau$ igual a su fortaleza, que también es inaccesible, y además $\mathrm{amp}^E_{\tau+\omega}(u^-)$ está realizado respecto de δ por $x_0, \ldots, x_{n-1}$ en V_η. Claramente entonces, $w < \mathrm{amp}^E_{\tau+\omega}(u^-)$ y esto implica que $w < \mathrm{amp}^E_{\tau+\omega}(u)$.

En efecto, tenemos que la fórmula $\phi(v_0, \ldots, v_{n-1})$:

> existe un ordinal μ y existen $v_n, \ldots, v_{m-1} \in V_\mu$ tales que $\tilde{w}$ está realizado por una permutación de $v_0, \ldots, v_{m-1}$ respecto de $\tilde{\delta}$ en V_μ

está en $\mathrm{amp}^E_{\tau+\omega}(u^-)$, luego también está en $j_E(u^-) = j_E(u)^-$, luego la fórmula

$$\bigvee \eta (\eta \text{ es el máximo ordinal} \wedge V_\eta \vDash \phi[v_0, \ldots, v_{n-1}])$$

está en $j_E(u)$, pero, teniendo en cuenta que u es realizable y, por lo tanto, $j_E(u)$ es realizable en $\mathrm{Ult}_E(V)$, esto implica que $\phi \in j_E(u)$, luego también $\phi \in \mathrm{amp}^E_{\tau+\omega}(u)$, con lo que $w < \mathrm{amp}^E_{\tau+\omega}(u)$. ■

Veamos cómo podemos usar los dos teoremas anteriores para construir árboles de iteraciones. En el resto de la sección δ será siempre un cardinal de Woodin prefijado.

Ejemplo 1 Vamos a construir un árbol de iteraciones finito con cuatro nodos con la estructura que muestra la figura, donde $M_0 = M_1 = V$.

$$\begin{tikzcd}
M_3 & & \\
M_1 \arrow[u] & & M_2 \\
& M_0 \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Para ello partimos de un ordinal $\eta > \delta$. El teorema 10.25 nos da un cardinal $\kappa_1 < \delta$ tal que el κ_1-tipo de η respecto de δ en $V_{\eta+5}$ es elástico. Llamémoslo u_0. Una nueva aplicación nos da un cardinal $\kappa_1 < \kappa_2 < \delta$ tal que el κ_2-tipo de η en $V_{\eta+3}$ es elástico. Llamémoslo u_1. Notemos que u_1 excede a u_0, luego podemos usar el teorema 10.26, que nos da un extensor $E_1 \in V_\delta^{M_1}$ cuyo punto crítico es κ_1, cuyo soporte $\lambda_1 > \kappa_2$ es un cardinal inaccesible igual a su fortaleza y $u_1 < \mathrm{amp}^{E_1}_{\kappa_2+\omega}(u_0)$. (Notemos que $\kappa_1 < \kappa_2 < \lambda_1 < \delta$.)

Así podemos definir $M_2 = \mathrm{Ult}_{E_1}(M_1)$ con $j_{0,2}$ igual a la inmersión canónica. La definición de ampliación se traduce en que u_1 es un subtipo de $j_{0,2}(u_0)$.

Como u_0 está realizado respecto de δ por η en $V_{\eta+5}$, tenemos que, en M_2, $j_{0,2}(u_0)$ está realizado respecto de $j_{0,2}(\delta)$ por $j_{0,2}(\eta)$ en $V^{M_2}_{j_{0,2}(\eta)+5}$. Por definición de subtipo existe un ordinal $\nu < j_{0,2}(\eta) + 5$ tal que u_1 está realizado respecto a $j_{0,2}(\delta)$ por $j_{0,2}(\eta)$ en $V_\nu^{M_2}$. Ahora bien, como u_1 contiene la fórmula "$v_0 + 2$ es el máximo ordinal", ha de ser $\nu = j_{0,2}(\eta) + 3$.

Como $j_{0,2}(\delta)$ es un cardinal de Woodin^{M_2}, el teorema 10.25 relativizado a M_2 nos da un $\kappa_2 < \lambda_1 < \kappa_3 < j_{0,2}(\delta)$ tal que el κ_3-tipo respecto a $j_{0,2}(\delta)$ de $j_{0,2}(\eta)$ en $V^{M_2}_{j_{0,2}(\eta)+1}$ es elástico. Llamémoslo u_2. Claramente u_2 excede^{M_2} a u_1. Por consiguiente, podemos usar la relativización de 10.26 a M_2, que nos da un extensor $E_2 \in V^{M_2}_{j_{0,2}(\delta)}$ con punto crítico κ_2 y soporte $\lambda_2 > \kappa_3$ inaccesible e igual a su fortaleza, de modo que $u_2 < \mathrm{amp}^{E_2}_{\kappa_1+\omega}(u_1)$.

Puesto que M_1 y M_2 concuerdan hasta λ_1, podemos formar $M_3 = \mathrm{Ult}_{E_2}(M_1)$ y tenemos el árbol de iteraciones. ■

Para construir árboles de iteraciones con ramas infinitas necesitamos un último concepto:

Definición 10.27 Sea δ un ordinal. Diremos que dos ordinales $\delta < \nu_I < \nu_S$ son un par de *indiscernibles locales* respecto a δ si para todo $k < \omega$, toda fórmula ϕ con $k+1$ variables libres y todos los $c_0, \ldots, c_k \in V_{\delta+\omega}$ se cumple que

$$V_{\nu_I+\omega} \vDash \phi[\nu_I, c_0, \ldots, c_{k-1}] \leftrightarrow V_{\nu_S+\omega} \vDash \phi[\nu_S, c_0, \ldots, c_{k-1}].$$

Notemos que existen pares de indiscernibles locales, pues a cada ordinal $\nu > \delta$ podemos asociarle el conjunto S_ν de todos los pares (ϕ, s) tales que ϕ es una fórmula con $k+1$ variables libres y $s \in V^k_{\delta+\omega}$ tales que

$$V_{\nu+\omega} \vDash \phi[\nu, s(0), \ldots s(k-1)].$$

Como $S_\nu \subset \mathrm{Form} \times V^{<\omega}_{\delta+\omega}$, los conjuntos S_ν varían en un conjunto fijo, luego ha de haber dos ordinales $> \delta$ cuyo conjunto S_ν sea el mismo.

Fijado un par de indiscernibles, tenemos lo siguiente:

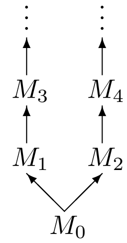
Teorema 10.28 *Sea u el κ-tipo de ν_I en V_{ν_I+1}, sea $\tau > \kappa$ y sea w el τ-tipo de ν_I en V_{ν_I+3}. Entonces w excede a* $\mathrm{Proy}^0(u)$.

DEMOSTRACIÓN: Basta observar que u está realizado por ν_S en V_{ν_S+1}, luego $\mathrm{Proy}^0(u)$ está realizado en V_{ν_S+1} y $\nu_I + 4 < \nu_S + 1$. ■

(La proyección es necesaria, pues si no la pusiéramos se tendría que cumplir que $\nu_S \in V_{\nu_I+3}$, lo cual es falso.) El teorema siguiente es una consecuencia inmediata de las definiciones:

Teorema 10.29 *Sea $\alpha > \delta$, sea u el κ-tipo de α en $V_{\alpha+3}$, sea $\tau > \kappa$ y sea w el τ-tipo de α en $V_{\alpha+1}$. Entonces w excede a u.*

Usando alternativamente estos dos teoremas podemos construir un árbol de iteraciones con dos ramas infinitas:



Ejemplo 2 Vamos a construir un árbol de iteraciones como el que indica la figura, donde $M_0 = M_1 = V$.

Para ello definiremos una sucesión de tipos $u_n \in M_n$ y una sucesión de ordinales α_n para $n \in \omega$ impar (con $\alpha_1 = \nu_I$) de modo que:

a) Si n es par, u_n está realizado respecto a $j_{0,n}(\delta)$ por $j_{0,n}(\nu_I)$ en $V^{M_n}_{j_{0,n}(\nu_I)+3}$.

b) Si n es impar, u_{n-1} está realizado por α_n en $V^{M_n}_{\alpha_n+3}$ y u_n está realizado por α_n en $V^{M_n}_{\alpha_n+1}$.

El teorema 10.25 nos da un cardinal $\kappa_1 < \delta$ tal que el κ_1-tipo u_0 de ν_I respecto a δ en $V^{M_0}_{\nu_I+3}$ es elástico, y así se cumple la propiedad a) para $n = 0$. Definiendo $\alpha_1 = \nu_I$ tenemos también la primera parte de b). Hacemos $E_0 = \varnothing$, de modo que $M_1 = M_0 = V$. El mismo teorema nos da un cardinal $\kappa_1 < \kappa_2 < \delta$ tal que el κ_2-tipo u_1 de α_1 respecto de δ en $V^{M_1}_{\alpha_1+1}$ es elástico, y claramente (por 10.29) excede a u_0. Además, así se cumple b) para $n = 1$.

El teorema 10.26 nos da un extensor $E_1 \in V^{M_1}_\delta$ cuyo punto crítico es κ_1 y su soporte es un cardinal inaccesible $\kappa_1 < \kappa_2 < \lambda_1 < \delta$ que coincide con su fortaleza y además $u_1 < \mathrm{amp}^{E_1}_{\kappa_2+\omega}(u_0)$. Definimos $M_2 = \mathrm{Ult}_{E_1}(M_0)$ y tomamos como $j_{0,2}$ la inmersión canónica. En estos términos, $u_1 < j_{0,2}(u_0)$.

Como u_0 está realizado por ν_I en $V^{M_0}_{\nu_I+3}$, resulta que $j_{0,2}(u_0)$ está realizado^{M_2} por $j_{0,2}(\nu_I)$ en $V^{M_2}_{j_{0,2}(\nu_I)+3}$. Por definición de subtipo existe un $\nu < j_{0,2}(\nu_I) + 3$ tal que u_1 está realizado^{M_2} por $j_{0,2}(\nu_I)$ en $V^{M_2}_\nu$. Ahora bien, u_1 contiene la fórmula "v_0 es el máximo ordinal", luego, concretamente, u_1 está realizado^{M_2} por $j_{0,2}(\nu_I)$ en $V^{M_2}_{j_{0,2}(\nu_I)+1}$.

El teorema 10.25 en M_2 nos da un κ_3 tal que $\kappa_1 < \kappa_2 < \lambda_1 < \kappa_3 < j_{0,2}(\delta)$ y en κ_3-tipo u_2 de $j_{0,2}(\nu_I)$ en $V^{M_2}_{j_{0,n}(\nu_I)+3}$ es elástico, y cumple a) para $n = 2$. Teniendo en cuenta que $j_{0,2}(\nu_I)$ y $j_{0,2}(\nu_S)$ forman un par de indiscernibles locales en M_2, el párrafo anterior y el teorema 10.28 implican que u_2 excede^{M_2} a $\mathrm{Proy}^0(u_1)$, luego podemos aplicar el teorema 10.26 para obtener un extensor $E_2 \in V^{M_2}_{j_{0,2}(\delta)}$ con punto crítico κ_2 y soporte (igual a su fortaleza) inaccesible λ_2, de modo que

$$\kappa_1 < \kappa_2 < \lambda_1 < \kappa_3 < \lambda_2 < j_{0,2}(\delta)$$

y $u_2 < \mathrm{amp}^{E_2}_{\kappa_3+\omega}(\mathrm{Proy}^0(u_1))$. Podemos definir $M_3 = \mathrm{Ult}_{E_2}(M_1)$ con la correspondiente inmersión $j_{1,3}$, de modo que $u_2 < \mathrm{Proy}^0(j_{1,3}(u_1))$.

La presencia de la proyección es la que marca la diferencia respecto del ejemplo precedente. Ahora $j_{1,3}(u_1)$ está realizado^{M_3} por $j_{1,3}(\alpha_1)$ en $V^{M_3}_{j_{1,3}(\alpha_1)+1}$, luego $\mathrm{Proy}^0(j_{1,3}(u_1))$ está realizado^{M_3} en $V^{M_3}_{j_{1,3}(\alpha_1)+1}$. La definición de subtipo nos da que existe un ordinal $\nu < j_{1,3}(\alpha_1)+1$ y un $\alpha_3 < \nu$ de modo que u_2 está realizado^{M_3} por α_3 en $V^{M_3}_\nu$. Ahora bien, como u_2 contiene la fórmula "v_0+2 es el máximo ordinal", resulta que $\nu = \alpha_3+3$, de acuerdo con b). Además tenemos que $\alpha_3 < j_{1,3}(\alpha_1)$.

El teorema 10.25 en M_3 nos da un κ_4 tal que

$$\kappa_1 < \kappa_2 < \lambda_1 < \kappa_3 < \lambda_2 < \kappa_4 < j_{0,3}(\delta)$$

(notemos que $\lambda_2 \leq j_{1,3}(\kappa_2) < j_{1,3}(j_{0,1}(\delta)) = j_{0,3}(\delta)$) y el κ_4-tipo u_3 de α_3 en $V^{M_3}_{\alpha_3+1}$ es elástico, y cumple b) para $n=3$.

A partir de aquí podemos razonar igual que en el caso $n=1$ y, en general, es fácil ver que el proceso se puede prolongar indefinidamente para obtener un árbol de iteraciones con dos ramas infinitas. ■

10.6 Determinación $\mathbf{\Pi}^1_2$

Vamos a probar el teorema siguiente, que, junto con 10.3 implica que si existe un cardinal de Woodin δ menor que un cardinal medible, entonces todo conjunto $\mathbf{\Pi}^1_2$ en V_δ está determinado.

Teorema 10.30 (Martin-Steel) *Si δ es un cardinal de Woodin, $X \in V_\delta$ y $A \subset X^\omega \times \mathcal{N}$ es un conjunto de Suslin δ^+-homogéneo, entonces el conjunto*

$$B = \{x \in X^\omega \mid \bigwedge y\ (x,y) \notin A\}$$

está determinado.

Trabajamos bajo las hipótesis del teorema. Sea $S \subset (X\times\omega\times\gamma)^{<\omega}$ un árbol homogéneo tal que $A = p[S]$ y sea $\{U_{s,t}\}_{(s,t)\in(X\times\omega)^{<\omega}}$ una familia de medidas de acuerdo con la definición de árbol homogéneo.

Todos los tipos que consideramos a continuación serán tipos (κ, n), donde $\operatorname{rang} X < \kappa < \delta$. Cuando no especifiquemos el dominio sobrentenderemos que es un cardinal en estas condiciones.

Definición 10.31 Sea $(s,t) \in (X\times\omega)^{<\omega}$ un par de sucesiones de longitud k y sea w un tipo de fórmulas de $k+2$ variables. Llamaremos $Z_{s,t}$ al conjunto de los $f \in S_{s,t}$ tales que existe un ordinal $\alpha > \max\{\delta, \operatorname{rang} S\}$ tal que w está realizado por $S, (0, f(0)), \ldots, (k-1, f(k-1)), \alpha$ respecto a δ en un cierto V_η. Definimos $\rho_{s,t} : Z_{s,t} \longrightarrow \Omega$ como la aplicación que a cada f en las condiciones anteriores le asigna el mínimo η que cumple la definición.

Notemos que $Z_{s,t}$ y $\rho_{s,t}$ dependen de w. Diremos que un tipo w es *bueno* para (s,t) si $Z_{s,t} \in U_{s,t}$.

Observemos que si w es bueno para (s,t), entonces contiene las fórmulas "v_i es un par ordenado con primera componente $\tilde{i}-1$" (para $1 \leq i \leq k$) y

$$\{v_1, \ldots, v_k\} \in (v_0)_{\tilde{s},\tilde{t}}.$$

En efecto, el dominio de w es mayor que el rango de X y $s, t \in X^{<\omega}$, luego existen las constantes $\tilde{s}, \tilde{t}$. Dado $f \in Z_{s,t}$ (que no es vacío, pues pertenece a $U_{s,t}$), tenemos que w está realizado respecto de δ en un cierto V_η por $S, (0, f(0)), \ldots, (k-1, f(k-1)), \alpha$, para cierto α. Al interpretar las variables de este modo la última fórmula se convierte en $f \in S_{s,t}$, lo cual es cierto, luego la fórmula está en w, y las otras se reducen a que $(i-1, f(i-1))$ es un par ordenado con primera componente $i-1$, lo cual también es cierto.

Definición 10.32 Sea (s', t') una extensión de (s, t) (no necesariamente estricta) de longitud k'. Sea w un tipo bueno para (s, t) y w' un tipo bueno para (s', t'). Diremos que $w' \prec w$ si

$$\{f' \in S_{s',t'} \mid \rho^{w'}_{s',t'}(f') < \rho^w_{s,t}(f'|_k)\} \in U_{s',t'}.$$

Observemos que esta relación es transitiva, es decir, que si tenemos un tipo bueno w'' para una extensión (s'', k'') y $w'' \prec w' \prec w$, entonces $w'' \prec w$. Esto se sigue inmediatamente de que $U_{s'',t''}$ extiende a $U_{s',t'}$.

Si w es un tipo de fórmulas con $k+2$ variables libres, definimos $\pi(w) = \operatorname{proy}^{k+1}(w)$.

Teorema 10.33 *Sea w un tipo bueno para (s, t) y supongamos que contiene la fórmula "existe el ordinal $v_{k+1} + 2$" (donde k es la longitud de (s, t)). Sea (s', t') una extensión de (s, t) de longitud k'. Entonces existe un tipo de $k' + 2$ variables libres u tal que:*

a) u es bueno para (s', t').

b) u contiene la fórmula "$v_{k'+1}$ es el máximo ordinal".

c) $\pi(u)$ es elástico.

d) u excede a w.

e) $u \prec w$.

Además el dominio de u se puede tomar arbitrariamente grande bajo δ.

Demostración: Tomemos $f' \in S_{s',t'}$ y supongamos que $f'|_k \in Z^w_{s,t}$. Sea $\eta = \rho_{s,t}(f'|_k)$, de modo que w está realizado en V_η respecto a δ por S, $(0, f'(0)), \ldots, (k-1, f'(k-1)), \alpha$, para cierto $\alpha > \max\{\delta, \operatorname{rang} S\}$. Como w contiene la fórmula "existe el ordinal $v_{k+1} + 2$", ha de ser $\eta > \alpha + 2$. Por el teorema 10.25, existe un $\tau < \delta$ (arbitrariamente grande) tal que el τ-tipo de S, $(0, f'(0)), \ldots, (k'-1, f'(k'-1))$ en $V_{\alpha+1}$ es elástico y $\tau > \mathcal{D}w$.

Sea u el τ-tipo de S, $(0, f'(0)), \ldots, (k'-1, f'(k'-1)), \alpha$ en $V_{\alpha+1}$, de modo que u contiene la fórmula "$v_{k'+1}$ es el máximo ordinal", u excede a w y $\pi(u)$ es elástico.

El tipo u que acabamos de definir depende de la elección de f', por lo que lo representaremos por $u(f')$. Igualmente tenemos $\alpha(f')$, $\eta(f')$. Tenemos así una función $Z^*_{s,t} = \{f' \in Z_{s',t'} \mid f|_k \in Z^w_{s,t}\} \longrightarrow V_\delta$ dada por $f' \mapsto u(f')$. Ahora bien, como $Z_{s,t} \in U_{s,t}$, se cumple que $Z^*_{s,t} \in U_{s',t'}$ y como $U_{s',t'}$ es δ^+-completa, existe un tipo u y un conjunto $Z \subset Z^*_{s,t}$ tal que $Z \in U_{s',t'}$ de modo que, para todo $f' \in Z$, se cumple que $u(f') = u$.

Entonces $Z \subset Z^u_{s',t'}$, luego u es bueno para (s', t'), ya hemos visto que contiene a la fórmula "$v_{k'+1}$ es el máximo ordinal", así como que $\pi(u)$ es elástico y que u excede a w. Sólo falta probar que $u \prec w$. Ahora bien, esto se debe a que si $f' \in Z$, entonces $\rho^u_{s',t'}(f') \leq \alpha(f') + 1 < \eta(f') = \rho^w_{s,t}(f'|_k)$. ■

Teorema 10.34 *Sea u un tipo bueno para (s, t) y sea w un tipo de fórmulas de $k + 2$ variables (donde k es la longitud de (s, t)) que contenga la fórmula "$v_{k+1} > \text{máx}\{\tilde{\delta}, \text{rang}\, v_0\}$". Si w es un subtipo de $\pi(u)$, entonces w es bueno para (s, t) y $w \prec u$.*

DEMOSTRACIÓN: Tomemos $f \in Z^u_{s,t}$ y sea $\eta = \rho^u_{s,t}(f)$, de modo que u está realizado respecto a δ en V_η por $S, (0, f(0)), \ldots, (k-1, f(k-1)), \alpha$, para cierto $\alpha > \text{máx}\{\delta, \text{rang}\, S\}$.

Como w es un subtipo de $\pi(u)$, existen ordinales ν y $\beta < \eta$ tales que w está realizado respecto a δ en V_ν por una permutación de

$$S, (0, f(0)), \ldots, (k-1, f(k-1)), \beta.$$

Más concretamente, β ha de ser intercalado en algún punto de la sucesión finita precedente, pero, como w contiene la fórmula indicada en el enunciado, tiene que estar en la última posición y cumplir que $\beta > \text{máx}\{\delta, \text{rang}\, S\}$.

En definitiva, hemos probado que cada $f \in Z^u_{s,t}$ cumple que $f \in Z^w_{s,t}$ y $\rho^w_{s,t}(f) < \rho^u_{s,t}(f)$. Como $Z^u_{s,t} \in U_{s,t}$, también $Z^w_{s,t} \in U_{s,t}$ (es decir, que w es bueno para (s, t)) y claramente $w \prec u$. ■

Teorema 10.35 *Sea $x \in X^\omega$ y supongamos que existen tipos $\{w_t\}_{t \in \omega^{<\omega}}$ tales que:*

- *Si t tiene longitud k, entonces w_t es bueno para $(x|_k, t)$.*
- *Si $t < t^*$, entonces $w_{t^*} \prec w_t$.*

Entonces $x \in B$.

DEMOSTRACIÓN: Hemos de probar que $\bigwedge y \in \mathcal{N}\ (x, y) \notin A$. Fijamos, pues, un $y \in \mathcal{N}$. Para cada $n \in \omega$ llamaremos $U_n = U_{x|_n, y|_n}$ y $\rho_n = \rho^{w|_n}_{x|_n, y|_n}$, que es una función definida en un subconjunto de $S_{x|_n, y|_n}$ perteneciente a U_n. Sea $Z_0 = S_{\varnothing,\varnothing}$ y, para cada $n \in \omega$, sea

$$Z_{n+1} = \{f \in S_{x|_{n+1}, y|_{n+1}} \mid \rho_{n+1}(f) < \rho_n(f|_n)\}.$$

Como $w_{y|_{n+1}} \prec w_{u|_n}$, tenemos que $Z_{n+1} \in U_{n+1}$.

Supongamos, por reducción al absurdo, que $(x, y) \in A$. Entonces la torre $\{U_n\}_{n \in \omega}$ es numerablemente completa, por definición de árbol homogéneo, luego existe $f \in \mathcal{N}$ tal que $f|_{n+1} \in Z_{n+1}$ para todo n, lo que da lugar a una sucesión decreciente de ordinales $\rho_{n+1}(f|_{n+1}) < \rho_n(f|_n)$, contradicción. ■

De entre todos los pares (ν_I, ν_S) de indiscernibles locales para $\max\{\delta, \operatorname{rang} S\}$, consideramos los que tienen el mínimo ν_S posible y, de entre ellos, tomamos el que tiene el mínimo ν_I. En lo sucesivo sobrentenderemos que ν_I y ν_S son los indiscernibles locales elegidos con este criterio.

