Ejercicios de derivación

1. Polinomios y potencias de x

1) $f(x) = 5 - 2\sqrt{3}$
2) $f(x) = -\dfrac{x}{4}$
3) $f(x) = -2x + \pi$
4) $f(x) = \dfrac{6x+1}{14} - \dfrac{9-4x}{7}$
5) $f(x) = 4x^2 - 3x + 1/2$
6) $f(x) = \sqrt{5}\,x^3 - 3x^2 + \dfrac{x}{2}$
7) $f(x) = 2x^4 + x^2 - 6x + \sqrt{2}$
8) $f(x) = -5x^5 + 10x^3 - \dfrac{6x^2}{5} + \dfrac{x}{3} - \dfrac{1}{2}$
9) $f(x) = \dfrac{x^3+2}{3}$
10) $f(x) = \dfrac{1}{3x^2}$
11) $f(x) = \dfrac{5}{x^5}$
12) $f(x) = \dfrac{5}{x^5} + \dfrac{3}{x^2}$

2. Potencias de polinomios

1) $f(x) = (x^2 + 3x - 2)^4$
2) $f(x) = (2x-3)^5$
3) $f(x) = (2x^5 - 3x^4)^3$
4) $f(x) = \dfrac{4}{(2x-1)^2}$
5) $f(x) = (6-2x)^{-3}$

3. Productos y cocientes

1) $f(x) = (x+4)(2x^2-2)$
2) $f(x) = (5x^2-3)(x^2+x+4)$
3) $f(x) = -\dfrac{1}{x^2+2}$
4) $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$
5) $f(x) = \dfrac{4x^3+9x^2}{3x+5}$
6) $f(x) = \dfrac{3x}{(2x-1)^2}$
7) $f(x) = \dfrac{x}{x+1}\cdot(3-x)$

4. Raíces

1) $f(x) = \sqrt{x}$
2) $f(x) = \sqrt{16x+1}$
3) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$
4) $f(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{x}}$
5) $f(x) = \sqrt[3]{x^2} + \sqrt{x}$
6) $f(x) = \sqrt{\dfrac{-10x}{x^4-2}} + 6x^2 - 12$
7) $f(x) = \sqrt[3]{-x^2+5}$
8) $f(x) = \sqrt{x^2-2x+3}$
9) $f(x) = \sqrt[4]{x^5 - x^3 - 2}$
10) $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x^2+1}{x^2-1}}$

5. Exponenciales

1) $f(x) = \dfrac{e^{2x}}{3}$
2) $f(x) = 10^{\sqrt{x}}$
3) $f(x) = e^{3-x^2}$
4) $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$
5) $f(x) = 3^{2x^2}\sqrt{x}$
6) $f(x) = e^{2x}/x^2$

6. Logaritmos

1) $f(x) = \mathrm{Ln}\,(2x^4 - x^3 + 3x^2 - 3x)$
2) $f(x) = \mathrm{Ln}\left[(x-3)(x+3)\right]$
3) $f(x) = \mathrm{Ln}\sqrt{x(1-x)}$
4) $f(x) = \log(3x+2) - \log(3x-2)$
5) $f(x) = (\log \mathrm{e}^x + \log 3^x)/\sqrt{5}$
6) $f(x) = \mathrm{e}^{4x+9} + \mathrm{Ln}\ (4x+9)$
7) $f(x) = \log\left(\log\left(1/x\right)\right)$
8) $f(x) = \mathrm{Ln}\left(3x\right)^{-1} + 7x^2$
9) $f(x) = 6(\mathrm{Ln}\,x)^2 - 10\,\mathrm{Ln}\,x + 2$
10) $f(x) = \mathrm{Ln}\sqrt[3]{\dfrac{3x}{x+2}}$
11) $f(x) = \mathrm{Ln}\sqrt{\dfrac{10x+4}{10x-4}}$
12) $f(x) = \mathrm{Ln}\left(\dfrac{\mathrm{e}^x+1}{\mathrm{e}^x-1}\right)$
13) $f(x) = \sqrt[100]{\mathrm{Ln}\,x^2}$
14) $f(x) = \log\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$

7. Funciones trigonométricas

1) $f(x) = \sin\dfrac{x}{2}$
2) $f(x) = \sin(-5x^2+10)$
3) $f(x) = \sin^2(x^2+3x-1)$
4) $f(x) = \dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}$
5) $f(x) = \cos(7-2x)$
6) $f(x) = \cos\sqrt{x+1}$
7) $f(x) = \cos(\cos x)$
8) $f(x) = \cos^3\sqrt{x}$
9) $f(x) = \sec(5x+2)$
10) $f(x) = 3\tan 2x$
11) $f(x) = \tan(3/x) + \tan(x/3)$
12) $f(x) = \sqrt[3]{\sin x}$
13) $f(x) = \sin^3 3x$
14) $f(x) = \cot(3-2x)$
15) $f(x) = \cos\dfrac{x+1}{x-1}$
16) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}}$
17) $f(x) = \mathrm{Ln}\cos 2x$
18) $f(x) = \mathrm{Ln}\tan(1-x)$
19) $f(x) = \mathrm{Ln}\sqrt{\dfrac{1+\tan x}{1-\tan x}}$
20) $f(x) = \tan\sin\sqrt{5x}$
21) $f(x) = \sin^2\cos 2x$
22) $f(x) = \mathrm{cosec}\tan x$

