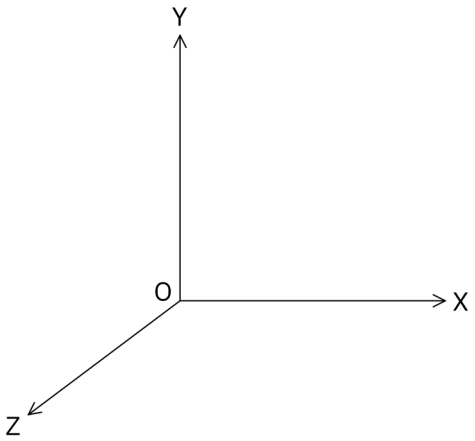
Geometría en el espacio

La ecuación de un plano

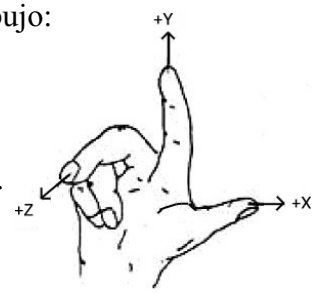
Para la Geometría que vamos a ver, trabajaremos en 3 dimensiones. Hasta 1º de Bachillerato se usaron solo 2 dimensiones: Se trabajaba con los ejes OX y OY, que se colocaban en el plano en el que se hacían las gráficas. Ese plano se apoyaba en la superfície de trabajo: La hoja de papel o la pizarra.

Para añadir la 3ª dimensión necesitamos un eje adicional, el eje OZ. Ese eje es perpendicular a los otros dos, OX y OY. Lo imaginamos 'saliendo' del plano en el que trabajamos (la hoja de papel o la pizarra) y lo dibujamos de esta forma:



Los ejes OX, OY, OZ son perpendiculares dos a dos.

Decimos que forman un 'triedro a derechas': Podemos ver las direcciones positivas de los ejes usando los dedos de la mano derecha, como se ve en el dibujo:



Se nombran en sentido antihorario (es decir, en dirección contraria al movimiento de las agujas del reloj).

Usando estos ejes de coordenadas nos preguntamos:
¿Qué representación gráfica tiene cualquiera de las ecuaciones que hemos usado en el capítulo anterior?

Tomemos como ejemplo esta ecuación: $2x+3y+z=4$.

Una forma de representar gráficamente una función 3D es imaginar 'cortes' de ella, para distintos valores de *z*. Para $z=0$ tendremos la representación plana con la que hemos trabajado en cursos anteriores. Después podemos dar más valores a *z*, para obtener más 'cortes' de la función e ir construyéndola.

En el ejemplo, para $z=0$ obtenemos: $2x+3y=4$ que es una recta de pendiente $m=-3/2$.

para $z=1$ obtenemos: $2x+3y=3$ que también es una recta de pendiente $m=-3/2$.

para $z=2$ obtenemos: $2x+3y=2$ que también es una recta de pendiente $m=-3/2$.

Con cualquier valor de *z* obtenemos rectas paralelas, pues tienen la misma pendiente.

También podemos hacer la representación gráfica 3D haciendo 'cortes' para distintos valores de *y*.

En el ejemplo, para $y=0$ obtenemos: $2x+z=4$ que es una recta (en XZ) de pendiente $m=-1/2$

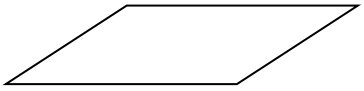
para $y=1$ obtenemos: $2x+z=1$ que es una recta (en XZ) de pendiente $m=-1/2$

Lo mismo sucedería con otros valores de *y*, siempre obtenemos rectas paralelas (con la misma pendiente).

Solo hay una forma geométrica tridimensional que, al cortarla en secciones paralelas al eje OZ, siempre produzca rectas paralelas y que, al cortarla en secciones paralelas al eje OY, también produzca siempre rectas paralelas: Es un plano, extendido hasta el infinito.

Así pues, cualquier ecuación lineal del tipo: $\boxed{\mathrm{A}\,x+\mathrm{B}\,y+\mathrm{C}\,z=\mathrm{D}}$ es, gráficamente, un **plano en 3D**.

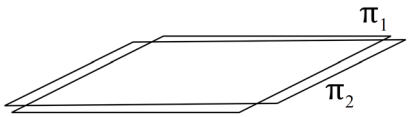
No necesitaremos representarlos cuidadosamente, nos bastará con dibujar algo como lo siguiente:



Se les suele llamar con letras griegas: π, σ,...

Posición relativa de 2 planos

En el espacio, 2 planos solo pueden tener 3 posiciones relativas:

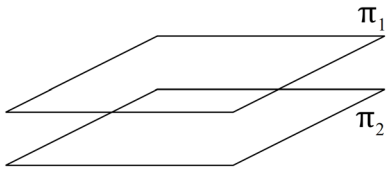


Planos coincidentes

Ejemplo: $\begin{cases} \pi_1 \equiv 2x+3y+\ \ z=4 \\ \pi_2 \equiv 4x+6y+2z=8 \end{cases}$

Los 2 planos son el mismo.

Cumplen: $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}=\frac{D_1}{D_2}$

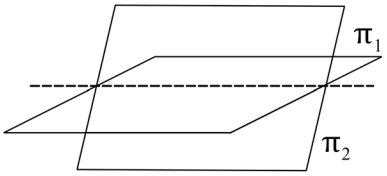


Planos paralelos

Ejemplo: $\begin{cases} \pi_1 \equiv 2x+3y+\ \ z=4 \\ \pi_2 \equiv 4x+6y+2z=9 \end{cases}$

Forman un sistema incompatible.

Cumplen: $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}\neq\frac{D_1}{D_2}$



Planos incidentes

Ejemplo: $\begin{cases} \pi_1 \equiv 2x+3y+z=4 \\ \pi_2 \equiv\ \ x+\ \ y+z=4 \end{cases}$

Forman un Sist. Comp. Indeterm.

Cumplen: $\frac{A_1}{A_2}\neq\frac{B_1}{B_2}\neq\frac{C_1}{C_2}$

Las propiedades que cumplen los planos coincidentes y los planos paralelos que he escrito arriba se deducen directamente de lo que sabemos sobre sistemas de ecuaciones.

En el caso de los planos incidentes, se cortan en una recta y forman un sistema compatible indeterminado.

La solución de ese sistema, como la obtuvimos en sistemas, será una recta en forma paramétrica.

La resolución se puede hacer usando métodos elementales, por Cramer o usando el método de Gauss.

Obtengamos la solución en el ejemplo propuesto con el método de Gauss:

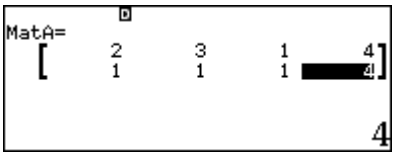
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{l} \text{F1} \leftarrow \text{F2} \\ \text{F2} \leftarrow \text{F1}-2\cdot\text{F2} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \end{array}\right) \text{F1} \leftarrow \text{F1}-\text{F2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \end{array}\right)$$

Es decir: $\begin{cases} x+2z=8 \\ y-\ \ z=-4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=8-2z \\ y=-4+z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=8-2t \\ y=-4+t \\ z=t \end{cases}$ con $t\in\mathbb{R}$

Lo he hecho con el método de Gauss para que recuerdes que la calculadora puede obtenerlo:

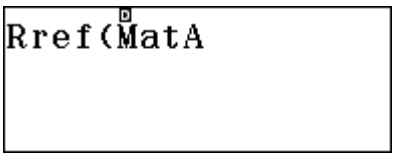
Vamos al menú 4 y definimos la matriz A

Con 2 filas y 4 columnas
Y la introducimos así:



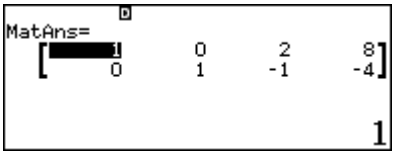
Pulsamos AC

Pulsamos OPTN ▼ ▼ 2
y luego, OPTN 3



Pulsamos =

y obtenemos el resultado:



Más adelante veremos cómo obtener esa recta con una operación vectorial, pero puedes usar la calculadora así en un examen para obtener una solución particular, aquí es: $(x_0, y_0, z_0) = (8, -4, 0)$

Obtener la recta definida por 2 planos

Aunque el método de Gauss funciona muy bien, es posible que prefieras los métodos más 'tradicionales' (por ejemplo, reducción) o por Cramer. Veamos 3 ejemplos. (Comprueba por Gauss con la calculadora).

Ejemplo 1: $\text{r} \equiv \begin{cases} 4x + y - z = 10 \\ 2x + 2y + z = 11 \end{cases}$

Despejamos z en ambas ecuaciones y resolvemos por reducción:

$\left.\begin{matrix} 4x + y = 10 + z \\ 2x + 2y = 11 - z \end{matrix}\right\}$ $\begin{matrix} \text{F1} \cdot 2 \\ \text{ídem} \end{matrix}$ $\left.\begin{matrix} 8x + 2y = 20 + 2z \\ 2x + 2y = 11 - z \end{matrix}\right\}$ Restamos: $6x = 9 + 3z \;\Rightarrow\; x = \dfrac{9+3z}{6} = \dfrac{3+z}{2}$

Sustituyendo en la 1ª ec.: $4 \cdot \dfrac{3+z}{2} + y = 10 + z \;\rightarrow\; 6 + 2z + y = 10 + z \;\Rightarrow\; y = 4 - z$

Elegimos: $z = 1 + 2t$ para que la expresión de x sea 'bonita' y tendremos como solución:

$$\text{r} \equiv \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 - 2t \\ z = 1 + 2t \quad \text{con } t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Ejemplo 2: $\text{r} \equiv \begin{cases} 4x + 6y + z = 0 \\ 3x + 2y + 2z = 5 \end{cases}$

Despejamos z en ambas ecuaciones y resolvemos por reducción:

$\left.\begin{matrix} 4x + 6y = -z \\ 3x + 2y = 5 - 2z \end{matrix}\right\}$ $\begin{matrix} \text{ídem} \\ \text{F2} \cdot 3 \end{matrix}$ $\left.\begin{matrix} 4x + 6y = -z \\ 9x + 6y = 15 - 6z \end{matrix}\right\}$ Restamos: $5x = 15 - 5z \;\Rightarrow\; x = \dfrac{15-5z}{5} = 3 - z$

Sustituyendo en la 1ª ec.: $4 \cdot (3 - z) + 6y = -z \;\rightarrow\; 12 - 4z + 6y = -z \;\Rightarrow\; y = \dfrac{-12+3z}{6} = \dfrac{-4+z}{2}$

Elegimos: $z = 2t$ para que la expresión de y sea 'bonita' y tendremos como solución:

$$\text{r} \equiv \begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = -2 + t \\ z = 2t \quad \text{con } t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Ejemplo 3: $\text{r} \equiv \begin{cases} 8x - y + z = 7 \\ -7x + 2y + z = 1 \end{cases}$

Despejamos z en ambas ecuaciones y resolvemos por reducción:

$\left.\begin{matrix} 8x - y = 7 - z \\ -7x + 2y = 1 - z \end{matrix}\right\}$ $\begin{matrix} \text{F1} \cdot 2 \\ \text{ídem} \end{matrix}$ $\left.\begin{matrix} 16x - 2y = 14 - 2z \\ -7x + 2y = 1 - z \end{matrix}\right\}$ Sumamos: $9x = 15 - 3z \;\Rightarrow\; x = \dfrac{15-3z}{9} = \dfrac{5-z}{3}$

Sustituyendo en la 1ª ec.: $8 \cdot \dfrac{5-z}{3} - y = 7 - z \;\rightarrow\; 40 - 8z - 3y = 21 - 3z \;\Rightarrow\; y = \dfrac{-19+5z}{-3} = \dfrac{19-5z}{3}$

Elegimos: $z = 2 + 3t$ para que las expresiones de x e y sean 'bonitas' y tendremos como solución:

$$\text{r} \equiv \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 3 - 5t \\ z = 2 + 3t \quad \text{con } t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

La ecuación de una recta en forma paramétrica

Tal y como hemos visto, una recta en el espacio puede definirse como el corte de 2 planos.

La solución es de este tipo: $r \equiv \begin{cases} x = x_0 + v_x \cdot t \\ y = y_0 + v_y \cdot t \\ z = z_0 + v_z \cdot t \end{cases}$ con $t \in \mathbb{R}$

Dando valores a *t* podemos obtener tantos puntos de la recta como queramos.

En particular, para $t = 0$ tenemos que, un punto de la recta es: $\mathrm{P}_r(x_0, y_0, z_0)$.

Puesto que para $t = 1$ obtenemos el punto: $\mathrm{P}'_r(x_0 + v_x, y_0 + v_y, z_0 + v_z)$ vemos que ha habido un desplazamiento igual a: (v_x, v_y, v_z) que es la definición de vector director de la recta.

El vector director de la recta es: $\overrightarrow{v_r} = (v_x, v_y, v_z)$

En definitiva, tenemos:

$$r \equiv \begin{cases} x = x_0 + v_x \cdot t \\ y = y_0 + v_y \cdot t \\ z = z_0 + v_z \cdot t \end{cases} \quad , \quad t \in \mathbb{R}$$

$\mathrm{P}_r(x_0, y_0, z_0)$ Es un punto de la recta

$\overrightarrow{v_r} = (v_x, v_y, v_z)$ Es el vector director de la recta

Posición relativa de 3 planos

Las diferentes soluciones de un sistema de 3 ecuaciones lineales con 3 incógnitas nos dan las diferentes posiciones relativas que pueden tener 3 planos.

Para verlas todas sistemáticamente, cogeremos cada uno de los casos que vimos antes para 2 planos y veremos qué puede ocurrir al añadir un tercer plano.

1. Tenemos 2 planos coincidentes. Por ejemplo: $\begin{cases} \pi_1 \equiv 2x + 3y + z = 4 \\ \pi_2 \equiv 4x + 6y + 2z = 8 \end{cases}$ El tercer plano puede ser...

   a) Coincidente con los otros dos, por ejemplo: $\pi_3 \equiv 6x + 9y + 3z = 12$ (1ª ec. multiplicada por 3)

   Se trata de un sistema con: $\mathrm{r} = \mathrm{r}^+ = 1 < n = 3$ { Usaré: $\mathrm{r} = \mathrm{rang}(\mathrm{A})$, $\mathrm{r}^+ = \mathrm{rang}(\mathrm{A}|\mathrm{B})$ }

   Es un sistema compatible indeterminado, la solución es un plano, cualquiera de los 3.

   b) Paralelo a los otros dos, por ejemplo: $\pi_3 \equiv 6x + 9y + 3z = 10$ (con otro término independiente)

   Se trata de un sistema con: $\mathrm{r} = 1 \neq \mathrm{r}^+ = 2$

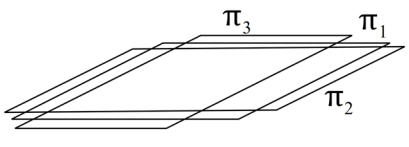
   Es un sistema incompatible, sin solución.

   c) Incidente a los otros dos, por ejemplo: $\pi_3 \equiv x + y + z = 4$ (Ya lo usamos en 'planos incidentes')

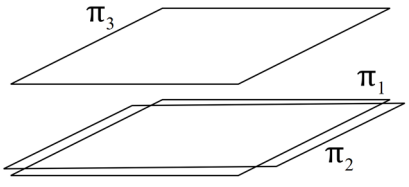
   Se trata de un sistema con: $\mathrm{r} = \mathrm{r}^+ = 2 < n = 3$

   Es un sistema compatible indeterminado, la solución es una recta.

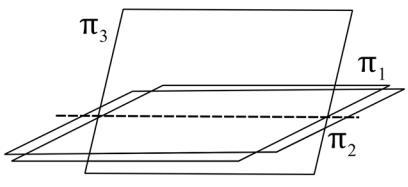
1a



1b



1c



2. Tenemos 2 planos paralelos. Por ejemplo: $\begin{cases} \pi_1 \equiv 2x+3y+\ \ z=4 \\ \pi_2 \equiv 4x+6y+2z=9 \end{cases}$ El tercer plano puede ser...

   a) Coincidente con uno de los dos, por ejemplo: $\pi_3 \equiv 4x+6y+2z=9$ (idéntico a π_2)

      Se trata del caso 1b anterior.

   b) Paralelo a ambos. Por ejemplo: $\pi_3 \equiv 4x+6y+2z=3$ (cambiando el término independiente)

      Se trata de un sistema con: $\mathrm{r}=1\neq \mathrm{r}^+=3$

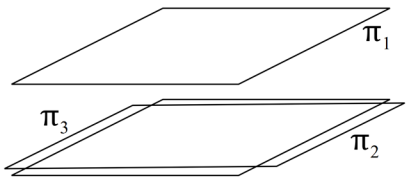
      Es un sistema incompatible, sin solución.

   c) Incidente a los otros dos, por ejemplo: $\pi_3 \equiv\ \ x+y+z=4$ (Ya lo usamos en 'planos incidentes')

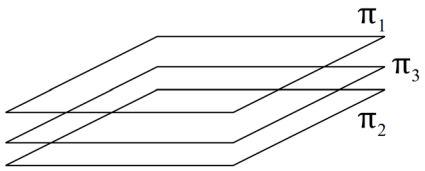
      Se trata de un sistema con: $\mathrm{r}=2\neq \mathrm{r}^+=3$

      Es un sistema incompatible, sin solución.

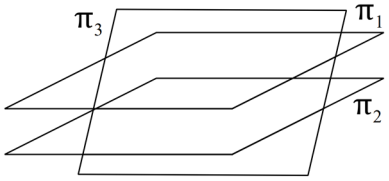
2a



2b



2c



3. Tenemos 2 planos incidentes. Por ejemplo: $\begin{cases} \pi_1 \equiv 2x+3y+z=4 \\ \pi_2 \equiv\ \ x+\ \ y+z=4 \end{cases}$ El tercer plano puede ser...

   a) Coincidente con uno de los dos, por ejemplo: $\pi_3 \equiv 4x+6y+2z=8$ (El doble de la 1ª ecuación)

      Se trata del caso 1c anterior.

   b) Paralelo a uno de los dos. Por ejemplo: $\pi_3 \equiv 4x+6y+2z=3$ (con otro término independiente)

      Se trata del caso 2c anterior.

   c) Corta a los dos anteriores en un punto. Por ejemplo: $\pi_3 \equiv 4x+6y-z=8$ [Pasan por $(8,-4,0)$]

      Se trata de un sistema con: $\mathrm{r}=\mathrm{r}^+=3=n$, el único caso compatible determinado.

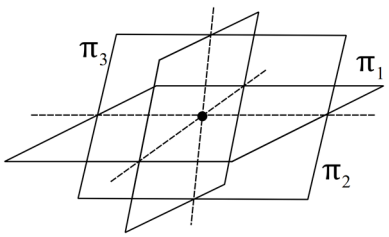
   d) Corta a los dos anteriores en la misma recta. Por ejemplo: $\pi_3 \equiv 3x+4y+2z=8$ ($\pi_3=\pi_1+\pi_2$)

      Se trata de un sistema con: $\mathrm{r}=\mathrm{r}^+=2<n=3$, caso compatible indeterminado.

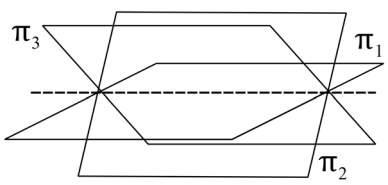
   e) Corta a los dos anteriores, pero con ningún punto común. Por ejemplo: $\pi_3 \equiv 3x+4y+2z=10$

      Se trata de un sistema con: $\mathrm{r}=2\neq \mathrm{r}^+=3$, caso incompatible.

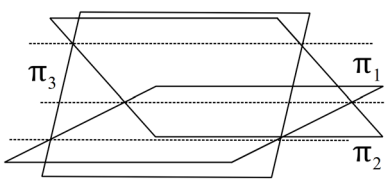
3c



3d

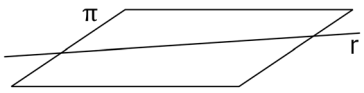


3e



Posición relativa de un plano y una recta

Respecto a un plano, una recta pueda estar colocada de estas tres formas:

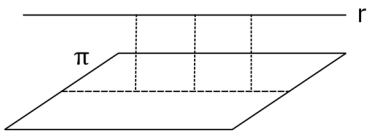


Recta contenida en el plano

Ejemplo: $\mathrm{r} \equiv \begin{cases} 2x+3y+z=4 \\ x+\ y+z=4 \end{cases}$ $\quad \pi \equiv 3x+4y+2z=8$

El plano π es una combinación lineal de los planos que definen la recta r.

$\mathrm{r} = \mathrm{r}^+ = 2 < n = 3$
Sistema Comp. Indeterminado

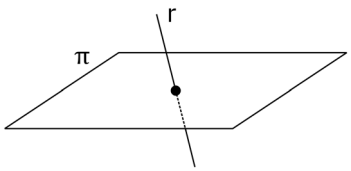


Recta paralela al plano

Ejemplo: $\mathrm{r} \equiv \begin{cases} 2x+3y+z=4 \\ x+\ y+z=4 \end{cases}$ $\quad \pi \equiv 3x+4y+2z=10$

Solo los coeficientes del plano π son combinación lineal de los que definen la recta r.

$\mathrm{r} = 2$, $\mathrm{r}^+ = 3$
Sistema Incompatible



Recta incidente en el plano

Ejemplo: $\mathrm{r} \equiv \begin{cases} 2x+3y+z=4 \\ x+\ y+z=4 \end{cases}$ $\quad \pi \equiv 3x+6y-2z=0$

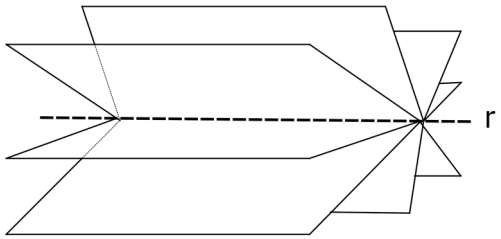
Los coeficientes del plano π no son combinación lineal de los que definen la recta r.

$\mathrm{r} = \mathrm{r}^+ = 3 = n$
Sistema Comp. Determinado

Haz de planos

Para entender mejor las posiciones relativas de un plano y una recta es útil el concepto de haz de planos.

Se llama así al conjunto infinito de todos los planos que pasan por una recta r dada:



Como ya sabemos, dos planos incidentes definen una recta. Forman un sistema compatible indeterminado.

Si añadimos otro plano (otra ecuación) que sea combinación lineal de los otros dos, el sistema tendrá la misma solución. Es decir, otro plano que sea combinación lineal de los otros dos pasa por la misma recta.

Por lo tanto, el haz de planos lo forman todas las combinaciones lineales posibles de 2 planos que definen a una recta r.

Si tenemos: $\mathrm{r} \equiv \begin{cases} 2x+3y+z=4 \\ x+\ y+z=4 \end{cases}$

la ecuación del haz de planos que pasan por la recta r es:

$$\alpha \cdot (2x+3y+z=4) + \beta \cdot (x+y+z=4) \qquad \text{con } \alpha \text{ y } \beta \text{ valores reales}$$

Esto equivale (si β no es cero) a:

$$\beta \cdot \left[\frac{\alpha}{\beta} \cdot (2x+3y+z=4) + (x+y+z=4) \right]$$

En la práctica, llamando λ al factor que multiplica a la primera ecuación, se toma:

$$\lambda \cdot (2x+3y+z=4) + (x+y+z=4) \qquad \text{que solo excluye al plano multiplicado por } \lambda.$$

Posiciones relativas de dos rectas

Dos rectas en el espacio pueden estar colocadas en estas posiciones relativas:

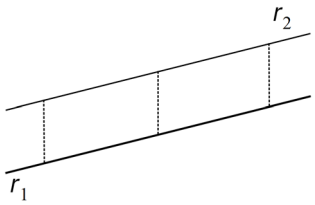
(En cada caso se forma un sistema de 4 ecuaciones lineales con 3 incógnitas)

Rectas coincidentes

Ejemplo:
$$\mathrm{r}_1 \equiv \begin{cases} 2x+3y+z=4 \\ x+\ \ y+z=4 \end{cases}$$
$$\mathrm{r}_2 \equiv \begin{cases} 3x+4y+2z=8 \\ x+2y\ \ \ \ \ =0 \end{cases}$$

Ambas rectas son la misma.
Las ecuaciones de la recta 2 son combinación lineal de la recta 1.

$\mathrm{r} = \mathrm{r}^+ = 2 < n = 3$
Sistema Comp. Indeterminado

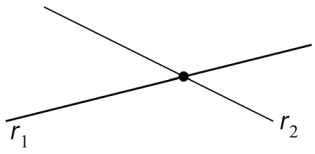


Rectas paralelas

Ejemplo:
$$\mathrm{r}_1 \equiv \begin{cases} 2x+3y+z=4 \\ x+\ \ y+z=4 \end{cases}$$
$$\mathrm{r}_2 \equiv \begin{cases} 2x+3y+z=4 \\ x+\ \ y+z=2 \end{cases}$$

Solo los coeficientes de la recta 2 son combinación lineal de los que definen la recta 1.

$\mathrm{r} = 2$, $\mathrm{r}^+ = 3$
Sistema Incompatible

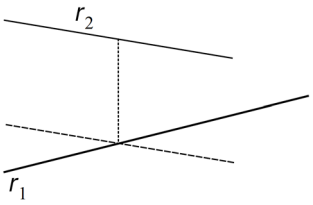


Rectas incidentes (se cortan)

Ejemplo:
$$\mathrm{r}_1 \equiv \begin{cases} 2x+3y+z=4 \\ x+\ \ y+z=4 \end{cases}$$
$$\mathrm{r}_2 \equiv \begin{cases} 2x+5y+z=4 \\ x+2y+z=4 \end{cases}$$

Hay 3 ecuaciones independientes, la cuarta ecuación no aporta información, es redundante.

$\mathrm{r} = 3$, $\mathrm{r}^+ = 3$
Sistema Comp. Determinado



Rectas que se cruzan

Ejemplo:
$$\mathrm{r}_1 \equiv \begin{cases} 2x+3y+z=4 \\ x+\ \ y+z=4 \end{cases}$$
$$\mathrm{r}_2 \equiv \begin{cases} 2x+5y+z=4 \\ x+2y+z=8 \end{cases}$$

El determinante 4×4 de la matriz ampliada es distinto de cero.

$\mathrm{r} = 3$, $\mathrm{r}^+ = 4$
Sistema Incompatible

Estudiar un sistema de 4 ecuaciones puede ser complicado.

Lo más sencillo para estudiar las posiciones relativas de dos rectas dadas como intersección de planos es estudiar el sistema que forman solo tres de las ecuaciones.

Eso permite distinguir los dos primeros casos (coincidencia y paralelismo).

Si las tres ecuaciones elegidas forman un sistema compatible determinado, su solución puede hacer cierta la cuarta ecuación (rectas que se cortan) o puede no satisfacer la cuarta ecuación (rectas que se cruzan).

Otra forma de trabajar sería obtener de cada recta un punto y un vector director, a partir de sus ecuaciones paramétricas, y estudiar cada posibilidad por separado.

Cuando conozcamos las operaciones vectoriales tendremos formas más directas de estudiar estas posiciones relativas.

Si se eligen 'al azar' dos rectas en el espacio, casi siempre serán rectas que se cruzan.

Para que las dos rectas sean coincidentes, paralelas o incidentes deben ser elegidas a propósito.

Otras formas de dar la ecuación de una recta

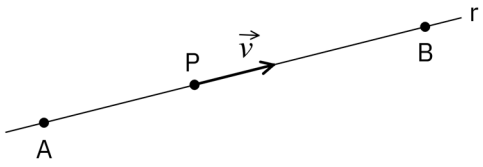
Ya conocemos cómo definir una recta de dos formas: Como intersección de dos planos y en forma paramétrica (que depende de un punto de la recta y de su vector director). Vamos a conocer otras formas.

Tomemos como ejemplo la recta r que pasa por $P(2,-1,3)$ y tiene como vector director a: $\vec{v}=(1,2,-2)$.

Su ecuación en forma vectorial es:

$$r \equiv (x,y,z) = (2,-1,3) + t\,(1,2,-2) \quad , \; t \in \mathbb{R}$$

que refleja que cada punto de la recta (x,y,z) se puede conseguir a partir del punto $(2,-1,3)$ con un desplazamiento de 't' veces el vector director $\vec{v}=(1,2,-2)$.



La recta r del dibujo pasa por P y tiene vector director $\vec{v}$.

Desde P, se alcanza B desplazándonos 3 veces el vector $\vec{v}$.

Desde P, se alcanza A desplazándonos -2 veces el vector $\vec{v}$.

Separando esa ecuación vectorial en una ecuación para cada componente, tenemos la forma paramétrica:

$$r \equiv \begin{cases} x = \;\; 2+t \\ y = -1+2t \\ z = \;\; 3-2t \end{cases} \quad , \; t \in \mathbb{R}$$

Y si despejamos t en cada una de las 3 expresiones anteriores e igualamos, tenemos la que se conoce como forma continua de la recta:

$$r \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{-2}$$

Es decir, una recta r que pasa por $P(x_0,y_0,z_0)$ y tiene como vector director $\vec{v}=(v_x,v_y,v_z)$ se escribirá:

$$r \equiv \frac{x-x_0}{v_x} = \frac{y-y_0}{v_y} = \frac{z-z_0}{v_z}$$

Dada la forma continua de una recta es posible conocer dos planos que se intersecten en ella (y, por lo tanto, usando el haz de planos, la forma de cualquier plano que pase por esa recta).

Para ello basta con usar dos igualdades de la forma continua, cada una nos da un plano.

Veámoslo con el ejemplo que hemos usado hasta ahora:

$$r \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{-2} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{z-3}{-2} \;\rightarrow\; (-2)(x-2) = 1\cdot(z-3) \;\Rightarrow\; -2x-z=-7 \\ \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z-3}{-2} \;\rightarrow\; (-2)(y+1) = 2\cdot(z-3) \;\Rightarrow\; -2y-2z=-4 \end{cases}$$

La primera ecuación produce el plano: $2x+z=7$

La segunda ecuación produce el plano: $y+z=2$

Y obtenemos la recta r definida por dos planos: $r \equiv \begin{cases} 2x+z=7 \\ y+z=2 \end{cases}$

(Cualquier combinación lineal de ellos pasará también por la recta r)

Ejercicios

1. Dados los planos $\pi_1 \equiv x+y+z=3$ y $\pi_2 \equiv x+y-a\,z=0$, calcula:
a) Para qué valor de *a* son paralelos, b) La ecuación de la recta intersección (cuando eso ocurre).

a) Dos planos son paralelos si: $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}\neq\frac{D_1}{D_2}$

En este caso debe suceder que: $\frac{1}{1}=\frac{1}{1}=\frac{1}{-a}\neq\frac{3}{0}$ es decir, si $a=-1$ los planos son paralelos.

b) Los planos definirán una recta si $a\neq-1$ (nunca son coincidentes, distintos términos independientes)

En ese caso, $\begin{cases}x+y=3-z\\x+y=a\,z\end{cases}$ por lo que: $3-z=a\,z \;\rightarrow\; 3=z(1+a) \;\Rightarrow\; z=\frac{3}{1+a}$

si elegimos $y=t$, en la segunda ecuación tendremos: $x+t=\frac{3a}{1+a} \;\rightarrow\; x=\frac{3a}{1+a}-t$

La recta buscada, para $a\neq-1$, es: $\mathrm{r}\equiv\begin{cases}x=\frac{3a}{1+a}-t\\y=t\\z=\frac{3}{1+a}\end{cases},\ t\in\mathbb{R}$

2. Sean la recta $\mathrm{r}\equiv\begin{cases}x+y-z=1\\x-y-z=0\end{cases}$ y el plano $\pi\equiv x+m\,z=0$. Discute sus posiciones relativas.

El sistema que forman las tres ecuaciones tiene como determinante de la matriz de coeficientes:

$$|\mathrm{A}|=\begin{vmatrix}1&1&-1\\1&-1&-1\\1&0&m\end{vmatrix}=-m-1+0-(1+m+0)=-2-2m=-2(1+m)$$

Si $|\mathrm{A}|=0 \;\rightarrow\; -2(1+m)=0 \;\Rightarrow\; m=-1$

Así, para $m\neq-1$ el sistema es compatible determinado. La recta y el plano se cortan en un punto.

Si $m=-1$ la matriz ampliada del sistema podemos transformarla con el método de Gauss:

$$(\mathrm{A}|\mathrm{B})=\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&1\\1&-1&-1&0\\1&0&-1&0\end{array}\right)\begin{matrix}\\\mathrm{F2}\leftarrow\mathrm{F2}-\mathrm{F1}\\\mathrm{F3}\leftarrow\mathrm{F3}-\mathrm{F1}\end{matrix}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&1\\0&-2&0&-1\\0&-1&0&-1\end{array}\right)\begin{matrix}\\\rightarrow -2y=-1\Rightarrow y=1/2\\\rightarrow -1y=-1\Rightarrow y=1\end{matrix}$$

Vemos que las filas 2 y 3 dan soluciones contradictorias, luego el sistema es incompatible.
En este caso la recta y el plano son paralelos (no tienen ningún punto en común).

Para $m\neq-1$ la recta y el plano se cortan en un punto.
Para $m=-1$ la recta y el plano son paralelos.

3. Sean los planos: $\pi_1 \equiv 2x + a\,y - z = 3$, $\pi_2 \equiv a\,x - 2y - z = -2$, $\pi_3 \equiv x + 3y = b$. Calcula:

a) Sus posiciones relativas, b) La recta común a los tres en el caso adecuado.

a) Los dos primeros planos serían paralelos si: $\frac{2}{a} = \frac{a}{-2} = \frac{-1}{-1}$. Esto no es cierto para ningún valor de a.

Por lo tanto, los dos primeros planos se cortan en una recta para cualquier valor de a.

La matriz de coeficientes del sistema que forman los tres planos es:

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & a & -1 \\ a & -2 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \text{ cuyo determinante es: } |\mathrm{A}| = 0 - a - 3a - (2 + 0 - 6) = -4a + 4 = 4(1 - a)$$

Si $|\mathrm{A}| = 0 \;\rightarrow\; 1 - a = 0 \;\Rightarrow\; a = 1$

Por lo tanto, si $a \neq 1$ tendremos: $\mathrm{rang}(\mathrm{A}) = 3 = n$ y el sistema es compatible determinado.
En este caso, los tres planos se cortan en un punto.

Para el caso $a = 1$ la matriz ampliada es:

$$(\mathrm{A}|\mathrm{B}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 0 & b \end{array}\right) \begin{array}{l} \mathrm{F1} \leftarrow \mathrm{F1} - 2 \cdot \mathrm{F2} \\ \\ \mathrm{F3} \leftarrow \mathrm{F3} - \mathrm{F2} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 5 & 1 & 7 \\ 1 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 5 & 1 & b+2 \end{array}\right)$$

Las filas 1 y 3 son iguales cuando $b + 2 = 7 \;\rightarrow\; b = 5$ y el sistema es compatible indeterminado.
Los planos se cortan en una única recta.

Si $b \neq 5$ las filas 1 y 3 son contradictorias y el sistema es incompatible. En ese caso los planos 1 y 3 se cortan dos a dos sin ningún punto común. (El plano 3 no puede ser paralelo ni al 1 ni al 2).

$\Rightarrow$

si $a \neq 1$	Se cortan en un punto	
si $a = 1$	si $b = 5 \;\rightarrow$	Hay una recta común a los tres planos
	si $b \neq 5 \;\rightarrow$	Se cortan dos a dos, sin puntos comunes

b) El caso compatible indeterminado ocurre cuando $a = 1$ y $b = 5$. Como solo hay dos ecuaciones independientes elegimos las que corresponden a los planos 2 y 3:

$$\left.\begin{array}{l} x - 2y - z = -2 \\ x + 3y \quad\; = 5 \end{array}\right\} \rightarrow x = 5 - 3y \qquad \rightarrow (5 - 3y) - 2y - z = -2 \;\Rightarrow\; z = 7 - 5y$$

Tomando $y = t$ obtenemos la recta buscada:

$\Rightarrow$

$$\begin{array}{l} x = 5 - 3t \\ y = t \\ z = 7 - 5t \qquad \text{con } t \in \mathbb{R} \end{array}$$

[pasa por $\mathrm{P}(5, 0, 7)$ con vector director $\vec{v} = (-3, 1, -5)$]

4. Escribe las ecuaciones de las rectas que corresponden a los ejes OX, OY, OZ.
   Escribe las ecuaciones de las planos XY, XZ, YZ.
   Escribe la ecuación de todos los planos que contienen (o que pasan) por el eje OX.

El eje OX tiene como vector director al que se conoce como $\vec{i} = (1,0,0)$.

El eje OY tiene como vector director al que se conoce como $\vec{j} = (0,1,0)$.

El eje OZ tiene como vector director al que se conoce como $\vec{k} = (0,0,1)$.

Puesto que los tres pasan por el origen $(0,0,0)$ las ecuaciones de las rectas son:

$$r_{OX} \equiv \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \qquad r_{OY} \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 0 \end{cases} \qquad r_{OZ} \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = t \end{cases} \qquad \text{con } t \in \mathbb{R}.$$

El plano XY contiene a las rectas r_{OX} y r_{OY}, por eso su ecuación es: $z = 0$.

El plano XZ contiene a las rectas r_{OX} y r_{OZ}, por eso su ecuación es: $y = 0$.

El plano YZ contiene a las rectas r_{OY} y r_{OZ}, por eso su ecuación es: $x = 0$.

Todos los planos que pasan por el eje OX, son el haz de planos que producen el plano XY, $z = 0$, y el plano XZ, $y = 0$.

Por eso, podemos escribirlo así: $\lambda y + z = 0$ con $\lambda \in \mathbb{R}$ (que solo deja fuera al plano $y = 0$)

5. Sean la recta $r \equiv \{x = t,\ y = -2t,\ z = 3 + t;\ t \in \mathbb{R}\}$ y el plano $\pi \equiv 2x + 3y + a\,z = 12$. Calcula:
   a) Dos planos que se corten en la recta r, b) El valor de *a* para que el plano π contenga a la recta r.

a) Despejando *t* e igualando, obtenemos la ecuación continua de la recta r: $x = \dfrac{y}{-2} = z - 3$

De ahí tenemos: $\begin{cases} x = \dfrac{y}{-2} \ \rightarrow\ -2x = y \ \Rightarrow\ 2x + y = 0 \\ x = z - 3 \ \rightarrow\ x - z = -3 \end{cases}$ y los planos buscados son: $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x - z = -3 \end{cases}$

(o cualquier combinación lineal de ellos)

b) Si el plano π contiene a la recta r quiere decir que cualquier punto de la recta r debe satisfacer la ecuación del plano π.

Como cualquier punto de la recta r es de la forma: $(x, y, z) = (t, -2t, 3 + t)$ sustituyendo en π, tenemos:

$$\begin{aligned} &2 \cdot t + 3 \cdot (-2t) + a \cdot (3 + t) = 12 \\ &2t - 6t + 3a + a \cdot t = 12 \\ &(a - 4) \cdot t = 12 - 3a \end{aligned}$$

Esto debe cumplirse para cualquier valor de *t* (es decir, para todos los puntos de la recta r).

Solo es posible si ambos miembros son nulos.

Esto ocurre para $a = 4$. El plano π contiene a la recta r si $a = 4$.

6. Sean los planos $\pi \equiv 2x - y + z = 3$, $\sigma \equiv x - y + z = 2$, $\tau \equiv 3x - y - a\,z = b$. π y σ definen la recta r. Calcula: a) Calcula un punto y un vector de la recta r, b) El plano que contiene a r y pasa por $(2,1,3)$ c) Los valores de *a* y *b* para que el plano τ contenga a la recta r.

a) Para resolver el sistema que forman las ecuaciones de π y σ restamos ambas ecuaciones, obteniendo: $x = 1$. De la ecuación de σ, tenemos: $z = 1 + y$. Tomando $y = t$ la recta r en forma paramétrica es:

$$\mathrm{r} \equiv \{x = 1,\ y = t,\ z = 1 + t;\ t \in \mathbb{R}\}$$

La recta r pasa por el punto $\mathrm{P}(1,0,1)$ y tiene como vector director: $\vec{v} = (0,1,1)$.

b) El haz de planos que pasan por r es una combinación lineal de las ecuaciones de π y σ:

$$(2\lambda + 1)x + (-\lambda - 1)y + (\lambda + 1)z = 3\lambda + 2$$

Como buscamos el plano que pasa por $(2,1,3)$, ese punto debe satisfacer la ecuación anterior:

$$\begin{aligned}
(2\lambda + 1)\cdot 2 + (-\lambda - 1)\cdot 1 + (\lambda + 1)\cdot 3 &= 3\lambda + 2 \\
4\lambda + 2 \quad -\lambda - 1 \quad +3\lambda + 3 \quad &= 3\lambda + 2 \\
6\lambda + 4 &= 3\lambda + 2 \\
3\lambda &= -2 \\
\lambda &= -2/3
\end{aligned}$$

Sustituyendo ese valor de λ en la ecuación del haz de planos, tenemos el plano buscado:

$$\begin{aligned}
\big(2\cdot(-2/3) + 1\big)x + \big(-(-2/3) - 1\big)y + (-2/3 + 1)z &= 3(-2/3) + 2 \\
-1/3\,x \quad -1/3\,y \quad +1/3\,z &= 0 \\
x + y - z &= 0
\end{aligned}$$

El plano que contiene a r y pasa por $(2,1,3)$ es: $x + y - z = 0$.

c) Para que el plano τ contenga a la recta r, cualquier punto de r debe satisfacer la ecuación de τ:

$$\begin{aligned}
3\cdot 1 - t - a\cdot(1 + t) &= b \\
3 - t - a - a\cdot t \ &= b \\
t\cdot(-1 - a) &= b + a - 3
\end{aligned}$$

Esta igualdad debe cumplirse para cualquier valor de *t*, por lo que ambos miembros deben ser nulos:

$$\begin{aligned}
-1 - a = 0 \ &\rightarrow \ a = -1 \\
b + a - 3 = 0 \ &\rightarrow \ b = 4
\end{aligned}$$

Así pues, el plano τ contiene a la recta r si $a = -1$ y $b = 4$.

7. Calcula en qué punto se cortan $\text{r} \equiv (x,y,z) = (2+t, 2+3t, 3+t)$, $\text{s} \equiv (x,y,z) = (-3+2s, 1-s, 6-2s)$ donde t y s son parámetros reales.

Se cortarán en un punto que satisfaga las ecuaciones paramétricas de ambas rectas:

$$\begin{cases} 2+t = -3+2s \\ 2+3t = 1-s \\ 3+t = 6-2s \end{cases}$$

Sumando las ecuaciones 1ª y 3ª: $5+2t=3$, $2t=-2 \;\rightarrow\; t=-1$.

Sustituyendo en la 1ª ecuación: $2+(-1) = -3+2s$, $2s=4 \;\rightarrow\; s=2$.

Comprobemos que esos valores satisfacen la 2ª ecuación (que aún no hemos usado):

$2+3\cdot(-1) \overset{?}{=} 1-2 \;\rightarrow\; -1=-1$ se cumple, por lo tanto r y s se cortan para $t=-1$ y $s=2$.

El punto en el que se cortan podemos obtenerlo sustituyendo $t=-1$ en la expresión de la recta r:

$(x,y,z) = \big(2+(-1), 2+3\cdot(-1), 3+(-1)\big) = (1,-1,2)$ Se cortan en $(1,-1,2)$.

8. Sean las rectas: $\text{r} \equiv (x,y,z) = (3+t, -1+2t, 2+t)\;\; t \in \mathbb{R}$ y $\text{s} \equiv \begin{cases} x+2y=1 \\ 3y-z=a \end{cases}$

Calcula el valor de a para que las dos rectas estén contenidas en un plano.

Las dos rectas estarán contenidas en un plano si son coincidentes, paralelas o se cortan en un punto.

Calculemos un punto y un vector director de la recta s:

$$\text{s} \equiv \begin{cases} x+2y=1 \\ 3y-z=a \end{cases}$$ Elegimos $y=\lambda$ y tenemos: $$\text{s} \equiv \begin{cases} x=1-2\lambda \\ y=\lambda \\ z=-a+3\lambda \end{cases},\ \lambda \in \mathbb{R}$$

Por lo tanto tenemos: $\text{P}_\text{r}(3,-1,2)$, $\overrightarrow{v_\text{r}} = (1,2,1)$; $\text{P}_\text{s}(1,0,-a)$, $\overrightarrow{v_\text{s}} = (-2,1,3)$

Los vectores directores no son proporcionales, por lo que r y s no son coincidentes ni paralelas.

Así pues, las rectas r y s deben cortarse en un punto.

