

Derivada de una función tangente compuesta

Queremos derivar la función compuesta

$$f(x) = \tan \left(1 + \frac{1}{1 + \tan \left(1 + \frac{1}{x} \right)} \right) \quad (1)$$

Sabemos que la derivada de la tangente de una función $u(x)$ es, usando la regla de la cadena

$$(\tan u)' = u' \sec^2 u \quad (2)$$

En nuestro caso $u(x) = 1 + \frac{1}{1 + \tan \left(1 + \frac{1}{x} \right)}$

con lo que tendremos que hacer su derivada de nuevo aplicando la regla del cociente y la de la tangente

$$u'(x) = \frac{-\left(1 + \frac{1}{x}\right)' \sec^2 \left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\left(1 + \tan \left(1 + \frac{1}{x}\right)\right)^2} \quad (3)$$

y en la fórmula (3) fácilmente se ve que

$$-\left(1 + \frac{1}{x}\right)' = -\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{x^2} \quad (4)$$

Así pues la derivada $u'(x)$ queda

$$u'(x) = \frac{\sec^2 \left(1 + \frac{1}{x}\right)}{x^2 \left(1 + \tan \left(1 + \frac{1}{x}\right)\right)^2} \quad (5)$$

y sustituyendo todo en (2) nos queda al final la derivada

$$f'(x) = \frac{\sec^2 \left(1 + \frac{1}{x}\right) \sec^2 \left(1 + \frac{1}{1 + \tan \left(1 + \frac{1}{x}\right)}\right)}{x^2 \left(1 + \tan \left(1 + \frac{1}{x}\right)\right)^2} \quad (6)$$