MATEMÁTICAS II Grupo GF Final (*)

APELLIDOS: ________________________________ NOMBRE____________________

Responde razonadamente a las preguntas siguientes. Todas las respuestas tienen que basarse en los métodos generales estudiados en la asignatura, y no en cálculos particulares que aprovechen la sencillez de los problemas.

1. Una empresa elabora un producto a partir de cuatro materias primas. El problema siguiente minimiza el coste de producción garantizando una producción mínima de 200 u.p. y de modo que el procesado de las materias primas en dos fases de producción no supere las horas de mano de obra disponibles:

$$\begin{array}{rrl} \text{Min.} & 9x + 8y + 25z + 15w & \text{coste} \\ \text{s.a} & x + 2y + 5z + 2w \geq 200 & \text{producción} \\ & y + 7z + \ \ w \leq \ \ 50 & \text{horas fase 1} \\ & 5y + 2z + 3w \leq 500 & \text{horas fase 2} \\ & x,\ y,\ z,\ w \geq 0 & \end{array}$$

   Hasta ahora, la empresa podía disponer únicamente de las materias primas primera y cuarta, y las usaba en cantidades $(x, y, z, w) = (100, 0, 0, 50)$.

   (a) **(*)** Calcula la tabla del símplex correspondiente a las materias primas que estaba usando la empresa hasta ahora.

   (b) **(*)** Resuelve el problema. Si ahora la empresa tiene a su disposición las cuatro materias primas, ¿le convendrá usar la segunda y la tercera para reducir costes?, ¿en qué cantidades?

   (c) **(*)** Razona si la solución es de vértice, de arista finita o de arista infinita. ¿Y si el objetivo fuera maximizar? (Para este segundo caso parte de la primera tabla.)

   (d) **(0.2 ptos.)** Comprueba que la solución óptima satisface la definición de solución factible básica.

   (e) **(0.2 ptos.)** Calcula los precios duales. ¿Qué coste tendría para la empresa producir al menos 210 u.p.?

   (f) **(0.1 ptos.)** Calcula e interpreta el coste reducido de la variable z.

   (g) **(0.2 ptos.)** ¿Qué cantidades convendría emplear de cada materia prima si, en lugar de 7 horas, la tercera necesitara únicamente 2 horas de procesado en la fase 1?

   (h) **(0.1 ptos.)** Razona si, en las condiciones del apartado anterior, la solución del problema es de vértice, de arista finita o de arista infinita. ¿Le supondría algún coste adicional emplear la tercera materia prima?

2. Considera el problema siguiente:

$$\begin{array}{rl} \text{Opt.} & x^2 - 100x + 8y + 6z \\ \text{s.a} & 2y^2 + 3z^2 \leq 11 \end{array}$$

   (a) **(*)** Estudia si los puntos $(x, y, z) = (50, -2, 1), (50, -2, -1)$ son de Kuhn y Tucker con objetivo de maximizar o de minimizar.

   (b) **(0.1 ptos.)** Estudia se puede aplicar al problema el teorema de Weierstrass. Indica todas las hipótesis requeridas y razona si se cumple o no cada una de ellas.

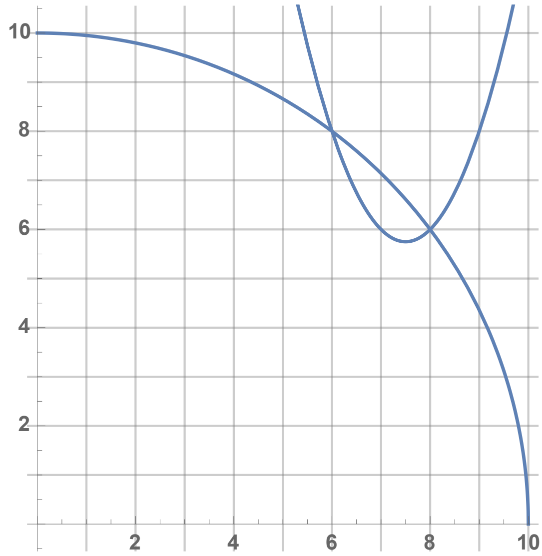
   (c) **(*)** Resuelve el problema con objetivo de minimizar.

   (d) **(0.1 ptos.)** ¿Cuál sería aproximadamente el valor óptimo de la función objetivo (con objetivo de minimizar) si la restricción fuera $2y^2 + 3z^2 \leq 14$?

