Cuadrados mágicos

En los ejercicios de Innovamat de 1º ESO hay un curioso ejercicio de cuadrados mágicos bastante particular y cuya resolución en absoluto es trivial. Como los problemas peculiares son muy motivadores lo resolví y lo extendí a los problemas que se hacen de matrices y determinantes en 2º de bachiller. El enunciado del problema dice así:

Construir un cuadrado mágico con los números: 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27.

Como ya es sabido los cuadrados mágicos son unos cuadrados en los que nueve números se disponen en 3 filas y tres columnas con la particularidad de que si sumamos los números que aparecen en las filas, las columnas y las diagonales nos ha de dar siempre los mismo, por ejemplo,

3	13	2
5	6	7
10	-1	9

en donde claramente vemos que si sumamos filas, columnas y diagonales el resultado es siempre 18. Construir un cuadrado mágico es relativamente sencillo. El número más importante es el que está en el centro del cuadrado y el resultado de las sumas es igual al número central multiplicado por 3. Por cierto, la demostración de esto último no tiene nada de trivial. Con ese número central y otros dos más que no estén en una línea se pueden construir infinidad de cuadrados mágicos cuya solución siempre es única.

Por la propia construcción de los cuadrados vemos que hay varias propiedades.

1. Si a todos los números les *sumamos* una misma cantidad el cuadrado resultante también es mágico.

2. Si a todos los números los *multiplicamos* por una misma cantidad el cuadrado resultante también es mágico.

Las propiedades anteriores son de muy fácil demostración sin más que darnos cuenta de las propiedades del triángulo mágico.

Lo que me sorprendió del problema que se planteaba en Innovamat es que el cuadrado mágico se pudiera construir con números consecutivos, como el 19, 20, 21... . Como operar con esos números puede resultar algo engorroso, haciendo uso de las propiedades antes citadas, si a todos los números les resto 18, está claro que en principio con los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9 también debería poderse construir un cuadrado mágico. Así que había que ver las posibilidades que se podían obtener con esos números.

Con nueve números las posibles ordenaciones en un cuadrado de $3{\times}3$ ascienden nada menos que a 504, así que hay muchas posibilidades para ir probando, con lo que había que pensar una estrategia diferente para encontrar la solución. La suma $1+2+3+\cdots 9 = 45$ y como el resultado del cuadrado es el número central multiplicado por 3, un posible valor para la suma de los números sería $45/3 = 15$, con lo que el número central podría ser $15/3 = 5$. La intuición nos dice que números pequeños y números grandes no pueden ir en el centro ya que superarían con facilidad la suma, aunque esa intuición tampoco es en principio evidente.

Tras probar varias posibilidades una solución es

8	3	4
1	5	9
6	7	2

y por las propiedades de los cuadrados mágicos si sumamos a todos los números 18 tendremos

26	21	22
19	23	27
24	25	20

Este cuadrado es mágico y contiene los números 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26 y 27, que es la que nos pedían en el ejercicio de Innovamat. La suma de filas, columnas y diagonales es 69. El resultado es obviamente 69 porque recordemos que el cuadrado con el 5 al centro debía sumar 15 y como hemos sumado 18 a cada elemento el resultado del nuevo cuadrado será lógicamente $15 + 18 \times 3 = 69$.

Lo bueno del problema es que se puede generalizar para cualesquiera números consecutivos y podríamos escribir de manera genérica

$n+8$	$n+3$	$n+4$
$n+1$	$n+5$	$n+9$
$n+6$	$n+7$	$n+2$

donde $n \in \mathbb{Z}$. El resultado de sumar filas, columnas y diagonales será ahora $3n+15$.

La disposición de los elementos en los cuadrados recuerda obviamente a una matriz 3×3, con lo que si hacemos la traspuesta de la matriz de los números del cuadrado mágico vuelve a aparecer un cuadrado mágico.

El cuadrado mágico se puede poner en forma matricial como

$$A = \begin{pmatrix} n+8 & n+3 & n+4 \\ n+1 & n+5 & n+9 \\ n+6 & n+7 & n+2 \end{pmatrix} \tag{1}$$

cuyo determinate resulta ser

$$|A| = -72n - 360 \tag{2}$$

Ahora bien recordemos que la suma por filas, columnas y diagonales del cuadrado daba

$$S = 3n + 15 \tag{3}$$

por lo que si ahora dividimos el resultado de la ecuación (2) entre la (3) hallamos una curiosa relación entre el valor del determinante y la suma de los elementos

$$\frac{|A|}{S} = \frac{-72n - 360}{3n + 15} = -24 \tag{4}$$

Por lo tanto hemos llegado a una curiosa propiedad, cuya utilidad aún no tenemos muy clara, y que nos permite calcular el determinante de los elementos de una matriz 3×3 que sean números consecutivos y que se dispongan en forma de cuadrado mágico. Para hallar el determinante de una matriz de estas características bastaría sumar los elementos de la diagonal y multiplicarlos por -24. Como simple comprobación tomemos la matriz con los números del problemas propuesto en Innovamat,

$$A = \begin{pmatrix} 26 & 21 & 22 \\ 19 & 23 & 27 \\ 24 & 25 & 20 \end{pmatrix}$$

En este caso podemos comprobar que $|A| = -1656$ y recordando que $S = 69$ vemos que se cumple la propiedad de la ecuación (4)

$$\frac{|A|}{S} = \frac{-1656}{69} = -24$$

Como ejercicio para el lector dejamos que demuestre por inducción las fórmulas (2) y (3). Hay que ver lo que puede dar de sí un problema de Innovamat para 1º ESO, cuya resolución a base de prueba y error para un alumno no es fácil en absoluto.