Teorema 10.36 *Para cada $\kappa < \delta$, el κ-tipo de S, ν_I en V_{ν_I+1} es bueno para $(\varnothing, \varnothing)$.*

DEMOSTRACIÓN: Esto es trivial, y lo cumple cualquier ordinal que cumpla $\nu_I > \max\{\delta, \operatorname{rang} S\}$. En efecto, basta observar que $S_{\varnothing,\varnothing} = \gamma^0 = \{\varnothing\}$, luego $U_{\varnothing,\varnothing} = \{\varnothing\}$ y, si w es un tipo $(\kappa, 2)$, la única condición que ha de cumplir para ser bueno es que esté realizado por S, α en un cierto V_η, con $\alpha > \max\{\delta, \operatorname{rang} S\}$.

■

Definición 10.37 Consideramos el juego G^* en el que dos jugadores construyen una sucesión con esta pauta:

I		w_0, x_0		w_1		w_2, x_2	$\ldots$
II	l_0, t_0, u_0		l_1, t_1, u_1		x_1, l_2, t_2, u_2		$\ldots$

(Notemos que es II quien inicia la partida.)

Las reglas del juego son:

a) $x_n \in X$.

b) $t_n \in \omega^{<\omega}$.

c) u_n es un tipo de fórmulas con $k_n + 2$ variables libres, donde k_n es la longitud de t_n, el tipo $\pi(u_n)$ es elástico y u_n contiene las fórmulas "v_i es un par ordenado de primera componente $\tilde{i} - 1$" (para $1 \leq i \leq k_n$) y "$\{v_1, \ldots, v_{k_n}\} \in (v_0)_{\tilde{s}_n, \tilde{t}_n}$", donde $s_n = x|_{k_n}$.

d) $\mathcal{D}u_0 > \operatorname{rang} X$ y, para cada $n > 0$, $\mathcal{D}u_n > \mathcal{D}u_{n-1}$.

e) Si $t_n = \varnothing$ entonces u_n está realizado por S y ν_I en $V_{\nu_I} + 1$.

f) Si $t_n \neq \varnothing$ entonces $l_n < n$ cumple que t_{l_n} es el anterior de t_n y u_n excede a w_{l_n}.

g) w_n es un tipo de fórmulas con k_n+2 variables libres, es un subtipo de $\pi(u_n)$ y contiene las fórmulas "$v_{k_n+1} > \max\{\tilde{\delta}, \operatorname{rang} v_0\}$" y "Existe $v_{k_n+1} + 2$ y es el máximo ordinal".

El primer jugador que viola las reglas pierde, y si se termina la partida gana el jugador I.

Así, la regla f) implica que II ha de empezar jugando un l_0 arbitrario y $t_0 = \varnothing$. Por la regla e) u_0 ha de ser el κ-tipo de S, ν_I en V_{ν_I+1}, para cierto κ tal que $\operatorname{rang} S < \kappa < \delta$. La regla c) se reduce en este caso a que $\pi(u_0)$ sea elástico.

Como $\pi(u_0)$ es el κ-tipo de S en V_{ν_I+1}, siempre es posible elegir κ para que esto suceda en virtud del teorema 10.25.

Sobre esta jugada, I ha de elegir un w_0 según la regla g) y un $x_0 \in X$ arbitrario. Para ello w_0 ha de ser el τ-tipo de S, α en $V_{\alpha+3}$, donde $\tau < \kappa$ y $\max\{\delta, \operatorname{rang} S\} < \alpha < \alpha + 3 < \nu_I + 1$.

Entonces II puede elegir entre repetir $t_1 = \varnothing$, con lo cual se repite toda la jugada (con la única precaución de tomar u_1 con dominio mayor que el de u_0), o jugar un $t_1 \in \omega^1$ con $l_1 = 0$ (por la regla f) y, por la regla c), necesita un $f_0 \in S_{x_0,t_0}$ para que u_1 sea el κ-tipo de $S, (0, f_0(0)), \alpha$ en un cierto $V_{\eta+1}$, para ciertos κ, α, η. El dominio κ puede elegirse para que cumpla la regla d) y u_1 sea elástico, y necesita además que u_1 exceda a w_0.

El teorema de Gale-Stewart implica que el juego G^* está determinado (véase la prueba del teorema 10.2).

Teorema 10.38 *Si el jugador* I *tiene una estrategia ganadora en el juego G^*, también la tiene para el juego $G(B)$.*

Demostración: Sea σ^* la estrategia ganadora. Sea $\{t_n^*\}_{n<\omega}$ una enumeración de $\omega^{<\omega}$ tal que cada sucesión finita aparezca en la enumeración antes que sus extensiones. En particular $t_0^* = \varnothing$. Para cada $n > 0$ sea $l_n^* < n$ tal que $t_{l_n}^*$ sea el anterior de t_n^*. Tomemos $l_0^* = 0$.

Para ganar una partida de $G(B)$ generaremos una partida de G^* en la que elegiremos según nos convenga las jugadas l_n, t_n, u_n de ambos jugadores, así como las jugadas $x_0, x_2, x_4, \ldots$ del jugador I, y responderemos a valores arbitrarios de $x_1, x_3, x_5, \ldots$ jugados por II. En particular, nos aseguraremos de seguir la estrategia σ^*, con lo que tendremos garantizado que la partida llega hasta el final. En particular, elegiremos las jugadas de forma que:

a) $t_n = t_n^*$, $l_n = l_n^*$.

b) u_n contiene la fórmula "v_{k_n+1} es el máximo ordinal", donde $k_n = \ell(t_n)$.

c) u_n es bueno para $(x|_{k_n}, t_n)$.

Los tipos w_n, al igual que los elementos x_{2i}, serán los dados en cada momento por la estrategia σ^*. Hemos de probar que podemos mantener las tres propiedades anteriores a lo largo de toda la partida de G^*. Si se cumplen hasta la jugada n, las reglas de G^* nos aseguran las tres primeras de las cinco propiedades siguientes. Las otras dos se siguen de éstas por el teorema 10.34:

- w_n es un tipo de fórmulas con $k_n + 2$ variables libres.
- w_n es un subtipo de $\pi(u_n)$
- w_n contiene las fórmulas "$v_{k_n+1} > \max\{\tilde{\delta}, \operatorname{rang} v_0\}$" y 'Existe $v_{k_n+1} + 2$ y es el máximo ordinal".
- w_n es bueno para $(x|_{k_n}, t_n)$.
- $w_n \prec u_n$.

Así pues, para la jugada $n = 0$ de II jugamos $l_0 = 0$ y $t_0 = \varnothing$ (de modo que se cumple a) y, según el teorema 10.25 podemos tomar $\operatorname{rang} S < \kappa_0 < \delta$ tal que el κ_0-tipo de S en V_{ν_I+1} sea elástico. Así, podemos tomar como u_0 el κ_0-tipo de S, ν_I en V_{ν_I+1}. Tal y como ya hemos comentado tras la definición de G^*, tenemos así una jugada válida para II que cumple obviamente b) y por 10.36 también cumple c).

Supongamos ahora que la partida ha llegado hasta la ronda $n-1$ respetando la estrategia σ^* y que se han conservado las propiedades a), b), c). Vamos a elegir la jugada l_n, t_n, u_n de II. Para ello fijamos $l_n = l_n^*$ y $t_n = t_n^*$. Con esto se cumple la propiedad a) y respetamos las reglas relevantes de G^*, que son b) y f). Ahora observamos que $w = w_{l_n}$, $(s,t) = (x|_{k_n-1}, t_{l_n})$ y $(s',t') = (x|_{k_n}, t_n)$ cumplen las hipótesis del teorema 10.33. Éste nos proporciona un tipo u_n que completa la jugada de II respetando las reglas de G^*, así como las propiedades b) y c). Notemos que podemos elegir su dominio para que se cumpla la regla d) y la última parte de la regla c) se cumple por la observación tras la definición 10.31. Más aún, hemos obtenido la propiedad adicional siguiente:

$$u_n \prec w_{l_n},$$

que se cumplirá para todo $n > 0$. La transitividad de $\prec$ implica entonces que $w_n \prec w_{l_n}$ y, más aún, que si $t_m < t_n$, entonces $w_n \prec w_m$.

Con esto tenemos una partida completa de G^* que ha determinado a su vez una partida $x \in \mathcal{N}$ de $G(B)$ con jugadas impares arbitrarias. Finalmente, observamos que se cumplen las hipótesis del teorema 10.35, por lo que $x \in B$, y esto significa que I ha ganado la partida. ■

Teorema 10.39 *Si el jugador* II *tiene una estrategia ganadora en el juego G^*, también la tiene para el juego $G(B)$.*

Demostración: Sea σ^* una estrategia ganadora para II en G^*. Vamos a ir construyendo inductivamente:

a) Sucesiones $l_n, t_n, u_n, w_n, x_n, p_n$, para $n \in \omega$.

b) Un árbol de iteraciones $\mathcal{A}$, que determine modelos M_k e inmersiones elementales $j_{l,k}$, para $l \trianglelefteq k$.

c) Nodos $g_n \in j_{0,2n+1}(S)_{x|_{k_n}, t_n}$, donde $k_n = \ell(t_n)$.

El árbol de índices cumplirá:

- Los números pares $0 \lhd 2 \lhd 4 \lhd 6 \lhd \cdots$ constituyen una rama de $\mathcal{A}$.
- Si $t_n \neq \varnothing$, el anterior a $2n+1$ es $2l_n + 1$.
- Si $t_n = \varnothing$ el anterior a $2n+1$ es $2n$.

Tomaremos $p_0 = \varnothing$ y $p_{n+1} = j_{2n,2n+2}(p_n) \frown (l_n, t_n, j_{2n,2n+2}(u_n), w_n, x_n)$ de modo que p_n será una posición en el juego $j_{0,2n}(G^*)$ acorde con la estrategia $j_{0,2n}(\sigma^*)$.

Esto equivale a que se vaya cumpliendo lo siguiente:

a) l_n, t_n, u_n son jugadas de $j_{0,2n}(G^*)$ acordes a $j_{0,2n}(\sigma^*)$ tras la posición p_n.

b) w_n es una jugada legal para I en $j_{0,2n+2}(G^*)$ tras la posición

$$j_{2n,2n+2}(p_n) \frown (l_n, t_n, j_{2n,2n+2}(u_n)).$$

c) Si n es impar entonces x_n es la jugada que determina $j_{0,2n+2}(\sigma^*)$ tras la posición $j_{2n,2n+2}(p_n) \frown (l_n, t_n, j_{2n,2n+2}(u_n), w_n)$.

   Notemos que las condiciones a) y c) determinan completamente l_n, t_n, u_n para todo n y x_n para todo n impar.

   Además, g_n ha de ser una sucesión de longitud k_n tal que $(x|_{k_n}, t_n, g_n) \in j_{0,2n+1}(S)$. Garantizaremos además que

d) $w_n \in M_{2n+1}$ está realizado respecto de $j_{0,2n+1}(\delta)$ en $V^{M_{2n+1}}_{j_{0,2n+1}(\nu_I)+3}$ por

$$j_{0,2n+1}(S), (0, g_n(0)), \ldots, (k_n - 1, g_n(k_n - 1)), j_{0,2n+1}(\nu_I).$$

   Esto implica que w_n es un tipo de fórmulas con $k_n + 2$ variables libres que contiene las fórmulas "$v_{k_n+1} > \max\{\tilde{\delta}, \operatorname{rang} v_0\}$" y "Existe $v_{k_n+1} + 2$ y es el máximo ordinal", como exigen las reglas de G^*.

e) w_n es elástico.

f) El punto crítico del extensor E_{2n+1} es $\kappa_{2n+1} = \mathcal{D}u_n$ y el de E_{2n} es $\kappa_n = \mathcal{D}w_{l_n}$ (salvo si $t_n = \varnothing$, en cuyo caso $E_n = \varnothing$). Además, si llamamos λ_n al soporte de E_n, entonces $\mathcal{D}w_n < \lambda_{2n+1}$.

g) Todos los extensores usados en la construcción de $\mathcal{A}$ tienen puntos críticos sobre $\operatorname{rang} X$

Destacamos algunas consecuencias de estas propiedades:

- $w_n \in M_i$ para todo $i \geq 2n+2$.

  Pues M_i y M_{2n+2} concuerdan hasta λ_{2n+1} y $w_n \in V^{M_{2n+1}}_{\lambda_{2n+1}}$ por la propiedad f).

- $\kappa_{2n-1} < \lambda_{2n-1} < \kappa_{2n+1}$.

  En efecto, la primera desigualdad es trivial por f). La segunda se debe a que

$$\lambda_{2n-1} \leq j_{2n-2,2n}(\kappa_{2n-1}) = j_{2n-2,2n}(\mathcal{D}u_{n-1}) < \mathcal{D}u_n = \kappa_{2n+1},$$

  donde hemos usado que, según la relación recurrente que define a p_n, éste contiene a $j_{2n-2,2n}(u_{n-1})$ y, según a), es posible jugar u_n, luego la regla d) de $j_{0,2n}(G^*)$ implica que $j_{2n-2,2n}(\mathcal{D}u_{n-1}) < \mathcal{D}u_n$.

- Para cada $n < m$, el punto crítico de $j_{2n+2,2m+2}$ es mayor que $\mathcal{D}w_n$. En particular $j_{2n+2,2m+2}(w_n) = w_n$.

  Por la propiedad precedente, el punto crítico es mayor o igual que el de $j_{2n+2,2n+4}$, que es $\kappa_{2n+3} > \mathcal{D}j_{2n,2n+2}(u_n) > \mathcal{D}w_n$, donde hemos usado la regla g) de $j_{0,2n+2}(G^*)$ y la propiedad c).

- Consecuentemente: $p_n = \{(l_i, t_i, j_{2i,2n}(u_i), w_i, x_i)\}_{i<n}$.

  En efecto, todas las componentes excepto la tercera son invariantes por las inmersiones elementales, luego la relación recurrente para p_n se reduce a la indicada.

Supongamos que tenemos definidas todas las sucesiones para todo $i < n$ y el árbol de iteraciones hasta $2n$, de modo que se cumplan las propiedades anteriores, y veamos cómo definirlas para $i = n$, a la vez que los modelos M_{2n+1} y M_{2n+2} (lo que incluye situar $2n+1$ y $2n+2$ en el árbol de índices, que tenemos parcialmente construido hasta $2n$). En particular tenemos definido p_n.

En primer lugar definimos l_n, t_n, u_n como la jugada para II establecida por $j_{0,2n}(\sigma^*)$ a partir[7] de la posición p_n. Esto garantiza a). Distinguimos dos casos:

Caso 1 $t_n = \varnothing$. Definimos $E_{2n} = \varnothing$, lo que significa que $M_{2n+1} = M_{2n}$ y que $j_{2n,2n+1}$ es la identidad. (Además, $g_n = \varnothing$.)

Podemos considerar entonces que $\lambda_{2n} = \lambda_{2n-1}$, de modo que

$$\lambda_{2n} = \lambda_{2n-1} < \kappa_{2n+1},$$

entendiendo por definición que $\kappa_{2n+1} = \mathcal{D}u_n$, pues aún no hemos definido el extensor E_{2n+1}.

Según las reglas del juego, el tipo u_n está realizado respecto a $j_{0,2n+1}(\delta)$ por $j_{0,2n+1}(S)$ y $j_{0,2n+1}(\nu_I)$ en $V^{M_{2n+1}}_{j_{0,2n+1}(\nu_I)+1}$. Esto es una propiedad que se cumple en $V^{M_{2n+1}}_{j_{0,2n+1}(\nu_I)+\omega}$, luego, por la indiscernibilidad local de $j_{0,2n+1}(\nu_I)$ y $j_{0,2n+1}(\nu_S)$, también se cumple en $V^{M_{2n+1}}_{j_{0,2n+1}(\nu_S)+\omega}$, es decir, que u_n está realizado respecto a $j_{0,2n+1}(\delta)$ por $j_{0,2n+1}(S)$ y $j_{0,2n+1}(\nu_S)$ en $V^{M_{2n+1}}_{j_{0,2n+1}(\nu_S)+1}$.

Por el teorema 10.25 (relativizado a M_{2n+1}) podemos tomar $\tau < j_{0,2n+1}(\delta)$ mayor que $\mathcal{D}u_n$ tal que el τ-tipo w_n de $j_{0,2n+1}(S)$ y $j_{0,2n+1}(\nu_I)$ respecto a $V^{M_{2n+1}}_{j_{0,2n+1}(\nu_I)+3}$ es elástico y, por lo dicho en el párrafo anterior, excede$^{M_{2n+1}}$ a $\pi(u_n)$. En particular cumple d) y e).

Por las reglas de G^*, el tipo $\pi(u_n)$ es elástico (en M_{2n+1}), luego, por el teorema 10.26 en M_{2n+1}, existe un extensor $E_{2n+1} \in V^{M_{2n+1}}_{j_{0,2n+1}(\delta)}$ cuyo punto

[7] Notemos que todo esto tiene sentido cuando $n = 0$. Entonces $p_0 = \varnothing$, $M_0 = V$, $j_{0,0}$ es la identidad y l_0, t_0, u_0 es simplemente la jugada inicial para II según su estrategia ganadora. Las reglas de G^* obligan entonces a que $t_0 = \varnothing$.

crítico es el dominio de $\pi(u_n)$ (que es el mismo que el de u_n, es decir, κ_{2n+1}), cuyo soporte $\lambda_{2n+1} > \tau$ es un cardinal inaccesible$^{M_{2n+1}}$ igual a su fortaleza y $w_n < \mathrm{amp}_{\tau+\omega}^{E_{2n+1}}(\pi(u_n))$. Con esto se cumplen f) y g).

Además $\lambda_{2n+1} > \lambda_{2n}$, luego se cumplen las propiedades adicionales a) y b) de la definición de árbol de iteraciones, y c) (para $2n+1$) es trivial en este caso, pues $M_{2n} = M_{2n+1}$.

Definimos $M_{2n+2} = \mathrm{Ult}_{E_{2n+1}}(M_{2n})$ y $j_{2n,2n+2}$ como la inmersión canónica. En estos términos, $w_n < \mathrm{Proy}^1_{\tau+\omega}(j_{2n,2n+2}(\pi(u_n)))$ y, en particular, tenemos que $w_n < j_{2n,2n+2}(\pi(u_n)) = \pi(j_{2n,2n+2}(u_n))$. Es claro así que w_n cumple la última regla de $j_{0,2n+2}(G^*)$ para ser jugado por I tras $j_{2n,2n+2}(p_n \frown (l_n, t_n, u_n))$, luego se cumple b).

Por último, tomamos como x_n la jugada estipulada por $j_{0,2n+2}(\sigma^*)$ para la posición $j_{2n,2n+2}(p_n) \frown (l_n, t_n, j_{2n,2n+2}(u_n), w_n)$ si n es impar o un valor arbitrario en X (que representa una posible jugada de I en $G(B)$) si n es par. Así se cumple c).

Caso 2 $t_n \neq \varnothing$. Por las reglas de $j_{0,2n}(G^*)$, tenemos que u_n excede$^{M_{2n}}$ a w_{l_n}. Sea κ_{2n+1} el dominio de u_n. Por 10.26 existe un extensor $E_{2n} \in V^{M_{2n}}_{j_{0,2n}(\delta)}$ cuyo punto crítico κ_{2n} es el dominio de w_{l_n} y su soporte $\lambda_{2n} > \kappa_{2n+1} > \lambda_{2n-1}$ es un cardinal inaccesible$^{M_{2n}}$ igual a su fortaleza. Además $u_n < \mathrm{amp}^{E_{2n}}_{\kappa+\omega}(w_{l_n})$. Definimos $M_{2n+1} = \mathrm{Ult}_{E_{2n}}(M_{2l_n+1})$ y $j_{2l_n+1,2n+1}$ como la inmersión canónica, de modo que $u_n < j_{2l_n+1,2n+1}(w_{l_n})$.

Con esto tenemos la parte par de f), g) y las propiedades a) y b) requeridas por la definición de árbol de iteraciones. La propiedad c) también se cumple, pues afirma que $\kappa_{2n} < \lambda_{2n-1}$ y, en efecto, $\kappa_{2n} = \mathcal{D}w_{l_n} < \lambda_{2l_n-1} < \lambda_{2n-1}$, donde hemos usado la propiedad f) y las desigualdades que hemos probado en general sobre los puntos críticos y los soportes de los extensores E_n.

Observemos ahora que u_n contiene la fórmula "v_{k_n+1} es el máximo ordinal". Ello se debe a que w_{l_n} está realizado por ciertos objetos en $V^{M_{2n+1}}_{j_{0,2n+1}(\nu_I)+3}$, el último de los cuales es $j_{0,2n+1}(\nu_I)$ (esto resulta de aplicar $j_{2l_n+1,2n+1}$ a la propiedad d) para w_{l_n}. Como u_n excede$^{M_{2n}}$ a w_{l_n}, ha de estar realizado por los mismos objetos (y otro más intercalado) en un cierto $V^{M_{2n+1}}_\nu$ tal que $j_{0,2n+1}(\nu_I) < \nu < \nu+1 < j_{0,2n+1}(\nu_I)+3$, luego ha de ser $\nu = j_{0,2n+1}(\nu_I)+1$.

Por las reglas de G^*, sabemos que t_{l_n} es el anterior de t_n, luego, si k_n es la longitud de t_n, tenemos que la de t_{l_n} es $k_n - 1$. Consideremos la sucesión $g' = j_{2l_n+1,2n+1}(g_{l_n}) \in j_{0,2n+1}(S)_{x|_{k_n-1},t_{l_n}}$.

Por hipótesis de inducción w_{l_n} está realizado respecto de $j_{0,2l_n+1}(\delta)$ en $V^{M_{2l_n+1}}_{j_{0,2l_n+1}(\nu_I)+3}$ por $j_{0,2l_n+1}(S), (0, g_{l_n}(0)), \ldots, (k_n-2, g_{l_n}(k_n-2)), j_{0,2l_n+1}(\nu_I)$. Por consiguiente, el tipo $j_{2l_n+1,2n+1}(w_{l_n})$ está realizado respecto de $j_{0,2n+1}(\delta)$ en $V^{M_{2n+1}}_{j_{0,2n+1}(\nu_I)+3}$ por $j_{0,2n+1}(S), (0, g'(0)), \ldots, (k_n-2, g'(k_n-2)), j_{0,2n+1}(\nu_I)$.

Como u_n es un subtipo de $j_{2l_n+1,2n+1}(w_{l_n})$, concluimos que u_n ha de estar realizado por estos mismos objetos y otro más (intercalado) en un cierto $V^{M_{2n+1}}_\nu$, para un cierto ordinal $\nu < j_{0,2n+1}(\nu_I)+3$. Ahora bien, la regla c) de G^* implica que la permutación debe dejar en los lugares correspondientes a las variables $v_1,\ldots,v_{k_n}$ los elementos (ordenados) de una sucesión de $j_{0,2n+1}(S)_{x|_{k_n},t_n}$, luego $j_{0,2n+1}(\nu_I)$ ha de estar en último lugar y, como u_n contiene la fórmula "v_{k_n+1} es el máximo ordinal", ha de ser $\nu = j_{0,2n+1}(\nu_I)+1$.

En definitiva, existe un α tal que u_n está realizado en $V^{M_{2n+1}}_{j_{0,2n+1}(\nu_I)+1}$ por

$$j_{0,2n+1}(S),(0,g'(0)),\ldots,(k_n-2,g'(k_n-2)),(k_n-1,\alpha),\ j_{0,2n+1}(\nu_I),$$

y, por la regla c), se cumple que $g_n = g' \cup \{(k_n-1,\alpha)\} \in j_{0,2n+1}(S)_{x|_{k_n},t_n}$.