8. Funciones trigonométricas inversas

1) $f(x) = \arcsin(1-2x^2)$
2) $f(x) = \arcsin \mathrm{e}^x$
3) $f(x) = \arcsin\sqrt{x^2-4}$
4) $f(x) = (1-\arccos x)(1+\arccos x)$
5) $f(x) = \arccos\left(x\sqrt{x}\right)$
6) $f(x) = \arctan\sqrt{x}$
7) $f(x) = \arctan\dfrac{1+x}{1-x}$

9. Función elevada a otra función

1) $f(x) = x^{x^2+7}$
2) $f(x) = (6x-1)^{4x^2}$
3) $f(x) = \arccos\ (x^{2x} + x^x + 5)$
4) $f(x) = (4x^2-1)^{\mathrm{Ln}\,x}$
5) $f(x) = (\sin x)^{\cos x}$
6) $f(x) = \left[\arctan\ (x+1)\right]^{x+1}$
7) $f(x) = \left(\mathrm{Ln}\,x/2x\right)^{\tan x}$
8) $f(x) = \left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x+1}$
9) $f(x) = \sqrt[x^2]{\arccos x}$
10) $f(x) = \arctan\ (x+2)^{x-2}$
11) $f(x) = \log_{\sin x} x$

Soluciones a los ejercicios de derivación

1. Polinomios y potencias de x

1) $f(x)=5-2\sqrt{3}$

► La función es constante, no depende de x. Por lo tanto su derivada es cero. $f'(x)=0$

2) $f(x)=-\dfrac{x}{4}$

► Podemos reescribir la función así: $f(x)=-\dfrac{x}{4}=-\dfrac{1}{4}\cdot x$ Por ello: $f'(x)=-\dfrac{1}{4}$

3) $f(x)=-2x+\pi$

► π es una constante y no tiene derivada. Por ello: $f'(x)=-2$

4) $f(x)=\dfrac{6x+1}{14}-\dfrac{9-4x}{7}$

► Podemos reescribir la función así: $f(x)=\dfrac{6x+1}{14}-\dfrac{9-4x}{7}=\dfrac{1}{14}(6x+1)-\dfrac{1}{7}(9-4x)$

Por ello: $f'(x)=\dfrac{1}{14}\cdot 6-\dfrac{1}{7}\cdot(-4)=\dfrac{3}{7}+\dfrac{4}{7}=1$

5) $f(x)=4x^2-3x+1/2$

► $f'(x)=4\cdot 2x-3\cdot 1=8x-3$

6) $f(x)=\sqrt{5}\,x^3-3x^2+\dfrac{x}{2}$

► $f'(x)=\sqrt{5}\cdot 3x^2-3\cdot 2x+\dfrac{1}{2}\cdot 1=3\sqrt{5}\,x^2-6x+\dfrac{1}{2}$

7) $f(x)=2x^4+x^2-6x+\sqrt{2}$

► $f'(x)=2\cdot 4x^3+2x-6\cdot 1=8x^3+2x-6$

8) $f(x)=-5x^5+10x^3-\dfrac{6x^2}{5}+\dfrac{x}{3}-\dfrac{1}{2}$

► Podemos reescribir la función así: $f(x)=-5x^5+10x^3-\dfrac{6}{5}x^2+\dfrac{1}{3}x-\dfrac{1}{2}$

Por ello: $f'(x)=-25x^4+30x^2-\dfrac{12x}{5}+\dfrac{1}{3}$

9) $f(x)=\dfrac{x^3+2}{3}$

► Podemos reescribir la función así: $f(x)=\dfrac{x^3+2}{3}=\dfrac{1}{3}(x^3+2)$ Así: $f'(x)=\dfrac{1}{3}\cdot 3x^2=x^2$

10) $f(x)=\dfrac{1}{3x^2}$

► Podemos reescribir la función así: $f(x)=\dfrac{1}{3x^2}=\dfrac{1}{3}x^{-2}$

Por eso: $f'(x)=\dfrac{1}{3}\cdot(-2)x^{-2-1}=-\dfrac{2}{3}x^{-3}=-\dfrac{2}{3x^3}$

11) $f(x)=\dfrac{5}{x^5}$

► Reescribiendo la función así: $f(x)=5x^{-5}$ tendremos: $f'(x)=-\dfrac{25}{x^6}$

12) $f(x)=\dfrac{7}{x}+\dfrac{3}{x^3}$

► Reescribiendo la función así: $f(x)=7x^{-1}+3x^{-3}$ tendremos: $f'(x)=-\dfrac{7}{x^2}-\dfrac{9}{x^4}$

2. Potencias de polinomios

1) $f(x)=(x^2+3x-2)^4$

► La derivada de una potencia de exponente numérico es: $(u^{\mathrm{n}})' = \mathrm{n}\cdot u^{\mathrm{n}-1}\cdot u'$
Por lo tanto: $f'(x)=4\cdot(x^2+3x-2)^{4-1}\cdot(2x+3)=(8x+12)(x^2+3x-2)^3$

2) $f(x)=(2x-3)^5$

► $f'(x)=5\cdot(2x-3)^{5-1}\cdot 2=10(2x-3)^4$

3) $f(x)=(2x^5-3x^4)^3$

► $f'(x)=3\cdot(2x^5-3x^4)^{3-1}\cdot(10x^4-12x^3)=6x^3(2x^5-3x^4)^2(5x-6)$

4) $f(x)=\dfrac{4}{(2x-1)^2}$

► Reescribimos la función así: $f(x)=4(2x-1)^{-2}$ y tendremos:
$f'(x)=4\cdot(-2)(2x-1)^{-2-1}\cdot 2=-16(2x-1)^{-3}=-\dfrac{16}{(2x-1)^3}$