   (e) **(0.5 ptos.)** Resuelve el problema con objetivo de maximizar.

3. **(0.2 ptos.)** Resuelve gráficamente (representando en la figura todo lo necesario para justificar que el punto que señales es la solución óptima):

$$\begin{array}{ll} \text{Max.} & 3x + y \\ \text{s.a} & x^2 + y^2 \leq 100 \\ & y - x^2 + 15x \leq 62 \\ & 2x - y \geq 4 \\ & x,\, y \geq 0 \end{array}$$



4. Responde razonadamente a las preguntas siguientes:

   (a) **(0.1 ptos.)** ¿Podría suceder que la solución óptima de un problema no lineal no fuera un punto de Kuhn y Tucker?

   (b) **(0.1 ptos.)** ¿Podría suceder que una solución óptima proporcionada por el método símplex fuera un óptimo local, pero no un óptimo global?

   (c) **(0.1 ptos.)** ¿Qué condiciones debe cumplir una tabla del símplex para ser correcta? Si una tabla las cumple, ¿puede corresponder a un problema infactible? ¿Y a un problema no acotado?

MATEMÁTICAS II   Grupo GF   Final (5 ptos.)

APELLIDOS: ______________________________ NOMBRE____________________

Responde razonadamente a las preguntas siguientes. Todas las respuestas tienen que basarse en los métodos generales estudiados en la asignatura, y no en cálculos particulares que aprovechen la sencillez de los problemas.

1. Una empresa elabora un producto a partir de cuatro materias primas. El problema siguiente minimiza el coste de producción garantizando una producción mínima de 200 u.p. y de modo que el procesado de las materias primas en dos fases de producción no supere las horas de mano de obra disponibles:

$$\begin{array}{rrl} \text{Min.} & 9x + 8y + 25z + 15w & \text{coste} \\ \text{s.a} & x + 2y + 5z + 2w \geq 200 & \text{producción} \\ & y + 7z + \ \ w \leq \ \ 50 & \text{horas fase 1} \\ & 5y + 2z + 3w \leq 500 & \text{horas fase 2} \\ & x,\, y,\, z,\, w \geq 0 & \end{array}$$

Hasta ahora, la empresa podía disponer únicamente de las materias primas primera y cuarta, y las usaba en cantidades $(x, y, z, w) = (100, 0, 0, 50)$.

(a) **(0.3 ptos.)** Calcula la tabla del símplex correspondiente a las materias primas que estaba usando la empresa hasta ahora.

(b) **(0.4 ptos.)** Resuelve el problema. Si ahora la empresa tiene a su disposición las cuatro materias primas, ¿le convendrá usar la segunda y la tercera para reducir costes?, ¿en qué cantidades?

(c) **(0.2 ptos.)** Razona si la solución es de vértice, de arista finita o de arista infinita. ¿Y si el objetivo fuera maximizar? (Para este segundo caso parte de la primera tabla.)

(d) **(0.2 ptos.)** Comprueba que la solución óptima satisface la definición de solución factible básica.

(e) **(0.2 ptos.)** Calcula los precios duales. ¿Qué coste tendría para la empresa producir al menos 210 u.p.?

(f) **(0.2 ptos.)** Calcula e interpreta el coste reducido de la variable z.

(g) **(0.3 ptos.)** ¿Qué cantidades convendría emplear de cada materia prima si, en lugar de 7 horas, la tercera necesitara únicamente 2 horas de procesado en la fase 1?

(h) **(0.2 ptos.)** Razona si, en las condiciones del apartado anterior, la solución del problema es de vértice, de arista finita o de arista infinita. ¿Le supondría algún coste adicional emplear la tercera materia prima?

2. Considera el problema siguiente:

$$\begin{array}{rl} \text{Opt.} & x^2 - 100x + 8y + 6z \\ \text{s.a} & 2y^2 + 3z^2 \leq 11 \end{array}$$

(a) **(0.5 ptos.)** Estudia si los puntos $(x, y, z) = (50, -2, 1), (50, -2, -1)$ son de Kuhn y Tucker con objetivo de maximizar o de minimizar.

(b) **(0.2 ptos.)** Estudia se puede aplicar al problema el teorema de Weierstrass. Indica todas las hipótesis requeridas y razona si se cumple o no cada una de ellas.