Resolvamos el sistema que se forma al igualar las formas paramétricas de las rectas r y s:

$$\begin{cases} 3+t = 1-2\lambda \\ -1+2t = \lambda \\ 2+t = -a+3\lambda \end{cases}$$

Sustituyendo el valor de λ de la 2ª ecuación en la 1ª ecuación tenemos:

$3+t = 1-2\cdot(-1+2t)$, $3+t = 1+2-4t$, $5t=0 \;\rightarrow\; t=0$

Por lo que, según la 2ª ecuación, tenemos:

$\lambda = -1+2\cdot 0 \;\rightarrow\; \lambda = -1$

Llevando ambos valores a la 3ª ecuación:

$2+0 = -a+3\cdot(-1)$, $2=-a-3$, $5=-a \;\rightarrow\; a=-5$

Si $a=-5$ las rectas r y s están contenidas en un plano [y se cortarán para $t=0$, es decir en: $(3,-1,2)$]

9. Sean las rectas: $\mathrm{r} \equiv \begin{cases} 3x+3y-5z=4 \\ x-y-z=0 \end{cases}$ $\mathrm{s} \equiv \begin{cases} 2x+2y-z=13 \\ x-2y+4z=-7 \end{cases}$

Calcula: a) Un punto y un vector director de cada una de ellas, b) Su posición relativa

a) Resolvemos cada uno de los dos sistemas indeterminados:

Para r: $\begin{cases} 3x+3y=4+5z \\ x-y=z \end{cases}$ lo hacemos con la regla de Cramer. $|\mathrm{A}| = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 3\cdot(-1)-3\cdot 1 = -6$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4+5z & 3 \\ z & -1 \end{vmatrix}}{-6} = \frac{(4+5z)\cdot(-1)-3\cdot z}{-6} = \frac{-4-5z-3z}{-6} = \frac{-4-8z}{-6} = \frac{2+4z}{3}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 4+5z \\ 1 & z \end{vmatrix}}{-6} = \frac{3\cdot z-(4+5z)\cdot 1}{-6} = \frac{3z-4-5z}{-6} = \frac{-4-2z}{-6} = \frac{2+z}{3}$$

Tomando $z = 1+3t$: $(x,y,z) = (2+4t, 1+t, 1+3t)$ $t \in \mathbb{R}$

Por lo tanto: $\mathrm{P_r}(2,1,1)$ y $\vec{v_r} = (4,1,3)$

Para s: $\begin{cases} 2x+2y=13+z \\ x-2y=-7-4z \end{cases}$ lo hacemos con la regla de Cramer. $|\mathrm{A}| = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 2\cdot(-2)-2\cdot 1 = -6$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 13+z & 2 \\ -7-4z & -2 \end{vmatrix}}{-6} = \frac{(13+z)\cdot(-2)-2\cdot(-7-4z)}{-6} = \frac{-26-2z+14+8z}{-6} = \frac{-12+6z}{-6} = 2-z$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 13+z \\ 1 & -7-4z \end{vmatrix}}{-6} = \frac{2\cdot(-7-4z)-(13+z)\cdot 1}{-6} = \frac{-14-8z-13-z}{-6} = \frac{-27-9z}{-6} = \frac{9+3z}{2}$$

Tomando $z = -3+2t$: $(x,y,z) = (5-2t, 3t, -3+2t)$ $t \in \mathbb{R}$

Por lo tanto: $\mathrm{P_s}(5,0,-3)$ y $\vec{v_s} = (-2,3,2)$

b) Puesto que sus vectores directores son diferentes $\left[\frac{4}{-2} \neq \frac{1}{3} \neq \frac{3}{2} \right]$ no son coincidentes ni paralelas.

Si consideramos el sistema que forman las 4 ecuaciones (2 de r y 2 de s), al no ser ni coincidentes ni paralelas las rectas r y s, el rango de la matriz de los coeficientes es 3: $\mathrm{rang}(\mathrm{A}) = 3$

Si el rango de la matriz ampliada es 3, será un sistema compatible determinado y las rectas r y s se cortarán en un punto. Si tiene rango 4, será un sistema incompatible y las rectas r y s se cruzarán.

$$\det(\mathrm{A}|\mathrm{B}) = \begin{vmatrix} 3 & 3 & -5 & 4 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 13 \\ 1 & -2 & 4 & -17 \end{vmatrix} = \ldots \begin{cases} \mathrm{C2} \leftarrow \mathrm{C2}+\mathrm{C1} \\ \mathrm{C3} \leftarrow \mathrm{C3}+\mathrm{C1} \end{cases} \ldots = \begin{vmatrix} 3 & 6 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 13 \\ 1 & -1 & 5 & -17 \end{vmatrix} = \ldots \begin{cases} \text{Desarrollando} \\ \text{por los elementos} \\ \text{de la segunda fila} \end{cases}$$

$$\ldots = (-)\cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 6 & -2 & 4 \\ 4 & 1 & 13 \\ -1 & 5 & -17 \end{vmatrix} = -\left[-102+26+80-(-4+136+390)\right] = -\left[4-522\right] = 518 \neq 0$$

Por lo que tenemos que $\mathrm{rang}(\mathrm{A}|\mathrm{B}) = 4$ luego el sistema es incompatible y las rectas r y s se cruzan.

Este apartado (b) se puede hacer de otras formas.

Una posibilidad, ya que sabemos que las rectas no son coincidentes ni paralelas y por lo tanto solo pueden o cortarse o cruzarse, es intentar calcular dónde se cortan.

Si no se cortan solo pueden cruzarse.

Para calcular dónde se cortan, resolvamos el sistema que forman sus ecuaciones paramétricas:

(Para igualarlas elegimos una letra diferente para el parámetro de la recta s)

$$\begin{array}{l} \mathrm{r} \equiv (x,y,z) = (2+4t, 1+t, 1+3t) \quad t \in \mathbb{R} \\ \mathrm{s} \equiv (x,y,z) = (5-2k, 3k, -3+2k) \quad k \in \mathbb{R} \end{array} \rightarrow \begin{cases} 2+4t = 5-2k \\ 1+t = 3k \\ 1+3t = -3+2k \end{cases}$$

Sumando la 1ª y la 3ª ecuación: $3+7t = 2 \rightarrow t = -1/7$

Sustituyendo en la 3ª ecuación: $1+3(-1/7) = -3+2k \rightarrow 2k = 4-3/7$, $k = 25/14$

Si las rectas r y s se cortan, esos valores deberían cumplir la 2ª ecuación, pero:

$$1+(-1/7) \neq 3\cdot(25/14)$$

Por lo tanto, las 3 ecuaciones no se satisfacen para algún valor de *t* y *k*, así que r y s no se cortan.

La conclusión es que las rectas r y s se cruzan.

Ambos métodos utilizados son legítimos, pero cuando conozcamos las operaciones vectoriales tendremos otra forma para saber si dos rectas se cruzan (y es el que se usa con más frecuencia).

10. Sean las rectas $\mathrm{r} \equiv \begin{cases} y+z=0 \\ x-2y=1 \end{cases}$ y $\mathrm{s} \equiv \dfrac{x}{2} = y-1 = -z+3$. Calcula su posición relativa.

Obtengamos la recta r en forma paramétrica. Despejando *y*: $\mathrm{r} \equiv \begin{cases} z = -y \\ x = 1+2y \end{cases}$

Eligiendo $y = t$, tendremos: $\mathrm{r} \equiv \begin{cases} x = 1+2t \\ y = t \\ z = -t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ Así que: $\begin{cases} \mathrm{P_r}(1,0,0) \\ \vec{v}_\mathrm{r} = (2,1,-1) \end{cases}$

Para la recta s, tenemos: $\mathrm{s} \equiv \dfrac{x-0}{2} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-3}{-1}$ Así que: $\begin{cases} \mathrm{P_s}(0,1,3) \\ \vec{v}_\mathrm{s} = (2,1,-1) \end{cases}$

Puesto que ambos vectores directores son idénticos, las rectas r y s son coincidentes o paralelas.

Si fueran coincidentes, cualquier punto de r cumpliría las ecuaciones de s (y un punto de s las de r).

Tomamos el punto de r que tenemos: $\mathrm{P_r}(1,0,0)$ y veamos si cumple la expresión inicial para s:

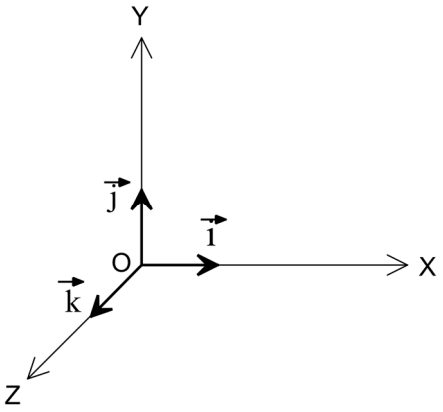
$$\mathrm{s} \equiv \frac{x}{2} = y-1 = -z+3 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2} \neq 0-1 \neq -0+3$$

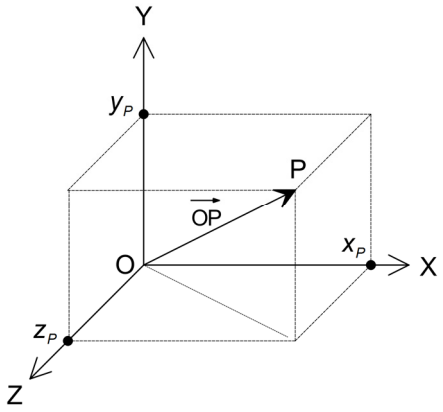
Como no la cumple, las rectas r y s son paralelas.

Geometría Analítica en el espacio tridimensional.

1. Puntos y vectores.

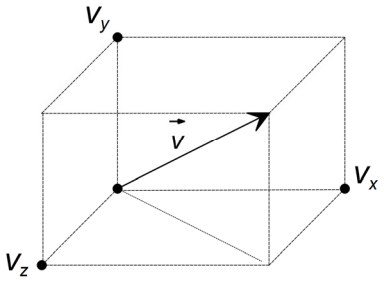
En el espacio tridimensional tomamos un sistema de referencia cartesiano de origen O (el origen de coordenadas) y ejes perpendiculares entre sí llamados OX, OY y OZ. El sentido positivo de la dirección de cada eje viene definido por los vectores unitarios (módulo 1) llamados $\vec{i}$, $\vec{j}$ y $\vec{k}$.





Cada punto del espacio P viene determinado por sus coordenadas (x_P, y_P, z_P) referidas a estos ejes. También podemos situar cada punto por su vector de posición $\overrightarrow{OP}$. Este vector se puede escribir así: $\overrightarrow{OP} = (x_P, y_P, z_P)$ o así: $\overrightarrow{OP} = x_P\vec{i} + y_P\vec{j} + z_P\vec{k}$.

Los vectores que manejamos se llaman equipolentes pues se pueden desplazar a cualquier punto de aplicación (o polo) mientras no cambiemos su dirección, sentido y módulo (longitud). Cada vector puede imaginarse dibujado en una caja cuyas dimensiones son las componentes del vector.



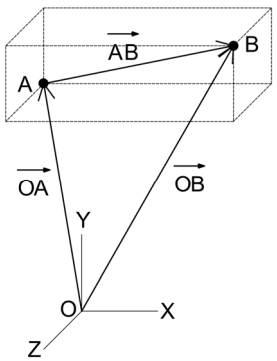
Aplicando el teorema de Pitágoras, la diagonal de la base es: $d^2 = (v_x)^2 + (v_z)^2$.

Aplicando nuevamente Pitágoras, al triángulo en el que $|\vec{v}|$ es la hipotenusa, tendremos el módulo del vector:

$$|\vec{v}| = \sqrt{(v_x)^2 + (v_y)^2 + (v_z)^2}$$

Si un vector se multiplica por un número, se multiplican sus componentes y por lo tanto cambiará en la misma magnitud su módulo: $|k \cdot \vec{v}| = |k| \cdot |\vec{v}|$. Su dirección y sentido no cambiarán.

Podemos pensar en un vector como la operación que traslada un punto a otro.
Esta traslación define la operación suma para vectores:

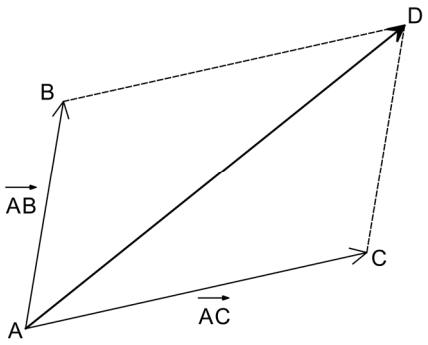


El vector $\overrightarrow{AB}$ desplaza el punto A hasta el B.
Es decir, $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$.

Para sumar dos vectores se ponen uno a continuación del otro y se une el punto de aplicación del primero con el final del segundo.

Además, como $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$, tendremos:
$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$

La suma de vectores se suele representar de una forma equivalente: La regla del paralelogramo.

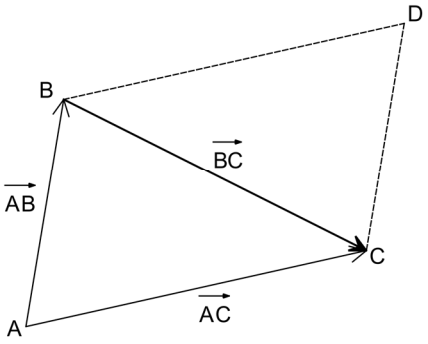


Según la definición anterior $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$, como los vectores son equipolentes, $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC}$ por lo que podemos escribir:

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$, la regla del paralelogramo.

Así pues, para sumar dos vectores se pueden dibujar con el mismo punto de aplicación y crear un paralelogramo. La suma es la diagonal que pasa por el punto de aplicación común.

De la primera definición de la suma de vectores se obtiene también la resta de vectores:

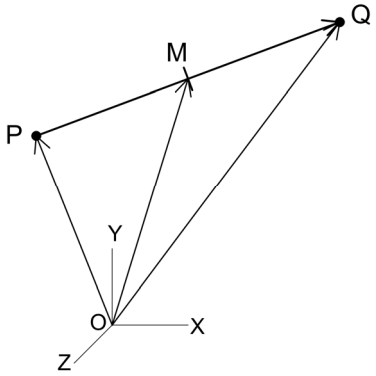


Según esa definición, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ por ello, despejando: $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$.

Es decir, para restar dos vectores que tengan el mismo punto de aplicación basta con unir sus extremos.

El vector resta va dirigido hacia el extremo del vector que se escribe primero en la operación.

Usando vectores podemos calcular el punto medio M del segmento que une los puntos P y Q:



Sabemos que: $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PQ}$

Queremos $\overrightarrow{OM}$:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PM} = \overrightarrow{OP} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{PQ} =$$
$$= \overrightarrow{OP} + \tfrac{1}{2}(\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}) = \tfrac{1}{2}(\overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OP})$$

Expresado con palabras: Para calcular el punto medio de P y Q, basta sumar sus respectivas coordenadas y dividir por 2.

Con una estrategia similar se pueden calcular los puntos resultantes de dividir el segmento que une P y Q en cualquier número de partes. Basta dividir el vector $\overrightarrow{PQ}$ en el número de partes requerido y sumarlo al vector $\overrightarrow{OP}$.

Una cuestión interesante que se puede resolver con vectores es saber si tres puntos P, Q y R están o no alineados. Para saberlo basta con encontrar los vectores $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$. Si los puntos están sobre la misma línea, ambos vectores tendrán la misma dirección, es decir, uno de ellos será múltiplo del otro. Esto ocurrirá si el cociente de sus tres componentes da el mismo valor:

P, Q, R estarán alineados si: $\dfrac{x_R - x_P}{x_Q - x_P} = \dfrac{y_R - y_P}{y_Q - y_P} = \dfrac{z_R - z_P}{z_Q - z_P}$

Además de las operaciones vistas hasta ahora (cálculo de un vector conociendo sus puntos extremos, módulo, multiplicación por un número, resta de vectores y suma de vectores) nos quedan tres operaciones importantes que se deben conocer: El producto escalar de vectores, el producto vectorial de vectores y su combinación, el producto mixto.

2. Producto escalar de dos vectores.

Se define así: $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\alpha$, donde α es el ángulo menor que forman los dos vectores.

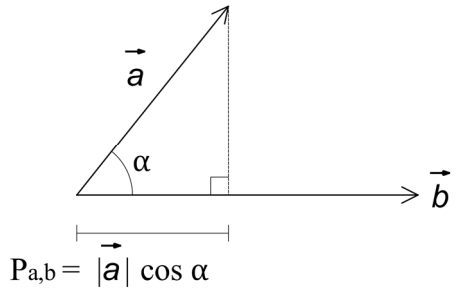
Por lo tanto, si dos vectores son perpendiculares (ortogonales) su producto escalar es cero.

El producto escalar es conmutativo, $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$, y distributivo, $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$.

Si $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$ y $\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$, como $\vec{i}\cdot\vec{i}=\vec{j}\cdot\vec{j}=\vec{k}\cdot\vec{k}=1$, $\vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{j}\cdot\vec{k}=\vec{i}\cdot\vec{k}=0$ tendremos que: $\vec{a}\cdot\vec{b}=(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k})\cdot(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k})=\ldots=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$

Esta expresión del producto escalar permite usarlo para hallar el ángulo que forman dos vectores:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\alpha\ \rightarrow\ \cos\alpha=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$$



Geométricamente, el producto escalar permite calcular la proyección de un vector sobre otro.

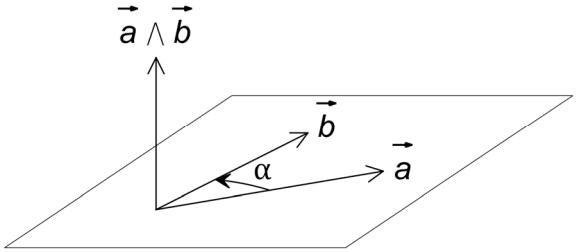
En el dibujo, la proyección de $\vec{a}$ sobre $\vec{b}$ es:

$$P_{a,b}=|\vec{a}|\cdot\cos\alpha=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}$$

Una relación interesante y que se usa con frecuencia: $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|\cdot|\vec{a}|\cdot\cos 0=|\vec{a}|^2\ \rightarrow\ |\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$

3. Producto vectorial de dos vectores.

Se define así: $\vec{a}\wedge\vec{b}$ es un vector perpendicular a $\vec{a}$ y a $\vec{b}$, de módulo $|\vec{a}\wedge\vec{b}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\alpha$



El sentido del vector $\vec{a}\wedge\vec{b}$ lo da la regla de la mano derecha:

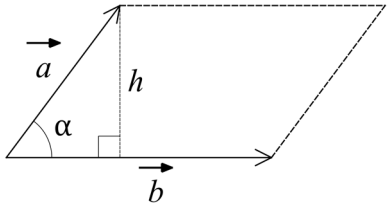
Si los dedos de la mano derecha indican el sentido del giro para ir de $\vec{a}$ hasta $\vec{b}$ por el camino más corto, el pulgar señala hacia dónde va el producto $\vec{a}\wedge\vec{b}$.

El producto vectorial es anticonmutativo $\vec{a}\wedge\vec{b}=-\vec{b}\wedge\vec{a}$ y distributivo $\vec{a}\wedge(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\wedge\vec{b}+\vec{a}\wedge\vec{c}$

Como $\vec{i}\wedge\vec{i}=\vec{j}\wedge\vec{j}=\vec{k}\wedge\vec{k}=\vec{0}$, $\vec{i}\wedge\vec{j}=\vec{k}=-\vec{j}\wedge\vec{i}$, $\vec{k}\wedge\vec{i}=\vec{j}=-\vec{i}\wedge\vec{k}$, $\vec{j}\wedge\vec{k}=\vec{i}=-\vec{k}\wedge\vec{j}$:

$$\vec{a}\wedge\vec{b}=(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k})\wedge(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k})=\ldots=(a_yb_z-b_ya_z)\vec{i}-(a_xb_z-a_zb_x)\vec{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\vec{k}$$

que se puede escribir como un determinante: $\vec{a}\wedge\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\end{vmatrix}$



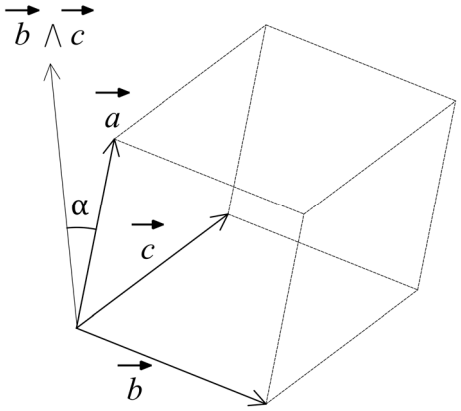
Geométricamente, el producto vectorial calcula el área del paralelogramo que se forma a partir de los dos vectores:

$$S=|\vec{b}|\cdot h=|\vec{b}|\cdot|\vec{a}|\cdot\sin\alpha=|\vec{a}\wedge\vec{b}|$$

Se define así: $\vec{a}\cdot(\vec{b}\wedge\vec{c})=\vec{a}\cdot\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ b_x&b_y&b_z\\ c_x&c_y&c_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_x&a_y&a_z\\ b_x&b_y&b_z\\ c_x&c_y&c_z\end{vmatrix}$

Es habitual escribir el producto mixto de esta forma: $\left[\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right]$.

Por las propiedades de los determinantes, $\left[\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right]=\left[\vec{c},\vec{a},\vec{b}\right]=\left[\vec{b},\vec{c},\vec{a}\right]$



Geométricamente, el producto $\vec{b}\wedge\vec{c}$ calcula el área del paralelogramo que, en el dibujo, es la base del paralelepípedo formado por $\vec{a},\vec{b}$ y $\vec{c}$.

Al hacer el producto escalar por $\vec{a}$, la proyección de $\vec{a}$ sobre $\vec{b}\wedge\vec{c}$ es igual a la altura del paralelepípedo.

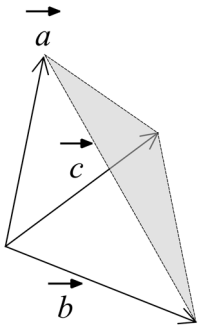
Así pues, $V_{\text{paralelepípedo}}=\left|\vec{a}\cdot(\vec{b}\wedge\vec{c})\right|$

Se toma en valor absoluto por si $\vec{b}\wedge\vec{c}$ va dirigido en sentido contrario al vector $\vec{a}$.

También podemos, con el producto mixto, calcular el volumen del tetraedro que forman los tres vectores.

Como su base será la mitad del paralelogramo que hay en la base del paralelepípedo y el volumen de una pirámide es la tercera parte del prisma de igual base y altura, tendremos:

$$V_{\text{tetraedro}}=\frac{1}{6}\cdot\left|\vec{a}\cdot(\vec{b}\wedge\vec{c})\right|$$



Una aplicación del producto mixto es averiguar si tres vectores dados son o no coplanares. Si lo son, el volumen del paralelepípedo que forman es nulo, de forma que su producto mixto da cero. (Si el determinante, en el que cada vector es una fila, resulta cero, es porque uno de los vectores es combinación lineal de los otros dos y, por lo tanto, están en el mismo plano).

Las tres operaciones de multiplicación de vectores que hemos visto tienen nombres alternativos:

producto escalar = producto punto (en inglés, *dot product*)

producto vectorial = producto cruz (en inglés, *cross product*)

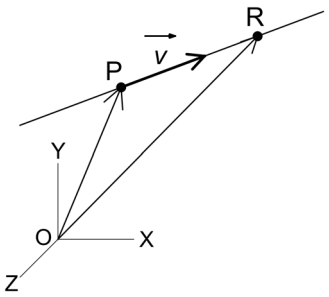
producto mixto = triple producto escalar (en inglés, *triple escalar product* o *mixed product*)

Como resultado adicional veamos una relación entre el producto escalar y el producto vectorial:

$$\left|\vec{a}\wedge\vec{b}\right|^2+\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)^2=\left(\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\sin\alpha\right)^2+\left(\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\alpha\right)^2=\left|\vec{a}\right|^2\cdot\left|\vec{b}\right|^2\cdot\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)=\left|\vec{a}\right|^2\cdot\left|\vec{b}\right|^2$$

5. La recta.

Una recta es el lugar geométrico de los puntos R que se obtienen a partir de un punto P por traslación según un vector director $\vec{v}$.



Los puntos de la recta cumplen:
$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP} + \vec{v} \cdot t$, siendo el parámetro $t \in \mathbb{R}$.

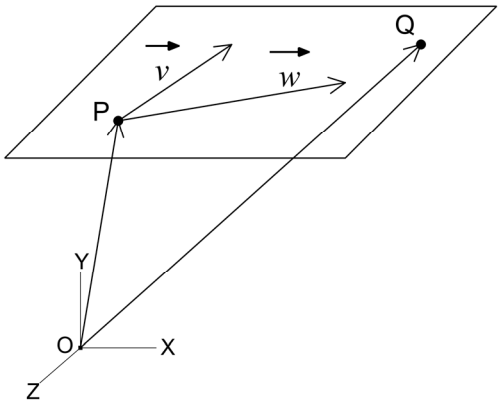
Si las coordenadas de R son (x, y, z), tenemos,

Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = x_P + v_x \cdot t \\ y = y_P + v_y \cdot t \\ z = z_P + v_z \cdot t \end{cases}$

Despejando el parámetro t e igualando, tenemos la ecuación continua: $\dfrac{x - x_P}{v_x} = \dfrac{y - y_P}{v_y} = \dfrac{z - z_P}{v_z}$

6. El plano.

Un plano es el lugar geométrico de los puntos Q que se obtienen a partir de un punto P por traslación según cualquier combinación lineal de dos vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$.



Los puntos del plano cumplen:
$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + \vec{v} \cdot \lambda + \vec{w} \cdot \mu$, con $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Si las coordenadas de Q son (x, y, z), tenemos,

Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = x_P + v_x \cdot \lambda + w_x \cdot \mu \\ y = y_P + v_y \cdot \lambda + w_y \cdot \mu \\ z = z_P + v_z \cdot \lambda + w_z \cdot \mu \end{cases}$

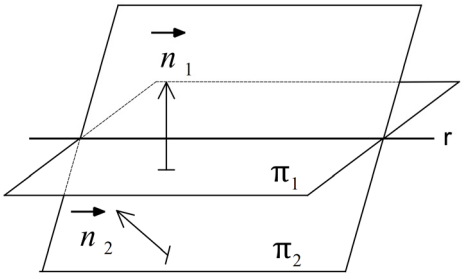
Como el vector $\overrightarrow{PQ} = (x - x_P,\ y - y_P,\ z - z_P)$ es una combinación lineal de $\vec{v}$ y $\vec{w}$, tendremos:

$\begin{vmatrix} x - x_P & y - y_P & z - z_P \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix} = 0$, desarrollando por menores de la primera fila quedará en la forma:

$A(x - x_P) + B(y - y_P) + C(z - z_P) = 0$, donde A, B y C son números.

Por un lado, de ahí obtenemos la ecuación general del plano: $Ax + By + Cz + D = 0$.

Pero, además, deducimos que el vector $\vec{n} = (A, B, C)$ es perpendicular (normal) a $\overrightarrow{PQ}$ puesto que su producto escalar es cero. Por lo tanto $\vec{n} = (A, B, C)$ es un vector perpendicular al plano. Otra forma totalmente equivalente de obtener un vector perpendicular al plano es hacer: $\vec{n} = \vec{v} \wedge \vec{w}$



Podemos dar la ecuación de una recta r como la intersección de dos planos π_1 y π_2:

$r \equiv \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$ Resolviéndolo obtenemos las ecuaciones paramétricas de r.

El vector director de la recta sería:
$\vec{v} = \vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2 = (A_1,\ B_1,\ C_1) \wedge (A_2,\ B_2,\ C_2)$

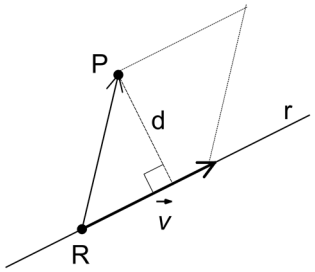
7. Posiciones relativas con puntos.

Dos puntos P, Q definen una línea recta, cuyo vector director es el vector $\overrightarrow{PQ}$. La distancia entre los dos puntos es el módulo del vector que los une.

Tres puntos P, Q, R están alineados si los vectores $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$ son proporcionales. Si no están alineados definen un plano. Los vectores que definen el plano son $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$ o bien $\vec{n} = \overrightarrow{PQ} \wedge \overrightarrow{PR}$.

Cuatro puntos P, Q, R, S son coplanares si el volumen del paralelepípedo creado por los vectores $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{PR}$ y $\overrightarrow{PS}$ es nulo, es decir si $\overrightarrow{PQ} \cdot (\overrightarrow{PR} \wedge \overrightarrow{PS}) = 0$.

Un punto P pertenece a una recta r si cumple su ecuación. Si no pertenece a ella, su distancia es:

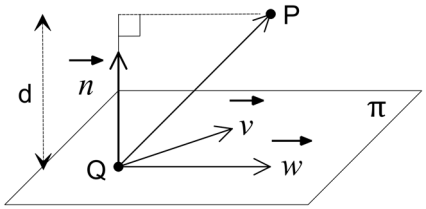


La altura del paralelogramo formado por $\overrightarrow{RP}$ y $\vec{v}$ es la distancia buscada.

Como su área es base por altura, despejando:

$$d = \frac{S_{paralelogramo}}{L_{base}} = \frac{|\overrightarrow{RP} \wedge \vec{v}|}{|\vec{v}|}$$

Un punto P pertenece a un plano π si cumple su ecuación. Si no pertenece a él, su distancia es:



La distancia del punto P al plano π es igual a la proyección del vector $\overrightarrow{QP}$ sobre el vector $\vec{n}$:

$$d = \frac{|\overrightarrow{QP} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} = \ldots = \frac{|Ax_P + By_P + Cz_P + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

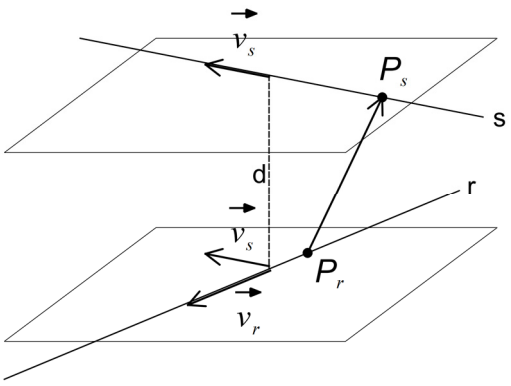
8. Posiciones relativas de dos rectas.

Dos rectas son paralelas si sus vectores directores son iguales o proporcionales.
Si además tienen un punto común, son coincidentes.

Dos rectas que no son paralelas forman el ángulo que forman sus vectores directores.

Si, formando un ángulo, tienen un punto en común se dice que las rectas se intersectan (o cortan). Ese punto se calcula resolviendo el sistema de ecuaciones que forman. El aspecto de ese sistema depende de si las rectas se dan en forma paramétrica, continua o como corte de dos planos.

Si las dos rectas no se intersectan, se dice que se cruzan. En ese caso, hay una distancia mínima entre las dos que se puede calcular así:



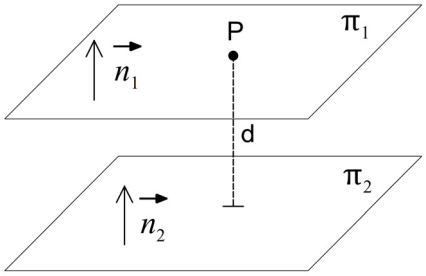
Si dos rectas r y s se cruzan siempre se pueden encontrar dos planos paralelos que contengan a cada una de las rectas. El vector normal a esos planos es $\vec{n} = \vec{v}_r \wedge \vec{v}_s$. La distancia entre las rectas es la distancia de un punto de uno de los planos al otro plano y se calcularía como vimos en el apartado anterior.

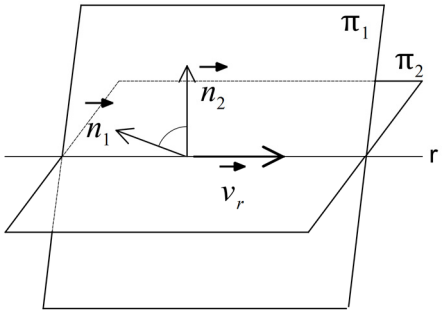
De otra forma, la distancia buscada es la altura del paralelepípedo que forman $\vec{v}_r$, $\vec{v}_s$ y $\overrightarrow{P_rP_s}$:

$$d = \frac{V_{paralelepípedo}}{S_{base}} = \frac{|\overrightarrow{P_rP_s} \cdot (\vec{v}_r \wedge \vec{v}_s)|}{|\vec{v}_r \wedge \vec{v}_s|}$$

9. Posiciones relativas de dos planos.

Dos planos son paralelos si sus vectores normales son proporcionales. Si además un punto de uno de los planos pertenece al otro plano, son coincidentes. Si son paralelos, la distancia entre ellos es la distancia que hay desde un punto cualquiera de uno de los planos hasta el otro plano.

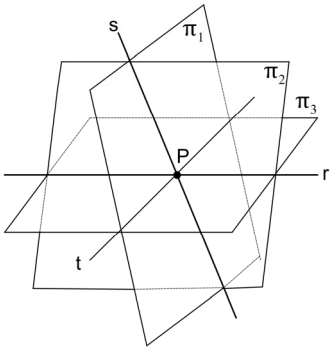


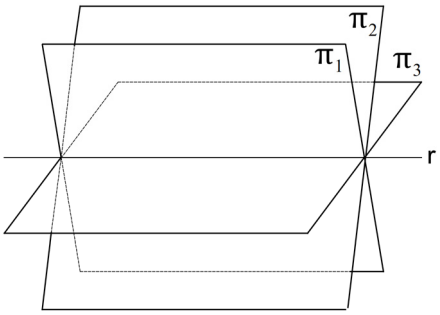


Si no son paralelos, dos planos forman un cierto ángulo, el que forman sus vectores normales. En este caso, se cortan en una recta. Esa recta se halla resolviendo el sistema que forman los planos.

10. Posiciones relativas de tres planos.

La posición relativa de tres planos se averigua resolviendo el sistema de ecuaciones que forman. Si el sistema es compatible determinado se cortan en un único punto. Si el sistema es compatible indeterminado se cortan en una recta. Si el sistema es incompatible no tienen puntos en común (por parejas podrían cortarse en una recta o ser paralelos).





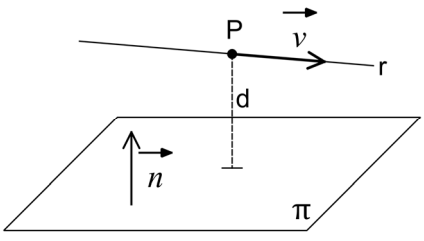
11. Posiciones relativas de una recta y un plano.

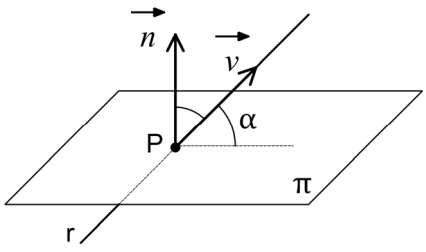
En general, se puede saber su posición relativa resolviendo el sistema de ecuaciones que forman.

Con argumentos geométricos, pueden darse los siguientes casos:

Si el vector director de la recta y el vector normal al plano son perpendiculares, la recta y el plano son paralelos. De ser así, la distancia entre ellos es la distancia de un punto cualquiera de la recta al plano. Si esa distancia es cero, la recta está toda ella sobre el plano.

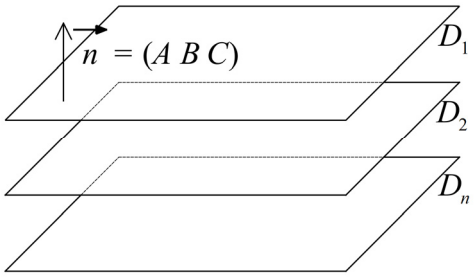
Si no son paralelos, forman un cierto ángulo y se cortan en un punto. El punto de corte es la solución del sistema que forman. El ángulo que forman es el ángulo complementario del que forman el vector normal al plano y el vector director de la recta.

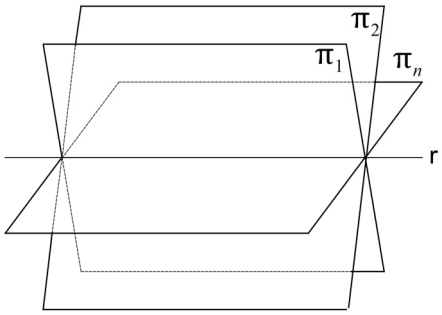




El haz de planos paralelos es el conjunto de todos los planos que son paralelos a uno dado. Puesto que todos tienen el mismo vector normal, tienen los mismos coeficientes A, B y C y se distinguen entre sí por el valor de D: $Ax+By+Cz+D=0,\ D\in\mathbb{R}$ (A, B y C serán valores dados).

Por ejemplo, el haz de los planos paralelos a $2x-3y+z-3=0$ es: $2x-3y+z+D=0,\ D\in\mathbb{R}$.





También existe el haz de planos secantes (muchas veces se llama 'haz de planos' a este tipo).

Es el conjunto de todos los planos que pasan por una recta dada (por lo que se cortan en ella). Lo más habitual es que tengamos la recta dada como la intersección de dos planos y queramos hallar la ecuación de un plano cualquiera que también pase por esa recta.

Es decir, tenemos $r\equiv\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$ siendo el rango de la matriz del sistema 2.

Si añadimos una tercera ecuación que tenga la misma solución, el rango debe seguir siendo 2, por lo que la tercera ecuación debe ser una combinación lineal de las dos que ya tenemos.

Por lo tanto, $Ax+By+Cz+D=\lambda\cdot(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\mu\cdot(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)$
y como la expresión del primer miembro es cero, puesto que es la ecuación de un plano,
la ecuación del haz será: $\lambda\cdot(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\mu\cdot(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$

Para agilizar el cálculo es frecuente desestimar del haz el segundo de los planos, es decir, no considerar el caso de $\lambda=0$, y tomar como ecuación del haz de planos la combinación lineal que resulta de sumar la expresión del primero con la expresión del segundo multiplicada por un factor: $(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+k\cdot(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$.

Veamos un ejemplo:

Encontremos el plano que pasa por $P(-4,1,2)$ y por la recta $r\equiv\begin{cases}3x+2y-z+3=0\\x-2y+z-2=0\end{cases}$

La ecuación del haz de planos es: $(3x+2y-z+3)+k\cdot(x-2y+z-2)=0$

Para que el plano pase por $P(-4,1,2)$, sustituimos: $-12+2-2+3+k\cdot(-4-2+2-2)=0$
de ahí se obtiene: $-9+k\cdot(-6)=0,\ k=-3/2$

Por ello el plano buscado es: $(3x+2y-z+3)+(-3/2)\cdot(x-2y+z-2)=0$

Multiplicando todo por 2: $2\cdot(3x+2y-z+3)-3\cdot(x-2y+z-2)=0$

De lo que resulta: $6x+4y-2z+6-(3x-6y+3z-6)=0$

Por lo que la ecuación del plano buscado es: $3x+10y-5z+12=0$

Ejercicios de distancia punto-plano

1.- Sean los planos: $\pi \equiv 2x - 2y + z - 3 = 0$ y $\sigma \equiv 2x - 2y + z - 9 = 0$.

Calcula la distancia a la que se encuentran ambos planos.

2.- Sean el plano: $\pi \equiv 2x - 2y + z - 3 = 0$ y la recta: $r \equiv \frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{2}$. Calcula:

a) Su posición relativa, b) la distancia entre el plano y la recta.

3.- Un dron que está situado en el punto $A(10, -10, 8)$ queremos dirigirlo por el camino más corto posible hacia el plano: $\pi \equiv 2x - 2y + z - 3 = 0$. Calcula:

a) Qué recta debe seguir, b) a qué punto del plano π llegará, c) qué distancia recorrerá.

4.- Sea el plano: $\pi \equiv 2x - 2y + z - 3 = 0$.

Calcula las ecuaciones de los dos planos que distan 3 unidades del plano π.

(NOTA: Se hace usando la fórmula de la distancia punto-plano.)

Ejercicios de Geometría

1. La recta r pasa por los puntos $A(1,0,1)$, $B(3,-1,2)$. Calcula sus distintas ecuaciones.

2. El plano π pasa por los puntos $A(2,-1,1)$, $B(4,1,-1)$, $C(3,2,0)$. Calcula su ecuación.

3. Sea la recta $r \equiv \begin{cases} x+2y+z=1 \\ 2x-y-z=1 \end{cases}$ Calcula sus ecuaciones paramétricas.

4. Calcula el punto en el que la recta r del problema anterior corta al plano: $\pi \equiv 3x+y+2z+4=0$.

5. Sean la recta: $r \equiv \begin{cases} x-y+2z=1 \\ 2x+2y-z=2 \end{cases}$ y el plano: $\pi \equiv ax+y+z=b$, con $a,b \in \mathbb{R}$.

Calcula sus posiciones relativas en función de los posibles valores de *a* y *b*.

6. Sean los puntos $P(2,1,-1)$, $Q(5,2,-3)$, $R(8,a,b)$ con $a,b \in \mathbb{R}$. Calcula:
a) La distancia entre P y Q b) El valor de *a* y *b* para que P, Q y R estén alineados.

7. Sean los puntos $A(3,-2,4)$, $B(3,1,-2)$ y el plano $\pi \equiv 2x-6y+3z-12=0$.
Calcula cuál de los dos puntos es el más cercano al plano π.

8. Calcula la ecuación del plano que pasa por los puntos $P(2,1,-1)$, $Q(0,k,1)$, $R(3,5,-k)$ con $k \in \mathbb{R}$ sabiendo que el triángulo de vértices PQR es rectángulo en P.

9. Sean el plano $\pi \equiv 2x-y+z+3=0$ y la recta $r \equiv \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y}{4} = \dfrac{z-1}{k}$ siendo $k \in \mathbb{R}$. Calcula:

a) El valor de *k* adecuado para que la recta r no corte al plano π.

b) Para el valor de *k* anterior, la ecuación del plano que es perpendicular a π y contiene a la recta r.

10. Sean el punto $A(2,2,0)$ y la recta: $r \equiv \begin{cases} x+y+z-1=0 \\ x-z-8=0 \end{cases}$

Calcula el punto simétrico al punto A respecto a la recta r.

11. Sean el punto $A(3,0,3)$ y el plano $\pi \equiv x-y+2z=3$. Calcula el punto simétrico a A respecto a π.

12. Sean el plano $\pi \equiv 2x-2y+z-4=0$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x-y=3 \\ 2y+z=4 \end{cases}$.

Calcula: a) Los puntos de r que están situados a 2 unidades de π. b) El ángulo que forman r y π.

13. Sean el plano $\pi \equiv 2x-y+2z=4$ y el punto $P(5,-1,1)$.
Calcula el punto que es la proyección perpendicular de P sobre el plano π.

14. Sean el plano $\pi \equiv 2x-y+2z=4$ y la recta $r \equiv \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z}{1}$.

Calcula la recta que es la proyección perpendicular de r sobre el plano π.

15. Sean la recta: $r \equiv \dfrac{x-1}{4} = \dfrac{y}{a} = \dfrac{z-1}{-1}$ y el plano: $\pi \equiv 2x-y+bz=0$ donde $a,b \in \mathbb{R}$. Calcula:

a) La posición relativa de r y π en función de *a* y *b*, usando razonamientos geométricos.

b) La distancia entre r y π en función de *a* y *b*. [Basado en un problema de las PAU de julio-2017]

16. Sean los planos en el espacio: $\pi \equiv 6x-3y+2z-8=0$, $\sigma \equiv 6x-3y+2z+12=0$.

Calcula la ecuación del plano que equidista de ambos (es decir, el plano situado 'en medio' de ellos).

17. Sean las rectas paralelas: r, que pasa por el punto $A(1,1,4)$ y s, que pasa por el punto $B(-5,3,6)$, ambas con vector director $\vec{v}=(1,-2,1)$.
Calcula la ecuación de la recta situada entre ambas y paralela a ambas.

18. Sea el triángulo de vértices $A(-1,2,a)$, $B(1,1,4)$ y $C(0,1,0)$ con $a \in \mathbb{R}$. Calcula:

a) Si el triángulo es rectángulo en A, los posibles valores de *a*. [basado en PAU, junio 2018]

b) Para $a=-2$ el área del triángulo ABC y la ecuación del plano π que contiene al triángulo ABC.

19. Sean la recta: $r \equiv (x,y,z)=(-3+2t,-4+3t,3-t)$ con $t \in \mathbb{R}$ y los puntos: $P(1,0,-1)$, $Q(-1,2,3)$.

Calcula el punto R de la recta r que forma con P y Q un triángulo isósceles de lados PR, QR iguales.

20. Sean la recta: $r \equiv (x,y,z)=(-4+2t,-2,1-t)$ con $t \in \mathbb{R}$
y los planos: $\pi \equiv x+2y+2z=1$, $\sigma \equiv x-2y+2z=-3$

Calcula las posiciones relativas de los tres objetos y haz un dibujo cualitativo de la situación.

21. Sea el plano $\pi \equiv x-2y+2z+3=0$. Calcula el plano o planos que distan 2 unidades del plano π.

22. Sean los planos $\pi_1 \equiv 2x-4y+z=4$, $\pi_2 \equiv 2z=3$ y sea el punto $P(2,5,0)$.
Calcula la ecuación de la recta r que es paralela a los planos π_1 y π_2 y pasa por el punto P.

23. Sea la recta r que pasa por $A(2,-2,3)$ y tiene como vector director $\vec{v}=(3,1,-2)$. Y sea el punto $P(10,-4,0)$. Calcula la recta s que corta perpendicularmente a la recta r y pasa por el punto P.

24. Sean las rectas: $r \equiv \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z+1}{a}$, $s \equiv \dfrac{x-2}{b}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-1}{-4}$ con $a,b \in \mathbb{R}$.
Sabemos que existe un plano π perpendicular tanto a la recta r como a la recta s.

Calcula la posición relativa de las rectas r y s.

25. Sean el plano: $\pi \equiv 2x-y+z+3=0$ y la recta: $r \equiv \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z}{-1}$.
Calcula la ecuación de la recta s que es paralela a π, corta a r y pasa por el punto $A(0,2,1)$.

26. Sean los planos en el espacio: $\pi \equiv x+5y-14=0$, $\sigma \equiv 2x-3y+11=0$, $\tau \equiv 3x+2y-16=0$.
Sean la recta q: intersección π y σ, la recta r: intersección de π y τ, y la recta s: intersección de σ y τ.

Calcula las posiciones relativas de las rectas q, r y s.

27. Sean el plano: $\pi \equiv x+y+a\,z=2$ donde $a \in \mathbb{R}$ y la recta: $r \equiv \dfrac{x-1}{2}=y=z$.

Calcula, para el caso en el que π y r no tengan ningún punto en común,
la ecuación del plano σ que es perpendicular a π y contiene a la recta r.