5) $f(x)=(6-2x)^{-3}$

► $f'(x)=(-3)\cdot(6-2x)^{-3-1}\cdot(-2)=6\cdot(6-2x)^{-4}$

3. Productos y cocientes

1) $f(x)=(x+4)(2x^2-2)$

► La derivada de un producto es: $(u\cdot v)'=u'\cdot v+u\cdot v'$
Así: $f'(x)=1\cdot(2x^2-2)+(x+4)(4x)=2x^2-2+4x^2+16x=6x^2+16x-2$

2) $f(x)=(5x^2-3)(x^2+x+4)$

► $f'(x)=(10x)(x^2+x+4)+(5x^2-3)(2x+1)=20x^3+15x^2+34x-3$

3) $f(x)=-\dfrac{1}{x^2+2}$

► La derivada de un cociente es: $(u/v)'=\dfrac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}$

Así: $f'(x)=-\dfrac{(1)'(x^2+2)-(1)(x^2+2)'}{(x^2+2)^2}=-\dfrac{0\cdot(x^2+2)-1\cdot(2x)}{(x^2+2)^2}=\dfrac{2x}{(x^2+2)^2}$

4) $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$

► $f'(x)=\dfrac{(x+1)'(x-1)-(x+1)(x-1)'}{(x-1)^2}=\dfrac{(x-1)-(x+1)}{(x-1)^2}=-\dfrac{2}{(x-1)^2}$

5) $f(x)=\dfrac{4x^3+9x^2}{3x+5}$

► $f'(x)=\dfrac{(12x^2+18x)(3x+5)-(4x^3+9x^2)\cdot 3}{(3x+5)^2}=\dfrac{24x^3+87x^2+90x}{(3x+5)^2}$

6) $f(x)=\dfrac{3x}{(2x-1)^2}$

► $f'(x)=\dfrac{3\cdot(2x-1)^2-3x\cdot\left[2(2x-1)\cdot 2\right]}{(2x-1)^4}=\dfrac{3\cdot(2x-1)-3x\cdot\left[2\cdot 2\right]}{(2x-1)^3}=\dfrac{-6x-3}{(2x-1)^3}=-\dfrac{6x+3}{(2x-1)^3}$

7) $f(x)=\dfrac{x}{x+1}\cdot(3-x)$

► Reescribimos la función así: $f(x)=\dfrac{x}{x+1}\cdot(3-x)=\dfrac{3x-x^2}{x+1}$

$f'(x)=\dfrac{(3-2x)\cdot(x+1)-(3x-x^2)\cdot 1}{(x+1)^2}=\dfrac{3x+3-2x^2-2x-(3x-x^2)}{(x+1)^2}=\dfrac{-x^2-2x+3}{(x+1)^2}$

4. Raíces

1) $f(x)=\sqrt{x}$

► La derivada de una raíz es: $\left(\sqrt{u}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{u}}\cdot u'$

Por lo tanto, $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

2) $f(x)=\sqrt{16x+1}$

► $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{16x+1}}\cdot 16=\dfrac{8}{\sqrt{16x+1}}$

3) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

► Reescribimos la función así: $f(x)=x^{-1/2}$ y derivamos como una potencia:

$f'(x)=-\dfrac{1}{2}\cdot x^{-\frac{1}{2}-1}=-\dfrac{1}{2}\cdot x^{-\frac{3}{2}}=-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{x^3}}=-\dfrac{1}{2x\sqrt{x}}$

4) $f(x)=\dfrac{1}{x\sqrt{x}}$

► Reescribimos la función así: $f(x)=x^{-(1+1/2)}=x^{-3/2}$ y derivamos como una potencia:

$f'(x)=-\dfrac{3}{2}\cdot x^{-\frac{3}{2}-1}=-\dfrac{3}{2}\cdot x^{-\frac{5}{2}}=-\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{x^5}}=-\dfrac{3}{2x^2\sqrt{x}}$

5) $f(x)=\sqrt[3]{x^2}+\sqrt{x}$

► La derivada de una raíz enésima es: $\left(\sqrt[n]{u}\right)'=\dfrac{1}{n\cdot\sqrt[n]{u^{n-1}}}\cdot u'$

$f'(x)=\dfrac{1}{3\cdot\sqrt[3]{(x^2)^{3-1}}}\cdot 2x+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=\dfrac{2x}{3x\sqrt[3]{x}}+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

6) $f(x)=\sqrt{\dfrac{-10x}{x^4-2}}+6x^2-12$

► $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{\dfrac{-10x}{x^4-2}}}\cdot\dfrac{(-10)(x^4-2)-(-10x)(4x^3)}{(x^4-2)^2}+12x=\sqrt{\dfrac{x^4-2}{-10x}}\cdot\dfrac{15x^4+10}{(x^4-2)^2}+12x$

7) $f(x)=\sqrt[3]{-x^2+5}$

► $f'(x)=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{(-x^2+5)^2}}\cdot(-2x)=-\dfrac{2x}{3\sqrt[3]{(-x^2+5)^2}}$

8) $f(x)=\sqrt{x^2-2x+3}$

► $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x^2-2x+3}}\cdot(2x-2)=\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+3}}$

9) $f(x)=\sqrt[4]{x^5-x^3-2}$

► $f'(x)=\sqrt[4]{x^5-x^3-2}=\dfrac{1}{4\sqrt[4]{(x^5-x^3-2)^3}}\cdot(5x^4-3x^2)=\dfrac{x^2(5x^2-3)}{4\sqrt[4]{(x^5-x^3-2)^3}}$