Más adelante emplearemos el hecho de que la construcción que estamos realizando cumple además que, si $t_n \neq \varnothing$,

$$j_{2l_n+1,2n+1}(g_{l_n}) \subset g_n.$$

El resto es similar al caso anterior. Tenemos que

$$\kappa_{2n+1} < \lambda_{2n} \leq j_{2l_n+1,2n+1}(\kappa_{2n}) = j_{2l_n+1,2n+1}(\mathcal{D}w_{l_n})$$

$$< j_{2l_n+1,2n+1}(j_{0,2l_n+1}(\delta)) = j_{0,2n+1}(\delta),$$

porque w_{l_n} es un tipo en M_{2l_n+1}, luego su dominio es menor que $j_{0,2l_n+1}(\delta)$.

Por la indiscernibilidad, u_n está realizado en $V^{M_{2n+1}}_{j_{0,2n+1}(\nu_S)+1}$ por

$$j_{0,2n+1}(S),(0,g_n(0)),\ldots,(k_n-1,g_n(k_n-1)),\ j_{0,2n+1}(\nu_S).$$

El teorema 10.25 nos da un $\tau < j_{0,2n+1}(\delta)$ tal que $\tau > \lambda_{2n}$ y el τ-tipo w_n respecto a $j_{0,2n+1}(\delta)$ de $j_{0,2n+1}(S),(0,g_n(0)),\ldots,(k_n-1,g_n(k_n-1)),j_{0,2n+1}(\nu_I)$ en $V^{M_{2n+1}}_{j_{0,2n+1}(\nu_I)+3}$ es elástico, y lo dicho en el párrafo anterior implica que w_n excede$^{M_{2n+1}}$ a $\pi(u_n)$. En particular cumple las propiedades d) y e).

El teorema 10.26 nos da entonces un extensor $E_{2n+1} \in V^{M_{2n+1}}_{j_{0,2n+1}(\delta)}$ con punto crítico κ_{2n+1}, cuyo soporte $\lambda_{2n+1} > \tau$ es un cardinal inaccesible$^{M_{2n+1}}$ igual a su fortaleza y $w_n < \mathrm{amp}^{E_{2n+1}}_{\tau+\omega}(\pi(u_n))$. Con esto se cumple f) y g).

También se cumple la propiedad adicional a) de la definición de árbol de iteraciones, y las desigualdades $\kappa_{2n+1} < \lambda_{2n} < \lambda_{2n+1}$ implican las propiedades b) y c).

Definimos $M_{2n+2} = \mathrm{Ult}_{E_{2n+1}}(M_{2n})$ y $j_{2n,2n+2}$ como la inmersión canónica. A partir de aquí la construcción termina literalmente como en el caso 1.

Con esto tenemos construido el árbol de iteraciones $\mathcal{A}$ y las sucesiones $x, \{(l_n,t_n,u_n.w_n)\}_{\in\omega}$ y $\{g_n\}_{n\in\omega}$, que cumplen todas las propiedades prescritas. Teniendo en cuenta que, en toda la construcción, los números x_{2n} han sido elegidos arbitrariamente, si demostramos que x da la victoria a II en el juego $G(B)$, es decir que $x \notin B$, habremos construido una estrategia ganadora para II en dicho juego.

Para ello empezamos demostrando que la rama par del árbol $\mathcal{A}$ no está bien fundada, es decir, que el límite inductivo M_{par} de los modelos $\{M_{2n}\}_{n\in\omega}$ no está bien fundado. Por reducción al absurdo, supongamos que lo está.

Sea R el árbol de partidas incompletas de G^* jugadas de acuerdo con la estrategia σ^*. El hecho de que σ^* sea una estrategia ganadora para II se traduce en que I tiene que perder cualquier partida, y la única forma de perder en G^* es que llegue un turno en el que I no tenga jugada posible (pues I gana siempre que la partida acaba). Por consiguiente, el árbol R no puede tener ramas infinitas. Si llamamos $j_{\mathrm{par}} : V \longrightarrow M_{\mathrm{par}}$ a la inmersión canónica en el límite inductivo, tenemos que $j_{\mathrm{par}}(R)$ no tiene ramas infinitas en M_{par}, pero como M_{par} está bien fundado esto es equivalente a que no tenga ramas infinitas.

Ahora bien, por otra parte, tenemos que $p_n \in j_{0,2n}(R)$, y la construcción muestra que p_{n+1} extiende a $j_{2n,2n+2}(p_n)$, luego $\{j_{2n,\mathrm{par}}(p_n)\}_{n\in\omega}$ es una sucesión creciente en $j_{\mathrm{par}}(R)$ que determina una rama infinita, y tenemos así la contradicción que buscábamos.

El teorema 10.20 nos da que $\mathcal{A}$ tiene que tener una rama bien fundada r, que, según hemos visto, no puede ser la rama par, luego, aunque empiece con índices pares, en un momento dado ha de separarse de la rama par y continuar hasta el final con índices impares. Sean $2m_0+1 \lhd 2m_1+1 \lhd 2m_2+1 \lhd \cdots$ los índices impares de r. Según la construcción de $\mathcal{A}$, tenemos que $t_{m_0} = \varnothing$ y t_{m_i} es el inmediato anterior de $t_{m_{i+1}}$. A su vez, en la construcción hemos visto que g_{m_i+1} extiende a $j_{2m_i+1,2m_{i+1}+1}(g_{m_i})$.

Sea $j_{2m_i+1,r} : M_{2m_i+1} \longrightarrow M_r$ la inmersión canónica en el límite inductivo. Si llamamos $g_i^* = j_{2m_i+1,r}(g_{m_i})$, tenemos que g_{i+1}^* extiende a g_i^*, luego podemos considerar $y = \bigcup\limits_{i<\omega} t_{m_i}$ y $g^* = \bigcup\limits_{i\in\omega} g_i^*$, de modo que $g^*|_i \in j_{0,r}(S)_{x|_i,y|_i}$ o, lo que es lo mismo, $(x|_i, y|_i, g^*|_i) \in j_{0,r}(S)$.

Esto prueba que $j_{0,r}(S_{x,y})$ tiene una rama infinita, luego, como M_r está bien fundado, tiene una rama infinita en M_r, luego $S_{x,y}$ tiene una rama infinita, es decir, que $(x,y) \in p[S] = A$, luego, por definición de B, concluimos que $x \notin B$.

■

Como G^* está determinado, los dos teoremas precedentes demuestran que $G(B)$ también lo está, lo que termina la demostración del teorema 10.30.

10.7 Determinación proyectiva

En esta sección proseguiremos los argumentos empleados en la precedente para probar un refinamiento del teorema 10.30:

Teorema 10.40 *Si δ es un cardinal de Woodin, $X \in V_\delta$ y $A \subset X^\omega \times \mathcal{N}$ es un conjunto de Suslin δ^+-homogéneo, entonces el conjunto*

$$B = \{x \in X^\omega \mid \textstyle\bigwedge y\ (x,y) \notin A\}$$

es un conjunto de Suslin κ-homogéneo para todo cardinal $\kappa < \delta$.

Como consecuencia:

Teorema 10.41 *Si existen cardinales $\delta_1 < \cdots < \delta_n < \kappa$, donde cada δ_i es de Woodin y κ es medible, entonces para todo $X \in V_{\delta_1}$ se cumple* $\mathrm{Det}_X(\mathbf{\Pi}^1_{n+1})$. *En particular* $V_{\delta_1} \vDash \mathrm{ZFC} + \mathrm{Det}(\mathbf{\Pi}^1_{n+1})$.

Demostración: Sea $A \subset X^\omega$ un conjunto $\mathbf{\Pi}^1_{n+1}$ y vamos a probar que es un conjunto de Suslin homogéneo, con lo que está determinado. Tenemos que $A = A_1 = \{x \in X^\omega \mid \bigwedge y_1\ (x, y_1) \notin A_2\}$, donde $A_2 \subset (X^\omega)^2$ es un conjunto $\mathbf{\Pi}^1_n$, luego

$$A_2 = \{(x, y_1) \in (X^\omega)^2 \mid \bigwedge y_2\ (x, y_1, y_2) \notin A_3\},$$

donde $A_3 \subset (X^\omega)^3$ es un conjunto $\mathbf{\Pi}^1_{n-1}$ y, en general, tenemos conjuntos A_i de la forma

$$A_i = \{(x, y_1, \ldots, y_i) \in (X^\omega)^i \mid \bigwedge y_{i-1}\ (x, y_1, \ldots, y_i) \notin A_{i+1}\},$$

para $i = 1, \ldots, n+1$, con $A_1 = A$ y A_{n+1} es $\mathbf{\Pi}^1_1$.

Por el teorema 10.3 tenemos que A_{n+1} es un conjunto de Suslin κ-homogéneo, luego en particular δ_n^+-homogéneo. El teorema anterior implica entonces que A_n es δ_{n-1}^+-homogéneo y, tras un número finito de pasos, llegamos a que $A = A_1$ es un conjunto de Suslin homogéneo. ■

Por consiguiente:

Teorema 10.42 (Martin-Steel) *Si existe una sucesión numerable de cardinales de Woodin y un cardinal medible sobre ella (en particular, si existe un cardinal superfuerte), entonces se cumple el axioma de determinación proyectiva.*

Más aún, si δ_1 es el menor cardinal de Woodin de la sucesión considerada en el teorema anterior, entonces $V_{\delta_1} \vDash \mathrm{ZFC} + \mathrm{Det}(\mathbf{P})$.

Pasamos a demostrar el teorema 10.40. Las hipótesis son exactamente las mismas que las del teorema 10.30, luego podemos aprovechar todos los resultados de la sección anterior. Concretamente, nos situamos en las condiciones de la demostración del teorema 10.38, excepto que no suponemos que exista una estrategia ganadora para I. Para cada posición $q^* = \{(l_i, t_i, u_i, w_i, x_i)\}_{i<n}$ que cumpla las condiciones a), b), c) indicadas en la prueba, llamamos $\Gamma(q^*) = (l_n, t_n, u_n)$ a la prolongación de la partida determinada en la demostración (para lo que no se usa σ^*, sino que ésta se emplea únicamente para determinar los tipos w_n y los elementos x_{2n}). Las posiciones q^* que no cumplan las condiciones requeridas no están en el dominio de Γ.

En la demostración de 10.38 se ve que si partimos de una posición q^* que cumpla las propiedades a), b), c) y la prolongamos con $\Gamma(q^*)$ seguido de cualquier elección (legal) w_n y x_n, la nueva posición sigue cumpliendo las propiedades a), b), c), luego Γ estará definida sobre la nueva posición.

Para cada sucesión $q = \{(x_i, w_i)\}_{i<n}$, definimos $q^* = \{(l_i, t_i, u_i, w_i, x_i)\}_{i<n}$ tal que, para todo $m < n$, se cumple que $(l_m, t_m, u_m) = \Gamma(q^*|_m)$. Si, para algún $m < n$ sucede que $q^*|_m$ no es una posición legal en el juego G^* o si $\Gamma(q^*|_m)$ no está definido, entonces q^* queda indefinido.

Sea $R \subset (X \times V_\delta)^{<\omega}$ el árbol formado por las sucesiones q tales que q^* está definido. Vamos a probar que si $x \in p[R]$, entonces $x \in B$.

En efecto, sea $\{w_i\}_{i<\omega}$ tal que $q_n = \{(x_i, w_i)\}_{i<n} \in R$ para todo $n \in \omega$. Entonces $q^* = \bigcup\limits_{n<\omega} q_n^*$ es una partida de G^* que cumple todas las condiciones de la partida construida en la demostración de 10.38. (Allí la estrategia σ^* sólo servía para garantizar que la partida podía prolongarse hasta el final.) En particular, se sigue cumpliendo la conclusión $x \in B$ que obteníamos allí.

Ahora pasamos a la demostración del teorema 10.39, pero también sin suponer una estrategia ganadora. En su lugar, partimos de un $z \in X^\omega$ y construimos el árbol de iteraciones $\mathcal{A}^z$ junto con las sucesiones $\{l_n^z, t_n^z, u_n^z, w_n^z, x_n^z\}_{n<\omega}$ y $\{g_n^z\}_{n<\omega}$ con los únicos cambios siguientes:

- La propiedad a) la cambiamos por $(l_n, t_n, u_n) = j_{0,2n}(\Gamma)(p_n)$.
- La propiedad c) la cambiamos por $x_n = z_n$ para todo n.

De este modo, sustituimos la estrategia σ^* por Γ y la mitad impar de z, y sustituimos las jugadas de I en $G(B)$ por la mitad par de z. En principio, podría suceder que la construcción se interrumpiera porque $j_{0,2n}(\Gamma)(p_n)$ no estuviera definido, pero vamos a demostrar que esto no puede ocurrir. Para ello observamos que la construcción de las sucesiones para $i < n$ (y el árbol de iteraciones para índices $i < 2n+1$) sólo depende de $s = z|_n$, luego, para cada $s \in X^n$ podemos construir (salvo en el hipotético caso de que un $j_{0,2n}(\Gamma)(p_n)$ quedara indefinido) un árbol $\mathcal{A}^s$ sobre $2n+1$ y sucesiones $\{l_i^s, t_i^s, u_i^s, w_i^s, x_i^s\}_{i<n}$ y $\{g_i^s\}_{i<n}$, de modo que si $s < s'$ las sucesiones para s' extienden a las de s. Llamaremos M_i^s a los modelos de $\mathcal{A}^s$ y $j_{i,i'}^s$ a las inmersiones elementales que los conectan.

Lo que hemos de probar es que estas sucesiones pueden construirse para cualquier $s \in X^{<\omega}$ o, más concretamente, que si hemos logrado construirlas para un s de longitud n, entonces se cumple que $q^s = \{(x_i^s, w_i^s)\}_{i<n} \in j_{0,2n}^s(R)$, $(q^{s*})^{M_{2n}} = p_n^s$ y está definido $j_{0,2n}(\Gamma)(p_n^s)$, lo que permite prolongar la construcción para cualquier sucesor s' de s en $X^{<\omega}$.

En efecto, vamos a ver que si $\ell(s) = n+1$ y esto es cierto para $s|_n$, también es cierto para s. Tenemos que

$$p_n^s = \{(l_i^s, t_i^s, j_{2i,2n}^s(u_i^s), w_i^s, x_i^s)\}_{i<n}.$$

Por hipótesis de inducción, para todo $m < n$, se cumple que

$$(l_m^s, t_m^s, j_{2m,2n}^s(u_m^s)) = j_{0,2n}(\Gamma)(p_n^s|_m),$$

y la relación también vale para $m = n$ porque así es precisamente como construimos (l_n^s, t_n^s, u_n^s). Por lo tanto, aplicando $j_{2n,2n+2}$ obtenemos la misma relación para p_{n+1}^s (pues claramente $p_{n+1}^s|_m = j_{2n,2n+2}^s(p_n^s|_m)$), y esto prueba que $p_{n+1}^s = (q^{s*})^{M_{2n+1}}$, luego $q^s \in j_{0,2n+2}^s(R)$.

Para que $j_{0,2n+2}(\Gamma)(p^s_{n+1})$ esté definido basta con que p^s_{n+1} cumpla$^{M_{2n+2}}$ las condiciones a), b), c) del teorema 10.38. Por hipótesis de inducción p^s_n las cumple en M_{2n}, luego $j_{2n,2n+2}(p^s_n) = p^s_{n+1}|_n$ las cumple en M_{2n+2}, y p^s_{n+1} resulta de prolongar esta posición con la jugada

$$(l_n, t_n, j_{2n,2n+2}(u_n)) = j_{2n,2n+2}(j_{0,2n}(\Gamma)(p^s_n)) = j_{0,2n+2}(\Gamma)(p^s_{n+1}|_n),$$

seguida de ciertas elecciones de w^s_n y x^s_n. Luego la demostración de 10.38) justifica que p^s_{n+1} sigue cumpliendo las propiedades a), b), c) y $j_{0,2n+2}(\Gamma)(p^s_{n+1})$ está definido.

Así pues, tenemos definido $\mathcal{A}^s$ para todo $s \in X^{<\omega}$. Definimos $M_s = M^s_{2\ell(s)}$ y si $s \leq s'$ llamamos $j_{s,s'} : M_s \longrightarrow M_{s'}$ a la inmersión elemental $j^{s'}_{2\ell(s),2\ell(s')}$ y $f_s = \{w^s_i\}_{i<\ell(s)}$. En estos términos $q^s = (s, f_s)$ y acabamos de probar que $q^s \in j^s_{0,2n}(R) = j_{\varnothing,s}(R)$, luego $f_s \in j_{\varnothing,s}(R_s)$.

Vamos a demostrar que el árbol R es un árbol κ-homogéneo comprobando que los modelos M_s, las inmersiones $j_{s,s'}$ y los nodos f_s cumplen las condiciones de los teoremas 10.11 y 10.12.

La conmutatividad de las inmersiones elementales es inmediata. Hemos de garantizar que todas ellas tienen puntos críticos mayores que $\kappa < \delta$, lo cual equivale a que los dominios de todos los tipos u_n y w_n construidos en la prueba del teorema 10.39 cumplan esta condición. Ahora bien, todos los tipos que elegimos los obtenemos en última instancia a partir del teorema 10.25, que permite elegir el dominio arbitrariamente grande (por debajo de δ o de la imagen de δ en algún modelo por una inmersión elemental, por lo que siempre podemos elegir en todas las construcciones tipos con dominios mayores que κ. Esto garantiza que las inmersiones $j_{s,s'}$ cumplen lo requerido.

La propiedad $s < t \rightarrow j_{s,t}(f_s) < f_t$ es trivial, pues $j_{s,t}(f_s) = f_s$.

Por último, hemos de probar que si $x \in p[R]$ entonces el límite directo de los modelos $M_{x|_n}$ está bien fundado. Dicho límite no es más que el límite inductivo de la rama par del árbol $\mathcal{A}^x$. Notemos que el argumento dado en la prueba de 10.39 según el cual dicha rama no está bien fundada no es aplicable aquí, pues supone la existencia de una estrategia ganadora para II. Ahora bien, si suponemos que no lo está, todo el argumento de 10.39 es aplicable, y nos lleva a que $x \notin B$, luego, en particular, $x \notin p[R]$.

Con esto queda demostrado que R es un árbol κ-homogéneo. Para probar que B es un conjunto de Suslin κ-homogéneo sólo falta ver que $B = p[R]$. Ya habíamos probado una inclusión y casi tenemos la otra: si $x \in B$, acabamos de ver que la rama par de $\mathcal{A}^x$ está bien fundada, es decir, que el límite inductivo de los modelos $\{M_{x|_n}\}_{n\in\omega}$ está bien fundado, y el teorema 10.13 nos permite concluir que $x \in p[R]$. ■

Capítulo XI

La consistencia de AD

Veamos ahora que exactamente las mismas hipótesis con las que en el capítulo anterior hemos demostrado ADP demuestran en realidad $\mathrm{AD}^{L(\mathcal{N})}$.

11.1 Conjuntos universalmente de Baire

En toda esta sección M será un modelo transitivo numerable de ZFC, δ será un cardinal de Woodin^M, llamaremos $\mathbb{P} = \mathrm{Col}(\delta) = \delta^{<\omega}$ y G será un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M.

Sea $X \in V_\delta^M$, sea $S \in M$ un árbol en $X \times \omega \times \gamma$, para cierto ordinal $\gamma \in M$. Llamamos $A = p[S] \subset (X \times \omega)^\omega$ y

$$B = \{x \in X^\omega \mid \bigwedge y\ (x, y) \notin A\}^M.$$

Lo que afirma el teorema 10.30 es que si S es δ^+-homogéneo entonces B está determinado. El teorema siguiente es lo que podemos probar sobre la determinación del juego $G(B)$ sin suponer que S sea homogéneo.

Teorema 11.1 *Sea $B^* = \{x \in X^\omega \mid \bigwedge y\ (x, y) \notin p[S]\}^{M[G]}$. Entonces, se cumple una de las dos afirmaciones siguientes:*

a) En M, el jugador II *tiene una estrategia ganadora para el juego $G(B)$.*

b) En $M[G]$, el jugador I *tiene una estrategia ganadora para el juego $G(B^*)$.*

Demostración: Sea G^* el juego definido en 10.37. La prueba del teorema 10.39 no usa en ningún momento la homogeneidad de S, luego podemos afirmar que si II tiene una estrategia ganadora para G^* (en M), también la tiene para $G(B)$. Así pues, para probar el teorema podemos suponer que I tiene una estrategia ganadora para G^* (en M) y concluir que tiene una estrategia ganadora para $G(B^*)$ en $M[G]$.

Sea, pues, $\sigma^* \in M$ una estrategia ganadora para I en G^* y sea $\rho \in M$ una biyección $\rho : \delta \longrightarrow V_\delta^M$. Sea $g = \bigcup\limits_{p \in G} p : \omega \longrightarrow \delta$ suprayectiva.

(1) *Sea* $p^* = \{(l_i, t_i, u_i, w_i, x_i)\}_{i<n}$ *una posición legal para* G^*. *Entonces existe una jugada* (l_n, t_n, u_n) *legal para* II *en* G^*.

En efecto, trabajando en M en todo momento, tomamos $\zeta < \delta$ suficientemente grande para que $p^* \in V_\zeta$. El teorema 10.25 nos da un κ tal que $\zeta < \kappa < \delta$ y el κ-tipo de S en V_{ν_I+1} es elástico. Llamemos u al κ-tipo de de S y ν_I en V_{ν_I+1}. Entonces $(0, \varnothing, u)$ es una jugada válida para II. ■

Diremos que $e \in \omega$ es *válido* en una posición $p^* = \{(l_i, t_i, u_i, w_i, x_i)\}_{i<n} \in M$ si $\rho(g(e)) = (l_n, u_n, t_n)$ es una jugada legal para II tras la posición p^*. Acabamos de demostrar que siempre hay números válidos.

Diremos que una posición $\{x_i\}_{i<n}$ para $G(B^*)$ es *buena* si puede extenderse a una posición $p^* = \{(l_i, t_i, u_i, w_i, x_i)\}_{i<n} \frown (l_n, t_n, u_n, w_n) \in M$ para G^* tal que:

a) p^* es conforme a la estrategia σ^*.

b) Para cada $m \leq n$, $(l_m, t_m, u_m) = \rho(g(e_m))$, donde $e_m \in \omega$ es el menor número natural válido en $p^*|_m$.

Observemos que si una posición es buena, su extensión es única, pues la propiedad a) determina cada w_m y la propiedad b) determina cada (l_m, t_m, u_m). Ahora podemos definir una estrategia para I en $G(B^*)$:

Calculamos $(l_0, t_0, u_0) = \rho(g(e_0))$, luego calculamos $(w_0, x_0) = \sigma^*(l_0, t_0, u_0)$ y así jugamos x_0 en el juego $G^*(B)$. Con esto tenemos una ronda $p_0^* = \{(l_0, t_0, u_0, w_0, x_0)\}$ de G^*, tras la cual calculamos $(l_1, t_1, u_1) = \rho(g(e_1))$ y $w_1 = \sigma^*(p_0^* \frown (l_1, t_1, u_1))$. A continuación dejamos que II juegue el x_1 que quiera, con lo que obtenemos una segunda ronda $p_2^* = \{(l_i, t_i, u_i, w_i, x_i)\}_{i<2}$, y continuamos de este modo indefinidamente.

Llamaremos $\sigma \in M[G]$ a la estrategia que acabamos de describir. Es evidente que si I juega de acuerdo con σ las posiciones de la partida serán siempre buenas y, en particular, siempre tendrá una respuesta para cada jugada de II. Hemos de ver que σ es una estrategia ganadora. Para ello tomamos una partida $x \in M[G]$ jugada de acuerdo con σ, y hemos de probar que $x \in B^*$. Supondremos por reducción al absurdo que $x \notin B^*$. Esto significa que existen $y \in \omega^\omega$, $f \in \gamma^\omega$ tales que $(x, y, f) \in M[G]$ es una rama infinita de S.