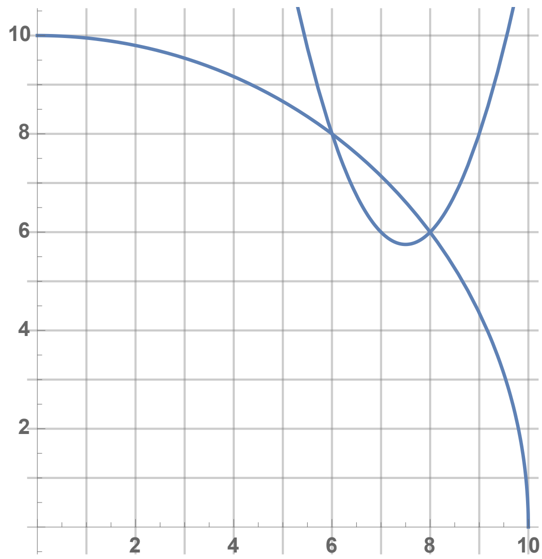
(c) **(0.5 ptos.)** Resuelve el problema con objetivo de minimizar.

(d) **(0.2 ptos.)** ¿Cuál sería aproximadamente el valor óptimo de la función objetivo (con objetivo de minimizar) si la restricción fuera $2y^2 + 3z^2 \leq 14$?

(e) **(0.6 ptos.)** Resuelve el problema con objetivo de maximizar.

3. **(0.5 ptos.)** Resuelve gráficamente (representando en la figura todo lo necesario para justificar que el punto que señales es la solución óptima):

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & 3x + y \\ \text{s.a} & x^2 + y^2 \leq 100 \\ & y - x^2 + 15x \leq 62 \\ & 2x - y \geq 4 \\ & x,\, y \geq 0 \end{array}$$



4. Responde razonadamente a las preguntas siguientes:

   (a) **(0.1 ptos.)** ¿Podría suceder que la solución óptima de un problema no lineal no fuera un punto de Kuhn y Tucker?

   (b) **(0.2 ptos.)** ¿Podría suceder que una solución óptima proporcionada por el método símplex fuera un óptimo local, pero no un óptimo global?

   (c) **(0.2 ptos.)** ¿Qué condiciones debe cumplir una tabla del símplex para ser correcta? Si una tabla las cumple, ¿puede corresponder a un problema infactible? ¿Y a un problema no acotado?

APELLIDOS: ______________________ NOMBRE______________________

1. Modeliza el problema siguiente. Expresa la función objetivo y las restricciones con la notación matemática usual (no con la notación de LINGO):

   Una multinacional está planeando crear nuevas fábricas en tres ciudades españolas en las que fabricará tres productos. La tabla siguiente muestra la producción diaria que tendrá cada fábrica en función de los recursos disponibles en cada ciudad y el beneficio que obtiene con cada producto:

	C_1	C_2	C_3	beneficio
Producto 1	100	180	200	200
Producto 2	90	0	0	120
Producto 3	80	0	190	70

   Por otro lado, se estima que cada fábrica tendrá unos costes diarios de funcionamiento de $40\,000$ € en la ciudad C_1, de $38\,000$ en C_2 y de $42\,000$ en C_3. La empresa quiere alcanzar una producción diaria de al menos $1\,800$ unidades del primer producto, 400 del segundo y 500 del tercero, pero un análisis de la demanda recomienda producir al menos el doble del primer producto que de los otros dos conjuntamente.

   Por otra parte, en cada ciudad tiene la posibilidad de dotar a sus fábricas de un sistema de producción más avanzado, lo cual le permitiría aumentar en un 15% la capacidad de producción de cada producto, pero los costes de funcionamiento en la ciudad correspondiente aumentarían en un 10%.

   El presupuesto inicial de la empresa no le permite construir en total más de 20 nuevas fábricas, de las cuales, como máximo 10 podrían disponer del sistema de producción avanzado. Además, para que este sistema sea rentable en una ciudad, hace falta que en ella se instalen al menos 5 fábricas.

   Determina cuántas fábricas conviene instalar en cada ciudad y en qué ciudades conviene emplear el sistema de producción avanzado para maximizar los beneficios diarios de la empresa.

Escribe el modelo en la plantilla de la hoja adjunta. Tu respuesta se valorará hasta un máximo de 0.5. Si posteriormente lo resuelves con LINGO sin conjuntos la nota se multiplicará por un factor máximo de 2 (con lo que puedes obtener hasta 1 punto), y si lo resuelves usando conjuntos se multiplicará por un factor máximo de 4 (con lo que puedes conseguir hasta 2 puntos). Si tu solución en LINGO no se corresponde con la plantilla, el modelo que se evaluará será el de la plantilla.