10) $f(x)=\sqrt[3]{\dfrac{x^2+1}{x^2-1}}$

► $f'(x)=\sqrt[3]{\dfrac{x^2+1}{x^2-1}}=\dfrac{1}{3\cdot\sqrt[3]{\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)^2}}\cdot\dfrac{2x\cdot(x^2-1)-(x^2+1)\cdot 2x}{(x^2-1)^2}=\sqrt[3]{\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)^2}\,\dfrac{-4x}{3(x^2-1)^2}$

5. Exponenciales

1) $f(x)=\dfrac{e^{2x}}{3}$

► La derivada de una exponencial es: $\left(e^u\right)'=u'\cdot e^u$ por lo tanto:

$f'(x)=\dfrac{1}{3}\cdot 2\,e^{2x}=\dfrac{2}{3}e^{2x}$

2) $f(x)=10^{\sqrt{x}}$

► La derivada de una función potencial es: $\left(a^u\right)'=u'\cdot a^u\cdot \mathrm{Ln}\,a$ por lo tanto:

$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\cdot 10^{\sqrt{x}}\cdot \mathrm{Ln}10=\dfrac{\mathrm{Ln}10}{2}\cdot\dfrac{10^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$

3) $f(x)=e^{3-x^2}$

► $f'(x)=(-2x)\cdot e^{3-x^2}=-2x\,e^{3-x^2}$

4) $f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$

► $f'(x)=\dfrac{1}{2}(e^x+(-1)\cdot e^{-x})=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$

5) $f(x)=3^{2x^2}\sqrt{x}$

► $f'(x)=3^{2x^2}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+\left(4x\cdot 3^{2x^2}\cdot\mathrm{Ln}\,3\right)\cdot\sqrt{x}=3^{2x^2}\left(\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+4\,\mathrm{Ln}\,3\cdot x\sqrt{x}\right)$

6) $f(x)=\mathrm{e}^{2x}/x^2$

► $f'(x)=\dfrac{\left(2\,\mathrm{e}^{2x}\right)\cdot x^2-\mathrm{e}^{2x}\cdot(2x)}{(x^2)^2}=\dfrac{2\mathrm{e}^{2x}\left(x^2-x\right)}{x^4}=\dfrac{2\mathrm{e}^{2x}\,(x-1)}{x^3}$

6. Logaritmos

1) $f(x)=\mathrm{Ln}\,(2x^4-x^3+3x^2-3x)$

► La derivada del logaritmo neperiano es: $(\mathrm{Ln}\,u)'=\dfrac{u'}{u}$

$$f'(x)=\frac{8x^3-3x^2+6x-3}{2x^4-x^3+3x^2-3x}$$

2) $f(x)=\mathrm{Ln}\left[(x-3)\,(x+3)\right]$

► Reescribimos la función: $f(x)=\mathrm{Ln}\left[(x-3)\,(x+3)\right]=\ln\,(x^2-9)$

$$f'(x)=\frac{2x}{x^2-9}$$

3) $f(x)=\mathrm{Ln}\,\sqrt{x(1-x)}$

► Reescribimos la función: $f(x)=\mathrm{Ln}\,\sqrt{x(1-x)}=\dfrac{1}{2}\mathrm{Ln}\left[x(1-x)\right]=\dfrac{1}{2}\mathrm{Ln}\left(x-x^2\right)$

$$f'(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1-2x}{x-x^2}=\frac{1-2x}{2x\,(1-x)}$$

4) $f(x)=\log\,(3x+2)-\log\,(3x-2)$

► La derivada del logaritmo decimal es: $(\log u)'=\dfrac{u'}{\mathrm{Ln}\,10\cdot u}$

$$f'(x)=\frac{3}{\mathrm{Ln}\,10\,(3x+2)}-\frac{3}{\mathrm{Ln}\,10\,(3x+2)}=\frac{3}{\mathrm{Ln}\,10}\left(\frac{1}{3x+2}-\frac{1}{3x-2}\right)=\frac{3}{\mathrm{Ln}\,10}\cdot\frac{-4}{9x^2-4}=\frac{-12/\mathrm{Ln}\,10}{(9x^2-4)}$$

5) $f(x)=(\log\mathrm{e}^x+\log 3^x)/\sqrt{5}$

► Reescribimos la función:

$$f(x)=(\log\mathrm{e}^x+\log 3^x)/\sqrt{5}=\frac{1}{\sqrt{5}}(x\log\mathrm{e}+x\log 3)=\frac{\log\mathrm{e}+\log 3}{\sqrt{5}}\cdot x=\frac{\log 3\mathrm{e}}{\sqrt{5}}\cdot x$$

$$f'(x)=\frac{\log 3\mathrm{e}}{\sqrt{5}}$$

6) $f(x)=\mathrm{e}^{4x+9}+\mathrm{Ln}\ (4x+9)$

► $f'(x)=4\cdot\mathrm{e}^{4x+9}+\dfrac{4}{4x+9}=4\left(\mathrm{e}^{4x+9}+\dfrac{1}{4x+9}\right)$

7) $f(x)=\log\left(\log\left(1/x\right)\right)$

► Reescribimos la función: $f(x)=\log\left(\log\left(1/x\right)\right)=\log\,(\log 1-\log x)=\log\,(-\log x)$

$$f'(x)=\frac{(-\log x)'}{\mathrm{Ln}\,10\cdot(-\log x)}=\frac{-1/(\mathrm{Ln}\,10\cdot x)}{\mathrm{Ln}\,10\cdot(-\log x)}=\frac{1}{(\mathrm{Ln}\,10)^2\,x\log x}$$

