ALGEBRA DEL MODELO LINEAL CON COSTES DE TRANSPORTE CUADRÁTICA

1) Obtención de las demandas:

Tenemos dos incognitas (x_1 y x_2), por lo tanto necesitamos dos ecuaciones relacionando dos ecuaciones relacionando x_1 y x_2:

1. Sabemos que: $x_1 + x_2 = L - a - b$ (1)
2. Usando la condición de consumidor indiferente:

$$U_{x,1} = U_{x,2}$$
$$r - p_1 - tx_1^2 = r - p_2 - tx_2^2$$
$$p_1 + tx_1^2 = p_2 + tx_2^2$$
$$p_1 - p_2 = t\left(x_2^2 - x_1^2\right)$$
$$p_1 - p_2 = t\left(x_2 - x_1\right)\left(x_2 + x_1\right)$$
$$p_1 - p_2 = \left(L - a - b\right)t\left(x_2 - x_1\right)$$
$$\frac{p_1 - p_2}{\left(L - a - b\right)t} = \left(x_2 - x_1\right) \quad (2)$$

El siguiente paso es resolver el sistema de ecuaciones formado por (1) y (2) y obtener x_1 y x_2. Resolvemos por reducción:

$$x_1 + x_2 = L - a - b$$
$$\left(x_2 - x_1\right) = \frac{p_1 - p_2}{\left(L - a - b\right)t}$$
$$2x_2 = L - a - b + \frac{p_1 - p_2}{\left(L - a - b\right)t}$$
$$x_2 = \frac{L - a - b}{2} + \frac{p_1 - p_2}{2t\left(L - a - b\right)}$$

y

$$x_1 = \left(L - a - b\right) - x_2 = \left(L - a - b\right) - \left[\frac{L - a - b}{2} + \frac{p_1 - p_2}{2t\left(L - a - b\right)}\right] =$$
$$= \frac{L - a - b}{2} + \frac{p_2 - p_1}{2t\left(L - a - b\right)}$$

Por lo tanto,

$$d_1 = a + x_1 = a + \frac{L - a - b}{2} + \frac{p_2 - p_1}{2t\left(L - a - b\right)}$$

$$d_2 = b + x_2 = b + \frac{L-a-b}{2} + \frac{p_1 - p_2}{2t\left(L-a-b\right)}$$

2) Obtención del equilibrio de Nash en precios:

a) Resolvemos el problema de maximización de la empresa 1:

$$\underset{p_1}{Max}\ \pi_1 = \left(p_1 - c\right)d_1 = \left(p_1 - c\right)\left[a + \frac{L-a-b}{2} + \frac{p_2 - p_1}{2t\left(L-a-b\right)}\right]$$

$$F.O.C.\ \frac{d\pi_1}{dp_1} = a + \frac{L-a-b}{2} + \frac{p_2 - p_1}{2t\left(L-a-b\right)} - \frac{1}{2t\left(L-a-b\right)}\left(p_1 - c\right) = 0$$

$$a + \frac{L-a-b}{2} + \frac{p_2 - 2p_1 + c}{2t\left(L-a-b\right)} = 0$$

$$\frac{\left(2a + L - a - b\right)t\left(L-a-b\right)}{2t\left(L-a-b\right)} + \frac{p_2 - 2p_1 + c}{2t\left(L-a-b\right)} = 0$$

$$\left(L + a - b\right)t\left(L-a-b\right) + p_2 - 2p_1 + c = 0$$

$$p_1^*\left(p_2\right) = \frac{\left(L+a-b\right)t\left(L-a-b\right)}{2} + \frac{p_2}{2} + \frac{c}{2}$$ → Función de reacción de Empresa 1

b) Resolvemos el problema de maximización de la empresa 2:

$$\underset{p_2}{Max}\ \pi_1 = \left(p_2 - c\right)d_2 = \left(p_2 - c\right)\left[b + \frac{L-a-b}{2} + \frac{p_1 - p_2}{2t\left(L-a-b\right)}\right]$$

$$F.O.C.\ \frac{d\pi_2}{dp_2} = b + \frac{L-a-b}{2} + \frac{p_1 - p_2}{2t\left(L-a-b\right)} - \frac{1}{2t\left(L-a-b\right)}\left(p_2 - c\right) = 0$$

$$b + \frac{L-a-b}{2} + \frac{p_1 - 2p_2 + c}{2t\left(L-a-b\right)} = 0$$

$$\frac{\left(2b + L - a - b\right)t\left(L-a-b\right)}{2t\left(L-a-b\right)} + \frac{p_1 - 2p_2 + c}{2t\left(L-a-b\right)} = 0$$

$$\left(L - a + b\right)t\left(L-a-b\right) + p_1 - 2p_2 + c = 0$$

$$p_2^*\left(p_1\right) = \frac{\left(L-a+b\right)t\left(L-a-b\right)}{2} + \frac{p_1}{2} + \frac{c}{2}$$ → Función de reacción de Empresa 2

c) Resolvemos el sistema de ecuaciones formado por las dos funciones de reacción: sustituimos p_2 by $p_2^*\left(p_1\right)$ en la función de reacción de la empresa 1.

$$p_1^*\left(p_2\right) = \frac{\left(L+a-b\right)t\left(L-a-b\right)}{2} + \left[\frac{\left(L-a+b\right)t\left(L-a-b\right)}{4} + \frac{p_1}{4} + \frac{c}{4}\right] + \frac{c}{2}$$

$$p_1 = \frac{t(L-a-b)}{2}\left[\frac{(L+a-b)}{2} + \frac{(L-a+b)}{4}\right] + \frac{p_1}{4} + \frac{3c}{4}$$

$$p_1\left(1-\frac{1}{4}\right) = t(L-a-b)\left[\frac{2L+2a-2b+L-a+b}{4}\right] + \frac{3}{4}c$$

$$\frac{3}{4}p_1 = t(L-a-b)\left[\frac{3L+a-b}{4}\right] + \frac{3}{4}c$$

$$p_1 = t(L-a-b)\left[\frac{3L+a-b}{3}\right] + c \rightarrow p_1 = t(L-a-b)\left[L+\frac{a-b}{3}\right] + c$$

Y ahora, sustituyendo en la function de reacción de la empresa 2 obtenemos p_2:

$$p_2^*(p_1) = \frac{(L-a+b)t(L-a-b)}{2} + \frac{t(L-a-b)\left[L+\frac{a-b}{3}\right]+c}{2} + \frac{c}{2}$$

$$p_2 = \frac{(L-a+b)t(L-a-b)}{2} + t(L-a-b)\left[\frac{3L+a-b}{6}\right] + \frac{c}{2} + \frac{c}{2}$$

$$p_2 = t(L-a-b)\left[\frac{(L-a+b)}{2} + \frac{3L+a-b}{6}\right] + c$$

$$p_2 = t(L-a-b)\left[\frac{3L-3a+3b}{6} + \frac{3L+a-b}{6}\right] + c$$

$$p_2 = t(L-a-b)\left[\frac{6L+2b-2a}{6}\right] + c \rightarrow p_2 = t(L-a-b)\left[L+\frac{b-a}{3}\right] + c$$