APELLIDOS: ____ NOMBRE______________________

Definición de las variables:

Función objetivo (con su interpretación):

Restricción 1 (con la interpretación de cada miembro):

Restricción 2 (con la interpretación de cada miembro):

Restricción 3 (con la interpretación de cada miembro):

Restricción 4 (con la interpretación de cada miembro):

Restricción 5 (con la interpretación de cada miembro):

Restricción 6 (con la interpretación de cada miembro):

Restricción 7 (con la interpretación de cada miembro):

Restricción 8 (con la interpretación de cada miembro):

Restricción 9 (con la interpretación de cada miembro):

Restricción 10 (con la interpretación de cada miembro):

Restricción 11 (con la interpretación de cada miembro):

Restricción 12 (con la interpretación de cada miembro):

Condiciones de no negatividad, integridad, etc.

MATEMÁTICAS II   Grupo GF   Recuperación EC

APELLIDOS: ______________________ NOMBRE______________

La compañía de tostado de café Godofredo Donizetti comercializa cuatro tipos de café: Godofredo casa, Godofredo espresso, Godofredo intenso y Godofredo molido. En estos momentos está llevando a cabo una campaña para introducirse en un nuevo mercado y quiere producir en poco tiempo la mayor cantidad de producto posible. El problema siguiente determina las cantidades a emplear de las cuatro clases de café en grano que se usan para fabricar cada uno de sus productos, tratando de conseguir la máxima producción total diaria garantizando al menos 120 000 u.m. de beneficio sin que el coste de producción exceda el presupuesto disponible, teniendo en cuenta que la disponibilidad de grano para los dos primeros productos está limitada temporalmente y que los recursos para procesar tres de las clases de grano están limitados a 160 horas diarias:

$$
\begin{array}{rll}
\text{Max.} & 0.75GC + 0.85GE + 0.6GI + 0.45GM & \text{Producción (kg)} \\
\text{s.a} & 7GC + 9GE + 8GI + 3GM \geq 120\,000 & \text{Beneficio} \\
& 6GC + 12GE + 6GI + 5GM \leq 110\,000 & \text{Coste} \\
& GC + GE \leq 14\,000 & \text{Disponibilidad} \\
& 0.02GE + 0.05GI + 0.03GM \leq 160 & \text{Horas} \\
& GC,\ GE,\ GI,\ GM \geq 0 &
\end{array}
$$

Variable	Value	Reduced Cost
GC	14000.00	0.000000
GE	0.000000	0.200000
GI	2000.000	0.000000
GM	2000.000	0.000000

Row	Slack or Surplus	Dual Price
PRODUCCION	12600.00	1.000000
BENEFICIO	0.000000	-0.0500000
COSTE	4000.000	0.000000
DISPONIBILIDAD	0.000000	1.100000
HORAS	0.000000	20.00000

Objective Coefficient Ranges:

Variable	Current Coefficient	Allowable Increase	Allowable Decrease
GC	0.7500000	INFINITY	0.2000000
GE	0.8500000	0.2000000	INFINITY
GI	0.6000000	0.1500000	INFINITY
GM	0.4500000	INFINITY	0.0900000

Righthand Side Ranges:

Row	Current RHS	Allowable Increase	Allowable Decrease
BENEFICIO	120000.0	3600.000	5142.857
COSTE	110000.0	INFINITY	4000.000
DISPONIBILIDAD	14000.00	349.5146	514.2857
HORAS	160.0000	16.36364	22.50000

Responde a las preguntas siguientes. Excepto en la 1, indica claramente:

A) Dato o datos que usas en la respuesta y su interpretación general (sin tener en cuenta la pregunta o el contexto del problema).

B) Interpretación del dato o los datos en el contexto del problema (sin usar palabras técnicas como "función objetivo", "término independiente", "holgura", etc. y sin tener en cuenta la pregunta).

C) (Si procede), respuesta razonada a la pregunta.

La parte A) no puntúa; la parte B) sólo puntuará si A) está razonablemente bien; la parte C) sólo puntuará si la parte B) está razonablemente bien.

