Cálculo del valor de una función recurrente

Primer procedimiento

De una determinada función $f(x)$ se nos dice que cumple la siguiente propiedad

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + xy \tag{1}$$

Se nos dice además como dato que

$$f(4) = 10 \tag{2}$$

y que con las ecuaciones (1) y (2) determinemos el valor de $f(2021)$. Como $4 = 2 + 2$, de la definición (1) podemos poner

$$f(4) = f(2+2) = f(2) + f(2) + 2 \cdot 2 = 10 \tag{3}$$

de donde fácilmente se ve que $f(2) = 3$. De igual manera, como $2 = 1 + 1$ podemos escribir de nuevo

$$f(2) = f(1+1) = f(1) + f(1) + 1 \cdot 1 = 3 \tag{4}$$

y ahora $f(1) = 1$. Usando la definición dada en (1) podemos escribir pues lo siguiente

$$f(x+1) = f(x) + f(1) + x \cdot 1 \tag{5}$$

o lo que es lo mismo

$$f(x+1) - f(x) = 1 + x \tag{6}$$

Con la nueva propiedad demostrada en (6) vamos a calcular cuánto vale $f(2021)$. Haciendo $x = 2020$ en (6) tenemos que

$$f(2020+1) - f(2020) = 1 + 2020 = 2021 \tag{7}$$

por tanto podemos escribir una serie recurrente

$$\begin{array}{ll}
f(2021) - f(2020) = 2021 & (1) \\
f(2020) - f(2019) = 2020 & (2) \\
f(2019) - f(2018) = 2019 & (3) \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\
f(5) - f(4) = 5 & (2017)
\end{array}$$

La serie habría que escribirla un total de 2017 veces hasta llegar a $f(4)$ que es el valor que conocemos. Podemos usar la fórmula del término general de una progresión aritmética para demostrar esto, $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$ y hallar n

$$n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1 = \frac{2021 - 5}{1} + 1 = 2017 \tag{8}$$

Si sumamos pues todas las ecuaciones (1) + (2) + (3) $\cdots$ + (2017), se ve que los términos cruzados se cancelan, es decir $-f(2020) + f(2020) = 0$, $-f(2019) + f(2019) = 0$, y así sucesivamente, obteniendo al final

$$f(2021) - f(4) = 2021 + 2020 + 2019 + \cdots + 5 \tag{9}$$

A la derecha de (9) tenemos una serie aritmética que acaba en 5, tiene diferencia igual a la unidad y contiene 2017 términos, luego su suma es

$$S = \frac{(a_n + a_1) \cdot n}{2} = \frac{(2021 + 5) \cdot 2017}{2} = 2\,043\,221 \tag{10}$$

Por lo tanto despejando de (9)

$$f(2021) = f(4) + 2\,043\,221 = 10 + 2\,043\,221 = 2\,043\,231 \tag{11}$$

y el resultado que nos piden es

$$\boxed{f(2021) = 2\,043\,231}$$

Segundo procedimiento

En el procedimiento anterior hemos hallado el valor de $f(1) = 1$ y $f(2) = 3$. De la misma manera podemos hallar que $f(3) = f(2+1) = f(2) + f(1) + 2 \cdot 1 = 6$, $f(4) = 10$, $f(5) = 15$ y así sucesivamente. La tabla de valores de la función sería entonces

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	1	3	6	10	15	21

Llegados a este punto hay que darse cuenta de las diferencias de valores que tienen los valores de $f(x)$, es decir, de 1 a 3 van 2, de 3 a 6 van 3, de 6 a 10 van 4, de 10 a 15, 5, etc. Las diferencias son pues la sucesión 2, 3, 4, 5, 6... Y las diferencias de esta última son 1, 1, 1... Esto significa que la función tiene un carácter cuadrático, es decir $f(x)$ es de la forma

$$f(x) = ax^2 + bx + c \tag{12}$$

Tomando los valores de x, 1, 2 y 3, podemos plantear un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas y hallar a, b y c,

$$\begin{cases} a + b + c = 1 \\ 4a + 2b + c = 3 \\ 9a + 3b + c = 6 \end{cases}$$

cuya solución es muy fácil, siendo $a = \dfrac{1}{2}$, $b = \dfrac{1}{2}$ y $c = 0$. Así pues la función $f(x)$ es sencillamente

$$f(x) = \frac{1}{2}(x^2 + x) \tag{13}$$

y entonces

$$f(2021) = \frac{1}{2}(2021^2 + 2021) = 2\,043\,231 \tag{14}$$

resultado que coincide con el obtenido en (11).