Como todas las posiciones $x|_i$ son buenas, tenemos una única partida $p^* = \{(l_i, t_i, u_i, w_i, x_i)\}_{i<\omega}$ de G^* acorde con σ^* y tal que $(l_i, t_i, u_i) = \rho(g(e_i))$, donde $e_i \in \omega$ es el menor número válido en $p^*|_i$ (pero p^* no tiene por qué pertenecer a M).

(2) *Existe una sucesión creciente* $\{n_i\}_{i<\omega}$ *de números naturales y una sucesión decreciente de ordinales* $\{\alpha_i\}_{i<\omega}$ *de modo que*

a) $t_{n_i} = y|_i$,

b) u_{n_i} *está realizado por* $S, (0, f(0)), \ldots, (i-1, f(i-1)), \alpha_i$ *en* $V^M_{\alpha_i+1}$.

Puesto que la existencia de una sucesión decreciente de ordinales es contradictoria, con esto quedará probado 11.1.

Construiremos las sucesiones recurrentemente. Empezamos con $n_0 = 0$ y $\alpha_0 = \nu_I$. Las reglas de G^* establecen que $t_0 = \varnothing$ (luego se cumple a) y que u_0 está realizado por S y ν_I en $V^M_{\nu_I+1}$ (luego se cumple b).

Supongamos definidos n_i y α_i. Las reglas de G^* establecen que w_{n_i} es un subtipo de $\pi(u_{n_i})$. Teniendo en cuenta b), concluimos que existe un ordinal $\alpha_{i+1} < \alpha_i$ tal que w_{n_i} está realizado por $S, (0, f(0)), \ldots, (i-1, f(i-1)), \alpha_{i+1}$ en $V^M_{\alpha_{i+1}+3}$. (Notemos que α_{i+1} ha de situarse necesariamente al final de la sucesión porque w_{n_i} ha de respetar la regla g) de G^*.) Además $\alpha_{i+1} > \text{máx}\{\delta, \operatorname{rang} S\}$.

(2.1) *Sea* $E = \text{máx}\{e_0, \ldots, e_{n_i}\}$. *Entonces existen* $e < \omega$ *y* $\kappa < \delta$ *tales que*

a) $\rho(g(e)) = (l, t, u)$, *donde* $l = n_i$, $t = y|_{i+1}$ *y* u *es el* κ*-tipo en* $V^M_{\alpha_{i+1}+1}$ *de*
$$S, (0, f(0)), \ldots, (i, f(i)), \alpha_{i+1}.$$

b) $\pi(u)$ *es elástico.*

c) $e > E$.

d) $\rho(g(0)), \ldots, \rho(g(e-1)) \in V^M_\kappa$.

En efecto, sea $D \subset \mathbb{P}$ el conjunto de las condiciones q tales que las cuatro propiedades se cumplen con un $e < \ell(q)$ cambiando g por q. Notemos que $D \in M$, pues se define a partir de $f|_{i+1}$, $y|_{i+1}$. Ahora observamos que D es denso, pues si $p \in \mathbb{P}$ es una condición cualquiera, tomamos un e mayor que cualquier elemento de $\ell(p)$ que cumpla c), extendemos arbitrariamente p hasta una condición q' de dominio e, aplicamos el teorema 10.25, que nos da un $\kappa < \delta$ tal que el κ-tipo u' de $S, (0, f(0)), \ldots, (i, f(i))$ en $V^M_{\alpha_{i+1}+1}$ es elástico. Entonces el u definido en a) cumple que $\pi(u) = u'$ es elástico. Además κ puede ser elegido de modo que cumpla d) con q' en lugar de g. Finalmente, existe $\epsilon < \delta$ tal que $\rho(\epsilon) = (n_i, y|_{i+1}, u)$ y basta tomar $q = q' \cup \{(e, \epsilon)\}$ para que $q \in D$, $q \leq p$.

Como G es $\mathbb{P}$-genérico sobre M, existe $q \in D \cap G$ y el par (e, κ) correspondiente a dicho q cumple las propiedades con g en lugar de q, como queríamos.

■

Fijamos, pues, e y κ en las condiciones indicadas. Vamos a probar que (l, t, u) es un movimiento legal para II tras la posición $p^*|_n$ para todo $n \in \omega$ que cumpla $n > n_i$ y $\mathcal{D}u_{n-1} < \kappa$.

En efecto, sabemos (por hipótesis de inducción) que $y|_i = t_{n_i}$, luego t_l es el anterior de t. (Con esto l y t cumplen su parte de las reglas b y f de G^*.) Por su parte, u cumple la regla c) porque $(x|_{i+1}, y|_{i+1}, f|_{i+1}) \in S$ y claramente cumple la regla d). Finalmente, u cumple la regla f), es decir, u excede a $w_l = w_{n_i}$, como se sigue inmediatamente de las realizaciones que tenemos de ambos tipos.

(2.2) *Existe un* n *tal que* $e_n = e$.

En efecto, como los e_n son números naturales distintos dos a dos, ha de existir un mínimo n tal que $e_n \geq e$. Por la propiedad c), ha de ser $n > n_i$ y por la condición d), puesto que $e_{n-1} < e$, sabemos que $\rho(g(e_{n-1})) \in V_\kappa^M$. En particular $u_{n-1} \in V_\kappa^M$, luego $\mathcal{D}u_{n-1} < \kappa$. Por la última afirmación que hemos probado, (l, t, u) es una jugada legal para II tras $p^*|_n$, luego e es válido en $p^*|_n$. Pero e_n es el menor número válido en $p^*|_n$, luego $e_n \leq e$ y tenemos la igualdad $e_n = e$. ■

Así, sólo tenemos que definir n_{i+1} como el n cuya existencia acabamos de probar, con lo que $l_{n_{i+1}} = n_i$, $t_{n_{i+1}} = y|_{i+1}$ y $u_{n_{i+1}} = u$ cumple la propiedad b). Con esto hemos completado la demostración de (2) y con ella la de 11.1. ■

Como caso particular:

Teorema 11.2 *Si $T \in M$ es un árbol en $X \times \gamma$, para cierto ordinal γ, entonces se cumple una de las dos afirmaciones siguientes:*

a) En M, el jugador II *tiene una estrategia ganadora para $G(X^\omega \setminus p[T])$.*

b) En $M[G]$, el jugador I *tiene una estrategia ganadora para $G(X^\omega \setminus p[T])$.*

(Notemos que $X^\omega \setminus p[T]$ no tiene por qué ser el mismo en M y en $M[G]$.)

Demostración: Basta aplicar el teorema anterior al árbol

$$S = \{(s, t, f) \in (X \times \omega \times \gamma)^{<\omega} \mid (s, f) \in T\}.$$

■

De aquí se deduce a su vez esta variante:

Teorema 11.3 *Si $T \in M$ es un árbol en $X \times \gamma$ para cierto ordinal γ, entonces se cumple una de las dos afirmaciones siguientes:*

a) En M, el jugador I *tiene una estrategia ganadora para $G(p[T])$.*

b) En $M[G]$, el jugador II *tiene una estrategia ganadora para $G(p[T])$.*

donde $p[T]$ no es necesariamente el mismo en M y en $M[G]$.

Demostración: Sea $T' \in M$ el árbol en $X \times \gamma$ dado por

$$T' = \{\varnothing\} \cup \{(x, 0) \frown p \mid x \in X \land p \in T\} \in M.$$

De este modo, $x \in p[T']$ si y sólo si la sucesión que resulta de eliminar su primera componente está en $p[T]$ (y esto es cierto tanto en M como en $M[G]$). Podemos aplicar a T' el teorema anterior. Si se da el caso a), es decir, si II tiene una estrategia ganadora σ' para $G(X^\omega \setminus p[T'])$ en M, entonces una estrategia ganadora σ de I para $G(p[T])$ en M consiste en fijar $x^* \in X$ y jugar $\sigma(p) = \sigma'(x^* \frown p)$. Con ella obtenemos partidas x que cumplen $x^* \frown x \in p[T']$, luego $x \in p[T]$.

Por otra parte, si es I quien tiene una estrategia ganadora σ' para el juego $G(X^\omega \setminus p[T'])$ en $M[G]$, definimos igualmente la estrategia σ para II, pero usando concretamente $x^* = \sigma'(\varnothing)$ y así obtenemos partidas x tales que $x^* \frown x \notin p[T']$, luego $x \notin p[T]$ y II gana. ■

Si X es un conjunto hereditariamente numerable (es decir, tal que su clausura transitiva es numerable), se dice que $C \subset X^\omega$ *universalmente de Baire* si cuando T es un espacio topológico con una base de abiertos regulares y $f : T \longrightarrow X^\omega$ es una aplicación continua (considerando en X^ω el producto de la topología discreta en X), entonces $f^{-1}[C]$ tiene la propiedad de Baire. Sin embargo, aquí tomaremos como definición una caracterización de esta propiedad debida a Feng, Magidor y Woodin, de modo que en ningún momento necesitaremos la equivalencia. Más aún, definiremos la noción de conjunto λ-universalmente de Baire, cuyo equivalente se obtiene limitando T a los espacios con una base regular de cardinal $\leq \lambda$.

Definición 11.4 Sea X un conjunto hereditariamente numerable, $C \subset X^\omega$ y λ un cardinal infinito. Diremos que C es *λ-universalmente de Baire* si existen árboles T y T^* en $X \times \gamma$ y $X \times \gamma^*$, respectivamente, donde γ y γ^* son ordinales, tales que:

a) $p[T] = C$, $p[T^*] = X^\omega \setminus C$.

b) Si $\mathbb{P} = \mathrm{Col}(\lambda)$, entonces

$$\mathbb{1}_{\mathbb{P}} \Vdash p[\check{T}] \cup p[\check{T}^*] = \check{X}^\omega.$$

El teorema siguiente es una de las piezas clave en la demostración de la consistencia de AD:

Teorema 11.5 *Si δ es un cardinal de Woodin, todo conjunto δ-universalmente de Baire está determinado.*

DEMOSTRACIÓN: Basta probar que el teorema se cumple en todo modelo transitivo numerable M de ZFC. Sea C un conjunto δ-universalmente de Baire^M y sean T, $T^* \in M$ según la definición anterior, lo que nos permite situarnos en las condiciones que venimos manteniendo en la sección, es decir, que podemos tomar $\mathbb{P} = \mathrm{Col}(\delta)$ y un filtro $\mathbb{P}$-genérico G.

Aplicamos el teorema 11.3 a T y el teorema 11.2 a T^*. Si se cumple el caso a) de 11.3 entonces I gana $G(C)$, mientras que si se cumple el caso a) de 11.2 el jugador II gana $G(C)$, luego en ambos casos C está determinado. Por consiguiente, basta probar que no puede darse a la vez el caso b) de ambos teoremas. Si así fuera, en $M[G]$ el jugador II tendría una estrategia ganadora para $G(p[T])$ y I tendría una estrategia ganadora para $G(X^\omega \setminus p[T^*])$. Si ambos jugadores aplican sus estrategias respectivas en una partida llegan a un $x \in X^\omega$ (en $M[G]$) tal que $x \in X^\omega \setminus (p[T] \cup p[T^*])$, pero la definición anterior implica que, en $M[G]$, ha de ser $X^\omega = p[T] \cup p[T^*]$, contradicción. ■

11.2 Estrategias en extensiones genéricas

Dedicamos esta sección a demostrar un resultado técnico sobre iteraciones de modelos y extensiones genéricas que constituirá la última de las herramientas que emplearemos para demostrar la consistencia del axioma de determinación.

Sea S un árbol en un conjunto $X \times U_1 \times U_2$. Diremos que $x \in X^\omega$ es una *proyección fuerte* de S si existen $f_1 : \omega \longrightarrow U_1$ y $f_2 : \omega \longrightarrow U_2$ tales que $(x, f_1, f_2) \in [S]$ y f_1 es suprayectiva. Llamaremos pf(S) al conjunto de las proyecciones fuertes de S.

Sea M un modelo transitivo numerable de ZFC, δ un cardinal de Woodin^M, $X \in V_\delta^M$ y $S \in M$ un árbol en $X \times U_1 \times U_2$ para ciertos conjuntos $U_1, U_2 \in M$. Supondremos además que $U_1 \cap U_2 = \varnothing$ y que U_1, U_2 son los menores conjuntos (respecto a la inclusión) tales que S es un árbol en $X \times U_1 \times U_2$ (de modo que U_1 y U_2 son definibles a partir de S).

Diremos que $x \in X^\omega$ es una *proyección fuerte generalizada* de S si existe un árbol de iteraciones $\mathcal{A}$ de M (no exigimos que $\mathcal{A} \in M$) cuyos extensores tienen puntos críticos mayores que $\operatorname{rang} X$ tal que para toda rama infinita bien fundada r de $\mathcal{A}$ se cumple que $x \in \operatorname{pf}(j_{0,r}(S))$. Llamaremos $\operatorname{pfg}(S)$ al conjunto de todas sus proyecciones fuertes generalizadas.

Sea $\mathbb{P} = \operatorname{Col}(\delta)$ y G un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M. Llamaremos $g : \omega \longrightarrow \delta$ a la aplicación suprayectiva determinada por G.

Definición 11.6 Consideramos el juego G^* que se juega de acuerdo con el esquema siguiente:

$$\begin{array}{c|cccccccc}
\mathrm{I} & & w_0, x_0 & & w_1 & & & w_2, x_2 & \cdots \\ \hline
\mathrm{II} & l_0, u_0 & & l_1, u_1 & & x_1 & l_2, u_2 & & \cdots
\end{array}$$

y respetando las reglas siguientes:

a) $x_n \in X$.

b) u_n es un tipo de $2k_n + 2$ variables libres, para cierto $k_n \in \omega$, $\pi(u_n)$ es elástico y, si $s_n = x|_{k_n}$, entonces u_n contiene las fórmulas "v_{2i-1} es un par ordenado con primera componente $\tilde{i}$", "v_{2i} es un par ordenado con primera componente $\tilde{i} - 1$" (para $1 \leq i \leq k_n$) y "$(\tilde{s}_n, a, b) \in v_0$, donde $a = \{v_1, v_3, \ldots, v_{2k_n-1}\}$ y $b = \{v_2, v_4, \ldots, v_{2k_n}\}$".

c) Si $n > 0$ entonces $\mathcal{D}u_n > \mathcal{D}u_{n-1}$ y $\mathcal{D}u_0 > \operatorname{rang} X$.

d) Si $k_n = 0$ entonces u_n está realizado por S y ν_I en V_{ν_I+1}.

e) Si $k_n \neq 0$ entonces $l_n < n$, $k_{l_n} = k_n - 1$ y u_n excede a w_{l_n}.

f) w_n es un tipo de fórmulas con $2k_n + 3$ variables libres, es un subtipo de $\pi(u_n)$ y contiene las fórmulas "$v_{2k_n+2} > \max\{\tilde{\delta}, \operatorname{rang} v_0\}$", "$v_{2k_n+2}$ existe y es el máximo ordinal", "v_{2k_n+1} es de la forma (k_n, z), con $z \in A_1$, donde A_1 y A_2 son los menores conjuntos tales que v_0 es un árbol en $\tilde{S} \times A_1 \times A_2$".

El primer jugador que no puede cumplir las reglas pierde. Si la partida llega al final gana I.

Para cada $x \in X^\omega$, definimos $G(\neg S_x)$ como el juego en el que los jugadores I y II van construyendo alternativamente funciones $f_1 \in U_1^\omega$, $f_2 \in U_2^\omega$ según el esquema

$$\begin{array}{c|cccccc} \mathrm{I} & f_1(0) & & f_1(1) & & \cdots \\ \hline \mathrm{II} & & f_2(0) & & f_2(1) & \cdots \end{array}$$

y de modo que I gana si para algún n se cumple $(x|_n, f_1|_n, f_2|_n) \notin S$. En caso contrario gana II. Llamaremos $\partial(\neg S)$ al conjunto de los $x \in X^\omega$ tales que I tiene una estrategia ganadora para $G(\neg S_x)$.

Teorema 11.7 *Sea* $B = \partial(\neg S)^{M[G]}$. *Si* I *tiene una estrategia ganadora para* G^* *en* M*, entonces* I *tiene una estrategia ganadora para* $G(B)$ *en* $M[G]$.

Demostración: El argumento es una adaptación del que hemos empleado en la prueba de 11.1. Sea $\sigma^* \in M$ una estrategia ganadora para G^*. Sea $\rho \in M$ tal que $\rho : \delta \longrightarrow V_\delta^M$ biyectiva. La demostración de (1) en el teorema 11.1 es válida para la nueva definición de G^* sin más cambio que suprimir toda mención a la sucesión t_n. Así pues, II siempre puede hacer un movimiento legal.

Diremos que $e < \omega$ es *válido* en una posición $p^* = \{(l_i, u_i, w_i, x_i)\}_{i<n}$ si $\rho(g(e))$ es un movimiento legal para II después de p^*. Por la observación precedente, toda posición p^* tiene números válidos.

Diremos que una posición $\{x_i\}_{i<n}$ para $G(B)$ es *buena* si puede extenderse a una posición $p^* = \{(l_i, u_i, w_i, x_i))\}_{i<n} \frown (l_n, u_n, w_n)$ en G^* tal que:

a) p^* es conforme a la estrategia σ^*.

b) Para cada $m \leq n$, $(l_m, u_m) = \rho(g(e_m))$, donde e_m es el mínimo número válido para $p^*|_m$.

Como en la prueba de 11.1, podemos definir una estrategia $\sigma \in M[G]$ para I en $G(B)$ construyendo una partida para G^* en la que II juega con números válidos mínimos y con las jugadas de II en $G(B)$, mientras que I juega con su estrategia σ^*. Vamos a probar que σ es una estrategia ganadora, para lo cual consideramos una partida $x \in (X^\omega)^{M[G]}$ y suponemos, por reducción al absurdo, que $x \notin B$.

Esto significa que I no tiene una estrategia ganadora para $G(\neg S_x)$, pero el juego está trivialmente determinado (porque II gana siempre que se completa la partida), luego existe una estrategia $\tau \in M[G]$ ganadora para II.

Como todas las posiciones de la partida x son buenas, para cada $n < \omega$ podemos considerar la única extensión p_n^* de $x|_n$ que cumple la definición de posición buena. Sea $p^* = \bigcup\limits_{n \in \omega} p_n^*$, de modo que $p^* = \{(l_i, u_i, w_i, x_i)\}_{i<\omega}$. Sea e_i el mínimo número válido en $p^*|_i$, de modo que $(l_i, u_i) = \rho(g(e_i))$.

Construimos recurrentemente funciones $f_1 \in U_1^\omega$, $f_2 \in U_2^\omega$, una sucesión creciente $\{n_i\}_{i<\omega}$ de números naturales y una sucesión decreciente $\{\alpha_i\}_{i<\omega}$ de ordinales, que supondrá una contradicción. Las sucesiones parciales han de cumplir:

a) $k_{n_i} = i$.

b) $(x|_i, f_1|_i, f_2|_i) \in S$.

c) $(f_1|_i, f_2|_i)$ es una posición en $G(\neg S_x)$ acorde a τ.

d) u_{n_i} está realizado respecto a δ en $V^M_{\alpha_i+1}$ por

$$S, (0, f_1(0)), (0, f_2(0)), \ldots, (i-1, f_1(i-1)), (i-1, f_2(i-1)), \alpha_i.$$

Iniciamos la construcción tomando $n_0 = 0$, $\alpha_0 = \nu_I$ y, obviamente, $f_1|_0 = f_2|_0 = \varnothing$. Observemos que de la regla e) de G^* se deduce que $k_0 = 0$. Es inmediato que se cumplen las cuatro propiedades precedentes. Supongamos que hemos realizado la construcción hasta i.

Por las reglas de G^* sabemos que w_{n_i} es un subtipo de $\pi(u_{n_i})$. Teniendo en cuenta la propiedad d) y la regla f) de G^*, podemos concluir que existe un $z \in U_1$ y un $\alpha_{i+1} < \alpha_i$ de modo que w_{n_i} está realizado respecto de δ en $V^M_{\alpha_{i+1}+3}$ por

$$S, (0, f_1(0)), (0, f_2(0)), \ldots, (i-1, f_1(i-1)), (i-1, f_2(i-1)), (i, z), \alpha_{i+1}.$$

Notemos que la regla f) obliga a insertar los dos nuevos objetos, (i, z) y α_{i+1} precisamente en las posiciones en las que los hemos situado. Además implica que $\alpha_{i+1} > \max\{\delta, \operatorname{rang} S\}$. Definimos $f_1(i) = z$ y tomamos como $f_2(i)$ la jugada que determina τ tras la jugada $f_1(i)$ de I en el juego $G(\neg S_x)$. Puesto que es una estrategia ganadora, así aseguramos que $(x|_i, f_1|_i, f_2|_i) \in S$. Con esto tenemos comprobadas las propiedades b) y c). Nos falta definir n_{i+1}.

Para ello fijamos $E = \max\{e_0, \ldots, e_{n_i}\}$ y probamos que existen $e < \omega$ y $\kappa < \delta$ de modo que:

a) $\rho(g(e)) = (l, u)$, donde $l = n_i$ y u es el κ-tipo de

$$S, (0, f_1(0)), (0, f_2(0)), \ldots, (i, f_1(i)), (i, f_2(i)), \alpha_{i+1}$$

respecto de δ en $V^M_{\alpha_{i+1}+1}$.

b) $\pi(u)$ es elástico.

c) $e > E$.

d) $\rho(g(0)), \ldots, \rho(g(e-1)) \in V^M_\kappa$.

La prueba es completamente análoga a de (2.1) en la demostración del teorema 11.1.

Fijamos e y κ en estas condiciones. Vamos a probar que (l, u) es una jugada legal para II tras la posición $p^*|_n$ para todo $n \in \omega$ que cumpla $n > n_i$ y $\mathcal{D}u_{n-1} < \kappa$.

En efecto, como las fórmulas de u tienen $2i+4$ variables libres, se han de cumplir las reglas de G^* con $k_n = i+1$. Sabemos (por hipótesis de inducción) que $k_l = i = k_n - 1$, como exige la regla e) de G^*. Por su parte, u cumple la regla b) porque $(x|_{i+1}, y|_{i+1}, f|_{i+1}) \in S$ y claramente cumple la regla c). Finalmente, u cumple la regla e), es decir, u excede a $w_l = w_{n_i}$, como se sigue inmediatamente de las realizaciones que tenemos de ambos tipos.

Ahora probamos que existe un n tal que $e_n = e$. En efecto, como los e_n son números naturales distintos dos a dos, ha de existir un mínimo n tal que $e_n \geq e$. Por la propiedad c), ha de ser $n > n_i$ y por la condición d), puesto que $e_{n-1} < e$, sabemos que $\rho(g(e_{n-1})) \in V_\kappa^M$. En particular $u_{n-1} \in V_\kappa^M$, luego $\mathcal{D}u_{n-1} < \kappa$. Por la última afirmación que hemos probado, (l, t, u) es una jugada legal para II tras $p^*|_n$, luego e es válido en $p^*|_n$. Pero e_n es el menor número válido en $p^*|_n$, luego $e_n \leq e$ y tenemos la igualdad $e_n = e$.

Así, sólo tenemos que definir n_{i+1} como el n cuya existencia acabamos de probar, con lo que $l_{n_{i+1}} = n_i$ y $u_{n_{i+1}} = u$ cumple la propiedad d).

Con esto hemos completado la construcción de la sucesión decreciente de ordinales y esta contradicción demuestra el teorema 11.7. ■

Teorema 11.8 *Si el jugador* II *tiene una estrategia ganadora para G^* en M, entonces existe una estrategia σ (no necesariamente en M) para el jugador* II *en el juego sobre X tal que toda partida infinita jugada de acuerdo con σ pertenece a* $\mathrm{pfg}(S)$.