1. **(0.2 ptos.)** Indica brevemente qué es el miembro izquierdo y el miembro derecho de cada restricción:

   Beneficio: ______________________ $\geq$ ______________________
   Coste: ______________________ $\leq$ ______________________
   Existencias: ______________________ $\leq$ ______________________
   Horas: ______________________ $\leq$ ______________________

2. **(0.4 ptos.)** ¿Qué sería preferible en cuanto a la producción, conseguir 100 kg más diarios del tipo de grano que requieren los productos GODOFREDO CASA y GODOFREDO ESPRESSO o contratar 5 horas extra diarias de mano de obra?

3. **(0.4 ptos.)** GODOFREDO DONIZETTI se está planteando comprar 100 kg diarios del grano usado para la producción de GODOFREDO ESPRESSO. ¿En cuánto aumentaría con ello la producción total?

4. **(0.2 ptos.)** Si LINGO hubiera dado:

```
      Row    Slack or Surplus      Dual Price
BENEFICIO        10.00000           0.000000
    HORAS        20.00000           0.000000
```

   ¿cómo se interpretarían el 10 y el 20?

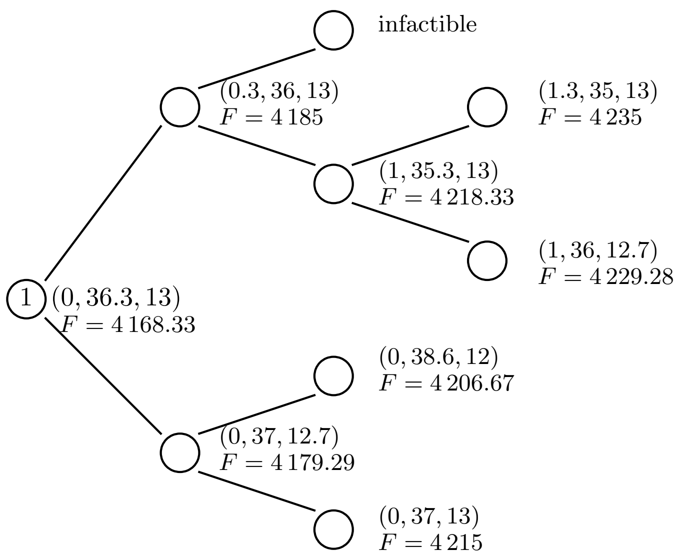
5. **(0.4 ptos.)** ¿Qué aumento de beneficio conseguiría GODOFREDO DONIZETTI si contara con 170 horas diarias de mano de obra? ¿Cuántos kg de grano para GODOFREDO CASA y GODOFREDO ESPRESSO convendría usar?

6. **(0.4 ptos.)** GODOFREDO DONIZETTI se está planteando sustituir el producto GODOFREDO INTENSO por otra variedad más concentrada, por lo que cada kg de grano daría lugar a menos kg de producto. ¿Convendría entonces producir más cantidad de los otros productos? ¿La producción total aumentaría o disminuiría?

MATEMÁTICAS II   Grupo GF   Recuperación EC

APELLIDOS: ______________________________ NOMBRE__________________

1. Supón que al resolver un problema con variables enteras (x, y, z) has obtenido el árbol siguiente:



(a) **(0.1 ptos.)** Numera los nodos $1, 2a, 2b, 3a, 3b, 4a, 4b, \ldots$ en el orden preciso que exige el método de ramificación y acotación. Pon sobre cada rama la restricción añadida.

(b) **(0.2 ptos.)** Alguien te advierte de que has ramificado un nodo que no tendrías que haber ramificado. Encuéntralo y tacha los dos problemas que sobran. Razona por qué.

(c) **(0.2 ptos.)** Razona si conocemos ya la solución óptima o si habría que seguir ramificando. De los nodos no ramificados (quitando los dos que sobran), di cuáles están ya cerrados (explicando por qué) y cuales están pendientes de ramificación, si es que hay alguno pendiente.

2. **(0.3 ptos.)** Añade $\leq, \geq, =$ a la definición del conjunto siguiente para que sea convexo (justifica la respuesta):

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3x + y = 8,\ 10x + 15y + xy - 5x^2 - y^2 \ \boxed{}\ 10\}$$

3. **(0.2 ptos.)** Dado el problema:

$$\begin{array}{rl} \text{Min.} & x + 2y + z \\ \text{s.a} & x + 4y + z \geq 2 \\ & 2x + 2y + z = 6 \\ & x,\ y,\ z \geq 0 \end{array}$$

Determina si tiene una solución factible básica con variables básicas x, y, z, ¿y con variables básicas y, z?