8) $f(x)=\mathrm{Ln}\left(3x\right)^{-1}+7x^2$

► Reescribimos la función: $f(x)=\mathrm{Ln}\left(3x\right)^{-1}+7x^2=-\mathrm{Ln}\,3x+7x^2=-(\mathrm{Ln}\,3+\mathrm{Ln}\,x)+7x^2$

$$f'(x)=-\left(0+\frac{1}{x}\right)+14x=14x-\frac{1}{x}=\frac{14x^2-1}{x}$$

9) $f(x)=6\,(\mathrm{Ln}\,x)^2-10\,\mathrm{Ln}\,x+2$

► $f'(x)=6\cdot 2\,(\mathrm{Ln}\,x)\dfrac{1}{x}-10\cdot\dfrac{1}{x}+0=\dfrac{2}{x}(6\,\mathrm{Ln}\,x-5)$

10) $f(x)=\ln\sqrt[3]{\dfrac{3x}{x+2}}$

► Reescribimos la función: $f(x)=\mathrm{Ln}\sqrt[3]{\dfrac{3x}{x+2}}=\dfrac{1}{3}\left[\mathrm{Ln}\,3x-\mathrm{Ln}\left(x+2\right)\right]$

$$f'(x)=\frac{1}{3}\left[\frac{3}{3x}-\frac{1}{x+2}\right]=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{x}-\frac{1}{x+2}\right]=\frac{1}{3}\left[\frac{x+2-x}{x\,(x+2)}\right]=\frac{2}{3x\,(x+2)}$$

11) $f(x)=\mathrm{Ln}\sqrt{\dfrac{10x+4}{10x-4}}$

► Reescribimos la función: $f(x)=\mathrm{Ln}\sqrt{\dfrac{10x+4}{10x-4}}=\dfrac{1}{2}\left[\mathrm{Ln}\,(10x+4)-\mathrm{Ln}\,(10x-4)\right]$

$$f'(x)=\frac{1}{2}\left[\frac{10}{10x+4}-\frac{10}{10x-4}\right]=5\cdot\left[\frac{1}{10x+4}-\frac{1}{10x-4}\right]=5\cdot\frac{-8}{100x^2-16}=\frac{10}{4-25x^2}$$

12) $f(x)=\mathrm{Ln}\left(\dfrac{e^x+1}{e^x-1}\right)$

► Reescribimos la función: $f(x)=\mathrm{Ln}\left(\dfrac{\mathrm{e}^x+1}{\mathrm{e}^x-1}\right)=\mathrm{Ln}\,(\mathrm{e}^x+1)-\mathrm{Ln}\,(\mathrm{e}^x-1)$

$$f'(x)=\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}-\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x-1}=\mathrm{e}^x\left(\frac{1}{\mathrm{e}^x+1}-\frac{1}{\mathrm{e}^x-1}\right)=\mathrm{e}^x\cdot\frac{-2}{\mathrm{e}^{2x}-1}=-\frac{2\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}-1}$$

13) $f(x)=\sqrt[100]{\mathrm{Ln}\,x^2}$

► Reescribimos la función: $f(x)=\sqrt[100]{\mathrm{Ln}\,x^2}=\sqrt[100]{2\,\mathrm{Ln}\,x}$

$$f'(x)=\sqrt[100]{2\,\mathrm{Ln}\,x}=\frac{1}{100\cdot\sqrt[100]{(2\,\mathrm{Ln}\,x)^{99}}}\cdot\left(2\cdot\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{50x\cdot\sqrt[100]{(2\,\mathrm{Ln}\,x)^{99}}}$$

14) $f(x)=\log\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$

► Reescribimos la función: $f(x)=\log\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}=\dfrac{1}{2}\left[\log\,(1+x)-\log\,(1-x)\right]$

$$f'(x)=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\ln 10\cdot(1+x)}-\frac{-1}{\ln 10\cdot(1-x)}\right]=\frac{1}{2\,\mathrm{Ln}\,10}\left[\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}\right]=\frac{1}{2\,\mathrm{Ln}\,10}\cdot\frac{2}{1-x^2}=$$

$$=\frac{1}{\mathrm{Ln}\,10\,(1-x^2)}$$

7. Funciones trigonométricas

1) $f(x)=\sin\frac{x}{2}$

► La derivada de seno y coseno son: $(\sin u)'=u'\cdot\cos u$, $(\cos u)'=-u'\cdot\sin u$

$$f'(x)=\frac{1}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}$$

2) $f(x)=\sin(-5x^2+10)$

► $f'(x)=-10x\cdot\cos(-5x^2+10)$

3) $f(x)=\sin^2(x^2+3x-1)$

► $f'(x)=2\sin(x^2+3x-1)(2x+3)\cos(x^2+3x-1)=(4x+6)\sin(x^2+3x-1)\cos(x^2+3x-1)$

4) $f(x)=\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}$

► $f'(x)=\dfrac{(0+\sin x)(1+\cos x)-(1-\cos x)(0-\sin x)}{(1+\cos x)^2}=\dfrac{2\sin x}{(1+\cos x)^2}$

5) $f(x)=\cos(7-2x)$

► $f'(x)=-(-2)\sin(7-2x)=2\sin(7-2x)$

6) $f(x)=\cos\sqrt{x+1}$

► $f'(x)=-\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}\sin\sqrt{x+1}=-\dfrac{\sin\sqrt{x+1}}{2\sqrt{x+1}}$

7) $f(x)=\cos(\cos x)$

► $f'(x)=-(\cos x)'\sin(\cos x)=-(-\sin x)\sin(\cos x)=(\sin x)\sin(\cos x)$

8) $f(x)=\cos^3\sqrt{x}$

► $f'(x)=3\cos^2\sqrt{x}\cdot\left(\cos\sqrt{x}\right)'=3\cos^2\sqrt{x}\cdot\left(-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\sin\sqrt{x}\right)=-\dfrac{3\cos^2\sqrt{x}\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$