Demostración: La prueba es una adaptación de la del teorema 10.39. Fijamos una estrategia $\sigma^* \in M$ para II en G^* y vamos a determinar una estrategia en el juego sobre X basada en la construcción de los objetos siguientes:

a) Sucesiones l_n, u_n, w_n, x_n, p_n, donde u_n es un tipo de fórmulas con con $2k_n+2$ variables libres.

b) Un árbol de iteraciones $\mathcal{A}$ de M, que determine modelos M_k e inmersiones elementales $j_{l,k}$, para $l \trianglelefteq k$.

c) Nodos $(a_n, b_n) \in j_{0,2n+1}(S)_{x|_{k_n}}$.

d) $z_n \in j_{0,2n+1}(U_1)$.

Como en 10.39, el árbol de índices cumplirá:

- Los números pares $0 \lhd 2 \lhd 4 \lhd 6 \lhd \cdots$ constituyen una rama de $\mathcal{A}$.
- Si $k_n \neq 0$, el anterior a $2n+1$ es $2l_n+1$.
- Si $k_n = 0$ el anterior a $2n+1$ es $2n$.

Definimos $p_0 = \varnothing$, y haremos

$$p_{n+1} = j_{2n,2n+2}(p_n) \frown (l_n, j_{2n,2n+2}(u_n), w_n, x_n),$$

de modo que p_n será una posición en el juego $j_{0,2n}(G^*)$ acorde con $j_{0,2n}(\sigma^*)$.

La construcción mantendrá las propiedades siguientes:

a) l_n, u_n son jugadas de $j_{0,2n}(G^*)$ acordes a $j_{0,2n}(\sigma^*)$ tras la posición p_n.

b) w_n es una jugada legal para I en $j_{0,2n+2}(G^*)$ tras la posición

$$j_{2n,2n+2}(p_n) \frown (l_n, j_{2n,2n+2}(u_n)).$$

c) Si n es impar entonces x_n es la jugada que determina $j_{0,2n+2}(\sigma^*)$ tras la posición $j_{2n,2n+2}(p_n) \frown (l_n, j_{2n,2n+2}(u_n), w_n)$.

d) $w_n \in M_{2n+1}$ está realizado respecto de $j_{0,2n+1}(\delta)$ en $V^{M_{2n+1}}_{j_{0,2n+1}(\nu_I)+3}$ por

$$j_{0,2n+1}(S), (0, a_n(0)), (0, b_n(0), \ldots, (k_n-1, a_n(k_n-1)), (k_n-1, b_n(k_n(-1)),$$
$$(k_n, z_n),\ j_{0,2n+1}(\nu_I).$$

Esto implica que w_n es un tipo de fórmulas con $2k_n + 3$ variables libres que contiene las fórmulas exigidas por la regla f) de G^*. (Aquí usamos además que $z_n \in j_{0,2n+1}(U_1)$.)

e) w_n es elástico.

f) El punto crítico del extensor E_{2n+1} es $\kappa_{2n+1} = \mathcal{D}u_n$ y el de E_{2n} es $\kappa_n = \mathcal{D}w_{l_n}$ (salvo si $k_n = 0$, en cuyo caso $E_n = \varnothing$). Además, si llamamos λ_n al soporte de E_n, entonces $\mathcal{D}w_n < \lambda_{2n+1}$.

g) Todos los extensores usados en la construcción de $\mathcal{A}$ tienen puntos críticos sobre $\operatorname{rang} X$

Estas propiedades implican:

- $w_n \in M_i$ para todo $i \geq 2n+2$.

  Pues M_i y M_{2n+2} concuerdan hasta λ_{2n+1} y $w_n \in V^{M_{2n+1}}_{\lambda_{2n+1}}$ por la propiedad f).

- $\kappa_{2n-1} < \lambda_{2n-1} < \kappa_{2n+1}$.

  En efecto, la primera desigualdad es trivial por f). La segunda se debe a que

$$\lambda_{2n-1} \leq j_{2n-2,2n}(\kappa_{2n-1}) = j_{2n-2,2n}(\mathcal{D}u_{n-1}) < \mathcal{D}u_n = \kappa_{2n+1},$$

  donde hemos usado que, según la relación recurrente que define a p_n, éste contiene a $j_{2n-2,2n}(u_{n-1})$ y, según a), es posible jugar u_n, luego la regla c) de $j_{0,2n}(G^*)$ implica que $j_{2n-2,2n}(\mathcal{D}u_{n-1}) < \mathcal{D}u_n$.

- Para cada $n < m$, el punto crítico de $j_{2n+2,2m+2}$ es mayor que $\mathcal{D}w_n$. En particular $j_{2n+2,2m+2}(w_n) = w_n$.

  Por la propiedad precedente, el punto crítico es mayor o igual que el de $j_{2n+2,2n+4}$, que es $\kappa_{2n+3} > \mathcal{D}j_{2n,2n+2}(u_n) > \mathcal{D}w_n$, donde hemos usado la regla f) de $j_{0,2n+2}(G^*)$ y la propiedad c).

- Consecuentemente: $p_n = \{(l_i, t_i, j_{2i,2n}(u_i), w_i, x_i)\}_{i<n}$.

  En efecto, todas las componentes excepto la tercera son invariantes por las inmersiones elementales, luego la relación recurrente para p_n se reduce a la indicada.

Supongamos que tenemos definidas todas las sucesiones para todo $i < n$ y el árbol de iteraciones hasta $2n$, de modo que se cumplan las propiedades anteriores, y veamos cómo definirlas para $i = n$, a la vez que los modelos M_{2n+1} y M_{2n+2} (lo que incluye situar $2n+1$ y $2n+2$ en el árbol de índices, que tenemos parcialmente construido hasta $2n$). En particular tenemos definido p_n.

En primer lugar definimos l_n, u_n como la jugada para II establecida por $j_{0,2n}(\sigma^*)$ a partir[1] de la posición p_n. Esto garantiza a). En particular u_n es un tipo de fórmulas con $2k_n + 2$ variables libres. Distinguimos dos casos:

Caso 1 $k_n = 0$. Definimos $E_{2n} = \varnothing$, lo que significa que $M_{2n+1} = M_{2n}$ y que $j_{2n,2n+1}$ es la identidad. (Además, $a_n = b_n = \varnothing$.)

Podemos considerar entonces que $\lambda_{2n} = \lambda_{2n-1}$, de modo que

$$\lambda_{2n} = \lambda_{2n-1} < \kappa_{2n+1},$$

entendiendo por definición que $\kappa_{2n+1} = \mathcal{D}u_n$, pues aún no hemos definido el extensor E_{2n+1}.

Según las reglas del juego, el tipo u_n está realizado respecto a $j_{0,2n+1}(\delta)$ por $j_{0,2n+1}(S)$ y $j_{0,2n+1}(\nu_I)$ en $V^{M_{2n+1}}_{j_{0,2n+1}(\nu_I)+1}$. Esto es una propiedad que se cumple en $V^{M_{2n+1}}_{j_{0,2n+1}(\nu_I)+\omega}$, luego, por la indiscernibilidad local de $j_{0,2n+1}(\nu_I)$ y $j_{0,2n+1}(\nu_S)$, también se cumple en $V^{M_{2n+1}}_{j_{0,2n+1}(\nu_S)+\omega}$, es decir, que u_n está realizado respecto a $j_{0,2n+1}(\delta)$ por $j_{0,2n+1}(S)$ y $j_{0,2n+1}(\nu_S)$ en $V^{M_{2n+1}}_{j_{0,2n+1}(\nu_S)+1}$.

Elegimos $z_n \in j_{0,2n}(U_1)$. En principio podemos elegirlo arbitrariamente, pero luego precisaremos la forma en que nos interesará hacerlo.

Por el teorema 10.25 (relativizado a M_{2n+1}) podemos tomar $\tau < j_{0,2n+1}(\delta)$ mayor que $\mathcal{D}u_n$ tal que el τ-tipo w_n de $j_{0,2n+1}(S)$, $(0, z_n))$ y $j_{0,2n+1}(\nu_I)$ respecto a $V^{M_{2n+1}}_{j_{0,2n+1}(\nu_L)+3}$ es elástico y, por lo dicho en el párrafo anterior, excede$^{M_{2n+1}}$ a $\pi(u_n)$. En particular cumple d) y e).

Por las reglas de G^*, el tipo $\pi(u_n)$ es elástico (en M_{2n+1}), luego, por el teorema 10.26 en M_{2n+1}, existe un extensor $E_{2n+1} \in V^{M_{2n+1}}_{j_{0,2n+1}(\delta)}$ cuyo punto crítico es el dominio de $\pi(u_n)$ (que es el mismo que el de u_n, es decir, κ_{2n+1}), cuyo soporte $\lambda_{2n+1} > \tau$ es un cardinal inaccesible$^{M_{2n+1}}$ igual a su fortaleza y $w_n < \mathrm{amp}^{E_{2n+1}}_{\tau+\omega}(\pi(u_n))$. Con esto se cumplen f) y g).

[1]Notemos que todo esto tiene sentido cuando $n = 0$. Entonces $p_0 = \varnothing$, $M_0 = V$, $j_{0,0}$ es la identidad y l_0, u_0 es simplemente la jugada inicial para II según su estrategia ganadora. Las reglas de G^* obligan entonces a que $k_0 = 0$.

Además $\lambda_{2n+1} > \lambda_{2n}$, luego se cumplen las propiedades adicionales a) y b) de la definición de árbol de iteraciones, y c) (para $2n+1$) es trivial en este caso, pues $M_{2n} = M_{2n+1}$.

Definimos $M_{2n+2} = \mathrm{Ult}_{E_{2n+1}}(M_{2n})$ y $j_{2n,2n+2}$ como la inmersión canónica. En estos términos, $w_n < \mathrm{Proy}^1_{\tau+\omega}(j_{2n,2n+2}(\pi(u_n)))$ y, en particular, tenemos que $w_n < j_{2n,2n+2}(\pi(u_n)) = \pi(j_{2n,2n+2}(u_n))$. Es claro así que w_n cumple la última regla de $j_{0,2n+2}(G^*)$ para ser jugado por I tras $j_{2n,2n+2}(p_n \frown (l_n, u_n))$, luego se cumple b).

Por último, tomamos como x_n la jugada estipulada por $j_{0,2n+2}(\sigma^*)$ para la posición $j_{2n,2n+2}(p_n) \frown (l_n, j_{2n,2n+2}(u_n), w_n)$ si n es impar o un valor arbitrario en X (que representa una posible jugada de I en el juego sobre X) si n es par. Así se cumple c).

Caso 2 $k_n \neq 0$. Por las reglas de $j_{0,2n}(G^*)$, $l_n < n$, $k_{l_n} = k_n - 1$ y u_n excede$^{M_{2n}}$ a w_{l_n}. Sea κ_{2n+1} el dominio de u_n. Por el teorema 10.26 existe un extensor $E_{2n} \in V^{M_{2n}}_{j_{0,2n}(\delta)}$ cuyo punto crítico κ_{2n} es el dominio de w_{l_n} y su soporte $\lambda_{2n} > \kappa_{2n+1} > \lambda_{2n-1}$ es un cardinal inaccesible$^{M_{2n}}$ igual a su fortaleza. Además $u_n < \mathrm{amp}^{E_{2n}}_{\kappa+\omega}(w_{l_n})$. Definimos $M_{2n+1} = \mathrm{Ult}_{E_{2n}}(M_{2l_n+1})$ y $j_{2l_n+1,2n+1}$ como la inmersión canónica, de modo que $u_n < j_{2l_n+1,2n+1}(w_{l_n})$.

Con esto tenemos la parte par de f), g) y las propiedades a) y b) requeridas por la definición de árbol de iteraciones. La propiedad c) también se cumple, pues afirma que $\kappa_{2n} < \lambda_{2n-1}$ y, en efecto, $\kappa_{2n} = \mathcal{D}w_{l_n} < \lambda_{2l_n-1} < \lambda_{2n-1}$, donde hemos usado la propiedad f) y las desigualdades que hemos probado en general sobre los puntos críticos y los soportes de los extensores E_n.

Observemos ahora que u_n contiene la fórmula "v_{2k_n+1} es el máximo ordinal". Ello se debe a que w_{l_n} está realizado por ciertos objetos en $V^{M_{2n+1}}_{j_{0,2n+1}(\nu_I)+3}$, el último de los cuales es $j_{0,2n+1}(\nu_I)$ (esto resulta de aplicar $j_{2l_n+1,2n+1}$ a la propiedad d) para w_{l_n}. Como u_n excede$^{M_{2n}}$ a w_{l_n}, ha de estar realizado por los mismos objetos (y otro más intercalado) en un cierto $V^{M_{2n+1}}_\nu$ tal que $j_{0,2n+1}(\nu_I) < \nu < \nu+1 < j_{0,2n+1}(\nu_I)+3$, luego ha de ser $\nu = j_{0,2n+1}(\nu_I)+1$.

Consideremos las sucesiones

$$a' = j_{2l_n+1,2n+1}(a_{l_n}) \qquad b' = j_{2l_n+1,2n+1}(b_{l_n}),$$

de modo que $(a', b') \in j_{0,2n+1}(S)_{x|_{k_n-1}}$. Sea igualmente

$$z' = j_{2l_n+1,2n+1}(z_{l_n}) \in j_{0,2n+1}(U_1).$$

Por hipótesis de inducción w_{l_n} está realizado respecto de $j_{0,2l_n+1}(\delta)$ en $V^{M_{2l_n+1}}_{j_{0,2l_n+1}(\nu_I)+3}$ por

$$j_{0,2l_n+1}(S), (0, a_{l_n}(0)), (0, b_{l_n}(0)), \ldots, (k_n-2, a_{l_n}(k_n-2)), (k_n-2, b_{l_n}(k_n-2)),$$

$$(k_n-1, z_{l_n}), j_{0,2l_n+1}(\nu_I).$$

Por consiguiente, el tipo $j_{2l_n+1,2n+1}(w_{l_n})$ está realizado respecto de $j_{0,2n+1}(\delta)$ en $V^{M_{2n+1}}_{j_{0,2n+1}(\nu_I)+3}$ por

$$j_{0,2n+1}(S), (0, a'(0)), (0, b'(0)) \ldots, (k_n - 2, a'(k_n - 2)), (k_n - 2, b'(k_n - 2)),$$

$$(k_n - 1, z'), j_{0,2n+1}(\nu_I).$$

Como u_n es un subtipo de $j_{2l_n+1,2n+1}(w_{l_n})$, concluimos que u_n ha de estar realizado por estos mismos objetos y otro más (intercalado) en un cierto $V^{M_{2n+1}}_{\nu}$, para un cierto ordinal $\nu < j_{0,2n+1}(\nu_I) + 3$. Ahora bien, la regla b) de G^* implica que el elemento adicional debe ser de la forma $(k_n - 1, z'')$ para un $z'' \in j_{0,2n+1}(U_2)$ y ha de intercalarse en penúltimo lugar. Además, como u_n contiene la fórmula "v_{2k_n+1} es el máximo ordinal", ha de ser $\nu = j_{0,2n+1}(\nu_I)+1$.

Más aún, si llamamos $a_n = a' \frown z$, $b_n = b'_n \frown z'$, la misma regla b) implica que $(a_n, b_n) \in S_{x|k_n}$ y tenemos, en definitiva, que u_n está realizado en $V^{M_{2n+1}}_{j_{0,2n+1}(\nu_I)+1}$ por

$$j_{0,2n+1}(S), (0, a_n(0)), (0, b_n(0)) \ldots,$$

$$(k_n - 1, a_n(k_n - 1)), (k_n - 1, b_n(k_n - 1)),\ j_{0,2n+1}(\nu_I),$$

Más adelante emplearemos el hecho de que la construcción que estamos realizando cumple además que si $k_n \neq 0$,

a) a_n y b_n extienden, respectivamente a $j_{2l_n+1,2n+1}(a_{l_n})$ y $j_{2l_n+1,2n+1}(b_{l_n})$.

b) $j_{2l_n+1,2n+1}(z_{l_n})$ está en la imagen de a_n.

El resto es similar al caso anterior. Tenemos que

$$\kappa_{2n+1} < \lambda_{2n} \leq j_{2l_n+1,2n+1}(\kappa_{2n}) = j_{2l_n+1,2n+1}(\mathcal{D}w_{l_n})$$

$$< j_{2l_n+1,2n+1}(j_{0,2l_n+1}(\delta)) = j_{0,2n+1}(\delta),$$

porque w_{l_n} es un tipo en M_{2l_n+1}, luego su dominio es menor que $j_{0,2l_n+1}(\delta)$.

Por la indiscernibilidad, u_n está realizado en $V^{M_{2n+1}}_{j_{0,2n+1}(\nu_S)+1}$ por

$$j_{0,2n+1}(S), (0, a_n(0)), (0, b_n(0)) \ldots,$$

$$(k_n - 1, a_n(k_n - 1)), (k_n - 1, b_n(k_n - 1)),\ j_{0,2n+1}(\nu_I).$$

Tomamos $z_n \in j_{0,2n+1}(U_1)$ (luego determinaremos la forma en que nos conviene elegirlo). El teorema 10.25 nos da un $\tau < j_{0,2n+1}(\delta)$ tal que $\tau > \lambda_{2n}$ y el τ-tipo w_n respecto a $j_{0,2n+1}(\delta)$ en $V^{M_{2n+1}}_{j_{0,2n+1}(\nu_I)+3}$ de

$$j_{0,2n+1}(S), (0, a_n(0)), (0, b_n(0)) \ldots, (k_n - 1, a_n(k_n - 1))(k_n - 1, b_n(k_n - 1),$$

$$(k_n, z_n),\ j_{0,2n+1}(\nu_I)$$

es elástico, y lo dicho en el párrafo anterior implica que w_n excede$^{M_{2n+1}}$ a $\pi(u_n)$. En particular cumple las propiedades d) y e).

El teorema 10.26 nos da entonces un extensor $E_{2n+1} \in V^{M_{2n+1}}_{j_{0,2n+1}(\delta)}$ con punto crítico κ_{2n+1}, cuyo soporte $\lambda_{2n+1} > \tau$ es un cardinal inaccesible$^{M_{2n+1}}$ igual a su fortaleza y $w_n < \operatorname{amp}^{E_{2n+1}}_{\tau+\omega}(\pi(u_n))$. Con esto se cumple f) y g).

También se cumple la propiedad adicional a) de la definición de árbol de iteraciones, y las desigualdades $\kappa_{2n+1} < \lambda_{2n} < \lambda_{2n+1}$ implican las propiedades b) y c).

Definimos $M_{2n+2} = \mathrm{Ult}_{E_{2n+1}}(M_{2n})$ y $j_{2n,2n+2}$ como la inmersión canónica. A partir de aquí la construcción termina literalmente como en el caso 1.

Con esto termina la construcción, salvo que podemos especificar un criterio para elegir cada z_n. A este respecto observamos que toda rama infinita en el árbol $\mathcal{A}$ que acabamos de construir (distinta de la rama par) corresponde con una sucesión de índices de la forma

$$0, 2, \ldots, 2m_0,\ 2m_0 + 1,\ 2m_1 + 1 \ldots,$$

para cierta sucesión creciente $\{m_i\}_{i\in\omega}$. Vamos a ver que los z_n pueden elegirse de forma que se cumpla lo siguiente:

> *Para cada rama infinita r de $\mathcal{A}$ distinta de la rama par, para cada $2m+1 \in r$ y para cada $y \in j_{0,2m+1}(U_1)$ existe un índice $2m^*+1 \in r$, con $m^* > m$, de modo que $z_{m^*} = j_{2m+1,2m^*+1}(y)$.*

Para probar esto utilizamos que U_1 es numerable (en V). Cada vez que construimos un modelo M_{2n+1} en M elegimos en V una enumeración

$$j_{0,2n+1}(U_1) = \{z_{n,v} \mid v > 1\}.$$

Por otra parte, consideramos el conjunto de índices menores que $2n + 1$ en el árbol, que será de la forma

$$0 \lhd 2 \lhd \cdots 2m_0 \lhd 2m_0 + 1 \lhd \cdots \lhd 2m_i + 1 = 2n + 1.$$

Descomponemos $i = (u, v)$, donde (u, v) representa la semejanza $\omega \times \omega \longrightarrow \omega$ con el orden canónico en el producto, de modo que $u, v \leq i \leq m_i = n$. Tomamos $z_n = j_{2m_u+1,2n+1}(z_{u,v})$.

Con este criterio terminamos la construcción, y así, dada una rama r, un $2m_u + 1 \in r$ y un $y = z_{u,v} \in j_{0,2m_u+1}(U_0)$, tomamos $i = (u, v)$ y $m^* = m_i > m_u$ (porque $v > 1$), de modo que $z_{m^*} = j_{2m_u+1,2m^*+1}(z_{u,v})$, como había que probar.

Notemos que, puesto que las enumeraciones que acabamos de tomar no están en M, el árbol de iteraciones $\mathcal{A}$ no está necesariamente en M. Esta construcción nos da una estrategia σ (no necesariamente en M) para II en el juego de X. Las jugadas de I se incorporan a la construcción como los objetos x_{2i}, mientras que las jugadas de II son los x_{2i+1} que produce la construcción. Hemos de probar que toda partida $x \in X^\omega$ jugada por II con la estrategia σ está en $\mathrm{pfg}(S)$.

La misma prueba vista en la demostración del teorema 10.39 muestra que la rama par de $\mathcal{A}$ no está bien fundada. (La única diferencia es que ahora $j_{\mathrm{par}} : M \longrightarrow M_{\mathrm{par}}$. Notemos que $R \in M$ y que el límite inductivo se construye en V, no en M, por lo que contiene la sucesión $\{j_{2n,\mathrm{par}}(p_n)\}_{n\in\omega}$.)

Ahora consideramos una rama bien fundada r en $\mathcal{A}$, que, por lo que acabamos de observar, no será la rama par. Será, pues, finalmente de la forma $2m_i+1$. Sea $a_i^* = j_{2m_i+1,r}(a_{m_i})$ y $b_i^* = j_{2m_i+1,r}(b_{m_i})$.

La propiedad a) de la página 461 implica que $a^* = \bigcup\limits_i a_i^*$ y $b^* = \bigcup\limits_i b_i^*$ cumplen que

$$a^* : \omega \longrightarrow j_{0,r}(U_1), \qquad b^* : \omega \longrightarrow j_{0,r}(U_2).$$

La propiedad c) de la construcción implica que $(x|_i, a^*|_i, b^*|_i) \in j_{0,r}(S)$, luego $(x, a^*, b^*) \in [j_r(S)]$.

Ahora observamos que a^* es suprayectiva pues, todo elemento de $j_{0,r}(U_1)$ es de la forma $j_{2m+1,r}(y)$, con $y \in j_{0,2m+1}(U_1)$, para cierto m tal que $2m+1 \in r$. Por la elección de los z_n sabemos que existe un $m^* > m$ tal que $2m^*+1 \in r$ y $j_{2m+1,2m^*+1}(y) = z_{m^*}$. Por la propiedad b) de la página 461 sabemos que $j_{2m^*+1,2m'+1}(z_{m^*})$ está en la imagen de $a_{m'}$, donde $2m'+1$ es el siguiente a $2m^*+1$ en r, luego $j_{2m+1,r}(y) = j_{2m^*+1,r}(z_{m^*})$ está en la imagen de $a_{m'}^*$, y también en la de a^*.

Esto prueba que $x \in \mathrm{pf}(j_r(S))$, y esto vale para toda rama bien fundada r de $\mathcal{A}$, luego $x \in \mathrm{pfg}(S)$. ■

Combinando el teorema anterior con el teorema 11.7 el teorema siguiente, en cuyo enunciado recogemos todas las hipótesis que venimos suponiendo desde el principio de la sección.