Ejercicios de Geometría

1.- La recta r pasa por los puntos $A(1,0,1)$, $B(3,-1,2)$. Calcula sus distintas ecuaciones.

El vector director de la recta es: $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (3,-1,2) - (1,0,1) = (2,-1,1)$

Usando el punto A (también se puede usar el punto B) y el vector $\vec{v}$ tenemos:

Ecuación vectorial: $r \equiv (x,y,z) = (1,0,1) + (2,-1,1)t \ , \ t \in \mathbb{R}$

Ecuaciones paramétricas: $r \equiv \begin{cases} x = 1+2t \\ y = 0-t \\ z = 1+t \end{cases} , \ t \in \mathbb{R}$

Ecuación continua: $r \equiv \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-0}{-1} = \dfrac{z-1}{1}$ o lo que es lo mismo: $r \equiv \dfrac{x-1}{2} = -y = z-1$

De esta ecuación podemos obtener dos planos que contengan a la recta r:

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = -y = z-1 \ \rightarrow \ \begin{cases} \dfrac{x-1}{2} = -y \ \rightarrow \ x-1 = -2y \ \Rightarrow \ x+2y-1=0 \\ -y = z-1 \ \Rightarrow \ y+z-1=0 \end{cases}$$

[Los planos se pueden escribir tanto así: $Ax+By+Cz=D$ como así: $Ax+By+Cz+D=0$]

Y la ecuación del haz de planos que pasan por la recta r es:

$$(x+2y-1=0)+\lambda(y+z-1=0) \ \rightarrow \ x+(2+\lambda)y+\lambda z-1-\lambda=0 \ , \ \lambda \in \mathbb{R}$$

2.- El plano π pasa por los puntos $A(2,-1,1)$, $B(4,1,-1)$, $C(3,2,0)$. Calcula su ecuación.

Como vectores generadores de π podemos tomar $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$:

$\vec{v} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (4,1,-1) - (2,-1,1) = (2,2,-2) \sim (1,1,-1)$ [Solo importa su dirección]

$\vec{w} = \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = (3,2,0) - (2,-1,1) = (1,3,-1)$

a) Método algebraico, usando el punto A y los vectores $\vec{v}$, $\vec{w}$:

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0 \ \rightarrow \ \begin{matrix} (x-2)(-1+3)-(y+1)(-1+1)+(z-1)(3-1)=0 \\ 2(x-2)+0(y+1)+2(z-1)=0 \\ 2x+2z-6=0 \end{matrix}$$

De manera que, simplificando: $\pi \equiv x+z-3=0$

b) Método geométrico, con el vector normal al plano:

$$\vec{n} = \vec{v} \wedge \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = (-1+3)\vec{i} - (-1+1)\vec{j} + (3-1)\vec{k} = 2\vec{i} + 2\vec{k} \sim (1,0,1)$$

Con lo que el plano π tiene como ecuación: $1 \cdot x + 0 \cdot y + 1 \cdot z + D = 0$

Como pasa por el punto A (se puede hacer también con B o con C), calculamos D:

$A(2,-1,1) \ \rightarrow \ 1 \cdot 2 + 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 + D = 0 \ , \ 3 + D = 0 \ \Rightarrow \ D = -3$

Y la ecuación del plano es: $\pi \equiv x+z-3=0$

3.- Sea la recta $\mathrm{r} \equiv \begin{cases} x+2y+z=1 \\ 2x-y-z=1 \end{cases}$ Calcula sus ecuaciones paramétricas.

a) Método algebraico, resolviendo el sistema (por ejemplo por Cramer):

$$\begin{cases} x+2y=1-z \\ 2x-y=1+z \end{cases} \rightarrow \ |\mathrm{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1-4 = -5$$

$$x = \frac{1}{-5}\begin{vmatrix} 1-z & 2 \\ 1+z & -1 \end{vmatrix} = \frac{(-1+z)-(2+2z)}{-5} = \frac{-3-z}{-5} \quad , \quad y = \frac{1}{-5}\begin{vmatrix} 1 & 1-z \\ 2 & 1+z \end{vmatrix} = \frac{(1+z)-(2-2z)}{-5} = \frac{-1+3z}{-5}$$

Elegimos $z = 2+5t$ y tendremos:

$$x = \frac{-3-z}{-5} = \frac{3+z}{5} = \frac{3+(2+5t)}{5} = 1+t \quad , \quad y = \frac{-1+3z}{-5} = \frac{-1+(6+15t)}{-5} = \frac{5+15t}{-5} = -1-3t$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{r} \equiv \begin{cases} x = 1+t \\ y = -1-3t \\ z = 2+5t \ , \ t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

b) Método geométrico:

Si la recta r es la incidencia de los planos π y σ: $\vec{\mathrm{v}}_{\mathrm{r}} = \vec{\mathrm{n}}_{\pi} \wedge \vec{\mathrm{n}}_{\sigma}$.

$$\vec{\mathrm{v}}_{\mathrm{r}} = \vec{\mathrm{n}}_{\pi} \wedge \vec{\mathrm{n}}_{\sigma} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = (-2+1)\vec{i} - (-1-2)\vec{j} + (-1-4)\vec{k} = -\vec{i} + 3\vec{j} - 5\vec{k} \sim (1,-3,5)$$

Un punto de la recta será una solución particular del sistema que forman los dos planos.

Sumando las dos ecuaciones: $3x+y=2$.

Eligiendo $x=1$ tenemos $y=-1$. Sustituyendo en una de las ecuaciones: $z=2$.

$$\Rightarrow \quad \mathrm{r} \equiv \begin{cases} x = 1+t \\ y = -1-3t \\ z = 2+5t \ , \ t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

4.- Calcula el punto en el que la recta r del problema anterior corta al plano: $\pi \equiv 3x+y+2z+4=0$.

Sustituimos las ecuaciones paramétricas de r en la ecuación del plano π:

$$\begin{aligned} 3(1+t)+(-1-3t)+2(2+5t)+4 &= 0 \\ 3+3t-1-3t+4+10t+4 &= 0 \\ 10+10t &= 0 \\ t &= -1 \end{aligned}$$

Así, el punto de r que pertenece al plano es el que tiene $t=-1$. Sustituimos en las ec. paramétricas:

$$\Rightarrow \quad \mathrm{P} \equiv \begin{cases} x = 1+(-1) = 1-1 = 0 \\ y = -1-3(-1) = -1+3 = 2 \\ z = 2+5(-1) = 2-5 = -3 \end{cases}$$

El punto buscado es: $\mathrm{P}(0,2,-3)$.

5.- Sean la recta: $\mathrm{r} \equiv \begin{cases} x-y+2z=1 \\ 2x+2y-z=2 \end{cases}$ y el plano: $\pi \equiv a\,x+y+z=b$, con $a,b \in \mathbb{R}$.

Calcula sus posiciones relativas en función de los posibles valores de *a* y *b*.

Encontremos un punto y un vector de la recta r.

Un punto de la recta r es una solución particular del sistema que define la recta.

Tomemos $z=0$ y el sistema se convierte en:

$$\left.\begin{matrix} x-y=1 \\ 2x+2y=2 \end{matrix}\right\} \rightarrow \left.\begin{matrix} x-y=1 \\ x+y=1 \end{matrix}\right\}$$

Sumando las ecuaciones: $2x=2 \rightarrow x=1$, y de la 2ª ecuación: $1+y=1 \rightarrow y=0$.

Por lo tanto, un punto de la recta r es: $\mathrm{P}(1,0,0)$.

Un vector de la recta r se puede obtener de los vectores normales de los planos que la definen:

$$\vec{\mathrm{v}} = \vec{\mathrm{n}}_1 \wedge \vec{\mathrm{n}}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (1-4)\,\vec{i} - (-1-4)\,\vec{j} + (2-(-2))\,\vec{k} = -3\vec{i} + 5\,\vec{j} + 4\vec{k}$$

Por lo tanto, el vector director de la recta es: $\vec{\mathrm{v}} = (-3,5,4)$.

Así la recta r es: $\mathrm{r} \equiv (x,y,z) = (1,0,0) + t\,(-3,5,4) = (1-3t\ ,\ 5t\ ,\ 4t) \quad \text{con } t \in \mathbb{R}$.

Una forma alternativa para obtener la recta r es resolver el sistema de los planos que la definen:

$$\mathrm{r} \equiv \begin{cases} x-y+2z=1 \\ 2x+2y-z=2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x-y=1-2z \\ 2x+2y=2+z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x-y=1-2z \\ x+y=1+z/2 \end{cases}$$

Sumando las ecuaciones: $2x=2-3/2\,z \rightarrow x=1-3/4\,z$

Tomando $z=4t$ tenemos: $x=1-3t$

Sustituyendo en la 2ª ecuación: $y=1+z/2-x \rightarrow y=1+2t-(1-3t)=5t$

y la recta r es: $\mathrm{r} \equiv (x,y,z) = (1-3t\ ,\ 5t\ ,\ 4t) \quad \text{con } t \in \mathbb{R}$

El plano $\pi \equiv a\,x+y+z=b$ tiene como vector normal:

$$\vec{\mathrm{n}} = (a,1,1)$$

y un punto de él es:

$$\mathrm{Q}(0,0,b)$$

[No nos va a hacer falta este punto.]

Las posiciones relativas entre una recta y un plano son 3:

a) La recta es paralela al plano. No hay puntos en común. Forman un sistema incompatible.
El vector de la recta es perpendicular al vector normal del plano.

b) La recta está incluida en el plano. Infinitos puntos en común: Sistema compatible indeterminado.

c) La recta corta al plano en un punto. Tienen un punto en común: Sistema compatible determinado.

Caso (a): $\vec{v}\cdot\vec{n}=0$, ningún punto de la recta r pertenece al plano π.

Caso (b): $\vec{v}\cdot\vec{n}=0$, cualquier punto de la recta r pertenece al plano π.

Caso (c): $\vec{v}\cdot\vec{n}\neq 0$, un solo punto de la recta r pertenece al plano π.

Como $\vec{v}\cdot\vec{n}=(-3)\cdot a+5\cdot 1+4\cdot 1=9-3a$

Si $\vec{v}\cdot\vec{n}=0 \;\rightarrow\; 9-3a=0 \;\Rightarrow\; a=3$

Si $a=3$, el punto de la recta $P(1,0,0)$ pertenece al plano si:

$\pi\equiv a\,x+y+z=b \;\rightarrow\; 3\cdot 1+0+0=b \;\Rightarrow\; b=3$

Por lo tanto, tendremos que:

a) Si $a=3$, $b\neq 3$ la recta es paralela al plano.

b) Si $a=3$, $b=3$ la recta está incluida en el plano.

c) Si $a\neq 3$ la recta corta al plano en un punto.

6.- Sean los puntos $P(2,1,-1)$, $Q(5,2,-3)$, $R(8,a,b)$ con $a,b\in\mathbb{R}$. Calcula:
a) La distancia entre P y Q b) El valor de *a* y *b* para que P, Q y R estén alineados.

a) La distancia entre P y Q es el módulo del vector que los une: $d(P,Q)=|\overrightarrow{PQ}|$

$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}=(5,2,-3)-(2,1,-1)=(3,1,-2)$

$d(P,Q)=|\overrightarrow{PQ}|=\sqrt{3^2+1^2+(-2)^2}=\sqrt{14}\ u$

b) P, Q y R estarán alineados si $\overrightarrow{PQ}$ *y* $\overrightarrow{QR}$ son proporcionales.

Como: $\overrightarrow{PQ}=(3,1,-2)$ $\overrightarrow{QR}=(3,a-2,b+3)$ debe cumplirse que:

$$\frac{3}{3}=\frac{a-2}{1}=\frac{b+3}{-2} \;\rightarrow\; \begin{cases} a-2=1 \;\Rightarrow\; a=+3 \\ b+3=-2 \;\Rightarrow\; b=-5 \end{cases}$$

7.- Sean los puntos $A(3,-2,4)$, $B(3,1,-2)$ y el plano $\pi \equiv 2x-6y+3z-12=0$.

Calcula cuál de los dos puntos es el más cercano al plano π.

La distancia de un punto P al plano $Ax+By+Cz+D=0$ es: $d=\dfrac{|Ax_P+By_P+Cz_P+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

Para el punto A: $d=\dfrac{|2\cdot 3-6\cdot(-2)+3\cdot 4-12|}{\sqrt{2^2+(-6)^2+3^2}}=\dfrac{18}{\sqrt{49}}=\dfrac{18}{7}\ u$

Para el punto B: $d=\dfrac{|2\cdot 3-6\cdot 1+3\cdot(-2)-12|}{\sqrt{2^2+(-6)^2+3^2}}=\dfrac{18}{\sqrt{49}}=\dfrac{18}{7}\ u$

Los dos puntos están a la misma distancia del plano π.

(El vector $\overrightarrow{AB}=(0,3,-6)$ no es perpendicular a $\vec{n}=(2,-6,3)$ pues $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}\neq 0$. Por lo tanto, los puntos A y B no están 'al mismo lado' del plano π. Uno está 'encima' y otro 'debajo'.

Si estuvieran al mismo lado del plano, A y B pertenecerían a una recta paralela al plano.)

8.- Calcula la ecuación del plano que pasa por los puntos $P(2,1,-1)$, $Q(0,k,1)$, $R(3,5,-k)$ con $k\in\mathbb{R}$ sabiendo que el triángulo de vértices PQR es rectángulo en P.

Si el triángulo PQR es rectángulo en P, los vectores $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{PR}$ forman 90º: $\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR}=0$

$\overrightarrow{PQ}=(0-2,k-1,1-(-1))=(-2,k-1,2)$; $\overrightarrow{PR}=(3-2,5-1,-k-(-1))=(1,4,-k+1)$

$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR}=(-2,k-1,2)\cdot(1,4,-k+1)=(-2)\cdot 1+(k-1)\cdot 4+2\cdot(-k+1)=$

$=-2+4k-4-2k+2=2k-4$

Si $\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR}=0 \ \rightarrow\ 2k-4=0 \ \Rightarrow\ k=2$.

Los vectores son: $\overrightarrow{PQ}=(-2,k-1,2)\big|_{k=2}=(-2,1,2)$; $\overrightarrow{PR}=(1,4,-k+1)\big|_{k=2}=(1,4,-1)$

La ecuación del plano, usando el punto P, es:

$$\pi\equiv\begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z+1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \end{vmatrix}=0 \ \rightarrow\ \begin{matrix}(x-2)(-1-8)-(y-1)(2-2)+(z+1)(-8-1)=0\\ (x-2)(-9)+(z+1)(-9)=0\\ x+z-1=0\end{matrix}$$

El plano buscado es: $\pi\equiv x+z-1=0$

9.- Sean el plano $\pi\equiv 2x-y+z+3=0$ y la recta $r\equiv\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y}{4}=\dfrac{z-1}{k}$ siendo $k\in\mathbb{R}$. Calcula:

a) El valor de *k* adecuado para que la recta r no corte al plano π.

b) Para el valor de *k* anterior, la ecuación del plano que es perpendicular a π y contiene a la recta r.

a) Para que la recta r no corte al plano π, debe ser paralela a ese plano y se cumplirá que: $\vec{v}_r\cdot\vec{n}_\pi=0$

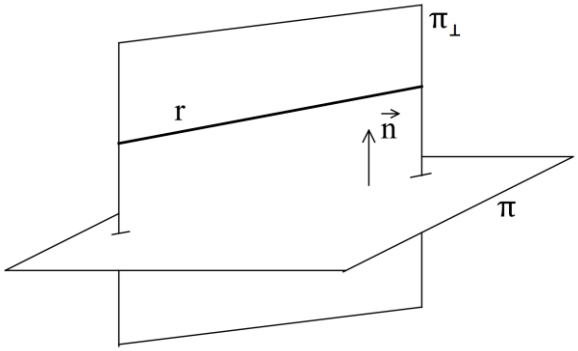
$\vec{v}_r\cdot\vec{n}_\pi=(3,4,k)\cdot(2,-1,1)=3\cdot 2+4\cdot(-1)+k\cdot 1=2+k$

Si $\vec{v}_r\cdot\vec{n}_\pi=0 \ \rightarrow\ 2+k=0 \ \Rightarrow\ k=-2$

La recta r no corta al plano π si $k=-2$.

b) El plano buscado contiene a la recta r, luego cumple la ecuación continua de r:
pasa por el punto de r $(2,0,1)$ y uno de sus vectores es el vector director de r: $\vec{v}_r=(3,4,-2)$

Además ese plano es perpendicular a π, luego otro de sus vectores es: $\vec{n}_\pi=(2,-1,1)$.



$$\pi_\perp \equiv \begin{vmatrix} x-2 & y & z-1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\pi_\perp \equiv (x-2)(4-2)-y(3+4)+(z-1)(-3-8)=0$$
$$2(x-2)-7y+(-11)(z-1)=0$$
$$2x-7y-11z+7=0$$

El plano buscado es: $\pi_\perp \equiv 2x-7y-11z+7=0$

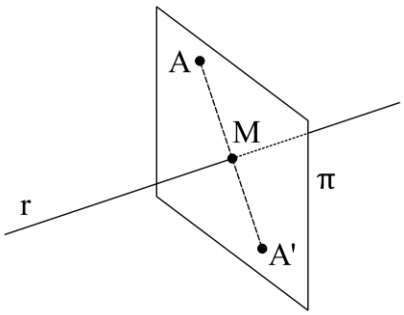
10.- Sean el punto $A(2,2,0)$ y la recta: $r \equiv \begin{cases} x+y+z-1=0 \\ x-z-8=0 \end{cases}$

Calcula el punto simétrico al punto A respecto a la recta r.

Para la recta r tenemos, tomando $z=t$ en la segunda ecuación: $x=8+t$.

Sustituyendo en la 1ª ecuación: $y=1-x-z=1-(8+t)-t=-7-2t$: $\quad r\equiv(x,y,z)=(8+t,-7-2t,t)$

Así pues, la recta r pasa por $(8,-7,0)$ y su vector director es: $\vec{v}=(1,-2,1)$.



Vamos a encontrar el plano auxiliar π del dibujo.

Este plano es perpendicular a la recta r y pasa por A.

Su vector normal es el vector director de la recta r:

$$\pi \equiv x-2y+z+D=0$$

Y por pasar por A: $2-2\cdot 2+0+D=0 \;\rightarrow\; D=2$

$$\pi \equiv x-2y+z+2=0$$

El punto M es donde la recta r corta al plano π. Sustituyendo en él las ecuaciones paramétricas de r:

$$(8+t)-2(-7-2t)+(t)+2=0 \;\rightarrow\; 8+t+14+4t+t+2=0,\; 6t+24=0 \;\Rightarrow\; t=-4$$

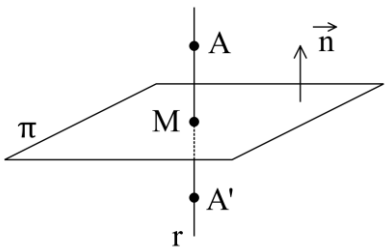
El punto M es el punto de r con $t=-4$: $\quad M=(8+t,-7-2t,t)\big|_{t=-4}=(4,1,-4)$

Por la definición de punto simétrico: $\overrightarrow{OM}=(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OA'})/2 \;\rightarrow\; \overrightarrow{OA'}=2\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA}$

Así que: $\overrightarrow{OA'}=2(4,1,-4)-(2,2,0)=(8,2,-8)-(2,2,0)=(6,0,-8)$

El punto simétrico buscado es: $A'(6,0,-8)$

11.- Sean el punto $A(3,0,3)$ y el plano $\pi \equiv x - y + 2z = 3$. Calcula el punto simétrico a A respecto a π.



Los puntos A y A' están sobre una recta perpendicular a π.

El vector director de esa recta es: $\vec{v} = \vec{n} = (1,-1,2)$.

Como esa recta pasa por $A(3,0,3)$ sus ecuaciones paramétricas son: $r \equiv \begin{cases} x = 3+t \\ y = -t \\ z = 3+2t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}$

El punto M es donde la recta r corta al plano π. Sustituyendo en él las ecuaciones paramétricas de r:

$$(3+t)-(-t)+2(3+2t)=3 \ \rightarrow \ 3+t+t+6+4t=3, \ 6t+6=0 \ \Rightarrow \ t=-1$$

El punto M es el punto de r con $t=-1$: $M = (3+t,-t,3+2t)\big|_{t=-1} = (2,1,1)$

Por la definición de punto simétrico: $\overrightarrow{OM} = (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OA'})/2 \ \rightarrow \ \overrightarrow{OA'} = 2\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA}$

Así que: $\overrightarrow{OA'} = 2(2,1,1) - (3,0,3) = (4,2,2) - (3,0,3) = (1,2,-1)$

El punto simétrico buscado es: $A'(1,2,-1)$

12.- Sean el plano $\pi \equiv 2x - 2y + z - 4 = 0$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x - y = 3 \\ 2y + z = 4 \end{cases}$.

Calcula: a) Los puntos de r que están situados a 2 unidades de π. b) El ángulo que forman r y π.

Empecemos por convertir la expresión de la recta r a su forma paramétrica.

Un punto de r es una solución particular del sistema que la define. Tomemos $z = 0$.

De la 2ª ecuación: $2y + 0 = 4 \ \rightarrow \ y = 2$. Sustituyendo en la 1ª ecuación: $x - 2 = 3 \ \rightarrow \ x = 5$.

Por lo tanto la recta r pasa por el punto $(5,2,0)$.

El vector director de la recta es el producto vectorial de los vectores normales de los planos:

$$\vec{v} = \vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1-0)\vec{i} - (1-0)\vec{j} + (2-0)\vec{k} = (-1,-1,2)$$

Así que cualquier punto de la recta r es de la forma: $(x,y,z) = (5-t, 2-t, 2t)$ con $t \in \mathbb{R}$.

a) Queremos encontrar los puntos de la recta r que distan 2 unidades de π.

Igualaremos la distancia de un punto de r a π a 2 y calcularemos para qué valores de *t* sucede eso:

$$d(P_r, \pi) = \frac{|2(5-t) - 2(2-t) + (2t) - 4|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{|10 - 2t - 4 + 2t + 2t - 4|}{\sqrt{9}} = \frac{|2+2t|}{3}$$

$$\text{Si } d(P_r, \pi) = 2 \ \rightarrow \ \frac{|2+2t|}{3} = 2, \ 2 + 2t = \pm 6 \ \Rightarrow \ 2t = -2 \pm 6, \ t = \begin{cases} +2 \\ -4 \end{cases}$$

Los puntos buscados son:

$$(x,y,z)=(5-t,2-t,2t)\big|_{t=2}=(3,0,4) \quad \text{y} \quad (x,y,z)=(5-t,2-t,2t)\big|_{t=-4}=(9,6,-8)$$

b) El ángulo que forman r y π es el complementario del que forman $\vec{v}_r$ y $\vec{n}_\pi$.

El ángulo α que forman $\vec{v}_r$ y $\vec{n}_\pi$ es: $\vec{n}_\pi \cdot \vec{v}_r = |\vec{n}_\pi| \cdot |\vec{v}_r| \cdot \cos\alpha$.

Como: $\vec{n}_\pi \cdot \vec{v}_r = (2,-2,1)\cdot(-1,-1,2) = 2\cdot(-1)+(-2)\cdot(-1)+1\cdot 2 = -2+2+2 = 2$

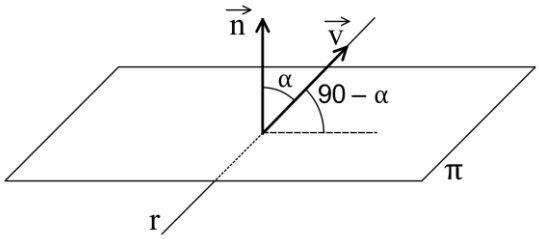
$$|\vec{v}_r| = \sqrt{(-1)^2+(-1)^2+2^2} = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6} \ , \ |\vec{n}_\pi| = \sqrt{2^2+(-2)^2+1^2} = \sqrt{4+4+1} = \sqrt{9} = 3$$

Tendremos:

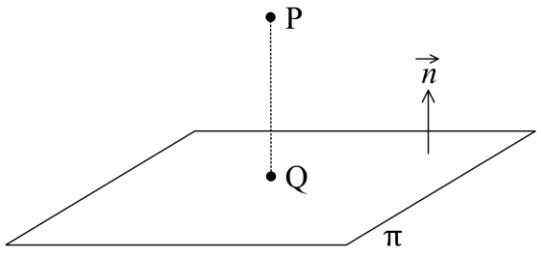
$$\cos\alpha = \frac{2}{3\cdot\sqrt{6}} = \frac{2\cdot\sqrt{6}}{3\cdot 6} = \frac{\sqrt{6}}{9} \ \rightarrow \ \alpha = \arccos\frac{\sqrt{6}}{9} \simeq 74.21^o$$

Y el ángulo que forman r y π será:

$$\angle \text{r},\pi = 90^o - \alpha = 90^o - 74.21^o = 15.79^o$$



13.- Sean el plano $\pi \equiv 2x-y+2z=4$ y el punto $P(5,-1,1)$.
Calcula el punto que es la proyección perpendicular de P sobre el plano π.



La proyección perpendicular de P sobre el plano π es el punto Q.

El punto Q es el punto en el que la recta perpendicular a π que pasa por P, corta al plano π.

La recta perpendicular al plano que pasa por $P(5,-1,1)$ tiene como vector director $\vec{n}=(2,-1,2)$.

Sus ecuaciones paramétricas son: $\text{r} \equiv \begin{cases} x = 5+2t \\ y = -1-t \\ z = 1+2t \end{cases}$ con $t \in \mathbb{R}$

El corte de esa recta con el plano p lo encontramos sustituyendo esas ecuaciones en la ecuación de π:

$$2(5+2t)-(-1-t)+2(1+2t)=4 \ \rightarrow \ 10+4t+1+t+2+4t=4 \ , \ 9t=-9 \ \Rightarrow \ t=-1$$

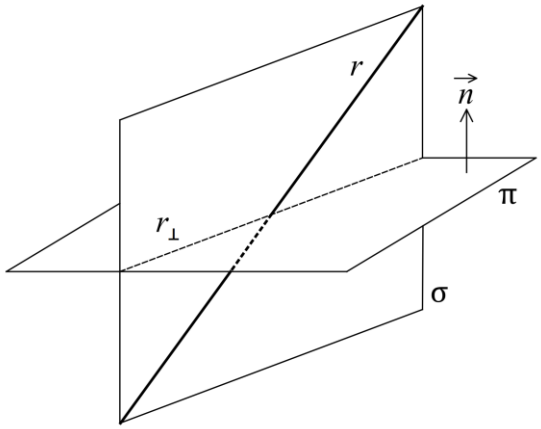
Por lo tanto, el punto Q es el punto de la recta r con $t=-1$:

$$\text{Q}(5+2t,-1-t,1+2t)\big|_{t=-1} = (3,0,-1)$$

14.- Sean el plano $\pi \equiv 2x - y + 2z = 4$ y la recta $\mathrm{r} \equiv \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z}{1}$.

Calcula la recta que es la proyección perpendicular de r sobre el plano π.

La proyección perpendicular de r sobre el plano π es la recta $\mathrm{r}_\perp$ del dibujo:



Esa recta $\mathrm{r}_\perp$ es la que definen los planos π (el dato del problema) y σ.

El plano σ es el plano perpendicular a π que contiene a la recta r.

La recta r pasa por (1,1,0) y su vector director es: $\vec{v} = (1,-1,1)$.

El plano σ contiene a la recta r así que pasa por (1,1,0) y uno de sus vectores es $\vec{v} = (1,-1,1)$.

El otro vector que define a σ es el vector normal a π: $\vec{n} = (2,-1,2)$.

Así, la ecuación de σ es:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \;\rightarrow\; (x-1)(-2+1) - (y-1)(2-2) + z(-1+2) = 0$$

Simplificando: $(x-1)(-1) + z = 0$, $-x+1+z = 0 \;\Rightarrow\; x - z = 1$

Por lo tanto, la recta $\mathrm{r}_\perp$ definida por la intersección de π y σ es:

$$\mathrm{r}_\perp \equiv \begin{cases} 2x - y + 2z = 4 \\ x - z = 1 \end{cases}$$ (Esto puede darse como la solución final.)

Podemos obtener las ecuaciones paramétricas de $\mathrm{r}_\perp$ resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} 2x - y + 2z = 4 \;\rightarrow\; 2x + 2z = 4 + y \;\Rightarrow\; x + z = 2 + y/2 \\ x - z = 1 \end{cases}$$

Sumando las dos ecuaciones: $2x = 3 + y/2 \;\rightarrow\; x = 3/2 + y/4$

Eligiendo $y = 2 + 4t$ tenemos: $x = 3/2 + (2+4t)/4 = 3/2 + (1+2t)/2 = 2 + t$

Y de la segunda ecuación: $z = x - 1 = (2+t) - 1 = 1 + t$

$$\mathrm{r}_\perp \equiv (x, y, z) = (2+t, 2+4t, 1+t) \quad \text{con } t \in \mathbb{R}$$

15.- Sean la recta: $r \equiv \frac{x-1}{4} = \frac{y}{a} = \frac{z-1}{-1}$ y el plano: $\pi \equiv 2x - y + b\,z = 0$ donde $a, b \in \mathbb{R}$. Calcula:

a) La posición relativa de r y π en función de *a* y *b*, usando razonamientos geométricos.

b) La distancia entre r y π en función de *a* y *b*. [Basado en un problema de las PAU de julio-2017]

a) La recta r pasa por $A(1,0,1)$ y su vector director es: $\vec{v} = (4, a, -1)$.

El plano π tiene como vector normal: $\vec{n} = (2, -1, b)$.

Una recta y un plano pueden ser: a) paralelos o coincidentes si $\vec{n} \cdot \vec{v} = 0$ o b) se cortan si $\vec{n} \cdot \vec{v} \neq 0$.

En este caso, $\vec{n} \cdot \vec{v} = (2, -1, b) \cdot (4, a, -1) = 8 - a - b$

Si $\vec{n} \cdot \vec{v} = 0 \;\rightarrow\; 8 - a - b = 0 \;\Rightarrow\; a + b = 8$ condición de paralelismo o coincidencia

Serán coincidentes si el punto $A(1,0,1)$ de la recta r pertenece al plano π:

$$2 \cdot 1 - 0 + b \cdot 1 = 0 \;\rightarrow\; b = -2$$

En resumen: Si $a + b \neq 8$ la recta r y el plano π se cortan (son incidentes).

Si $a + b = 8$: con $b = -2$ son coincidentes, con $b \neq -2$ son paralelos.

[*El estudio de la posición relativa puede hacerse también discutiendo el sistema de ecuaciones que forman los tres planos, dos de esos planos los obtendríamos de la ecuación continua de la recta r. El procedimiento geométrico que hemos realizado es equivalente, pero requiere menos trabajo.*]

b) Si $a + b \neq 8$, puesto que la recta y el plano se cortan, su distancia es cero.

Si $a + b = 8$ y $b = -2$, puesto que la recta está en el plano, su distancia es cero.

Si $a + b = 8$ y $b \neq -2$ la recta y el plano son paralelos. La distancia entre ellos es distinta de cero.

Para calcular la distancia entre ellos tomamos el punto A de la recta r y hallamos la distancia a π:

$$d = \frac{|2 \cdot 1 - 0 + b \cdot 1|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + b^2}} = \frac{|2 + b|}{\sqrt{5 + b^2}}$$

Resumiendo: Si $a + b \neq 8$ la distancia entre r y π es cero.

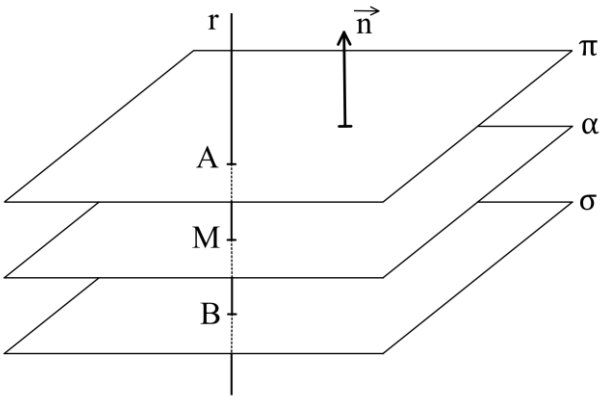
Si $a + b = 8$ y $b = -2$ la distancia entre r y π es cero.

Si $a + b = 8$ y $b \neq -2$ la distancia entre r y π es: $d = \frac{|2 + b|}{\sqrt{5 + b^2}}$

16.- Sean los planos en el espacio: $\pi \equiv 6x-3y+2z-8=0$, $\sigma \equiv 6x-3y+2z+12=0$.

Calcula la ecuación del plano que equidista de ambos (es decir, el plano situado 'en medio' de ellos).

Llamemos α al plano que queremos calcular. Si r es una recta perpendicular a los 3 planos, tenemos:



Esa recta r tiene como vector director: $\vec{v}=\vec{n}=(6,-3,2)$ y pasa por un punto A.

El punto A es un punto cualquiera del plano π. Basta que cumpla la ecuación de ese plano.

Elegimos el punto $A(0,0,4)$, pues cumple que: $6\cdot 0-3\cdot 0+2\cdot 4-8=0$

$$\text{Con lo cual, } r\equiv\begin{cases}x=6t\\ y=-3t\\ z=4+2t\end{cases}\quad \text{con } t\in\mathbb{R}$$

Esa recta r corta al plano σ en el punto B. Calculemos qué punto es ese.

Para ello, sustituimos las ecuaciones paramétricas de r en la ecuación de σ:

$$6\cdot(6t)-3\cdot(-3t)+2\cdot(4+2t)+12=0$$

$$36t+9t+8+4t+12=0\ ,\ 49t+20=0\ \rightarrow\ t=-\frac{20}{49}$$

Así que el punto B es el punto de la recta r con $t=-20/49$:

$$B(6t,-3t,4+2t)\ \Big|_{t=-\frac{20}{49}}=\left(-\frac{120}{49},\frac{60}{49},\frac{156}{49}\right)$$

El punto M es el punto medio de A y B:

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)=\frac{1}{2}\left[(0,0,4)+\left(-\frac{120}{49},\frac{60}{49},\frac{156}{49}\right)\right]=\frac{1}{2}\left[\left(-\frac{120}{49},\frac{60}{49},\frac{352}{49}\right)\right]=\left(-\frac{60}{49},\frac{30}{49},\frac{176}{49}\right)$$

Como el plano α tiene como ecuación: $\alpha\equiv 6x-3y+2z+D=0$, por pasar por el punto M, tenemos:

$$6\cdot\left(-\frac{60}{49}\right)-3\cdot\left(\frac{30}{49}\right)+2\cdot\left(\frac{176}{49}\right)+D=0$$ Multiplicamos todo por 49:

$$-360-90+352+49\cdot D=0\ ,\ -98+49\cdot D=0\ \rightarrow\ D=2$$

El plano buscado es: $\alpha\equiv 6x-3y+2z+2=0$

Vamos a hacerlo con otro método.

Buscamos el plano: $\alpha \equiv 6x-3y+2z+\mathrm{D}=0$ por ser paralelo a π y a σ.

Un punto cualquiera de ese plano es: $\mathrm{P}(a,b,c)$ de manera que: $6a-3b+2c+\mathrm{D}=0$.

La distancia de ese punto P al plano π debe ser igual a su distancia al plano σ: $\mathrm{d}(\mathrm{P},\pi)=\mathrm{d}(\mathrm{P},\sigma)$.

Usando la fórmula de la distancia de un punto a un plano tendremos:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{d}(\mathrm{P},\pi) & = & \mathrm{d}(\mathrm{P},\sigma) \\ \dfrac{|6a-3b+2c-8|}{\sqrt{6^2+(-3)^2+2^2}} & = & \dfrac{|6a-3b+2c+12|}{\sqrt{6^2+(-3)^2+2^2}} \end{array} \quad \rightarrow \quad |6a-3b+2c-8|=|6a-3b+2c+12|$$

Esta ecuación tiene tres variables, pero podemos simplificarla con la expresión para D anterior:

$$6a-3b+2c+\mathrm{D}=0 \;\rightarrow\; 6a-3b+2c=-\mathrm{D}$$

Y la ecuación quedará:

$$|6a-3b+2c-8|=|6a-3b+2c+12| \quad \rightarrow \quad |-\mathrm{D}-8|=|-\mathrm{D}+12|$$

La solución puede ser una de estas dos:

$$-\mathrm{D}-8=+(-\mathrm{D}+12) \;\Rightarrow\; \text{sin solución}$$

$$\begin{aligned} -\mathrm{D}-8=-(-\mathrm{D}+12) \;\Rightarrow\; & -\mathrm{D}-8=\mathrm{D}-12 \\ & 12-8=2\mathrm{D} \\ & \mathrm{D}=2 \end{aligned}$$

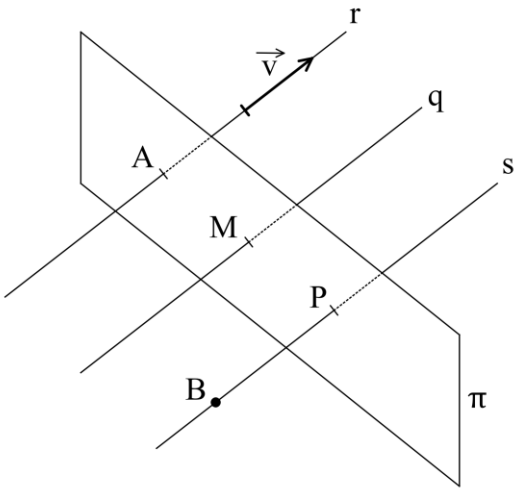
Por lo tanto, el plano buscado es: $\alpha \equiv 6x-3y+2z+2=0$

(Lo mismo que obtuvimos antes, pero más corto.

El método anterior lo puse para ilustrar el uso de una recta auxiliar.)

17.- Sean las rectas paralelas: r, que pasa por el punto $A(1,1,4)$ y s, que pasa por el punto $B(-5,3,6)$, ambas con vector director $\vec{v}=(1,-2,1)$.
Calcula la ecuación de la recta situada entre ambas y paralela a ambas.

Usaremos un plano auxiliar π, perpendicular a las rectas r, s y a la recta pedida que llamaremos q:



El plano π, tiene como vector normal el vector director de las rectas, $\vec{n}=(1,-2,1)$, así que:

$$\pi \equiv x-2y+z+D=0$$

y por pasar por A: $1-2\cdot 1+4+D=0 \;\rightarrow\; D=-3$

Con lo que: $\pi \equiv x-2y+z-3=0$

La recta s tiene como ecuaciones paramétricas: $s \equiv \begin{cases} x=-5+t \\ y=3-2t \\ z=6+t \quad \text{con } t\in\mathbb{R} \end{cases}$

El punto P es en el que la recta s corta al plano π, por lo que un punto de s cumple la ecuación de π:

$$(-5+t)-2\cdot(3-2t)+(6+t)-3=0$$

$$-5+t-6+4t+6+t-3=0\ ,\ 6t-8=0 \;\rightarrow\; t=\frac{4}{3}$$

Por lo que el punto P es: $P(-5+t,3-2t,6+t)\ \big|_{t=\frac{4}{3}} = \left(-\frac{11}{3},\frac{1}{3},\frac{22}{3}\right)$

El punto M es el punto medio de A y P:

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OP}\right)=\frac{1}{2}\left[(1,1,4)+\left(-\frac{11}{3},\frac{1}{3},\frac{22}{3}\right)\right]=\frac{1}{2}\left[\left(-\frac{8}{3},\frac{4}{3},\frac{34}{3}\right)\right]=\left(-\frac{4}{3},\frac{2}{3},\frac{17}{3}\right)$$

Por lo tanto, la recta q buscada como pasa por M es:

$$q \equiv \begin{cases} x=-4/3+t \\ y=2/3-2t \\ z=17/3+t \quad \text{con } t\in\mathbb{R} \end{cases}$$ tomando $t=\frac{1}{3}$ un punto 'mejor' de q es: $\begin{cases} x=-4/3+1/3=-1 \\ y=2/3-2/3=0 \\ z=17/3+1/3=6 \end{cases}$

Y la recta q nos queda así: $q \equiv \begin{cases} x=-1+t \\ y=-2t \\ z=6+t \quad \text{con } t\in\mathbb{R} \end{cases}$

18.- Sea el triángulo de vértices $A(-1,2,a)$, $B(1,1,4)$ y $C(0,1,0)$ con $a \in \mathbb{R}$. Calcula:

a) Si el triángulo es rectángulo en A, los posibles valores de *a*. [basado en PAU, junio 2018]

b) Para $a=-2$ el área del triángulo ABC y la ecuación del plano π que contiene al triángulo ABC.

a) Si el triángulo es rectángulo en A quiere decir que los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ son perpendiculares.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (1,1,4) - (-1,2,a) = (2,-1,4-a)$$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = (0,1,0) - (-1,2,a) = (1,-1,-a)$$

Y por ser perpendiculares, se cumplirá que: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (2,-1,4-a)\cdot(1,-1,-a) = 2+1+(4-a)(-a) = a^2-4a+3$$

Si $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \;\rightarrow\; a^2-4a+3=0$, $a = \dfrac{4\pm\sqrt{16-12}}{2} = \dfrac{4\pm 2}{2} = \begin{cases} +3 \\ +1 \end{cases}$

Los posibles valores de *a* son: $a=3$, $a=1$.

b) Para $a=-2$ los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ son:

$$\overrightarrow{AB} = (2,-1,4-a)\big|_{a=-2} = (2,-1,6) \qquad \overrightarrow{AC} = (1,-1,-a)\big|_{a=-2} = (1,-1,2)$$

Y su producto vectorial es:

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 6 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (-2+6)\,\vec{i} - (4-6)\,\vec{j} + (-2+1)\,\vec{k} = (4,2,-1)$$

El área del triángulo ABC es:

$$S = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right|$$

Por lo tanto:

$$S = \frac{1}{2}\left|(4,2,-1)\right| = \frac{1}{2}\sqrt{4^2+2^2+(-1)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{21}\ u^2$$

El plano que contiene a ABC tiene como vector normal:

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = (4,2,-1)$$

Luego su ecuación es de la forma:

$$\pi \equiv 4x+2y-z+D=0$$

Por pasar por el punto $C(0,1,0)$ tendremos:

$$4\cdot 0+2\cdot 1-0+D=0 \;\rightarrow\; D=-2$$

Y la ecuación del plano que contiene a ABC es:

$$\pi \equiv 4x+2y-z-2=0$$

19.- Sean la recta: $r \equiv (x, y, z) = (-3+2t, -4+3t, 3-t)$ con $t \in \mathbb{R}$ y los puntos: $P(1,0,-1)$, $Q(-1,2,3)$.
Calcula el punto R de la recta r que forma con P y Q un triángulo isósceles de lados PR, QR iguales.

Un punto cualquiera de la recta r es de la forma:

$$R(-3+2t, -4+3t, 3-t)$$

Los lados PR y QR tienen estas longitudes:

$$\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OP} = (-3+2t, -4+3t, 3-t) - (1,0,-1) =$$
$$= (-4+2t, -4+3t, 4-t)$$
$$\rightarrow \left|\overrightarrow{PR}\right| = \sqrt{(-4+2t)^2 + (-4+3t)^2 + (4-t)^2} =$$
$$= \sqrt{16-16t+4t^2+16-24t+9t^2+16-8t+t^2} =$$
$$= \sqrt{14t^2-48t+48}$$

$$\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OQ} = (-3+2t, -4+3t, 3-t) - (-1,2,3) =$$
$$= (-2+2t, -6+3t, -t)$$
$$\rightarrow \left|\overrightarrow{QR}\right| = \sqrt{(-2+2t)^2 + (-6+3t)^2 + (-t)^2} =$$
$$= \sqrt{4-8t+4t^2+36-36t+9t^2+t^2} =$$
$$= \sqrt{14t^2-44t+40}$$

Y si deben ser iguales tendremos:

$$\sqrt{14t^2-48t+48} = \sqrt{14t^2-44t+40}$$
$$14t^2-48t+48 = 14t^2-44t+40$$
$$-48t+48 = -44t+40$$
$$48-40 = 48t-44t$$
$$8 = 4t$$
$$t = 2$$

Por lo tanto, el punto R buscado es:

$$R(-3+2t, -4+3t, 3-t)\big|_{t=2} = (-3+4, -4+6, 3-2) = (1,2,1)$$

El punto buscado es: $R(1,2,1)$

20.- Sean la recta: $r \equiv (x, y, z) = (-4+2t, -2, 1-t)$ con $t \in \mathbb{R}$
y los planos: $\pi \equiv x+2y+2z=1$, $\sigma \equiv x-2y+2z=-3$

Calcula las posiciones relativas de los tres objetos y haz un dibujo cualitativo de la situación.

La recta r pasa por $P(-4,-2,1)$ y tiene como vector director: $\vec{v}=(2,0,-1)$.

Los planos π y σ tienen como vectores normales: $\vec{n}_\pi=(1,2,2)$, $\vec{n}_\sigma=(1,-2,2)$.

Empecemos con la posición relativa de los planos π y σ:

¿Son paralelos o coincidentes? Veamos si sus vectores normales son proporcionales:

$\frac{1}{1} \neq \frac{2}{-2} \neq \frac{2}{2}$ por lo que no son ni paralelos ni coincidentes.

Por lo tanto se cortan. ¿Se cortan los planos π y σ perpendicularmente?

$\vec{n}_\pi \cdot \vec{n}_\sigma = (1,2,2)\cdot(1,-2,2) = 1-4+4 = 1 \neq 0$ No son perpendiculares.

Por lo tanto, los planos π y σ se cortan formando un ángulo distinto de 90º.

Veamos la posición relativa de la recta respecto al plano π:

$\vec{n}_\pi \cdot \vec{v} = (1,2,2)\cdot(2,0,-1) = 1\cdot 2+2\cdot 0+2\cdot(-1) = 2+0-2 = 0$

La recta r es paralela o coincidente al plano π.

