Cuestiones y Problemas de Física

2º Bachillerato

Prof. José Bosch Bailach

Curso 2024 - 2025

Imagen de la portada: Very Large Array (VLA). Es un complejo de antenas para realizar radioastronomía, ubicado en las Llanuras de San Agustín, entre Magdalena y Dátil, Nuevo México y a 2124 m sobre el nivel del mar. Lo forman 27 antenas parabólicas, cada una con un diámetro de 25 metros. © VLA-NRAO (National Radio Astronomy Observatory)

https://www.uv.es/jbosch

Última actualización: 6 de septiembre de 2024

Índice general

1 — Las matemáticas de la Física

La Física es la ciencia que estudia los fenómenos que tienen lugar en la Naturaleza. Es una ciencia básica que usa el método científico para estudiar y analizar el mundo, obteniendo patrones y regularidades en los fenómenos que se observan para así construir un marco conceptual y de ideas capaz de explicar el por qué del mundo y hacer predicciones futuras. La Física es empírica, es decir, se basa en la experiencia y en la observación de los hechos. Así pues ocupa un papel destacado en Física el *observador*, que se sitúa desde una perspectiva externa y analiza los hechos.

Es por ello que este primer capítulo de introducción está dedicado a los elementos que usa el observador para describir el mundo. Entre ellos hay que hablar de los sistemas de referencia y de las magnitudes. Los primeros permiten establecer un marco desde el cual medir los acontecimientos y las segundas darles un valor numérico con el que poder cuantificar la realidad.

1.1. Sistema de referencia

Un sistema de referencia es un conjunto de convenciones usadas por un observador para poder medir la posición y otras magnitudes físicas de un sistema físico. El observador necesita unos ejes de coordenadas con los que determinar los puntos en los que se hallan los objetos que se están estudiando. A lo largo de todo el curso se usarán las *coordenadas cartesianas* y las *coordenadas polares* para describir las posiciones de los cuerpos.

En un espacio tridimensional los puntos vienen especificados por tres cantidades numéricas, llamadas coordenadas. Se suele escribir de la forma:

$$P = (x, y, z) \tag{1.1}$$

en un sistema cartesiano. Los ejes del sistema de coordenadas se representan por las letras mayúsculas X, Y y Z y forman entre sí ángulos de 90º. El origen del sistema de coordenadas es el punto $(0, 0, 0)$. Las magnitudes es la forma que se tiene en Física de medir las cantidades. La distancia es la magnitud principal y en el Sistema Internacional, SI, se mide en metros (m). Las cantidades dadas en la ecuación 1.1 suelen venir expresadas en metros si se trata de posiciones.

1.2. Magnitudes escalares

Ya hemos comentado que las magnitudes son las cantidades que se pueden medir en física. Entre ellas tenemos la distancia, la velocidad, la aceleración, la masa, la fuerza, la energía, el trabajo, etc. Se pueden clasificar en dos grandes grupos: escalares y vectoriales.

Las magnitudes escalares son aquellas que se especifican con un número y la unidad. Son magnitudes escalares la distancia, la masa, la energía y la temperatura entre otras. Cuando damos los valores de estas magnitudes decimos por ejemplo: 2 m, 6 kg, 20 J y 16ºC, es decir, un número acompañado de su unidad. Las magnitudes escalares suelen ser aditivas, es decir, se suman. Si tenemos un cuerpo de 6 kg de masa y situamos sobre él otro de 4 kg, podemos decir que los dos cuerpos tienen una masa total de $6 + 4 = 10$ kg. No todas las magnitudes se *suman* de esta forma tan simple como acabamos de ver. Para ello hace falta introducir un nuevo tipo de magnitudes, las vectoriales.

1.3. Magnitudes vectoriales

Hay magnitudes físicas que no se suman en el sentido habitual. Por ejemplo, la fuerza. Imaginemos que sobre un cuerpo actúan dos fuerzas, una de 3 N y otra de 4 N y que forman entre sí un ángulo de 90º. La experiencia nos dice que la fuerza total no es de $3 + 4 = 7$ N, sino que la resultante es de 5 N. Y eso se debe a que hay magnitudes que tienen una determinada *dirección* y el ángulo que forman entre ellas hay que tenerlo en cuenta a la hora de sumarlas. Para el caso que hemos expuesto $F_T = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ N. Así pues la suma de magnitudes vectoriales no es algo tan simple como la suma de magnitudes escalares.

1.4. Vectores en coordenadas cartesianas

Los vectores poseen una dirección y para especificarla se necesitan **2** puntos, el punto inicial u origen, desde donde sale el vector, y el punto final o extremo, donde acaba el vector. Los vectores vienen caracterizados por sus componentes. Si un vector tiene el origen en el punto, por ejemplo $P = (x_1, y_1, z_1)$ y el extremo en el punto $Q = (x_2, y_2, z_2)$, se define el vector $\overrightarrow{PQ}$ como

$$\overrightarrow{PQ} = (x_2, y_2, z_2) - (x_1, y_1, z_1) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) = (v_x, v_y, v_z) \tag{1.2}$$

Aunque la manera de expresar las componentes de un vector es similar a las coordenadas de un punto, son entidades diferentes. Un vector posee una dirección que viene especificada por la línea que une los puntos P y Q, pero estos puntos no poseen en sí ninguna dirección. Los vectores así definidos podemos luego aplicarlos sobre un punto y tenemos la libertad de escoger el punto que deseemos como origen.

Los vectores se caracterizan también por su módulo, que no es más que la distancia entre los puntos P y Q. El módulo se presenta con dos barras laterales, $|\overrightarrow{PQ}|$, y según lo dicho

$$|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \tag{1.3}$$

Para el módulo siempre hay que tomar el valor positivo de la raíz.

Vectores unitarios

Un vector unitario es aquel cuyo módulo es la unidad, o sea, si $\vec{u}$ es unitario, $|\vec{u}| = 1$. Dado un vector cualquiera $\vec{v}$, un vector unitario en la dirección de $\vec{v}$ se halla fácilmente sin más que hacer

$$\vec{u}_v = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{(v_x, v_y, v_z)}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}} \tag{1.4}$$

Vectores unitarios según los ejes

De entre todos los vectores unitarios hay unos que merecen especial atención, y son los que van a lo largo de las direcciones de los ejes de coordenadas. Estos vectores forman lo que se denomina una base ortonormal ya que cualquier vector puede expresarse como una combinación lineal de ellos.

$$\begin{aligned} \vec{i} &= (1, 0, 0) \\ \vec{j} &= (0, 1, 0) \\ \vec{k} &= (0, 0, 1) \end{aligned}$$

Con esta notación cualquier vector $\vec{v}$ se expresa en función de los vectores unitarios de la forma

$$\vec{v} = (v_x, v_y, v_z) = v_x(1, 0, 0) + v_y(0, 1, 0) + v_z(0, 0, 1) = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k} \tag{1.5}$$

Esta notación puede parecer algo engorrosa pero es muy útil a la hora de calcular los productos escalar y vectorial.

1.5. Operaciones con vectores

1.5.1. Suma de vectores

Los vectores son magnitudes que se pueden sumar. Supongamos que tenemos los vectores $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ y $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$. El vector suma se define como

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_x, a_y, a_z) + (b_x, b_y, b_z) = (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z) \tag{1.6}$$

La suma de vectores cumple la desigualdad triangular,

$$|\vec{a}+\vec{b}| \leqslant |\vec{a}|+|\vec{b}| \tag{1.7}$$

La diferencia de vectores se puede interpretar como la suma de un vector más su opuesto, es decir

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})=(a_x-b_x, a_y-b_y, a_z-b_z) \tag{1.8}$$

Los vectores se pueden multiplicar por escalares (números) y en tal caso

$$\lambda\vec{a}=(\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z) \tag{1.9}$$

Se puede demostrar fácilmente que $|\lambda\vec{a}|=|\lambda||\vec{a}|$

1.5.2. Producto escalar

Los vectores también se pueden multiplicar. El producto escalar de vectores es como su nombre indica, un escalar, es decir, un número real, positivo, negativo o cero. El producto escalar se representa por un punto, $(\cdot)$. La definición que se usa en física es la misma que en matemáticas

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi \tag{1.10}$$

siendo $|\vec{a}|$ y $|\vec{b}|$ los módulos y φ el ángulo que forman entre sí los dos vectores.

Si los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ se expresan en función de los vectores unitarios de la base se puede demostrar que el producto escalar se obtiene a partir de las componentes de los vectores con la fórmula

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z \tag{1.11}$$

Cuando el producto escalar de dos vectores es cero, $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$, necesariamente ha de cumplirse que $\cos\varphi=0$, por lo tanto $\varphi=90^o$ y los vectores son perpendiculares. De igual manera es fácil probar que $|\vec{a}|^2=\vec{a}\cdot\vec{a}$

La definición dada en 1.10 permite hallar el ángulo entre dos vectores usando 1.11

$$\varphi=\cos^{-1}\left(\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}\right) \tag{1.12}$$

Por la definición dada del producto escalar se puede demostrar que es conmutativo, $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$ y que cumple la propiedad distributiva del producto respecto de la suma

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c} \tag{1.13}$$

y que el módulo del vector suma se puede expresar como

$$|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi} \tag{1.14}$$

1.5.3. Producto vectorial

Los vectores pueden multiplicarse de tal forma que el resultado sea también un vector. Como tal hay que especificar el módulo y su dirección. Dados dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, el producto vectorial se representa con el símbol $\wedge$ o $\times$, es decir $\vec{a} \wedge \vec{b}$ o $\vec{a} \times \vec{b}$. El módulo del producto vectorial es por definición

$$|\vec{a} \wedge \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin \varphi \tag{1.15}$$

siendo φ el ángulo que forman los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$. De la definición se deduce que si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ llevan la misma dirección $|\vec{a} \wedge \vec{b}| = 0$ y por lo tanto $\vec{a} \wedge \vec{b} = 0$. La dirección del vector $\vec{a} \wedge \vec{b}$ viene dada por la regla de la mano izquierda, como indica la figura 1.1. El movimiento es similar al de un tapón de rosca o un destornillador.

Para ver el sentido que lleva el producto vectorial, si estamos calculando $\vec{a} \wedge \vec{b}$, lo que hemos de hacer es abatir el vector $\vec{a}$ sobre el vector $\vec{b}$ por el camino angular más corto y ver en qué sentido va el giro, como se muestra en la figura 1.1.

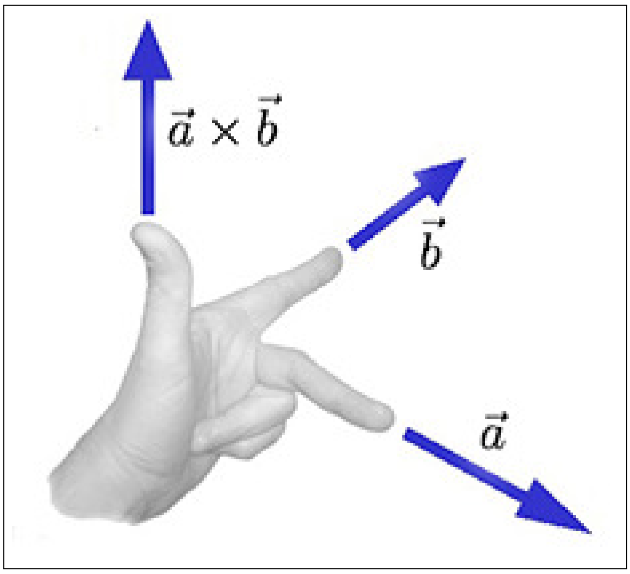


Figura 1.1: Regla de la mano izquierda. Sentido de los vectores en el producto vectorial

El producto vectorial es un vector que es siempre perpendicular al plano que definen los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ y además es *anticonmutativo*, es decir $\vec{a} \wedge \vec{b} = -\vec{b} \wedge \vec{a}$.

Las componentes del producto vectorial se pueden calcular a partir de los productos vectoriales de los vectores unitarios $\vec{i}$, $\vec{j}$ y $\vec{k}$. Se puede expresar de manera compacta mediante el desarrollo del siguiente determinante:

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i}(a_y b_z - a_z b_y) - \vec{j}(a_x b_z - a_z b_x) + \vec{k}(a_x b_y - a_y b_x)$$

Por las propiedades de los determinantes se demuestra fácilmente que $\vec{a} \wedge \vec{b} = -\vec{b} \wedge \vec{a}$ y que $\vec{a} \wedge \lambda\vec{a} = 0$. La propiedad conmutativa del producto respecto de la suma también se cumple

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \wedge \vec{b} + \vec{a} \wedge \vec{c} \tag{1.16}$$

Magnitudes físicas como el momento angular y la fuerza magnética se definen a partir del producto vectorial, obteniéndose muchas consecuencias importantes como la conservación del momento angular en el problema de las fuerzas centrales.

Ejemplo

Como aplicación de lo dicho anteriormente vamos a calcular el producto vectorial de los vectores $\vec{a} = (1, 2, 3)$ y $\vec{b} = (-3, -2, -1)$.

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i}(2 \cdot (-1) - 3 \cdot (-2)) - \vec{j}(1 \cdot (-1) - 3 \cdot (-3)) + \vec{k}(1 \cdot (-2) - 2 \cdot (-3))$$

$$= \vec{i}(-2 + 6) - \vec{j}(-1 + 9) + \vec{k}(-2 + 6) = 4\vec{i} - 8\vec{j} + 4\vec{k} \equiv (4, -8, 4)$$

1.6. Vectores en coordenadas polares

Hemos dicho que para especificar un vector hacen falta dos cantidades. Se pueden dar dos puntos, o se puede dar el módulo y la dirección que ese vector forma con uno de los ejes, como muestra la figura 1.2.

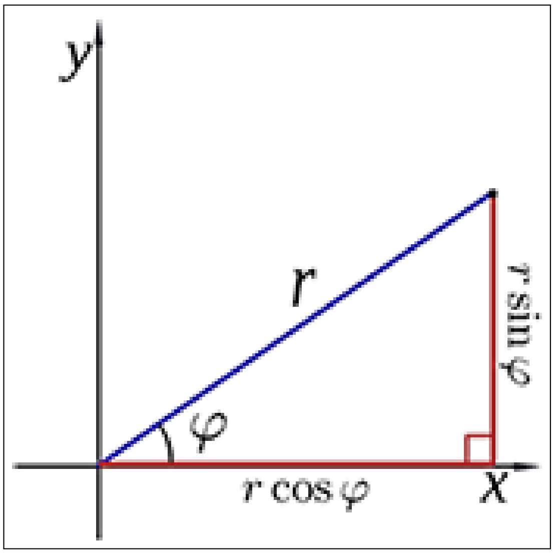


Figura 1.2: Componentes polares de un vector

Esta última forma es muy útil para vectores bidimensionales y es lo que se conoce como componentes polares de un vector. Se puede pasar de coordenadas polares a cartesianas y al revés.

Sabiendo el módulo de un vector, llamémosle r para simplificar la notación y el ángulo φ que forma con el eje X, de la figura se deduce que

$$x = r\cos\varphi \tag{1.17}$$
$$y = r\sin\varphi \tag{1.18}$$

En muchos problemas físicos es habitual conocer el módulo y la dirección más que las componentes cartesianas.

Si por el contrario sabemos las componentes cartesianas podemos calcular las polares despejando r y φ de las ecuaciones anteriores

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{1.19}$$
$$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \tag{1.20}$$

1.7. Trigonometría

La trigonometría estudia las relaciones entre los ángulos y los lados de los triángulos. Las razones trigonométricas guardan todas relaciones entre sí. Las más habituales son:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \tag{1.21}$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \tag{1.22}$$

$$1 + \tan^2 x = \sec^2 x \tag{1.23}$$

Para la suma de ángulos se tiene

$$\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b \tag{1.24}$$

$$\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b \tag{1.25}$$

$$\tan(a \pm b) = \frac{\tan a \pm \tan b}{1 \mp \tan a \tan b} \tag{1.26}$$

De las anteriores expresiones se deducen las fórmulas del ángulo doble

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x \tag{1.27}$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x \tag{1.28}$$

$$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} \tag{1.29}$$

Son muy útiles en el movimiento ondulatorio las sumas de funciones trigonométricas:

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2 \sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cos\frac{\alpha-\beta}{2} \tag{1.30}$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2 \cos\frac{\alpha+\beta}{2} \sin\frac{\alpha-\beta}{2} \tag{1.31}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2 \cos\frac{\alpha+\beta}{2} \cos\frac{\alpha-\beta}{2} \tag{1.32}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = 2 \sin\frac{\alpha+\beta}{2} \sin\frac{\alpha-\beta}{2} \tag{1.33}$$

Para los ángulos complementarios se cumple que

$$\sin\alpha = \cos(90^{\circ} - \alpha) \tag{1.34}$$

$$\cos\alpha = \sin(90^{\circ} - \alpha) \tag{1.35}$$

$$\tan\alpha = \cot(90^{\circ} - \alpha) \tag{1.36}$$

Y para los ángulos suplementarios

$$\sin\alpha = \sin(180^{\circ} - \alpha) \tag{1.37}$$

$$\cos\alpha = -\cos(180^{\circ} - \alpha) \tag{1.38}$$

$$\tan\alpha = -\tan(180^{\circ} - \alpha) \tag{1.39}$$

1.8. El sistema internacional de unidades (SI)

Distancia Se mide en metros (m)

Tiempo Se mide en segundos (s)

Velocidad Se mide en m/s

Aceleración Se mide en m/s^2

Masa Se mide en kilogramos (kg)

Fuerza Se mide en Newtons (N) ($1\ N = 1\ kg{\cdot}m/s^2$)

Campo gravitatorio Se mide en N/kg o en m/s^2

Energía Se mide en joules (julios), J (ya sea energía cinética o potencial)

Potencia Es energía/tiempo, se mide en J/s = W (watios)

Potencial gravitatorio Joules/kg = J/kg

Periodo Es un tiempo, en segundos

Frecuencia Es la inversa del periodo, en s^{-1} o Hertzios (Hz)

Intensidad de las ondas Se mide en W/m^2

Sensación sonora Se mide en decibelios (dB). Es adimensional en realidad

Diferencia de fase No tiene dimensiones (son radianes)

Índice de refracción No tiene dimensiones. $n = c/v$

Potencia de una lente Se mide en dioptrías o m^{-1}

Carga eléctrica Se mide en coulombios, C

Campo eléctrico Se mide en N/C. A veces en V/m

Corriente eléctrica (intensidad) Se mide en amperios (A); 1 A = 1 C/s

Potencial electrostático Se mide en voltios, V, o J/C

Campo magnético Se mide es teslas, T

Flujo magnético Se mide en webers, Wb, o también $T{\cdot}m^2$

Fuerza electromotriz Se mide en voltios (no en unidades de fuerza)

Factores de conversión: 1 n (nano)= 10^{-9}, 1 μ (micro) = 10^{-6}, 1 m (mili) = 10^{-3}, 1 k (kilo)= 10^{3}, 1 M (mega)= 10^{6}, 1 G (giga)= 10^{9}, 1 T (tera)= 10^{12}.

1.9. Cuestiones

1. Demuestra que la desigualdad triangular, $|\vec{a}+\vec{b}| \leqslant |\vec{a}|+|\vec{b}|$, se cumple para los vectores $\vec{a}=\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$ y $\vec{b}=-2\vec{i}+5\vec{j}-3\vec{k}$. ¿Qué condición han de cumplir cualesquiera vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ para que $|\vec{a}+\vec{b}| = |\vec{a}|+|\vec{b}|$?

2. Sean los vectores $\vec{A}=(-3,0,4)$, $\vec{B}=(1,1,-2)$ y $\vec{C}=(5,-3,6)$, calcular:
$$\begin{array}{ll} (a) & \vec{A}+\vec{B}+\vec{C} \\ (b) & -4\vec{A}+6\vec{B}-\vec{C} \\ (c) & |\vec{A}-\vec{B}-\vec{C}| \end{array}$$

3. Calcula el producto escalar y el ángulo que forman los vectores $\vec{v}=\vec{i}-3\vec{k}$ y $\vec{w}=-\vec{i}-\vec{j}-\vec{k}$

4. Demuestra que
$$|\vec{a}+\vec{b}| = \sqrt{|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi}$$

5. Con los vectores $\vec{a}=\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{b}=-2\vec{i}+5\vec{j}-3\vec{k}$ y $\vec{c}=\vec{i}+\vec{j}+4\vec{k}$, comprueba:
$$\begin{array}{ll} (a) & \vec{a}\wedge\vec{a}=0 \\ (b) & \vec{a}\wedge\vec{b}=-\vec{b}\wedge\vec{a} \\ (c) & \vec{a}\wedge(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\wedge\vec{b}+\vec{a}\wedge\vec{c} \end{array}$$

6. Con los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ del problema 5 demuestra que el producto vectorial $\vec{a}\wedge\vec{b}$ es un vector perpendicular a $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

7. Demuestra que para cualesquiera dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ se cumple
$$(\vec{a}-\vec{b})\wedge(\vec{a}+\vec{b}) = 2\,\vec{a}\wedge\vec{b}$$

8. Dos vectores en el plano tienen por módulos $F_1 = 10$ y $F_2 = 8$. El primero forma un ángulo de 30º con el eje X y el segundo de 120º. Calcular: (a) las componentes cartesianas de cada vector; (b) el vector suma, $\vec{F_1}+\vec{F_2}$, y su módulo; (c) comprueba la desigualdad triangular.