Teorema 11.9 *Sea M un modelo transitivo numerable de* ZFC, *δ un cardinal de Woodin^M, $X \in V_\delta^M$, $S \in M$ un árbol en $X \times U_1 \times U_2$, donde U_1 y U_2 son conjuntos disjuntos, los menores que cumplen que S es un árbol en el producto cartesiano. Sea $\mathbb{P} = \mathrm{Col}(\delta)$ y sea G un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M. Entonces se cumple una de las dos afirmaciones siguientes:*

a) Existe una estrategia σ para el jugador II *en el juego sobre X tal que (en V) toda partida x jugada de acuerdo con σ cumple $x \in \mathrm{pfg}(S)$.*

b) Existe una estrategia $\sigma \in M[G]$ para el jugador I *en el juego sobre X tal que (en $M[G]$) toda partida x jugada de acuerdo con σ cumple $x \in \Game(\neg S)$.*

Nota En las condiciones del teorema anterior, si $R \in M$ es un árbol en X sin ramas finitas, la conclusión se cumple también cambiando "juego sobre X" por "juego sobre R", es decir, el juego que tiene como regla que todas las jugadas deben pertenecer a R.

En efecto, basta modificar la regla a) de G^* para exigir que $x|_n \in R$.

Teorema 11.10 *Sea M un modelo transitivo numerable de* ZFC, *δ un cardinal de Woodin^M, $X \in V_\delta^M$, $\kappa < \delta$, $\mathbb{P} = \mathrm{Col}(\kappa)$, $\mathbb{Q} = \mathrm{Col}(\delta)$, H un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M y $x \in X^\omega$. Entonces existe un árbol de iteraciones $\mathcal{A}$ de M tal que:*

a) Todos los extensores de $\mathcal{A}$ tienen puntos críticos mayores que κ.

b) Para cada rama bien fundada r de $\mathcal{A}$ existe un filtro G $j_{0,r}(\mathbb{Q})$-genérico sobre $M_r[H]$ tal que $x \in M_r[H][G]$.

Demostración: Las definiciones siguientes han de entenderse en M: Sea $\overline{X} = V^M_{\kappa+\omega}$ y sea $R \subset \overline{X}^{<\omega}$ el árbol formado por las sucesiones de ternas $\{(x_n, p_n, D_n)\}_{n<l}$ tales que:

a) $x_n \in X$, $p_n \in \mathbb{P}$.

b) D_n es un subconjunto denso de $\mathbb{P}$.

c) $p_{n+1} < p_n$ y $p_{n+1} \in D_n$.

Sea U_1 el conjunto de los buenos nombres $\sigma \in M^{\mathbb{P}}$ para subconjuntos de $\mathbb{Q}$ tales que $\mathbb{1}_{\mathbb{P}} \Vdash \sigma$ es denso en $\check{\mathbb{Q}}$, sea A el conjunto de los buenos nombres $\sigma \in M^{\mathbb{P}\times\mathbb{Q}}$ para subconjuntos de $\omega \times X$ tales que $\mathbb{1}_{\mathbb{P}\times\mathbb{Q}} \Vdash \sigma : \omega \longrightarrow \check{X}$ y sea $U_2 = A \cup \mathbb{Q}$.

Sea S el árbol en $\overline{X} \times U_1 \times U_2$ formado por las ternas

$$(\{(x_n, p_n, D_n)\}_{n<l}, \{\sigma_n\}_{n<l}, \{q_n\}_{n<l})$$

tales que:

a) $q_0 \in A$, $q_n \in \mathbb{Q}$ y $q_{n+1} < q_n$ para todo $n > 0$.

b) Si $i \leq n$, se cumple que $p_{n+1} \nVdash \check{q}_{i+1} \notin \sigma_i$.

c) Si $i \leq n$, se cumple que $(p_n, q_n) \nVdash q_0(\check{\imath}) \neq \check{x}_i$.

Aplicamos el teorema 11.9 al árbol S considerando juegos sobre el árbol R según la nota posterior. Consideramos primero el caso b), y veremos que en este contexto es imposible. Afirma que si G es un filtro $\mathbb{Q}$-genérico sobre M existe una estrategia $\sigma \in M[G]$ para I en el juego sobre R tal que (en $M[G]$) toda partida jugada de acuerdo con σ está en $\Game(\neg S)$.

Aquí hemos de entender que la estructura conjuntista del árbol R se define de tal modo que el juego en R consiste en que el jugador I juega en cada turno un par (x_n, p_n) y el jugador II juega un D_n.

Observemos que δ es numerable$^{M[G]}$ y, por consiguiente, $(\mathcal{P}\mathbb{P})^M$ también. Por lo tanto, en $M[G]$ existe una enumeración $\{D_n\}_{n<\omega}$ de todos los subconjuntos densos de $\mathbb{P}$ en M. Consideremos la partida en R en la que I emplea su estrategia σ y II juega la sucesión de todos los conjuntos densos. La partida resultante será de la forma $(x, p, D) \in M[G]$, y estamos suponiendo que está en $\Game(\neg S)$, de modo que I tiene una estrategia ganadora en el juego $G(\neg S_{(x,p,D)})$.

Vamos a probar que, en realidad, es II y no I quien tiene la estrategia ganadora. En primer lugar observamos que la sucesión de condiciones

$$\cdots < p_3 < p_2 < p_1 < p_0$$

genera un filtro $H_0 \in M[G]$ que es $\mathbb{P}$-genérico sobre M, por la propiedad c) de la definición de R junto con el hecho de que las jugadas de II recorren todos los subconjuntos densos de $\mathbb{P}$. Tenemos entonces que $M[H_0] \subset M[G]$.

Por el teorema [PC 9.20], existe un filtro $G_0 \in M[G]$ $\mathbb{Q}$-genérico sobre $M[H_0]$ tal que $M[G] = M[H_0][G_0]$. Podemos llamar $G = H_0 \times G_0$, con lo que no alteramos la extensión $M[G]$.

En una partida de $\neg S_{(x,p,D)}$, el jugador I empieza jugando un cierto nombre $\sigma_0 \in M^{\mathbb{P}}$, y la estrategia de II consiste en jugar a continuación un nombre $q_0 \in M^{\mathbb{P}\times\mathbb{Q}}$ tal que $(q_0)_G = x$. Este nombre puede tomarse para que sea una jugada legal, es decir, tal que $q_0 \in A$. En efecto, en principio $x = \tau_G$, para cierto $\tau \in M^{\mathbb{P}\times\mathbb{Q}}$, y se cumple que

$$\mathbb{1}_{\mathbb{P}\times\mathbb{Q}} \Vdash \bigvee f(f : \omega \longrightarrow \check{X} \land (\tau : \omega \longrightarrow \check{X} \to f = \tau)).$$

Por consiguiente, existe un nombre $\tau' \in M^{\mathbb{P}\times\mathbb{Q}}$ tal que

$$\mathbb{1}_{\mathbb{P}\times\mathbb{Q}} \Vdash \tau' : \omega \longrightarrow \check{X} \land (\tau : \omega \longrightarrow \check{X} \to \tau' = \tau).$$

De aquí se sigue que $x = \tau'_G$. Sea q_0 un buen nombre para un subconjunto de $\omega \times X$ tal que

$$\mathbb{1}_{\mathbb{P}\times\mathbb{Q}} \Vdash (\tau' \subset \omega \times \check{X} \to \tau' = q_0).$$

Así, $x = (q_0)_G$ y $\mathbb{1}_{\mathbb{P}\times\mathbb{Q}} \Vdash q_0 : \omega \longrightarrow \check{X}$, con lo que $q_0 \in A$.

A partir de aquí, la estrategia de II consiste en usar que $(\sigma_n)_{H_0}$ es un subconjunto denso de $\mathbb{P}$ para elegir condiciones $q_{n+1} \in G_0 \cap (\sigma_n)_{H_0}$ que formen una sucesión creciente. Así, si $i \leq n$, tenemos que $q_{i+1} \in (\sigma_i)_{H_0}$ y, como $p_{n+1} \in H_0$, resulta que $p_{n+1} \nVdash \check{q}_{i+1} \notin \sigma_i$.

Similarmente, como $(p_n, q_n) \in G$ y $(q_0)_G(i) = x_i$, se cumple también que $(p_n, q_n) \nVdash q_0(\check{\imath}) \neq \check{x}_i$.

Esto prueba que las posiciones a las que da lugar la estrategia descrita para II son legales para el juego $G(\neg S_{(x,p,D)})$, que llega así hasta el final, y ello da la victoria a II.

Esta contradicción prueba que, en realidad, se ha de cumplir el caso a) del teorema 11.9, es decir, que existe una estrategia σ para el jugador II en el juego sobre R tal que toda partida jugada de acuerdo a ella está en $\mathrm{pfg}(S)$.

Consideramos la partida sobre R en la que cada jugada (x_n, p_n) de I consiste en el x_n dado por la sucesión $x \in X^\omega$ del enunciado del teorema y p_n se elige de forma que $p_0 = \mathbb{1}$ y $p_{n+1} \in D_n \cap H$, $p_{n+1} < p_n$. Por su parte II juega según la estrategia σ. De este modo obtenemos una partida $(x, p, D) \in \mathrm{pfg}(S)$. Esto significa que existe un árbol de iteraciones $\mathcal{A}$ de M cuyos extensores tienen puntos críticos mayores que $\operatorname{rang} S$ (en particular mayores que κ) de modo que, para toda rama bien fundada r de $\mathcal{A}$ se cumple que $(x, p, D) \in \mathrm{pf}(j_{0,r}(S))$. A su vez, esto significa que existen σ, q tales que $((x, p, D), \sigma, q) \in [j_{0,r}(S)]$ y además $\sigma : \omega \longrightarrow j_{0,r}(U_1)$ es suprayectiva.

Notemos que $(\mathcal{P}\kappa)^M = (\mathcal{P}\kappa)^{M_r}$, por lo que $\mathbb{P}$ tiene los mismos subconjuntos densos en M y en M_r, luego el filtro H también es $\mathbb{P}$-genérico sobre M_r.

La sucesión q genera un filtro G. Veamos que es $j_{0,r}(\mathbb{Q})$-genérico sobre $M_r[H]$. Para ello observamos que, como la aplicación σ es suprayectiva, todo subconjunto denso de $j_{0,r}(\mathbb{Q})$ en $M_r[H]$ es de la forma[2] $(\sigma_i)_H$, para cierto $i \in \omega$. Existe un $p \in H$ tal que $p \Vdash \check{q}_{i+1} \in \sigma_i$ o $p \Vdash \check{q}_{i+1} \notin \sigma_i$. Ahora bien, el segundo caso no puede darse, pues entonces existiría un $n > i$ tal que $p_n \leq p$ y también tendríamos que $p_n \Vdash \check{q}_{i+1} \in \sigma_i$, en contradicción con la regla b) de la definición de S. Por consiguiente, $q_{i+1} \in E \cap G \neq \varnothing$.

Sólo falta probar que $x \in M_r[H][G]$, para lo cual a su vez basta probar que $x = (q_0)_{H\times G}$. En efecto, por la definición de S sabemos que $(q_0)_{H\times G} : \omega \longrightarrow X$ y, dado $i \in \omega$, existe una condición $(p, q) \in H \times G$ tal que $(p, q) \Vdash q_0(\check{\imath}) = \check{x}_i$ o $(p, q) \Vdash q_0(\check{\imath}) \neq \check{x}_i$, pero el segundo caso es imposible, ya que entonces existiría un $n \geq i$ tal que $(p_n, q_n) \leq (p, q)$, y tendríamos que $(p_n, q_n) \Vdash q_0(\check{\imath}) \neq \check{x}_i$, en contra de la regla c) de la definición de S. Así pues, $(q_0)_{H\times G}(i) = x_i$. ■

Terminamos la sección observando que a las inmersiones del árbol de iteraciones dado por el teorema anterior les podemos aplicar el teorema siguiente:

Teorema 11.11 *Sea $j : M \longrightarrow N$ una inmersión elemental entre modelos transitivos de* ZFC *y sea κ un cardinal^M menor que el punto crítico de j. Sea $\mathbb{P} = \mathrm{Col}(\kappa)$ y H un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M. Entonces H es $\mathbb{P}$-genérico sobre N y j se extiende a una inmersión elemental $j^* : M[H] \longrightarrow N[H]$.*

Demostración: Se cumple que $(\mathcal{P}\mathbb{P})^M = (\mathcal{P}\mathbb{P})^N$. En particular $\mathbb{P}$ tiene los mismos subconjuntos densos en M y en N, luego H también es $\mathbb{P}$-genérico sobre N. Además j fija a los elementos de $\mathbb{P}$.

Si $\sigma, \tau \in M^{\mathbb{P}}$ cumplen que $\sigma_H = \tau_H$, entonces existe un $p \in H$ tal que $p \Vdash \sigma = \tau$, luego $p \Vdash j(\sigma) = j(\tau)$, luego $j(\sigma)_H = j(\tau)_H$.

Esto nos permite definir $j^* : M[H] \longrightarrow N[H]$ mediante $j^*(\sigma_H) = j(\sigma)_H$. En particular, para todo $x \in M$, tenemos que

$$j^*(x) = j^*(\check{x}_H) = j(\check{x})_H = \check{j}(x)_H = j(x),$$

con lo que j^* es una extensión de j. Además es una inmersión elemental, pues si se cumple $\phi^{M[H]}(\sigma_{1H}, \ldots, \sigma_{nH})$ existe un $p \in G$ tal que $p \Vdash \phi(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$, luego $p \Vdash \phi(j(\sigma_1), \ldots, j(\sigma_n))$, luego $\phi^{N[H]}(j^*(\sigma_{1H}), \ldots, j^*(\sigma_{nH}))$. ■

11.3 Determinación en $L(\mathcal{N})$

Finalmente estamos en condiciones de demostrar el objetivo de este capítulo:

Teorema 11.12 (Woodin) *Si existen infinitos cardinales de Woodin y un cardinal medible sobre ellos, entonces $L(\mathcal{N})$ cumple* AD.

En primer lugar probaremos un resultado general sobre los modelos $L(A)$. Recordemos que la clase $L(A)$ se define como L salvo que $L_0(A) = \mathrm{ct}\, A \cup \{A\}$, donde A es un conjunto arbitrario.

[2]Esto se prueba con el mismo argumento con el que más arriba hemos visto que x era de la forma $(q_0)_G$ con $q_0 \in A$.

Teorema 11.13 *Si $x \in L(A)$, existen una fórmula $\phi(x, y, y_1, \ldots, y_m)$, ordinales $\alpha < \beta$ y $a_1, \ldots, a_m \in \operatorname{ct} A \cup \{A\}$ tales que*

$$x = \{u \in L_\beta(A) \mid L_\beta(A) \vDash \phi[u, \alpha, a_1, \ldots, a_m]\}.$$

DEMOSTRACIÓN: Lo probamos por inducción sobre el mínimo ordinal γ tal que $x \in L_\gamma(A)$. Obviamente, γ no puede ser un ordinal límite.

Si $\gamma = 0$, basta tomar $\beta = 0$, $\phi(x, y_1) \equiv x = y_1$ y $a_1 = x$.

Si $\gamma = \gamma' + 1$, entonces existen una fórmula $\psi(x_0, z_1, \ldots, z_k)$ y conjuntos $b_1, \ldots, b_k \in L_{\gamma'}(A)$ tales que

$$x = \{u \in L_{\gamma'}(A) \mid L_{\gamma'}(A) \vDash \psi[u, b_1, \ldots, b_k]\}.$$

Por hipótesis de inducción,

$$b_i = \{v \in L_{\beta_i}(A) \mid L_{\beta_i}(A) \vDash \phi_i[v, \alpha_i, \bar{a}_i]\},$$

donde $\bar{a}_i$ abrevia una sucesión finita en $\operatorname{ct} A \cup \{A\}$. Por el teorema de reflexión aplicado a $L(A)$ existe un ordinal β mayor que γ y todos los β_i tal que $L_\beta(A)$ es un modelo del suficiente ZF. Entonces la fórmula $x = L_\delta(A)$ es absoluta para $L_\beta(A)$. Así, para todo $u \in L_\beta(A)$, tenemos que

$$u \in x \leftrightarrow u \in L_{\gamma'}(A) \land L_{\gamma'}(A) \vDash \psi[u, b_1, \ldots, b_k]$$

$$\leftrightarrow u \in L_{\gamma'}(A) \land L_{\gamma'}(A) \vDash \bigvee z_1 \cdots z_k(z_1 = b_1 \land \cdots \land z_n = b_n \land \psi[u, z_1, \ldots, z_k]).$$

En esta fórmula sustituimos

$$z_i = b_i \leftrightarrow \bigwedge v(v \in z_i \leftrightarrow v \in b_i)$$

$$\leftrightarrow \bigwedge v(v \in z_i \leftrightarrow v \in L_{\beta_i}(A) \land L_{\beta_i}(A) \vDash \phi_i[v, \alpha_i, \bar{a}_i]),$$

con lo que llegamos a una expresión de la forma

$$u \in x \leftrightarrow u \in L_\beta(A) \land L_\beta(A) \vDash \bigvee c_0 \cdots c_k(c_0 = L_{\gamma'}(A)$$

$$\land\, c_1 = L_{\beta_1}(A) \land \cdots \land c_k = L_{\beta_k}(A) \land u \in c_0 \land \Psi[u, c_0, \ldots, c_k, \bar{\alpha}, \bar{a}]),$$

donde $\bar{\alpha}$ y $\bar{a}$ recogen todos los parámetros que nos han aparecido. En total, tenemos que

$$u \in x \leftrightarrow u \in L_\beta(A) \land L_\beta(A) \vDash \phi[u, \alpha, a_1, \ldots, a_m],$$

donde $\alpha < \beta$ es el ordinal que se corresponde con la n-tupla $\bar{\alpha}$ a través de una semejanza canónica entre Ω^n y Ω y entre $a_1, \ldots, a_m$ incluimos al propio A que aparece en las fórmulas $c_i = L_{\alpha_i}(A)$. ■

En el caso en que $A \subset \mathcal{N}$ el resultado se puede mejorar si observamos que los elementos de $\operatorname{ct} A \setminus (A \cup \{A\})$ son todos definibles explícitamente mediante ordinales, pues son números naturales, o pares desordenados de números naturales o pares ordenados de números naturales. Por lo tanto, en el teorema anterior podemos exigir que los parámetros $a_1, \ldots, a_m$ varíen en $A \cup \{A\}$.

En lo sucesivo M será un modelo transitivo numerable de ZFC, $\{\delta_n\}_{n\in\omega} \in M$ será una sucesión de cardinales de Woodin^M y δ_∞ será su supremo. Llamaremos

$$\mathbb{P} = \coprod_{i\in\omega} \operatorname{Col}(\delta_i)$$

al conjunto parcialmente ordenado formado por sucesiones $p = \{p_i\}_{i\in\omega}$ tales que $p_i \in \operatorname{Col}(\delta_i)$ y $p_i = \mathbb{1}_i$ salvo a lo sumo para un número finito de índices. Notemos que $|\mathbb{P}|^M = \delta_\infty$. Además G será un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M.

Para cada $n \in \omega$, llamamos

$$\mathbb{P}_n = \prod_{i<n} \operatorname{Col}(\delta_i) \qquad \text{y} \qquad \mathbb{P}_n^{\geq} = \coprod_{i\geq n} \operatorname{Col}(\delta_i),$$

de modo que $\mathbb{P} = \mathbb{P}_n \times \mathbb{P}_n^{\geq}$. En particular $G = G|_n \times G_n^{\geq}$, donde $G|_n$ es $\mathbb{P}_n$-genérico sobre M y $G_n^{\geq}$ es $\mathbb{P}_n^{\geq}$-genérico sobre $M[G|_n]$.

Definimos

$$R^*[G] = \bigcup_{n\in\omega} \mathcal{N}^{M[G|_n]}.$$

Notemos que $R^*[G] \in M[G]$. De hecho, podemos asociarle un nombre canónico

$$R^*[\Gamma] = \bigcup_{n<\omega} A_n \times \mathbb{P}_n,$$

donde A_n es el conjunto de buenos $\mathbb{P}_n$-nombres τ para subconjuntos de $\omega \times \omega$ (identificados con $\mathbb{P}$-nombres a través de la inmersión completa $i_n : \mathbb{P}_n \longrightarrow \mathbb{P}$) tales que $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_n} \Vdash \tau : \omega \longrightarrow \omega$.

El *modelo derivado* de M inducido por G es $W = L_{o(M)}(R^*[G])$, donde $o(M) = M \cap \Omega$, entendiendo que $W = L(R^*[G])$ si M es una clase propia. Equivalentemente,

$$W = (L(R^*[G]))^{M[G]}.$$

Teorema 11.14 *Sean $v_1, \ldots, v_k \in M[G|_n] \cap W$ y sea ϕ una fórmula tal que*

$$\phi^W(R^*[G], v_1, \ldots, v_k).$$

Entonces $(\mathbb{1}_{\mathbb{P}_n^{\geq}} \Vdash \phi^{L(R^*[\Gamma])}(R^*[\Gamma], \check{v}_1, \ldots, \check{v}_k))^{M[G|_n]}$.

DEMOSTRACIÓN: Tenemos que $M[G] = M[G|_n][G_n^{\geq}]$ y $R^*[G_n^{\geq}] = R^*[G]$, pues $M[G_n^{\geq}|_m] = M[G_{n+m}]$ y los conjuntos $\mathcal{N}^{M[G|_n]}$ incluyen a los anteriores en la sucesión, por lo que su unión no se ve afectada al suprimir los primeros. Así pues, W es también el modelo derivado de $M[G|_n]$ inducido por $G_n^{\geq}$. La hipótesis es

$$(\phi^{L(R^*[G_n^{\geq}])}(R^*[G_n^{\geq}], v_1, \ldots, v_k))^{M[G|_n][G_n^{\geq}]}.$$

Por tanto existe un $p \in G_n^{\geq}$ tal que $(p \Vdash \phi^{L(R^*[\Gamma])}(R^*[\Gamma], \check{v}_1, \ldots, \check{v}_k))^{M[G|_n]}$.

Supongamos que no se cumple esto mismo con $p = \mathbb{1}$. Entonces existe una condición $q \in \mathbb{P}_n^{\geq}$ tal que $(q \Vdash \neg\phi^{L(R^*[\Gamma])}(R^*[\Gamma], \check{v}_1, \ldots, \check{v}_k))^{M[G|_n]}$.

Por [PC 5.14] sabemos que cada $\mathrm{Col}(\delta_i)$ es casi homogéneo, de donde se sigue inmediatamente que $\mathbb{P}_n^{\geq}$ también lo es, es decir, que existe un automorfismo $f \in M[G|_n]$ tal que $f(p)$ es compatible con q. Sea, pues, $r \in \mathbb{P}_n^{\geq}$ tal que $r \leq f(p)$, $r \leq q$. Por [PC 5.45] tenemos que

$$(f(p) \Vdash \phi^{L(R^*[f(\Gamma)])}(R^*[f[\Gamma]], \check{v}_1, \ldots, \check{v}_k))^{M[G|_n]},$$

luego, si G es un filtro $\mathbb{P}_n^{\geq}$-genérico sobre $M[G|_n]$ que contenga a r, tenemos que

$$(\phi^{L(R^*[G])}(R^*[G], v_1, \ldots, v_k) \wedge \neg\phi^{L(R^*[H])}(R^*[H], v_1, \ldots, v_k))^{M[G|_n][G]},$$

donde $H = f(\Gamma)_G = f^{-1}[G]$. Ahora bien, vamos a probar que $R^*[G] = R^*[H]$, y así tendremos una contradicción.