9) $f(x)=\sec(5x+2)$

► La derivada de la secante es: $(\sec u)'=\left(\dfrac{1}{\cos u}\right)'=\dfrac{0-(-u'\sin u)}{\cos^2 u}=u'\cdot\dfrac{\sin u}{\cos^2 u}$

$$f'(x)=\frac{5\sin(5x+2)}{\cos^2(5x+2)}$$

10) $f(x)=3\tan 2x$

► La derivada de la tangente es: $(\tan u)'=\left(\dfrac{\sin u}{\cos u}\right)'=\dfrac{u'\cos^2 u+u'\sin^2 u}{\cos^2 u}=\dfrac{u'}{\cos^2 u}$

$$f'(x)=3\cdot\frac{2}{\cos^2 2x}=\frac{6}{\cos^2 2x}$$

11) $f(x)=\tan(3/x)+\tan(x/3)$

► $f'(x)=\dfrac{1}{\cos^2(3/x)}\cdot\left(\dfrac{-3}{x^2}\right)+\dfrac{1}{\cos^2(x/3)}\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)=-\dfrac{3}{x^2\cos^2(3/x)}+\dfrac{1}{3\cos^2(x/3)}$

12) $f(x)=\sqrt[3]{\sin x}$

► $f'(x)=\dfrac{1}{3\cdot\sqrt[3]{\sin^2 x}}\cdot\cos x=\dfrac{\cos x}{3\cdot\sqrt[3]{\sin^2 x}}$

13) $f(x)=\sin^3 3x$

► $f'(x)=3(\sin 3x)^2\cdot\left(3\cos 3x\right)=9(\cos 3x)\sin^2 3x$

14) $f(x)=\cot(3-2x)$

► La derivada de la cotangente es: $(\cot u)'=\left(\dfrac{\cos u}{\sin u}\right)'=\dfrac{-u'\sin^2 u-u'\cos^2 u}{\sin^2 u}=-\dfrac{u'}{\sin^2 u}$

$$f'(x)=-\frac{-2}{\sin^2(3-2x)}=\frac{2}{\sin^2(3-2x)}$$

15) $f(x)=\cos\dfrac{x+1}{x-1}$

► $f'(x)=-\dfrac{1\cdot(x-1)-(x+1)\cdot 1}{(x-1)^2}\cdot\sin\dfrac{x+1}{x-1}=\dfrac{2}{(x-1)^2}\cdot\sin\dfrac{x+1}{x-1}$

16) $f(x)=\sqrt{\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}}$

► Reescribimos la función: $f(x)=\sqrt{\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}}=\sqrt{\dfrac{(1-\sin x)(1-\sin x)}{(1+\sin x)(1-\sin x)}}=\dfrac{1-\sin x}{\cos x}$

$$f'(x)=\frac{(-\cos x)\cos x-(1-\sin x)(-\sin x)}{\cos^2 x}=\frac{-1+\sin x}{(1-\sin x)(1+\sin x)}=-\frac{1}{1+\sin x}$$

17) $f(x)=\ln\cos 2x$

► $f'(x)=\dfrac{-2\sin 2x}{\cos 2x}=-2\tan 2x$

18) $f(x)=\ln\tan(1-x)$

► $f'(x)=\dfrac{1}{\tan(1-x)}\cdot\dfrac{-1}{\cos^2(1-x)}=-\dfrac{1}{\sin(1-x)\cdot\cos(1-x)}$

19) $f(x)=\ln\sqrt{\dfrac{1+\tan x}{1-\tan x}}$

► Reescribimos la función: $f(x)=\ln\sqrt{\dfrac{1+\tan x}{1-\tan x}}=\dfrac{1}{2}\left[\ln(1+\tan x)-\ln(1-\tan x)\right]$

$$f'(x)=\frac{1}{2}\left[\frac{1/\cos^2 x}{1+\tan x}-\frac{-1/\cos^2 x}{1-\tan x}\right]=\frac{1}{2\cos^2 x}\cdot\frac{2}{1-\tan^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x-\sin^2 x}=\frac{1}{\cos 2x}=\sec 2x$$

20) $f(x)=\tan\sin\sqrt{5x}$

► $f'(x)=\dfrac{1}{\cos^2(\sin\sqrt{5x})}\cdot\left(\sin\sqrt{5x}\right)'=\dfrac{1}{\cos^2(\sin\sqrt{5x})}\cdot\dfrac{5}{2\sqrt{5x}}\cos\sqrt{5x}=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{5}{x}}\,\dfrac{\cos\sqrt{5x}}{\cos^2(\sin\sqrt{5x})}$

21) $f(x)=\sin^2\cos 2x$

► $f'(x)=2\sin(\cos 2x)\cdot(-2\sin 2x)=-4\sin 2x\cdot\sin(\cos 2x)$

22) $f(x)=\operatorname{cosec}\tan x$

► La derivada de la cosecante es: $(\operatorname{cosec} u)'=\left(\dfrac{1}{\sin u}\right)'=\dfrac{0-u'\cos u}{\sin^2 u}=-u'\cdot\dfrac{\cos u}{\sin^2 u}$

$$f'(x)=-\frac{\cos(\tan x)}{\sin^2(\tan x)}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}$$