9. Calcula el valor de x para que los vectores $\vec{a}=(1,-3,5)$ y $\vec{b}=(6,x,-3)$ sean perpendiculares.

1.10. Soluciones a las cuestiones

1. Calculando los módulos de los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{a}+\vec{b}$ se llega a que, $|\vec{a}| = \sqrt{3}$, $|\vec{b}| = \sqrt{38}$, $|\vec{a}+\vec{b}| = \sqrt{21}$, y por lo tanto, $\sqrt{21} < \sqrt{3} + \sqrt{38}$. Para que la desigualdad triangular se cumpla con el signo igual los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ han de ser paralelos. La suma gráfica de vectores ayuda a verlo.

2. (a) $\vec{A}+\vec{B}+\vec{C} = (3,-2,8)$; (b) $-4\vec{A}+6\vec{B}-\vec{C} = (13,9,-34)$; (c) $|\vec{A}-\vec{B}-\vec{C}| = \sqrt{85}$

3. $\vec{v}\cdot\vec{w} = 2$; $\varphi = 68,58^{\circ}$.

4. Sabiendo que $|\vec{v}|^2 = \vec{v}\cdot\vec{v}$, no hay más que hacer $\vec{v} = \vec{a}+\vec{b}$

$$
\begin{aligned}
|\vec{a}+\vec{b}|^2 &= (\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b}) = \vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{b} \\
&= |\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi
\end{aligned}
$$

5. (a) Aplicando la regla del producto vectorial

$$
\vec{a}\wedge\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} =
$$

$$
= \vec{i}(-1-(-1)) - \vec{j}(1-1) + \vec{k}(-1-(-1)) = (0,0,0)
$$

(b) Aplicando la regla anterior se llega a $\vec{a}\wedge\vec{b} = (-2,1,3) \equiv -2\vec{i}+\vec{j}+3\vec{k}$. Por las propiedades de los determinantes al cambiar una fila de orden cambia el signo del determinante.

(c) Aplicando de nuevo las reglas del producto vectorial $\vec{a}\wedge(\vec{b}+\vec{c}) = (-7,-2,5)$

6. Es una propiedad del producto vectorial. Haciendo el producto escalar de $\vec{a}\wedge\vec{b}$ con $\vec{a}$ y luego con $\vec{b}$ podemos comprobar que ambos dan cero.

7. Hay que aplicar las propiedades del producto vectorial y darse cuenta de que no es conmutativo.

8. (a) $\vec{F_1} = (5\sqrt{3},5)$, $\vec{F_2} = (-4,4\sqrt{3})$; (b) $\vec{F_1}+\vec{F_2} = (5\sqrt{3}-4, 5+4\sqrt{3})$; $|\vec{F_1}+\vec{F_2}| = \sqrt{164}$; (c) Se cumple que $\sqrt{164} < 10+8$.

9. Como son vectores perpendiculares forman un ángulo de 90°, por lo tanto su producto escalar es cero. Resolviendo la ecuación llegamos a que $x = -3$.

2 — Gravitación universal

2.1. Cuestiones y problemas

1. Demuestra que la velocidad orbital de un satélite de masa m alrededor de un planeta de masa M de radio R y a una altura de la superfice h, viene dada por la fórmula

$$v = \sqrt{\frac{GM}{R+h}}$$

donde G es la constante de gravitación universal.

2. Dos satélites idénticos están en órbita alrededor de la Tierra, siendo sus órbitas circulares y de radios distintos. ¿Cuál de los dos se moverá a mayor velocidad? ¿Por qué?

3. La Luna tiene un periodo de orbital alrededor de la Tierra de 27,3 días. Si la Luna se alejara de la Tierra justo al doble de distancia de la que se encuentra ahora, ¿cual sería ahora el periodo de orbital de la Luna?

4. El semieje mayor de la órbita terrestre mide $1{,}5 \times 10^8$ km. ¿Cuál será la duración del año de Júpiter si su semieje mayor es de $7{,}8 \times 10^8$ km?

5. El campo gravitatorio es máximo

   a) en el centro de la Tierra.
   b) en la superficie terrestre.
   c) a distancia infinita de la Tierra.
   d) depende de la masa del cuerpo que se considere.

   Razonar la respuesta.

6. Demuestra que si nos alejamos de la superficie terrestre una distancia igual al doble del radio de la Tierra, la aceleración de la gravedad vale $\frac{g_0}{9}$, donde g_0 es el valor de la aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra.

7. Un cometa, en su punto de máximo acercamiento al Sol, llamado perihelio, se encuentra a una distancia del Sol de 0,4 UA (unidades astronómicas) y su velocidad es de 42 km/s. Si el afelio, el punto más alejado del Sol, se halla a 20 UA, ¿cuál será su velocidad en ese punto? Calcula el periodo orbital del cometa alrededor del Sol.

8. ¿Qué es un satélite geoestacionario? ¿A qué altura y donde hay que colocarlo? (Dejar la expresión en función de G, M_{Tierra} y R_{Tierra})

9. Calcula el potencial gravitatorio creado por un planeta que tiene una masa de 4×10^{15} kg y un diámetro de 4 000 km, a una distancia de 1 000 km de su superficie.

10. Halla la velocidad con la que llegará a la superficie terrestre un objeto de masa m que se deja caer desde 500 km de altura, partiendo del reposo y despreciando el rozamiento. (g_0 = 9,8 m/s^2, R_T = 6370 km)

11. Hallar la aceleración de la gravedad en la superficie del planeta enano Plutón, sabiendo que su masa es $\frac{1}{460}$ veces la masa de la Tierra y su radio es $\frac{1}{6}$ veces el radio de la Tierra. (g_0 = 9,8 m/s^2)

12. Con los datos del problema anterior calcula cuál será la velocidad de escape en Plutón si la velocidad de escape en la Tierra es de 11 km/s.

13. Demuestra que si desde la superficie de un planeta de masa M y radio R lanzamos verticalmente un cuerpo con una velocidad $v = \sqrt{\frac{GM}{R}}$, el cuerpo alcanza una altura igual al radio del planeta.

14. Queremos situar un satélite en órbita alrededor de la Tierra, a una altura tal que su velocidad es de 8 100 km/h. Calcular

    a) altura a la que se ha de situar

    b) si por error se le comunica una velocidad de 10 800 km/h, explicar razonándolo que sucederá

    (g_0 = 9,8 m/s^2, R_T = 6370 km)

15. ¿A qué altura sobre la superficie terrestre hay que colocar un cuerpo para que la fuerza con que es atraído sea la mitad de la que experimenta en su superficie?

16. Existe un punto sobre la línea que une el centro de la Tierra con el centro de la Luna en que se anula la fuerza gravitatoria total, conocido como punto de Lagrange L_1. Calcula la distancia de ese punto al centro de la Tierra, sabiendo que la distancia entre el centro de la Tierra y la Luna es de 380 000 km. ($M_{Tierra} = 81\,M_{Luna}$)

17. Calcula la energía cinética que hay que suministrar a un cohete de 10 000 kg de masa para que ascienda a una altura de 12 000 km y se quede en órbita alrededor de la Tierra. ($G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ Nm^2/kg^2, $M_T = 5{,}97 \times 10^{24}$ kg, $R_T = 6370$ km)

18. Cuatro masas de 2 kg cada una están situadas sobre los vértices de un cuadrado de 1 m de lado. Calcula el módulo de la fuerza gravitatoria que se ejerce sobre la que se halla en el vértice superior derecho. ($G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ Nm^2/kg^2)

19. Si la Tierra redujera su radio a la mitad y mantuviese la misma masa

    a) ¿en cuanto variaría el peso de los cuerpos que se hallan sobre ella?

    b) ¿como se modificaría el periodo orbital de la Luna?

20. Demuestra que la energía mecánica que tiene un satélite de masa m en órbita circular alrededor de un planeta de masa M y radio R es

$$E_m = -\frac{GMm}{2(R+h)}$$

    donde h es la altura a la que se halla el satélite de la superficie del planeta.

21. Dos masas iguales y de valor 10^8 kg se hallan sobre el eje X y separadas una distancia de 12 m. En el punto central entre ambas se halla una masa de $m = 10^6$ kg. Calcula el trabajo realizado por la gravedad para llevar la masa m desde el punto medio al punto $(0, 8)$ m. $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ Nm^2/kg^2

22. Un proyectil de masa 10 kg se dispara verticalmente desde la superficie de la Tierra con una velocidad de 3 200 m/s.

    a) ¿Cuál es la máxima energía potencial que adquiere?

    b) ¿En qué posición se alcanza?

    ($G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ Nm^2/kg^2, $M_T = 5{,}97 \times 10^{24}$ kg, $R_T = 6370$ km)

23. El cometa Halley describe una órbita elíptica alrededor del Sol. Indica para cada una de las siguientes magnitudes si su valor es mayor, menor o igual en el afelio que en el perihelio. (afelio=punto más lejano al Sol, perihelio=punto más cercano al Sol)

    a) Momento angular respecto al Sol

    b) Momento lineal

    c) Energía potencial

    d) Energía mecánica

24. El campo gravitatorio creado por dos masas m_1 y m_2, que podemos considerar puntuales y separadas una distancia r, se anula a una distancia $\frac{r}{3}$ de la masa m_1. ¿Cuánto vale la relación entre las masas, $\frac{m_1}{m_2}$?

25. Demuestra que si un cuerpo de masa m cae desde una altura h lo suficientemente pequeña en comparación con el radio terrestre, hasta el suelo, el trabajo realizado por la fuerza de la gravedad es sencillamente

$$W = m\, g_0\, h$$

donde g_0 es el valor de la aceleración de la gravedad en la Tierra.

26. Los agujeros negros son unos objetos exóticos del Universo que han colapsado por gravedad y en los que la velocidad de escape es superior a la velocidad de la luz. Calcula cuál debería ser el radio del Sol para que se convirtiera en un agujero negro. Este radio se conoce también con el nombre de radio de Schwarzschild. (La velocidad de la luz es $c = 3 \times 10^8$ m/s, $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ Nm^2/kg, $M_{Sol} = 1,989 \times 10^{30}$ kg, $R_{Sol} = 6,96 \times 10^8$ m.

27. Demuestra que para un satélite a una distancia r de un planeta de masa M, la relación entre su velocidad de escape y su velocidad orbital es $\sqrt{2}$.

28. Un satélite de masa m está en órbita alrededor de un planeta de masa M a una distancia r_1 de su centro. Queremos ponerlo en una órbita superior a una distancia r_2 del planeta, $r_2 > r_1$. Demuestra que el trabajo para pasar de la primera órbita a la segunda es positivo y que su valor es:

$$W = \frac{GMm}{2}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

donde G es la constante de gravitación universal.

29. Demuestra que si sobre un planeta de masa M y radio R, lanzamos hacia arriba un cuerpo con una velocidad

$$v = \sqrt{\frac{3GM}{2R}}$$

dicho cuerpo llega a una altura igual al radio del planeta y se queda en órbita.

30. Un cuerpo que se encuentra en un campo gravitatorio se mueve entre dos puntos A y B de una superficie equipotencial. ¿Qué trabajo realiza la fuerza gravitatoria para mover el cuerpo entre A y B? Si la energía potencial del cuerpo en B es de -800 J y seguidamente pasa del punto B al C, donde su energía potencial es de -1000 J, discute si su energía cinética es mayor en B o en C.

31. Calcula el periodo orbital de un satélite artificial alrededor de la Luna si se halla a 100 km de su superficie. Datos: aceleración de la gravedad en la superficie lunar, $g_L = 1,62$ m/s^2. Radio lunar, 1737 km.

32. Demuestra que la velocidad de escape de un cuerpo de masa m desde la superficie de un planeta de masa M y radio R es

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

33. La Estación Espacial Internacional (ISS) describe alrededor de la Tierra una órbita prácticamente circular a una altura de 390 km sobre la superficie terrestre, siendo su masa $m = 415$ toneladas. Calcular:

    a) El periodo de rotación en minutos y la velocidad a la que se desplaza.

    b) La energía necesaria para llevarla de su órbita actual a otra con el doble de altura. ¿Cuál será el valor del periodo de rotación en esta nueva órbita?

34. Calcula a qué velocidad hay que lanzar un cohete desde la superficie terrestre para que llegue a la Luna. Nota: Basta con que llegue al punto de Lagrange L_1 para que la gravedad lunar lo atraiga. Se puede usar el resultado del problema 16. Datos: $d_{TL} = 3,84 \times 10^8$ m. $M_T = 5,97 \times 10^{24}$ kg. $M_L = 7,35 \times 10^{22}$ kg. $R_T = 6,37 \times 10^6$ m.

35. Un satélite artificial de 800 kg de masa describe una órbita elíptica alrededor de la Tierra. En el perigeo, a 630 km de altura su velocidad es de 9240 m/s. Calcula su velocidad cuando se halle en un punto a 17 630 km de la superficie terrestre. Datos: $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ Nm^2/kg^2, $M_T = 5{,}97 \times 10^{24}$ kg, $R_T = 6370$ km.

36. Se ha descubierto un sistema binario formado por dos estrellas que tienen una órbita elíptica. Las medidas astrométricas nos dicen que el periastro es de 2,6 UA y el apoastro de 121,3 UA. Calcular:

    a) El periodo orbital del sistema en años.

    b) Si una de las estrellas tiene una masa de 0,8 $M_\odot$, (donde $M_\odot$ es la masa del Sol), calcula la masa (en $M_\odot$) de la otra estrella del sistema.
    Datos: $M_\odot = 1{,}98 \times 10^{30}$ kg. $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ Nm^2/kg^2. 1 UA = $1{,}5 \times 10^8$ km.

2.2. Soluciones

1. La demostración es muy sencilla, solo basta igualar la fuerza centrípeta con la fuerza gravitatoria

$$m\frac{v^2}{r} = G\frac{Mm}{r^2}$$

en donde se cancelan las m y una r del denominador quedando

$$v^2 = G\frac{M}{r} \rightarrow v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

en donde r es la distancia del centro del planeta al punto donde se encuentra el satélite, es decir, $r = R + h$, y sustituyéndolo de nuevo en la fórmula

$$v = \sqrt{\frac{GM}{R+h}}$$

Es importante destacar que la velocidad orbital del satélite no depende de la masa del propio satélite, solo de la masa del planeta.

2. Se mueve a mayor velocidad el que se halla más cerca del planeta. Por la segunda ley de Kepler, la velocidad aerolar es constante, por lo tanto al estar más cerca del planeta, un satélite ha de moverse más rápido para barrer la misma área que cuando está más lejos. Por la conservación del momento angular se puede también argumentar.

3. El periodo orbital sería de 77,2 días

4. 11,86 años terrestres

5. Es la b), o sea en la superficie terrestre. Esto es así porque a medida que descendemos al interior de la Tierra solo cuenta la masa que está debajo de nosotros y por lo tanto en el interior de la Tierra el campo gravitatorio disminuye hasta hacerse cero en el centro terrestre. Como el campo disminuye también con la altura, el máximo tiene lugar sobre la superficie de la Tierra.

6. Como $g = \dfrac{g_0 R_T^2}{(R_T+h)^2}$, tenemos que al ser $h = 2R_T$

$$g = \frac{g_0 R_T^2}{(R_T+h)^2} = \frac{g_0 R_T^2}{(R_T+2R_T)^2} = \frac{g_0 R_T^2}{(3R_T)^2} = \frac{g_0 R_T^2}{9R_T^2} = \frac{g_0}{9} \tag{2.1}$$

7. La velocidad en el afelio es 0,84 km/s. El periodo del cometa es $T = 32{,}58$ años.

8. Es un satélite cuyo periodo de revolución alrededor de la Tierra es justo de 1 día, por lo tanto siempre apunta a un mismo lugar de la Tierra. Por la tercera ley de Kepler tenemos que
$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM} \tag{2.2}$$
de donde despejando r
$$r = \sqrt[3]{\frac{GMT^2}{4\pi^2}}, \quad \text{y como} \quad r = R_T + h, \quad \text{tenemos} \tag{2.3}$$
$$h = \sqrt[3]{\frac{GMT^2}{4\pi^2}} - R_T = 573{,}97\sqrt[3]{GM} - R_T \tag{2.4}$$

9. $V_g = -0{,}089$ J/kg

10. $v = 3014$ m/s

11. $g_P = \dfrac{36}{460}\, g_o \simeq 0{,}767$ m/s^2

12.
$$v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = \sqrt{\frac{2G\frac{1}{460}M_T}{\frac{1}{6}R_T}} = \sqrt{\frac{6}{460}}\sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}} \simeq 0{,}114 \times 11\,000 \simeq 1\,254 \text{ m/s} \tag{2.5}$$

13. Hay que aplicar el principio de conservación de la energía mecánica
$$\frac{1}{2}m\,v^2 - \frac{GMm}{R} = 0 - \frac{GMm}{R+h} \tag{2.6}$$
La energía cinética final es cero porque el cuerpo acaba deteniéndose. Si sustituimos v por la velocidad que nos dan en la cuestión
$$\frac{1}{2}m\,\frac{GM}{R} - \frac{GMm}{R} = -\frac{GMm}{R+h} \tag{2.7}$$
En la ecuación anterior se cancelan todos los término GMm, y despejando h se llega a que $h = R$

14. (a) 72 179 km; (b) Pasará a otra órbita pero no escapará

15. $h = (\sqrt{2} - 1)R_T$

16. $d_T \simeq 342\,000$ km

17. $E_c = 5{,}1673 \times 10^{11}$ J

18. $F = 2G(2\sqrt{2}+1) = 5,1 \times 10^{-10}$ N

19. (a) El peso se multiplicaría por 4 (b) No afectaría para nada al periodo orbital de la Luna

20. Hay que usar la definición de energía mecánica

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{R+h} \quad \text{y sustituir la velocidad orbital,} \quad v = \sqrt{\frac{GM}{R+h}} \tag{2.8}$$

con lo que la fórmula anterior queda $E_m = -\dfrac{GMm}{2(R+h)}$

21. $W = -889,33$ J

22. (a) $E_p = -5,74 \times 10^8$ J; (b) $h = 568,47$ km

23. (a) Es el mismo siempre porque es constante; (b) $p_{perihelio} > p_{afelio}$, pues en el perihelio va más rápido; (c) $E_p^{afelio} > E_p^{perihelio}$; (d) Es la misma porque la energía mecánica es constante.

24. $\dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{1}{4}$

25. $W = -\Delta E_p = -\left(-\frac{GM_Tm}{R_T} + \frac{GM_Tm}{R_T+h}\right) = GM_Tm\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{R_T+h}\right) = \frac{GM_Tm\,h}{R_T(R_T+h)}$

y como $h + R_T \simeq R_T$, $\frac{GM_T}{R_T(R_T+h)} \simeq \frac{GM_T}{R_T^2} \simeq g_o$ y sustituyendo, $W = mg_oh$

26. $R_{Schwarzschild}^{SOL} = 2\,950$ m

27. A partir de las fórmulas de la velocidad de escape y la velocidad orbital,

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM}{r}}, \qquad v_o = \sqrt{\frac{GM}{r}} \tag{2.9}$$

dividiendo una por otra se cancelan G, M y r, y se llega a $v_e/v_o = \sqrt{2}$

28. Sabiendo que la energía orbital de un satélite de masa m a una distancia r del centro de un planeta de masa M es

$$E = -\frac{1}{2}\frac{GMm}{r} \tag{2.10}$$

El trabajo se calcula sencillamente por la diferencia de energías orbitales. Como es un trabajo que hay que suministrar

$$W = \Delta E = E_2 - E_1 = -\frac{1}{2}\frac{GMm}{r_2} - \left(-\frac{1}{2}\frac{GMm}{r_1}\right) = \frac{GMm}{2}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \tag{2.11}$$

Si $r_2 > r_1$ se tiene que $W > 0$. También se puede hallar por la diferencia de energías de satelización, $W = E_{S_2} - E_{S_1}$

$$E_{S_2} - E_{S_1} = GMm\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{2r_2}\right) - GMm\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{2r_1}\right) = \frac{GMm}{2}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \quad (2.12)$$

29. Sabemos que la energía orbital de un cuerpo de masa m que gira alrededor de un planeta es $E = -\frac{1}{2}\frac{GMm}{R+h}$. Según el problema $h = R$, por lo tanto

$$E = -\frac{1}{2}\frac{GMm}{R+R} = -\frac{1}{4}\frac{GMm}{R} \quad (2.13)$$

Hay que demostrar ahora que la energía mecánica del cuerpo con los datos que nos dan es igual al valor anterior y con ello tendremos garantizado que el satélite se queda en órbita.

$$E_M = E_C + E_P = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{R} \quad (2.14)$$

Ahora bien la velocidad a la que lanzamos el cuerpo es

$$v = \sqrt{\frac{3GM}{2R}} \quad (2.15)$$

y si la sustituimos en 2.14 tenemos

$$E_M = \frac{1}{2}m\left(\sqrt{\frac{3GM}{2R}}\right)^2 - \frac{GMm}{R} = \frac{3}{4}\frac{GMm}{R} - \frac{GMm}{R} = -\frac{1}{4}\frac{GMm}{R} \quad (2.16)$$

que es exactamente lo que hemos obtenido en la fórmula 2.13. Se concluye por tanto que el cuerpo queda en órbita alrededor del planeta. Lo único que hay que considerar es que hay que cambiar la dirección de la velocidad para que se quede en órbita.

30. En una superficie equipotencial por definición todos los puntos tienen la misma energía potencial, por lo tanto el trabajo realizado por la fuerza gravitatoria será

$$W = -\Delta E_P = 0\,\mathrm{J} \quad (2.17)$$

Por tanto el trabajo realizado por la fuerza de la gravedad es nulo. Para pasar del punto B al punto C el trabajo será ahora

$$W = -\Delta E_P = -(E_{PC} - E_{PB}) = -(-1000 - (-800)) = 200\,\mathrm{J} \quad (2.18)$$

Ahora bien sabemos igualmente que el trabajo se puede poner como la variación de energía cinética

$$W = \Delta E_C = (E_{CC} - E_{CB}) = 200\,\mathrm{J} \quad (2.19)$$

La variación de energía cinética es positiva, por tanto en el punto C la energía cinética será mayor que en el B.