¿Pertenece el punto P de la recta r al plano π? Sustituimos el punto P en la ecuación de π:

$4+2\cdot(-2)+2\cdot 1 \neq 1$ No se cumple.

Así pues, la recta r es paralela al plano π.

Veamos la posición relativa de la recta respecto al plano σ:

$\vec{n}_\sigma \cdot \vec{v} = (1,-2,2)\cdot(2,0,-1) = 1\cdot 2+(-2)\cdot 0+2\cdot(-1) = 2+0-2 = 0$

La recta r es paralela al plano σ o coincidente con el plano σ.

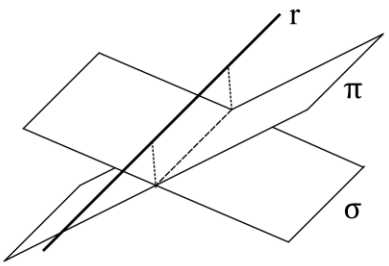
¿Pertenece el punto P de la recta r al plano σ? Sustituimos el punto P en la ecuación de σ:

$4-2\cdot(-2)+2\cdot 1 \neq -3$ No se cumple.

Así pues, la recta r es paralela al plano σ.

El gráfico cualitativo es:

(No suele pedirse, pues a algunas personas les cuesta dibujar bien.)



21.- Sea el plano $\pi \equiv x-2y+2z+3=0$. Calcula el plano o planos que distan 2 unidades del plano π.

Los planos buscados deben ser paralelos a π. Si dos planos se cortan, la distancia entre ellos es cero.

Y deben ser 2, uno 'encima' y otro 'debajo' del plano π.

Por ser paralelos al plano π sus ecuaciones son de la forma: $\pi_{\parallel} \equiv x-2y+2z+\mathrm{D}=0$.

Un punto cualquiera de estos planos será $\mathrm{P}(x_0, y_0, z_0)$ y cumplirá que: $x_0-2y_0+2z_0+\mathrm{D}=0$.

La distancia entre dos planos paralelos es igual a la distancia de un punto cualquiera de ellos al otro plano. Al ser paralelos, da igual qué punto del primer plano se escoja.

Así pues, si la distancia debe ser 2 unidades, tendremos:

$$\mathrm{d}(\pi_{\parallel}, \pi) = \mathrm{d}(\mathrm{P}, \pi) = \frac{|x_0-2y_0+2z_0+3|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}} \rightarrow 2 = \frac{|x_0-2y_0+2z_0+3|}{3} \Rightarrow |x_0-2y_0+2z_0+3| = 6$$

Pero como el punto P cumple que $x_0-2y_0+2z_0+\mathrm{D}=0$, tenemos: $x_0-2y_0+2z_0=-\mathrm{D}$

Y la ecuación que tenemos se transforma en:

$$|-\mathrm{D}+3|=6$$

Es decir: $-\mathrm{D}+3=\pm 6 \rightarrow \mathrm{D}=3\pm 6 \Rightarrow \mathrm{D}_1=9,\ \mathrm{D}_2=-3$

Los planos buscados son: $\pi_1 \equiv x-2y+2z+9=0$ y $\pi_2 \equiv x-2y+2z-3=0$

22.- Sean los planos $\pi_1 \equiv 2x-4y+z=4$, $\pi_2 \equiv 2z=3$ y sea el punto $\mathrm{P}(2,5,0)$.
Calcula la ecuación de la recta r que es paralela a los planos π_1 y π_2 y pasa por el punto P.

Los planos π_1 y π_2 no son paralelos, puesto que sus vectores normales no son proporcionales.

Por lo tanto, π_1 y π_2 se cortan en una recta.

La recta que buscamos es paralela a esa recta, pues así será paralela tanto a π_1 como a π_2.

La recta en la que se cortan π_1 y π_2 tiene como vector director:

$$\vec{\mathrm{v}} = \vec{\mathrm{n}}_1 \wedge \vec{\mathrm{n}}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (-8-0)\,\vec{i} - (4-0)\,\vec{j} + (0-0)\,\vec{k} = (-8,-4,0) \sim (2,1,0)$$

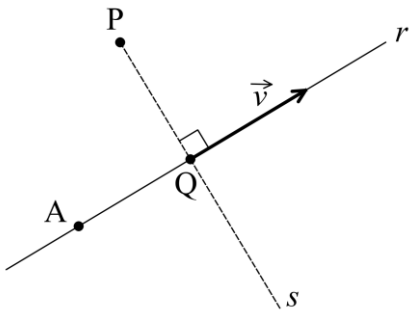
(El vector marca una dirección, por eso lo podemos 'simplificar').

La recta buscada pasa por: $\mathrm{P}(2,5,0)$ y su vector director es: $\vec{\mathrm{v}} = (2,1,0)$.

Sus ecuaciones paramétricas son: $\mathrm{r} \equiv \begin{cases} x = 2+2t \\ y = 5+t \\ z = 0 \end{cases}$ con $t \in \mathbb{R}$

23.- Sea la recta r que pasa por $A(2,-2,3)$ y tiene como vector director $\vec{v}=(3,1,-2)$. Y sea el punto $P(10,-4,0)$. Calcula la recta s que corta perpendicularmente a la recta r y pasa por el punto P.

La situación es la que aparece en este dibujo:



La recta r tiene como ecuaciones paramétricas:

$$r \equiv \begin{cases} x = 2+3t \\ y = -2+t \\ z = 3-2t \quad \text{con } t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

De modo que un punto cualquiera Q de ella es:

$$Q(2+3t,-2+t,3-2t)$$

Queremos encontrar el punto Q de r tal que el vector $\overrightarrow{QP}$ sea perpendicular a $\vec{v}$: $\overrightarrow{QP}\cdot\vec{v}=0$

El vector $\overrightarrow{QP}$ es:

$$\overrightarrow{QP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OQ}=(10,-4,0)-(2+3t,-2+t,3-2t)=(8-3t,-2-t,-3+2t)$$

Con lo que el producto escalar es:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{QP}\cdot\vec{v} &= 3\cdot(8-3t)+1\cdot(-2-t)+(-2)\cdot(-3+2t)= \\ &= 24-9t-2-t+6-4t= \\ &= 28-14t\end{aligned}$$

Si $\overrightarrow{QP}\cdot\vec{v}=0 \;\rightarrow\; 28-14t=0 \;\Rightarrow\; t=2$

El punto Q, donde se cortan las rectas r y s será:

$$Q(2+3t,-2+t,3-2t)\big|_{t=2}=(8,0,-1)$$

y el vector director de la recta s será:

$$\overrightarrow{QP}=(8-3t,-2-t,-3+2t)\big|_{t=2}=(2,-4,1)$$

La recta s que pasa por el punto P y tiene como vector director a $\overrightarrow{QP}$ será:

$$r \equiv \frac{x-10}{2}=\frac{y+4}{-4}=\frac{z}{1}$$

24.- Sean las rectas: $r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{a}$, $s \equiv \frac{x-2}{b} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{-4}$ con $a, b \in \mathbb{R}$.

Sabemos que existe un plano π perpendicular tanto a la recta r como a la recta s.

Calcula la posición relativa de las rectas r y s.

Si una recta es perpendicular a un plano, el vector director de la recta es el vector normal del plano.

El vector director de la recta r es: $\vec{v}_r = (1, -1, a)$ por lo que el plano π tendrá como vector normal:

$$\vec{n} = (1, -1, a)$$

El vector director de la recta s es: $\vec{v}_s = (b, 2, -4)$ por lo que el plano π tendrá como vector normal:

$$\vec{n} = (b, 2, -4)$$

Para que ambas cosas sean ciertas, debe cumplirse que:

$$\frac{1}{b} = \frac{-1}{2} = \frac{a}{-4} \rightarrow \begin{cases} \frac{1}{b} = \frac{-1}{2} \Rightarrow b = -2 \\ \frac{-1}{2} = \frac{a}{-4} \Rightarrow a = 2 \end{cases}$$

Así, la recta r tendrá como vector director: $\vec{v}_r = (1, -1, 2)$ y su ecuación será:

$$r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{2}$$

y la recta s tendrá como vector director: $\vec{v}_s = (-2, 2, -4) \sim (1, -1, 2)$ y su ecuación será:

$$s \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{2}$$

Por lo tanto, las rectas r y s tienen el mismo vector director y son paralelas o coincidentes.

La recta r pasa por el punto $P_r(1, 2, -1)$.

Si ese punto está contenido en la recta s, ambas rectas son coincidentes, en caso contrario, paralelas.

Veamos si el punto $P_r(1, 2, -1)$ está contenido en la recta s.

Sustituyéndolo en la ecuación continua de la recta s tenemos:

$$\frac{1-2}{1} = \frac{2-1}{-1} = \frac{(-1)-1}{2} \rightarrow -1 = -1 = -1$$

Que, al ser cierto, resulta que $P_r \in s$.

Como tienen el mismo vector director y un punto de r está en s, las rectas r y s son coincidentes.

25.- Sean el plano: $\pi \equiv 2x - y + z + 3 = 0$ y la recta: $\mathrm{r} \equiv \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z}{-1}$.

Calcula la ecuación de la recta s que es paralela a π, corta a r y pasa por el punto $\mathrm{A}(0,2,1)$.

De la recta s ya conocemos el punto $\mathrm{A}(0,2,1)$. Necesitamos otro punto de ella o un vector director.

Por ser una recta paralela al plano π, sabemos que $\vec{v}_s$ es perpendicular a $\vec{n} = (2,-1,1)$.

Se deduce que $\vec{n} \cdot \vec{v}_s = 0$.

Es una condición que se debe cumplir, pero que no permite encontrar el vector $\vec{v}_s$.

La recta s corta a la recta r, eso quiere decir que pasa por un punto genérico de r.

Encontremos ese punto genérico de r.

De la ecuación continua de r tenemos que: $\mathrm{P}(1,-1,0)$, $\vec{v}_r = (2,1,-1)$

Así que un punto genérico de r es:

$$\mathrm{P}_r\,(x,y,z) = (1,-1,0) + t\,(2,1,-1) = (1+2t\,,-1+t\,,-t)$$

Como la recta s pasa por $\mathrm{A}(0,2,1)$ y por $\mathrm{P}_r\,(1+2t\,,-1+t\,,-t)$ un vector director de s es:

$$\vec{v}_s = \overrightarrow{\mathrm{AP}_r} = \overrightarrow{\mathrm{OP}_r} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = (1+2t\,,-1+t\,,-t) - (0,2,1) = (1+2t\,,-3+t\,,-1-t)$$

Ahora ya podemos usar la condición $\vec{n} \cdot \vec{v}_s = 0$:

$$\begin{aligned}\vec{n} \cdot \vec{v}_s &= (2,-1,1) \cdot (1+2t\,,-3+t\,,-1-t) = \\ &= 2 \cdot (1+2t) + (-1) \cdot (-3+t) + 1 \cdot (-1-t) = \\ &= 2 + 4t + 3 - t - 1 - t = \\ &= 4 + 2t\end{aligned}$$

Y si $\vec{n} \cdot \vec{v}_s = 0 \;\rightarrow\; 4 + 2t = 0 \;\Rightarrow\; t = -2$

Por lo tanto, el vector director de la recta s es:

$$\vec{v}_s = (1+2t\,,-3+t\,,-1-t)\big|_{t=-2} = (-3,-5,1) \sim (3,5,-1)$$

Como la recta s pasa por $\mathrm{A}(0,2,1)$ y su vector director es $\vec{v}_s = (3,5,-1)$, su ecuación continua será:

$$\mathrm{s} \equiv \frac{x}{3} = \frac{y-2}{5} = \frac{z-1}{-1}$$

y sus ecuaciones paramétricas serán:

$$\mathrm{s} \equiv \begin{cases} x = 3t \\ y = 2 + 5t \\ z = 1 - t \quad \text{con } t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

26.- Sean los planos en el espacio: $\pi \equiv x+5y-14=0$, $\sigma \equiv 2x-3y+11=0$, $\tau \equiv 3x+2y-16=0$.
Sean la recta q: intersección π y σ, la recta r: intersección de π y τ, y la recta s: intersección de σ y τ.

Calcula las posiciones relativas de las rectas q, r y s.

La recta q es la solución del sistema que forman π y σ: $\begin{cases} x+5y-14=0 \\ 2x-3y+11=0 \end{cases}$

$\begin{cases} x+5y-14=0 \\ 2x-3y+11=0 \end{cases} \begin{matrix} \rightarrow \\ \rightarrow \end{matrix} \begin{matrix} 2x+10y-28=0 \\ 2x-\ 3y+11=0 \end{matrix}$ Restando: $13y-39=0$, $y=3$

Sustituyendo en la 1ª ecuación: $x+15-14=0$, $x=-1$

Como no sabemos nada de la variable *z*, podrá tomar cualquier valor.

La forma paramétrica de la recta q es: $q \equiv (-1,3,\lambda)$ con $\lambda \in \mathbb{R}$

La recta r es la solución del sistema que forman π y τ: $\begin{cases} x+5y-14=0 \\ 3x+2y-16=0 \end{cases}$

$\begin{cases} x+5y-14=0 \\ 3x+2y-16=0 \end{cases} \begin{matrix} \rightarrow \\ \rightarrow \end{matrix} \begin{matrix} 3x+15y-42=0 \\ 3x+\ 2y-16=0 \end{matrix}$ Restando: $13y-26=0$, $y=2$

Sustituyendo en la 1ª ecuación: $x+10-14=0$, $x=4$

Como no sabemos nada de la variable *z*, podrá tomar cualquier valor.

La forma paramétrica de la recta r es: $r \equiv (4,2,\alpha)$ con $\alpha \in \mathbb{R}$

La recta s es la solución del sistema que forman σ y τ: $\begin{cases} 2x-3y+11=0 \\ 3x+2y-16=0 \end{cases}$

$\begin{cases} 2x-3y+11=0 \\ 3x+2y-16=0 \end{cases} \begin{matrix} \rightarrow \\ \rightarrow \end{matrix} \begin{matrix} 6x-9y+33=0 \\ 6x+4y-32=0 \end{matrix}$ Restando: $-13y+65=0$, $y=5$

Sustituyendo en la 1ª ecuación: $2x-15+11=0$, $x=2$

Como no sabemos nada de la variable *z*, podrá tomar cualquier valor.

La forma paramétrica de la recta s es: $s \equiv (2,5,\beta)$ con $\beta \in \mathbb{R}$

Las tres rectas tienen como vector director a: $\vec{v} = (0,0,1)$ [Es decir, son paralelas al eje OZ.]

Por lo tanto las rectas q, r y s son paralelas o coincidentes.

Pero: La recta q pasa por el punto $P_q(-1,3,0)$ que no está ni en la recta r ni en la recta s.

La recta r pasa por el punto $P_r(4,2,0)$ que no está ni en la recta q ni en la recta s.

La recta s pasa por el punto $P_s(2,5,0)$ que no está ni en la recta q ni en la recta r.

Se trata de tres rectas paralelas.

También se puede decir que el sistema que forman los planos π, σ y τ es un sistema incompatible en el que los planos se cortan dos a dos (formando una 'tienda de campaña').

27.- Sean el plano: $\pi \equiv x + y + a\,z = 2$ donde $a \in \mathbb{R}$ y la recta: $\mathrm{r} \equiv \dfrac{x-1}{2} = y = z$.

Calcula, para el caso en el que π y r no tengan ningún punto en común, la ecuación del plano σ que es perpendicular a π y contiene a la recta r.

El plano π tiene como vector normal: $\vec{\mathrm{n}} = (1,1,a)$.

La recta r es: $\mathrm{r} \equiv \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-0}{1} = \dfrac{z-0}{1}$, así que pasa por $\mathrm{P}(1,0,0)$ y su vector director es: $\vec{\mathrm{v}} = (2,1,1)$.

Si el plano π y la recta r no tienen ningún punto en común, es que son paralelos.

En ese caso se cumplirá que: $\vec{\mathrm{n}} \cdot \vec{\mathrm{v}} = 0$.

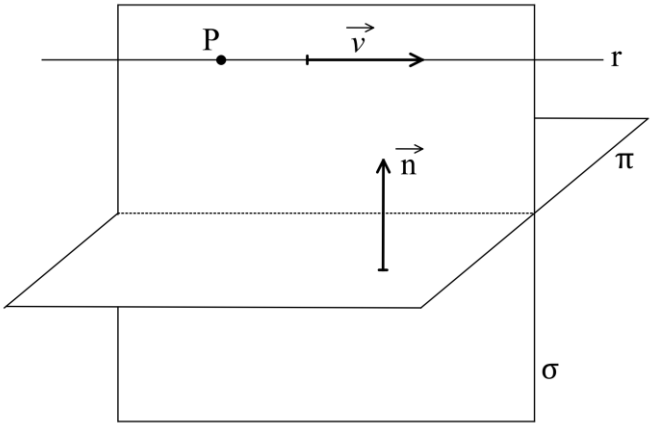
Tendremos:

$$\vec{\mathrm{n}} \cdot \vec{\mathrm{v}} = (1,1,a) \cdot (2,1,1) = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + a \cdot 1 = 3 + a$$

y si $\vec{\mathrm{n}} \cdot \vec{\mathrm{v}} = 0 \;\rightarrow\; 3 + a = 0 \;\Rightarrow\; a = -3$

Y el vector normal al plano π es: $\vec{\mathrm{n}} = (1,1,-3)$

La situación que tenemos es la del dibujo:



El plano σ queda definido por el punto $\mathrm{P}(1,0,0)$ y los vectores $\vec{\mathrm{v}} = (2,1,1)$, $\vec{\mathrm{n}} = (1,1,-3)$.

Ejercicios de operaciones con vectores

Sean los vectores: $\vec{a}=(-1,3,2)$, $\vec{b}=(1,1,-1)$, $\vec{c}=(2,-1,2)$. Calcula:

1.- $|\vec{a}|, |\vec{b}|, |\vec{a}+\vec{b}|, |\vec{a}-\vec{b}|$

$$|\vec{a}|=\sqrt{(-1)^2+3^2+2^2}=\sqrt{1+9+4}=\sqrt{14}$$
$$|\vec{b}|=\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}=\sqrt{1+1+1}=\sqrt{3}$$
$$|\vec{a}+\vec{b}|=\ldots\left\{\vec{a}+\vec{b}=(-1,3,2)+(1,1,-1)=(0,4,1)\right\}\ldots=\sqrt{0^2+4^2+1^2}=\sqrt{0+16+1}=\sqrt{17}$$
$$|\vec{a}-\vec{b}|=\ldots\left\{\vec{a}-\vec{b}=(-1,3,2)-(1,1,-1)=(-2,2,3)\right\}\ldots=\sqrt{(-2)^2+2^2+3^2}=\sqrt{4+4+9}=\sqrt{17}$$

Comentario: Los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ definen un paralelogramo de lados $|\vec{a}|$ y $|\vec{b}|$. Las diagonales de ese paralelogramo miden $|\vec{a}+\vec{b}|$ y $|\vec{a}-\vec{b}|$. Puesto que esas diagonales son iguales se trata de un cuadrado o de un rectángulo. Como $|\vec{a}|\neq|\vec{b}|$ se trata de un rectángulo.

2.- $2\vec{a}$, $-3\vec{b}$, $3\vec{a}-2\vec{b}$

$$2\vec{a}=2(-1,3,2)=(-2,6,4)$$
$$-3\vec{b}=-3(1,1,-1)=(-3,-3,3)$$
$$3\vec{a}-2\vec{b}=3(-1,3,2)-2(1,1,-1)=(-3,9,6)-(2,2,-2)=(-5,7,8)$$

Comentario: $2\vec{a}$ mide $|2\vec{a}|=2|\vec{a}|$ es decir, el doble que $\vec{a}$. $-3\vec{b}$ mide $|-3\vec{b}|=|-3|\cdot|\vec{b}|=3|\vec{b}|$ que es el triple que $\vec{b}$. El vector $3\vec{a}-2\vec{b}$ es una combinación lineal de $\vec{a}$ y $\vec{b}$ por lo que está en el mismo plano que ellos (se dice que son coplanarios).

3.- $\vec{a}\cdot\vec{b}$, $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{a}$, $(\vec{a}-\vec{b})\cdot\vec{b}$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=(-1,3,2)\cdot(1,1,-1)=(-1)\cdot1+3\cdot1+2\cdot(-1)=-1+3-2=0$$
$$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{a}=(0,4,1)\cdot(-1,3,2)=0\cdot(-1)+4\cdot3+1\cdot2=0+12+2=14$$
$$(\vec{a}-\vec{b})\cdot\vec{b}=(-2,2,3)\cdot(1,1,-1)=(-2)\cdot1+2\cdot1+3\cdot(-1)=-2+2-3=-3$$

Comentario: Como $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ tenemos que $\vec{a}\perp\vec{b}$ y se confirma que $\vec{a}$ y $\vec{b}$ definen un rectángulo.

4.- El ángulo α que forman $(\vec{a}+\vec{b})$ y $\vec{a}$, el ángulo β que forman $(\vec{a}-\vec{b})$ y $\vec{b}$

$$\cos\alpha=\frac{(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{a}}{|\vec{a}+\vec{b}|\cdot|\vec{a}|}=\frac{14}{\sqrt{17}\sqrt{14}}\simeq0.9075 \quad\rightarrow\quad \alpha=\arccos 0.9075\simeq24.84^{\circ}$$
$$\cos\beta=\frac{(\vec{a}-\vec{b})\cdot\vec{b}}{|\vec{a}-\vec{b}|\cdot|\vec{b}|}=\frac{-3}{\sqrt{17}\sqrt{3}}\simeq-0.4201 \quad\rightarrow\quad \beta=\arccos -0.4201\simeq114.84^{\circ}$$

Comentario: Dos vectores siempre forman dos ángulos. Estos ángulos suman 360º. Cuando se habla del ángulo que forman dos vectores siempre se refiere al más pequeño de los dos (menor de 180º).

$$\cos 24.84^{\circ}=\cos(360^{\circ}-24.84^{\circ})=\cos 335.16^{\circ}=0.9075$$
$$\cos 114.84^{\circ}=\cos(360^{\circ}-114.84^{\circ})=\cos 245.16^{\circ}=-0.4201$$

5.- La proyección de $\vec{a}$ sobre $\vec{c}$, la proyección de $\vec{c}$ sobre $\vec{b}$

$$P_{\vec{a}\to\vec{c}} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{c}}{|\vec{c}|} = \frac{(-1,3,2)\cdot(2,-1,2)}{|(2,-1,2)|} = \frac{(-1)\cdot 2+3\cdot(-1)+2\cdot 2}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}} = \frac{-2-3+4}{\sqrt{9}} = -\frac{1}{3}$$

$$P_{\vec{c}\to\vec{b}} = \frac{\vec{c}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{(2,-1,2)\cdot(1,1,-1)}{|(1,1,-1)|} = \frac{2\cdot 1+(-1)\cdot 1+2\cdot(-1)}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}} = \frac{2-1-2}{\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Comentario: Si la proyección de un vector sobre otro es negativa, el ángulo que forman es obtuso.

6.- $\vec{a}\wedge\vec{b}$, $(\vec{a}+\vec{b})\wedge\vec{b}$, el área del triángulo definido por los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

$$\vec{a}\wedge\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-3-2)\vec{i}-(1-2)\vec{j}+(-1-3)\vec{k} = -5\vec{i}+\vec{j}-4\vec{k} \sim (-5,1,-4)$$

$$(\vec{a}+\vec{b})\wedge\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} = (3-8)\vec{i}-(-1-0)\vec{j}+(-4-0)\vec{k} = -5\vec{i}+\vec{j}-4\vec{k} \sim (-5,1,-4)$$

$$S_{\Delta\vec{a},\vec{b}} = \frac{1}{2}\left|\vec{a}\wedge\vec{b}\right| = \frac{1}{2}|(-5,1,-4)| = \frac{1}{2}\sqrt{(-5)^2+1^2+(-4)^2} = \frac{\sqrt{42}}{2}u^2$$

Comentario: Como $(\vec{a}+\vec{b})\wedge\vec{b} = \vec{a}\wedge\vec{b}+\vec{b}\wedge\vec{b} = \vec{a}\wedge\vec{b}+(0,0,0) = \vec{a}\wedge\vec{b}$ los dos primeros son iguales. Para el área del triángulo hemos usado que es la mitad del área del paralelogramo.

7.- a) El punto medio M entre $A(3,-1,4)$ y $B(-1,5,2)$.
b) Calcula B, si el punto medio entre $A(-2,3,1)$ y B es $M(1,-1,3)$.
c) Calcula el punto central del paralelogramo ABCD con $A(2,0,-2)$, $B(3,1,4)$, $C(7,-1,5)$.

Los vectores de posición de los puntos A , B, M son: $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ y $\overrightarrow{OM}$.

a) $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\left[\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right] \;\rightarrow\; \overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\left[(3,-1,4)+(-1,5,2)\right] = \frac{1}{2}\left[(2,4,6)\right] = (1,2,3)$

b) $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\left[\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right] \;\rightarrow\; 2\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB} \;\Rightarrow\; \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA}$

$$\overrightarrow{OB} = 2(1,-1,3)-(-2,3,1) = (2,-2,6)-(-2,3,1) = (4,-5,5)$$

c) Las diagonales de un paralelogramo se cortan en el punto medio de cada diagonal. Ese punto es el punto central del paralelogramo.
Como una diagonal del paralelogramo ABCD es el segmento $\overline{AC}$, el punto central buscado es:

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\left[\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}\right] \;\rightarrow\; \overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\left[(2,0,-2)+(7,-1,5)\right] = \frac{1}{2}\left[(9,-1,3)\right] = \left(\frac{9}{2},-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$$

Comentario: Cuando se quiere calcular el punto A' simétrico del punto A, se empieza calculando el punto M (punto medio entre A y A'). Con A y M se calcula A' con la fórmula del apartado (b).

En (c) el vector $\overrightarrow{BC} = (7-3,-1-1,5-4) = (4,-2,1)$ y como $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = (4,-2,1)$, el punto D será:

$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD} = (2,0,-2) + (4,-2,1) = (6,-2,-1) \quad \rightarrow \quad D(6,-2,-1)$

8.- $[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]$, la altura del paralelepípedo de lados $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ con $\vec{a},\vec{b}$ en la base

$$[\vec{a},\vec{b},\vec{c}] = \vec{a}\cdot(\vec{b}\wedge\vec{c}) = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -2-6-2-(4+6-1) = -10-9 = -19$$

El paralelepípedo de lados $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ tiene como volumen: $V = \left|\vec{a}\cdot(\vec{b}\wedge\vec{c})\right| = \left|[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]\right| = |-19| = 19\ u^3$

El área de la base es: $S_{base} = |\vec{a}\wedge\vec{b}| = |(-5,1,-4)| = \sqrt{(-5)^2+1^2+(-4)^2} = \sqrt{42}\ u^2$

así que la altura del paralelepípedo es: $h = \dfrac{V}{S_{base}} = \dfrac{19}{\sqrt{42}} = \dfrac{19\sqrt{42}}{42}\ u$

Comentario: El volumen del paralelepípedo se calcula con el producto mixto de sus aristas. Este producto se puede calcular poniendo las aristas en cualquier orden. (Un orden distinto podría cambiar el signo final, pero el volumen es el valor absoluto de ese producto mixto).

9.- El volumen del tetraedro definido por los vectores $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$

Ese tetraedro tiene como volumen la 6ª parte del paralelepípedo que definen los vectores $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$.

Por lo tanto: $V_{tetraedro} = \dfrac{1}{6}\cdot\left|\vec{a}\cdot(\vec{b}\wedge\vec{c})\right| = \dfrac{1}{6}\cdot\left|[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]\right| = \dfrac{1}{6}\cdot|-19| = \dfrac{19}{6}\ u^3$

Comentario: Al igual que en el cálculo del volumen del paralelepípedo, el orden en que se pongan los vectores en el cálculo del producto mixto es indiferente.

10.- ¿Son coplanarios los vectores $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{a}+\vec{c}$, $\vec{c}-\vec{b}$?

Si son coplanarios, el volumen del paralelepípedo que forman es cero: $\left[\vec{a}+\vec{b},\vec{a}+\vec{c},\vec{c}-\vec{b}\right] = 0$

$\vec{a}+\vec{b} = (-1,3,2)+(1,1,-1) = (0,4,1)$

$\vec{a}+\vec{c} = (-1,3,2)+(2,-1,2) = (1,2,4)$

$\vec{c}-\vec{b} = (2,-1,2)-(1,1,-1) = (1,-2,3)$

$$\rightarrow \left[\vec{a}+\vec{b},\vec{a}+\vec{c},\vec{c}-\vec{b}\right] = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 0+16-2-(2+12+0) = 14-14 = 0$$

Por lo tanto, esos tres vectores son coplanarios.

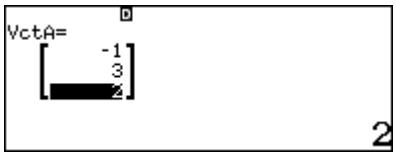
Comentario: Si restamos los dos primeros vectores, tenemos: $(\vec{a}+\vec{b})-(\vec{a}+\vec{c}) = \vec{a}+\vec{b}-\vec{a}-\vec{c} = \vec{b}-\vec{c}$ por lo que el tercer vector es una combinación lineal de los dos primeros.

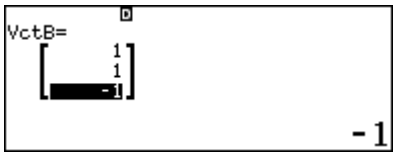
Por eso los tres vectores son coplanarios.

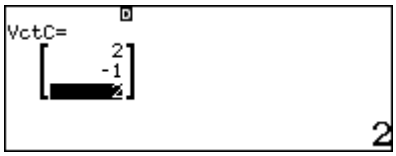
Ejercicios de operaciones con vectores (usando la calculadora)

Sean los vectores: $\vec{a}=(-1,3,2)$, $\vec{b}=(1,1,-1)$, $\vec{c}=(2,-1,2)$.

En la calculadora pasamos a [MENU] [5] e introducimos los vectores (con dimensión 3):



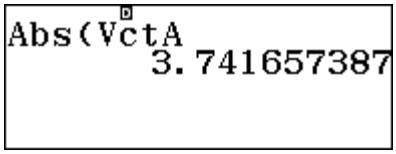




Para introducir $\vec{b}$ y $\vec{c}$ pasamos a [OPTN] y usamos 'Definir vector'

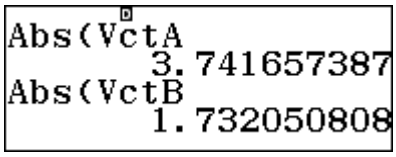
1.- $|\vec{a}|, |\vec{b}|, |\vec{a}+\vec{b}|, |\vec{a}-\vec{b}|$

[SHIFT] [(]
[OPTN] [3] [=]



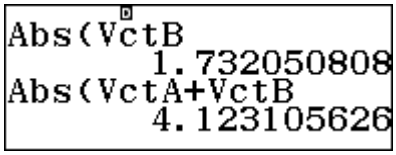
$|\vec{a}|=\sqrt{14}=3.741657387$

[SHIFT] [(]
[OPTN] [4] [=]



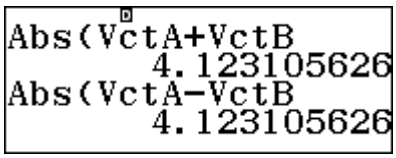
$|\vec{b}|=\sqrt{3}=1.732050808$

[SHIFT] [(]
[OPTN] [3] [+] [OPTN] [4] [=]



$|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{17}=4.123105626$

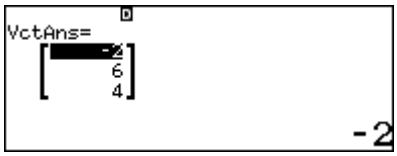
[SHIFT] [(]
[OPTN] [3] [−] [OPTN] [4] [=]



$|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{17}=4.123105626$

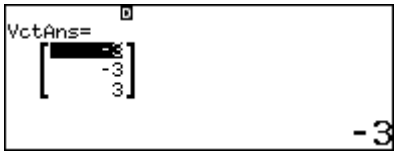
2.- $2\vec{a}$, $-3\vec{b}$, $3\vec{a}-2\vec{b}$

[AC] [2] [OPTN] [3] [=]



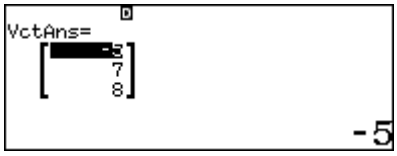
$2\vec{a}$

[(−)] [3] [OPTN] [4] [=]



$-3\vec{b}$

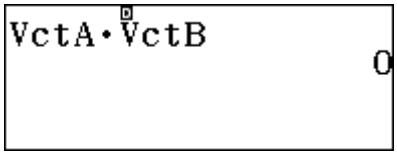
[3] [OPTN] [3] [−] [2] [OPTN] [4] [=]



$3\vec{a}-2\vec{b}$

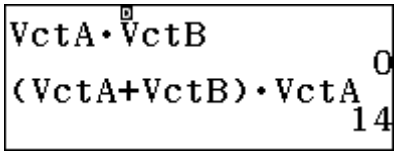
3.- $\vec{a}\cdot\vec{b}$, $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{a}$, $(\vec{a}-\vec{b})\cdot\vec{b}$

AC OPTN 3
▼ OPTN ▼ 2
OPTN 4 =



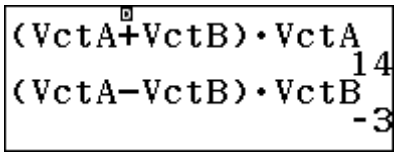
$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

(OPTN 3 + OPTN 4)
OPTN ▼ 2 OPTN 3 =



$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{a}=14$

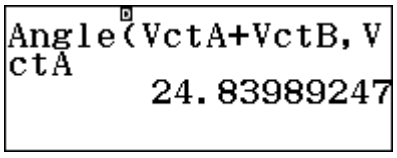
(OPTN 3 − OPTN 4)
OPTN ▼ 2 OPTN 4 =



$(\vec{a}-\vec{b})\cdot\vec{b}=-3$

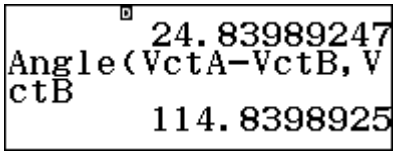
4.- El ángulo α que forman $(\vec{a}+\vec{b})$ y $\vec{a}$, el ángulo β que forman $(\vec{a}-\vec{b})$ y $\vec{b}$

AC OPTN ▼ 3
OPTN 3 + OPTN 4
SHIFT) OPTN 3 =



$\alpha \simeq 24.84^{\circ}$

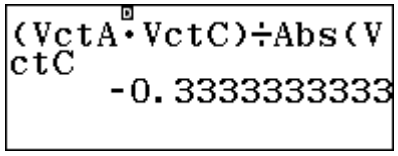
OPTN ▼ 3
OPTN 3 − OPTN 4 SHIFT
) OPTN 4 =



$\beta \simeq 114.84^{\circ}$

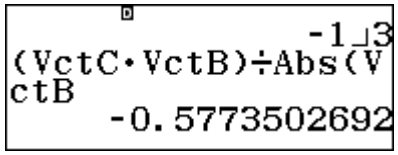
5.- La proyección de $\vec{a}$ sobre $\vec{c}$, la proyección de $\vec{c}$ sobre $\vec{b}$

(OPTN 3 OPTN ▼ 2
OPTN 5) ÷
SHIFT (OPTN 5 = S⇔D S⇔D



$P_{\vec{a}\to\vec{c}} = -\frac{1}{3} \simeq -0.3333333333$

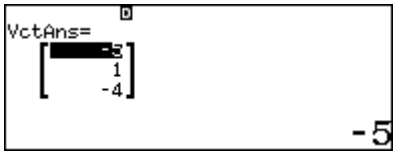
(OPTN 5 OPTN ▼ 2
OPTN 4) ÷
SHIFT (OPTN 4 =



$P_{\vec{c}\to\vec{b}} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \simeq -0.5773502692$

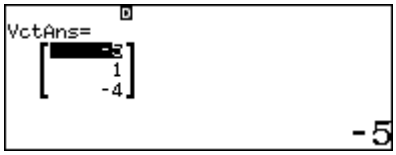
6.- $\vec{a}\wedge\vec{b}$, $(\vec{a}+\vec{b})\wedge\vec{b}$, el área del triángulo definido por los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

AC
OPTN 3 × OPTN 4 =



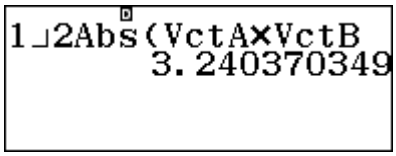
$\vec{a}\wedge\vec{b}=(-5,1,-4)$

(OPTN 3 + OPTN 4)
× OPTN 4 =



$(\vec{a}+\vec{b})\wedge\vec{b}=(-5,1,-4)$

AC 1 2 SHIFT (
OPTN 3 × OPTN 4 =

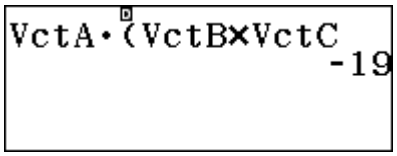


$S_{\Delta\vec{a},\vec{b}}=\frac{1}{2}\left|\vec{a}\wedge\vec{b}\right|=$

$=\sqrt{42}/2\simeq 3.240370349\,u^2$

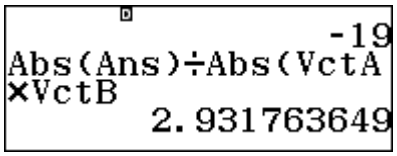
8.- $[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]$, la altura del paralelepípedo de lados $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ con $\vec{a},\vec{b}$ en la base

AC OPTN 3 OPTN ▼ 2
(OPTN 4 × OPTN 5
=



$[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]=\vec{a}\cdot(\vec{b}\wedge\vec{c})=-19$

SHIFT (Ans) ÷
SHIFT (OPTN 3 × OPTN 4
=

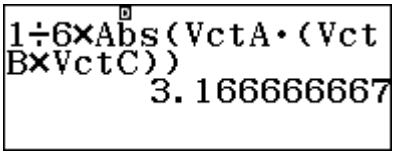


$h=\frac{\left|\vec{a}\cdot(\vec{b}\wedge\vec{c})\right|}{|\vec{a}\wedge\vec{b}|}=\frac{19\sqrt{42}}{42}\,u\simeq$

$\simeq 2.931763649$

9.- El volumen del tetraedro definido por los vectores $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$

AC 1 ÷ 6 ×
SHIFT (OPTN 3 OPTN
▼ 2 (OPTN 4 ×
OPTN 5)) =

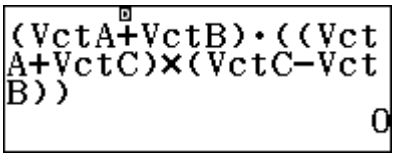


$V_{\text{tetraedro}}=\frac{1}{6}\cdot\left|\vec{a}\cdot(\vec{b}\wedge\vec{c})\right|=$

$=\frac{19}{6}\,u^3\simeq 3.166666667$

10.- ¿Son coplanarios los vectores $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{a}+\vec{c}$, $\vec{c}-\vec{b}$?

AC
(OPTN 3 + OPTN 4)
OPTN ▼ 2
((OPTN 3 + OPTN 5)
× (OPTN 5 − OPTN 4
)) =



$\left[\vec{a}+\vec{b},\vec{a}+\vec{c},\vec{c}-\vec{b}\right]=$

$=(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{c})\wedge(\vec{c}-\vec{b})=0$

los vectores son coplanarios

Geometría en el espacio

Puntos, vectores, rectas y planos

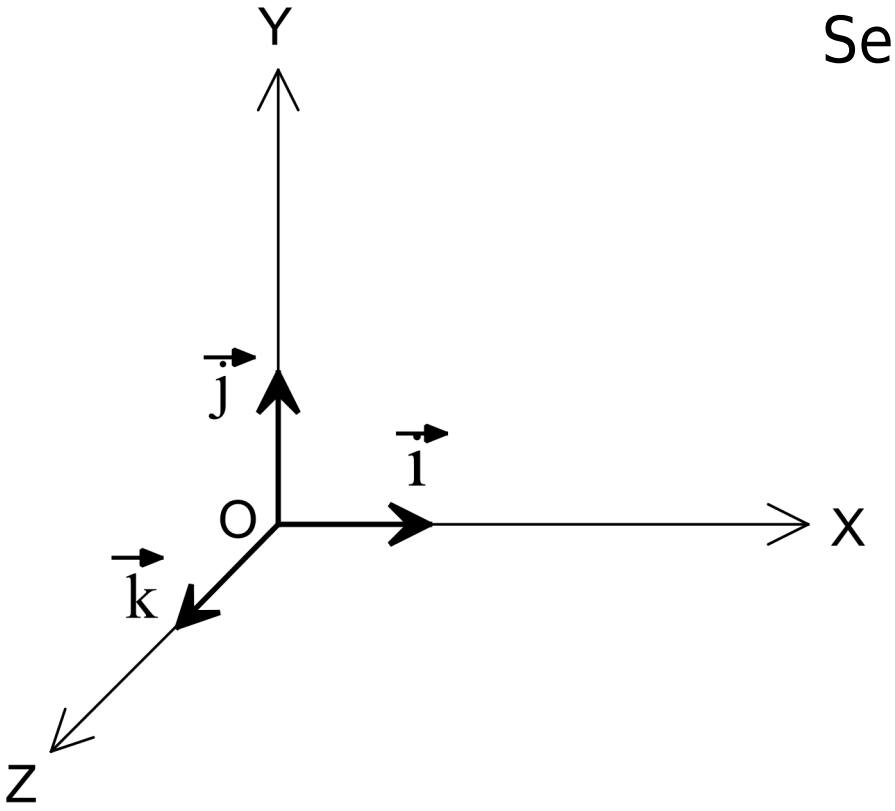
Matemáticas II

JL ~ 2020

ÍNDICE

3. El espacio tridimensional
4. Puntos en 3D. Vector de posición
5. ¿Qué es un vector?
6. Módulo de un vector
7. Producto de un número por un vector
8. Vector unitario
9. Un vector es un transportador
10. La regla del paralelogramo
11. Vector que une dos puntos
12. Las diagonales de un paralelogramo
13. Punto medio entre dos puntos
14. Dividir un segmento en partes
15. Punto simétrico a otro
16. ¿Están 3 puntos alineados?
17. El 4º vértice de un paralelogramo
18. Dados 4 puntos, ¿son coplanarios?
19. ¿Forman 3 vectores una base?
20. Producto escalar de dos vectores
21. Propiedades del producto escalar
22. Ángulo entre dos vectores
23. Proyección de un vector sobre otro
24. Producto vectorial de dos vectores
25. Cálculo del producto vectorial
26. Propiedades del producto vectorial
27. Área de un paralelogramo
28. Relación producto escalar − vectorial
29. Producto mixto (triple) de vectores
30. Volumen de un paralelepípedo
31. Volumen del tetraedro
32. La recta en el espacio
33. Ecuación continua de la recta
34. Recta que pasa por dos puntos
35. ¿Pertenece un punto a una recta?
36. Distancia de un punto a una recta
37. Posiciones relativas de dos rectas
38. Distancia entre rectas paralelas
39. Ángulo de dos rectas
40. Recta perpendicular por un punto
41. Punto simétrico respecto a una recta
42. Intersección de dos rectas
43. Distancia entre rectas que se cruzan
44. El plano en el espacio
45. Ecuación general del plano
46. Plano que pasa por tres puntos
47. ¿Pertenece un punto a un plano?
48. Encontrar un punto de un plano
49. Ecuación canónica del plano
50. Distancia de un punto a un plano
51. Posiciones relativas de dos planos
52. La recta como intersección de planos
53. ¿Qué planos definen una recta?
54. Distancia entre planos paralelos
55. Ángulo entre dos planos
56. Posiciones relativas recta − plano
57. Intersección entre recta y plano
58. Ángulo entre recta y plano
59. Recta perpendicular a un plano
60. Punto simétrico respecto a un plano
61. Haz de planos
62. Posiciones relativas de tres planos

El espacio tridimensional



Se elige como sistema de referencia:

O es el origen de coordenadas
Ejes X e Y en el plano de escritura
Eje Z saliendo de ese plano

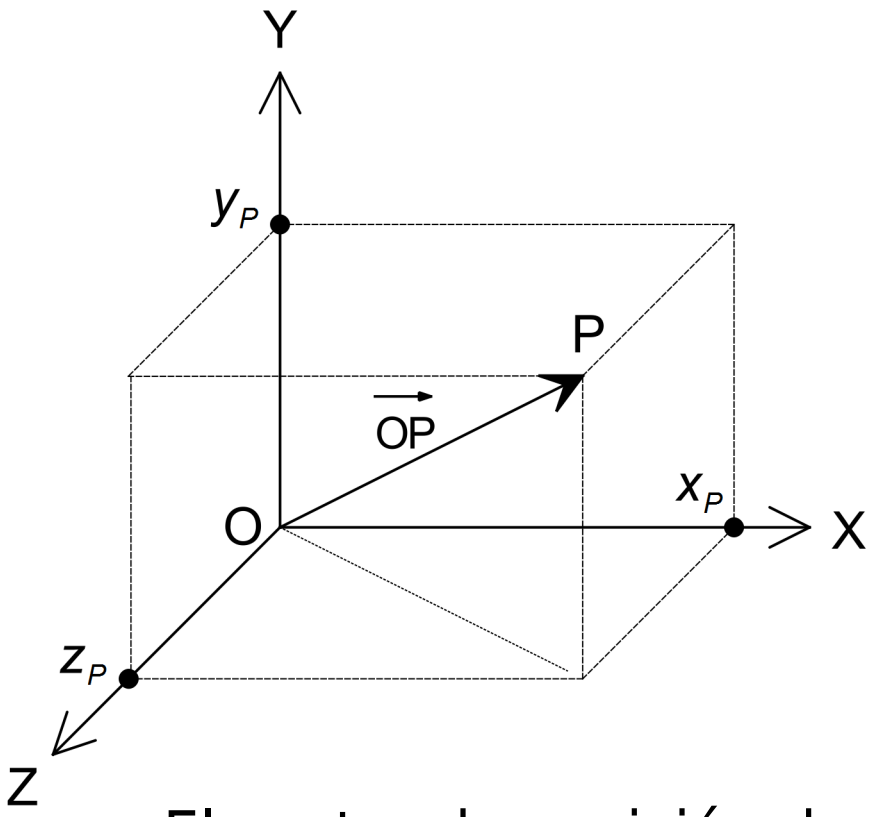
$\vec{i}$: Vector unitario del eje OX
$\vec{i}=(1,0,0)$

$\vec{j}$: Vector unitario del eje OY
$\vec{j}=(0,1,0)$

$\vec{k}$: Vector unitario del eje OZ
$\vec{k}=(0,0,1)$

Al espacio tridimensional también se le llama $\mathbb{R}^3$.