En efecto, $x \in R^*[H]$ si y sólo si $x \in \omega^\omega$ y existe un $\sigma \in M[G|_n]^{\mathbb{P}_n^{\geq}}$ tal que $x = \sigma_H$, pero en tal caso $f(\sigma) \in M[G|_n]^{\mathbb{P}_n^{\geq}}$ y, por [PC 5.45], $x = f(\sigma)_G$, luego $x \in R^*[G]$. Razonando con el automorfismo inverso de f tenemos la inclusión contraria. ■

Teorema 11.15 *Con la notación precedente, se cumple que $\mathcal{N}^W = R^*[G]$.*

Demostración: Obviamente $R^*[G] \subset \mathcal{N}^W$. Tomemos $x \in \mathcal{N}^W$. Por el teorema 11.13 y la observación posterior

$$x = \{u \in \omega \times \omega \mid L_\beta(R^*[G]) \vDash \phi[u, \alpha, a, R^*[G]]\},$$

para ciertos ordinales $\alpha < \beta < o(M)$ y un $a \in R^*[G]$. (Aquí usamos que m elementos de $R^*[G]$ pueden codificarse por uno solo.) Sea $n \in \omega$ suficientemente grande para que $a \in \mathcal{N}^{M[G|_n]}$. Entonces, dado $v \in \omega \times \omega$, por el teorema anterior, si $v \in x$, tenemos que

$$\mathbb{1}_{\mathbb{P}_n^{\geq}} \Vdash \check{v} \in \{u \in \omega \times \omega \mid L_{\check{\beta}}(R^*[\Gamma]) \vDash \phi[u, \check{\alpha}, \check{a}, R^*[\Gamma]]\},$$

mientras que si $v \notin x$ entonces

$$\mathbb{1}_{\mathbb{P}_n^{\geq}} \Vdash \check{v} \notin \{u \in \omega \times \omega \mid L_{\check{\beta}}(R^*[\Gamma]) \vDash \phi[u, \check{\alpha}, \check{a}, R^*[\Gamma]]\}.$$

Por consiguiente,

$$x = \{v \in \omega \times \omega \mid \mathbb{1}_{\mathbb{P}_n^{\geq}} \Vdash \check{v} \in \{u \in \omega \times \omega \mid L_{\check{\beta}}(R^*[\Gamma]) \vDash \phi[u, \check{\alpha}, \check{a}, R^*[\Gamma]]\}\}.$$

Esto prueba que $x \in M[G|_n]$, luego $x \in \mathcal{N}^{M[G|_n]} \subset R^*[G]$. ■

Nota A su vez de aquí se sigue que todo elemento $A \in W$ es de la forma

$$A = \{u \in L_\gamma(R^*[G]) \mid L_\beta(R^*[G]) \vDash \phi[u, \alpha, a]\},$$

para ciertos ordinales $\alpha < \beta < o(M)$ y cierto $a \in R^*[G]$. En principio faltaría incluir a $R^*[G]$ entre los parámetros de ϕ, pero es posible arreglar ϕ para que $R^*[G]$ aparezca únicamente en subfórmulas de tipo $x \in R^*[G]$ y, por el teorema anterior, éstas pueden sustituirse por $x \in \mathcal{N}$, ya que todo $\mathcal{N} \cap L_\gamma(R^*[G]) = R^*[G]$. ■

Definición 11.16 Una fórmula $\Sigma_1(\mathcal{N})$ es una fórmula de la forma

$$\bigvee Q(\mathcal{N} \subset Q \land Q \text{ es transitivo} \land Q \vDash \phi[x_1, \ldots, x_n]),$$

para ciertos $x_1, \ldots, x_n \in \mathcal{N}$.

Teorema 11.17 *Sea $R \subset \mathcal{N}$ y sean $\alpha \leq \beta$ dos ordinales para los que se cumpla que $\mathcal{N}^{L_\alpha(R)} = \mathcal{N}^{L_\beta(R)} = R$. Entonces toda fórmula $\Sigma_1(\mathcal{N})$ que se cumpla en $L_\alpha(R)$ se cumple también en $L_\beta(R)$.*

Demostración: Estamos suponiendo que $x_1, \ldots, x_n \in R$ cumplen una fórmula de la forma

$$(\bigvee Q(\mathcal{N} \subset Q \land Q \text{ es transitivo} \land Q \vDash \phi[x_1, \ldots, x_n]))^{L_\alpha(R)},$$

es decir, que

$$\bigvee Q \in L_\alpha(R)(R \subset Q \land Q \text{ es transitivo} \land Q \vDash \phi[x_1, \ldots, x_n]).$$

Obviamente, lo mismo vale cambiando α por β, y esto es

$$(\bigvee Q(\mathcal{N} \subset Q \land Q \text{ es transitivo} \land Q \vDash \phi[x_1, \ldots, x_n]))^{L_\beta(R)}.$$

■

Nota Observemos que el teorema anterior es válido igualmente, con la misma prueba, si sustituimos $L_\beta(R)$ por $L(R)$.

Como caso particular:

Teorema 11.18 *En las condiciones del teorema anterior, si $L_\alpha(R)$ y $L_\beta(R)$ son modelos de (el suficiente) ZF y $L_\beta(R)$ cumple* AD, *lo mismo le sucede a $L_\alpha(R)$.*

Demostración: Si $L_\alpha(R)$ no cumple AD, existe un conjunto $A \in L_\alpha(R)$, $A \subset R$ tal que A no está determinado$^{L_\alpha(R)}$. Notemos que una estrategia para cualquiera de los jugadores en el juego $G(A)$ es una aplicación $\sigma : \omega^{<\omega} \longrightarrow \omega$, luego puede codificarse por un $x \in \mathcal{N}$. Además, la fórmula "x codifica una estrategia para A" es absoluta para modelos transitivos de ZF. Así pues, que A no esté determinado$^{L_\alpha(R)}$ equivale a que

$$\bigwedge x \in R \; x \text{ no codifica una estrategia para } A.$$

De aquí se sigue que $\neg\mathrm{AD}^{L_\alpha(R)}$ equivale a

$$(\bigvee Q(\mathcal{N} \subset Q \land Q \text{ es transitivo} \land Q \vDash \text{“el suficiente ZF} + V = L(\mathcal{N})''$$

$$\land \bigvee A \bigwedge x \in \mathcal{N}\ x \text{ no codifica una estrategia para } A))^{L_\alpha(R)}.$$

En efecto, basta tomar $Q = L_\gamma(R)$ para cualquier $\gamma < \alpha$ tal que $A \in Q$ (notemos que α ha de ser un ordinal límite) y, recíprocamente, si se cumple esto Q ha de ser necesariamente de la forma $L_\gamma(R)$ y concluimos que A no está determinado$^{L_\alpha(R)}$.

Por el teorema anterior, esta sentencia $\Sigma_1(\mathcal{N})$ se cumple también en $L_\beta(R)$, lo que implica que este modelo tampoco cumple AD. ■

Teorema 11.19 *Sea $\phi(x_1,\ldots,x_n)$ una fórmula $\Sigma_1(\mathcal{N})$. Supongamos que M es un modelo numerable y que existe una inmersión elemental $\pi : M \longrightarrow V_\theta$, donde V_θ es un submodelo elemental de V. Si $x_1,\ldots,x_n \in R^*[G]$ y $\phi(x_1,\ldots,x_n)$ se cumple en el modelo derivado de M inducido por G, entonces se cumple también en $L(\mathcal{N})$.*

Demostración: El teorema 10.22 (véase la observación posterior a su enunciado) garantiza que el jugador “bueno” tiene una estrategia ganadora Σ para el juego de las iteraciones de M. Podemos sustituir θ por un ordinal mayor de modo que M, Σ, G y $\mathcal{N}$ pertenezcan a V_θ. Sea $X \prec M$ un submodelo elemental numerable tal que $M, \Sigma, G, \mathcal{N} \in X$ y $M \subset X$, sea P su colapso transitivo y sea $\tau : P \longrightarrow V_\theta$ la aplicación inversa de la función colapsante. Así $M \in P$ y τ es la identidad en M. Además, como M es numerable$^{V_\theta}$, también M es numerable^P.

Ahora probamos que $\tau^{-1}(\Sigma) = \Sigma \cap M$. Veamos lo que esto significa:

Si el jugador “malo” empieza una partida en P eligiendo un árbol $\mathcal{A}_0 \in P$ de iteraciones de $M = M_0$, se cumple que $\tau(\mathcal{A}_0) = \mathcal{A}_0$. Esto se debe a que $\mathcal{A}_0$ está determinado por un árbol de índices (un subconjunto de $\omega\times\omega$) y por una familia numerable de extensores, que son aplicaciones entre conjuntos numerables^P de ordinales numerables^P. Por lo tanto, $\mathcal{A}_0 \in (V_{\aleph_1})^P$ y τ fija a todo elemento de $(V_{\aleph_1})^P$. (Esto se prueba por inducción sobre el rango, teniendo en cuenta que si $x \in (V_{\aleph_1})^P$, existe $f : \omega \longrightarrow x$ biyectiva, $f \in P$, luego $\tau(f) : \omega \longrightarrow \tau(x)$ biyectiva.)

Por lo tanto, podemos calcular $r = \Sigma(\mathcal{A}_0) \in X$, que es una rama bien fundada de $\mathcal{A}_0$, es decir, un subconjunto de ω, luego $\tau^{-1}(r) = r$ es una rama bien fundada de $\mathcal{A}_0$ en P y una jugada válida para el jugador “bueno” en P. Más concretamente, lo que hemos probado es que $\tau^{-1}(\Sigma)(\mathcal{A}_0) = \Sigma(\mathcal{A}_0)$. El límite inductivo M_1 a lo largo de dicha rama es claramente el mismo en P o en V. Ahora el jugador “malo” elige un nuevo árbol de iteraciones $\mathcal{A}_1 \in P$ de M_1, y vemos igualmente que el jugador “bueno” puede responder con $\Sigma(\mathcal{A}_1)$. Así, el hecho de que Σ sea una estrategia ganadora nos asegura que la partida puede continuarse hasta obtener una sucesión $\{M_\alpha\}_{\alpha<\aleph_1^P} \in P$ donde las ramas elegidas por el jugador “bueno” según $\tau^{-1}(\Sigma)$ en P son simplemente las elegidas por Σ en V.

Fijemos $n \in \omega$ y consideremos $\mathbb{P}^* = \mathrm{Fn}(\omega \setminus n, \mathcal{N}^P)$, es decir, el conjunto de funciones parciales finitas de $\omega \setminus n$ en $\mathcal{N}^P$. Sea K un filtro $\mathbb{P}^*$-genérico sobre P, que determina una enumeración $\{a_i\}_{n\leq i<\omega}$ de $\mathcal{N}^P$.

Definimos $M_0 = \cdots = M_n = M$ y $j_{i,i'}$, para $i \leq i' \leq n$ será la identidad en M. Descomponemos $G|_n = G_0 \times \cdots \times G_{n-1}$ y, para $i < n$, definimos $H_i = G_i$.

Ahora vamos a demostrar construir objetos $\mathcal{A}_i$, r_i, M_i, H_i para $n \leq i < \omega$ y aplicaciones $j_{i,i'} : M_i \longrightarrow M_{i'}$ para $n \leq i \leq i' < \omega$ que conmuten de forma natural y de modo que se cumplan las propiedades siguientes (donde llamamos $H^i = H_0 \times \cdots \times H_{i-1}$):

a) M_i es un modelo transitivo de ZFC y $j_{i,i'}$ es una inmersión elemental.

b) $\mathcal{A}_i$ es un árbol de iteraciones de M_i cuyos extensores tienen todos punto crítico mayor que $j_{0,i}(\delta_{i-1})$.

c) r_i es la rama infinita de $\mathcal{A}_i$ dada por Σ.

d) M_{i+1} es el límite inductivo de los modelos de $\mathcal{A}_i$ correspondientes a la rama r_i y $j_{i,i+1}$ es la inmersión natural en dicho límite inductivo.

e) H_i es un filtro $\mathrm{Col}(j_{0,i+1}(\delta_i))$-genérico sobre $M_{i+1}[H^i]$.

f) $a_i \in M_{i+1}[H^i \times H_i]$.

Notemos que la propiedad a) se cumple también para $i \leq n$ y la propiedad e) para $i < n$, pues $H_i = G_i$ es un filtro $\mathrm{Col}(\delta_i)$-genérico sobre $M[G|_i] = M_{i+1}[H^i]$.

La propiedad e) requiere una explicación: Estas propiedades implican que

H^i es un filtro $j_{0,i}(\mathbb{P}|_i)$-genérico sobre M_i.

En efecto, para $i \leq n$ tenemos que $H^i = G|_i$, que es $P|_i$-genérico sobre $M = M_i$, y $j_{0,i}$ es la identidad. Si es cierto para un $i \geq n$, las propiedades b) y d) implican que el punto crítico de $j_{i,i+1}$ está por encima de $j_{0,i}(\delta_{i-1})$, por lo que $j_{0,i+1}(\mathbb{P}|_i) = j_{0,i}(\mathbb{P}|_i)$ y sus subconjuntos densos en M_{i+1} son los mismos que en M_i, por lo que también

H^i es $j_{0,i+1}(\mathbb{P}|_i)$-genérico sobre M_{i+1}.

Es por esto que tiene sentido la extensión $M_{i+1}[H^i]$ que aparece en la propiedad e), la cual implica ahora que H^{i+1} es un filtro sobre el conjunto $j_{0,i+1}(\mathbb{P}|_i) \times \mathrm{Col}(j_{0,i+1}(\delta_i)) = j_{0,i+1}(\mathbb{P}|_{i+1})$ y que es genérico sobre M_{i+1}.

A partir de $i = n$, la construcción puede verse como las primeras jugadas de una partida de iteraciones de $M_n = M$ en P en la que el jugador "bueno" aplica su estrategia Σ para elegir las ramas r_i y el jugador "malo" elige adecuadamente los árboles $\mathcal{A}_i$ para que se cumplan las propiedades anteriores. El hecho de que el jugador "bueno" emplee la estrategia Σ garantiza que la construcción puede continuar indefinidamente. Supongamos, pues, construido el modelo M_i y los demás objetos para $i' < i$.

Para elegir el árbol $\mathcal{A}_i$ aplicamos el teorema 11.10 (relativizado a P) con $M = M_i$, $\delta = j_{0,i}(\delta_i)$, $X = \omega$, $\kappa = j_{0,i}(\delta_{i-1})$, pero en lugar de considerar

$\mathbb{P} = \mathrm{Col}(j_{0,i}(\delta_{i-1}))$ tomamos $\mathbb{P} = \mathrm{Col}(j_{0,i}(\delta_1)) \times \cdots \times \mathrm{Col}(j_{0,i}(\delta_{i-1}))$, que es isomorfo a $\mathrm{Col}(j_{0,i}(\delta_{i-1}))$, por lo que 11.10 es válido igualmente. A su vez, tomamos $H = H^i$ y $x = a_i$.

De este modo obtenemos un árbol de iteraciones $\mathcal{A}_i$ (en P) cuyos extensores tienen todos punto crítico por encima de $j_{0,i}(\delta_{i-1})$ (con lo que se cumple b) y tal que, eligiendo r_i de acuerdo con Σ (equivalentemente, con $\tau^{-1}(\Sigma) \in P$), de modo que se cumple c) y nos permite definir M_{i+1} y $j_{i,i+1}$ de acuerdo con d), podemos asegurar que existe un filtro H_i que cumple e) y f).

Observemos que la construcción depende de la sucesión $\{a_i\}$ o, equivalentemente, del filtro K, que no está en P, luego no puede realizarse en P y no podemos asegurar que las cuatro sucesiones que construimos estén en P, pero lo que sí que sabemos es que cada uno de los objetos construidos $\mathcal{A}_i$, r_i, M_i, H_i está en P. Donde sí que están las sucesiones construidas es en la extensión genérica $P[K]$.

Veamos ahora que podemos ajustar la construcción de forma que se cumpla:

> $(*)$ *Para todo $i < \omega$ y todo $D \in M_i$ denso en $j_{0,i}(\mathbb{P})$, existe un $i^* > i$ tal que $H^{i^*} \cap j_{i,i^*}(D) \neq \varnothing$.*

Esto ha de entenderse como que $H^{i^*} \subset j_{0,i^*}(\mathbb{P}|_{i^*})$ contiene una condición que, completada con unos, está en $j_{i,i^*}(D) \subset j_{0,i^*}(\mathbb{P})$.

Para ello, cada vez que construimos un modelo $M_i \in P$, elegimos una aplicación $f_i \in P$ tal que $f_i : \omega \longrightarrow M_i$ biyectiva, de forma que $\{f_i\}_{i\in\omega} \in P[K]$. También construiremos una sucesión $\{q_i\}_{n\leq i<\omega}$ tal que:

- $q_i \in j_{0,i}(\mathbb{P})$.
- $q_i|_i \in H^i$.
- Si $i \leq i'$, entonces $q_{i'} \leq j_{i,i'}(q_i)$.

Para empezar la construcción podemos tomar $q_{n-1} = \mathbb{1}$. En el paso $i \geq n$ de la construcción descomponemos $i - n = (u, v)$, utilizando la semejanza canónica de ω en $\omega \times \omega$, de modo que $u < n$, por lo que ya tenemos definido $f_u(v) \in M_u$.

Supongamos que $D = f_u(v)$ es un subconjunto denso en $j_{0,u}(\mathbb{P})$, de modo que $j_{u,i}(D)$ es denso en $j_{0,i}(\mathbb{P})$. El conjunto

$$E = \{d \in j_{0,i}(\mathbb{P}|_i) \mid \bigvee \bar{d} \in j_{u,i}(D)\ d \leq q_i\} \in M_i$$

es denso bajo $q_i|_i$, luego existe un $\bar{q} \in j_{u,i}(D)$ tal que $\bar{q} \leq q_i$ y $\bar{q}|_i \in H^i$. Si $f_u(v)$ no es un conjunto denso, tomamos $\bar{q} = q_i$. En ambos casos, tomamos $q_{i+1} = j_{i,i+1}(\bar{q}) \in j_{u,i+1}(D)$ y $q_{i+1} \leq j_{i,i+1}(q_i)$. Por las propiedades b) y d) tenemos que

$$q_{i+1}|_i = j_{i,i+1}(\bar{q}|_i) = \bar{q}|_i \in H^i.$$

Ahora observamos que podemos elegir H_i de modo que $q_{i+1}(i) \in H_i$. Esto se debe a la homogeneidad de $\mathbb{Q} = \mathrm{Col}(j_{0,i+1}(\delta_i))$: partiendo de un H_i arbitrario, podemos definir un automorfismo g de $\mathbb{Q}$ en M_{i+1} que transforme $q_{i+1}(i)$ en un elemento de H_i, con lo que $q_{i+1}(i) \in g[H_i]$ y los filtros genéricos H_i y $g[H_i]$ dan lugar a la misma extensión genérica, luego $g[H_i]$ cumple igualmente las condiciones e) y f). Cambiando H_i por $g[H_i]$ tenemos que $q_{i+1}|_{i+1} \in H^{i+1}$.

Con esta modificación, dado $D \in M_i$ según $(*)$, existirá un v de manera que $D = f_i(v)$. Sea $i' = n + (i, v)$. Así D es el conjunto considerado en el paso i' de la construcción y $q_{i'+1} \in j_{i,i'+1}(D)$. Sea $i^* > i'$ que contenga al soporte de $q_{i'+1}$. Así, $q_{i^*} \leq j_{i'+1,i^*}(q_{i'+1})$ y $q_{i^*}|_{i^*} \in H^{i^*}$, luego también $j_{i'+1,i^*}(q_{i'+1}|_{i^*}) \in H^{i^*} \cap j_{i,i^*}(D)$.

Sea M_ω el límite inductivo de los modelos M_i, y sean $j_{i,\omega} : M_i \longrightarrow M_\omega$ las inmersiones elementales asociadas. Sabemos que M_ω está bien fundado porque forma parte de una partida en el juego de iteraciones de M jugada con la estrategia Σ. Por la propiedad b) tenemos que el punto crítico de $j_{i,\omega}$ es mayor o igual que $j_{0,i}(\delta_{i-1})$, luego $j_{i,\omega}$ fija a los elementos de H^i. Así, si llamamos

$$H = \{q \in j_{0,\omega}(\mathbb{P}) \mid \bigwedge i \in \omega\ q|_i \in H^i\},$$

tenemos que H es un filtro $j_{0,\omega}(\mathbb{P})$-genérico sobre M_ω.

En efecto, es inmediato que H es un filtro, y todo subconjunto denso de $j_{0,\omega}(\mathbb{P})$ en M_ω es de la forma $j_{i,\omega}(D)$, para cierto conjunto $D \in M_i$ denso en $j_{0,i}(\mathbb{P})$. Por $(*)$ tenemos que, cambiando i por un índice mayor, se cumple que $H^i \cap D \neq \varnothing$, es decir, que existe una condición $d \in D$ cuyo soporte está contenido en i tal que $d|_i \in H^i$, luego $d = j_{i,\omega}(d) \in H \cap j_{i,\omega}(D)$.

Notemos además que, en términos de H, se cumple que $H^i = H|_i$.

(1) $R^*[H] = \mathcal{N}^P$.

En efecto, si $x \in R^*[H]$, entonces $x \in \mathcal{N}^{M_\omega[H|_i]}$ para cierto $i \in \omega$, luego $x = \sigma_{H|_i}$ para cierto $\sigma \in M_\omega^{j_{0,\omega}(\mathbb{P}|_i)}$. Ahora bien, la inmersión $j_{i,\omega} : M_i \longrightarrow M_\omega$ tiene punto crítico $\kappa > j_{0,i}(\delta_{i-1})$, luego $j_{0,i}(\mathbb{P}|_i) \in V_\kappa^{M_i}$, lo que implica que $j_{0,i}(\mathbb{P}|_i) = j_{0,\omega}(\mathbb{P}|_i)$ y los buenos $j_{0,i}(\mathbb{P}|_i)$-nombres para subconjuntos de $\omega \times \omega$ son los mismos en M_i y en M_ω. Puesto que podemos exigir que σ sea uno de estos nombres, resulta que $\sigma \in M_i$, luego $x = \sigma_{H|_i} \in M_i[H|_i] \subset P$, puesto que tanto M_i como $H|_i = H^i$ están en P. Esto prueba que $R^*[H] \subset \mathcal{N}^P$.

Recíprocamente, todo $x \in \mathcal{N}^P$ es $x = a_i$ para un cierto $n \leq i < \omega$, luego $x \in M_{i+1}[H^i \times H_i] = M_{i+1}[H|_{i+1}]$. Por el mismo razonamiento precedente (ahora con el índice $i + 1$), concluimos que $x \in M_\omega[H|_{i+1}]$, luego $x \in R^*[H]$. ■

(2) $\phi(x_1, \ldots, x_k)$ *se cumple en el modelo derivado de* M_ω *inducido por* H.

En efecto, por hipótesis $x_1, \ldots, x_k \in R^*[G] \subset \mathcal{N}^P = R^*[H]$. Además tenemos que $\phi(x_1, \ldots, x_k)$ se cumple en el modelo derivado de M inducido por G.