8. Funciones trigonométricas inversas

1) $f(x)=\arcsin(1-2x^2)$

► La derivada del arcoseno es: $(\arcsin u)'=\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

$$f'(x)=\frac{-4x}{\sqrt{1-(1-2x^2)^2}}=-\frac{4x}{\sqrt{-4x^4+4x^2}}=-\frac{2x}{\sqrt{x^2(1-x^2)}}$$

2) $f(x)=\arcsin \mathrm{e}^x$

► $f'(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{1-(\mathrm{e}^x)^2}}=\dfrac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{1-\mathrm{e}^{2x}}}$

3) $f(x)=\arcsin\sqrt{x^2-4}$

► $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\sqrt{x^2-4}\right)^2}}\cdot\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2-4}}=\dfrac{x}{\sqrt{(5-x^2)(x^2-4)}}$

4) $f(x)=(1-\arccos x)(1+\arccos x)$

► La derivada del arcocoseno es: $(\arccos u)'=-\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

Reescribimos la función: $f(x)=(1-\arccos x)(1+\arccos x)=1-\arccos^2 x$

$$f'(x)=0-2\arccos x\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)=\frac{2\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}$$

5) $f(x)=\arccos\left(x\sqrt{x}\right)$

► Reescribimos la función: $f(x)=\arccos\left(x\sqrt{x}\right)=\arccos x^{3/2}$

$$f'(x)=-\frac{1}{\sqrt{1-(x^{3/2})^2}}\cdot\frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1}=-\frac{3}{2}\cdot\frac{x^{1/2}}{\sqrt{1-x^3}}=-\frac{3}{2}\sqrt{\frac{x}{1-x^3}}$$

6) $f(x)=\arctan\sqrt{x}$

► La derivada de la arcotangente es: $(\arctan u)'=\dfrac{u'}{1+u^2}$

$$f'(x)=\frac{1}{1+\left(\sqrt{x}\right)^2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{2(1+x)\sqrt{x}}$$

7) $f(x)=\arctan\dfrac{1+x}{1-x}$

► $f'(x)=\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^2}\cdot\dfrac{1\cdot(1-x)-(1+x)(-1)}{(1-x)^2}=\dfrac{2}{(1-x)^2+(1+x)^2}=\dfrac{2}{2(1+x^2)}=\dfrac{1}{1+x^2}$

9. Función elevada a otra función

1) $f(x)=x^{x^2+7}$

► Sacando logaritmos: $\text{Ln}\, f(x)=\text{Ln}\, x^{x^2+7}=(x^2+7)\cdot\text{Ln}\, x$

Derivando: $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=2x\cdot\text{Ln}\, x+(x^2+7)\cdot\dfrac{1}{x}$

Despejando: $f'(x)=\left[2x\cdot\text{Ln}\, x+\dfrac{x^2+7}{x}\right]x^{x^2+7}$

2) $f(x)=(6x-1)^{4x^2}$

► Sacando logaritmos: $\text{Ln}\, f(x)=\text{Ln}\,(6x-1)^{4x^2}=(4x^2)\cdot\text{Ln}\,(6x-1)$

Derivando: $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=(8x)\cdot\text{Ln}\,(6x-1)+(4x^2)\cdot\dfrac{6}{6x-1}$

Despejando: $f'(x)=8x\left[\text{Ln}\,(6x-1)+\dfrac{3x}{6x-1}\right](6x-1)^{4x^2}$

3) $f(x)=\arccos\,(x^{2x}+x^x+5)$

► Si $u(x)=x^{\text{k}\cdot x}$, sacando logaritmos: $\ln u\,(x)=\text{Ln}\, x^{\text{k}\cdot x}=(\text{k}\cdot x)\cdot\text{Ln}\, x$

Derivando: $\dfrac{u'(x)}{u(x)}=(\text{k}\cdot x)\cdot\dfrac{1}{x}+\text{k}\cdot\ln x=\text{k}\,(1+\ln x)$

Despejando: $u'(x)=\text{k}\,(1+\text{Ln}\, x)\cdot x^{\text{k}\cdot x}$

$$f'(x)=\arccos\,(x^{2x}+x^x+5)=-\frac{1}{\sqrt{1+(x^{2x}+x^x+5)^2}}\cdot\left[2\,(1+\text{Ln}\, x)\cdot x^{2x}+(1+\text{Ln}\, x)\cdot x^x\right]=$$

$$=-\frac{(1+\text{Ln}\, x)(2x^{2x}+x^x)}{\sqrt{1+(x^{2x}+x^x+5)^2}}$$

4) $f(x)=(4x^2-1)^{\text{Ln}\, x}$

► Sacando logaritmos: $\text{Ln}\, f(x)=\text{Ln}\,(4x^2-1)^{\text{Ln}\, x}=\text{Ln}\, x\cdot\text{Ln}\,(4x^2-1)$

Derivando: $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\dfrac{1}{x}\cdot\text{Ln}\,(4x^2-1)+\text{Ln}\, x\cdot\dfrac{8x}{4x^2-1}$

Despejando: $f'(x)=\left[\dfrac{\text{Ln}\,(4x^2-1)}{x}+\dfrac{8x\,\text{Ln}\, x}{4x^2-1}\right](4x^2-1)^{\text{Ln}\, x}$

5) $f(x)=(\sin x)^{\cos x}$

► Sacando logaritmos: $\text{Ln}\, f(x)=\text{Ln}\,(\sin x)^{\cos x}=\cos x\cdot\text{Ln}\,(\sin x)$

Derivando: $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=-\sin x\cdot\text{Ln}\,(\sin x)+\cos x\cdot\dfrac{\cos x}{\sin x}$