Se podría haber razonado por un criterio de signos. La energía potencial en C es -1000 J y en B -800 J, por lo tanto la energía potencial *ha disminuido* (pues $-1000 < -800$). Si disminuye la energía potencial, por conservación de la energía, se debe a que *ha aumentado* la energía cinética, por lo tanto en C la energía cinética es mayor que en B, al igual que habíamos concluido antes.

31. La velocidad orbital de un satélite a una altura h de la superficie lunar es

$$v = \sqrt{\frac{GM_L}{R_L + h}} \tag{2.20}$$

Como $v = \omega r$ la anterior ecuación se puede poner como

$$v = \sqrt{\frac{GM_L}{R_L + h}} = \omega \cdot (R_L + h) = \frac{2\pi}{T} \cdot (R_L + h) \tag{2.21}$$

donde T es el periodo orbital. Elevando al cuadrado en la ecuación anterior

$$\frac{GM_L}{R_L + h} = \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot (R_L + h)^2 \tag{2.22}$$

y despejando el periodo

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 (R_L + h)^3}{GM_L}} = \sqrt{\frac{4\pi^2 (R_L + h)^3}{g_L R_L^2}} \tag{2.23}$$

donde hemos usado que

$$g_L = \frac{GM_L}{R_L^2} \tag{2.24}$$

ya que no nos dan la masa de la Luna. Simplificando la fórmula 2.23

$$T = \frac{2\pi}{R_L} \sqrt{\frac{(R_L + h)^3}{g_L}} \tag{2.25}$$

Sustituyendo todos los valores en 2.25

$$T \simeq 7076\,\mathrm{s} = 1\,\mathrm{h}\ 57\,\mathrm{m}\ 56\,\mathrm{s} \tag{2.26}$$

32. Por conservación de la energía la velocidad de escape será aquella que permita llegar al cuerpo de masa m a una distancia infinita con velocidad nula. Igualando las energía mecánicas en la superficie del planeta y en el infinito,

$$\frac{1}{2} m v^2 - \frac{GMm}{R} = \frac{1}{2} m 0^2 - \frac{GMm}{\infty} = 0 \tag{2.27}$$

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{R} = 0 \rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = \frac{GMm}{R} \tag{2.28}$$

Se cancelan las masas m a ambos lados de la ecuación, y despejando v

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{R}} \tag{2.29}$$

33. *a*) $T \simeq 92$ min. $v = 7681,4$ m/s.

    b) $\Delta E = 6,68 \times 10^{11}$ J. $T \simeq 100$ min.

34. $v \simeq 1,11 \times 10^4$ m/s.

35. $v \simeq 2160$ m/s.

36. *a*) $T = 487{,}6$ años

    b) $m = 0{,}21\, M_\odot$

2.3. Fórmulas del campo gravitatorio

Ley de la gravitación universal $\vec{F}_{12} = -G\,\dfrac{m_1 m_2}{r_{12}^3}\,\vec{r}_{12} = -G\,\dfrac{m_1 m_2}{r^2}\,\vec{u}_r$

Tercera ley de Kepler $\dfrac{T_1^2}{a_1^3} = \dfrac{T_2^2}{a_2^3} = \dfrac{T_3^2}{a_3^3} \cdots ,$ donde a es el semieje mayor de la órbita

Tercera ley de Kepler $\dfrac{T^2}{a^3} = \dfrac{4\pi^2}{G(M+m)}$

Campo gravitatorio $\vec{g} = -G\,\dfrac{M}{r^2}\,\vec{u}_r$ Gravedad con la altura $g = \dfrac{g_0\,R_T^2}{(R_T+h)^2}$

Energía potencial gravitatoria $E_P = -G\,\dfrac{M\,m}{r}$ Potencial gravitatorio $V = -G\,\dfrac{M}{r}$

Energía mecánica $E_M = E_C + E_P = \dfrac{1}{2}mv^2 - \dfrac{GMm}{r}$

Trabajo conservativo realizado por la fuerza de la gravedad $W_{AB} = -\Delta E_P = -m(V_B - V_A)$

Trabajo realizado por una fuerza externa conservativa $W_{AB} = \Delta E_P$

Velocidad orbital $v_0 = \sqrt{\dfrac{GM}{r}}$ Velocidad de escape $v_e = \sqrt{\dfrac{2GM}{r}}$

Energía orbital de un satélite $E_{orb} = -\dfrac{GMm}{2r}$

Energía de satelización $E_S = GM_T m\left(\dfrac{1}{R_T} - \dfrac{1}{2(R_T+h)}\right)$

3 — Movimiento Armónico Simple

3.1. Cuestiones y problemas

1. Lee las siguientes afirmaciones y di cuales son verdaderas y cuales falsas

   a) La elongación es el valor máximo de la amplitud.

   b) Si cada vibración dura 4 segundos, la frecuencia es 4 Hz. Si cada segundo se producen 10 vibraciones el periodo es 10 s.

   c) Haciendo oscilar un muelle, el producto del periodo por la frecuencia es una constante distinta para cada resorte.

   d) El MAS es un movimiento rectilíneo. Por eso no existe aceleración normal.

   e) El periodo de vibración de una masa suspendida a un muelle elástico es proporcional a la amplitud.

2. Un punto vibra sobre un segmento rectilíneo de 20 cm de longitud. El periodo de la vibración es 4 s y, en el instante inicial, su elongación es de 10 cm y su velocidad nula.

   a) Escribir las ecuaciones que dan la elongación, velocidad y aceleración de este movimiento en función del tiempo.

   b) Calcular las posiciones, velocidades y aceleraciones en en los instantes 0.5 s y 2.5 s

   c) Determinar la velocidad máxima y calcular en qué momento alcanza por primera vez esta velocidad. Calcular también la elongación y la aceleración en ese momento.

   d) Determina la velocidad y aceleración en el momento en que pasa por primera vez por un punto cuya elongación es 5 cm. ¿En qué instante sucede?

3. Una pequeña masa de 100 g está suspendida de un resorte helicoidal, en equilibrio. Se tira de dicha masa, verticalmente hacia abajo hasta llevarla 10 cm por debajo de la posición de equilibrio y se deja en libertad. La masa emplea dos segundos en cada vibración

a) Escribir la ecuación del MAS

b) Calcular su velocidad y aceleración al pasar por la posición de equilibrio, por primera vez, y el instante en qué esto sucede.

c) Calcular la velocidad y aceleración cuando pasa, por vez primera, por el punto que está 5 cm por encima de la posición de equilibrio.

d) Calcula el tiempo que emplea en desplazarse desde 5 cm por debajo a 5 cm por encima de la posición de equilibrio.

4. Un punto material de 25 g de masa realiza un movimiento armónico simple. En el instante inicial, su elongación es de 10 cm y tiene una velocidad de 0.4 m/s, en sentido positivo. La fuerza que origina el movimiento, tiene, en el instante inicial, un valor de 0.04 N

   a) Calcular pulsación, periodo y frecuencia.

   b) Calcular la amplitud. La energía potencial elástica en el instante inicial es 0.002 J.

   c) Calcular la elongación, velocidad, aceleración e intensidad de la fuerza en el instante $t = \frac{1}{8}$ s.

5. Un objeto de 2 kg de masa está sujeto a un muelle que oscila con un MAS cuya amplitud es de 3 cm, siendo su periodo 1.5 s. Calcula:

   a) La energía total del sistema

   b) La velocidad máxima con la que se mueve el objeto

6. Si se duplica la amplitud de un oscilador armónico simple, ¿como varía su energía?

7. Cuando una masa m_1, cuelga del extremo inferior de un resorte vertical, este realiza oscilaciones con movimiento armónico simple, de periodo T_1. Calcula el periodo de las oscilaciones T_2 cuando se agrega una masa m_2 al resorte.

8. Dos objetos de la misma masa se encuentran unidos a sendos muelles idénticos. Se estiran a la vez, el primero 10 cm y el segundo 5 cm, y se dejan en libertad. ¿Cuál de los dos objetos alcanzará primero la posición de equilibrio?

9. La expresión
$$x = \sin(\pi\, t)$$
   en la que x se mide en metros y t en segundos, describe un MAS. Se pide:

   a) Amplitud, periodo, frecuencia y pulsación

   b) Obtén las ecuaciones $v = v(t)$ y $a = a(t)$

c) Completa la tabla que se adjunta

t	x	v	a
0			
$T/4$			
$T/2$			
$3T/4$			
T			

10. La ecuación del MAS con que se mueve un objeto viene dada por

$$y = \sin(6\pi\, t + \pi)$$

La masa del cuerpo que oscila es M. Calcula

a) La amplitud, frecuencia y periodo de las oscilaciones

b) La energía potencial de la masa en cualquier instante

c) La energía cinética de la masa en cualquier instante

d) La energía mecánica de la masa en cualquier instante

11. La ecuación de movimiento de una partícula es

$$x = A\sin(\omega\, t + \varphi_0)$$

El tiempo que tarda en realizar una oscilación completa es de 2 s y la trayectoria que describe es un segmento de 12 cm de longitud sobre el eje X, coincidiendo su punto medio sobre el origen de coordenadas. Se sabe que en el instante inicial la partícula se encontraba a una distancia $\frac{A}{2}$ del origen, moviéndose en el sentido positivo del eje X.

a) Hallar los valores de A, ω y φ_0

b) Posición y velocidad de la partícula en el instante $t = \frac{1}{6}$ s.

3.2. Soluciones

1. (a) Falso, (b) Falso, (c) Falso, (d) Verdadero, (e) Falso

2. (a) $x = 0,1\sin(\frac{\pi}{2}(t+1))$, $v = 0,157\cos(\frac{\pi}{2}(t+1))$, $a = -0,247\sin(\frac{\pi}{2}(t+1))$; (b) $x = 7,07$ cm, $v = -11,11$ cm/s, $a = -17,45$ cm/s^2; $x = -7,07$ cm, $v = 11,11$ cm/s, $a = 17,45$ cm/s^2; (c) $v_{max} = 15,71$ cm/s; $t = 1$ s. $x = 0$, $a = 0$; (d) $t = 0,67$ s, $v = -13,6$ cm/s, $a = 12,33$ cm/s^2

3. (a) $x = 0,1\sin(\pi\, t - \frac{\pi}{2})$; (b) $t = 0,5$ s, $v = 0,314$ m/s, $a = 0$ m/s^2; (c) $v = 0,27$ m/s, $a = -0,49$ m/s^2; (d) $\Delta\, t = 0,33$ s

4. (a) $\omega = 4$ rad/s, $T = 1,57$ s, $f = 0,64$ Hz; (b) $A = 0,14$ m; (c) $x = 0,136$ m, $v = 0,16$ m/s, $a = -2,17$ m/s^2, $F = 0,056$ N

5. (a) $E = 0,016$ J; (b) $v_{max} = 0,126$ m/s

6. $E_2 = 4\,E_1$

7. $$T_2 = T_1\sqrt{\frac{m_1+m_2}{m_1}}$$

8. Alcanzan la posición de equilibrio al mismo tiempo

9. (a) $A = 1$ m, $T = 2$ s, $f = 0,5$ Hz, $\omega = \pi$ rad/s; (b) $v = \pi\cos(\pi\,t)$, $a = -\pi^2\sin(\pi\,t)$;
(c)

t(s)	**x** (m)	**v** (m/s)	**a** (m/s^2)
0	0	π	0
$T/4$	1	0	$-\pi^2$
$T/2$	0	$-\pi$	0
$3T/4$	-1	0	π^2
T	0	π	0

10. (a) $A = 1$ m, $f = 3$ Hz, $T = 0,33$ s; (b) $E_p = 18\,M\pi^2\sin^2(6\pi\,t+\pi)$;
(c) $E_c = 18\,M\pi^2\cos^2(6\pi\,t+\pi)$; (d) $E_m = 18\,M\pi^2$

11. (a) $A = 0,06$ m, $\omega = 3,14$ rad/s, $\varphi_0 = \pi/6$; (b) $x = 5,2$ cm, $v = 9,42$ cm/s

3.3. Fórmulas del MAS

$x = A\sin(\omega\,t+\varphi)$, $v = A\,\omega\cos(\omega\,t+\varphi)$, $a = -A\omega^2\sin^2(\omega\,t+\varphi)$, $v = \pm\omega\sqrt{A^2-x^2}$, $a = -\omega^2\,x$, $v_{max} = A\omega$, $a_{max} = A\omega^2$

$E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\,\omega^2x^2$, $E_c = \frac{1}{2}m\,v^2 = \frac{1}{2}m\,\omega^2(A^2-x^2)$, $E_m = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}m\,\omega^2\,A^2$

$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, $T = \frac{2\pi}{\omega}$, $f = \frac{1}{T}$, $\omega = 2\pi\,f$

4 — Movimiento ondulatorio

4.1. Cuestiones

1. La ecuación de una onda es
$$y = 5\cos(3t - 4x)$$
en el SI. Determinar su amplitud, frecuencia, longitud de onda, velocidad de propagación y sentido de propagación. Escribir la ecuación de otra onda igual que se propague en sentido contrario.

2. La ecuación de ondas de un movimiento ondulatorio es
$$y = 2\ \sin(10\pi\, t + x)$$
donde x se expresa en cm y t en segundos. Determina el sentido de propagación de la onda, su frecuencia, su longitud de onda y su velocidad de propagación.

3. Escribir la ecuación de una onda transversal plana en el SI, si se sabe que se propaga de derecha a izquierda por el eje X, que en el origen de coordenadas su elongación es nula en $t = 0$ s y que sus características son: amplitud, 10 cm, velocidad de propagación 200 m/s y frecuencia 2 000 Hz.

4. Una onda de 500 Hz tiene una velocidad de fase de 350 m/s. ¿Qué distancia hay entre dos puntos que, en un instante dado, tienen una diferencia de fase de 60º?

5. Determinar la diferencia de fase que habrá entre las vibraciones de dos puntos que se encuentran respectivamente a las distancias de 10 y 16 m del centro de vibración, sabiendo que la velocidad de propagación es $v = 300$ m/s y el periodo $T = 0,04$ s.

6. En una cuerda colocada a lo largo del eje X se propaga una onda, determinada por la función
$$\Psi(x, t) = 0,02\ \sin(4x - 8t)$$
donde Ψ y x viene dada en metros y t en segundos. ¿Cuánto tiempo tarda la perturbación en recorrer una distancia de 8 m?

7. Una onda sonora se propaga en el aire siendo su frecuencia de 500 Hz, su longitud de onda 70 cm y su amplitud 0,25 mm. Hallar la velocidad de propagación y la velocidad máxima de la partícula en el aire.

8. Una onda pasa de un medio en el que su velocidad es v_1 a otro medio en el que su velocidad v_2 es mayor, es decir, $v_2 > v_1$. ¿Qué condición se debe dar para que se produzca reflexión total?

9. Escribir una ecuación de onda que se desplaza a 300 m/s, de amplitud 5 cm y periodo 0.4 s, sabiendo que en el instante inicial, el foco se encuentra en su posición de equilibrio.

10. Una onda armónica viaja a 30 m/s en la dirección positiva del eje X con una amplitud de 0.5 m y una longitud de onda de 0.6 m. Escribir la ecuación del movimiento, como una función del tiempo, para un punto al que llega la perturbación y está situado en $x = 0{,}8$ m.

11. La ecuación de una onda transversal es

$$y = 4\sin(8t - 2x)$$

todo en el SI. Calcula la velocidad de propagación de la onda y la diferencia de fase, en un instante dado, de puntos separados 10 cm.

12. De una onda armónica se conoce su pulsación $\omega = 100$ s^{-1} y el número de onda es $k = 50$ m^{-1}. Determina la velocidad, la frecuencia y el periodo de la onda.

13. ¿Cuál es la frecuencia de las ondas electromagnéticas de longitud de onda $\lambda = 3$ mm? ($c = 3 \times 10^8$ m/s.)

14. Escribir la ecuación de una onda que se desplaza a 200 m/s hacia la parte positiva del eje X, de amplitud 5 cm y periodo 0.3 s, sabiendo que en el instante inicial la elongación del foco es máxima

15. De dos ondas de la misma amplitud y frecuencias respectivas 256 y 512 Hz, ¿cuál posee mayor intensidad?

16. ¿Qué relación existe entre las intensidades de la onda recibida por dos puntos A y B, sabiendo que la distancia de B al foco emisor es triple que la de A?

17. La intensidad de la luz procedente de una fuente puntual disminuye como la inversa del cuadrado de la distancia a la fuente. ¿Eso significa que la luz pierde energía cuando viaja a grandes distancias? Explícalo.

18. Si una onda atraviesa una pared de espesor 10 cm, su intensidad se reduce de 6 a 0.5 pW/cm^2. Halla el coeficiente de absorción del medio.

19. ¿Cuál es el coeficiente de absorción del agua del mar, si un buceador comprueba que a 6 m de profundidad, la intensidad de la luz es el 30 % de la existente fuera del agua?

20. La intensidad y la amplitud de una onda disminuyen con la distancia al origen. ¿cuál lo hace más deprisa?

21. Un haz de luz entra en un líquido con un ángulo de incidencia de 45º, siendo el ángulo de refracción de 30º. Calcular la rapidez de la luz en dicho líquido.

22. ¿Cuál es el nivel de intensidad sonora correspondiente a una onda sonora cuya intensidad es 1×10^{-6} W·m^{-2}? ($I_0 = 1 \times 10^{-12}$ W/m^2)

23. Un foco puntual de 10 W de potencia emite ondas sonoras que se propagan uniformemente en todas direcciones. Calcula la intensidad del sonido y el nivel de intensidad sonora a una distancia de 10 m del foco.

24. La intensidad de una onda sonora es dos veces la intensidad de otra. Expresa en decibelios la diferencia de los niveles de intensidad sonora entre ambas.

25. Un pequeño altavoz emite con una potencia de 500 μW y una frecuencia de 1000 Hz. Calcula hasta qué distancia es audible. ($I_0 = 1 \times 10^{-12}$ W/m^2).

26. Dos fuentes sonoras coherentes emiten sonido de 1.7 kHz. Un observador, cuando se encuentra a 4 m de uno de los focos y a 5 m de otro, ¿percibe a esa distancia un máximo o un mínimo de intensidad? (Velocidad del sonido $v = 340$ m/s).

27. Dos ondas armónicas de igual frecuencia $f = 50$ Hz, y amplitud 2 cm se propagan a 1 m/s en el sentido positivo del eje X, siendo $\pi/3$ la diferencia de fase entre ellas. Escribe la ecuación de cada onda y la resultante de su interferencia.

28. Un tren se desplaza a una velocidad de 100 km/h. El silbato de la locomotora produce un sonido de frecuencia 75 Hz. Calcula la longitud de onda y la frecuencia que percibirá un observador que viaja en otro tren a la velocidad de 50 km/h:

    a) Si ambos trenes se aproximan el uno al otro

    b) Si se alejan el uno del otro

    Velocidad del sonido, $v = 340$ m/s.

29. Describe en función de la diferencia de fase, qué ocurre cuando se superponen dos ondas progresivas armónicas de la misma amplitud y frecuencia.

30. Dos sonidos de 50 y 60 dB se emiten simultáneamente. Calcula la intensidad del sonido resultante y su sonoridad. ($I_0 = 1 \times 10^{-12}$ W/m^2).

31. En el gallinero de una granja se hallan 100 gallinas cacareando. Si cada gallina produce un cacareo de 40 dB, calcula el nivel de ruido que genera todo el gallinero. ($I_0 = 1 \times 10^{-12}$ W/m^2).

32. Un tren que hace sonar su silbato, lleva una velocidad constante cuando pasa por una estación. Al acercarse se percibe un sonido de 704 Hz, mientras que, cuando se aleja dicha frecuencia es de 619 Hz. Calcula la velocidad del tren y la frecuencia del silbato. Velocidad del sonido, $v = 340$ m/s.

33. Escribe la ecuación de una onda armónica plana que tiene 2 cm de amplitud, 600 Hz de frecuencia y que se propaga a 200 m/s en el sentido positivo de las x. La fase inicial es π.

4.2. Problemas

1. Calcula la pulsación, la frecuencia, la longitud de onda y la velocidad de propagación de una onda (en el SI) descrita por

$$y = \sin(0,5\,x - 200\,t + 2,5)$$

2. Se hace vibrar una cuerda de 4,2 m con oscilaciones transversales armónicas perpendiculares a la cuerda. Si $f = 300$ Hz, $A = 10$ cm y las ondas generadas tardan 0,02 s en llegar al extremo de la cuerda, determina:

   a) La ecuación de la onda
   b) La longitud de onda, el periodo y la velocidad de transmisión de la onda
   c) El desplazamiento, la velocidad y la aceleración máximas transversales

3. Una onda de naturaleza eléctrica está definida por

$$E = 1 \times 10^{-3} \cos(200\,x - 5 \cdot 10^{10}\,t)$$

   Calcula

   a) La longitud de onda y la frecuencia
   b) El índice de refracción del medio en el que se propaga la onda respecto al vacío, donde viaja a una velocidad de $c = 3 \times 10^8$ m/s.