Puntos en 3D. Vector de posición



Cada punto *P* del espacio está definido por sus coordenadas:

$$P(x_p, y_p, z_p)$$

El vector de posición de un punto *P* del espacio es el que va desde el origen *O* hasta *P*.

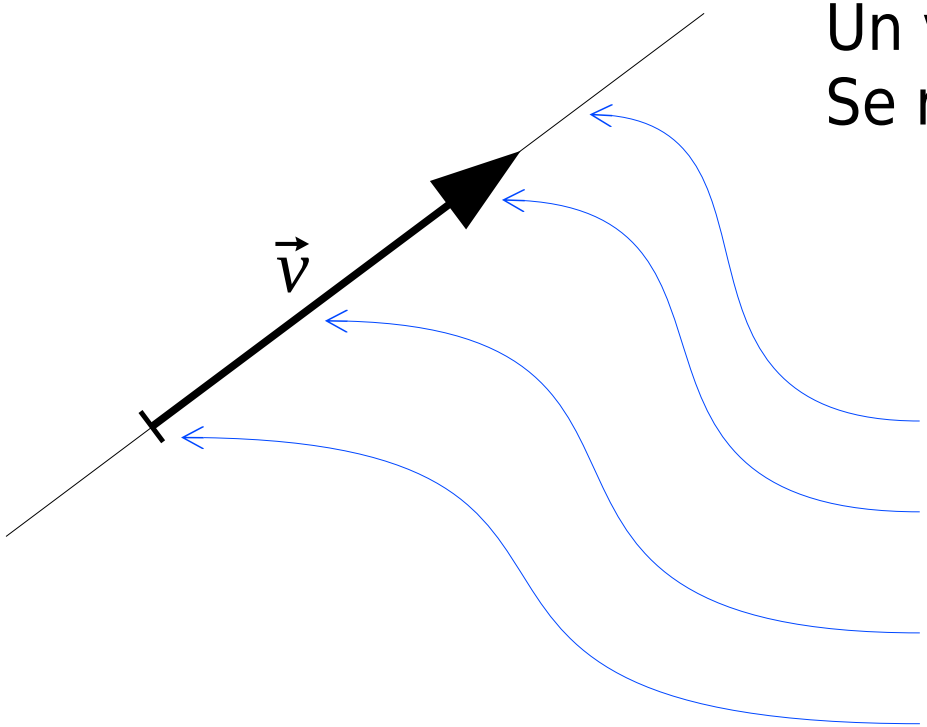
El vector de posición de *P* es:

$$\overrightarrow{OP} = (x_p, y_p, z_p)$$

También se puede escribir:

$$\overrightarrow{OP} = x_p\,\vec{i} + y_p\,\vec{j} + z_p\,\vec{k}$$

¿Qué es un vector?



Un vector es una magnitud dirigida.
Se representa con una flecha.

Dirección: La línea de apoyo

Sentido: Lo indica la flecha

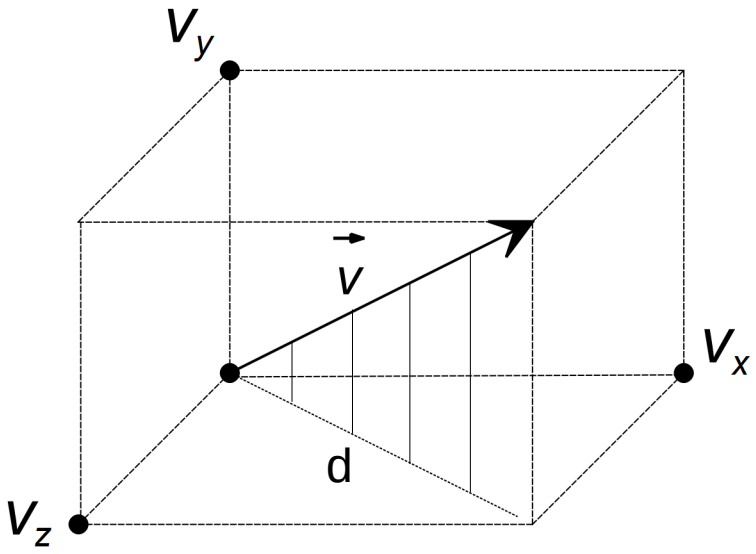
Módulo: Lo indica su longitud

Punto de aplicación: Su inicio

Las expresiones que sean vectores llevan una flecha arriba: $\vec{v}$

El módulo de un vector se representa entre barras: $|\vec{v}|$

Módulo de un vector



Un vector en el espacio se puede dibujar en una caja. Las dimensiones de la caja son las componentes del vector:

$$\vec{v}=(v_x, v_y, v_z)$$

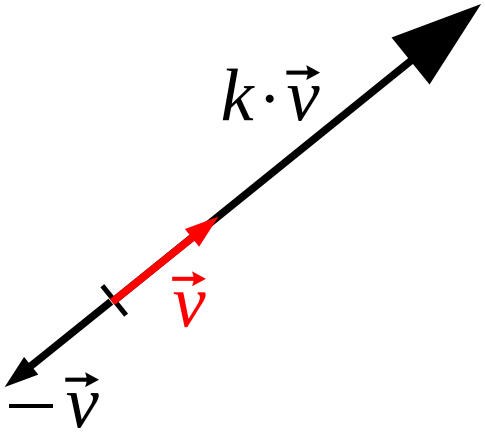
El módulo de $\vec{v}$ es su longitud: $|\vec{v}|$

Aplicando Pitágoras en la base: $d^2=v_x^2+v_z^2$

Pitágoras en el triángulo rayado: $|\vec{v}|^2=d^2+v_y^2=v_x^2+v_y^2+v_z^2$

Por lo tanto: $|\vec{v}|=\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}$

Producto de un número por un vector



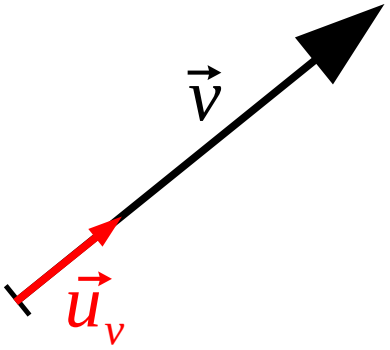
Si multiplicamos un vector por k:

- no cambia su dirección
- no cambia su sentido si k es positivo
- cambia su sentido si k es negativo
- su módulo cambia según el valor de k

Si $\vec{v}=(v_x,v_y,v_z)$ entonces: $k\cdot\vec{v}=(k\cdot v_x,k\cdot v_y,k\cdot v_z)$

$$|k\cdot\vec{v}|=\sqrt{(k\cdot v_x)^2+(k\cdot v_y)^2+(k\cdot v_z)^2}=|k|\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}=|k|\cdot|\vec{v}|$$

Vector unitario



El vector $\vec{v}$ mide $|\vec{v}|$

El vector $\vec{u}_v$ mide 1

$\vec{u}_v$ tiene igual dirección y sentido que $\vec{v}$

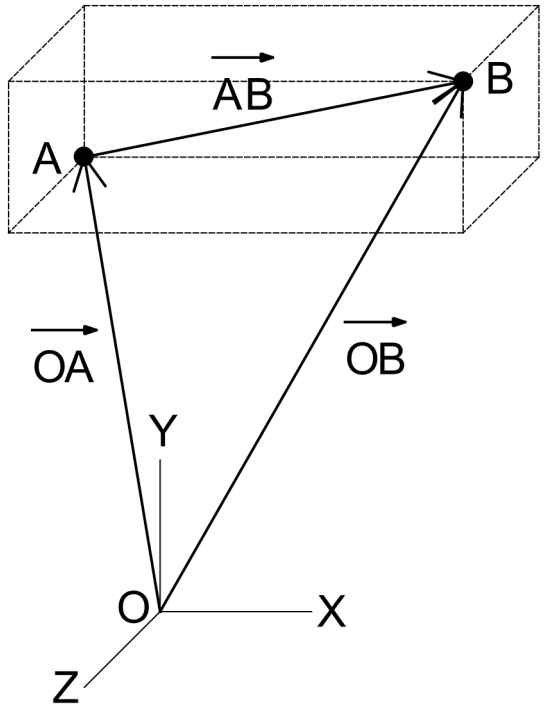
$\vec{u}_v$ Es el vector unitario (o versor) asociado al vector $\vec{v}$

Se cumple que: $\vec{v}=|\vec{v}|\cdot\vec{u}_v$

Por lo que: $\vec{u}_v=\dfrac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$

$\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k}$
son los vectores unitarios en las direcciones OX, OY, OZ

Un vector es un transportador



El vector $\overrightarrow{AB}$ lleva el punto *A* hasta el *B*

Esto define la suma de vectores:

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}$$

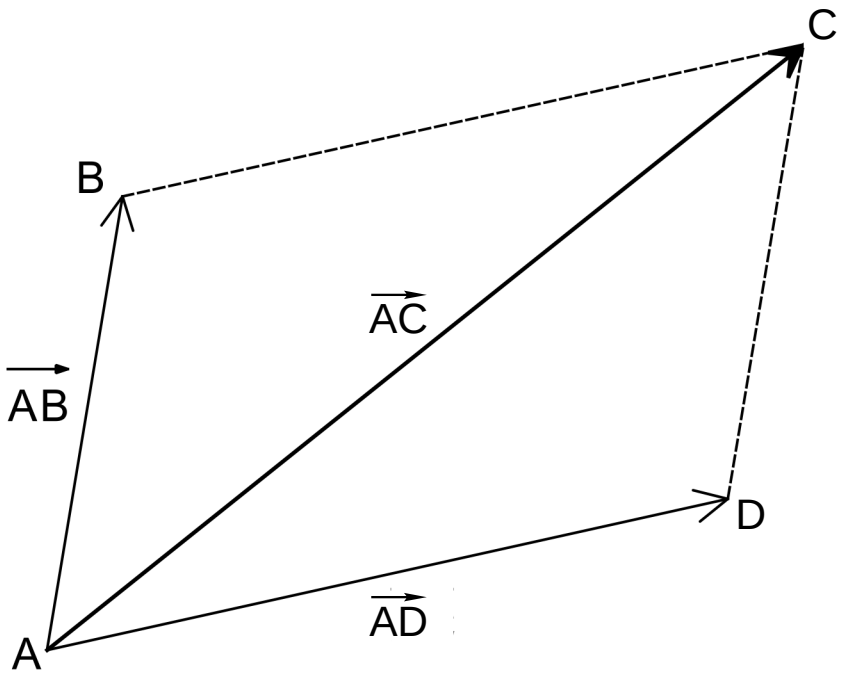
Las coordenadas de *A* cambian a las de *B* tanto como indican las componentes de $\overrightarrow{AB}$

Regla: $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PX}+\overrightarrow{XQ}$ con cualquier X

Los vectores se pueden colocar en cualquier punto de aplicación, por eso se dice que son libres o equipolentes.

Las componentes del vector indican cuánto se desplaza el punto inicial hasta el final.

La regla del paralelogramo



Conocemos la suma de vectores:

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$$

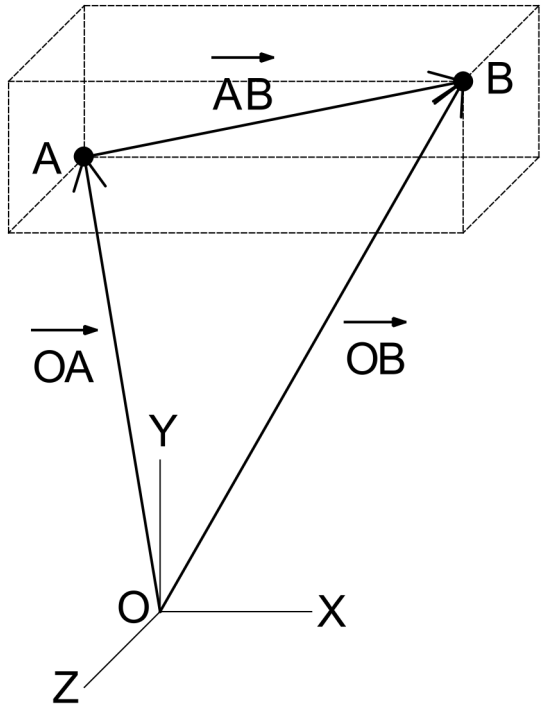
Pero si dibujamos el paralelogramo ABCD vemos que: $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$

De modo que:

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$$

Para sumar dos vectores con un origen común *P*, dibujamos el paralelogramo que forman y trazamos la diagonal desde el punto *P*.

Vector que une dos puntos



Como hemos visto:

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}$$

Por eso, el vector que une *A* y *B* es:

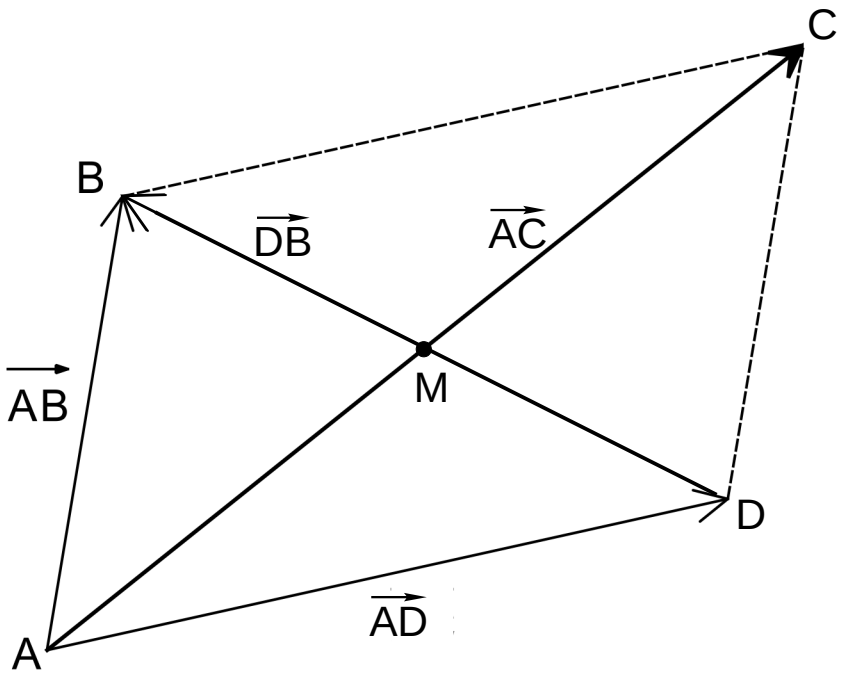
$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$$

Y la distancia de *A* a *B* es: $d=\left|\overrightarrow{AB}\right|$

Regla: $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{XQ}-\overrightarrow{XP}$ con cualquier X

1. Para hallar el vector que une *A* y *B* se restan sus coordenadas.
2. Para restar dos vectores de origen común se unen sus extremos. El vector diferencia acaba en el punto que se escribe primero.

Las diagonales de un paralelogramo



Como ya sabemos:

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$$

$$\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$$

Se cortan en *M*, que es el punto medio de ambas diagonales.

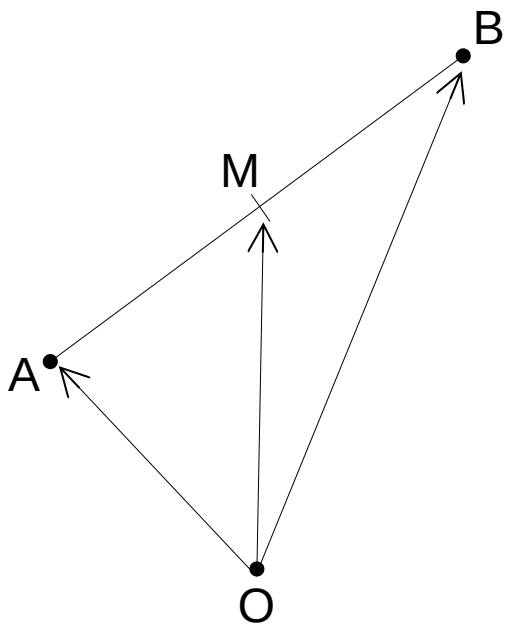
Lo demostramos:

En el triángulo AMB se tiene que cumplir: $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AB}$

Si $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right)$ y $\overrightarrow{MB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}\right)$

Entonces: $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right) + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}\right) = \overrightarrow{AB}$

Punto medio entre dos puntos



Ya sabemos que: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$

Y como *M* es el punto medio de *A* y *B*:

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$$

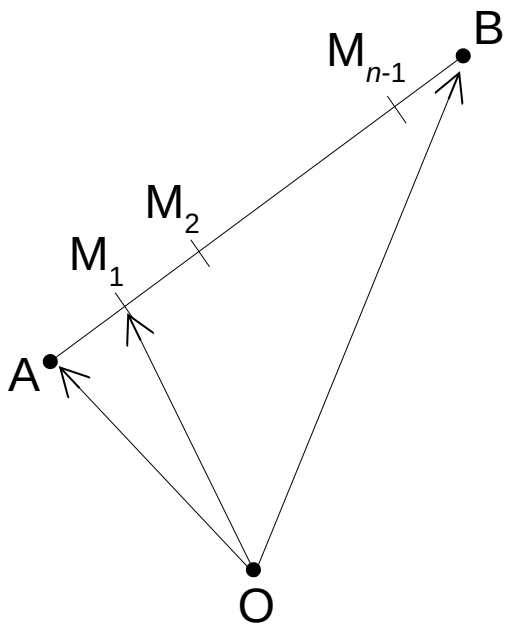
Por lo tanto, el vector de posición de *M* es:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$$

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right)$$

El punto medio de *A* y *B* es la semisuma de las coordenadas de *A* y *B*.

Dividir un segmento en partes



Se trata de dividir AB en *n* partes:

$$\overrightarrow{AM}_1 = \frac{1}{n}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{n}\left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right)$$

$$\overrightarrow{AM}_2 = \frac{2}{n}\overrightarrow{AB} = \frac{2}{n}\left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right)$$

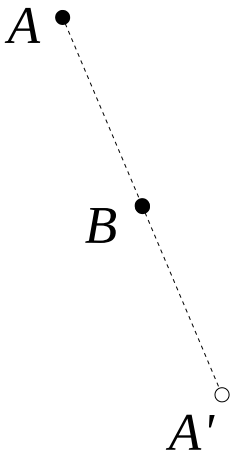
etc.

Por lo tanto: $\overrightarrow{OM}_1 = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM}_1 = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{n}\left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right)$

$$\overrightarrow{OM}_2 = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM}_2 = \overrightarrow{OA} + \frac{2}{n}\left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right)$$

etc.

Punto simétrico a otro



Hay que encontrar *A'*, simétrico de *A* respecto a *B*:

Se cumplirá que: $\overrightarrow{BA'} = \overrightarrow{AB}$

Y como para A': $\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BA'}$

Tenemos que: $\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AB} = \ldots$

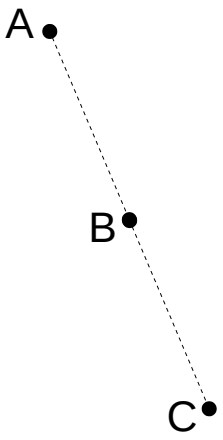
$\ldots = \overrightarrow{OB} + \left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right) = \ldots$

$\ldots = 2\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$

O bien, B es el punto medio de A y A': $\overrightarrow{OB} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OA'}\right)$

y basta con despejar $\overrightarrow{OA'}$

¿Están 3 puntos alineados?



Hay que hallar si *A*, *B* y *C* están alineados:

Si *A*, *B*, *C* están alineados, se debe cumplir:

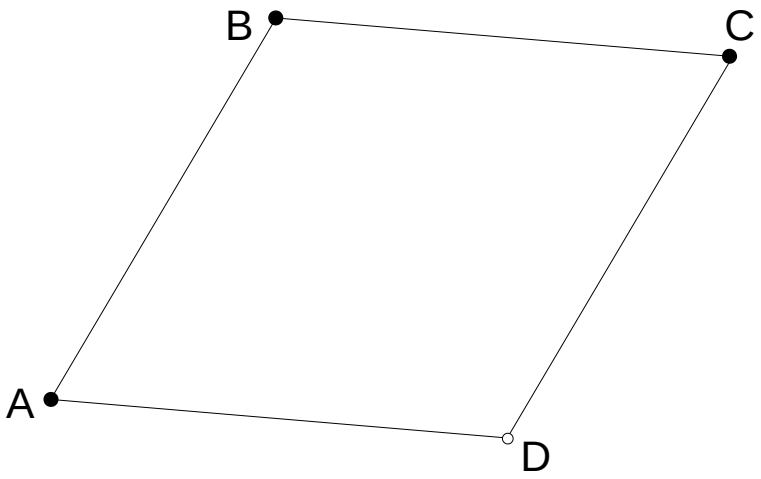
$$\overrightarrow{AC} = k \cdot \overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = k \cdot (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})$$

$$(x_C - x_A, y_C - y_A, z_C - z_A) = k \cdot (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$$

A, *B*, *C* están alineados, si: $\dfrac{x_C - x_A}{x_B - x_A} = \dfrac{y_C - y_A}{y_B - y_A} = \dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$

El 4º vértice de un paralelogramo



Dados *A*, *B* y *C* hallar *D*:

Se cumplirá que: $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

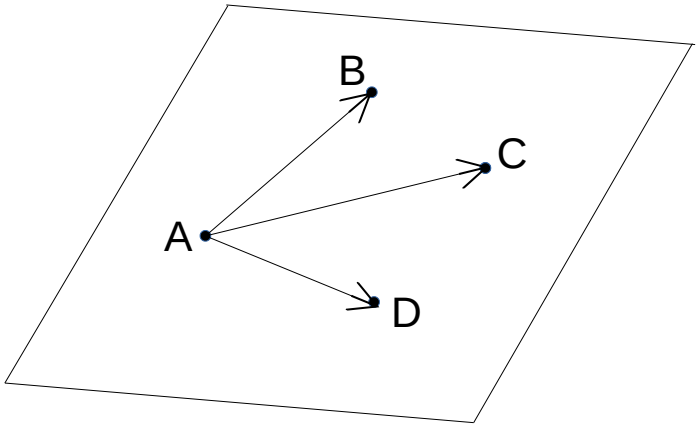
Y como para *D*: $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD}$

Tenemos que: $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC}$

Por lo tanto: $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC} = \ldots$

$\ldots = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}$

Dados 4 puntos, ¿son coplanarios?

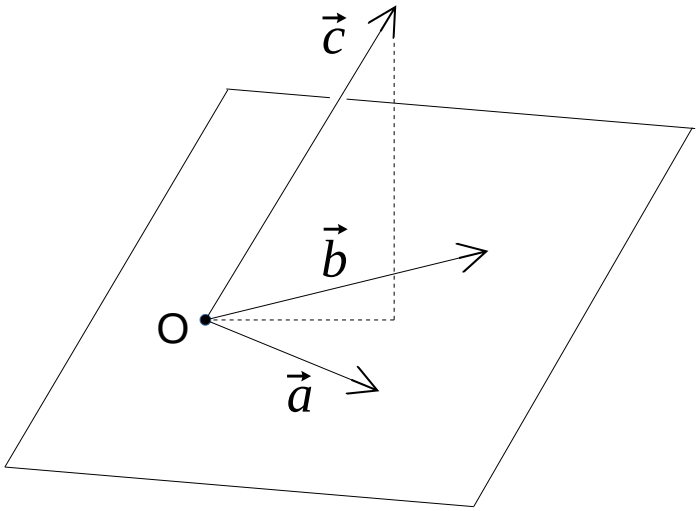


Si *A*, *B*, *C* y *D* están en el mismo plano, uno de los vectores $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ es combinación lineal de los otros dos.

Si es así, el determinante que forman los vectores es nulo.

Son coplanarios si: $\begin{vmatrix} x_B - x_A & y_B - y_A & z_B - z_A \\ x_C - x_A & y_C - y_A & z_C - z_A \\ x_D - x_A & y_D - y_A & z_D - z_A \end{vmatrix} = 0$

¿Forman 3 vectores una base?



Tres vectores son una base del espacio si alcanzan cualquier punto, desde un origen *O*, con una combinación lineal.

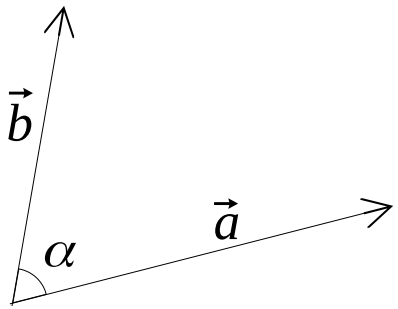
$$\overrightarrow{OP} = x \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{b} + z \cdot \vec{c}$$

En esa base, $P = (x, y, z)$

Para que formen una base del espacio $\mathbb{R}^3$, basta que sean linealmente independientes, es decir que:

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \neq 0$$

Producto escalar de dos vectores



Para dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ que forman un ángulo α se define el producto escalar así:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\alpha$$

Si $\vec{a}=a_x\cdot\vec{i}+a_y\cdot\vec{j}+a_z\cdot\vec{k}$ y $\vec{b}=b_x\cdot\vec{i}+b_y\cdot\vec{j}+b_z\cdot\vec{k}$

Como $\vec{i}\cdot\vec{i}=\vec{j}\cdot\vec{j}=\vec{k}\cdot\vec{k}=1\cdot1\cdot\cos0^o=1$

$\vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{i}\cdot\vec{k}=\vec{j}\cdot\vec{k}=1\cdot1\cdot\cos90^o=0$

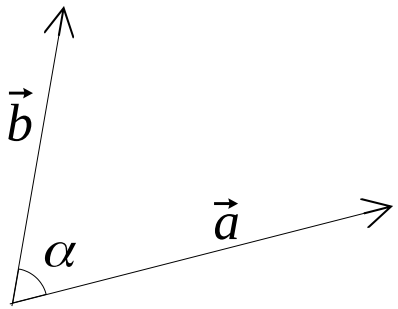
$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left(a_x\cdot\vec{i}+a_y\cdot\vec{j}+a_z\cdot\vec{k}\right)\cdot\left(b_x\cdot\vec{i}+b_y\cdot\vec{j}+b_z\cdot\vec{k}\right)=\ldots$$

$$\ldots=a_x\cdot b_x+a_y\cdot b_y+a_z\cdot b_z$$

Propiedades del producto escalar

- Conmutativa: $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$
- Distributiva: $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$
  $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$
- Asociativa con un número: $(k\,\vec{a})\cdot\vec{b}=k\,(\vec{a}\cdot\vec{b})$
  $\vec{a}\cdot(k\,\vec{b})=k\,(\vec{a}\cdot\vec{b})$
- Si $\vec{a}\perp\vec{b}$, entonces $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$
- Como: $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|\cdot|\vec{a}|\cdot\cos 0^o=|\vec{a}|^2$, entonces: $|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$

Ángulo entre dos vectores



Para hallar el ángulo que forman los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ usamos su producto escalar:

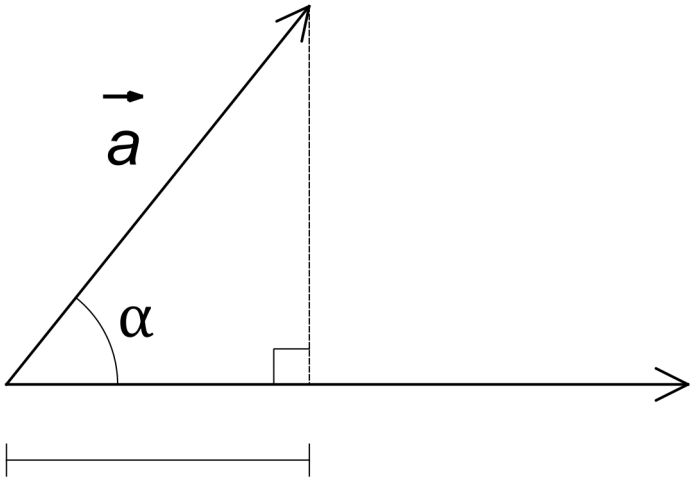
$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\alpha$$

Así que: $$\cos\alpha=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$$

O bien: $$\cos\alpha=\frac{a_x\cdot b_x+a_y\cdot b_y+a_z\cdot b_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}$$

Siempre se considera como ángulo de dos vectores el menor de los dos que forman, es decir, el ángulo interior.

Proyección de un vector sobre otro



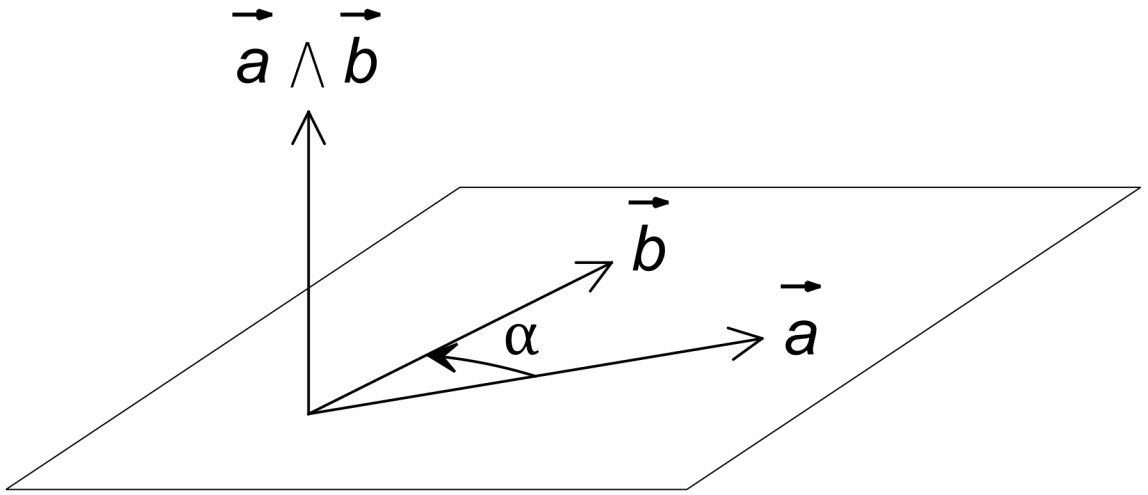
$$P_{\vec{a}\to\vec{b}} = |\vec{a}| \cdot \cos\alpha$$

La proyección de un vector sobre otro es el segmento que se forma al “dejar caer” el primero sobre el segundo con un ángulo de 90º.

Como: $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\alpha = P_{\vec{a}\to\vec{b}}\cdot|\vec{b}|$

$$P_{\vec{a}\to\vec{b}} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}$$

Producto vectorial de dos vectores



El producto vectorial $\vec{a} \wedge \vec{b}$ de $\vec{a}$ y $\vec{b}$ es un vector.

Es perpendicular a $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

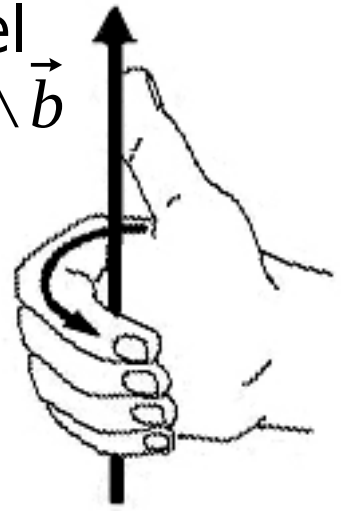
Su sentido es el que da la regla de la mano derecha:

Su módulo se define así:

$$\left|\vec{a} \wedge \vec{b}\right| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \alpha$$

El pulgar da el sentido de $\vec{a} \wedge \vec{b}$

Los dedos indican el giro para ir de $\vec{a}$ a $\vec{b}$ por la vía más corta



Cálculo del producto vectorial

Como forman un ángulo de 0º: $\vec{i}\wedge\vec{i}=\vec{j}\wedge\vec{j}=\vec{k}\wedge\vec{k}=\vec{0}$

Por formar 90º, tener módulo 1, y por aplicación de la regla de la mano derecha, se obtiene que:

$$\vec{i}\wedge\vec{j}=\vec{k}=-\vec{j}\wedge\vec{i}$$
$$\vec{j}\wedge\vec{k}=\vec{i}=-\vec{k}\wedge\vec{j}$$
$$\vec{k}\wedge\vec{i}=\vec{j}=-\vec{i}\wedge\vec{k}$$

Y se obtiene que:

$$\vec{a}\wedge\vec{b}=\left(a_x\cdot\vec{i}+a_y\cdot\vec{j}+a_z\cdot\vec{k}\right)\wedge\left(b_x\cdot\vec{i}+b_y\cdot\vec{j}+b_z\cdot\vec{k}\right)=\ldots$$
$$\ldots=\left(a_yb_z-a_zb_y\right)\vec{i}+\left(a_zb_x-a_xb_z\right)\vec{j}+\left(a_xb_y-a_yb_x\right)\vec{k}$$

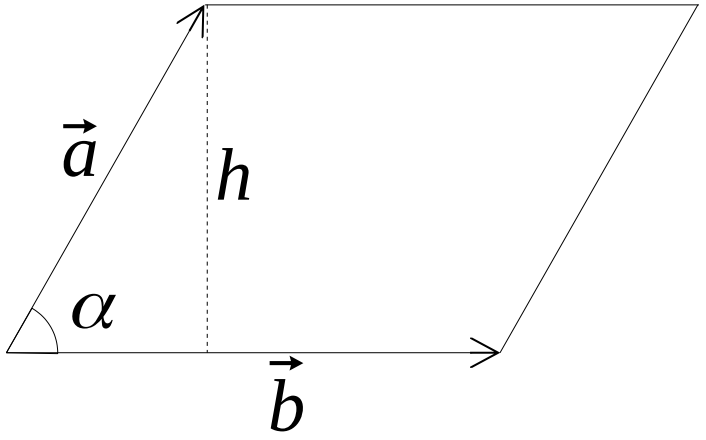
Que equivale a un determinante:

$$\vec{a}\wedge\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}$$

Propiedades del producto vectorial

- Anticonmutativa: $\vec{a}\wedge\vec{b}=-\vec{b}\wedge\vec{a}$
- Distributiva: $\vec{a}\wedge(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\wedge\vec{b}+\vec{a}\wedge\vec{c}$
  $(\vec{a}+\vec{b})\wedge\vec{c}=\vec{a}\wedge\vec{c}+\vec{b}\wedge\vec{c}$
- Asociativa con un número: $(k\,\vec{a})\wedge\vec{b}=k\,(\vec{a}\wedge\vec{b})$
  $\vec{a}\wedge(k\,\vec{b})=k\,(\vec{a}\wedge\vec{b})$
- Si $\vec{a}\parallel\vec{b}$, entonces $\vec{a}\wedge\vec{b}=0$
- Como $|\vec{a}\wedge\vec{a}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{a}|\cdot\sin 0^o=0$, entonces $\vec{a}\wedge\vec{a}=\vec{0}$

Área de un paralelogramo



Hallemos el área del paralelogramo generado por los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$

Según vemos en el dibujo:

$$h=|\vec{a}|\cdot\sin\alpha$$

Y como el área del paralelogramo es igual a base por altura:

$$S=|\vec{b}|\cdot h=|\vec{b}|\cdot|\vec{a}|\cdot\sin\alpha=|\vec{a}\wedge\vec{b}|$$

El área del paralelogramo es el módulo del producto vectorial.

Relación producto escalar – vectorial

Para el producto escalar: $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\alpha$

Para el producto vectorial: $|\vec{a}\wedge\vec{b}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\alpha$

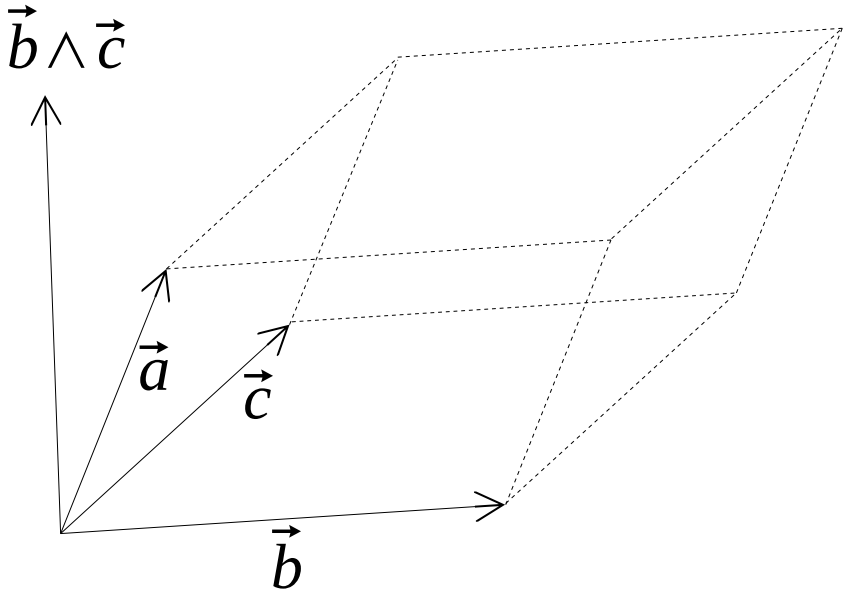
Elevando ambas igualdades al cuadrado y sumándolas:

$$|\vec{a}\wedge\vec{b}|^2+(\vec{a}\cdot\vec{b})^2=|\vec{a}|^2\cdot|\vec{b}|^2\cdot\sin^2\alpha+|\vec{a}|^2\cdot|\vec{b}|^2\cdot\cos^2\alpha$$

$$|\vec{a}\wedge\vec{b}|^2+(\vec{a}\cdot\vec{b})^2=|\vec{a}|^2\cdot|\vec{b}|^2\cdot(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)$$

$$|\vec{a}\wedge\vec{b}|^2+(\vec{a}\cdot\vec{b})^2=|\vec{a}|^2\cdot|\vec{b}|^2$$

Producto mixto (triple) de vectores



Se define el producto mixto así:

$$[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]=\vec{a}\cdot(\vec{b}\wedge\vec{c})$$

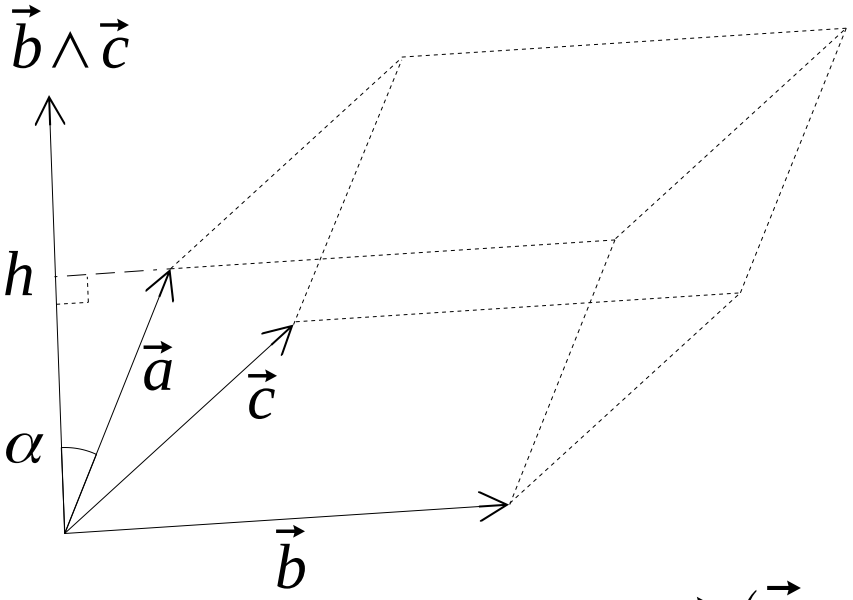
Por lo tanto:

$$[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]=(a_x,a_y,a_z)\cdot\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}$$

$$[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}$$

El producto mixto es nulo si los tres vectores son coplanares.

Volumen de un paralelepípedo



$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ definen un paralelepípedo.

$\left|\vec{b}\wedge\vec{c}\right|$ es el área de la base del paralelepípedo que se forma y la altura del paralelepípedo es la proyección de $\vec{a}$ sobre $\vec{b}\wedge\vec{c}$.

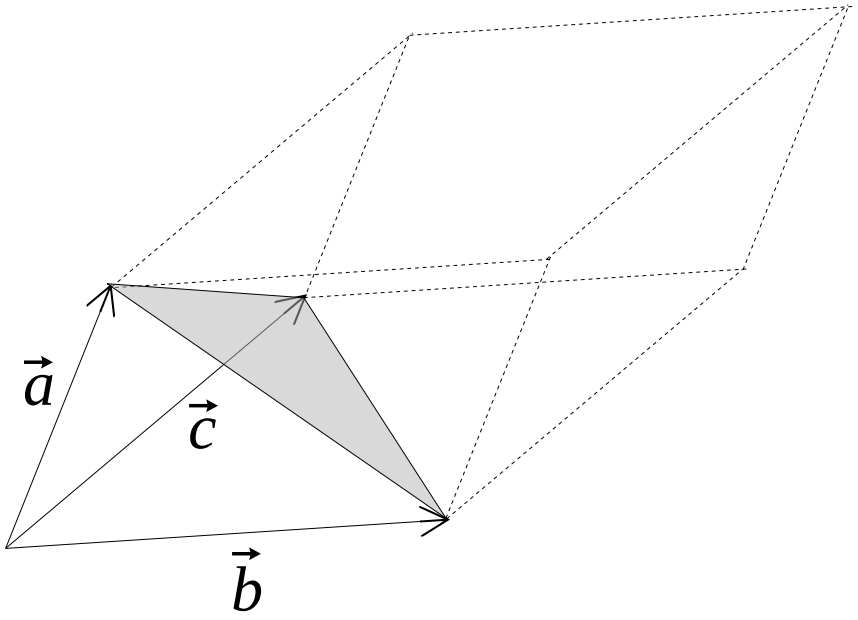
$$\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\wedge\vec{c}\right)=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\wedge\vec{c}\right|\cdot\cos\alpha=S_{base}\cdot h=V$$

Es decir, el volumen del paralelepípedo es: $V=\left|\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\wedge\vec{c}\right)\right|$

y se puede calcular con el determinante de los vectores.

(Se toma en valor absoluto por que $\vec{b}\wedge\vec{c}=-\vec{c}\wedge\vec{b}$)

Volumen del tetraedro



El paralelepípedo definido por $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ tiene un volumen:

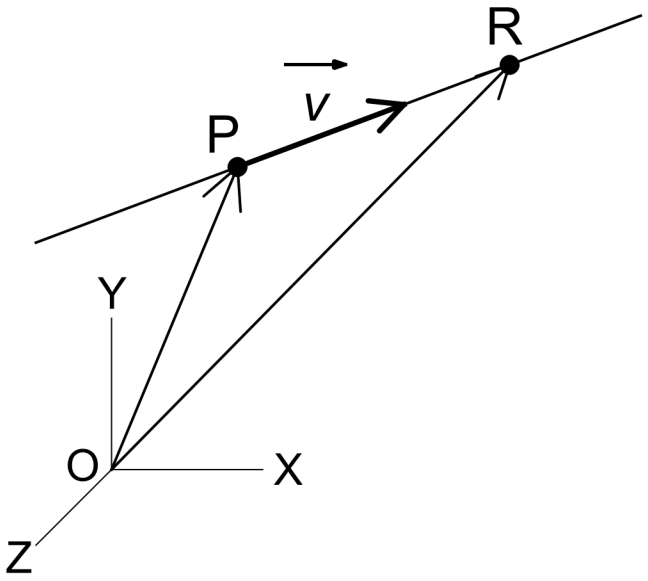
$$V = \left| \vec{a} \cdot (\vec{b} \wedge \vec{c}) \right|$$

El tetraedro que definen $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ es una pirámide cuya base es la mitad de la original e igual altura.

Su volumen es la tercera parte del prisma de igual base y altura:

El volumen del tetraedro es: $V = \frac{1}{3} \cdot V_{\text{mitad}} = \frac{1}{6} \cdot \left| \vec{a} \cdot (\vec{b} \wedge \vec{c}) \right|$

La recta en el espacio



La recta la forman los puntos $R(x, y, z)$ conseguidos a partir de un punto P por desplazamiento según el vector $\vec{v}$

Es decir: $\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP} + t \cdot \vec{v}, \quad t \in \mathbb{R}$

A $\vec{v}$ se le llama vector director de la recta.

En coordenadas: $(x, y, z) = (x_P, y_P, z_P) + t \cdot (v_x, v_y, v_z)$
(ecuación vectorial)

Y separándolas:
$$\begin{cases} x = x_p + v_x \cdot t \\ y = y_p + v_y \cdot t \\ z = z_p + v_z \cdot t \end{cases}$$
que son las ecuaciones paramétricas de la recta.