Despejando: $f'(x)=\left[-\sin x\cdot\text{Ln}\,(\sin x)+\dfrac{\cos^2 x}{\sin x}\right](\sin x)^{\cos x}$

6) $f(x)=\left[\arctan\,(x+1)\right]^{x+1}$

► Sacando logaritmos: $\text{Ln}\, f(x)=\text{Ln}\left[\arctan\,(x+1)\right]^{x+1}=(x+1)\cdot\text{Ln}\arctan\,(x+1)$

Derivando: $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=1\cdot\text{Ln}\arctan\,(x+1)+(x+1)\cdot\dfrac{1}{\arctan\,(x+1)}\cdot\dfrac{1}{1+(x+1)^2}$

Despejando: $f'(x)=\left[\text{Ln}\arctan\,(x+1)+\dfrac{x+1}{\arctan\,(x+1)}\cdot\dfrac{1}{1+(x+1)^2}\right]\left[\arctan\,(x+1)\right]^{x+1}$

7) $f(x)=\left(\operatorname{Ln} x/2x\right)^{\tan x}$

► Sacando log: $\operatorname{Ln} f(x)=\operatorname{Ln}\left(\operatorname{Ln} x/2x\right)^{\tan x}=\tan x\cdot\operatorname{Ln}\left(\operatorname{Ln} x/2x\right)=\tan x\cdot(\operatorname{Ln}\operatorname{Ln} x-\operatorname{Ln} 2x)$

Derivando: $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\dfrac{1}{\cos^2 x}\cdot(\operatorname{Ln}\operatorname{Ln} x-\operatorname{Ln} 2x)+\tan x\cdot\left(\dfrac{1/x}{\operatorname{Ln} x}-\dfrac{2}{2x}\right)$

Despejando: $f'(x)=\left[\dfrac{1}{\cos^2 x}\cdot\operatorname{Ln}\left(\dfrac{\operatorname{Ln} x}{2x}\right)+\dfrac{\tan x}{x}\cdot\left(\dfrac{1}{\operatorname{Ln} x}-1\right)\right]\left(\dfrac{\operatorname{Ln} x}{2x}\right)^{\tan x}$

8) $f(x)=\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x+1}$

► $\operatorname{Ln} f(x)=\operatorname{Ln}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x+1}=(x+1)\operatorname{Ln}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)=(x+1)\cdot\left[\operatorname{Ln}(x^2+1)-\operatorname{Ln}(x^2-1)\right]$

$\dfrac{f'(x)}{f(x)}=1\cdot\left[\operatorname{Ln}(x^2+1)-\operatorname{Ln}(x^2-1)\right]+(x+1)\cdot\left[\dfrac{2x}{x^2+1}-\dfrac{2x}{x^2-1}\right]=\operatorname{Ln}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)-4x\cdot\dfrac{x+1}{x^4-1}$

Despejando: $f'(x)=\left[\operatorname{Ln}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)-4x\cdot\dfrac{x+1}{x^4-1}\right]\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x+1}$

9) $f(x)=\sqrt[x^2]{\arccos x}$

► Sacando logaritmos: $\operatorname{Ln} f(x)=\operatorname{Ln}\sqrt[x^2]{\arccos x}=\dfrac{1}{x^2}\cdot\operatorname{Ln}\arccos x=\dfrac{\operatorname{Ln}\arccos x}{x^2}$

Derivando:

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{\dfrac{-1/\sqrt{1-x^2}}{\arccos x}\cdot x^2-\operatorname{Ln}\arccos x\cdot 2x}{x^4}=\frac{-1}{x^2\arccos x\cdot\sqrt{1-x^2}}-\frac{2\operatorname{Ln}\arccos x}{x^3}$$

Despejando: $f'(x)=\left[\dfrac{-1}{x^2\arccos x\cdot\sqrt{1-x^2}}-\dfrac{2\operatorname{Ln}\arccos x}{x^3}\right]\sqrt[x^2]{\arccos x}$

10) $f(x)=\arctan(x+2)^{x-2}$

► Si $u(x)=(x+2)^{x-2}$, sacando logaritmos: $\operatorname{Ln} u(x)=\operatorname{Ln}(x+2)^{x-2}=(x-2)\cdot\operatorname{Ln}(x+2)$

Derivando: $\dfrac{u'(x)}{u(x)}=1\cdot\operatorname{Ln}(x+2)+(x-2)\cdot\dfrac{1}{x+2}=\operatorname{Ln}(x+2)+\dfrac{x-2}{x+2}$

Despejando: $u'(x)=\left[\operatorname{Ln}(x+2)+\dfrac{x-2}{x+2}\right](x+2)^{x-2}$

$$f'(x)=\frac{1}{1+(x+2)^{2x-4}}\left[\operatorname{Ln}(x+2)+\frac{x-2}{x+2}\right](x+2)^{x-2}$$

11) $f(x)=\log_{\sin x} x$

► Reescribiendo la función: $f(x)=\log_{\sin x} x=\dfrac{\operatorname{Ln} x}{\operatorname{Ln}\sin x}$ (cambio de base de logaritmos)

$$f'(x)=\frac{\dfrac{1}{x}\cdot\operatorname{Ln}\sin x-\operatorname{Ln} x\cdot\dfrac{\cos x}{\sin x}}{(\operatorname{Ln}\sin x)^2}=\frac{x^{-1}\cdot\operatorname{Ln}\sin x-\operatorname{Ln} x\cdot\cot x}{(\operatorname{Ln}\sin x)^2}=\frac{1}{x\cdot\operatorname{Ln}\sin x}-\frac{\operatorname{Ln} x\cdot\cot x}{(\operatorname{Ln}\sin x)^2}$$