4. Se produce la interferencia de dos ondas coherentes de ecuaciones:

$$y_1 = 0,2\sin(200\,t - 0,5\,x_1)$$
$$y_2 = 0,2\sin(200\,t - 0,5\,x_2)$$

   Determina

a) La función de onda resultante, $y_1 + y_2$

b) El valor de la amplitud resultante en un punto que dista 8 m y 10 m de los dos focos emisores

c) La ecuación de líneas nodales producidas

5. Dos fuentes sonoras que están separadas por una pequeña distancia emiten ondas armónicas planas de igual amplitud, en fase y de frecuencia 1 kHz. Estas ondas se transmiten en el medio a una velocidad de 340 m/s.

   a) Calcula el número de onda, la longitud de onda y el periodo de la onda resultante de la interferencia entre ellas

   b) Calcula la diferencia de fase de un punto situado a 1024 m de una fuente y a 990 m de la otra.

6. Una onda transversal se propaga por una cuerda situada sobre el eje X, según la ecuación

$$y = 6\sin[2\pi(100\,t - 0,5\,x)]$$

   Calcula

   a) La velocidad y sentido de propagación de la onda

   b) La velocidad máxima de vibración de un punto de la cuerda

   c) La distancia que separa dos puntos de la cuerda que oscilan en fase

7. Dos focos de ondas coherentes se hallan a una distancia de 0,10 m uno de otro. La frecuencia de las ondas coherentes es de 24 Hz y se propagan a una velocidad de $v = 0,12$ m/s. Determina el tipo de perturbación que existirá en un punto A que dista 14 cm de un foco y 16 cm del otro, y en otro punto B que dista 11 cm de un foco y 12,75 cm del otro.

8. Una persona se sitúa entre dos altavoces a una distancia de 3,20 m de uno de ellos y a 1,80 m del otro. Los altavoces vibran en fase y con la misma frecuencia. Si la mínima frecuencia a la cual se observa interferencia destructiva es 122 Hz:

   a) Determina la velocidad de propagación del sonido.

   b) ¿A qué otras frecuencias se puede observar interferencia destructiva?

9. La ecuación de una onda plana viene dada por la expresión

$$y(x,t) = 0{,}05\sin\left(600\pi\,t - 6\pi\,x + \frac{\pi}{6}\right)$$

   en unidades del SI. Determina:

a) La amplitud, la frecuencia, la longitud de onda y la velocidad de propagación

b) La velocidad máxima de vibración

c) La distancia entre dos puntos cuya diferencia de fase sea $\dfrac{\pi}{4}$

4.3. Soluciones a las cuestiones

1. $A = 5$ m; $f = 0,48$ Hz; $\lambda = 1,57$ m; $v = 0,75$ m/s; $y = 5\cos(3\,t + 4\,x)$
2. Sentido negativo del eje X; $f = 5$ Hz; $\lambda = 6,28$ cm; $v = 31,42$ cm/s
3. $y = 0,1\sin[20\pi(200\,t + x)]$
4. $x_2 - x_1 = 11,67$ cm
5. $\delta = \pi$ rad
6. $t = 4$ s
7. $v_p = 350$ m/s, $v_{max} = 0,79$ m/s
8. $\alpha = \sin^{-1}\left(\dfrac{v_1}{v_2}\right)$
9. $y = 0,05\sin\left(\pi\left(5\,t - \dfrac{x}{60}\right)\right)$
10. $$y = 0,5\sin\left(4\pi\left(25\,t - \frac{2}{3}\right)\right)$$
11. $v = 4$ m/s; $\delta = 0,2$ rad
12. $T = 0,0628$ s; $f = 15,9$ Hz; $v = 2$ m/s
13. $f = 1\times 10^{11}$ Hz
14. $y = 0,05\cos\left(2\pi\left(\dfrac{t}{0,3} - \dfrac{x}{60}\right)\right)$
15. $I_2 = 4\,I_1$. La de mayor de frecuencia.
16. $I_A = 9\,I_B$
17. No, la energía es constante. Lo que ocurre es que la energía está repartida en un área mayor y por lo tanto la intensidad es menor.

18. $\beta = 24,85\ \mathrm{m}^{-1}$

19. $\beta = 0,2\ \mathrm{m}^{-1}$

20. La intensidad

21. $v = 2,12 \times 10^8$ m/s.

22. 60 dB

23. $I = 7,96 \times 10^{-3}\ \mathrm{W/m^2}$; 99 dB

24. 3 dB

25. 6307,8 m

26. Máximo

27.

$$\begin{gathered} y_1 = 2 \times 10^{-2} \sin(\pi(100\,t - 100\,x) \\ y_2 = 2 \times 10^{-2} \sin(\pi(100\,t - 100\,x + \tfrac{1}{3}) \\ y = 2\sqrt{3} \times 10^{-2} \sin(\pi(100\,t - 100\,x + \tfrac{1}{6}) \end{gathered}$$

28. (a) $f = 85$ Hz; (b) $f = 66,5$ Hz

29. Que se producen interferencias constructivas y destructivas que dependen de la diferencia de fase

30. $I = 1,1 \times 10^{-6}\ \mathrm{W/m^2}$; 60,41 dB

31. 60 dB

32. $v = 78,64$ km/h; $f = 661,5$ Hz

33. $y(x,t) = 0,02 \sin(1200\pi t - 6\pi x + \pi)$

4.4. Soluciones a los problemas

1. $\omega = 200$ rad/s; $f = 31,83$ Hz; $\lambda = 12,57$ m; $v = 400$ m/s

2. (a) $y = 0,1 \sin\left(2\pi\left(300\,t - \dfrac{10}{7}x\right)\right)$; (b) $\lambda = 0,7$ m; $T = 3,33 \times 10^{-3}$ s; $v = 210$ m/s; (c) $y_{max} = 0,1$ m; $v_{max} = 188,5$ m/s; $a_{max} = 3,55 \times 10^5\ \mathrm{m/s^2}$

3. (a) $\lambda = 0,0314$ m; $f = 7,96 \times 10^9$ Hz; (b) $n = 1,2$

4. (a) $y = 0,4 \cos\left(\frac{x_1 - x_2}{4}\right) \sin\left(200\,t - \frac{x_1 + x_2}{4}\right)$; (b) $A = 0,351$ m;
   (c) $x_1 - x_2 = (2n+1)2\pi$, $n = 0, 1, 2, \cdots$

5. (a) $T = 0,001$ s; $\lambda = 34$ cm; $k = 18,4$ m^{-1}; (b) $\Delta\varphi = 0$

6. (a) $v = 200$ m/s y en sentido positivo del eje X; (b) $v_{max} = 3769,9$ m/s;
   (c) $x_2 - x_1 = 2$ m.

7. La longitud de onda es $\lambda = \frac{v}{\nu} = \frac{0,12}{24} = 0,005$ m.
   En el punto A hallando las relaciones entre las diferencias de caminos y la longitud de onda,
   $$\frac{x_1 - x_2}{\lambda} = \frac{0,16 - 0,14}{0,005} = 4$$
   Al ser un número entero la interferencia es constructiva, $\frac{x_1 - x_2}{\lambda} = n$ Repitiendo lo mismo para el punto B
   $$\frac{x_1 - x_2}{\lambda} = \frac{0,1275 - 0,11}{0,005} = 3,5 = 3 + \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$$
   Al ser un número impar de semilongitudes de onda, la interferencia es destructiva, $\frac{x_1 - x_2}{\lambda} = n + \frac{1}{2}$

8. (a) $v = 341,6$ m/s; (b) $\nu_1 = 366$ Hz y $\nu_2 = 610$ Hz.

9. (a) $A = 0{,}05$ m, $\nu = 300$Hz, $\lambda = \frac{1}{3}$ m, $v = 100$ m/s.
   (b) $v = 30\pi$ m/s
   (c) $x_2 - x_1 = \frac{1}{24}$ m

4.5. Fórmulas del movimiento ondulatorio

$$y(x,t) = A\sin(\omega\, t - k\, x + \varphi) \qquad y(x,t) = A\sin\left(2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) + \varphi\right)$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \qquad k = \frac{2\pi}{\lambda} \qquad \omega = 2\pi f \qquad v = \frac{\omega}{k} \qquad v = \lambda\, f$$

$$I = \frac{E}{S\,t} = \frac{P}{S} \qquad \frac{I_2}{I_1} = \frac{r_1^2}{r_2^2} \qquad \frac{A_2}{A_1} = \frac{r_1}{r_2} \qquad I = I_0 e^{-\alpha x}$$

$$\beta = 10\,\log\frac{I}{I_0} \qquad I_0 = 1,0 \times 10^{-12}\mathrm{W/m^2}\ \text{(umbral de audición)}$$

Ley de Snell de la refracción $\quad \dfrac{\sin i}{\sin r} = \dfrac{v_1}{v_2}$

Superposición $\quad A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos\delta$

Diferencia de fase $\quad \delta = \dfrac{2\pi}{\lambda}(x_1 - x_2)$

Ondas coherentes son ondas con igual frecuencia y con una diferencia de fase constante

Relación trigonométrica $\quad \sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$

Interferencias de ondas coherentes $\quad y = y_1 + y_2 = A\sin(\omega\, t - k\, x_1) + A\sin(\omega\, t - k\, x_2)$

$$y = 2A\sin\left(\omega\, t - k\,\frac{x_1 + x_2}{2}\right)\cos\left(k\,\frac{x_1 - x_2}{2}\right)$$

Interferencia constructiva $\quad x_1 - x_2 = n \cdot \lambda$

Interferencia destructiva $\quad x_1 - x_2 = \dfrac{\lambda}{2} \cdot (2n + 1)$

En las fórmulas anteriores $\quad n = 0, 1, 2, 3 \cdots$

Efecto Doppler $\quad f' = f\left(1 - \dfrac{v_F}{v}\right)$ Observador en reposo y foco alejándose

Efecto Doppler $\quad f' = f\left(1 + \dfrac{v_0}{v}\right)$ Observador acercándose y foco en reposo

En las fórmulas anteriores v es la velocidad de las ondas, v_F la velocidad del foco y v_0 la velocidad del observador.

5 — Óptica física y geométrica

5.1. Cuestiones y problemas

1. Determina en Å (1 Å= 10^{-10} m), la longitud de onda de la luz de frecuencia $\nu = 5,5 \times 10^{14}$ Hz. ($c = 3 \times 10^8$ m/s)

2. La luz visible tiene longitudes de onda comprendidas entre los 760 nm correspondientes al rojo y los 380 nm correspondientes al violeta. Calcula las frecuencias que limitan el espectro luminoso. 1 nm = 10^{-9} m, $c = 3 \times 10^8$ m/s.

3. Ordena de menor a mayor frecuencia las siguientes radiaciones: luz roja, luz verde, luz amarilla, luz violeta, rayos X.

4. Un rayo luminoso incide sobre una superficie de vidrio con un ángulo de 50º. ¿Cuál será el ángulo de refracción si el índice de refracción es de 1,5?

5. El índice de refracción del diamante es 2,5. ¿Cuál es el ángulo límite de la luz cuando pasa del diamante al aire?

6. Un rayo de luz pasa del agua (n=1,33) a un diamante (n=2,417) con un ángulo de incidencia de 60º. Calcula el ángulo de refracción.

7. Un rayo de luz incide sobre una lámina de caras paralelas de vidrio de indice n=1,5, formando un ángulo de 30º con la normal.

   a) ¿Cuál es el ángulo de refracción?

   b) ¿Cuál es el ángulo de salida al otro lado de la lámina?

8. Una lente convergente forma la imagen de un objeto muy lejano (haces incidentes paralelos), a una distancia de 20 cm de la misma. Se pide:

   a) Longitud focal de la lente

   b) Si se coloca un objeto a 100 cm de la lente, ¿dónde se formará la imagen?

c) Si se coloca un objeto a una distancia de la lente superior a la distancia focal, ¿cuáles serán las características de la imagen?

9. Con una lente de 10 dioptrías, ¿qué aumento se consigue de un objeto situado 2 cm por delante de su foco?

10. Para ver un objeto con mayor detalle utilizamos un dispositivo compuesto de una única lente, llamado lupa.

    a) Indica el tipo de lente que debemos utilizar y construye gráficamente la imagen que produce para un objeto adecuadamente colocado.

    b) Utilizando una lente de 30 cm de distancia focal, invéntate una distancia objeto apropiada y calcula numéricamente la distancia imagen.

11. Un objeto luminoso de 2 mm de altura está situado a 4 m de distancia de una pantalla. Entre el objeto y la pantalla se coloca una lente esférica delgada L, de distancia focal desconocida, que produce sobre la pantalla una imagen tres veces mayor que el objeto.

    a) Determina la naturaleza de la lente L, así como su posición respecto del objeto y de la pantalla

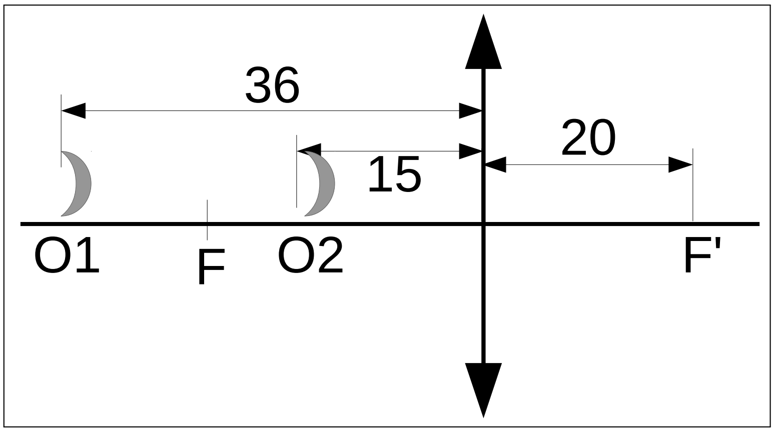
    b) Calcula la distancia focal, la potencia de la lente L y efectúa la construcción geométrica de la imagen.

12. Queremos proyectar una diapositiva de 2 cm de altura sobre una pantalla situada a 4 m de la diapositiva, de modo que la imagen sea de 1 m. Calcula:

    a) Posición de la lente

    b) Potencia de la lente

13. Calcula las posiciones y tamaños de las imágenes dadas por la lente de la figura de los objetos O_1 y O_2, ambos de altura $y = 1$ cm. Comprueba gráficamente tus resultados mediante el trazado de rayos. Las medidas están en cm.



Problema 13

14. Se tiene una lente convergente de 1 dioptría y un objeto de 40 cm de altura que se encuentra a 1,80 m de la lente. Construye la imagen obtenida y establece, haciendo uso de la escala utilizada: la distancia imagen, su altura, aumento, su naturaleza y si es derecha o invertida respecto al objeto. Una vez hallados estos valores, resuelve el ejercicio analíticamente.

15. Una lente divergente tiene una distancia focal de 10 cm. Un objeto de 10 cm se encuentra a 30 cm de la lente. Construye gráficamente la imagen y a partir del dibujo establece: la distancia de la imagen a la lente, la altura que tiene, su naturaleza y si es derecha o invertida respecto del objeto. Después compara los resultados con la resolución analítica.

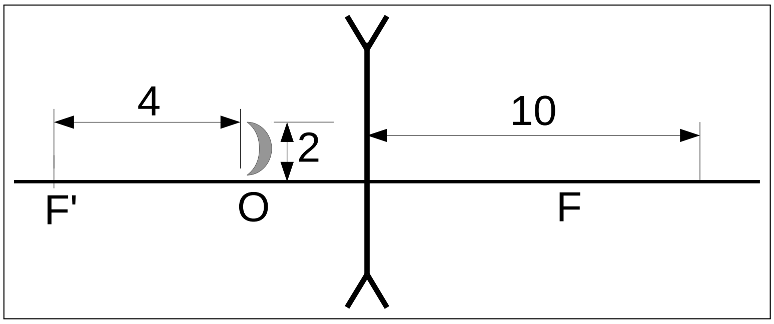
16. ¿A qué distancia debe fotografiarse la fachada de un edificio de 200 m de altura con una cámara provista de un objetivo $f' = 50$ mm para que la imagen sea de 34 mm sobre el chip de la cámara? ¿Cuál sería la distancia requerida si se dispusiese de un gran angular de $f' = 22$ mm?

17. Según el esquema de la figura, donde las unidades están en cm, calcula:

    a) La posición de la imagen final

    b) El tamaño de la imagen final

    c) La solución gráfica



Problema 17

18. Se quiere proyectar la imagen de una diapositiva, aumentada 20 veces, sobre una pared distante 12 m. ¿Qué clase de lente se necesita y en qué posiciones hay que colocar la diapositiva y la lente?

19. Se tiene una lente convergente de 4 dioptrías. ¿A qué distancia de ella hay que colocar un objeto para obtener de él una imagen virtual de tamaño doble?

20. Un objeto de 9 cm de altura está situado a 27 cm por delante de una lente divergente de $f' = -18$ cm. Calcula el tamaño y la posición de la imagen.

21. Dos lentes convergentes de distancias focales +2 cm y +5 cm respectivamente están separadas 14 cm. Se sitúa un objeto a 3 cm por delante de la primera lente. Calcular la posición y el aumento de la imagen final formada por ambas.

22. El objetivo de una cámara fotográfica digital consta de una lente delgada de 25 dioptrías de potencia. Con esta cámara queremos fotografiar a una persona de 1,75 m de estatura, situada a 1,5 m de lente.

    a) ¿Cuál debe ser la distancia entre la lente y el chip de la cámara?

    b) Si el chip de la cámara tiene una altura de 24 mm, ¿nos saldrá una foto "de cuerpo entero"?

23. Un haz de luz blanca incide sobre una lámina de vidrio de grosor d, con un ángulo $\theta_i = 60^o$

    a) Dibuja esquemáticamente las trayectorias de los rayos rojo y violeta

    b) Determina la altura, respecto al punto O' del punto por el que la luz roja emerge de la lámina, siendo $d = 1$ cm

    c) Calcula qué grosor d debe tener la lámina para que los puntos de salida de la luz roja y de la violeta estén separados 1 cm.

Datos: Los índices de refracción en el vidrio de la luz roja y violeta son $n_R = 1,4$ y $n_V = 1,6$, respectivamente.

24. Un foco luminoso puntual se encuentra situado en el fondo de una piscina llena de agua de $n = \frac{4}{3}$ y a 1 m de profundidad. Emite luz en todas direcciones. En la superficie del agua se observa una zona circular iluminada de radio R. Calcular el radio R del círculo luminoso.

25. Describe cuál es el problema de visión que padece una persona si los objetos lejanos los focaliza antes de la retina. Explica en qué consiste este defecto visual haciendo un esquema del ojo y haciendo el trazado de rayos. ¿Cómo se corrige este tipo de defecto?

26. Deduce la relación entre la distancia objeto s, y la distancia focal, f', de una lente convergente para que la imagen sea invertida y con un tamaño tres veces mayor que el objeto. (PAU Julio 2020)

27. Un objeto de 1 cm de altura se sitúa a 15 cm por delante de una lente convergente de 10 cm de distancia focal. Determina la posición, el tamaño y la naturaleza de la imagen formada. Realiza el trazado de rayos.

5.2. Soluciones

1. $\lambda = 5454,5$ Å

2. $\nu_1 = 3,95 \times 10^{14}$ Hz, $\nu_2 = 7,89 \times 10^{14}$ Hz

3. Roja, amarilla, verde, violeta y rayos X

4. $r = 30,71^{\circ}$

5. $i = 23,58^{\circ}$

6. $r = 28,53^{\circ}$

7. (a) $r = 19,47^{\circ}$; (b) 30°

8. (a) $f' = 20$ cm: (b) $s' = 25$ cm

9. $\dfrac{y'}{y} = -5$

10. (a) Convergente

11. (a) Convergente; $s = -1$ m; $s' = 3$ m; (b) $f' = 0,75$ m; $P = 1,33$ dioptrías

12. (a) $s = -0,078$ m; $s' = 3,92$ m; (b) $P = 13$ dioptrías

13. $s'_2 = -60$ cm; $y'_2 = 4$ cm; $s'_1 = 45$ cm; $y'_1 = -1,25$ cm

14. $s' = 2,25$ m; $y' = -50$ cm; $\dfrac{y'}{y} = -1,25$; Real, invertida, mayor.

15. $s' = -7,5$ cm; $y' = 2,5$ cm; Virtual, derecha, menor.

16. $s = -294,17$ m; $s = -129,43$ m

17. (a) $s' = -3,75$ cm; (b) $y' = 1,25$ cm

18. Convergente; $s' = 11,43$ m; $s = -0,57$ m.

19. $s = -0,125$ m

20. $s' = -10,8$ cm; $y' = 3,6$ cm

21. A 13,33 cm de la 2ª lente; $\dfrac{y'}{y} = 3,33$

22. (a) $s' = 0,041$ m; (b) No

23. (b) $h = 0,787$ cm; (c) $d = 6,99$ cm

24. $R = 1,13$ m

25. Las personas que focalizan antes de la retina padecen miopía. La miopía se produce porque la longitud focal del cristalino es muy corta. En consecuencia las imágenes que forma el cristalino se focalizan antes de la retina. La miopía se corrige con lentes divergentes ya que así restan potencia al cristalino, haciendo su focal más larga, focalizándose así las imágenes en la retina. También se puede operar cambiando el cristalino por una lente con la focal adecuada.

26. $\dfrac{s}{f'} = -\dfrac{4}{3}$

27. $s' = 30$ cm; $y' = -2$cm. La imagen es real e invertida.

5.3. Fórmulas de la óptica geométrica

$$c = \lambda \nu$$

$$n = \frac{c}{v}$$

$$\text{Ley de Snell} \quad n_i \sin i = n_r \sin r$$

$$\text{Ángulo límite} \quad \alpha_L = \sin^{-1}\left(\frac{n_r}{n_i}\right)$$

$$\text{Lentes delgadas} \qquad \frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'} \qquad A = \frac{s'}{s} = \frac{y'}{y} \qquad P = \frac{1}{f'}$$

Las lentes convergentes se caracterizan por tener una distancia focal imagen positiva, $f' > 0$, ya que los rayos que proceden del infinito y entran paralelos al eje óptico de la lente focalizan todos en el punto F'. En el caso de las lentes convergentes las imágenes pueden ser reales o virtuales, dependiendo de si el objeto se sitúa por detrás o por delante del punto focal F.