Ecuación continua de la recta

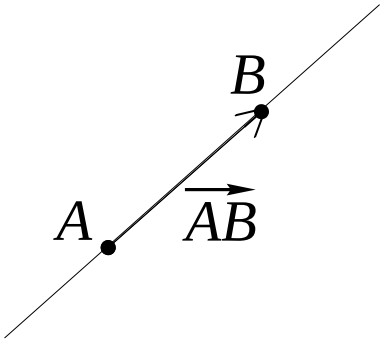
Como tenemos $\begin{cases} x = x_p + v_x \cdot t \\ y = y_p + v_y \cdot t \\ z = z_p + v_z \cdot t \end{cases}$ podemos despejar t e igualar:

$$\frac{x - x_p}{v_x} = \frac{y - y_p}{v_y} = \frac{z - z_p}{v_z}$$ es la ecuación continua de la recta.

Cada igualdad de esta ecuación produce, como veremos luego, una expresión que equivale a un plano.

Esto ocurre por que una recta puede expresarse como la intersección de dos planos.

Recta que pasa por dos puntos



Si nos dan dos puntos *A* y *B* podemos obtener el vector $\overrightarrow{AB}$ que los une.

$$\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A, y_B-y_A, z_B-z_A)$$

La ecuación continua es:

$$\frac{x-x_A}{x_B-x_A}=\frac{y-y_A}{y_B-y_A}=\frac{z-z_A}{z_B-z_A}$$

Y las paramétricas:

$$\begin{cases} x=x_A+(x_B-x_A)\cdot t \\ y=y_A+(y_B-y_A)\cdot t \\ z=z_A+(z_B-z_A)\cdot t \end{cases}$$

¿Pertenece un punto a una recta?

Un punto *A* pertenece a una recta si cumple sus ecuaciones al sustituir x, y, z por las coordenadas del punto *A*.

Si la recta está dada por su ecuación continua, al sustituir:

$$\frac{x_A - x_p}{v_x} = \frac{y_A - y_p}{v_y} = \frac{z_A - z_p}{v_z}$$

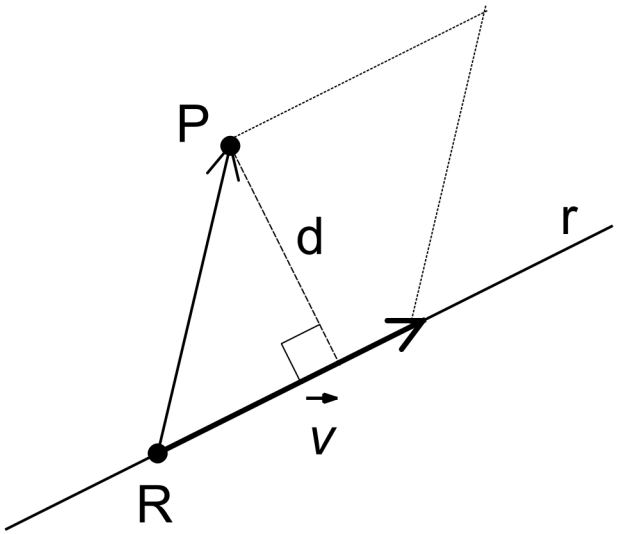
Si es cierto, *A* está en la recta.

Si tenemos las ecuaciones paramétricas veremos si el valor de t que obtenemos es el mismo en cada coordenada:

$$\begin{cases} x_A = x_p + v_x \cdot t \rightarrow t_1 \\ y_A = y_p + v_y \cdot t \rightarrow t_2 \\ z_A = z_p + v_z \cdot t \rightarrow t_3 \end{cases}$$

Si $t_1 = t_2 = t_3$, *A* está en la recta.

Distancia de un punto a una recta



La recta r pasa por R y tiene vector $\vec{v}$.
queremos saber la distancia hasta P.

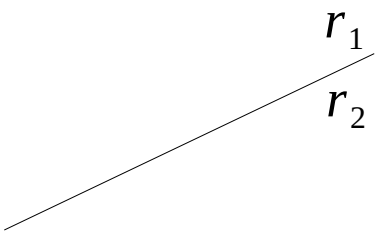
La distancia entre lugares geométricos es la menor posible entre puntos de ambos.

En este caso, d es la longitud del segmento perpendicular a r que pasa por el punto P.

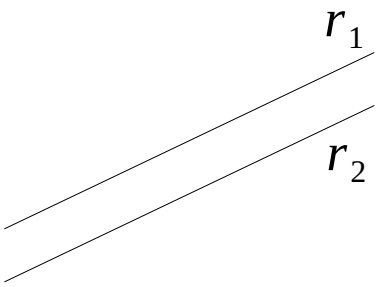
Como se ve en el dibujo, el vector $\overrightarrow{RP}$ y el vector $\vec{v}$ definen un paralelogramo de base $|\vec{v}|$ y altura d, la distancia buscada.
Su área: $|\overrightarrow{RP} \wedge \vec{v}|$ es igual a base por altura: $|\vec{v}| \cdot d$, así que:

$$d = \frac{|\overrightarrow{RP} \wedge \vec{v}|}{|\vec{v}|}$$

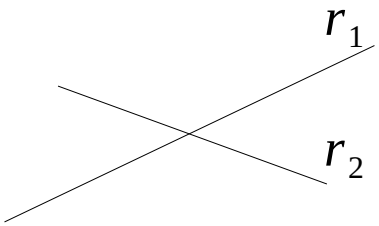
Posiciones relativas de dos rectas



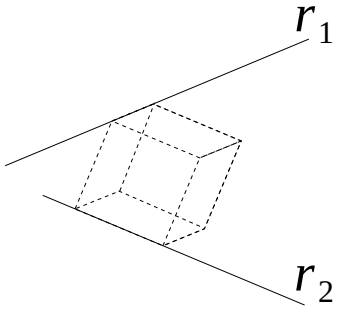
Que sean **coincidentes**. Tienen el mismo vector director y cualquier punto de una está en la otra.



Que sean **paralelas**. Tienen el mismo vector director pero ningún punto de una está en la otra.

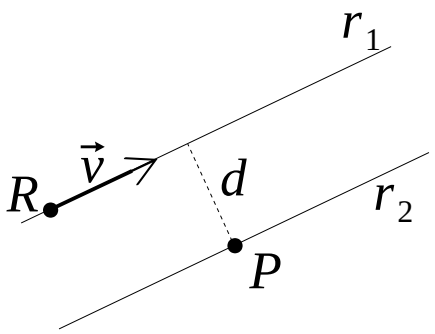


Que **se corten**. No tienen el mismo vector director pero tienen un único punto común.



Que **se crucen**. No tienen el mismo vector director ni tienen punto alguno en común.

Distancia entre rectas paralelas

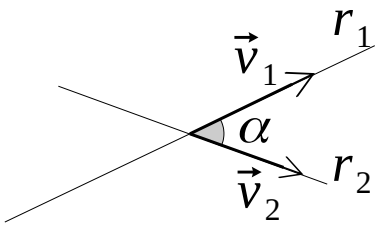


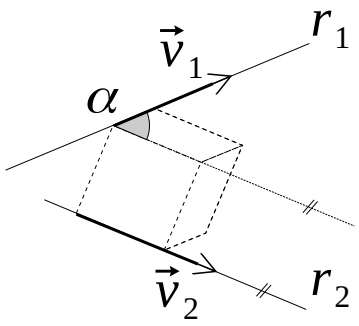
Si dos rectas son paralelas cualquier punto de una de ellas sirve para hallar la distancia hasta la otra recta.

Si r_1 pasa por R, y su vector director es $\vec{v}$ elegimos un punto P cualquiera de r_2 y aplicamos la fórmula para la distancia de ese punto a la recta r_1.

La distancia entre las rectas es: $d = \dfrac{|\overrightarrow{RP} \wedge \vec{v}|}{|\vec{v}|}$

Ángulo de dos rectas



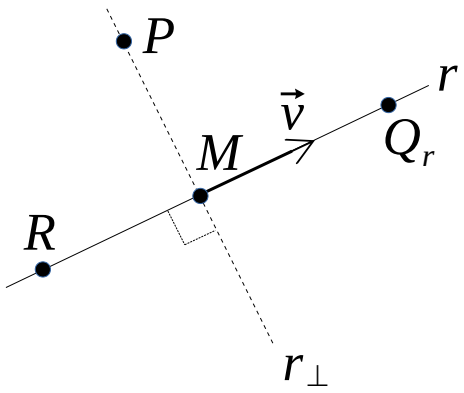


Si r_1 tiene vector director $\vec{v}_1$
y r_2 tiene vector director $\vec{v}_2$

Tanto si se cortan como si se cruzan, el ángulo entre las rectas es el ángulo que forman los vectores directores:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{|\vec{v}_1| \cdot |\vec{v}_2|}$$

Recta perpendicular por un punto



La recta r pasa por R y tiene vector $\vec{v}$.
queremos la recta perpendicular a r por P.

Un punto cualquiera de r es:

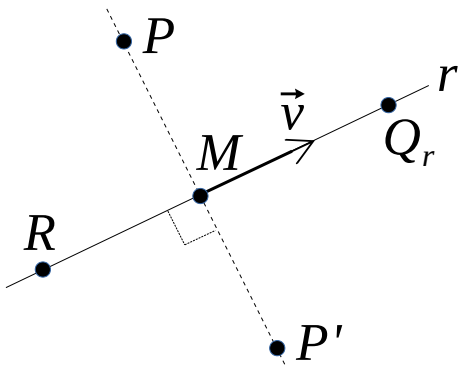
$$Q_r = (x_R + v_x t, y_R + v_y t, z_R + v_z t) \quad t \in \mathbb{R}$$

Construimos el vector que une ese punto con P: $\overrightarrow{Q_r P}$
y hacemos: $\overrightarrow{Q_r P} \cdot \vec{v} = 0$ para que sea perpendicular a $\vec{v}$.

Esto nos permite hallar el valor de t para el que Q_r es el punto M.
Sustituimos ese valor de t en la expresión de Q_r y tendremos M.

La recta buscada tiene como vector director $\overrightarrow{MP}$
y corta a la recta r en el punto M.

Punto simétrico respecto a una recta



La recta r pasa por R y tiene vector $\vec{v}$.
queremos el punto P' simétrico de P.

Con el método anterior, un punto de r es:

$$Q_r = (x_R + v_x t, y_R + v_y t, y_R + v_y t) \quad t \in \mathbb{R}$$

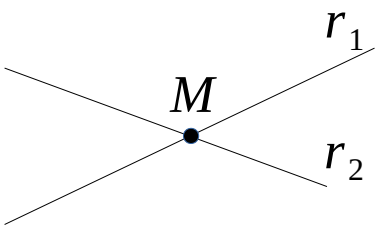
Construimos el vector que une ese punto con P: $\overrightarrow{Q_r P}$
y hacemos: $\overrightarrow{Q_r P} \cdot \vec{v} = 0$ para que sea perpendicular a $\vec{v}$.

Esto nos permite hallar el valor de t para el que Q_r es el punto M.
Sustituimos ese valor de t en la expresión de Q_r y tendremos M.

Como M es el punto medio entre P y P' :

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OP'}\right) \quad \rightarrow \quad \overrightarrow{OP'} = 2\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OP}$$

Intersección de dos rectas



La recta r_1 pasa por A y tiene vector $\vec{v}$.

La recta r_2 pasa por B y tiene vector $\vec{w}$.

$$r_1 \equiv \begin{cases} x = x_A + v_x \cdot t \\ y = y_A + v_y \cdot t \\ z = z_A + v_z \cdot t \end{cases} \qquad r_2 \equiv \begin{cases} x = x_B + w_x \cdot s \\ y = y_B + w_y \cdot s \\ z = z_B + w_z \cdot s \end{cases} \qquad s, t \in \mathbb{R}$$

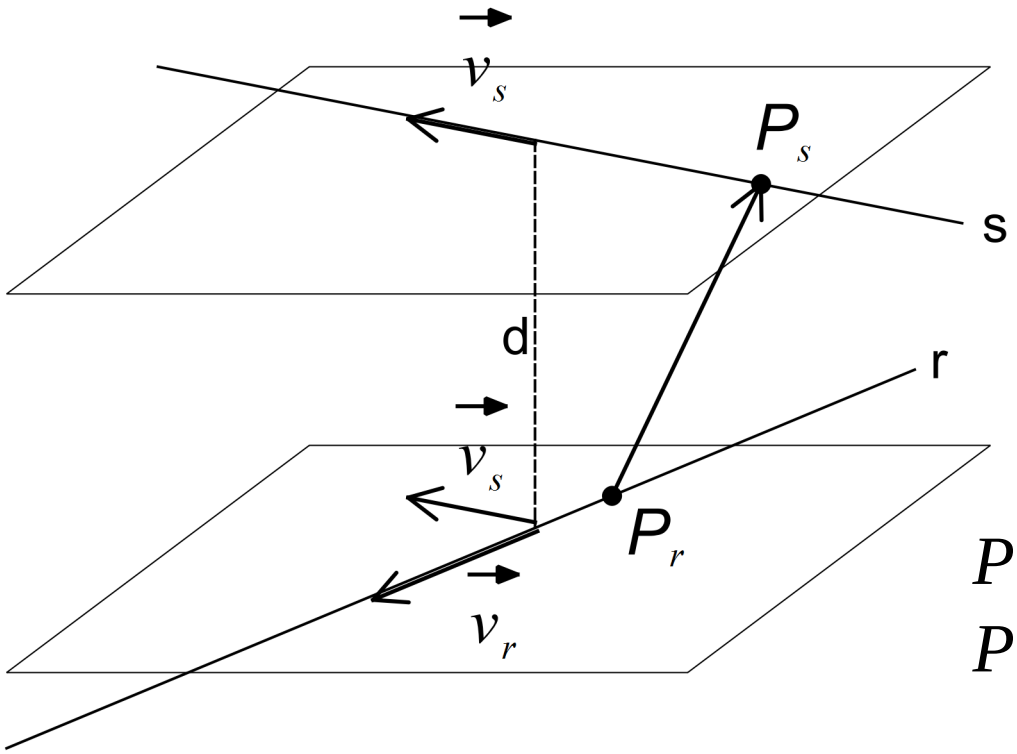
El punto M buscado cumple las ecuaciones de ambas rectas.

Igualamos las dos expresiones para x e y, y hallamos s y t.

Si las rectas realmente se cortan, las expresiones para z tendrán el mismo valor con los s y t que hemos calculado.

Si es así, el valor de s o el valor de t da las coordenadas de M.

Distancia entre rectas que se cruzan



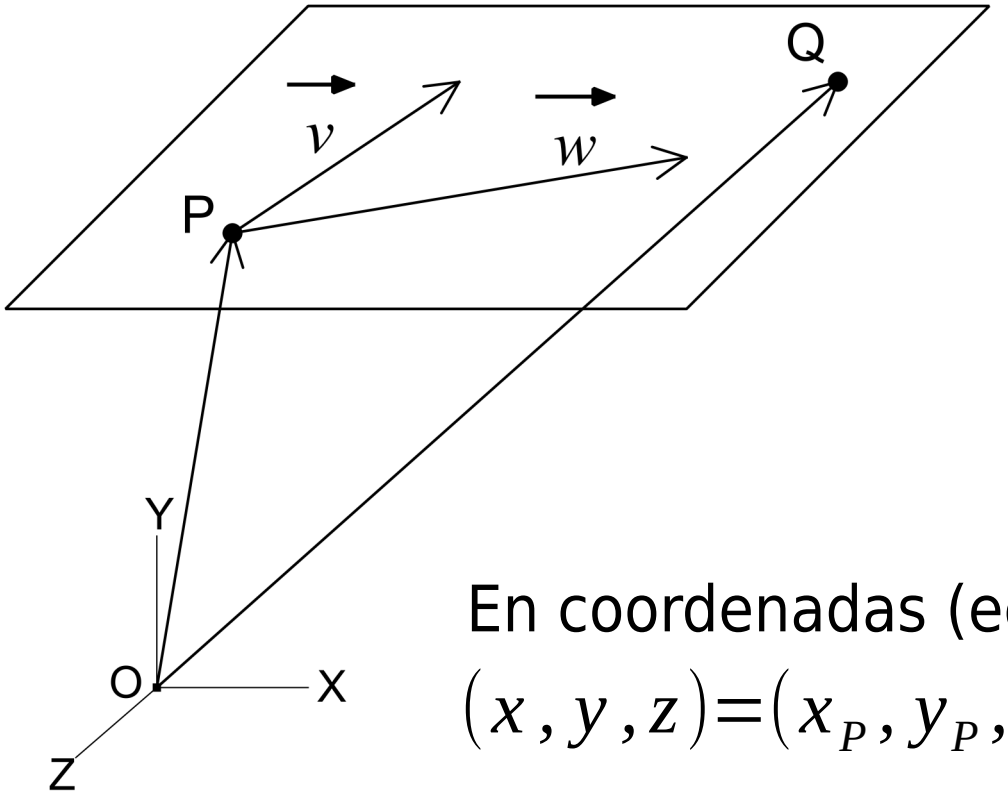
Si dos rectas r, s se cruzan siempre existe un par de planos paralelos a los que pertenecen esas rectas.
La distancia buscada es d.

P_r $\vec{v}_r$ son un punto y un vector de r.
P_s $\vec{v}_s$ son un punto y un vector de s.

$\overrightarrow{P_rP_s}, \vec{v}_r, \vec{v}_s$ forman un paralelepípedo de base $|\vec{v}_r \wedge \vec{v}_s|$ y altura d.

Usando la fórmula del volumen: $d = \dfrac{|\overrightarrow{P_rP_s} \cdot (\vec{v}_r \wedge \vec{v}_s)|}{|\vec{v}_r \wedge \vec{v}_s|}$

El plano en el espacio



El plano lo forman los puntos $Q(x, y, z)$ que se consiguen a partir de un punto *P* por desplazamiento según $\vec{v}$ y $\vec{w}$

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + t \cdot \vec{v} + s \cdot \vec{w} \quad s, t \in \mathbb{R}$$

En coordenadas (ecuación vectorial):

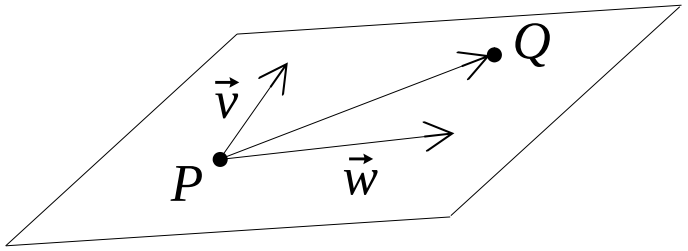
$$(x, y, z) = (x_P, y_P, z_P) + t \cdot (v_x, v_y, v_z) + s \cdot (w_x, w_y, w_z)$$

Y separándolas:

$$\begin{cases} x = x_p + v_x \cdot t + w_x \cdot s \\ y = y_p + v_y \cdot t + w_y \cdot s \\ z = z_p + v_z \cdot t + w_z \cdot s \end{cases}$$

que son las ecuaciones paramétricas del plano.

Ecuación general del plano



Si el plano se genera a partir del punto *P* y de los vectores $\vec{v}, \vec{w}$ para cualquier punto $Q(x, y, z)$ del plano: $\overrightarrow{PQ}, \vec{v}, \vec{w}$ son coplanarios.

Por lo tanto su producto mixto es nulo: $\overrightarrow{PQ} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w}) = 0$

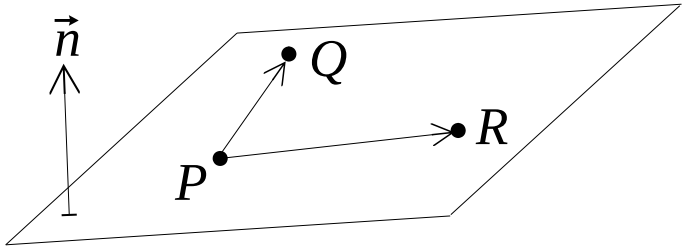
$\vec{v} \wedge \vec{w}$ es perpendicular a $\vec{v}$ y $\vec{w}$ así que también lo es al plano. Llamemos a ese vector perpendicular (o normal) $\vec{n} = (A, B, C)$

$$\overrightarrow{PQ} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w}) = \overrightarrow{PQ} \cdot \vec{n} = 0 \rightarrow A \cdot (x - x_P) + B \cdot (y - y_P) + C \cdot (z - z_P) = 0$$

Y si reunimos los factores numéricos en la letra D,

La ecuación general del plano es: $A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z + D = 0$

Plano que pasa por tres puntos



Si nos dan tres puntos *P*, *Q*, *R* obtenemos los vectores $\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}$.

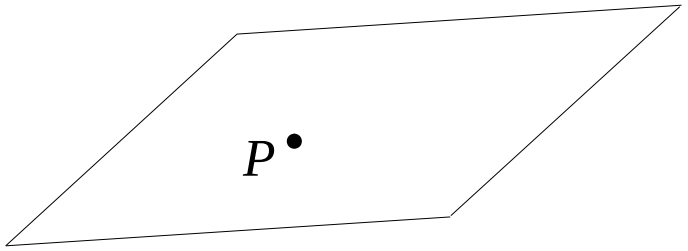
Y con ellos, calculamos el vector normal al plano:

$$\vec{n} = \overrightarrow{PQ} \wedge \overrightarrow{PR} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_Q - x_P & y_Q - y_P & z_Q - z_P \\ x_R - x_P & y_R - y_P & z_R - z_P \end{vmatrix} = \ldots = (A, B, C)$$

Calculadas A, B y C sustituiríamos las coordenadas de *P* en:

$A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z + D = 0$ para hallar D y tener la ecuación general.

¿Pertenece un punto a un plano?



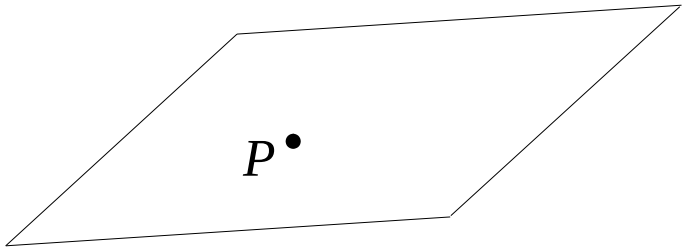
Un punto *P* pertenece a un plano si cumple su ecuación al sustituir x, y, z por las coordenadas del punto *P*.

En el plano con ecuación general: $A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z + D = 0$

Sustituimos las coordenadas de *P*: $A \cdot x_p + B \cdot y_p + C \cdot z_p + D = 0$

Si la igualdad es cierta, el punto *P* pertenece a ese plano.

Encontrar un punto de un plano



En el plano con ecuación general:

$$A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z + D = 0$$

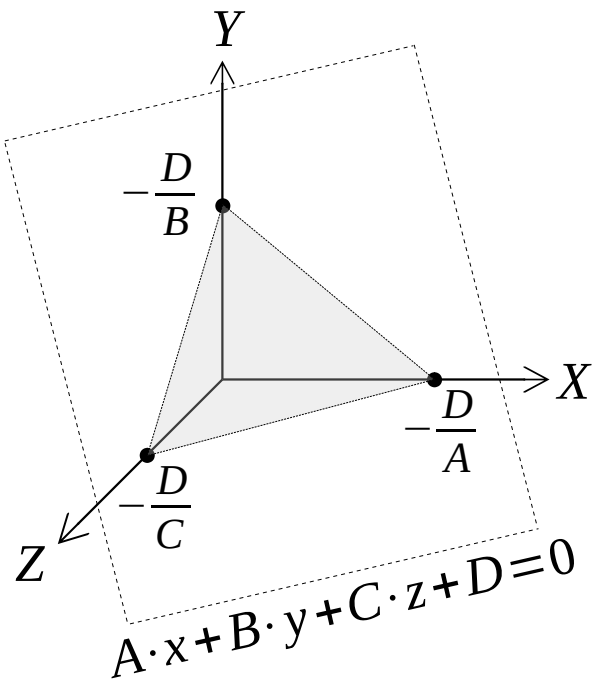
Podemos encontrar un punto del plano dando los valores que queramos a dos de las variables y hallar el valor de la otra.

Si $y=0, z=0 \rightarrow x=-\frac{D}{A}$ El plano corta a OX en $\left(-\frac{D}{A}, 0, 0\right)$

Si $x=0, z=0 \rightarrow y=-\frac{D}{B}$ El plano corta a OY en $\left(0, -\frac{D}{B}, 0\right)$

Si $x=0, y=0 \rightarrow z=-\frac{D}{C}$ El plano corta a OZ en $\left(0, 0, -\frac{D}{C}\right)$

Ecuación canónica del plano



En el plano con ecuación general:

$$A\cdot x+B\cdot y+C\cdot z+D=0$$

Transformamos la ecuación:

$$A\cdot x+B\cdot y+C\cdot z=-D$$

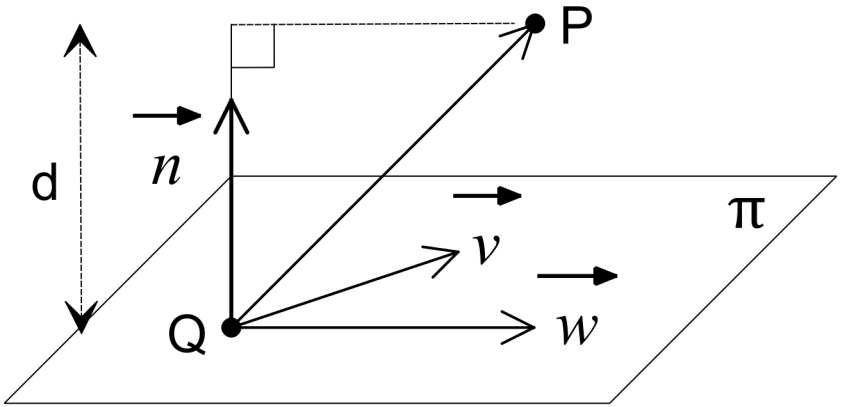
$$\frac{A}{-D}x+\frac{B}{-D}y+\frac{C}{-D}z=1$$

$$\frac{x}{-D/A}+\frac{y}{-D/B}+\frac{z}{-D/C}=1$$

Tenemos la ecuación canónica: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$

Siendo a, b y c los valores en los que el plano corta a cada eje.

Distancia de un punto a un plano



Queremos la distancia del punto *P* al plano: $A\cdot x+B\cdot y+C\cdot z+D=0$

Elegimos un punto cualquiera *Q* del plano y calculamos $\overrightarrow{QP}$

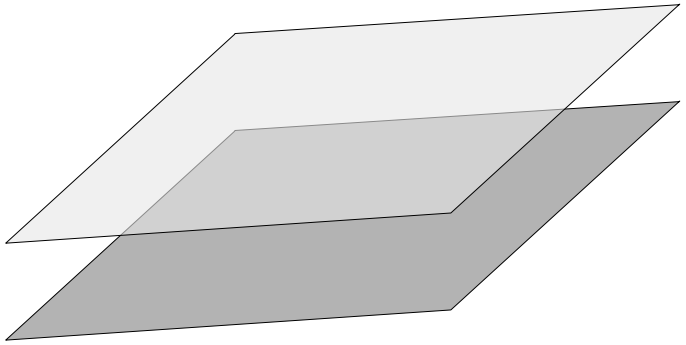
Del plano conocemos su vector normal $\vec{n}=(A,B,C)$

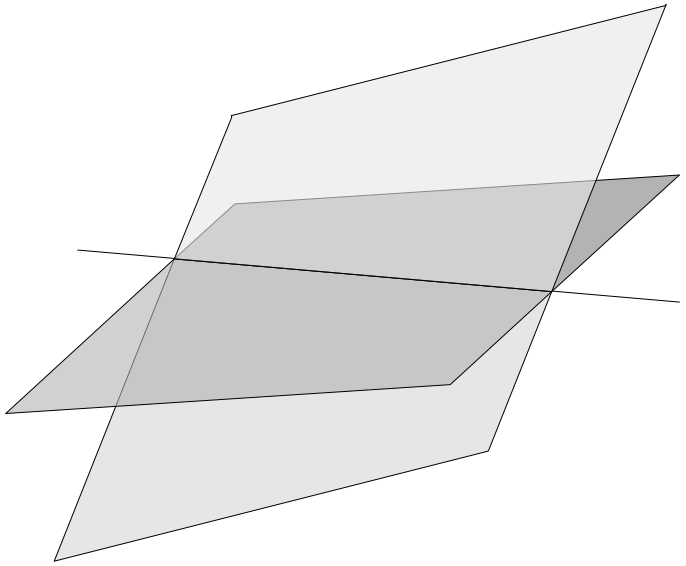
La distancia *d* que buscamos es la proyección de $\overrightarrow{QP}$ sobre $\vec{n}$

$$d=\frac{|\overrightarrow{QP}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|}=\ldots(\text{operando})\ldots=\frac{|A\cdot x_p+B\cdot y_p+C\cdot z_p+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

(El módulo es por si P no está 'encima' del plano sino 'debajo')

Posiciones relativas de dos planos



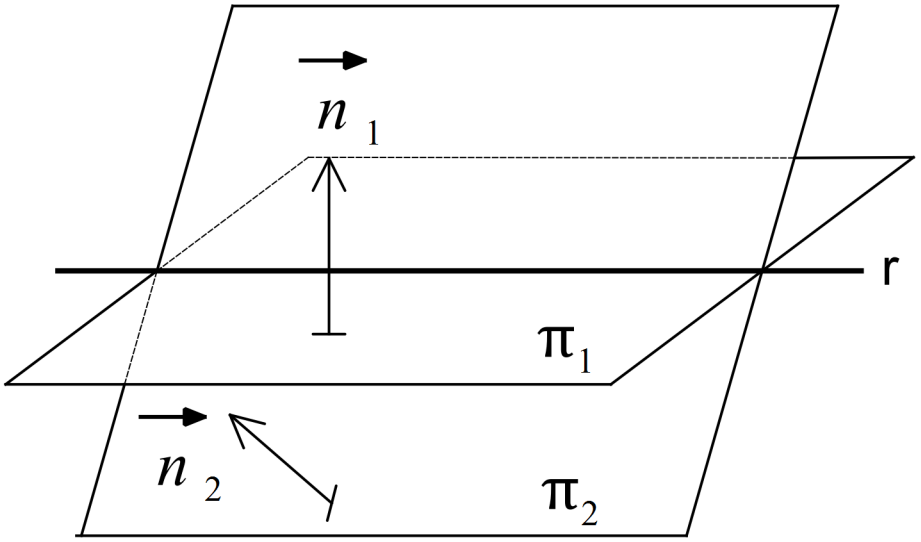


Dos planos solo pueden ser:

1. **Paralelos**
   Tienen el mismo vector normal, no se cortan en ningún punto salvo si son coincidentes.

2. **Se cortan**
   Tienen distinto vector normal, la intersección es una recta.

La recta como intersección de planos



$$r \equiv \begin{cases} \pi_1 : A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \\ \pi_2 : A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 \end{cases}$$

Esto corresponde a un sistema compatible e indeterminado.

Su solución daría las ecuaciones paramétricas de la recta.

Pero también se puede calcular la recta de otra forma:

Un punto de la recta es cualquier solución particular del sistema,

y su vector director es: $\vec{v} = \vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2 = (A_1, B_1, C_1) \wedge (A_2, B_2, C_2)$

¿Qué planos definen una recta?

Si tenemos la recta: $\frac{x-x_p}{v_x}=\frac{y-y_p}{v_y}=\frac{z-z_p}{v_z}$

Buscamos dos planos cuya intersección sea esa recta.

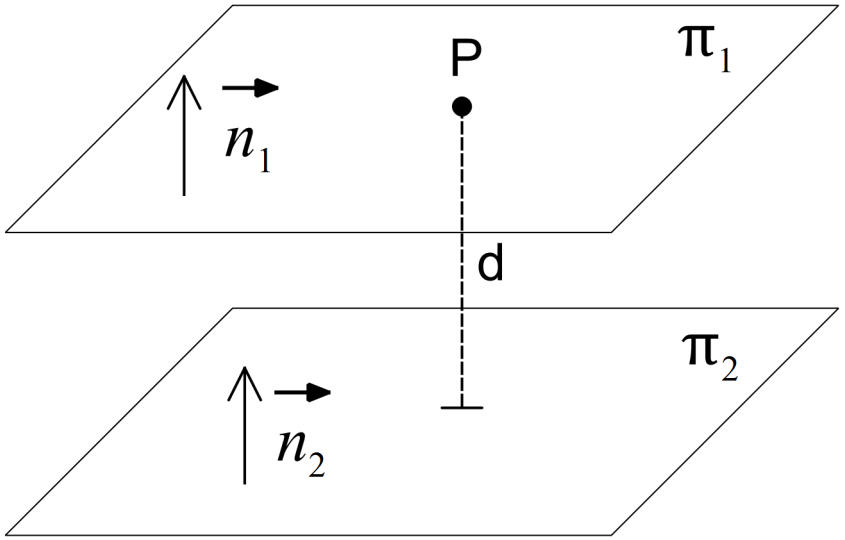
De la igualdad de las dos primeras fracciones, obtenemos uno,
De la igualdad de las dos últimas fracciones, obtenemos otro:

$$\frac{x-x_p}{v_x}=\frac{y-y_p}{v_y} \rightarrow A_1\cdot x+B_1\cdot y+D_1=0$$

$$\frac{y-y_p}{v_y}=\frac{z-z_p}{v_z} \rightarrow B_2\cdot y+C_2\cdot z+D_2=0$$

Obtendríamos un tercer plano igualando las fracciones 1ª y 3ª.

Distancia entre planos paralelos

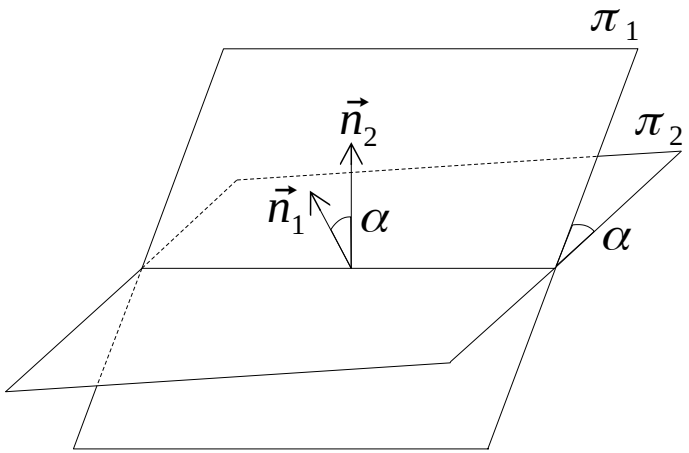


Si dos planos son paralelos $\vec{n}_1 = \vec{n}_2$ todos los puntos de uno de ellos están a igual distancia del otro.

Elegimos un punto *P* de uno y aplicamos la fórmula que halla la distancia punto − plano:

$$d = \frac{|A \cdot x_p + B \cdot y_p + C \cdot z_p + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Ángulo entre dos planos



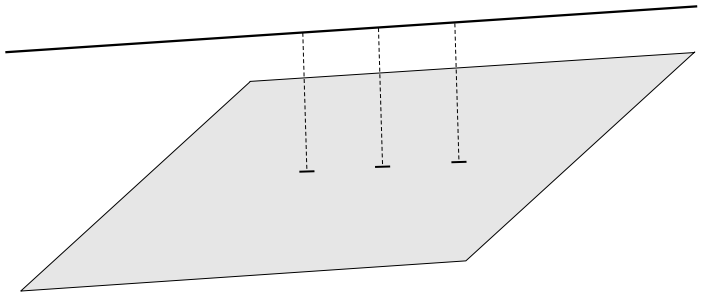
El ángulo α entre dos planos es igual que el ángulo que forman sus vectores normales.

Usando el producto escalar:

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = |\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2| \cdot \cos\alpha$$

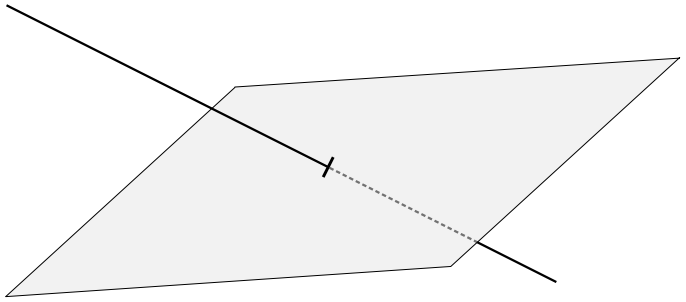
Tenemos que: $$\cos\alpha = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

Posiciones relativas recta – plano



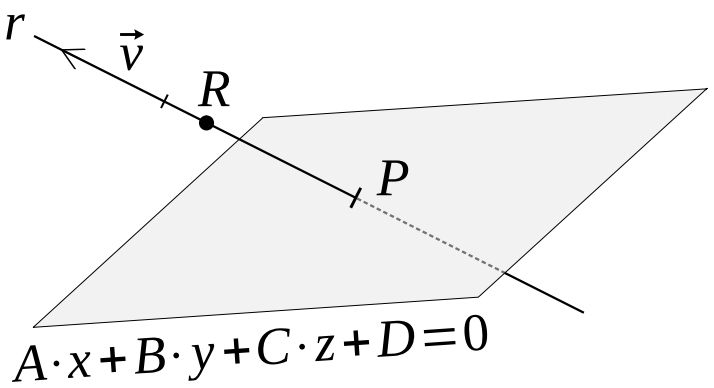
Una recta y un plano solo pueden ser:

1. **Paralelos o coincidentes**
   El vector director de la recta
   y el vector normal del plano
   son perpendiculares,
   no se cortan en ningún punto
   salvo si son coincidentes.



2. **Se cortan**
   El vector director de la recta
   y el vector normal del plano
   forman un ángulo distinto de 90º,
   se intersectan en un punto.

Intersección entre recta y plano



La recta *r* pasa por *R* con vector $\vec{v}$
buscamos el punto *P* donde corta
al plano $A\cdot x+B\cdot y+C\cdot z+D=0$

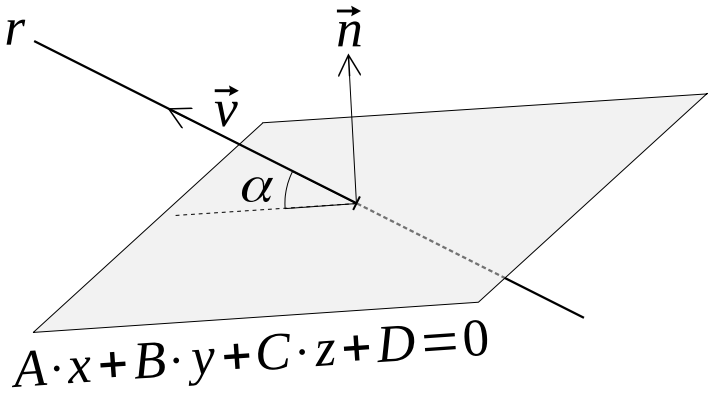
La recta es: $r\equiv\begin{cases} x=x_R+v_x\cdot t \\ y=y_R+v_y\cdot t \\ z=z_R+v_z\cdot t \end{cases}$

Un punto de la recta es: $P=\left(x_R+v_x\cdot t\,,\,y_R+v_y\cdot t\,,\,z_R+v_z\cdot t\right)$

Si sustituimos sus coordenadas en: $A\cdot x+B\cdot y+C\cdot z+D=0$

hallaremos para qué valor de *t* el punto *P* pertenece al plano.

Ángulo entre recta y plano



El ángulo α entre recta y plano es el complementario del que forman los vectores $\vec{n}$ y $\vec{v}$.

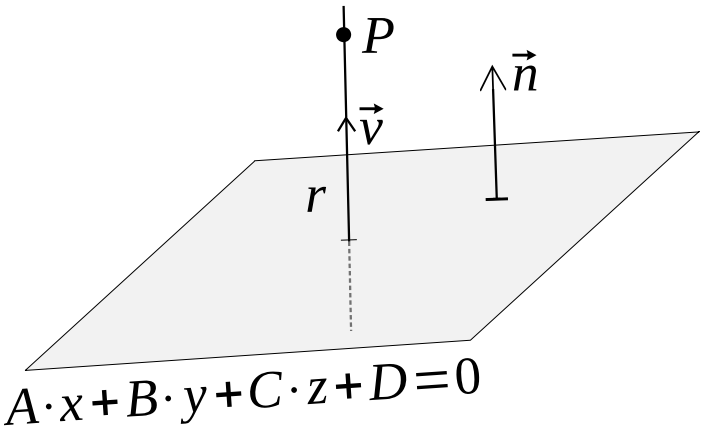
Usando el producto escalar:

$$\vec{n}\cdot\vec{v}=|\vec{n}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\left(90^o-\alpha\right)$$

Y como $\cos\left(90^o-\alpha\right)=\sin\alpha$

Tenemos que: $\sin\alpha=\dfrac{\vec{n}\cdot\vec{v}}{|\vec{n}|\cdot|\vec{v}|}$

Recta perpendicular a un plano

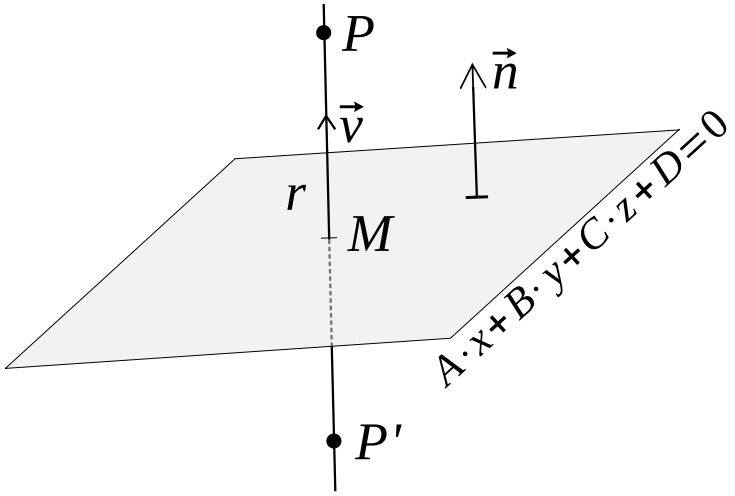


Dado el plano $A\cdot x+B\cdot y+C\cdot z+D=0$ buscamos la recta perpendicular al plano que pasa por el punto *P*.

La recta perpendicular al plano tiene como vector director el vector $\vec{n}$ normal al plano.

La recta buscada es: $\frac{x-x_p}{A}=\frac{y-y_p}{B}=\frac{z-z_p}{C}$

Punto simétrico respecto a un plano



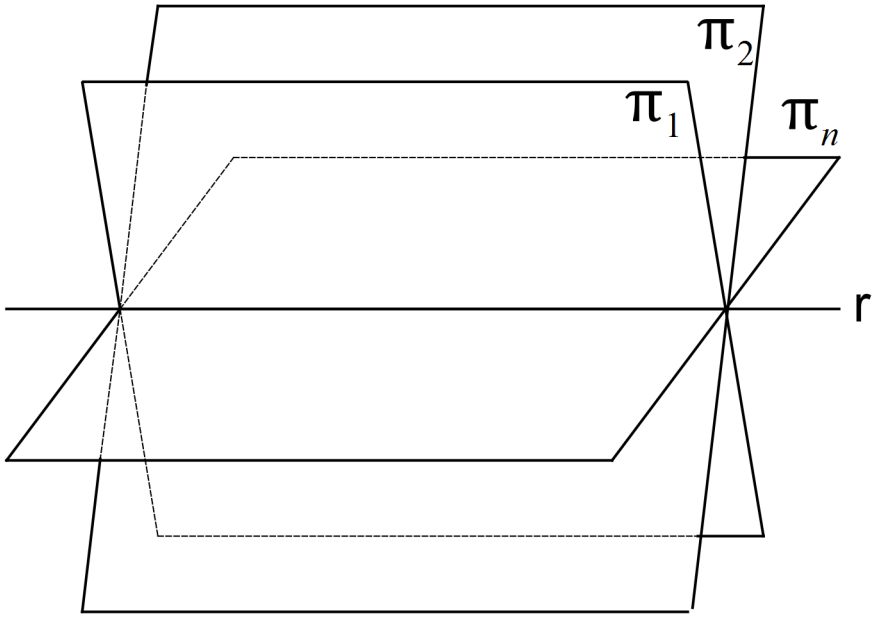
Dado el plano $A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z + D = 0$ y el punto *P* buscamos el punto *P*' simétrico de *P* respecto al plano.

Lo resolvemos en tres pasos:

1. Calculamos la recta perpendicular al plano que pasa por el punto *P*.
2. Calculamos el punto *M* en el que la recta perpendicular corta al plano.
3. Como *M* es punto medio de *P* y *P*':

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OP'}\right) \rightarrow \overrightarrow{OP'} = 2\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OP}$$

Haz de planos



El haz de planos de la recta *r* es el conjunto de todos los planos que pasan por esa recta.

Si tenemos una recta dada como la intersección de dos planos:

$$r \equiv \begin{cases} \pi_1 : A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \\ \pi_2 : A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 \end{cases}$$

Se obtiene como una combinación lineal de los planos π_1, π_2:

$$\lambda\left(A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1\right) + \mu\left(A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2\right) = 0$$

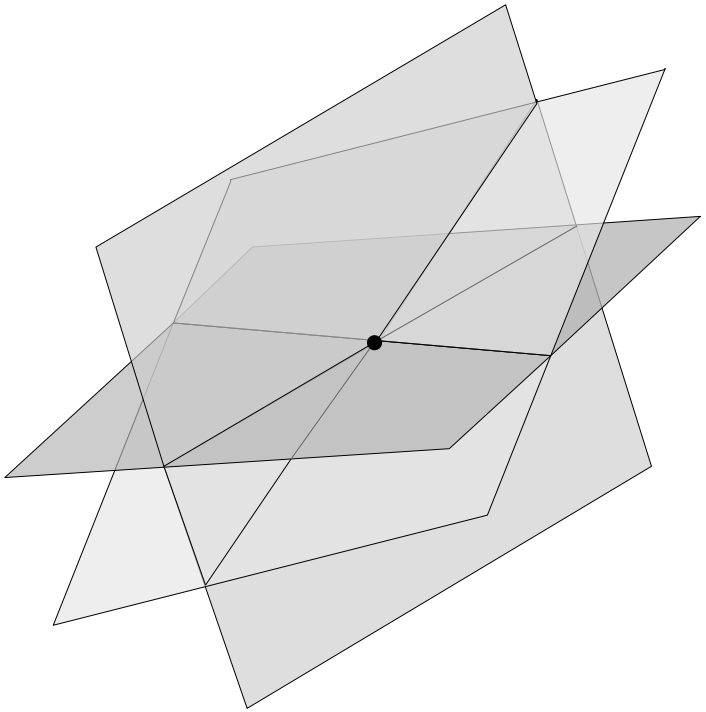
Para hacerlo más simple, si dividimos por λ (queda excluido π_1)

$$\left(A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1\right) + k\left(A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2\right) = 0$$

Posiciones relativas de tres planos 1/3

Corresponden a toda la gama de posibles soluciones que puede tener un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas.