Hasta ahora hemos trabajado con un n arbitrario. Podemos fijarlo de modo que $x_1, \ldots, x_k \in \mathcal{N}^{M[G|_n]}$. El teorema 11.14 nos da que

$$(\mathbb{1}_{\mathbb{P}_n^{\geq}} \Vdash \phi^{L(R^*[\Gamma])}(\check{x}_1, \ldots, \check{x}_k))^{M[H|_n]},$$

donde hemos usado que $M[G|_n] = M[H|_n]$. Ahora usamos que $j_{0,\omega} = j_{n,\omega}$ tiene punto crítico mayor que δ_{n-1}, luego, por el teorema 11.11 se extiende a una inmersión elemental

$$\bar{\jmath} : M[H|_n] \longrightarrow M_\omega[H|_n].$$

Aplicando $\bar{\jmath}$ obtenemos que

$$(\mathbb{1}_{\mathbb{P}^{\geq}_{n}} \Vdash \phi^{L(R^*[\Gamma])}(\check{x}_1, \ldots, \check{x}_k))^{M_\omega[H|_n]},$$

lo que a su vez implica $(\phi^{L(R^*[H])}(x_1, \ldots, x_k))^{M_\omega[H]}$. ■

(3) *$\phi(x_1, \ldots, x_k)$ se cumple en $L(\mathcal{N})^P$.*

En efecto, por (1), el modelo derivado de M_ω inducido por H es

$$W = L_{o(M_\omega)}(R^*[H]) = L_{o(M_\omega)}(\mathcal{N}^P).$$

Vamos a probar que W y $L(\mathcal{N})^P = L_{o(P)}(\mathcal{N}^P)$ cumplen las hipótesis del teorema 11.17. Como $M_\omega \in P[K]$, se cumple que $o(M_\omega) \leq o(P[K]) = o(P)$. Además, por 11.15 sabemos que $\mathcal{N}^W = \mathcal{N}^P$ y, trivialmente, $\mathcal{N}^{L(\mathcal{N})^P} = \mathcal{N}^P$. Por consiguiente, puesto que (2) afirma que $\phi(x_1, \ldots, x_k)$ se cumple en W, el teorema 11.17 implica que también se cumple en $L(\mathcal{N})^P$. ■

Ahora usamos la inmersión elemental $\tau : P \longrightarrow V_\theta$ para concluir que ϕ se cumple en $L(\mathcal{N})^{V_\theta} = L_\theta(\mathcal{N})$. (Notemos que τ fija a $x_1, \ldots, x_k$ porque todos ellos están en $(V_{\aleph_1})^P$.)

Finalmente, el teorema 11.17 aplicado a $L_\theta(\mathcal{N})$ y $L(\mathcal{N})$ (véase la nota posterior al teorema) implica que ϕ se cumple en $L(\mathcal{N})$. ■

Teorema 11.20 *El modelo derivado de M inducido por G cumple el axioma de determinación.*

Demostración: Llamemos $W = L_{o(M)}(R^*[G])$ al modelo derivado. Por el teorema 11.15 sabemos que $\mathcal{N}^W = R^*[G]$. Supongamos, por reducción al absurdo, que existe un conjunto $A \in W$ tal que $A \subset R^*[G]$ y el juego $G(A)$ no está determinado^W. Por la nota tras el teorema 11.15 existen ordinales $\zeta < \gamma$, un $a \in R^*[G]$ y una fórmula ϕ tales que

$$x \in A \leftrightarrow x \in R^*[G] \land L_\gamma(R^*[G]) \vDash \phi[x, a, \zeta].$$

Más concretamente, $a \in \mathcal{N}^{M[G|_n]}$, para cierto $n \in \omega$, pero, sustituyendo M por $M[G|_n]$, podemos suponer que $a \in \mathcal{N}^M$. Finalmente, podemos suponer que (γ, ζ) es el menor par de ordinales (en el orden lexicográfico) tal que existe un conjunto de la forma

$$A = \{x \in \mathcal{N} \mid L_\gamma(\mathcal{N}) \vDash \phi[x, a, \zeta]\}^W$$

no determinado^W. Por el teorema 11.14 tenemos que

$$\mathbb{1}_{\mathbb{P}} \Vdash ((\check{\gamma}, \check{\zeta}) \text{ es el mínimo par de ordinales tal que el conjunto}$$
$$\{x \in \mathcal{N} \mid L_{\check{\gamma}}(\mathcal{N}) \vDash \check{\phi}[x, \check{a}, \check{\zeta}]\} \text{ no está determinado})^{L(R^*[\Gamma])}.$$

Sea θ un cardinal^M mayor que δ_ω y que γ y tal que V_θ^M sea un modelo de (el suficiente) ZFC. Consideramos ahora el árbol T en $\omega \times V_\theta^M$ cuyos elementos son sucesiones $\{(x_i, e_i)\}_{i<n}$ tales que:

a) $\{e_i\}_{i<n}$ pertenece al árbol de intentos de construir un submodelo elemental de V_θ^M (véase la definición 10.4 y la nota posterior al teorema 10.5) que contenga a

$$e_0 = a, \quad e_1 = \{\delta_i\}_{i<\omega}, \quad e_2 = \mathbb{P}, \quad e_3 = R^*[\Gamma], \quad e_4 = \gamma, \quad e_5 = \zeta,$$

e_6 un $\mathbb{P}$-nombre (no necesariamente el mismo en todos los nodos del árbol) tal que

$$\mathbb{1}_{\mathbb{P}} \Vdash (e_6 \in R^*[\Gamma] \land L_{\check{\gamma}}(R^*[\Gamma]) \vDash \check{\phi}[e_6, \check{a}, \check{\zeta}]).$$

b) $e_7 = \mathbb{1}_{\mathbb{P}}$ y, para todo $i \geq 4$ tal que $2i+1 < n$, se cumple que $e_{2i+1} \in \mathbb{P}$, $e_{2i+1} \leq e_{2i-1}$ y $e_{2i+1} \Vdash e_6|_{2\check{i}+1} = \check{x}|_{2\check{i}+1}$, donde $x = \{x_i\}_{i<n}$.

c) Si además e_{2i} es un subconjunto denso de $\mathbb{P}$, entonces $e_{2i+1} \in e_{2i}$.

Definimos igualmente un árbol T^* sin más que cambiar la fórmula ϕ por su negación $\neg\phi$. Notemos que $T, T^* \in M$.

De este modo, si $x \in p[T]$, de modo que existe un e tal que $(x, e) \in T$, el conjunto $\{e_i \mid i \in \omega\} \in M$ es un submodelo elemental de V_θ (por 10.5). Sea M' su colapso transitivo y sea $\pi : M' \longrightarrow V_\theta^M$ la inversa de la función colapsante, que es una inmersión elemental $\pi \in M$. Llamemos $\mathbb{P}^* = \pi^{-1}(e_2)$, de modo que $\pi(\mathbb{P}^*) = \mathbb{P}$ es el producto análogo a $\mathbb{P}$ formado a partir de la sucesión de cardinales de Woodin$^{M'}$ $\pi^{-1}(e_1)$, que se corresponde con la dada en M. Sea $\xi = \pi^{-1}(e_6)$, que es un $\mathbb{P}^*$-nombre en M'. Además $a, \gamma, \zeta, \phi \in M'$ y son fijados por π, y también

$$\mathbb{1} \Vdash (\xi \in R^*[\Gamma] \land L_{\check{\gamma}}(R^*[\Gamma]) \vDash \check{\phi}[\xi, \check{a}, \check{\zeta}]).$$

Más aún, el conjunto $\{\pi^{-1}(e_{2i+1}) \mid i \geq 4\}$ genera un filtro $G^* \in M$ que es $\mathbb{P}^*$-genérico sobre M', pues, si $D \in M'$ es denso en $\mathbb{P}^*$, entonces $\pi(D)$ ha de ser denso en $\mathbb{P}'$, y en particular ha de ser $\pi(D) = e_{2i}$ para un $i \geq 4$ (ya que los e_{2i+1} son elementos de $\mathbb{P}'$, no conjuntos densos), y entonces $\pi^{-1}(e_{2i+1}) \in D \cap \mathbb{P}^*$.

Es claro que $s = x|_{2i+1} \in M'$ y es fijado por π, luego

$$\pi^{-1}(e_{2i+1}) \Vdash \xi|_{2\check{i}+1} = \check{s}$$

y, por consiguiente, $\xi_{G^*} = x$. Más aún, en el modelo W' derivado de M' inducido por G^* se cumple que el conjunto

$$A = \{y \in \mathcal{N} \mid L_\gamma(\mathcal{N}) \vDash \phi[y, a, \zeta]\}^{W'}$$

no está determinado$^{W'}$, que (γ, ζ) es el mínimo par para el que esto es cierto y que $x \in A$.

Todo esto es válido para el árbol T^* salvo la última afirmación, que ahora es $x \notin A$.

(1) *Consideramos $\mathbb{P}_1 = \mathrm{Col}(\delta_0)$. Entonces (en M)*

$$\mathbb{1}_{\mathbb{P}_1} \Vdash p[\check{T}] \cup p[\check{T}^*] = \mathcal{N}.$$

En efecto, consideramos un filtro G arbitrario $\mathbb{P}$-genérico sobre M, de modo que $G|_1$ es un filtro arbitrario $\mathbb{P}_1$-genérico sobre M. Hemos de probar que

$$(p[T] \cup p[T^*] = \mathcal{N})^{M[G|_1]},$$

donde las proyecciones de los árboles se calculan en $M[G|_1]$. Tomamos, pues, $x \in \mathcal{N}^{M[G|_1]}$, pero ahora razonamos en $M[G]$, de modo que $x \in R^*[G]$. En este modelo tenemos también el conjunto A. Vamos a probar que $x \in p[T]^{M[G|_1]}$ o $x \in p[T^*]^{M[G|_1]}$ según si $x \in A$ o $x \notin A$. Supondremos que $x \in A$. El otro caso es completamente análogo.

Por definición de A, tenemos que $x \in R^*[G]$ y $L_\gamma(R^*[G]) \vDash \phi[x, a, \zeta]$. Entonces $x = \sigma_G$, para un cierto $\mathbb{P}$-nombre σ en M que cumpla lo que exige para e_6 la definición de T. Esto nos define un nodo $(x|_8, e|_8) \in T$, que podemos prolongar hasta una rama $(x, e) \in M[G]$ determinando los valores e_{2i} según la definición de árbol de intentos de construir un submodelo elemental, y los valores e_{2i+1} los tomamos en G según las condiciones b) y c) de la definición de T. De este modo concluimos que $x \in p[T]^{M[G]}$. Esto es equivalente a afirmar que el árbol T_x tiene una rama infinita (en $M[G]$), pero el árbol está en $M[G|_1]$, luego también ha de tener una rama infinita en $M[G|_1]$ (porque la buena fundación es absoluta para modelos transitivos), lo cual equivale a que $x \in p[T]^{M[G|_1]}$. ■

(2) *Si $x \in \mathcal{N}^M$ cumple $x \in p[T]$, entonces en $L(\mathcal{N})^M$ se cumple que existe un conjunto no determinado de la forma*

$$A = \{y \in \mathcal{N} \mid L_\gamma(\mathcal{N}) \vDash \phi[y, a, \zeta]\},$$

para ciertos ordinales $\zeta < \gamma$ y, si (γ, ζ) es el mínimo par posible, entonces $x \in A$.

Aplicaremos el teorema 11.19 relativizado a M. Hemos probado que existe un modelo M' numerable^M y una inmersión elemental $\pi : M' \longrightarrow V_\theta^M$ de modo que la afirmación $\psi(x, a)$ del enunciado es cierta en el modelo derivado de M' inducido por un filtro G^*. Basta observar que $\psi(x, a)$ es $\Sigma_1(\mathcal{N})$. En efecto, puede reformularse como

$$\bigvee Q(\mathcal{N} \subset Q \land Q \text{ es transitivo} \land Q \vDash \text{“el suficiente ZF} + V = L(\mathcal{N})''$$

$$\land \bigvee \gamma\zeta A(\bigwedge y \in \mathcal{N}(y \text{ no codifica una estrategia para } A) \land A = \ldots))$$

■

Obviamente, se cumple el resultado análogo para T^* cambiando $x \in A$ por $x \notin A$. Como consecuencia:

(3) *En M, sean $\zeta < \gamma$ los menores ordinales tales que el conjunto*

$$A = \{y \in \mathcal{N} \mid L_\gamma(\mathcal{N}) \vDash \phi[y, a, \zeta]\}$$

no esté determinado. Entonces $p[T] = A$ y $p[T^*] = \mathcal{N} \setminus A$.

En efecto, por (2) y su análogo para T^* tenemos que $p[T] \subset A$ y $p[T^*] \subset \mathcal{N} \setminus A$. Basta probar que $p[T] \cup p[T^*] = \mathcal{N}$.

Ahora bien, por (1) sabemos que todo $x \in \mathcal{N}^M$ cumple $x \in p[T]^{M[G|_1]}$ o bien $x \in p[T^*]^{M[G|_1]}$. Lo primero significa que el árbol T_x tiene una rama infinita en $M[G_1]$, luego también la ha de tener en M, luego $x \in p[T]^M$. Igualmente, en el segundo caso ha de ser $x \in p[T^*]^M$. ■

Así hemos probado que A es δ_0-universalmente de Baire^M, luego, por el teorema 11.5, sabemos que A está determinado^M, y al mismo tiempo A no está determinado$^{L(R)^M}$. Pero esto es imposible pues, como ya hemos observado, una estrategia para A en M puede codificarse por un elemento de $\mathcal{N}^M$, luego está en $L(\mathcal{N})^M$. ■

Con esto ya hemos probado la consistencia de AD (relativa a la existencia de infinitos cardinales de Woodin). Si añadimos un cardinal medible tenemos el teorema 11.12:

Demostración: Por el teorema de reflexión podemos tomar un ordinal θ tal que V_θ sea un submodelo elemental de V en el que se cumpla la hipótesis sobre la existencia de los cardinales de Woodin y el cardinal medible. Podemos tomar un submodelo elemental numerable y formar su colapso transitivo M, con lo que la inversa de la función colapsante es una inmersión elemental $\pi : M \longrightarrow V_\theta$.

De este modo, M cumple las hipótesis que venimos suponiendo a lo largo de toda esta sección y además existe un cardinal μ medible^M por encima de todos los cardinales de Woodin δ_i. Por otra parte, el modelo M cumple la hipótesis del teorema 11.19, luego toda la construcción realizada en su prueba es válida aquí:

Sabemos que M es iterable, por lo que existe una estrategia Σ para el juego de las iteraciones de M. Sustituimos θ por un ordinal mayor de modo que M, Σ, G y $\mathcal{N}$ pertenezcan a V_θ, tomamos un submodelo elemental de V_θ y llamamos P a su colapso transitivo, de modo que la inversa de la función colapsante es una inmersión elemental $\tau : P \longrightarrow V_\theta$.

A partir de aquí jugamos una partida $\{M_i\}_{i \leq \omega}$ de iteraciones de M, en la que todos los modelos están bien fundados porque empleamos la estrategia Σ. (En 11.19 realizábamos la construcción fijando un número natural n arbitrario que aquí podemos tomar igual a 0.) La construcción nos daba también un filtro H $j_{0,\omega}(\mathbb{P})$-genérico sobre M_ω de modo que $R^*[H] = \mathcal{N}^P$.

La inmersión elemental $j_{0,\omega}$ nos da que en M_∞ hay también infinitos cardinales de Woodin (con un cardinal medible sobre ellos), luego el teorema 11.20 nos da que el modelo derivado de M_ω inducido por H satisface AD. Si llamamos W a este modelo, en la prueba de 11.19 hemos visto también que $\mathcal{N}^W = \mathcal{N}^P = \mathcal{N}^{L(\mathcal{N})^P}$, de modo que $W = L_{o(M_\omega)}(\mathcal{N}^P)$, mientras que $L(\mathcal{N})^P = L_{o(P)}(\mathcal{N}^P)$, y también sabemos que $o(M_\omega) \leq o(P)$.

Queremos aplicar el teorema 11.18 para concluir que $L(\mathcal{N})^P$ cumple AD, pero para ello necesitaríamos la desigualdad opuesta a la que acabamos de obtener, así que vamos a pasar a otro modelo de AD que tenga más ordinales.

Para ello consideramos el cardinal medible^M μ que está por encima del supremo δ_∞ de los cardinales de Woodin. Sea U una medida normal en μ y prolonguemos la partida del juego de iteraciones de M hasta una sucesión $\{M_\alpha\}_{\alpha<\aleph_1}$ de modo siguiente:

Dado M_α, consideramos el árbol de iteraciones $\mathcal{A}_\alpha$ cuyo árbol de índices es ω con el orden usual (de modo que el árbol consta de una única rama infinita) y cuyos modelos vienen dados por $M_\alpha^{n+1} = \mathrm{Ult}_{j_{0,n}(j_{0,\alpha}(U))}(M_\alpha^n)$. Aquí hay que entender que $j_{0,\alpha} : M \longrightarrow M_\alpha$ es la inmersión elemental correspondiente al juego de iteraciones de M (de modo que $j_{0,\alpha}(U)$ es una medida normal en $j_{0,\alpha}(\kappa)$ en M_α) y $j_{0,n}$ es la inmersión elemental correspondiente al árbol $\mathcal{A}_\alpha$. Tras esta jugada del jugador "malo", el jugador "bueno" no tiene más opción que jugar la única rama del árbol $\mathcal{A}_\alpha$, de la que obtenemos el modelo $M_{\alpha+1}$. Todos los modelos están bien fundados por el teorema 10.23.

Llamemos $\eta_\alpha = o(M_\alpha)$. La sucesión $\{j_{0,\alpha}(\mu)\}_{\omega\leq\alpha<\aleph_1}$ es estrictamente creciente y $j_{0,\alpha}(\mu) < \eta_\alpha < \aleph_1$ (porque todos los modelos M_α son numerables). Por lo tanto, la sucesión $\{\eta_\alpha\}_{\alpha<\aleph_1}$ es cofinal en $\aleph_1$ y podemos tomar un $\alpha < \aleph_1$ tal que $\eta_\alpha > o(P)$.

La inmersión $j_{\omega,\alpha}$ tiene punto crítico $j_{0,\omega}(\mu) > j_{0,\omega}(\delta_\infty)$, luego $\mathbb{P}$ tiene los mismos subconjuntos en M_ω y en M_α, luego H es también un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M_α y $R^*[H]$ es el mismo para ambos modelos (concretamente, es $\mathcal{N}^P$). Así pues:

El modelo derivado de M_α inducido por H es $L_{\eta_\alpha}(\mathcal{N}^P)$.

Por el teorema 11.15:

$$\mathcal{N}^{L_{\eta_\alpha}(R^P)} = \mathcal{N}^P.$$

Por consiguiente, los modelos $L(\mathcal{N})^P = L_{o(P)}(\mathcal{N}^P)$ y $L_{\eta_\alpha}(\mathcal{N}^P)$ cumplen las hipótesis del teorema 11.17 y, por el teorema 11.20:

$L_{\eta_\alpha}(\mathcal{N}^P)$ *cumple* AD.

Ahora sí que podemos aplicar el teorema 11.18 para concluir que $L(\mathcal{N})^P$ cumple AD.

Finalmente, la inmersión elemental $\tau : P \longrightarrow V_\theta$ nos da que $L(\mathcal{N})^{V_\theta} = L_\theta(\mathcal{N})$ cumple AD y, como el ordinal θ es arbitrariamente grande, podemos tomarlo de forma que $(\mathcal{PN})^{L(\mathcal{N})} \subset L_\theta(\mathcal{N})$, con lo que todo subconjunto de $\mathcal{N}$ en $L(\mathcal{N})$ está determinado. ■

Apéndice A

Clases de clases de conjuntos

Para comodidad del lector recogemos aquí las definiciones principales de clases de clases de conjuntos que hemos dado:

Definición 1.17 Una clase $\mathbf{\Gamma}$ es *razonable* si una sucesión $\{A_n\}_{n\in\omega}$ tiene todos sus elementos en $\mathbf{\Gamma}(X)$ si y sólo si $\bigcup\limits_{n\in\omega} A_n \times \{n\} \in \mathbf{\Gamma}(X \times \omega)$.

Todas las clases de la jerarquía de Lusin $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha$, $\mathbf{\Pi}^0_\alpha$, $\mathbf{\Delta}^0_\alpha$, $\mathbf{\Sigma}^1_\alpha$, $\mathbf{\Pi}^1_\alpha$, $\mathbf{\Delta}^1_\alpha$ son razonables (teorema 1.18).

Definición 2.14 Γ es una *clase normada* si todo $A \in \Gamma$ tiene una norma en Γ.

Esto lo cumplen las clases $\Pi^1_1(a)$, $\mathbf{\Pi}^1_1$, $\Sigma^1_2(a)$ y $\mathbf{\Sigma}^1_2$.

Aunque no lo hemos probado en el texto, no es difícil ver que también lo son las clases $\Sigma^0_n(a)$ y $\mathbf{\Sigma}^0_n$ para $n \geq 2$ y también para $n = 1$ sobre espacios cero-dimensionales).

El axioma ADP implica que las clases $\Pi^1_{2n+1}(a)$ y $\Sigma^1_{2n+2}(a)$ son normadas (y sus complementarias no).

Definición 3.18 Γ es una *clase* Σ si contiene a los conjuntos semirrecursivos y es cerrada para conjunciones, disyunciones, $\bigvee k \leq n$, $\bigwedge k \leq n$, $\bigvee k \in \omega$ y sustituciones triviales.

Son las clases sobre las que se comporta adecuadamente el concepto de función Γ-recursiva. Incluyen a las clases $\Sigma^0_n(a)$, $\mathbf{\Sigma}^0_n$, $\Sigma^1_n(a)$, $\mathbf{\Sigma}^1_n$, $\Pi^1_n(a)$, $\mathbf{\Pi}^1_n$, $\Delta^1_n(a)$ y $\mathbf{\Delta}^1_n$.

Definición 3.58 Γ es una *clase* Σ^* si es una clase Σ, está ω-parametrizada y tiene la propiedad de sustitución.

Esta propiedad la tienen las clases $\Sigma^0_n(a)$ y $\Sigma^1_n(a)$.

Definición 4.1 Una clase Γ es *adecuada* si $\Delta_1^0 \subset \Gamma$ y Γ es cerrada para conjunciones, disyunciones, $\bigvee n \leq m$, $\bigwedge n \leq m$ y sustituciones recursivas.

Esto lo cumplen todas las clases de las jerarquías de Kleene y de Lusin.

Definición 4.44 Γ es una *clase de Spector* si cumple las propiedades siguientes:

- Es cerrada para $\wedge$, $\vee$, $\bigwedge n \leq m$, $\bigvee n \leq m$, $\bigwedge n \in \omega$, $\bigvee n \in \omega$ y para sustituciones recursivas.
- Está ω-parametrizada, tiene la propiedad de sustitución y es normada.
- Contiene a Π_1^1.

Esto lo cumplen las clases $\Pi_1^1(a)$ y $\Sigma_2^1(a)$. El axioma ADP implica que las clases $\Pi_{2n+1}^1(a)$ y $\Sigma_{2n+2}^1(a)$ son de Spector (y sus complementarias no).

Bibliografía

[1] Bukovský, L. *The Structure of the Real Line,* Birkhäuser 2011.

[2] Foreman, H., Kanamori, A. (eds.) *Handbook of Set Theory,* Springer 2010.

[3] Jech, T.J. *Set Theory,* Academic Press, 1978.

[4] Jech, T.J. *Set Theory,* (3ª edición) Springer, 2003.

[5] Kanamori, A. *The Higher Infinite: Large Cardinals in Set Theory from Their Beginnings,* Springer 2009.

[6] Kanovei, V.G. *Proof of a theorem of Lusin,* Mathematical notes of the Academy of Sciences of the USSR, 23 (1) (1978) 35–37.

[7] Kechris, A.S. *Classical Descriptive Set Theory,* Springer 1995.

[8] Kim, S.S. *A Characterization of the Set of Points of Continuity of a Real Function,* The American Mathematical Monthly 106 (3) (1999) 258–259

[9] Kunen, K. *Set Theory. An Introduction to Independence Proofs,* North Holland 1985.

[10] Mansfield, R., Weitkamp, G. *Recursive aspects of descriptive set theory,* Oxford 1985.

[11] Moschovakis, Y.N. *Descriptive Set Theory,* (segunda edición) AMS 2009.

[12] Raisonnier, J. *A mathematical proof of S. Shelah's theorem on the measure problem and related results.* Israel Journal of Mathematics 48 (1) (1984) 48–56.

[13] Wadge, W.W. *Reducibility and determinateness on the Baire Space,* Tesis doctoral, University of California 1983.

Índice de Materias