Las lentes divergentes se caracterizan por tener una distancia focal imagen negativa, $f' < 0$, ya que los rayos procedentes del infinito divergen al atravesar la lente y focalizan virtualmente en un punto situado antes de la lente. Las lentes divergentes siempre producen imágenes virtuales de los objetos, independientemente de la posición de éstos.

El ángulo límite solo se produce si el índice de refracción del segundo medio es *menor* que el del primer medio, o sea, $n_r < n_i$. Si el segundo medio tiene un índice de refracción mayor, $n_r > n_i$ ya no tiene lugar el fenómeno del ángulo límite pues tendríamos que hallar el arcoseno de un número mayor que la unidad, que es matemáticamente imposible.

6 — Espejos

6.1. Cuestiones y problemas

1. Un objeto de 15 cm de altura está a 20 cm de un espejo convexo y esférico cuyo radio es de 80 cm.
   a) Calcula la posición y el tamaño de la imagen formada
   b) Dibuja el trazado de rayos
2. Si un espejo forma una imagen real invertida y de mayor tamaño que el objeto, se trata de un espejo:
   a) Cóncavo, y el objeto está situado entre el foco y el centro de curvatura
   b) Cóncavo, y el objeto está situado entre el foco y el espejo
   c) Convexo, con el objeto en cualquier posición
3. Explica cómo se forman las imágenes en un espejo convexo. Aplícalo al caso de un objeto situado entre el centro de curvatura del espejo y el foco. ¿Qué diferencias hay entre una imagen virtual y una imagen real? ¿Se puede formar una imagen real mediante un espejo convexo?
4. En un espejo de maquillaje vemos nuestra imagen aumentada. ¿Qué tipo de espejo es? Explica tu respuesta dibujando un esquema de rayos. Señala en él la posición y el tamaño del objeto y de la imagen.
5. Cuando miramos por el espejo retrovisor de un coche los objetos están más cerca de lo que parece en el espejo. Explícalo y emplea un diagrama de rayos. ¿Qué tipo de espejo se usa en los retrovisores?
6. Usando un espejo queremos proyectar la imagen de un objeto de 4 cm sobre una pantalla situada a 2 m del objeto, de tal modo que el aumento sea de 2,5. ¿Qué tipo de espejo utilizamos?
   a) Calcula la distancia del objeto y de la imagen al espejo

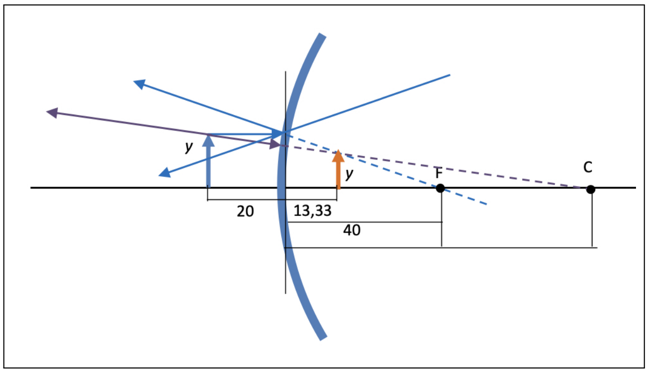
   b) ¿Cuál es el radio del espejo?
   c) Dibuja en un esquema el trazado de rayos.

7. El radio de un espejo cóncavo mide 20 cm. ¿Dónde debes situar un objeto para obtener una imagen invertida y cuatro veces mayor?

8. Explica en qué consisten la hipermetropía y la miopía. (a) ¿Con qué tipos de lentes se corrigen? (b) ¿Qué defecto es más incómodo para un relojero? ¿Y para un pastor?

6.2. Soluciones

1. (a) $s' = 13{,}33$ cm; $y' = 10$ cm. La imagen es derecha y virtual.



(b) Fig 1. Trazado de rayos

2. La respuesta correcta es la (a)

3. En un espejo convexo los rayos se reflejan de modo que un rayo paralelo sale reflejado alejándose del eje óptico. Si el objeto se sitúa entre el centro de curvatura y el espejo, tenemos este caso: (Ver figura 3). Una imagen real se forma por intersección de dos rayos, mientras que una imagen virtual se forma por intersección de las prolongaciones de rayos. Con un espejo convexo no se puede formar una imagen real, porque la imagen se forma como se muestra en el esquema de la figura 3.

4. Se trata de un espejo cóncavo, puesto que en un espejo plano la imagen tiene el mismo tamaño que el objeto y en un espejo convexo la imagen es siempre más pequeña que el objeto. El esquema de rayos correspondiente se representa en la figura 4.

5. Los retrovisores emplean espejos convexos. La imagen formada en el espejo es de menor tamaño que el objeto, por lo que parece que está más lejos de lo que está en realidad. El diagrama de rayos correspondiente se representa en la figura 5.

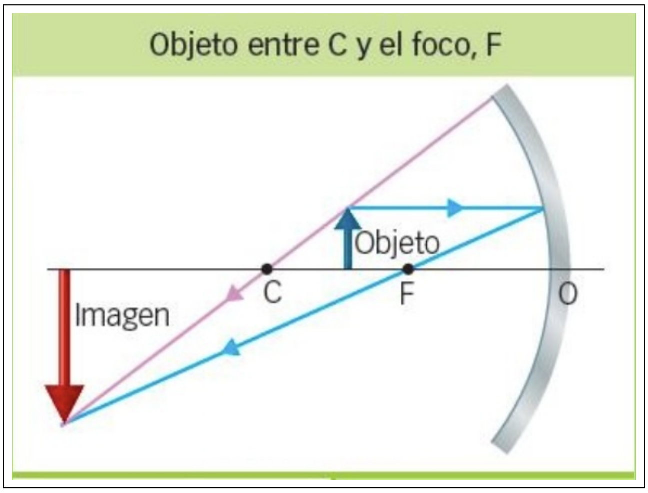


Fig 2. Trazado de rayos problema 2

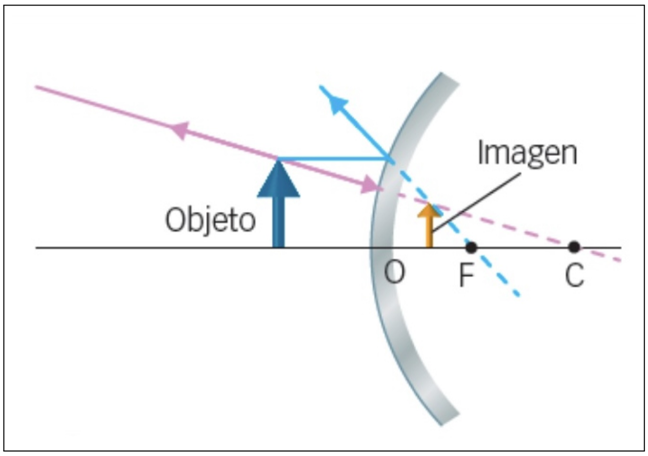


Fig 3. Trazado de rayos problema 3

6. (a) $s = -1{,}33$ cm y $s' = -3{,}33$ cm; (b) $R = -1{,}9$ m. (c) El trazado de rayos se representa en la figura 6.

7. $s = -12{,}5$ cm. El trazado de rayos se representa en la figura 7.

8. *a*) La hipermetropía es un defecto de la visión que impide enfocar correctamente los objetos cercanos. Se debe a una deformación del globo ocular que hace que las imágenes de objetos cercanos se formen detrás de la retina. Se corrige con lentes convergentes. La miopía es un defecto de la visión que impide enfocar correctamente los objetos lejanos. Se debe a una deformación del globo ocular que hace que las imágenes de objetos cercanos se formen delante de la retina. Se

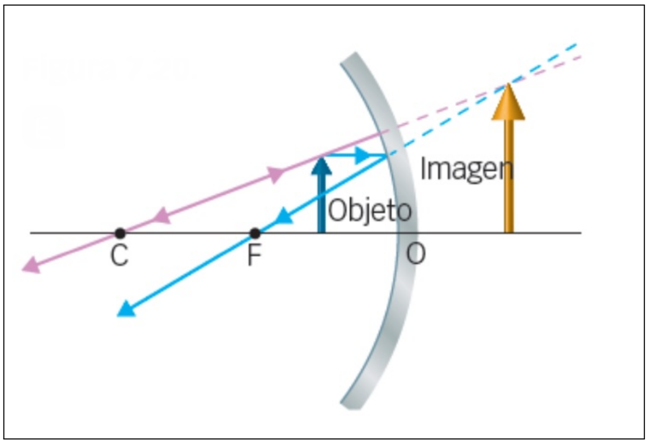


Fig 4. Trazado de rayos problema 4

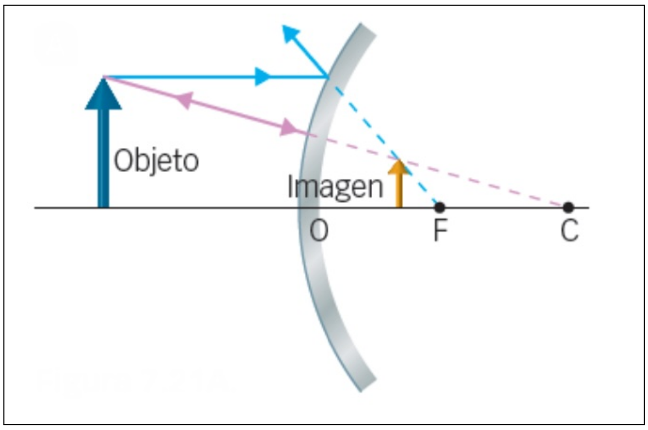


Fig 5. Trazado de rayos problema 5

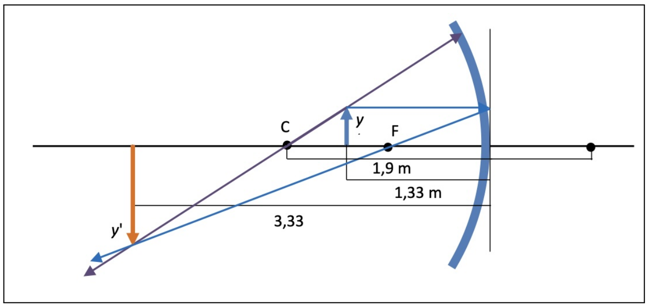


Fig 6. Trazado de rayos problema 6

corrige con lentes divergentes.

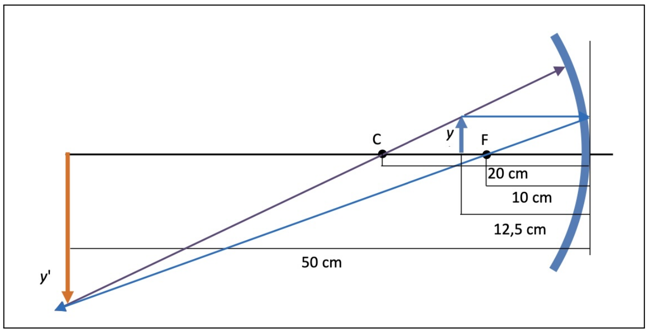


Fig 7. Trazado de rayos problema 7

b) Para un relojero es más incómoda la hipermetropía, pues debe trabajar con objetos situados muy cerca de él. Para un pastor es más incómoda la miopía, pues no verá bien a grandes distancias y no podrá vigilar adecuadamente a los miembros de su rebaño.

7 — Campo eléctrico

7.1. Cuestiones

1. Dadas dos cargas puntuales de 1 C separadas una distancia de 1 m, determina el potencial electrostático en el punto medio de ambas cargas así como la energía potencial electrostática de una carga de -2 C situada en dicho punto ($K = 9 \times 10^9$) $\mathrm{N\,m^2/C^2}$
2. ¿Existe alguna distinción entre diferencia de potencial y diferencia de energía potencial?
3. ¿Qué trabajo hemos de realizar para llevar un electrón desde una distancia de 1×10^{-10} m de un protón hasta el infinito? ($e = -1,6 \times 10^{-19}$ C).
4. ¿Puede haber campo eléctrico en un punto donde el potencial es nulo? ¿Por qué?
5. ¿Puede ser cerrada una línea de campo electrostático?
6. Cuando un electrón pasa de A a B siendo el potencial de A mayor que el de B, ¿gana o pierde energía el electrón? ¿Cuánta exactamente?
7. *a*) ¿Qué son las líneas de campo?
   b) ¿Qué son las superficies equipotenciales? Haced una representación de un campo cualquiera y dibujarlas.
8. Justificar porqué las líneas de fuerza no se pueden cortar entre ellas y por qué las superficies equipotenciales tampoco lo hacen entre sí. Explica, no obstante, por qué se cortan las líneas de campo con las equipotenciales.
9. Dados los puntos A y B, si $V_A > V_B$:
   a) ¿Hacia donde se dirigirá una carga positiva situada entre A y B?
   b) ¿Y una carga negativa? ¿Qué sentido tiene el campo eléctrico?
10. Se traslada una carga de -3 C hasta cierto punto P, cuyo potencial se desconoce. Se observa que para ello se tiene que realizar un trabajo externo de 30 J.

a) ¿Cuál es el potencial que existe en el punto P?

b) ¿Cuál es la variación de energía potencial de la carga? ¿Aumenta o disminuye?

11. Dos cargas iguales de $2\mu C$ ($1\mu C = 1 \times 10^{-6}$) se hallan en los puntos $(-3, 0)$ y $(3, 0)$. Halla la intensidad del campo en el punto $(0, 2)$. ¿Qué fuerza experimentará un electrón situado en dicho punto? ($e = -1,6 \times 10^{-19}$ C, $K = 9 \times 10^{9}$ Nm$^2/C^2$)

12. Un electrón está situado en un campo eléctrico uniforme, $E = 1,2 \times 10^{7}$ N/C. Determina la aceleración del electrón y el tiempo que tarda en recorrer 30 mm desde el reposo. ($m_e = 9,1 \times 10^{-31}$ kg, $e = -1,6 \times 10^{-19}$ C, $K = 9 \times 10^{9}$ Nm$^2/C^2$)

13. Calcular el trabajo necesario para acercar desde el infinito dos cargas puntuales de 10^{-6} C hasta situarlas a una distancia de 1 m en el vacío. ¿Qué sucedería si las cargas fueran de igual valor pero de signos opuestos?

14. Calcular en eV la energía potencial electrostática de un electrón en un átomo de hidrógeno suponiendo que el electrón se halla a una distancia media respecto del protón igual a $0,53 \times 10^{-10}$ m. Calcular a continuación la energía potencial gravitatoria del sistema y comparar ambas cantidades. Datos: $1\,eV = 1,6 \times 10^{-19}$ J, $m_e = 9,1 \times 10^{-31}$ kg, $m_p = 1,67 \times 10^{-27}$ kg, $e = -1,6 \times 10^{-19}$ C, $K = 9 \times 10^{9}$ Nm$^2/C^2$, $G = 6,67 \times 10^{-11}$ Nm$^2/kg^2$.

15. Una partícula de mas m y carga negativa está en reposo entre dos placas de un condensador plano. El campo eléctrico es uniforme y de valor 100 N/C, y las líneas del campo eléctrico tienen la misma dirección que las del campo gravitatorio. Calcula la relación *carga/masa* de la partícula.

16. Entre dos láminas paralelas y horizontales una gota de aceite cargada eléctricamente con la carga $q = 3,2 \times 10^{-19}$ C se queda estacionaria. Si posee una masa que es de $1,6 \times 10^{-15}$ kg, ¿cuál es la diferencia de potencial que debe existir entre las láminas si están separadas 15 cm?

17. Hallar el trabajo que debe realizarse para trasladar una carga $+q$ desde el infinito hasta una distancia r de una carga $-q$

18. En el origen de coordenadas hay una carga puntual de $4\mu C$ y en el punto $(2, 0)$ m hay otra de $-1\mu C$. Hallar:

    a) El punto en que es nulo el campo

    b) El valor del potencial en ese punto

19. Una carga Q crea un campo eléctrico. Hemos traído desde el infinito una carga positiva q, mucho menor que Q, hasta situarla a 0.5 m de Q. Para ello, hemos realizado un

trabajo W y, en ese punto, la carga q sufre una fuerza repulsiva F. Si se la hubiera acercado a 1 m de Q, ¿cuánto valdrían el trabajo realizado y la fuerza a que estaría sometida en relación a W y a F la carga q?

20. Dos pequeñas esferas de masa $m = 5$ g y de la misma carga q penden de un mismo punto O unidas a dos hilos ideales de longitud L. Si en el equilibrio el ángulo que forman los hilos es de 20º, obtén el valor de la carga.

21. Dos cargas del mismo valor absoluto pero de distinto signo están separadas una distancia h.

    a) Calcula y dibuja el campo eléctrico en el punto P, que forma con las dos cargas un triángulo equilátero

    b) Calcula el potencial en el punto P

22. Nuestra experiencia va a desarrollarse en una región del espacio donde existe un campo eléctrico uniforme. Una partícula de masa m y carga q se deposita sin velocidad inicial en un punto donde el potencial es V_1.

    a) Calcula la velocidad de la partícula cuando pase por otro punto cuyo potencial sea V_2

    b) Si el campo eléctrico no fuera uniforme pero los valores de V_1 y V_2 fueran los mismos, ¿sería diferente la respuesta del apartado anterior? Razónalo.

23. ¿Cuál es el valor del flujo electrostático a través de una superficie esférica que encierra a dos cargas iguales y de signo contrario?

7.2. Problemas

1. Tenemos un campo eléctrico uniforme, dirigido verticalmente de abajo hacia arriba, cuya intensidad es de 10^4 N/C.

    a) Calcúlese la fuerza ejercida por este campo sobre un electrón

    b) Compárese la fuerza ejercida con el peso del electrón

    c) Calcúlese la velocidad que adquirirá el electrón cuando haya recorrido 1 cm partiendo del reposo

    d) Calcúlese la energía cinética adquirida

    e) Calcular el tiempo necesario para recorrer la distancia de 1 cm.

    Datos: $e = -1,6 \times 10^{-19}$ C; $m_e = 9,1 \times 10^{-31}$ kg

2. La carga eléctrica puntual $+Q$ crea un campo eléctrico en su entorno. Se conoce que la diferencia de potencial entre los puntos A y B es de 10 V. ($OA = 0,1$ m, $OB = 0,2$ m). Calcular la carga $+Q$. $K = 9 \times 10^9$ en unidades del SI.

3. Se tiene una carga positiva de 10^{-2} C en el origen de coordenadas. Calcular

   a) Los potenciales que la carga crea en los puntos $A(-2,4)$ y $B(4,-5)$

   b) El trabajo realizado al trasladar desde A a B otra carga de 10^{-4} C. Las cargas están en el vacío y las distancias vienen dadas en metros.

4. En un sistema de coordenadas rectangulares se encuentran en el vacío dos cargas puntuales, $q = 2 \times 10^{-8}$ C situada en el punto $A(-5,0,0)$ y la carga $q' = -2 \times 10^{-8}$ C situada en el punto $B(5,0,0)$, coordenadas de los puntos en cm. Calcular:

   a) Vector intensidad de campo eléctrico en el punto C del segmento AB, situado a 2 cm de A

   b) Siendo D un punto del plano XY tal que el triángulo ADB es equilátero, calcular el vector intensidad de campo electrostático en D. $K = 9 \times 10^9$ en unidades del SI.

5. En los vértices de un cuadrado de 2.12 m de lado, se colocan cuatro cargas de valores $q, -q, 2q, -2q$, siendo $q = 10$ nC.

   a) Hallar el campo y el potencial eléctricos en el centro del cuadrado

   b) Calcular el trabajo que hay que realizar contra el campo, para trasladar una carga de 1 nC desde el centro del cuadrado hasta:

   c) el punto medio del lado en cuyos vértices se encuentran las cargas q y $-2q$

   d) el punto medio del lado en cuyos extremos se hallan las cargas q y $-q$. $K = 9 \times 10^9$ en unidades del SI.

6. Dos cargas puntuales $q_1 = 36\mu C$, $q_2 = -36\mu C$ están situadas en los puntos $A(0,0)$ y $B(8,0)$ respectivamente. Calcular el campo eléctrico en el punto $P(0,6)$ creado por las dos cargas. Determinar el trabajo necesario para trasladar una carga de $2\mu C$ desde el punto P al punto $C(4,0)$.

7. Dadas las cargas $q_1 = 10^{-8}$ C y $q_2 = -2q_1$, situadas, la primera en el origen de coordenadas y la segunda en el punto (2, 0) m, determinar $\vec{E}$ en los siguientes puntos: $A(1,0)$, $B(0,1)$, $C(2,1)$. ¿En qué punto de la recta que une ambas cargas será nula la intensidad del campo?

8. Dos cargas eléctricas idénticas de $-3\mu C$ están situadas en los puntos (1, 0) y (1, −4), coordenadas en m. Determina en qué punto (o puntos) del plano se anula el campo

eléctrico. ¿Es también nulo el potencial eléctrico en ese punto (o puntos)? En caso contrario, determina su valor.

9. Una carga de $1nC$ se encuentra situada en el origen de un sistema de referencia cartesiano tridimensional. Otra carga de $-20nC$, se encuentra en el punto $A(0,1,0)$, estando las coordenadas expresadas en metros. Calcular:

   a) El vector intensidad del campo eléctrico producido por ambas cargas en el punto $P(2,0,0)$

   b) El potencial en el punto P

   c) El trabajo necesario para trasladar una carga puntual de $1pC$ desde el punto P hasta el punto $M(4,2,0)$

   Las cargas se encuentran en el vacío y $K = 9 \times 10^9$ en el SI.