Sistema compatible determinado:

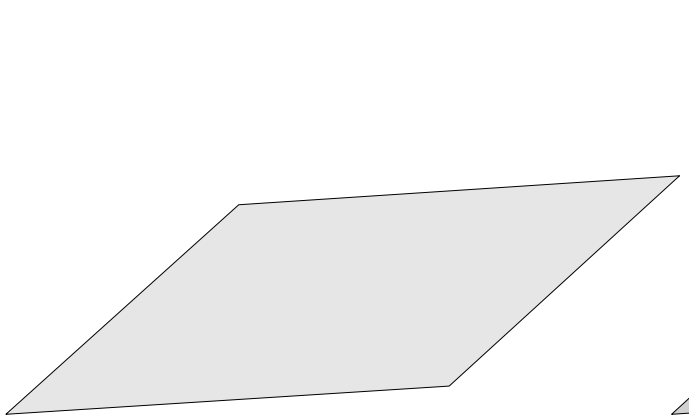


Tres planos que se cortan en un punto, que está en los tres planos.

El sistema tiene una sola solución.

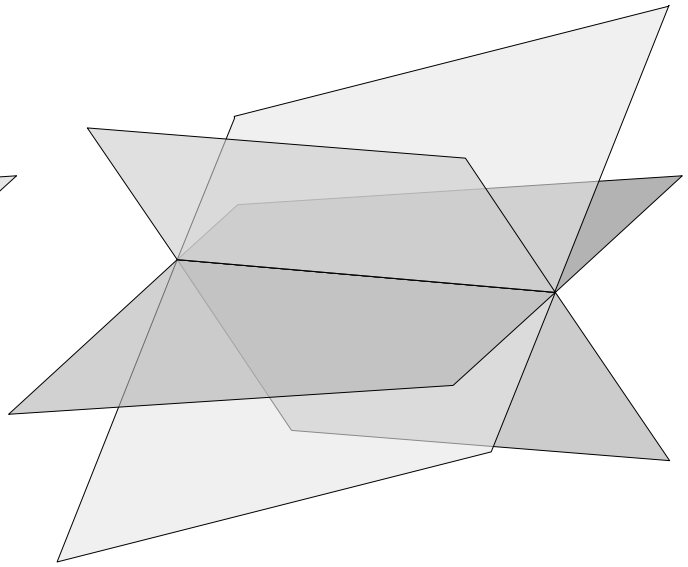
Posiciones relativas de tres planos 2/3

Sistema compatible indeterminado:

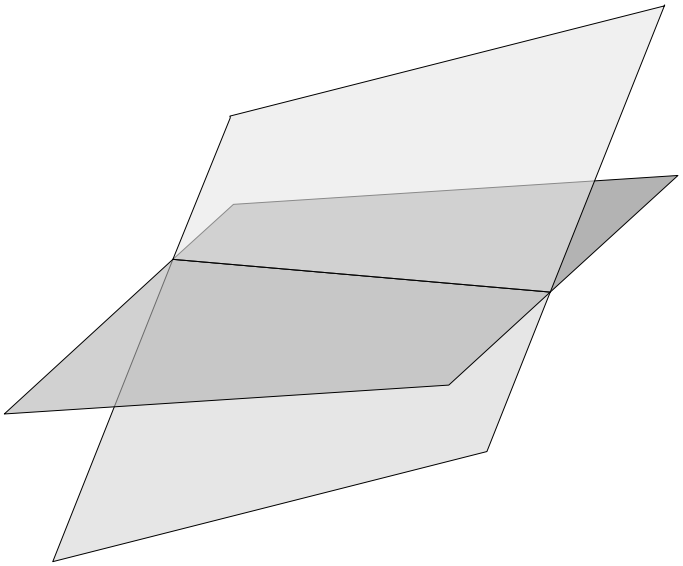


Los tres planos son coincidentes.

Solución con dos parámetros



Los tres planos se cortan en una línea recta.

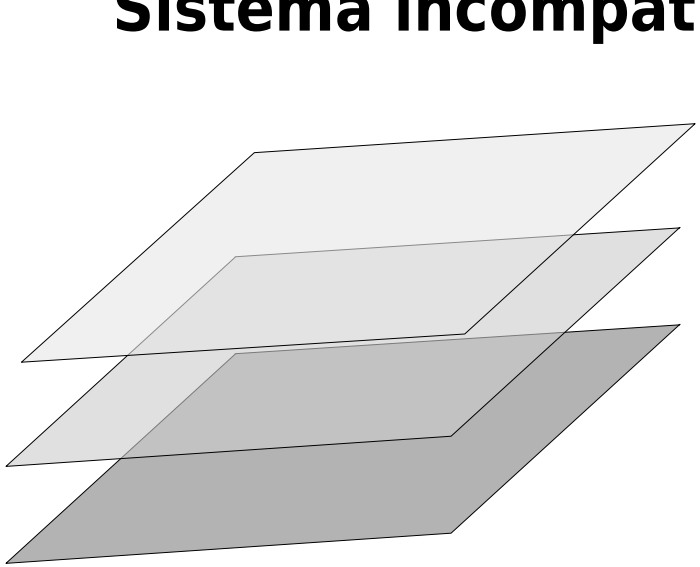


Dos planos coinciden el tercero los corta en una línea recta.

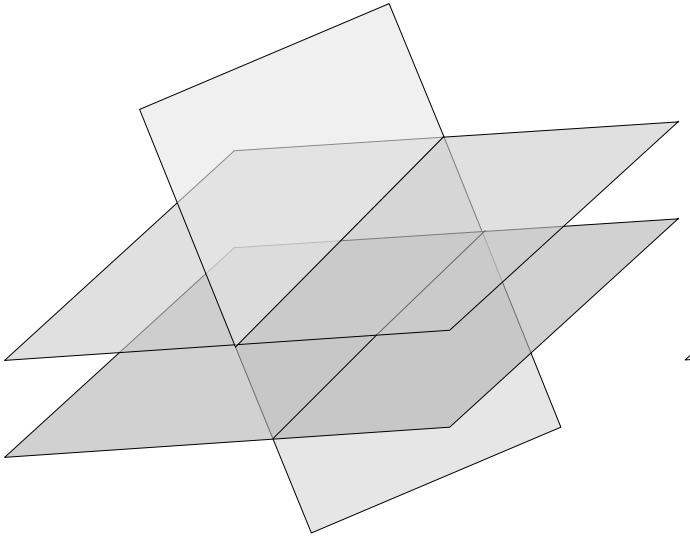
Soluciones con un parámetro

Posiciones relativas de tres planos 3/3

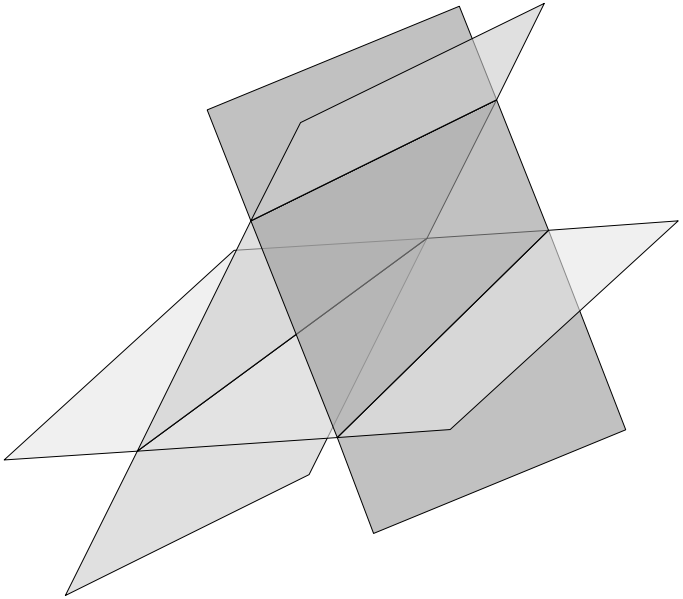
Sistema incompatible:



Tres planos paralelos, o dos son coincidentes y el otro es paralelo.



Dos planos son paralelos y el tercero los corta.



Los tres planos se cortan dos a dos.

Sin solución: ningún punto está simultáneamente en los tres planos

1

Geometría en el espacio

Puntos, vectores, rectas y planos

Matemáticas II JL ~ 2020

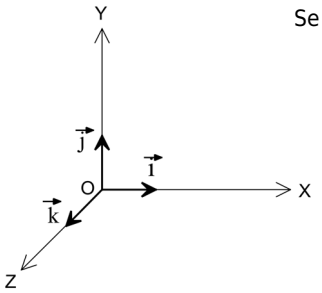
2

ÍNDICE

3. El espacio tridimensional
4. Puntos en 3D. Vector de posición
5. ¿Qué es un vector?
6. Módulo de un vector
7. Producto de un número por un vector
8. Vector unitario
9. Un vector es un transportador
10. La regla del paralelogramo
11. Vector que une dos puntos
12. Las diagonales de un paralelogramo
13. Punto medio entre dos puntos
14. Dividir un segmento en partes
15. Punto simétrico a otro
16. ¿Están 3 puntos alineados?
17. El 4º vértice de un paralelogramo
18. Dados 4 puntos, ¿son coplanarios?
19. ¿Forman 3 vectores una base?
20. Producto escalar de dos vectores
21. Propiedades del producto escalar
22. Ángulo entre dos vectores
23. Proyección de un vector sobre otro
24. Producto vectorial de dos vectores
25. Cálculo del producto vectorial
26. Propiedades del producto vectorial
27. Área de un paralelogramo
28. Relación producto escalar – vectorial
29. Producto mixto (triple) de vectores
30. Volumen de un paralelepípedo
31. Volumen del tetraedro
32. La recta en el espacio
33. Ecuación continua de la recta
34. Recta que pasa por dos puntos
35. ¿Pertenece un punto a una recta?
36. Distancia de un punto a una recta
37. Posiciones relativas de dos rectas
38. Distancia entre rectas paralelas
39. Ángulo de dos rectas
40. Recta perpendicular por un punto
41. Punto simétrico respecto a una recta
42. Intersección de dos rectas
43. Distancia entre rectas que se cruzan
44. El plano en el espacio
45. Ecuación general del plano
46. Plano que pasa por tres puntos
47. ¿Pertenece un punto a un plano?
48. Encontrar un punto de un plano
49. Ecuación canónica del plano
50. Distancia de un punto a un plano
51. Posiciones relativas de dos planos
52. La recta como intersección de planos
53. ¿Qué planos definen una recta?
54. Distancia entre planos paralelos
55. Ángulo entre dos planos
56. Posiciones relativas recta – plano
57. Intersección entre recta y plano
58. Ángulo entre recta y plano
59. Recta perpendicular a un plano
60. Punto simétrico respecto a un plano
61. Haz de planos
62. Posiciones relativas de tres planos

3

El espacio tridimensional



Se elige como sistema de referencia:

O es el origen de coordenadas
Ejes X e Y en el plano de escritura
Eje Z saliendo de ese plano

$\vec{i}$: Vector unitario del eje OX $\vec{i}=(1,0,0)$

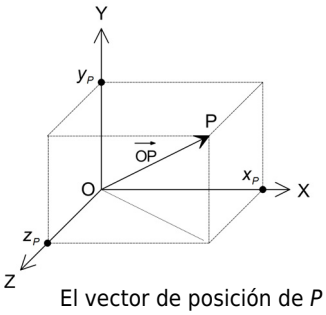
$\vec{j}$: Vector unitario del eje OY $\vec{j}=(0,1,0)$

$\vec{k}$: Vector unitario del eje OZ $\vec{k}=(0,0,1)$

Al espacio tridimensional también se le llama $\mathbb{R}^3$.

4

Puntos en 3D. Vector de posición



Cada punto *P* del espacio está definido por sus coordenadas:

$$P(x_p, y_p, z_p)$$

El vector de posición de un punto *P* del espacio es el que va desde el origen *O* hasta *P*.

El vector de posición de *P* es:

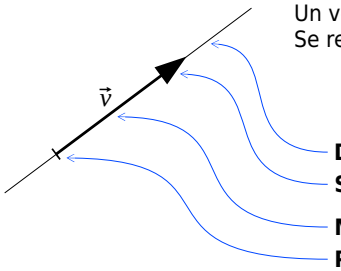
$$\overrightarrow{OP}=(x_p, y_p, z_p)$$

También se puede escribir:

$$\overrightarrow{OP}=x_p\vec{i}+y_p\vec{j}+z_p\vec{k}$$

5

¿Qué es un vector?



Un vector es una magnitud dirigida.
Se representa con una flecha.

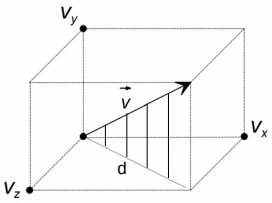
Dirección: La línea de apoyo
Sentido: Lo indica la flecha
Módulo: Lo indica su longitud
Punto de aplicación: Su inicio

Las expresiones que sean vectores llevan una flecha arriba: $\vec{v}$

El módulo de un vector se representa entre barras: $|\vec{v}|$

6

Módulo de un vector



Un vector en el espacio se puede dibujar en una caja. Las dimensiones de la caja son las componentes del vector:

$$\vec{v}=(v_x, v_y, v_z)$$

El módulo de $\vec{v}$ es su longitud: $|\vec{v}|$

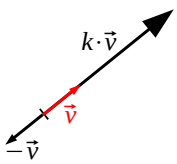
Aplicando Pitágoras en la base: $d^2=v_x{}^2+v_z{}^2$

Pitágoras en el triángulo rayado: $|\vec{v}|^2=d^2+v_y{}^2=v_x{}^2+v_y{}^2+v_z{}^2$

Por lo tanto: $|\vec{v}|=\sqrt{v_x{}^2+v_y{}^2+v_z{}^2}$

7

Producto de un número por un vector



Si multiplicamos un vector por k:

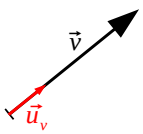
- no cambia su dirección
- no cambia su sentido si k es positivo
- cambia su sentido si k es negativo
- su módulo cambia según el valor de k

Si $\vec{v}=(v_x, v_y, v_z)$ entonces: $k\cdot\vec{v}=(k\cdot v_x, k\cdot v_y, k\cdot v_z)$

$$|k\cdot\vec{v}|=\sqrt{(k\cdot v_x)^2+(k\cdot v_y)^2+(k\cdot v_z)^2}=|k|\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}=|k|\cdot|\vec{v}|$$

8

Vector unitario



El vector $\vec{v}$ mide $|\vec{v}|$

El vector $\vec{u}_v$ mide 1

$\vec{u}_v$ tiene igual dirección y sentido que $\vec{v}$

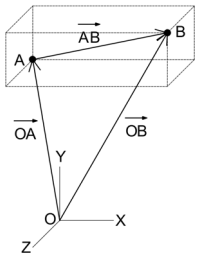
$\vec{u}_v$ Es el vector unitario (o versor) asociado al vector $\vec{v}$

Se cumple que: $\vec{v}=|\vec{v}|\cdot\vec{u}_v$

Por lo que: $\vec{u}_v=\dfrac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ son los vectores unitarios en las direcciones OX, OY, OZ

Un vector es un transportador



El vector $\overrightarrow{AB}$ lleva el punto *A* hasta el *B*

Esto define la suma de vectores:

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}$$

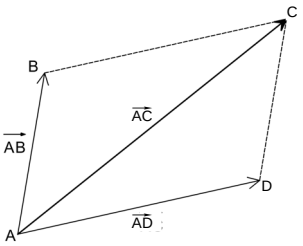
Las coordenadas de *A* cambian a las de *B* tanto como indican las componentes de $\overrightarrow{AB}$

Regla: $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PX}+\overrightarrow{XQ}$ con cualquier X

Los vectores se pueden colocar en cualquier punto de aplicación, por eso se dice que son libres o equipolentes.

Las componentes del vector indican cuánto se desplaza el punto inicial hasta el final.

La regla del paralelogramo



Conocemos la suma de vectores:

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$$

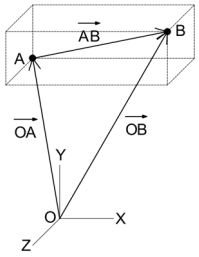
Pero si dibujamos el paralelogramo ABCD vemos que: $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$

De modo que:

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$$

Para sumar dos vectores con un origen común *P*, dibujamos el paralelogramo que forman y trazamos la diagonal desde el punto *P*.

Vector que une dos puntos



Como hemos visto:

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}$$

Por eso, el vector que une *A* y *B* es:

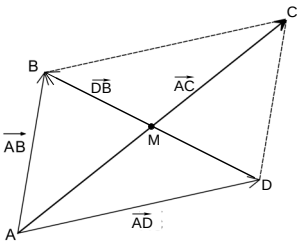
$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$$

Y la distancia de *A* a *B* es: $d=\left|\overrightarrow{AB}\right|$

Regla: $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{XQ}-\overrightarrow{XP}$ con cualquier X

1. Para hallar el vector que une *A* y *B* se restan sus coordenadas.
2. Para restar dos vectores de origen común se unen sus extremos. El vector diferencia acaba en el punto que se escribe primero.

Las diagonales de un paralelogramo



Como ya sabemos:

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$$
$$\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}$$

Se cortan en *M*, que es el punto medio de ambas diagonales.

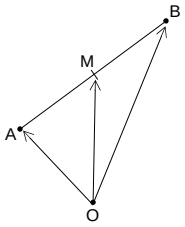
Lo demostramos:

En el triángulo AMB se tiene que cumplir: $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{AB}$

Si $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})$ y $\overrightarrow{MB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD})$

Entonces: $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})+\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD})=\overrightarrow{AB}$

Punto medio entre dos puntos



Ya sabemos que: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$

Y como *M* es el punto medio de *A* y *B*:

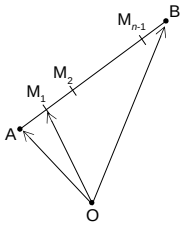
$$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$$

Por lo tanto, el vector de posición de *M* es:

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$$
$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)$$

El punto medio de *A* y *B* es la semisuma de las coordenadas de *A* y *B*.

Dividir un segmento en partes



Se trata de dividir AB en *n* partes:

$$\overrightarrow{AM}_1=\frac{1}{n}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{n}(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})$$
$$\overrightarrow{AM}_2=\frac{2}{n}\overrightarrow{AB}=\frac{2}{n}(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})$$

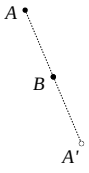
etc.

Por lo tanto: $\overrightarrow{OM}_1=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AM}_1=\overrightarrow{OA}+\frac{1}{n}(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})$

$$\overrightarrow{OM}_2=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AM}_2=\overrightarrow{OA}+\frac{2}{n}(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})$$

etc.

Punto simétrico a otro



Hay que encontrar *A'*, simétrico de *A* respecto a *B*:

Se cumplirá que: $\overrightarrow{BA'}=\overrightarrow{AB}$

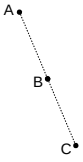
Y como para A': $\overrightarrow{OA'}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BA'}$

Tenemos que:
$$\overrightarrow{OA'}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{AB}=\ldots$$
$$\ldots=\overrightarrow{OB}+(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})=\ldots$$
$$\ldots=2\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$$

O bien, B es el punto medio de A y A': $\overrightarrow{OB}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OA'})$

y basta con despejar $\overrightarrow{OA'}$

¿Están 3 puntos alineados?



Hay que hallar si *A*, *B* y *C* están alineados:

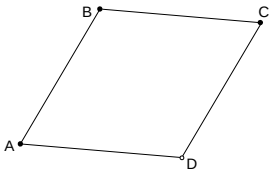
Si *A*, *B*, *C* están alineados, se debe cumplir:

$$\overrightarrow{AC}=k\cdot\overrightarrow{AB}$$
$$\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=k\cdot(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})$$
$$(x_C-x_A,y_C-y_A,z_C-z_A)=k\cdot(x_B-x_A,y_B-y_A,z_B-z_A)$$

A, *B*, *C* están alineados, si: $\frac{x_C-x_A}{x_B-x_A}=\frac{y_C-y_A}{y_B-y_A}=\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$

17

El 4º vértice de un paralelogramo



Dados *A*, *B* y *C* hallar *D*:

Se cumplirá que: $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$

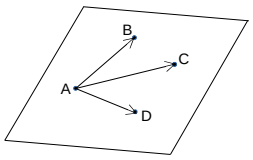
Y como para *D*: $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AD}$

Tenemos que: $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{BC}$

Por lo tanto: $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{BC}=...$
$...=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}$

18

Dados 4 puntos, ¿son coplanarios?



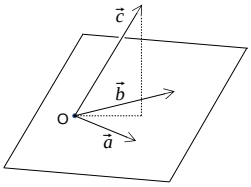
Si *A*, *B*, *C* y *D* están en el mismo plano, uno de los vectores $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}$ es combinación lineal de los otros dos.

Si es así, el determinante que forman los vectores es nulo.

Son coplanarios si: $\begin{vmatrix} x_B-x_A & y_B-y_A & z_B-z_A \\ x_C-x_A & y_C-y_A & z_C-z_A \\ x_D-x_A & y_D-y_A & z_D-z_A \end{vmatrix}=0$

19

¿Forman 3 vectores una base?



Tres vectores son una base del espacio si alcanzan cualquier punto, desde un origen *O*, con una combinación lineal.

$$\overrightarrow{OP}=x\cdot\vec{a}+y\cdot\vec{b}+z\cdot\vec{c}$$

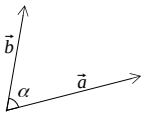
En esa base, $P=(x,y,z)$

Para que formen una base del espacio $\mathbb{R}^3$, basta que sean linealmente independientes, es decir que:

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}\neq 0$$

20

Producto escalar de dos vectores



Para dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ que forman un ángulo α se define el producto escalar así:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\alpha$$

Si $\vec{a}=a_x\cdot\vec{i}+a_y\cdot\vec{j}+a_z\cdot\vec{k}$ y $\vec{b}=b_x\cdot\vec{i}+b_y\cdot\vec{j}+b_z\cdot\vec{k}$

Como $\vec{i}\cdot\vec{i}=\vec{j}\cdot\vec{j}=\vec{k}\cdot\vec{k}=1\cdot1\cdot\cos 0^o=1$
$\vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{i}\cdot\vec{k}=\vec{j}\cdot\vec{k}=1\cdot1\cdot\cos 90^o=0$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=(a_x\cdot\vec{i}+a_y\cdot\vec{j}+a_z\cdot\vec{k})\cdot(b_x\cdot\vec{i}+b_y\cdot\vec{j}+b_z\cdot\vec{k})=...$
$...=a_x\cdot b_x+a_y\cdot b_y+a_z\cdot b_z$

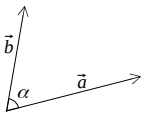
21

Propiedades del producto escalar

- Conmutativa: $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$
- Distributiva: $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$
  $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$
- Asociativa con un número: $(k\,\vec{a})\cdot\vec{b}=k\,(\vec{a}\cdot\vec{b})$
  $\vec{a}\cdot(k\,\vec{b})=k\,(\vec{a}\cdot\vec{b})$
- Si $\vec{a}\perp\vec{b}$, entonces $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$
- Como: $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|\cdot|\vec{a}|\cdot\cos 0^o=|\vec{a}|^2$, entonces: $|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$

22

Ángulo entre dos vectores



Para hallar el ángulo que forman los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ usamos su producto escalar:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\alpha$$

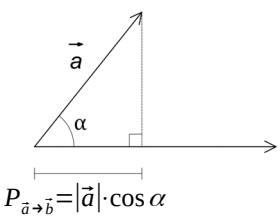
Así que: $\cos\alpha=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$

O bien: $\cos\alpha=\dfrac{a_x\cdot b_x+a_y\cdot b_y+a_z\cdot b_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}$

Siempre se considera como ángulo de dos vectores el menor de los dos que forman, es decir, el ángulo interior.

23

Proyección de un vector sobre otro



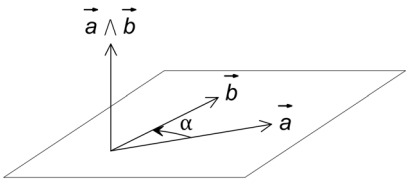
La proyección de un vector sobre otro es el segmento que se forma al "dejar caer" el primero sobre el segundo con un ángulo de 90º.

Como: $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\alpha=P_{\vec{a}\to\vec{b}}\cdot|\vec{b}|$

$$P_{\vec{a}\to\vec{b}}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}$$

24

Producto vectorial de dos vectores



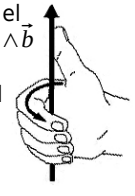
El producto vectorial $\vec{a}\wedge\vec{b}$ de $\vec{a}$ y $\vec{b}$ es un vector.

Es perpendicular a $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

Su sentido es el que da la regla de la mano derecha:

El pulgar da el sentido de $\vec{a}\wedge\vec{b}$

Los dedos indican el giro para ir de $\vec{a}$ a $\vec{b}$ por la vía más corta



Su módulo se define así:

$$|\vec{a}\wedge\vec{b}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\alpha$$

Cálculo del producto vectorial

Como forman un ángulo de 0º: $\vec{i}\wedge\vec{i}=\vec{j}\wedge\vec{j}=\vec{k}\wedge\vec{k}=\vec{0}$

Por formar 90º, tener módulo 1, y por aplicación de la regla de la mano derecha, se obtiene que:
$$\vec{i}\wedge\vec{j}=\vec{k}=-\vec{j}\wedge\vec{i}$$
$$\vec{j}\wedge\vec{k}=\vec{i}=-\vec{k}\wedge\vec{j}$$
$$\vec{k}\wedge\vec{i}=\vec{j}=-\vec{i}\wedge\vec{k}$$

Y se obtiene que:

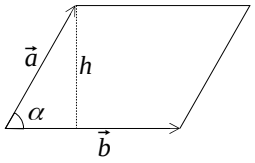
$$\vec{a}\wedge\vec{b}=(a_x\cdot\vec{i}+a_y\cdot\vec{j}+a_z\cdot\vec{k})\wedge(b_x\cdot\vec{i}+b_y\cdot\vec{j}+b_z\cdot\vec{k})=\ldots$$
$$\ldots=(a_yb_z-a_zb_y)\vec{i}+(a_zb_x-a_xb_z)\vec{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\vec{k}$$

Que equivale a un determinante: $\vec{a}\wedge\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\end{vmatrix}$

Propiedades del producto vectorial

- Anticonmutativa: $\vec{a}\wedge\vec{b}=-\vec{b}\wedge\vec{a}$
- Distributiva: $\vec{a}\wedge(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\wedge\vec{b}+\vec{a}\wedge\vec{c}$
  $(\vec{a}+\vec{b})\wedge\vec{c}=\vec{a}\wedge\vec{c}+\vec{b}\wedge\vec{c}$
- Asociativa con un número: $(k\,\vec{a})\wedge\vec{b}=k\,(\vec{a}\wedge\vec{b})$
  $\vec{a}\wedge(k\,\vec{b})=k\,(\vec{a}\wedge\vec{b})$
- Si $\vec{a}\parallel\vec{b}$, entonces $\vec{a}\wedge\vec{b}=0$
- Como $|\vec{a}\wedge\vec{a}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{a}|\cdot\sin 0^o=0$, entonces $\vec{a}\wedge\vec{a}=\vec{0}$

Área de un paralelogramo



Hallemos el área del paralelogramo generado por los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$

Según vemos en el dibujo:
$$h=|\vec{a}|\cdot\sin\alpha$$

Y como el área del paralelogramo es igual a base por altura:
$$S=|\vec{b}|\cdot h=|\vec{b}|\cdot|\vec{a}|\cdot\sin\alpha=|\vec{a}\wedge\vec{b}|$$

El área del paralelogramo es el módulo del producto vectorial.

Relación producto escalar − vectorial

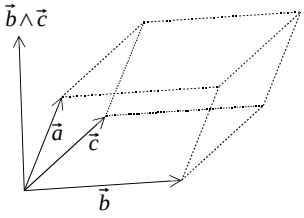
Para el producto escalar: $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\alpha$

Para el producto vectorial: $|\vec{a}\wedge\vec{b}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\alpha$

Elevando ambas igualdades al cuadrado y sumándolas:

$$|\vec{a}\wedge\vec{b}|^2+(\vec{a}\cdot\vec{b})^2=|\vec{a}|^2\cdot|\vec{b}|^2\cdot\sin^2\alpha+|\vec{a}|^2\cdot|\vec{b}|^2\cdot\cos^2\alpha$$
$$|\vec{a}\wedge\vec{b}|^2+(\vec{a}\cdot\vec{b})^2=|\vec{a}|^2\cdot|\vec{b}|^2\cdot(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)$$
$$|\vec{a}\wedge\vec{b}|^2+(\vec{a}\cdot\vec{b})^2=|\vec{a}|^2\cdot|\vec{b}|^2$$

Producto mixto (triple) de vectores



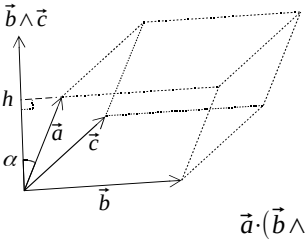
Se define el producto mixto así:
$$[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]=\vec{a}\cdot(\vec{b}\wedge\vec{c})$$

Por lo tanto:
$$[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]=(a_x,a_y,a_z)\cdot\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\b_x&b_y&b_z\\c_x&c_y&c_z\end{vmatrix}$$

$$[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]=\begin{vmatrix}a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\\c_x&c_y&c_z\end{vmatrix}$$

El producto mixto es nulo si los tres vectores son coplanares.

Volumen de un paralelepípedo



$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ definen un paralelepípedo.

$|\vec{b}\wedge\vec{c}|$ es el área de la base del paralelepípedo que se forma y la altura del paralelepípedo es la proyección de $\vec{a}$ sobre $\vec{b}\wedge\vec{c}$.

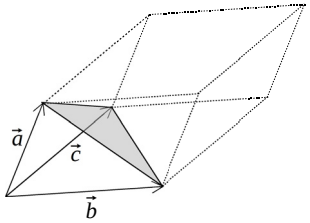
$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\wedge\vec{c})=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}\wedge\vec{c}|\cdot\cos\alpha=S_{base}\cdot h=V$$

Es decir, el volumen del paralelepípedo es: $V=|\vec{a}\cdot(\vec{b}\wedge\vec{c})|$

y se puede calcular con el determinante de los vectores.

(Se toma en valor absoluto por que $\vec{b}\wedge\vec{c}=-\vec{c}\wedge\vec{b}$)

Volumen del tetraedro



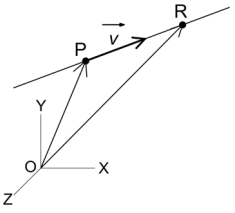
El paralelepípedo definido por $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ tiene un volumen:
$$V=|\vec{a}\cdot(\vec{b}\wedge\vec{c})|$$

El tetraedro que definen $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ es una pirámide cuya base es la mitad de la original e igual altura.

Su volumen es la tercera parte del prisma de igual base y altura:

El volumen del tetraedro es: $V=\frac{1}{3}\cdot V_{\text{mitad}}=\frac{1}{6}\cdot|\vec{a}\cdot(\vec{b}\wedge\vec{c})|$

La recta en el espacio



La recta la forman los puntos $R(x,y,z)$ conseguidos a partir de un punto *P* por desplazamiento según el vector $\vec{v}$

Es decir: $\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OP}+t\cdot\vec{v}$, $t\in\mathbb{R}$

A $\vec{v}$ se le llama vector director de la recta.

En coordenadas: $(x,y,z)=(x_P,y_P,z_P)+t\cdot(v_x,v_y,v_z)$
(ecuación vectorial)

Y separándolas:
$$\begin{cases}x=x_p+v_x\cdot t\\y=y_p+v_y\cdot t\\z=z_p+v_z\cdot t\end{cases}$$
que son las ecuaciones paramétricas de la recta.

Ecuación continua de la recta

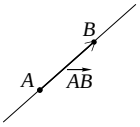
Como tenemos $\begin{cases} x = x_p + v_x \cdot t \\ y = y_p + v_y \cdot t \\ z = z_p + v_z \cdot t \end{cases}$ podemos despejar t e igualar:

$\frac{x - x_p}{v_x} = \frac{y - y_p}{v_y} = \frac{z - z_p}{v_z}$ es la ecuación continua de la recta.

Cada igualdad de esta ecuación produce, como veremos luego, una expresión que equivale a un plano.

Esto ocurre por que una recta puede expresarse como la intersección de dos planos.

Recta que pasa por dos puntos



Si nos dan dos puntos *A* y *B* podemos obtener el vector $\overrightarrow{AB}$ que los une.

$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$

La ecuación continua es: $\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A} = \frac{z - z_A}{z_B - z_A}$

Y las paramétricas: $\begin{cases} x = x_A + (x_B - x_A) \cdot t \\ y = y_A + (y_B - y_A) \cdot t \\ z = z_A + (z_B - z_A) \cdot t \end{cases}$

¿Pertenece un punto a una recta?

Un punto *A* pertenece a una recta si cumple sus ecuaciones al sustituir *x*, *y*, *z* por las coordenadas del punto *A*.

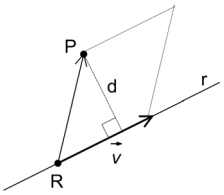
Si la recta está dada por su ecuación continua, al sustituir:

$\frac{x_A - x_p}{v_x} = \frac{y_A - y_p}{v_y} = \frac{z_A - z_p}{v_z}$ Si es cierto, *A* está en la recta.

Si tenemos las ecuaciones paramétricas veremos si el valor de *t* que obtenemos es el mismo en cada coordenada:

$\begin{cases} x_A = x_p + v_x \cdot t \ \rightarrow \ t_1 \\ y_A = y_p + v_y \cdot t \ \rightarrow \ t_2 \\ z_A = z_p + v_z \cdot t \ \rightarrow \ t_3 \end{cases}$ Si $t_1 = t_2 = t_3$, *A* está en la recta.

Distancia de un punto a una recta



La recta *r* pasa por *R* y tiene vector $\vec{v}$.
queremos saber la distancia hasta *P*.

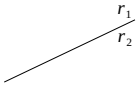
La distancia entre lugares geométricos es la menor posible entre puntos de ambos.

En este caso, *d* es la longitud del segmento perpendicular a *r* que pasa por el punto *P*.

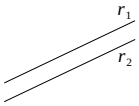
Como se ve en el dibujo, el vector $\overrightarrow{RP}$ y el vector $\vec{v}$ definen un paralelogramo de base $|\vec{v}|$ y altura *d*, la distancia buscada.
Su área: $|\overrightarrow{RP} \wedge \vec{v}|$ es igual a base por altura: $|\vec{v}| \cdot d$, así que:

$$d = \frac{|\overrightarrow{RP} \wedge \vec{v}|}{|\vec{v}|}$$

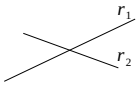
Posiciones relativas de dos rectas



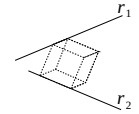
Que sean **coincidentes**. Tienen el mismo vector director y cualquier punto de una está en la otra.



Que sean **paralelas**. Tienen el mismo vector director pero ningún punto de una está en la otra.

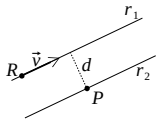


Que **se corten**. No tienen el mismo vector director pero tienen un único punto común.



Que **se crucen**. No tienen el mismo vector director ni tienen punto alguno en común.

Distancia entre rectas paralelas

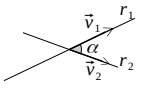


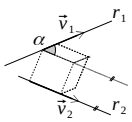
Si dos rectas son paralelas cualquier punto de una de ellas sirve para hallar la distancia hasta la otra recta.

Si r_1 pasa por *R*, y su vector director es $\vec{v}$ elegimos un punto *P* cualquiera de r_2 y aplicamos la fórmula para la distancia de ese punto a la recta r_1.

La distancia entre las rectas es: $d = \frac{|\overrightarrow{RP} \wedge \vec{v}|}{|\vec{v}|}$

Ángulo de dos rectas



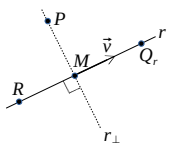


Si r_1 tiene vector director $\vec{v}_1$
y r_2 tiene vector director $\vec{v}_2$

Tanto si se cortan como si se cruzan, el ángulo entre las rectas es el ángulo que forman los vectores directores:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{|\vec{v}_1| \cdot |\vec{v}_2|}$$

Recta perpendicular por un punto



La recta *r* pasa por *R* y tiene vector $\vec{v}$.
queremos la recta perpendicular a *r* por *P*.

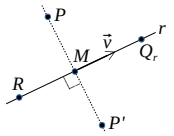
Un punto cualquiera de *r* es:
$Q_r = (x_R + v_x t, y_R + v_y t, z_R + v_z t) \quad t \in \mathbb{R}$

Construimos el vector que une ese punto con *P*: $\overrightarrow{Q_r P}$
y hacemos: $\overrightarrow{Q_r P} \cdot \vec{v} = 0$ para que sea perpendicular a $\vec{v}$.

Esto nos permite hallar el valor de *t* para el que Q_r es el punto *M*.
Sustituimos ese valor de *t* en la expresión de Q_r y tendremos *M*.

La recta buscada tiene como vector director $\overrightarrow{MP}$
y corta a la recta *r* en el punto *M*.

Punto simétrico respecto a una recta



La recta *r* pasa por *R* y tiene vector $\vec{v}$.
queremos el punto P' simétrico de P.

Con el método anterior, un punto de *r* es:
$Q_r=(x_R+v_x t, y_R+v_y t, y_R+v_y t) \quad t\in\mathbb{R}$

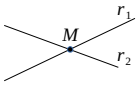
Construimos el vector que une ese punto con *P*: $\overrightarrow{Q_rP}$
y hacemos: $\overrightarrow{Q_rP}\cdot\vec{v}=0$ para que sea perpendicular a $\vec{v}$.

Esto nos permite hallar el valor de *t* para el que Q_r es el punto *M*.
Sustituimos ese valor de *t* en la expresión de Q_r y tendremos *M*.

Como *M* es el punto medio entre P y P' :

$$\overrightarrow{OM}=\tfrac{1}{2}(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OP'}) \quad \rightarrow \quad \overrightarrow{OP'}=2\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OP}$$

Intersección de dos rectas



La recta r_1 pasa por *A* y tiene vector $\vec{v}$.
La recta r_2 pasa por *B* y tiene vector $\vec{w}$.

$$r_1\equiv\begin{cases}x=x_A+v_x\cdot t\\ y=y_A+v_y\cdot t\\ z=z_A+v_z\cdot t\end{cases} \qquad r_2\equiv\begin{cases}x=x_B+w_x\cdot s\\ y=y_B+w_y\cdot s\\ z=z_B+w_z\cdot s\end{cases} \quad s,t\in\mathbb{R}$$

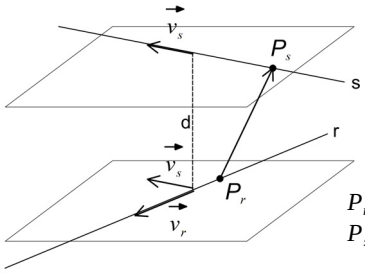
El punto *M* buscado cumple las ecuaciones de ambas rectas.

Igualamos las dos expresiones para x e y, y hallamos s y t.

Si las rectas realmente se cortan, las expresiones para *z* tendrán el mismo valor con los s y t que hemos calculado.

Si es así, el valor de s o el valor de t da las coordenadas de *M*.

Distancia entre rectas que se cruzan



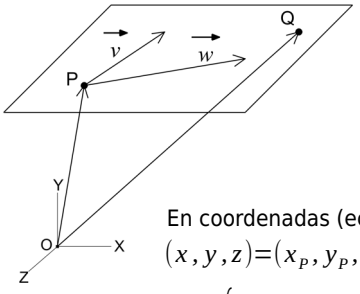
Si dos rectas *r*, *s* se cruzan siempre existe un par de planos paralelos a los que pertenecen esas rectas.
La distancia buscada es *d*.

P_r $\vec{v}_r$ son un punto y un vector de *r*.
P_s $\vec{v}_s$ son un punto y un vector de *s*.

$\overrightarrow{P_rP_s},\vec{v}_r,\vec{v}_s$ forman un paralelepípedo de base $|\vec{v}_r\wedge\vec{v}_s|$ y altura *d*.

Usando la fórmula del volumen: $d=\dfrac{|\overrightarrow{P_rP_s}\cdot(\vec{v}_r\wedge\vec{v}_s)|}{|\vec{v}_r\wedge\vec{v}_s|}$

El plano en el espacio



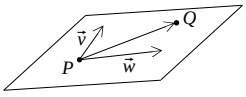
El plano lo forman los puntos $Q(x,y,z)$ que se consiguen a partir de un punto *P* por desplazamiento según $\vec{v}$ y $\vec{w}$

$$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OP}+t\cdot\vec{v}+s\cdot\vec{w} \quad s,t\in\mathbb{R}$$

En coordenadas (ecuación vectorial):
$$(x,y,z)=(x_P,y_P,z_P)+t\cdot(v_x,v_y,v_z)+s\cdot(w_x,w_y,w_z)$$

Y separándolas: $\begin{cases}x=x_p+v_x\cdot t+w_x\cdot s\\ y=y_p+v_y\cdot t+w_y\cdot s\\ z=z_p+v_z\cdot t+w_z\cdot s\end{cases}$ que son las ecuaciones paramétricas del plano.

Ecuación general del plano



Si el plano se genera a partir del punto *P* y de los vectores $\vec{v},\vec{w}$ para cualquier punto $Q(x,y,z)$ del plano: $\overrightarrow{PQ},\vec{v},\vec{w}$ son coplanarios.

Por lo tanto su producto mixto es nulo: $\overrightarrow{PQ}\cdot(\vec{v}\wedge\vec{w})=0$

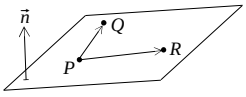
$\vec{v}\wedge\vec{w}$ es perpendicular a $\vec{v}$ y $\vec{w}$ así que también lo es al plano.
Llamemos a ese vector perpendicular (o normal) $\vec{n}=(A,B,C)$

$\overrightarrow{PQ}\cdot(\vec{v}\wedge\vec{w})=\overrightarrow{PQ}\cdot\vec{n}=0 \rightarrow A\cdot(x-x_P)+B\cdot(y-y_P)+C\cdot(z-z_P)=0$

Y si reunimos los factores numéricos en la letra D,

La ecuación general del plano es: $A\cdot x+B\cdot y+C\cdot z+D=0$

Plano que pasa por tres puntos



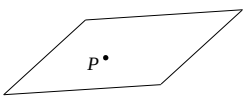
Si nos dan tres puntos *P*, *Q*, *R* obtenemos los vectores $\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PR}$.

Y con ellos, calculamos el vector normal al plano:

$$\vec{n}=\overrightarrow{PQ}\wedge\overrightarrow{PR}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_Q-x_P & y_Q-y_P & z_Q-z_P\\ x_R-x_P & y_R-y_P & z_R-z_P\end{vmatrix}=\ldots=(A,B,C)$$

Calculadas A, B y C sustituiríamos las coordenadas de *P* en:
$A\cdot x+B\cdot y+C\cdot z+D=0$ para hallar D y tener la ecuación general.

¿Pertenece un punto a un plano?



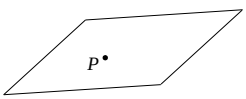
Un punto *P* pertenece a un plano si cumple su ecuación al sustituir *x*, *y*, *z* por las coordenadas del punto *P*.

En el plano con ecuación general: $A\cdot x+B\cdot y+C\cdot z+D=0$

Sustituimos las coordenadas de *P*: $A\cdot x_p+B\cdot y_p+C\cdot z_p+D=0$

Si la igualdad es cierta, el punto *P* pertenece a ese plano.

Encontrar un punto de un plano



En el plano con ecuación general:

$$A\cdot x+B\cdot y+C\cdot z+D=0$$

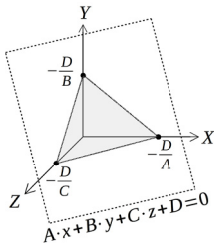
Podemos encontrar un punto del plano dando los valores que queramos a dos de las variables y hallar el valor de la otra.

Si $y=0,z=0 \rightarrow x=-\dfrac{D}{A}$ El plano corta a OX en $\left(-\dfrac{D}{A},0,0\right)$

Si $x=0,z=0 \rightarrow y=-\dfrac{D}{B}$ El plano corta a OY en $\left(0,-\dfrac{D}{B},0\right)$

Si $x=0,y=0 \rightarrow z=-\dfrac{D}{C}$ El plano corta a OZ en $\left(0,0,-\dfrac{D}{C}\right)$

Ecuación canónica del plano



En el plano con ecuación general:

$$A\cdot x+B\cdot y+C\cdot z+D=0$$

Transformamos la ecuación:

$$A\cdot x+B\cdot y+C\cdot z=-D$$

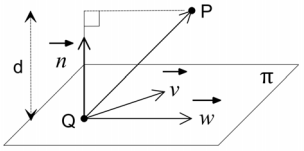
$$\frac{A}{-D}x+\frac{B}{-D}y+\frac{C}{-D}z=1$$

$$\frac{x}{-D/A}+\frac{y}{-D/B}+\frac{z}{-D/C}=1$$

Tenemos la ecuación canónica: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$

Siendo a, b y c los valores en los que el plano corta a cada eje.