10. Un péndulo de masa 2g cuelga de un hilo en el interior de dos placas cargadas eléctricamente con igual carga de signo opuesto, y la separación entre las placas es de 10 cm. Calcula la diferencia de potencial entre las placas sabiendo que el hilo forma un ángulo de 10^o con la vertical y que la carga del péndulo es $10nC$. El campo eléctrico en el interior de las placas se supone constante.

11. Imagina que en los bordes superior e inferior de esta hoja acoplamos las placas positiva y negativa de un condensador plano y que el campo eléctrico creado es de 40 V/cm. Haz un esquema que señale las líneas de fuerza de ese campo y explica qué tipo de movimiento presentará una carga puntual de $-2\mu C$ abandonada en el punto medio. Calcula la energía cinética que tendrá cuando se haya desplazado 10 cm.

12. Entre dos placas planas existe una diferencia de potencial de 15 V. Si la intensidad del campo eléctrico entre las placas es de 30 N/C, calcula:

    a) La separación entre placas

    b) La aceleración que experimenta una partícula de 5 g de masa y carga eléctrica igual a $2,5 \times 10^{-9}$ C situada entre las placas

    c) La variación de la energía potencial de la partícula al pasar de la placa negativa a la positiva

13. Dos esferas de 25 g de masa cargadas con idéntica carga eléctrica cuelgan de los extremos de dos hilos inextensibles y sin masa de 80 cm de longitud. Si los hilos están suspendidos del mismo punto y forman un ángulo de 45^o con la vertical, calcular: (a) La carga de cada esfera; (b) La tensión de los hilos.

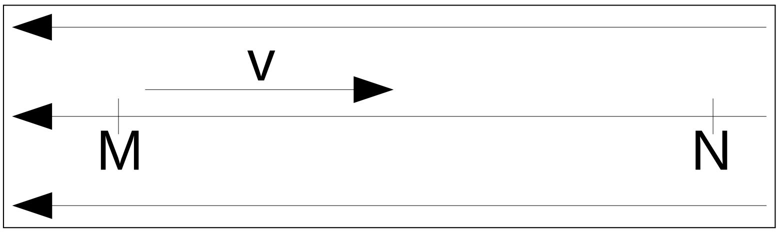
14. Una pequeña esfera de 0.2 g de masa está suspendida mediante un hilo aislante de 30 cm de longitud y cargada con una carga eléctrica de 0,2μC. Hallar la intensidad del campo eléctrico necesario para que la esfera se desplace hasta que el hilo forme un ángulo de 30º con la vertical.

15. Una partícula α ($q = 3,2 \times 10^{-19}$ C, $m = 6,5 \times 10^{-27}$ kg) inicialmente en reposo es acelerada por un campo eléctrico uniforme de 2×10^4 N/C hasta una velocidad de 5 000 m/s. Hallar:

    a) La distancia recorrida por la partícula

    b) La diferencia de potencial entre los puntos extremos del recorrido

16. ¿Cuál es la velocidad mínima que debe tener una partícula de 10^{-8} kg de masa y 0.5 μC de carga eléctrica situada en el punto M de la figura para alcanzar el punto N, situado a 10 cm, si se mueve paralela y en sentido contrario a un campo eléctrico cuya intensidad es 10^5 N/C?



Problema 17

17. Sea un campo eléctrico uniforme dado por $\vec{E} = 500\vec{i}$ N/C. Se pide:

    a) ¿Cómo serían las superficies equipotenciales de dicho campo?

    b) Calcular el trabajo necesario para trasladar una carga de 2 μC desde el punto $P(2,3,0)$ hasta el punto $Q(6,5,0)$, coordenadas en metros.

    c) Calcular la distancia entre las superficies equipotenciales $V_1 = 10$ V y $V_2 = 20$ V.

18. Una carga de $-3\mu C$ está localizada en el origen de coordenadas, una segunda carga de $4\mu C$ está localizada a 20 cm de la primera sobre el eje X positivo, y una tercera carga Q está situada a 32 cm de la primera sobre el eje X positivo. La fuerza total que actúa sobre la carga de $4\mu C$ es de 120 N en la dirección positiva del eje X. Determina el valor de la carga Q. ($K = 9 \times 10^9$) unidades del SI.

19. Una partícula con carga $q_1 = 10^{-6}$ C se fija en el origen de coordenadas.

a) ¿Qué trabajo será necesario realizar para colocar una segunda partícula, con carga $q_2 = 10^{-8}$ C, que está inicialmente en el infinito, en un punto P situado en la parte positiva del eje Y a una distancia de 30 cm del origen de coordenadas?

b) La partícula q_2 tiene 2 mg de masa (miligramos). Esta partícula se deja libre en el punto P. ¿Qué velocidad tendrá cuando se encuentre a 1.5 m de distancia de q_1? (Suponer despreciables los efectos gravitatorios). $K = 9 \times 10^9$ en el SI.

7.3. Soluciones a las cuestiones

1. $V = 3,6 \times 10^{10}$ V; $E_P = -7,2 \times 10^{10}$ J
2. Sí
3. $W = 2,304 \times 10^{-18}$ J
4. Si
5. No
6. Gana energía. $E = q_e(V_A - V_B)$
7. (a) Son las líneas de fuerza por unidad de carga que se ejercen las cargas entre sí. (b) Son líneas cuyos puntos están todos al mismo potencial.
8. Dos líneas de campo y dos equipotenciales no se pueden cortar porque eso significaría que tienen dos valores diferentes del campo y del potencial en cada punto. Las líneas de campo y las de potencial sí se pueden cortar entre sí. El campo es por definición el gradiente o la derivada del potencial, y por tanto es perpendicular a las superficies equipotenciales y en el sentido en el que el potencial disminuye.
9. (a) Hacia B; (b) Hacia A; De A a B
10. (a) $V_P = -10$ V; (b) $\Delta\, E_p = 30$ J. Aumenta
11. $\vec{E} = (0, 1536.09)$ N/C; $\vec{F} = (0, -2.46 \times 10^{-16})$ N
12. $a = 2,11 \times 10^{18}$ m/s^2; $t = 1,69 \times 10^{-10}$ s
13. $W = -9 \times 10^{-3}$ J; $W = 9 \times 10^{-3}$ J
14. $E_P = -27,11$ eV; $E_{p_g} = -1,91 \times 10^{-57}$ J; $\dfrac{E_{p_e}}{E_{p_g}} = 2,27 \times 10^{39}$
15. $\dfrac{m}{q} = 10,2$

16. $V = 7350$ V
17. $W = K\,\dfrac{q^2}{r}$
18. (a) (4, 0) m; (b) $V = 4,5 \times 10^6$ V
19. $W' = \dfrac{1}{2}\,W$; $F' = \dfrac{1}{4}\,F$
20. $q = 3,4 \times 10^{-7}\,L$ C
21. (a) $|E| = K\,\dfrac{q^2}{h^2}$; (b) $V = 0$
22. (a) $v = \sqrt{\dfrac{2q(V_1 - V_2)}{m}}$; (b) No
23. $\Phi = 0$ Nm^2/C

7.4. Soluciones a los problemas

1. (a) $\vec{F} = -1,6 \times 10^{-15}\vec{\jmath}$ N; (b) $\dfrac{F}{P} = 1,79 \times 10^{14}$; (c) $v = 5,93 \times 10^6$ m/s; (d) $E_C = 1,6 \times 10^{-7}$ J; (e) $t = 3,37$ ns
2. $Q = 2,22 \times 10^{-10}$ C
3. (a) $V_A = 2,01 \times 10^7$ V; $V_B = 1,41 \times 10^7$ V; (b) $W(A \to B) = 606,9$ J
4. (a) $\vec{E_C} = (478215, 0)$ N/C; (b) $\vec{E_D} = (18000, 0)$ N/C
5. (a) $E = 56,64$ N/C; $V = 0$; (b)(c) $W = 4,69 \times 10^{-8}$ J; (b)(d) $W = 0$
6. $\vec{E} = (2,592 \times 10^7, 7,056 \times 10^7)$ N/C; $|\vec{E}| = 7,5 \times 10^7$ N/C; $W(P \to C) = 4,32$ J
7. $|\vec{E_A}| = 270$ N/C; $|\vec{E_B}| = 80,6$ N/C; $|\vec{E_C}| = 172,7$ N/C; $(-4,83, 0)$ m
8. $(1, -2)$ m; $V = -27\,000$ V
9. (a) $\vec{E} = (29,95, 16,1)$ N/C; (b) $V_P = -76$ V; (c) $W(P \to M) = -3,4 \times 10^{-11}$ J
10. $V_A - V_B = 34\,560$ V
11. $\Delta\,E_C = 8 \times 10^{-4}$ J
12. (a) $d = 0,5$ m; (b) $a = 1,5 \times 10^{-5}$ m/s^2; (c) $\Delta\,E_P = 3,75 \times 10^{-8}$ J

13. (a) $q = 5,9 \times 10^{-6}$ C; (b) $T = 0,346$ N
14. $|\vec{E}| = 5\,658$ N/C
15. (a) $e = 1,27 \times 10^{-5}$ m; (b) $V_A - V_B = 0,25$ V
16. $v_0 = 1\,000$ m/s
17. (a) Perpendiculares al campo; (b) $W = 4 \times 10^{-3}$ J; (c) $d = 2$ cm
18. $Q = -49,1\mu\, C$
19. (a) $W = -3 \times 10^{-4}$ J; (b) $v = 15,5$ m/s

7.5. Fórmulas del campo eléctrico

$$\text{Ley de Coulomb} \qquad \vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1\, q_2}{r_{12}^2}\, \vec{u}_{12}$$

$$K = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \simeq 9,0 \times 10^9\, \mathrm{Nm^2C^{-2}}$$

$$\text{Campo eléctrico} \qquad \vec{E} = \frac{\vec{F}}{q'} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2}\, \vec{u}_r$$

$$\text{Ley de Gauss} \qquad E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\, R^2}, \quad \text{Flujo} \quad \Phi = E\, S = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$\text{Energía potencial electrostática} \qquad U = K\, \frac{q_1\, q_2}{r}$$

$$\text{Potencial electrostático} \qquad V = \frac{K\, q}{r}, \qquad V_2 - V_1 = Kq\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)$$

$$\Delta V = V_2 - V_2 = -\int_{r_1}^{r_2} \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

$$\text{Trabajo electrostático} \qquad W = -(U_2 - U_1) = -q(V_2 - V_1)$$

8 — Electromagnetismo

8.1. Cuestiones y problemas

1. ¿En qué dirección debe moverse una carga eléctrica en el interior de un campo magnético para que no se vea sometida a fuerza alguna?

2. Un protón penetra perpendicularmente en un campo magnético de 1 T con una velocidad de 5 000 km/s

   a) ¿Cuál es el radio de la órbita que describe?

   b) ¿Cuántas vueltas describe en un tiempo de 10^{-6} segundos?

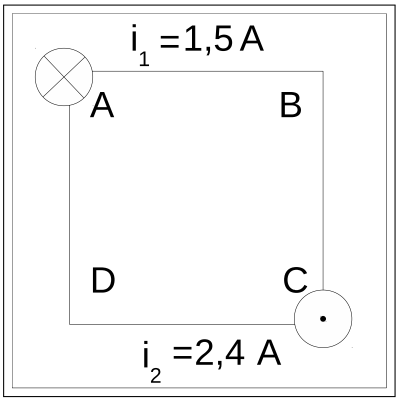
   Datos: La masa del protón es $1,67 \times 10^{-27}$ kg y su carga $+1,6 \times 10^{-19}$ C

3. Hallar el campo magnético en un punto a 2 cm de un conductor largo y rectilíneo, situado en el aire, por el que circula una corriente de 2 A de intensidad.
   ($\mu_{aire} \simeq \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ N/A^2)

4. Por dos conductores paralelos rectilíneos, de 8 m de longitud, situados a 2 cm de distancia, pasan corrientes en el mismo sentido de 2 A cada una. Calcula la fuerza con la que se atraen mutuamente. $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ N/A^2

5. ¿Cómo se podría demostrar, sin tocarlo, que por un conductor circula una corriente?

6. La figura siguiente representa dos hilos rectilíneos y paralelos de gran longitud. El primero entra perpendicularmente al papel, marcado con la cruz, en el punto A y el segundo sale perpendicularmente por el punto C. ($AB = AD = 1$ m). La intensidad que circula por A es $i_1 = 1.5$ A y la que circula por C es $i_2 = 2.4$ A.



Problema 7

a) Representa los vectores fuerza magnética que actúa sobre ambos hilos y el campo magnético total en D.

b) Calcula el campo magnético total en D y la fuerza por unidad de longitud ejercida sobre uno de los hilos. $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ N/A^2

7. Un electrón con una energía cinética de 15 eV penetra perpendicularmente en un campo magnético de 10^{-3} T. Determina el radio de la trayectoria que sigue el electrón en el campo. 1eV $= 1,6 \times 10^{-19}$ J, $m_e = 9,1 \times 10^{-31}$ kg.

8. Una partícula α penetra dentro de un campo magnético de valor 2 T, con una velocidad de 2×10^6 m/s, formando un ángulo de 45º con el campo. Halla la fuerza ejercida sobre esa partícula. $q_\alpha = 3,2 \times 10^{-19}$ C.

9. Una partícula cargada se introduce con una velocidad $\vec{v} = v\,\vec{i}$ en una región del espacio en que coexisten un campo magnético $\vec{B} = 0,2\vec{k}$ T y un campo eléctrico $\vec{E} = 100\vec{j}$ N/C. Calcula el valor de la velocidad v, para que la trayectoria de la partícula sea rectilínea.

10. Un conductor rectilíneo de gran longitud está recorrido por una corriente eléctrica de 5 A. Halla la inducción magnética en un punto que dista 2 cm del conductor. ($\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ N/A^2)

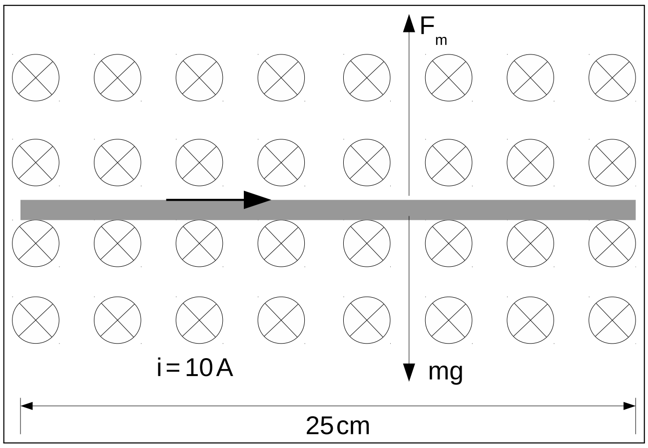
11. Halla el campo magnético en el centro de una espira de 15 cm de radio por la que circula una corriente eléctrica de 25 A. $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ N/A^2

12. Dos hilos paralelos de cobre están separados una distancia de 20 cm y por ellos circulan corrientes de 8 y 5 A respectivamente. Hallar la fuerza de atracción o de repulsión por unidad de longitud:

    a) Si las corrientes son del mismo sentido *b*) Si las corrientes son en sentido contrario

c) La fuerza que actuará por unidad de longitud sobre otro hilo de cobre colocado paralelamente a los anteriores, en el mismo plano y equidistante de ambos, por el que circula una corriente de 6 A en el sentido que la de 5 A y contrario a la de 8 A. $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ N/A^2

13. Un segmento horizontal de un conductor de 25 cm de longitud y 20 g de masa por el que circula una corriente de 10 A se encuentra en equilibrio en un campo magnético uniforme, también horizontal, y perpendicular al conductor, como muestra la figura. Halla el valor de la inducción magnética **B**. Aceleración de la gravedad, $g = 9,8$ m/s^2.



Problema 14

14. En una misma región del espacio existen un campo eléctrico uniforme de valor 5×10^3 V/m y otro magnético uniforme de valor 0,3 T, siendo sus direcciones perpendiculares entre sí:

    a) ¿Cuál debería ser la velocidad de la partícula cargada que penetra en esa región en dirección perpendicular a ambos campos para que pase a través de la misma sin ser desviada?

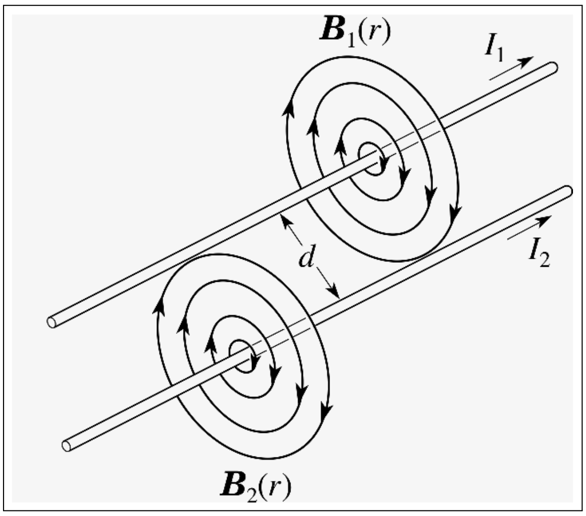
    b) Si la partícula es un protón, ¿cuál deberá ser su energía cinética para no ser desviado?

    Masa del protón $m_P = 1,67 \times 10^{-27}$ kg

15. Sea el sistema formado por dos conductores, según muestra la figura.

    a) Demuestra que si por los dos conductores las corrientes que circulan son idénticas, es decir, si $I_1 = I_2$, entonces el campo magnético total creado en el punto medio que separa los dos conductores es nulo.

b) Supongamos ahora que $I_1 = 2$ A e $I_2 = 3$ A. Calcula a qué distancia nos hemos de situar del primer conductor para que el campo magnético total sea nulo. La distancia entre los dos hilos conductores es $d = 15$ cm. $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ N/A^2



Problema 16

16. Una partícula con carga $q = 2$ C penetra en una región del espacio en la que existe un campo magnético $\vec{B} = 0,02\vec{k}$ T. Se pide:

    a) Si la partícula entra en el campo magnético con una velocidad $\vec{v} = 300\vec{j} + 300\vec{k}$ m/s, calcula la fuerza que actúa sobre la misma.

    b) Si la velocidad de la partícula fuese perpendicular al campo magnético, ¿cuál sería su trayectoria? Justifica la respuesta.

17. Dos alambres paralelos, largos y rectos, separados 15 mm entre sí, llevan corrientes iguales:

    a) Si la fuerza que uno de ellos ejerce sobre un segmento de 250 mm del otro alambre es de $9,3 \times 10^{-4}$ N, ¿qué corriente pasa por los alambres? $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ N/A^2

    b) Si la corriente se duplica, ¿en qué factor cambiará la fuerza?

18. Un electrón penetra perpendicularmente en un campo magnético uniforme de valor 3×10^{-3} T con una velocidad de $v = 1,6 \times 10^5$ m/s.

    a) Dibuja un esquema que represente el campo, la fuerza y la trayectoria del electrón

    b) Calcula el radio de la trayectoria.

c) Determina el campo eléctrico que debemos superponer al magnético para que el electrón describa un MRU

Datos: $|e| = 1,6 \times 10^{-19}$ C, $m_e = 9,1 \times 10^{-31}$ kg

19. Por dos conductores rectilíneos, paralelos e indefinidos, circulan corrientes de intensidades I_1 e I_2 en sentidos opuestos. Si $I_1 = 2I_2$, determina en qué puntos el campo magnético resultante es nulo.

20. Un electrón describe una órbita circular en un campo magnético de 0,05 T con una energía cinética igual a $2,4 \times 10^3$ eV. $|e| = 1,6 \times 10^{-19}$ C, $m_e = 9,1 \times 10^{-31}$ kg

    a) Representa en un esquema los vectores velocidad, campo magnético y fuerza

    b) Calcula la fuerza magnética, el radio de la órbita, la frecuencia angular y el periodo

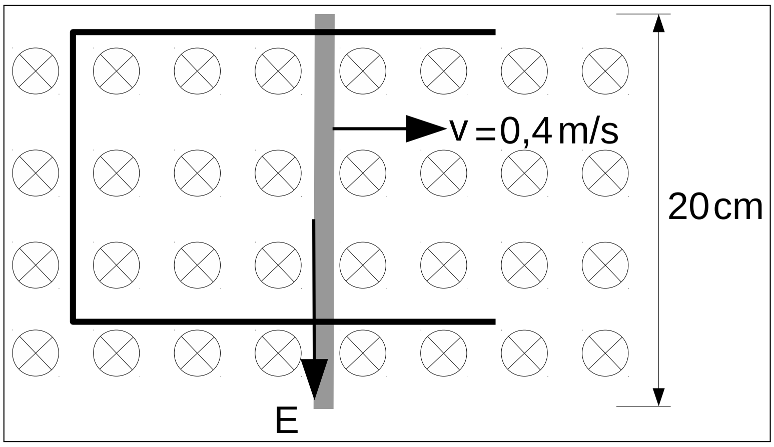
21. Una bobina con 200 espiras de 25 cm^2 está situada en un campo magnético uniforme de 0.3 T con su eje paralelo a las líneas de inducción. Calcula:

    a) La *fem* inducida en la bobina cuando se gira hasta colocar su eje perpendicular a las líneas de inducción en un tiempo de 0,5 s.

    b) La intensidad de la corriente inducida si la bobina tiene una resistencia $R = 30\,\Omega$

22. Un campo magnético varía con el tiempo según la expresión $B = 3t^2 + 5$, en unidades del SI. Calcula la fuerza electromotriz inducida (*fem*) en función del tiempo en una espira de 50 cm^2 si el plano de la espira es perpendicular a las líneas de inducción. Determina el valor de la *fem* para $t = 2$ s.

23. La barra metálica de la figura está dentro de un campo magnético uniforme de 0,5 T dirigido hacia el interior del papel. La barra mide 20 cm y se desplaza sobre los hilos conductores a una velocidad de 0,4 m/s.



Problema 24

Determina

a) La fuerza magnética que actúa sobre un electrón de la barra. $|e| = 1,6 \times 10^{-19}$ C

b) El campo eléctrico en el interior de la barra

c) La *fem* inducida máxima.

24. Un alternador está formado por una bobina plana que gira con una frecuencia de 50 Hz en un campo magnético uniforme de 0,3 T. Si la bobina consta de 30 espiras de 40 cm^2, calcula:

    a) La *fem* inducida en función del tiempo

    b) La *fem* inducida máxima

25. Un carrete de hilo conductor de 500 espiras de 0,005 m de radio está en un campo magnético uniforme de 0,1 T de modo que el flujo que lo atraviesa es máximo. Halla la *fem* inducida si:

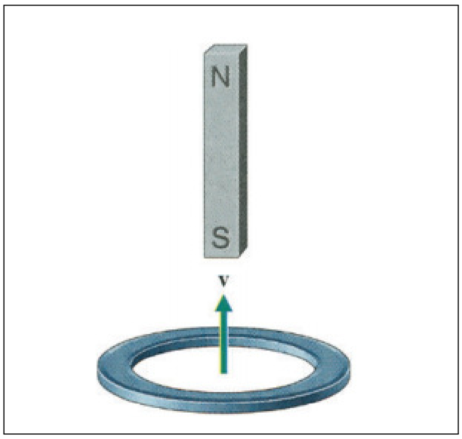
    a) En 0,02 s el campo dobla su valor

    b) El carrete gira 180° en 0,02 s respecto a un eje que pasa por su centro y es perpendicular al campo

26. Un hilo conductor rectilíneo y de longitud infinita, está ubicado sobre el eje Z, y por él circula una corriente continua de intensidad I, en sentido positivo de dicho eje. Una partícula con carga positiva Q, se desplaza con velocidad v sobre el eje X, en sentido positivo del mismo. Determinar la dirección y sentido de la fuerza magnética que actúa sobre la partícula.

27. Un hilo por el que circula una corriente de 30 A tiene una longitud de 12 cm. Se sitúa entre los polos de un imán formando un ángulo de 60° con la dirección del campo. El campo magnético es uniforme y vale 0,9 T. ¿Qué fuerza ejerce sobre el hilo? ¿Para qué posición será máxima la fuerza?

28. La figura representa a un imán que se aleja de una espira circular. Di en qué sentido circulará, haciendo un dibujo, la corriente inducida en la espira. Razona por qué y di en qué ley te basas. ¿Y si el imán se acercara?



Problema 29

8.2. Soluciones

1. Paralelo al campo magnético
2. (a) $R = 0,052$ m; (b) 15,248 vueltas
3. $B = 2 \times 10^{-5}$ T
4. $F = 3,2 \times 10^{-4}$ N
5. Con una brújula
6. (b) $B_D = 5,66 \times 10^{-7}$ T; $\dfrac{F}{L} = 5,091 \times 10^{-7}$ N/m
7. $R = 4,13 \times 10^{-3}$ m
8. $9,05 \times 10^{-13}$ N
9. $v = 500$ m/s
10. $B = 5 \times 10^{-5}$ T
11. $B = 1,05 \times 10^{-4}$ T

12. (a) $F/l = 4 \times 10^{-5}$ N/m atractiva; (b) $F/l = 4 \times 10^{-5}$ N/m repulsiva; (c) $F/l = 3,6 \times 10^{-5}$ N/m hacia el conductor de 5 A;

13. $B = 0,0784$ T

14. (a) $v = 1,67 \times 10^4$ m/s; (b) $E_C = 2,32 \times 10^{-19}$ J

15. *a*) $\vec{B} = 0$. Hay que razonar aplicando la regla de la mano derecha.

    b) $r_1 = 6$ cm

16. (a) $\vec{F} = 12\vec{\imath}$ N; (b) Trayectoria circular

17. (a) $I = 16,7$ A; (b) $F' = 4F$

18. (a) Regla mano derecha; (b) $R = 3,03 \times 10^{-4}$ m; (c) $E = 480$ N/C $\perp$ a B

19. Los puntos cuya distancia L_1 sea el doble de la distancia a L_2.

20. (b) $F = 2,32 \times 10^{-13}$ N; $R = 3,3$ mm; $\omega = 8,78 \times 10^9$ rsd/s; $T = 7,16 \times 10^{-10}$ s

21. (a) $\varepsilon = 0,3$ V; (b) $I = 0,01$ A

22. $\varepsilon(t) = -0,03\,t$, $\varepsilon(2) = -0,06$ V

23. (a) $F = 3,2 \times 10^{-20}$ N; (b) $E = 0,2$ N/C; $|\varepsilon| = 0,04$ V

24. (a) $\varepsilon = 11,3 \sin(100\pi\, t)$; (b) $\varepsilon_{max} = 11,3$ V

25. (a) $|\varepsilon| = 0,196$ V; (b) $\varepsilon = 0,393$ V

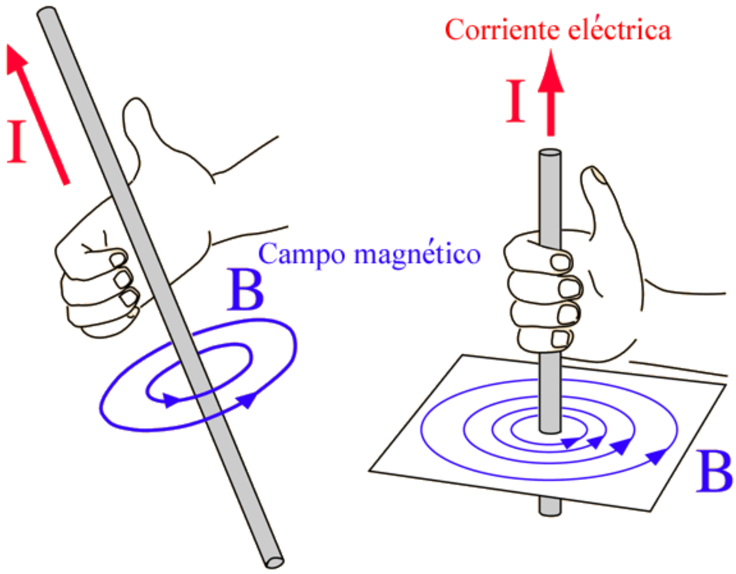
26. $F(\vec{x}) = \dfrac{\mu_0\, Q\, v\, I}{2\pi x}\vec{k}$

27. $F = 2,8$ N; Hilo perpendicular a $\vec{B}$

28. Al alejar el imán el campo magnético disminuye y por lo tanto el flujo magnético. Por la ley de inducción de Faraday-Lenz la corriente que se induzca en la espira ha de compensar la disminución de flujo. Por la regla de la mano derecha, desde el punto de vista del imán, la corriente ha de girar a la derecha para que se genere un campo magnético por la espira que compense la disminución del campo magnético al alejarse el imán. Si se acerca el imán la corriente sería a la inversa por la misma ley.

Campo magnético e inducción

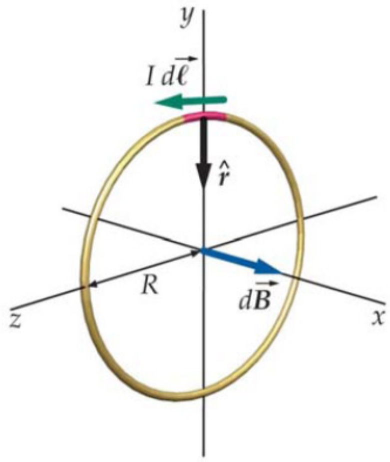
Líneas de campo magnético en un hilo conductor infinito

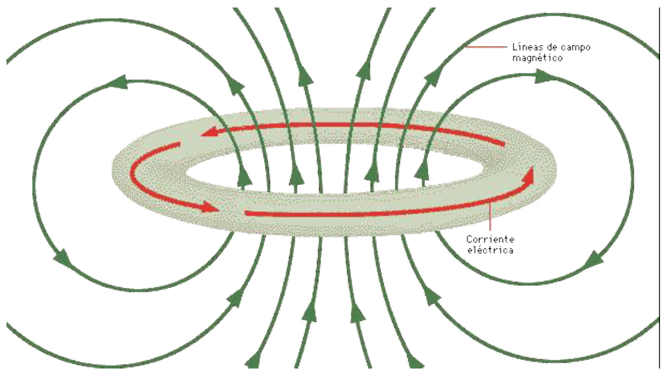


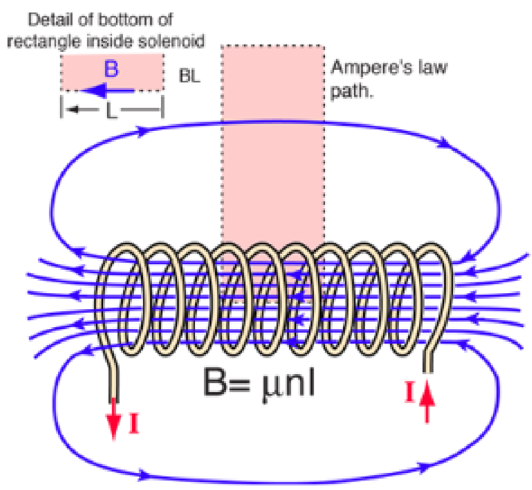
Ley de Biot y Savart

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

Líneas de campo magnético en una espira y en un solenoide







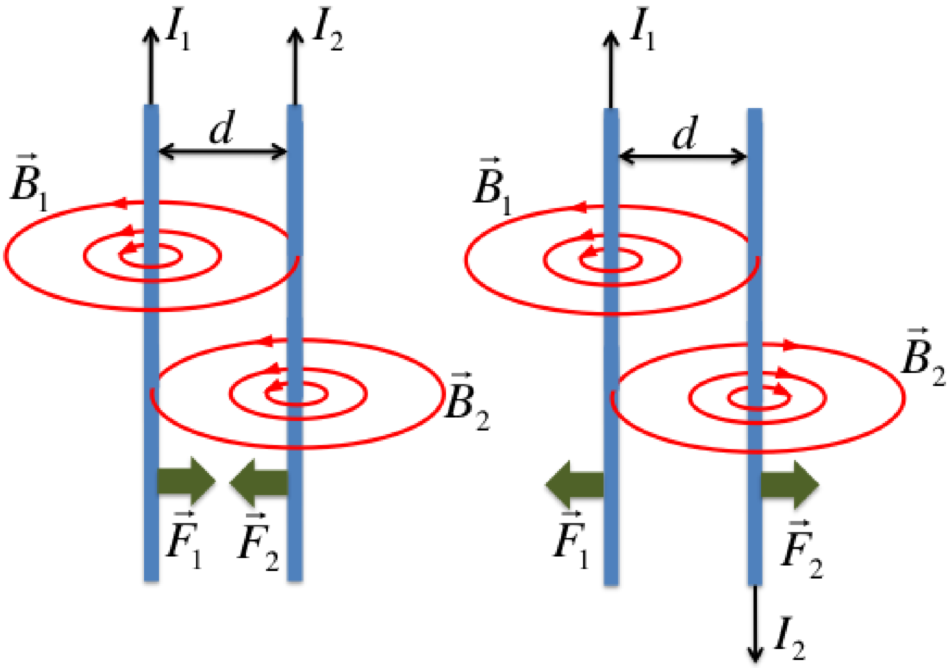
Campo magnético de una espira circular en su centro

$$B = \frac{\mu_0\, I}{2R}$$

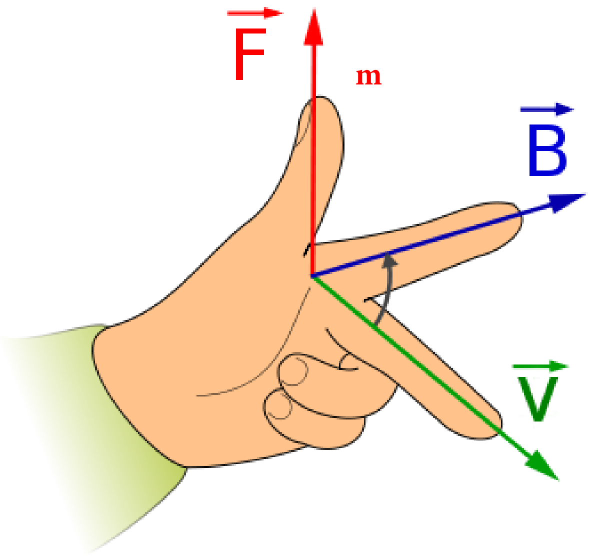
Flujo magnético

$$\Phi_m = \int \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

Fuerza magnética entre corrientes



$$\frac{F}{l} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi r}$$



Regla de la mano izquierda, fuerza magnética sobre una carga

$$\vec{F}_m = q\,\vec{v} \times \vec{B}$$

Fuerza de Lorentz

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

Fuerza magnética sobre una corriente

$$\vec{F}_m = I(\vec{l} \times \vec{B})$$

Ley de Ampère

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

Radio ciclotrón

$$r = \frac{mv}{|q'|B}$$

Ley de Faraday de la inducción electromagnética

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_m}{dt}$$

Fuerza electromotriz de movimiento

$$\varepsilon = vBL$$

8.3. Fórmulas del campo magnético e inducción

Ley de Ampère $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \, I_C$

Fuerza magnética $\vec{F}_m = q \, \vec{v} \wedge \vec{B}$

Fuerza de Lorentz $\vec{F} = \vec{F}_e + \vec{F}_m = q \, (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$

Campo magnético de un conductor infinito $B = \dfrac{\mu_0 \, I}{2\pi \, r}$

Fuerza de un campo magnético sobre una corriente $\vec{F} = I \, \vec{L} \wedge \vec{B}$

Frecuencia ciclotrón $\omega = \dfrac{|q| \, B}{m}$

Fuerza magnética por unidad de longitud entre corrientes $\dfrac{F_m}{L} = \dfrac{\mu_0 \, I_1 \, I_2}{2\pi \, r}$

Flujo magnético $\Phi_m = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$

Ley de Faraday-Lenz $\varepsilon = -\dfrac{d\Phi_m}{dt} = \oint_C \vec{E} \, d\vec{l}$

Fuerza electromotriz de movimiento $\varepsilon = E \, L = v \, B \, L$

FEM de una bobina en rotación $\varepsilon = BNS\omega \sin \omega \, t$

El campo eléctrico inducido en un circuito por un flujo magnético variable no es conservativo.

9 — Teoría de la Relatividad

9.1. Cuestiones y problemas

1. Enuncia los postulados en los que se fundamenta la teoría de la relatividad especial y sus principales consecuencias.

2. Un avión se mueve al 90 % de la velocidad de la luz. Un reloj de péndulo en el avión oscila una vez por segundo (intervalo medido en el avión)

   a) Calcula el intervalo entre oscilaciones observado por el controlador aéreo en reposo en el aeropuerto.

   b) Si el péndulo oscila ahora una vez cada 1,2 s (intervalo medido en el aeropuerto), calcula el intervalo observado por el piloto del avión.

3. Un pasajero del AVE (tren de alta velocidad que viaja a 225 km/h) mide la longitud y la altura del vagón, y obtiene 87 m de largo y 2,3 m de alto.

   a) Determina los valores que mediría un observador en reposo en la estación.

   b) Determina los valores que mediría el mismo observador si se tratara de un tren que viajara a una velocidad igual a $0{,}75\,c$.

4. Una partícula de masa en reposo $m_0 = 2,4 \times 10^{-28}$ kg viaja con una velocidad $v = 0{,}8\,c$, siendo c la velocidad de la luz en el vacío. ¿Cuál es la relación entre su energía cinética relativista y su energía cinética clásica?

5. Razona si un cuerpo puede acelerar de tal forma que alcance una velocidad superior a la de la luz.

6. Cuando una nave espacial está en reposo, su longitud es de 50 m. ¿Qué longitud medirá el mismo observador cuando la nave alcance una velocidad de $2{,}1 \times 10^8$ m/s?

7. Calcular la vida media, medida en el laboratorio, de un muón (μ), que se mueve a una velocidad de $0,6\,c$ respecto al laboratorio si su vida media en reposo es de 2×10^{-6} s.

8. Un meteorito cuya masa en reposo es de 270 kg se acerca al Sol al 80 % de la velocidad de la luz. Calcula:

    a) La masa del meteorito visto desde el Sol.

    b) Su masa propia.

    c) La velocidad a la cual su masa parecerá el doble de la masa en reposo.

9. Una nave espacial cuya masa en reposo es de 5 000 kg acelera hasta una velocidad igual a $0{,}9\,c$. Calcula el incremento de masa de la nave y la energía que se le ha suministrado.

10. Dos partículas iguales, de 3 g de masa en reposo, chocan a una velocidad de $0{,}8\,c$ y quedan reducidas a una única masa M_0 en reposo. Calcula:

    a) Su masa relativista antes del choque.

    b) La energía cinética de las dos partículas antes del choque.

    c) La masa final.

11. Un astronauta se acerca a una estrella con una velocidad $v = c/3$. ¿Con qué velocidad percibe la luz procedente de las estrellas?

12. La energía en reposo de un electrón es 0,511 MeV. Hallar la energía cinética de un electrón en movimiento con una velocidad $v = 0{,}5\,c$. Dato: 1 eV= $1{,}6 \times 10^{-19}$ J.

13. Un viajero espacial de 25 años efectúa un recorrido a través de nuestra galaxia a la velocidad de $1{,}8 \times 10^8$ m/s. Cuando regresa, el calendario terrestre revela que han transcurrido 50 años. ¿Qué edad parece tener el viajero?

14. Calcula a qué velocidad ha de moverse un cuerpo para que su energía total sea el doble de la que tenía en reposo.

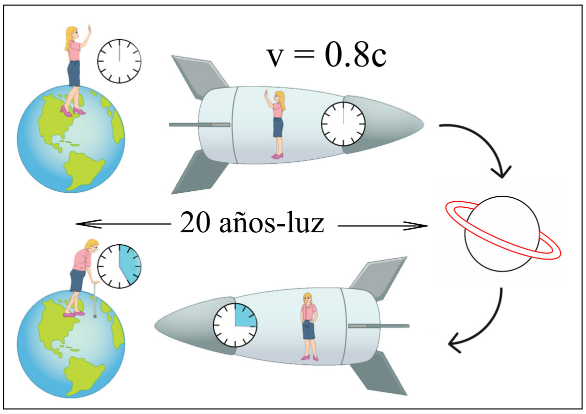
15. Se han ajustado en la Tierra dos relojes atómicos idénticos para que sean sincrónicos. Uno de los relojes se manda en una nave espacial con una velocidad $v = 0{,}6\,c$ y el otro se queda fijo en Tierra. Transcurrida 1 hora en el reloj fijo en Tierra, ¿qué tiempo marcará el reloj de la nave espacial?

16. Demuestra que si un cuerpo se mueve a una velocidad $v = \dfrac{\sqrt{8}}{3}c$, su energía cinética es el doble de su energía en reposo.

17. En una reacción nuclear, el 0,1 % de la masa del combustible se transforma en energía. Determina cuánta energía se podrá extraer de 2 kg de combustible nuclear. Expresa dicha energía en joules y kWh. Dato: $c = 3 \times 10^8$ m/s.

18. Calcula el momento lineal y la energía relativista de un electrón que se mueve con una velocidad $v = 0{,}98c$. Datos: $c = 3 \times 10^8$ m/s. $m_e = 9{,}1 \times 10^{-31}$ kg.

19. Una nave parte hacia un planeta situado a 20 años-luz de la Tierra, viajando a una velocidad de $v = 0{,}8c$. Suponiendo despreciables los tiempos empleados en las aceleraciones y cambio de sentido, calcula el tiempo invertido en el viaje de ida y vuelta para un observador en la Tierra y para el observador que viaja en la nave. Dato: $c = 3 \times 10^8$ m/s.



9.2. Soluciones

1. Los postulados de la relatividad especial fueron formulados por Albert Einstein para explicar los resultados negativos de la experiencia de Michelson-Morley.

   a) Postulado 1. Todas las leyes de la Física y no solo las de la mecánica, son invariantes respecto a las transformaciones entre sistemas de referencia inerciales (relatividad de Galileo).

   b) Postulado 2. La velocidad de la luz en el vacío es la misma para todos los sistemas de referencia inercial y es independiente de la velocidad del observador o de la fuente.

   El primer postulado es el que ya formulara Galileo Galilei en 1638. El más novedoso es el segundo ya que se abandona el concepto de simultaneidad y el tiempo ya no es absoluto.

2. (a) $\Delta t = 2{,}29$ s; (b) $\Delta t = 0{,}525$ s

3. (a) $\Delta y = \Delta y' = 2{,}3$ m; $\Delta x \simeq \Delta x' = 87$ m; (b) $\Delta y = \Delta y' = 2{,}3$ m; $\Delta x = 57{,}5$ m

4. $\dfrac{E_C^{relativista}}{E_C^{clasica}} = 2{,}08$

5. No. Haría falta una energía infinita.

6. $L = 35{,}7$ m

7. $\tau = 2{,}5 \times 10^{-6}$ s

8. (a) $m = 450$ kg; (b) $m_0 = 270$ kg; (c) $v = 0{,}866\,c$

9. $\Delta\, m = 6470{,}79$ kg; $E_C = 5{,}82 \times 10^{20}$ J

10. (a) $m = 5$ g; (b) $E_C = 3{,}6 \times 10^{14}$ J; (c) $M_0 = 10$ g

11. $v = c$

12. $E_C = 1{,}26 \times 10^{-14}$ J $= 0{,}079$ MeV

13. $t = 65$ años

14. $v = \dfrac{\sqrt{3}}{2} c$

15. $t' = 48$ min.

16. Basta usar $E_C = mc^2 - m_0c^2$ y sustituir la velocidad.

17. $E_0 = m_0c^2 = 1{,}8 \times 10^{14}$ J. $5{,}0 \times 10^7$ kWh

18. $p = 1{,}35 \times 10^{-21}$ kgm/s. $E = 4{,}13 \times 10^{-13}$ J

19. $t_{TIERRA} = 50$ años. $t_{NAVE} = 30$ años.

9.3. Fórmulas de la teoría especial de la relatividad

Transformación de Lorentz $\quad x' = \gamma(x - v\,t) \quad y' = y \quad z' = z \quad t' = \gamma\left(t - \frac{v\,x}{c^2}\right)$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Contracción de Lorentz-Fitzgerald $\quad L' = L_0\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$

Dilatación temporal $\quad \Delta\,t' = \frac{\Delta\,t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$

Suma relativista de velocidades $\quad v_x = \frac{v'_x + v}{1 + \frac{v\,v'_x}{c^2}}$

Masa relativista $\quad m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = m_0\gamma$

Energía relativista total $\quad E = mc^2 = m_0\gamma c^2$

Energía cinética relativista $\quad E_C = mc^2 - m_0c^2 = m_0\gamma c^2 - m_0c^2 = m_0c^2(\gamma - 1)$

Cantidad de movimiento relativista $\quad p = mv = \gamma\,m_0v$

Relación entre la energía y el momento $\quad E^2 = p^2c^2 + m_0^2c^4$

Si $\quad v \ll c, \quad E_C = m_0c^2(\gamma - 1) \simeq \frac{1}{2}m_0v^2$

10 — Física cuántica

10.1. Cuestiones y problemas

Para todos los ejercicios las constantes son las siguientes: $m_e = 9{,}1 \times 10^{-31}$ kg, $h = 6{,}6 \times 10^{-34}$ J·s, 1 eV $= 1{,}6 \times 10^{-19}$ J, $c = 3 \times 10^8$ m/s, $|e| = 1{,}6 \times 10^{-19}$ C.

---

1. Si f_0 es la frecuencia umbral de un metal puro, el efecto fotoeléctrico solo se presenta si: (a) $\lambda < \lambda_0$; (b) $f < f_0$; (c) $f = f_0$. Indicar si es verdadero o falso.

2. Para poner mejor de relieve el efecto fotoeléctrico se observa que es preferible hacer incidir sobre el metal luz ultravioleta (UV), $\lambda_{UV} = 400$ nm, que no luz roja, de longitud de onda mayor. Explica por qué esto es así.

3. Determina la energía, en eV, de los fotones de la luz roja de longitud de onda 650 nm. Halla la cantidad de movimiento que posee un fotón de esa luz.

4. Si se duplica la frecuencia de la radiación que incide sobre una placa de metal, ¿se duplica la energía cinética de los electrones extraídos? ¿Por qué?

5. Calcular la energía y la velocidad máxima de los electrones arrancados de un metal, por efecto fotoeléctrico, si la tensión de frenado necesaria para que no lleguen electrones al cátodo es $V_{max} = 6$ V.

6. Calcula la longitud de onda asociada a un electrón de 100 eV de energía cinética.

7. Calcula la longitud de onda de De Broglie que corresponde a un balón de fútbol que se mueve a 25 m/s, si su masa es de 450 g. Calcula, asimismo, la que corresponde a un tren de 1 000 toneladas de masa, si se mueve con una velocidad de 144 km/h.

8. Cuando se ilumina un metal con luz de frecuencia 10^{15} Hz, la fotocorriente se anula con un potencial de frenado de 0,8 V. En cambio si la luz tiene una frecuencia de $1{,}36 \times 10^{15}$ Hz, dicho potencial se eleva 2,3 V.

    a) Hallar el valor de la constante de Planck *b*) Hallar el trabajo de extracción del metal

9. Para anular la fotocorriente producida al iluminar un metal con luz de $1{,}2 \times 10^{15}$ Hz es necesario aplicar una tensión de 2 V.

   a) ¿Qué tensión será necesario oponer para interrumpir la fotocorriente producida por la luz de 150 nm?

   b) ¿Cuál es la frecuencia umbral de ese metal?

10. La frecuencia umbral de un metal es $8{,}5 \times 10^{14}$ Hz.

    a) Hallar la energía cinética máxima de los electrones que emite cuando se le ilumina con luz de $1{,}3 \times 10^{15}$ Hz

    b) ¿Cual es la longitud de onda de De Broglie asociada a los electrones?

11. Halla la diferencia de potencial (ddp) que se debe aplicar para detener los fotoelectrones emitidos por una placa de níquel bajo la acción de luz ultravioleta de 200Å de longitud de onda, sabiendo que el umbral de energía del níquel vale 5,01 eV.

12. Se determina la posición de una partícula con un error de 10^{-5} m, y su momento lineal con un error de 10^{-7} kg·m·s^{-1}. Esta afirmación:

    a) Es imposible, pues viola el principio de incertidumbre de Heisenberg

    b) Es posible ya que no lo viola

    c) No puede asegurarse, ya que se precisa la energía de la partícula

13. La radiación umbral que permite el funcionamiento de una célula fotoeléctrica tiene una longitud de onda de 400 nm. ¿Qué velocidad poseerán los electrones arrancados si la célula se ilumina con luz de 500 nm? ¿Y con luz de 300 nm?

14. Una fuente de luz monocromática emite radiación electromagnética de longitud de onda $4{,}8 \times 10^{-7}$ m y con una potencia de 20 W. ¿Cuántos fotones por segundo emite dicha fuente?

15. Una superficie metálica emite electrones cuando sobre ella incide luz verde pero no lo hace cuando la luz es amarilla. ¿Emitirá electrones cuando sobre ella incide luz azul? ¿Y si es roja? Razona la respuesta.

16. Explica la dualidad onda-corpúsculo y la relación de De Broglie.

17. Razona la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones a partir de las leyes del efecto fotoeléctrico.

a) Si f_0 es la frecuencia umbral de un metal, el efecto fotoeléctrico solo se presenta si $\lambda < \lambda_0$

b) La emisión de fotoelectrones depende de la intensidad de la luz incidente

c) La emisión de fotoelectrones depende del tipo de metal de la célula fotoeléctrica

18. Un metal emite fotoelectrones con una energía de 2 eV al iluminar con luz de frecuencia $1{,}1 \times 10^{15}$ Hz. Calcular la frecuencia de la luz con que hay que iluminar para que la energía máxima de los fotoelectrones sea superior, en un 25 %, a la del caso anterior.

19. Halla la longitud de onda asociada a un electrón que se mueve con $\frac{1}{25}$ de la velocidad de la luz.

20. Si la frecuencia umbral de la plata es $1{,}13 \times 10^{15}$ Hz ¿cuál debe ser la frecuencia de la radiación incidente para que la energía cinética de los fotoelectrones sea de 3,6 eV?

21. El trabajo de extracción para el aluminio es de 4,2 eV. Se ilumina una superficie de aluminio con radiación de 200Å. Determina:

    a) La longitud de onda umbral para el aluminio

    b) El potencial de frenado para detener a los electrones emitidos en la célula fotoeléctrica

22. La representación gráfica de la mínima tensión de frenado de la fotocorriente producida cuando un haz de luz monocromática incide sobre un metal en función de la frecuencia de la luz es una recta. ¿Cuál es la pendiente de esa recta y en qué punto corta al eje de abscisas?

23. Los fotones de la luz cuya frecuencia es la umbral para un cierto metal tiene una energía de 2 eV. ¿Cuál es la energía cinética máxima, expresada en eV, de los fotones emitidos por ese metal cuando se ilumina con luz cuyos fotones tienen 3 eV? Razonar la respuesta.

24. Calcula la longitud de onda de *De Broglie* asociada a un objeto de 0,5 kg que se mueve a 50 m/s. Compárala con la asociada a un electrón a la misma velocidad.

25. Una fuente emite radiación electromagnética de longitud de onda 10^{-10} m con una potencia de 20 W ¿Cuántos fotones emite por segundo?

26. Un rayo de luz amarilla, emitido por una lámpara de sodio, tiene una longitud de onda de 589 nm. Halla:

    a) Su frecuencia

b) Su velocidad de propagación y su longitud de onda en el interior de una fibra de cuarzo cuyo índice de refracción es $n = 1{,}458$

c) El ángulo de incidencia mínimo para el rayo de luz que, propagándose por la fibra de cuarzo, encuentra la superficie de discontinuidad entre el cuarzo y el aire y experimenta reflexión total.

27. Al iluminar un metal con luz monocromática de frecuencia $1{,}1 \times 10^{15}$ Hz, se observa que la energía cinética máxima de los electrones emitidos es 2 eV. Calcula la longitud de onda umbral para ese metal.

28. ¿Qué es un fotón? ¿De qué depende su energía? ¿En qué se diferencian unos de otros?

29. El trabajo de extracción de un metal es de 1,9 eV. Utilizando una radiación de longitud de onda conocida, el potencial de frenado es de 0,8 eV. Hallar:

    a) La longitud de onda umbral

    b) La longitud de onda correspondiente al potencial de frenado

30. Determinar la relación entre las longitudes de onda de un protón y de un electrón si ambos tienen la misma energía cinética. ($m_p = 1840\, m_e$)

10.2. Soluciones

1. (a) $\lambda < \lambda_0$. Menor longitud de onda mayor energía

2. La frecuencia de la luz UV es mayor que la frecuencia de la luz roja y por lo tanto es más probable que supere la frecuencia umbral propia de cada metal.

3. $E = 1{,}91$ eV, $P = 1{,}02 \times 10^{-27}$ kg·m/s

4. No

5. $E^C_{max} = 6$ eV; $v_{max} = 1{,}45 \times 10^6$ m/s

6. $\lambda = 1{,}23 \times 10^{-10}$ m

7. $\lambda_b = 5{,}89 \times 10^{-35}$ m; $\lambda_t = 1{,}66 \times 10^{-41}$ m

8. (a) $h = 6{,}67 \times 10^{-34}$ J·s; (b) $W_{ext} = 5{,}39 \times 10^{-19}$ J

9. (a) $V_0 = 5{,}315$ V; (b) $f_0 = 7{,}17 \times 10^{14}$ Hz

10. (a) $E^C_{max} = 2{,}98 \times 10^{-19}$ J; (b) $\lambda = 9 \times 10^{-9}$ m

11. $V_0 = 57{,}15$ V
12. Es posible
13. Con luz de 500 nm no se produce el efecto fotoeléctrico. Con luz de 300 nm la velocidad es $v = 6{,}036 \times 10^5$ m/s
14. $4{,}85 \times 10^{19} \dfrac{\text{fotones}}{\text{segundo}}$
15. Si; No
16. La dualidad onda corpúsculo fue introducida porque tanto las partículas como las ondas muestran comportamientos similares. El efecto fotoeléctrico es una prueba de que las ondas se comportan como partículas y ello le permitió a A. Einstein el formularlo. De igual manera los electrones, que son partículas, se comportan como ondas cuando inciden sobre una doble rendija produciendo un fenómeno de interferencia, típico del movimiento ondulatorio.
17. (a) Verdadero; (b) Falso; (c) Verdadero
18. $f = 1{,}22 \times 10^{15}$ Hz
19. $\lambda = 6{,}04 \times 10^{-11}$ m
20. $f = 2 \times 10^{15}$ Hz
21. (a) $\lambda_0 = 2{,}96 \times 10^{-7}$ m; (b) $V_0 = 57{,}96$ V
22. pendiente $= \dfrac{h}{e}$
23. $E^C_{max} = 1$ eV
24. $\dfrac{\lambda_e}{\lambda_b} = 5{,}5 \times 10^{29}$
25. $10^{16} \dfrac{\text{fotones}}{\text{segundo}}$
26. (a) $f = 5{,}09 \times 10^{14}$ Hz; (b) $v = 2{,}06 \times 10^8$ m/s; $\lambda = 4{,}04 \times 10^{-7}$ m; (c) $i = 43{,}3^{\text{o}}$
27. $\lambda_0 = 4{,}66 \times 10^{-7}$ m
28. Son los cuantos de energía electromagnética. Su energía depende de su frecuencia. Unos fotones de otros se diferencian por su longitud de onda y por su frecuencia.
29. (a) $\lambda_0 = 6{,}54 \times 10^{-7}$ m; (b) $\lambda = 4{,}6 \times 10^{-7}$ m
30. $\lambda_e = 42{,}9\lambda_p$

10.3. Fórmulas de la física cuántica

Energía de un fotón $E = hf = \dfrac{hc}{\lambda}$

Efecto fotoeléctrico $hf = hf_0 + E^C_{max}$ $(W_{ext} = hf_0)$

E. fotoeléctrico y potencial de frenado $\dfrac{hc}{\lambda} = \dfrac{hc}{\lambda_0} + eV_f$ $(E^C_{max} = eV_f)$

Efecto Compton $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \dfrac{h}{m_e\, c}(1 - \cos\theta)$

Dualidad onda-corpúsculo. Onda de De Broglie $\lambda = \dfrac{h}{mv}$

Principio de incertidumbre $\Delta x \cdot \Delta p \geqslant \dfrac{\hbar}{2}$ $\Delta E \cdot \Delta t \geqslant \dfrac{\hbar}{2}$ $\hbar = \dfrac{h}{2\pi}$

11 — Física nuclear

11.1. Cuestiones y problemas

1. El periodo de semidesintegración T del ${}^{226}_{88}\mathrm{Ra}$ es de 1 620 años. Hallar:

    a) La actividad de 1 gramo de ${}^{226}_{88}\mathrm{Ra}$

    b) El tiempo necesario para que la muestra quede reducida a $\dfrac{1}{16}$ de la muestra primitiva.

    Dato: $N_A = 6,02 \times 10^{23}$ moléculas/mol

2. El carbono hallado en una excavación arqueológica tenía una actividad del 54 % de la del carbono de un árbol actual. Calcula la edad del yacimiento arqueológico sabiendo que el periodo de semidesintegración del carbono 14 es de 5730 años.

3. La actividad de un isótopo radiactivo es de 2 133 desintegraciones/s y 15 minutos más tarde da solamente 1 415. ¿Cuál es el periodo de semidesintegración del isótopo?

4. Un gramo de carbón, al arder produce 7 kcal. Calcular la cantidad de carbón necesaria para producir la misma energía que 1 kg de ${}^{235}_{92}\mathrm{U}$, si la fisión de un núcleo de este elemento libera 200 MeV. Datos: 1 caloría = 4,18 J. $N_A = 6,02 \times 10^{23}$

5. La **vida media** del ${}^{234}_{90}\mathrm{Th}$ es de 38 días. ¿Qué proporción de torio permanecerá sin desintegrarse al cabo de 152 días?

6. El análisis del ${}^{14}_{6}\mathrm{C}$ de un esqueleto fósil revela que presenta las 2/3 partes de la cantidad habitual en un ser vivo. ¿De qué época es el fósil? (T = 5730 años).

7. *a*) Escribe la ley de desintegración radiactiva y explica su significado

    b) Un núcleo radiactivo tiene un periodo de semidesintegración de 1 año. ¿Significa esto que se habrá desintegrado completamente en dos años? Razona la respuesta.

8. Calcular cuántas fisiones de núcleos por segundo se producen en un reactor nuclear que tiene una potencia de 900 MW si la energía liberada en la fisión de un núcleo de uranio es de 200 MeV.

9. Un isótopo radiactivo tiene una masa 198 uma y su periodo de semidesintegración es de 300 000 años. Si partimos de una muestra de 25 gramos de dicho isótopo, determina:

    a) La constante de desintegración radiactiva
    b) La actividad inicial de la muestra
    c) La masa que quedará sin desintegrar después de 60 000 años.

10. Una muestra posee inicialmente una 100 000 átomos radiactivos. Si la constante de desintegración es 0,2 años^{-1}. Calcula:

    a) Cúanto tiempo transcurrirá hasta queden 2 000 átomos en la muestra.
    b) Calcula el periodo de semidesintegración
    c) Calcula la actividad de la muestra al principio y al final

11. Aplicando la ley de Soddy-Fajans, completa las ecuaciones de las desintegraciones nucleares siguientes y di qué tipo de desintegración es y qué partículas se emiten:

    a) ${}^{214}_{84}\mathrm{Po} \rightarrow {}^{210}_{82}\mathrm{Pb} + ?$
    b) ${}^{234}_{90}\mathrm{X} \rightarrow {}^{234}_{91}\mathrm{Y} + ?$

12. ¿Qué porcentaje de la cantidad inicial de un cierto elemento radiactivo se ha desintegrado después de transcurridos cuatro periodos de semidesintegración

13. El ^{210}Bi es un elemento radiactivo de la familia del uranio. Su periodo de semidesintegración es de 5 días. Si inicialmente se tiene 1 mol de átomos de ^{210}Bi, (a) ¿cuántos núcleos se han desintegrado en 15 días?, (b) ¿Cuál es su actividad al cabo de ese tiempo?

14. El núcleo atómico está formado por neutrones y protones. Estos últimos experimentan entre sí repulsión coulombiana, ¿cómo es es posible que los núcleos atómicos sean estables?

15. El periodo de semidesintegración del ^{60}Co es de 5,3 años. Calcula la actividad de 2 gramos de dicha sustancia. Masa atómica del cobalto: 58,94 uma.

16. El periodo de semidesintegración del ^{222}Rn es de 3,9 días. Si tenemos una muestra de 20 g de ^{222}Rn, ¿qué cantidad queda sin desintegrar después de 7,6 días?

17. Una muestra radiactiva tiene un periodo de semidesintegración de 2 días. ¿Cuánto tiempo ha de transcurrir para que quedarnos con el 1 % de la cantidad inicial?

18. En una excavación se ha encontrado una herramienta de madera de roble. Sometida a la prueba del ^{14}C se observa que se desintegran 100 átomos cada hora, mientras que una muestra de madera de roble actual presenta una tasa de desintegración de 600 átomos/hora. Sabiendo que el periodo de semidesintegración del ^{14}C es de 5730 años, calcula la antigüedad de la herramienta. (PAU 2007)

11.2. Soluciones

1. (a) $3,6 \times 10^{10}$ desintegraciones/s; (b) 6480 años

2. $t \simeq 5\,094$ años

3. $T = 25,33$ minutos

4. Son necesarias 2 800 toneladas de carbón

5. 1,83 % sin desintegrar

6. $t \simeq 3\,351,8$ años

7. (a) $N = N_0\, e^{-\lambda t}$; (b) No. Al cabo de dos años quedará la cuarta parte.

8. $2,8125 \times 10^{19}$ fisiones por segundo

9. (a) $\lambda = 7,3265 \times 10^{-14}$ s^{-1}; (b) $5,5716 \times 10^{9}$ Bq; (c) 21,76 g.

10. (a) 19,56 años; (b) 3,47 años; (c) $6,36 \times 10^{-4}$ Bq al principio y $1,272 \times 10^{-5}$ Bq al final.

11. (a) Se trata de la desintegración α, en la que se emite una partícula α (dos protones y dos neutrones), disminuyendo en 4 unidades la masa atómica y en 2 el número atómico. (b) Es una desintegración β, en donde la masa atómica es constante y el número atómico se incrementa en una unidad. La emisión β son electrones.

12. Se ha desintegrado el $93,75\,\%$.

13. (a) Se han desintegrado $5,27 \times 10^{23}$ núcleos. (b) La actividad después de 15 días es $1,21 \times 10^{17}$ Bq.

14. La estabilidad nuclear solo se entiende si existe en el interior de los núcleos un fuerza lo suficientemente fuerte para contrarrestar la repulsión electrostática. Por ello se la denomina fuerza nuclear fuerte. Su origen se le supone en la fuerza de color que mantiene a los quarks unidos dentro de los nucleones.

15. $A = 8,47 \times 10^{13}$ Bq.
16. $m = 5,18$ g.
17. $t \simeq 13,29$ días
18. 14811,83 años de antigüedad

11.3. Fórmulas de la física nuclear

Leyes de Soddy del desplazamiento radiactivo

$${}^{A}_{Z}X \;\rightarrow\; {}^{A-4}_{Z-2}Y + \alpha \qquad \text{Desintegración alfa}$$

$${}^{A}_{Z}X \;\rightarrow\; {}_{Z+1}{}^{A}Y + \beta \qquad \text{Desintegración beta. La radiación beta son electrones.}$$

$${}^{A}_{Z}X^{*} \;\rightarrow\; {}^{A}_{X}Y + \gamma \qquad \text{Desintegración gamma. La radiación gamma son fotones.}$$

$$\text{Ley de la desintegración radiactiva} \qquad N = N_0\, e^{-\lambda\, t}$$

$$\text{Periodo de semidesintegración} \qquad T = \frac{\ln 2}{\lambda}$$

$$\text{Vida media} \qquad \tau = \frac{1}{\lambda}$$

$$\text{Actividad} = \left|\frac{dN}{dt}\right| = \lambda\, N \qquad \text{Se mide en Bq (becquerels) o desintegraciones/s}$$

El curio (Ci) es otra unidad de actividad nuclear, 1 Ci $= 3,7 \times 10^{10}$ Bq