Distancia de un punto a un plano



Queremos la distancia del punto *P* al plano: $A\cdot x+B\cdot y+C\cdot z+D=0$

Elegimos un punto cualquiera *Q* del plano y calculamos $\overrightarrow{QP}$

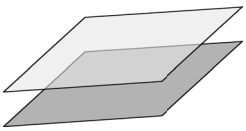
Del plano conocemos su vector normal $\vec{n}=(A,B,C)$

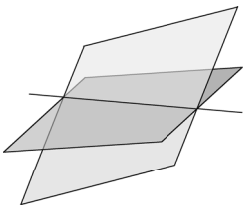
La distancia *d* que buscamos es la proyección de $\overrightarrow{QP}$ sobre $\vec{n}$

$$d=\frac{|\overrightarrow{QP}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|}=\ldots(\text{operando})\ldots=\frac{|A\cdot x_p+B\cdot y_p+C\cdot z_p+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

(El módulo es por si P no está 'encima' del plano sino 'debajo')

Posiciones relativas de dos planos



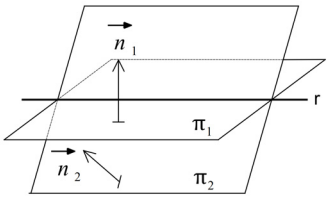


Dos planos solo pueden ser:

1. **Paralelos**
   Tienen el mismo vector normal, no se cortan en ningún punto salvo si son coincidentes.

2. **Se cortan**
   Tienen distinto vector normal, la intersección es una recta.

La recta como intersección de planos



$$r\equiv\begin{cases}\pi_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\ \pi_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$$

Esto corresponde a un sistema compatible e indeterminado.

Su solución daría las ecuaciones paramétricas de la recta.

Pero también se puede calcular la recta de otra forma:

Un punto de la recta es cualquier solución particular del sistema,

y su vector director es: $\vec{v}=\vec{n}_1\wedge\vec{n}_2=(A_1,B_1,C_1)\wedge(A_2,B_2,C_2)$

¿Qué planos definen una recta?

Si tenemos la recta: $\frac{x-x_p}{v_x}=\frac{y-y_p}{v_y}=\frac{z-z_p}{v_z}$

Buscamos dos planos cuya intersección sea esa recta.

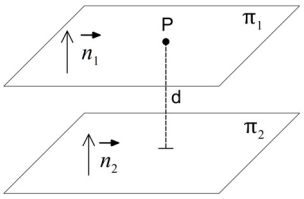
De la igualdad de las dos primeras fracciones, obtenemos uno,
De la igualdad de las dos últimas fracciones, obtenemos otro:

$$\frac{x-x_p}{v_x}=\frac{y-y_p}{v_y}\ \rightarrow\ A_1\cdot x+B_1\cdot y+D_1=0$$

$$\frac{y-y_p}{v_y}=\frac{z-z_p}{v_z}\ \rightarrow\ B_2\cdot y+C_2\cdot z+D_2=0$$

Obtendríamos un tercer plano igualando las fracciones 1ª y 3ª.

Distancia entre planos paralelos

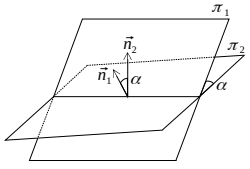


Si dos planos son paralelos $\vec{n}_1=\vec{n}_2$ todos los puntos de uno de ellos están a igual distancia del otro.

Elegimos un punto *P* de uno y aplicamos la fórmula que halla la distancia punto − plano:

$$d=\frac{|A\cdot x_p+B\cdot y_p+C\cdot z_p+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

Ángulo entre dos planos



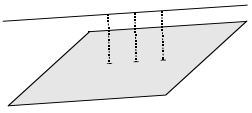
El ángulo α entre dos planos es igual que el ángulo que forman sus vectores normales.

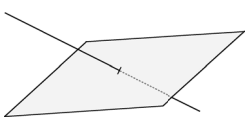
Usando el producto escalar:

$$\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2=|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|\cdot\cos\alpha$$

Tenemos que: $\cos\alpha=\frac{\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|}=\frac{A_1\cdot A_2+B_1\cdot B_2+C_1\cdot C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$

Posiciones relativas recta − plano



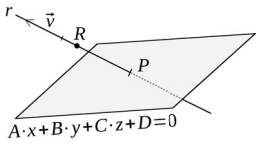


Una recta y un plano solo pueden ser:

1. **Paralelos o coincidentes**
   El vector director de la recta y el vector normal del plano son perpendiculares, no se cortan en ningún punto salvo si son coincidentes.

2. **Se cortan**
   El vector director de la recta y el vector normal del plano forman un ángulo distinto de 90º, se intersectan en un punto.

Intersección entre recta y plano



La recta *r* pasa por *R* con vector $\vec{v}$ buscamos el punto *P* donde corta al plano $A\cdot x+B\cdot y+C\cdot z+D=0$

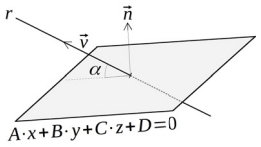
La recta es: $r\equiv\begin{cases}x=x_R+v_x\cdot t\\ y=y_R+v_y\cdot t\\ z=z_R+v_z\cdot t\end{cases}$

Un punto de la recta es: $P=(x_R+v_x\cdot t\,,\,y_R+v_y\cdot t\,,\,z_R+v_z\cdot t)$

Si sustituimos sus coordenadas en: $A\cdot x+B\cdot y+C\cdot z+D=0$

hallaremos para qué valor de *t* el punto *P* pertenece al plano.

Ángulo entre recta y plano



El ángulo α entre recta y plano es el complementario del que forman los vectores $\vec{n}$ y $\vec{v}$.

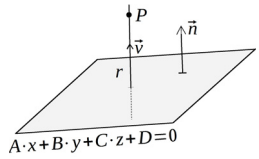
Usando el producto escalar:

$\vec{n}\cdot\vec{v}=|\vec{n}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos(90^o-\alpha)$

Y como $\cos(90^o-\alpha)=\sin\alpha$

Tenemos que: $\sin\alpha=\dfrac{\vec{n}\cdot\vec{v}}{|\vec{n}|\cdot|\vec{v}|}$

Recta perpendicular a un plano

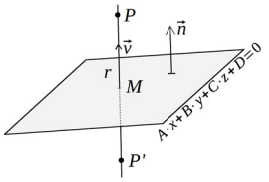


Dado el plano $A\cdot x+B\cdot y+C\cdot z+D=0$ buscamos la recta perpendicular al plano que pasa por el punto *P*.

La recta perpendicular al plano tiene como vector director el vector $\vec{n}$ normal al plano.

La recta buscada es: $\dfrac{x-x_p}{A}=\dfrac{y-y_p}{B}=\dfrac{z-z_p}{C}$

Punto simétrico respecto a un plano



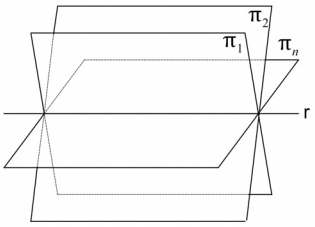
Dado el plano $A\cdot x+B\cdot y+C\cdot z+D=0$ y el punto *P* buscamos el punto *P'* simétrico de *P* respecto al plano.

Lo resolvemos en tres pasos:

1. Calculamos la recta perpendicular al plano que pasa por el punto *P*.
2. Calculamos el punto *M* en el que la recta perpendicular corta al plano.
3. Como *M* es punto medio de *P* y *P'*:

$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OP'})$ → $\overrightarrow{OP'}=2\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OP}$

Haz de planos



El haz de planos de la recta *r* es el conjunto de todos los planos que pasan por esa recta.

Si tenemos una recta dada como la intersección de dos planos:

$r\equiv\begin{cases}\pi_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\ \pi_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$

Se obtiene como una combinación lineal de los planos π_1,π_2:

$\lambda(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\mu(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$

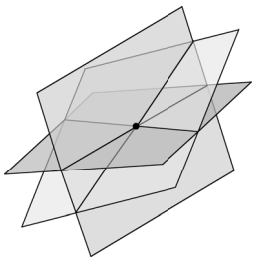
Para hacerlo más simple, si dividimos por λ (queda excluido π_1)

$(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+k(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$

Posiciones relativas de tres planos 1/3

Corresponden a toda la gama de posibles soluciones que puede tener un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas.

Sistema compatible determinado:

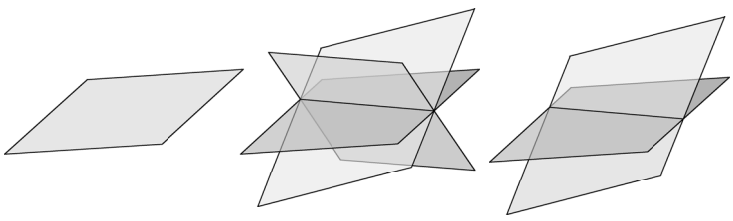


Tres planos que se cortan en un punto, que está en los tres planos.

El sistema tiene una sola solución.

Posiciones relativas de tres planos 2/3

Sistema compatible indeterminado:



Los tres planos son coincidentes.

Solución con dos parámetros

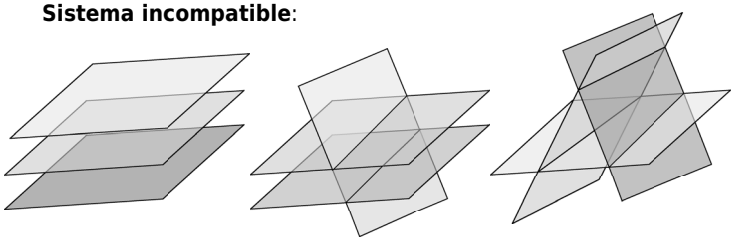
Los tres planos se cortan en una línea recta.

Dos planos coinciden el tercero los corta en una línea recta.

Soluciones con un parámetro

Posiciones relativas de tres planos 3/3

Sistema incompatible:



Tres planos paralelos, o dos son coincidentes y el otro es paralelo.

Dos planos son paralelos y el tercero los corta.

Los tres planos se cortan dos a dos.

Sin solución: ningún punto está simultáneamente en los tres planos

Ejercicios resueltos de Geometría. (Se indica la diapositiva a la que se refiere)

Diapositivas 3 a 11

1. Dibuja la posición de estos puntos: $A(-1,3,2)$; $B(3,2,1)$; $C(2,2,-2)$. [*d04*]
2. ¿Cuál es el vector de posición del punto B? [*d04*]
3. Dibuja, basándote en los puntos anteriores, los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{AC}$. [*d09*]
4. Calcula las componentes de esos tres vectores. Exprésalas de dos formas. [*d04*]
5. Calcula $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$ y comprueba que resulta el vector $\overrightarrow{AC}$. [*d10*]
6. Calcula $|\overrightarrow{AB}|$, $|\overrightarrow{BC}|$ y $|\overrightarrow{AC}|$. [*d06*]
7. Calcula el vector unitario dirigido en la dirección del vector $\overrightarrow{AC}$. [*d08*]
8. ¿Qué expresión en componentes tienen los vectores $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$? [*d03*]
9. Sea el vector $\vec{w}=(2,-1,2)$. Calcula $|\vec{w}|$, $|3\vec{w}|$ y $|-2\vec{w}|$. [*d07*]
10. Dibuja los vectores $\vec{a}=(5,3,0)$ y $\vec{b}=(1,5,0)$ aplicados ambos en el punto $P(-2,-1,0)$. [*d09*]

Diapositivas 12 a 19

11. En el dibujo anterior traza los vectores $\vec{a}+\vec{b}$ y $\vec{a}-\vec{b}$. Compruébalos numéricamente. [*d12*]
12. Un paralelogramo tiene como vértices los puntos EFGH. Dibuja los vectores $\overrightarrow{GE}$ y $\overrightarrow{HF}$. Expresa cada uno como una suma de dos formas, y como una resta de dos formas. [*d12*]
13. Calcula el punto medio *M* entre los puntos $F(3,-1,2)$ y $G(7,1,2)$. Comprueba que el vector $\overrightarrow{FM}$ es igual al vector $\overrightarrow{MG}$ y que ambos son la mitad del vector $\overrightarrow{FG}$. [*d13*]
14. Calcula el punto simétrico de $P(-2,1,3)$ respecto al punto $H(-1,3,2)$. [*d15*]
15. Calcula si los puntos $A(1,4,-2)$, $B(2,6,1)$ y $C(4,10,7)$ están alineados. [*d16*]
16. Si los puntos $D(-1,-3,2)$, $E(8,x,5)$ y $F(5,1,y)$ están alineados, calcula *x* e *y*. [*d16*]
17. $A(2,1,-3)$, $B(4,3,1)$ y $C(3,4,-2)$ son vértices de un paralelogramo. Halla el vértice *D*. [*d17*]
18. Calcula si los puntos $P(0,0,3)$, $Q(1,-5,0)$, $R(-1,0,1)$ y $S(2,-2,5)$ son coplanarios. [d18]
19. Los vectores $\vec{a}=(3,1,2)$, $\vec{b}=(-1,2,1)$ y $\vec{c}=(2,3,-1)$ ¿Son linealmente independientes? ¿Pueden ser una base del espacio $\mathbb{R}^3$? ¿Están en el mismo plano? [*d19*]
20. Encuentra los dos puntos que hacen que el segmento que va de $A(-2,1,1)$ a $B(4,4,-2)$ quede dividido en tres partes iguales. [*d14*]

Diapositivas 20 a 23

21. Si $\vec{p}=(-3,1,-1)$ y $\vec{q}=(2,4,-2)$ Calcula el producto escalar $\vec{p}\cdot\vec{q}$. ¿Qué se deduce de él? [*d21*]
22. Calcula el ángulo que forman los vectores $\vec{a}=(-1,2,2)$ y $\vec{b}=(2,1,2)$. [*d22*]
23. Dados los vectores $\vec{a}=(-1,2,2)$ y $\vec{b}=(2,k,2)$, calcula *k* para que sean perpendiculares. [*d21*]
24. En el triángulo de vértices $A(1,1,0)$, $B(3,-2,1)$ y $C(-2,0,1)$ calcula el ángulo en *B*. [*d22*]
25. Calcula la proyección del vector $\vec{u}=(2,1,1)$ sobre el vector $\vec{n}=(1,-2,2)$. [*d23*]
26. Demuestra que el ángulo que forman $3\vec{a}$ y $2\vec{b}$ es el mismo que el que forman $\vec{a}$ y $\vec{b}$. [*d22*]
27. En un paralelogramo ABCD, el lado AB mide 3 cm y el lado AD mide 4 cm. Si el ángulo en A mide 60º, calcula la longitud de la diagonal AC. *Sugerencia*: $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}|^2=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})^2$. [*d21*]

Diapositivas 24 a 31

28. Calcula el producto vectorial de $\vec{a}=3\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$ y $\vec{b}=(-2,1,-1)$. Calcula su módulo. [*d25*]

29. Calcula el área del triángulo de vértices $P(-1,0,1)$, $Q(3,1,4)$ y $R(1,2,2)$. [*d27*]

30. Calcula un vector que sea perpendicular tanto a $\vec{v}=(2,1,-3)$ como a $\vec{w}=(0,-2,1)$. Comprueba que el vector obtenido es realmente perpendicular a ellos. [*d24*]

31. Indica si las siguientes expresiones corresponden a un número, a un vector o no tienen sentido:
    a) $\vec{u}\cdot(\vec{v}\cdot\vec{w})$ b) $\vec{u}+(\vec{v}\cdot\vec{w})$ c) $\vec{u}+(\vec{v}\wedge\vec{w})$
    d) $(\vec{u}\cdot\vec{v})+(\vec{v}\wedge\vec{w})$ e) $(\vec{u}\wedge\vec{v})\cdot(\vec{v}\wedge\vec{w})$ f) $\vec{u}\cdot(\vec{v}+3\vec{w})$ [*d20, d24*]

32. Calcula el volumen del paralelepípedo cuya base es un rectángulo, con un vértice en el origen de coordenadas y apoyado en los ejes X y Z con longitudes 3 y 5 respectivamente, y siendo el lado que falta el que va desde el origen de coordenadas hasta el punto $(2,1,3)$. [*d30*]

33. Si el producto mixto cumple $\vec{a}\cdot(\vec{b}\wedge\vec{c})=0$ ¿Qué relación hay entre $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$? [*d29*]

34. Un tetraedro tiene como vértices los puntos $A(0,0,0)$, $B(2,0,0)$, $C(0,0,3)$, $D(0,2,0)$. Dibújalo y calcula su volumen. [*d31*]

Diapositivas 32 a 35

35. Escribe en forma vectorial, y paramétrica las ecuaciones de las rectas que coinciden con los ejes OX, OY, OZ. [*d32*]

36. Calcula las ecuaciones vectorial, paramétricas y continua de la recta *r* que pasa por el punto $S(3,-1,2)$ y tiene como vector director $\vec{u}=2\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}$. [*d33*]

37. Calcula la ecuación continua de la recta que pasa por $A(-1,1,-1)$ y $B(2,-1,1)$. [*d34*]

38. Calcula si la recta del problema anterior pasa por el punto $C(5,-2,2)$. [*d35*]

39. La base de un triángulo isósceles tiene vértices $P(2,1,1)$ y $Q(4,3,3)$. El otro vértice es $R(-3,6,4)$. Comprueba que es isósceles y calcula la recta que lo divide por la mitad. [*d34*]

Diapositivas 36 a 43

40. Calcula dónde se cortan las rectas $r_1\equiv\frac{x-5}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+3}{-2}$ y la recta r_2 que pasa por los puntos $A(7,-2,-7)$ y $B(-2,-2,5)$. [*d42*]

41. Calcula el ángulo que forman las rectas del problema anterior. [*d39*]

42. Calcula la distancia del origen de coordenadas a $r:(x,y,z)=(3,-3,2)+(1,2,-1)t$. [*d36*]

43. Calcula el punto simétrico al origen respecto de la recta del problema anterior. [*d41*]

44. Calcula la posición relativa de las rectas $r_1:\frac{x}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z}{-2}$ y $r_2:\frac{x-1}{-1}=\frac{y}{2}=\frac{z-2}{2}$.
    Calcula la distancia entre ellas. [*d37, d43*]

45. Sea *r* la recta que pasa por $A(-2,0,0)$ y $B(0,3,0)$. Calcula la recta que, pasando por un punto de *r*, es perpendicular a *r* y además pasa por $P(4,1,-2)$. [*d40*]

Diapositivas 44 a 49

46. Escribe las ecuaciones paramétricas de un plano que pasa por el punto $F(1,-2,2)$ y que contiene a los vectores $\vec{u}=(-1,0,1)$ y $\vec{v}=(2,1,0)$. [*d44*]

47. Calcula el vector normal al plano del ejercicio anterior y escribe su ecuación general. [*d45*]

48. Calcula por dónde corta a cada uno de los ejes el plano anterior. [*d48*]

49. Calcula la ecuación general del plano que pasa por $A(2,0,1)$, $B(-3,1,1)$ y $C(0,4,2)$. [*d46*]

50. Calcula si el plano $2x-y+z+3=0$ pasa por $H(2,1,1)$. Calcula dos puntos de ese plano. [*d48*]

51. Calcula la ecuación del plano que contiene a la recta $r:\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-3}=\frac{z}{1}$ y que pasa además por el punto $M(0,1,1)$. [*d45*]

Diapositivas 50 a 62

52. Calcula la ecuación continua de la recta $r:\begin{cases} x-y+z+2=0 \\ 2x+y-z+1=0 \end{cases}$. [*d52*]

53. Calcula la posición relativa de estos tres planos:
$\pi_1: x-z+3=0$, $\pi_2: x+y+z+1=0$, $\pi_3: 2x-y+z=0$ [*d62, d63, d64*]

54. Calcula dos planos que se corten en la recta $(x,y,z)=(2,2,0)+(1,-2,2)t$ [*d53*]

55. Calcula la posición relativa de la recta del ejercicio anterior y el plano $\pi: 4x+y-z-2=0$. [*d56*]

56. Calcula el ángulo que forman los planos $\pi: x-y+4=0$ y $\sigma: 2x-y+2z-1=0$. [*d55*]

57. Calcula dónde corta la recta que pasa por $P(-1,1,0)$ y $Q(2,2,1)$ a $\tau: x-y+2z-1=0$. [*d57*]

58. Calcula el ángulo que forman la recta y el plano del ejercicio anterior. [*d58*]

59. Calcula la posición relativa de las rectas $r_1:\begin{cases} 2x+3y-z-1=0 \\ -x+2y+4=0 \end{cases}$ y $r_2:\begin{cases} x-y-2=0 \\ 3x+y-z-5=0 \end{cases}$ [*d37*]

60. Calcula a qué distancia está el punto $P(2,1,-3)$ del plano $\sigma: 6x+2y-3z-20=0$. [*d50*]

61. Calcula el valor de *k* para que los planos $\pi_1: 3x+k\cdot y-z+2=0$ y $\pi_2: x+2y+z+5=0$ sean
a) Paralelos b) Perpendiculares [*d55*]

62. Calcula la ecuación de la recta que es perpendicular al plano $\pi: 2x-3y+z+7=0$ y que pasa por el punto $A(2,-1,-3)$. [*d58*]

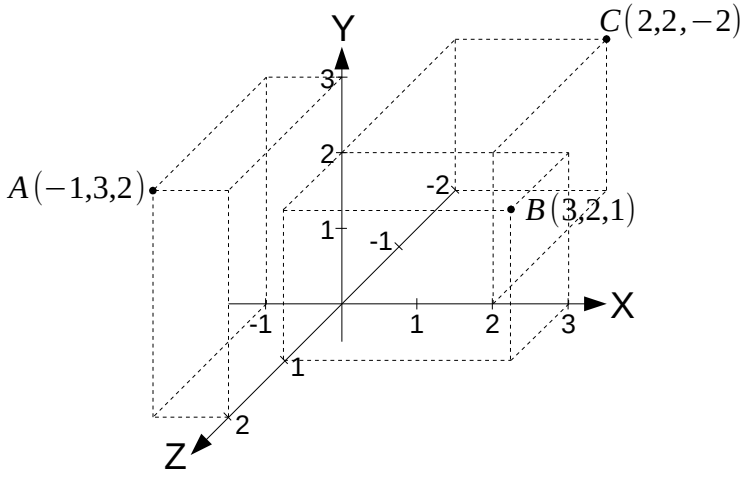
63. Calcula el punto simétrico al punto $C(3,5,-2)$ respecto al plano $x+2y-z+3=0$. [*d60*]

64. Calcula la ecuación del haz de planos que contienen a la recta $r:\frac{x-2}{2}=\frac{y-4}{-4}=\frac{z+1}{-3}$ [*d61*]

65 Calcula la ecuación del plano que contiene a la recta $r:\frac{x-2}{2}=\frac{y-4}{-4}=\frac{z+1}{-3}$ y que dista 4 unidades del origen de coordenadas. *Pista*: Usa la ecuación del haz de planos del ejercicio anterior. [*d61, d50*]

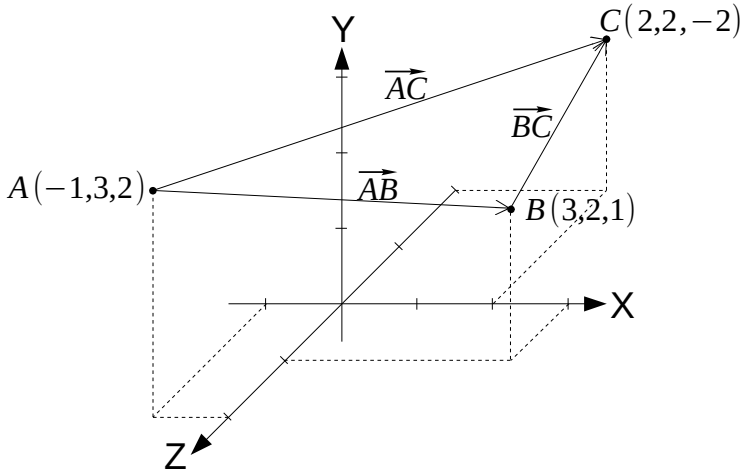
66. Calcula las ecuaciones de los planos que son paralelos a $\pi: x+2y-2z+1=0$ y que están a una distancia de 6 unidades del plano π. [*d50*]

1.



2. $\overrightarrow{OB}=(3,2,1)$ o bien $\overrightarrow{OB}=3\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$

3.



4. $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(3,2,1)-(-1,3,2)=(4,-1,-1)=4\vec{i}-\vec{j}-\vec{k}$
$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=(2,2,-2)-(3,2,1)=(-1,0,-3)=-\vec{i}-3\vec{k}$
$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=(2,2,-2)-(-1,3,2)=(3,-1,-4)=3\vec{i}-\vec{j}-4\vec{k}$

5. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=(4,-1,-1)+(-1,0,-3)=(3,-1,-4)=\overrightarrow{AC}$

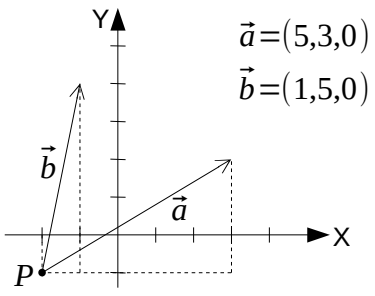
6. $|\overrightarrow{AB}|=|(4,-1,-1)|=\sqrt{4^2+(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$
$|\overrightarrow{BC}|=|(-1,0,-3)|=\sqrt{(-1)^2+0^2+(-3)^2}=\sqrt{10}$
$|\overrightarrow{AC}|=|(3,-1,-4)|=\sqrt{3^2+(-1)^2+(-4)^2}=\sqrt{26}$

7. $u_{\overrightarrow{AC}}=\dfrac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}=\dfrac{(3,-1,-4)}{\sqrt{26}}=\left(\dfrac{3}{\sqrt{26}},-\dfrac{1}{\sqrt{26}},-\dfrac{4}{\sqrt{26}}\right)$

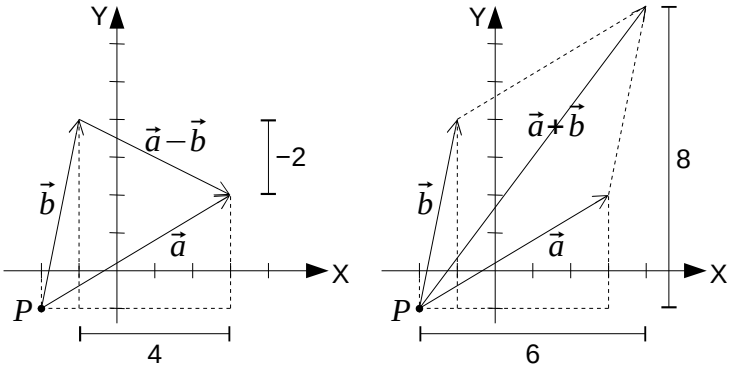
8. $\vec{i}=(1,0,0)\ ;\ \vec{j}=(0,1,0)\ ;\ \vec{k}=(0,0,1)$

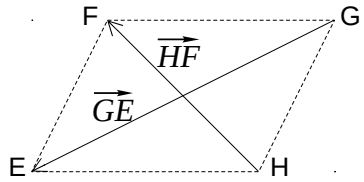
9. $|\vec{w}|=\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}=\sqrt{9}=3$
$|3\vec{w}|=|3|\cdot|\vec{w}|=3\cdot 3=9$
$|-2\vec{w}|=|-2|\cdot|\vec{w}|=2\cdot 3=6$

10. Como las componentes *z* son cero, dibujamos en el plano XY:



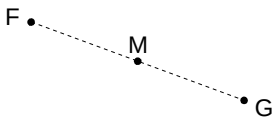
11. $\vec{a}-\vec{b}=(5,3,0)-(1,5,0)=(4,-2,0)$; $\vec{a}+\vec{b}=(5,3,0)+(1,5,0)=(6,8,0)$



12. 

$\overrightarrow{GE}=\overrightarrow{GF}+\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{GH}+\overrightarrow{HE}=\overrightarrow{FE}-\overrightarrow{FG}=\overrightarrow{HE}-\overrightarrow{HG}$
$\overrightarrow{HF}=\overrightarrow{HE}+\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{HG}+\overrightarrow{GF}=\overrightarrow{EF}-\overrightarrow{EH}=\overrightarrow{GF}-\overrightarrow{GH}$

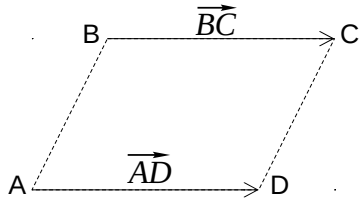
13. El vector de posición del punto medio M entre F y G es:
$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OF}+\overrightarrow{OG})=\frac{1}{2}[(3,-1,2)+(7,1,2)]=\frac{1}{2}(10,0,4)=(5,0,2)$ y el punto medio es $M(5,0,2)$.
$\overrightarrow{FG}=\overrightarrow{OG}-\overrightarrow{OF}=(7,1,2)-(3,-1,2)=(4,2,0)$, y tenemos:
$\overrightarrow{FM}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OF}=(5,0,2)-(3,-1,2)=(2,1,0)=\frac{1}{2}\overrightarrow{FG}$
$\overrightarrow{MG}=\overrightarrow{OG}-\overrightarrow{OM}=(7,1,2)-(5,0,2)=(2,1,0)=\frac{1}{2}\overrightarrow{FG}$



14. Buscamos P' de manera que H sea el punto medio entre P y P': $\overrightarrow{OH}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OP'})$
Despejamos: $2\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OP'}$; $\overrightarrow{OP'}=2\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OP}$
Y por lo tanto: $\overrightarrow{OP'}=2(-1,3,2)-(-2,1,3)=(0,5,1)$. El punto buscado es $P'=(0,5,1)$.

15. Para saber si están alineados $A(1,4,-2)$, $B(2,6,1)$ y $C(4,10,7)$ necesitamos $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$:
$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(2,6,1)-(1,4,-2)=(1,2,3)$
$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=(4,10,7)-(1,4,-2)(3,6,9)$
Si A, B, C están alineados $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ son proporcionales, es decir, las razones entre cada una de sus componentes dan el mismo valor. Veamos si es así:
$\frac{3}{1}=\frac{6}{2}=\frac{9}{3}$ y como son iguales, los puntos están alineados.

16. Para los puntos $D(-1,-3,2)$, $E(8,x,5)$ y $F(5,1,y)$ tenemos:
$\overrightarrow{DE}=(8,x,5)-(-1,-3,2)=(9,x+3,3)$
$\overrightarrow{DF}=(5,1,y)-(-1,-3,2)=(6,4,y-2)$
Para que estén alineados se debe cumplir que: $\frac{9}{6}=\frac{x+3}{4}=\frac{3}{y-2}$
$9\cdot 4=6\cdot(x+3)$ → $36=6x+18$, $18=6x$, $x=3$
$9\cdot(y-2)=6\cdot 3$ → $9y-18=18$, $9y=36$, $y=4$

17. 

$\overrightarrow{BC}=(3,4,-2)-(4,3,1)=(-1,1,-3)$
$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}=(-1,1,-3)$
Por lo tanto:
$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AD}=(2,1,-3)+(-1,1,-3)=(1,2,-6)$

18. Si los puntos $P(0,0,3)$, $Q(1,-5,0)$, $R(-1,0,1)$ y $S(2,-2,5)$ son coplanarios, los vectores $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{PR}$, $\overrightarrow{PS}$ serán linealmente dependientes y su determinante será cero.

$\overrightarrow{PQ}=(1,-5,0)-(0,0,3)=(1,-5,-3)$
$\overrightarrow{PR}=(-1,0,1)-(0,0,3)=(-1,0,-2)$ → $\begin{vmatrix} 1 & -5 & -3 \\ -1 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{vmatrix}=0+20-6-(0+4+10)=0$
$\overrightarrow{PS}=(2,-2,5)-(0,0,3)=(2,-2,2)$

Por lo tanto los 4 puntos están en el mismo plano.

19. Serán linealmente independientes si el determinante que forman es distinto de cero

$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}=-6+2-6-(8+9+1)=-10-18=-28$

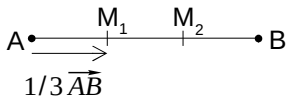
Por lo tanto $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ son linealmente independientes.
Esto equivale a decir que no están en el mismo plano y que forman una base de $\mathbb{R}^3$.

20. Para dividir el segmento que va de $A(-2,1,1)$ a $B(4,4,-2)$ en tres partes necesitamos $\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$:

$\overrightarrow{AB}=(4,4,-2)-(-2,1,1)=(6,3,-3)$ → $\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{3}(6,3,-3)=(2,1,-1)$

Los dos puntos que necesitamos son M_1 y M_2:

$\overrightarrow{OM_1}=\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}=(-2,1,1)+(2,1,-1)=(0,2,0)$
$\overrightarrow{OM_2}=\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}=(-2,1,1)+2(2,1,-1)=(2,3,-1)$



21. Si $\vec{p}=(-3,1,-1)$ y $\vec{q}=(2,4,-2)$

$\vec{p}\cdot\vec{q}=(-3,1,-1)\cdot(2,4,-2)=(-3)\cdot 2+1\cdot 4+(-1)\cdot(-2)=-6+4+2=0$

Por lo tanto los dos vectores son perpendiculares: $\vec{p}\perp\vec{q}$.

22. Para calcular el ángulo que forman $\vec{a}=(-1,2,2)$ y $\vec{b}=(2,1,2)$ necesitamos su producto escalar:

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\alpha$ → $\cos\alpha=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=(-1,2,2)\cdot(2,1,2)=(-1)\cdot 2+2\cdot 1+2\cdot 2=-2+2+4=4$
$|\vec{a}|=\sqrt{(-1)^2+2^2+2^2}=\sqrt{9}=3$, $|\vec{b}|=\sqrt{2^2+1^2+2^2}=\sqrt{9}=3$
$\cos\alpha=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\dfrac{4}{3\cdot 3}=\dfrac{4}{9}$ → $\alpha=\arccos\dfrac{4}{9}\simeq 63.6^o$

23. Si $\vec{a}\perp\vec{b}$ → $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=(-1,2,2)\cdot(2,k,2)=(-1)\cdot 2+2\cdot k+2\cdot 2=-2+2k+4=2k+2$
Si $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ → $2k+2=0$, $k=-1$

24. Si $A(1,1,0)$, $B(3,-2,1)$ y $C(-2,0,1)$ entonces $\overrightarrow{AB}=(2,-3,1)$ y $\overrightarrow{AC}=(-3,-1,1)$.
Como $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-6+3+1=-2$, $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{14}$, $|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{11}$

$\cos\alpha=\dfrac{-2}{\sqrt{14}\sqrt{11}}$ → $\alpha\simeq 99.3^o$

25. La proyección de $\vec{u}=(2,1,1)$ sobre $\vec{n}=(1,-2,2)$ es:

$P_{\vec{u}\to\vec{n}}=\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{n}}{|\vec{n}|}=\dfrac{2\cdot 1+1\cdot(-2)+1\cdot 2}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}=\dfrac{2-2+2}{\sqrt{9}}=\dfrac{2}{3}$

26. El ángulo que forman $3\vec{a}$ y $2\vec{b}$ es:

$\cos\alpha_{3\vec{a},2\vec{b}}=\dfrac{(3\vec{a})\cdot(2\vec{b})}{|3\vec{a}|\cdot|2\vec{b}|}=\dfrac{3\cdot 2\cdot(\vec{a}\cdot\vec{b})}{3\cdot|\vec{a}|\cdot 2\cdot|\vec{b}|}=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\cos\alpha_{\vec{a},\vec{b}}$

27. $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}|^2=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})^2=\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AD}^2+2\cdot\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{AD}|^2+2\cdot|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AD}|\cdot\cos\alpha$

Por lo tanto $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}|^2=3^2+4^2+2\cdot 3\cdot 4\cdot\cos 60^o=9+16+12=37$
Y la longitud de la diagonal es $|\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}|=\sqrt{37}$.

28. $\vec{a}\wedge\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\3&-2&1\\-2&1&-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-2&1\\1&-1\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}3&1\\-2&-1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}3&-2\\-2&1\end{vmatrix}\vec{k}=\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$

Su módulo es $|\vec{a}\wedge\vec{b}|=\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}=\sqrt{3}$

29. Si los vértices son $P(-1,0,1)$, $Q(3,1,4)$ y $R(1,2,2)$ necesitamos los vectores $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$.

$\overrightarrow{PQ}=(3,1,4)-(-1,0,1)=(4,1,3)$, $\overrightarrow{PR}=(1,2,2)-(-1,0,1)=(2,2,1)$

El área del triángulo buscada es la mitad del área del paralelogramo que producen $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$:

$$S=\frac{1}{2}\cdot|\overrightarrow{PQ}\wedge\overrightarrow{PR}|=\frac{1}{2}\cdot\left|\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\4&1&3\\2&2&1\end{vmatrix}\right|=\frac{1}{2}\cdot|-5\vec{i}+2\vec{j}+6\vec{k}|=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{(-5)^2+2^2+6^2}=\frac{\sqrt{65}}{2}\ u^2$$

30. El vector perpendicular tanto a $\vec{v}=(2,1,-3)$ como a $\vec{w}=(0,-2,1)$ es $\vec{v}\wedge\vec{w}$.

$$\vec{v}\wedge\vec{w}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\2&1&-3\\0&-2&1\end{vmatrix}=-5\vec{i}-2\vec{j}-4\vec{k}$$

Comprobemos que es perpendicular a los dos vectores originales:

$\vec{v}\cdot(\vec{v}\wedge\vec{w})=(2,1,-3)\cdot(-5,-2,-4)=2\cdot(-5)+1\cdot(-2)+(-3)\cdot(-4)=-10-2+12=0$

$\vec{w}\cdot(\vec{v}\wedge\vec{w})=(0,-2,1)\cdot(-5,-2,-4)=0\cdot(-5)+(-2)\cdot(-2)+1\cdot(-4)=0+4-4=0$

Y es perpendicular a ambos pues sus productos escalares dan cero.

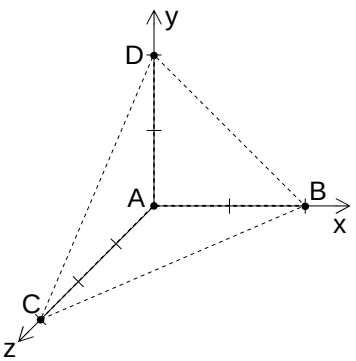
31. a) $\vec{u}\cdot(\vec{v}\cdot\vec{w})$ es un vector pues el paréntesis es un número que por un vector da un vector.
b) $\vec{u}+(\vec{v}\cdot\vec{w})$ no tiene sentido pues el paréntesis es un número y no puede sumarse a un vector.
c) $\vec{u}+(\vec{v}\wedge\vec{w})$ es un vector pues el paréntesis es un vector y sumado a un vector da otro vector.
d) $(\vec{u}\cdot\vec{v})+(\vec{v}\wedge\vec{w})$ no tiene sentido pues un paréntesis es un número y el otro un vector.
e) $(\vec{u}\wedge\vec{v})\cdot(\vec{v}\wedge\vec{w})$ es un número pues cada paréntesis es un vector y su producto un número.
f) $\vec{u}\cdot(\vec{v}+3\vec{w})$ es un número pues el paréntesis es un vector y el producto da un número.

32. Los vectores que generan la base son $(3,0,0)$ y $(0,0,5)$. El otro es el vector $(2,1,3)$.
El volumen del paralelepípedo es el módulo de su producto mixto, o sea de su determinante.

$$V=\left|\begin{vmatrix}3&0&0\\0&0&5\\2&1&3\end{vmatrix}\right|=|0+0+0-(0+15+0)|=|-15|=15\ u^3$$

33. Si $\vec{a}\cdot(\vec{b}\wedge\vec{c})=0$ quiere decir que $\vec{a}$ y $\vec{b}\wedge\vec{c}$ son perpendiculares.
Como $\vec{b}\wedge\vec{c}$ es perpendicular a $\vec{b}$ y a $\vec{c}$, el vector $\vec{a}$ estará en el mismo plano que $\vec{b}$ y $\vec{c}$.

34.



Su volumen es la sexta parte del volumen del paralelepípedo.
Los vectores que necesitamos son:
$\overrightarrow{AB}=(2,0,0)$, $\overrightarrow{AC}=(0,0,3)$, $\overrightarrow{AD}=(0,2,0)$
El determinante que da el volumen del paralelepípedo es:

$$\begin{vmatrix}2&0&0\\0&0&3\\0&2&0\end{vmatrix}=0+0+0-(0+12+0)=-12$$

El volumen del paralelepípedo es su valor absoluto, 12.
Luego el volumen del tetraedro es la sexta parte: $V=2\ u^3$

35. Los ejes pasan por $(0,0,0)$ y sus vectores directores son $\vec{i}=(1,0,0)$, $\vec{j}=(0,1,0)$, $\vec{k}=(0,0,1)$.
Eje OX: $(x,y,z)=(0,0,0)+(1,0,0)t$; $\{x=t,y=0,z=0\}$
Eje OY: $(x,y,z)=(0,0,0)+(0,1,0)t$; $\{x=0,y=t,z=0\}$
Eje OZ: $(x,y,z)=(0,0,0)+(0,0,1)t$; $\{x=0,y=0,z=t\}$

36. $r:(x,y,z)=(3,-1,2)+(2,-1,3)t$, $r:\begin{cases}x=3+2t\\y=-1-t\\z=2+3t\end{cases}$, $r:\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-2}{3}$

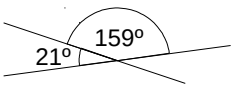
37. Pasa por $A(-1,1,-1)$ y $B(2,-1,1)$ su vector director $\overrightarrow{AB}=(2,-1,1)-(-1,1,-1)=(3,-2,2)$
La ecuación continua es $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z+1}{2}$. (Se ha tomado como punto el A, pudo ser el B).

38. Si pasa por el punto $C(5,-2,2)$ ese punto debe cumplir la ecuación anterior. Veamos:
$\dfrac{5+1}{3}\neq\dfrac{-2-1}{-2}=\dfrac{2+1}{2}$. Por lo tanto el punto C no está en esa recta (o la recta no pasa por C).

39. Si es un triángulo isósceles la distancia PR debe ser igual a la distancia QR.
$\overrightarrow{PR}=(-3,6,4)-(2,1,1)=(-5,5,3)$ → $|\overrightarrow{PR}|=\sqrt{(-5)^2+5^2+3^2}=\sqrt{59}$
$\overrightarrow{QR}=(-3,6,4)-(4,3,3)=(-7,3,1)$ → $|\overrightarrow{PR}|=\sqrt{(-7)^2+3^2+1^2}=\sqrt{59}$
Como $|\overrightarrow{PR}|=|\overrightarrow{QR}|$ el triángulo es isósceles.
La recta que lo divide por la mitad pasa por el punto medio M de P y Q y por el punto R.
$\overrightarrow{OM}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ})=\dfrac{1}{2}[(2,1,1)+(4,3,3)]=\dfrac{1}{2}(6,4,4)=(3,2,2)$ → $M=(3,2,2)$
El vector director es $\overrightarrow{MR}=(-3,6,4)-(3,2,2)=(-6,4,2)$
Este vector se puede dividir por 2 y seguirá apuntando a la misma dirección, de modo que tomaremos como vector director $(-3,2,1)$.
Las ecuaciones paramétricas serán: $\{x=3-3t,\ y=2+2t,\ z=2+t\}$.

40. $r_1\equiv\dfrac{x-5}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+3}{-2}$, las ecuaciones paramétricas son $r_1:\{x=5+2t,\ y=t,\ z=-3-2t\}$
Como r_2 pasa por $A(7,-2,-7)$ y $B(-2,-2,5)$ su vector director es $\overrightarrow{AB}=(-9,0,12)$ que es equivalente a $(-3,0,4)$. Sus ecuaciones paramétricas son $r_2:\{x=7-3s,\ y=-2,\ z=-7+4s\}$.
Para encontrar dónde se cortan igualamos las expresiones para x e y:
$\begin{cases}5+2t=7-3s\\t=-2\end{cases}$ → $t=-2, s=2$
Si sustituimos en las expresiones para z tenemos: $z_1=-3-2\cdot(-2)=1$; $z_2=-7+4\cdot 2=1$
Como son iguales, las dos rectas realmente se cortan.
Introduciendo s en r_2 tenemos que el punto de corte es: $x=7-3\cdot 2=1,\ y=-2,\ z=-7+4\cdot 2=1$
Por lo tanto se cortan en el punto $(1,-2,1)$.

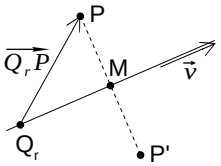
41. El ángulo que forman las rectas es el que forman sus vectores directores.
Estos son $\vec{v}_1=(2,1,-2)$ y $\vec{v}_2=(-3,0,4)$.
$\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2=2\cdot(-3)+1\cdot 0+(-2)\cdot 4=-6+0-8=-14$
$|\vec{v}_1|=\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}=\sqrt{9}=3$; $|\vec{v}_2|=\sqrt{(-3)^2+0^2+4^2}=\sqrt{25}=5$
$\cos\alpha=\dfrac{\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2}{|\vec{v}_1|\cdot|\vec{v}_2|}=\dfrac{-14}{3\cdot 5}=-\dfrac{14}{15}$ → $\alpha\simeq 159^o$ es decir forman 21º:



(Dos rectas siempre forman dos ángulos que suman 180º. Siempre se elige el menor.)

42. $r:(x,y,z)=(3,-3,2)+(1,2,-1)t$.
Un punto de la recta es $R(3,-3,2)$ y un vector director $\vec{v}=(1,2,-1)$; $|\vec{v}|=\sqrt{6}$
Para calcular la distancia a $P(0,0,0)$ hallamos el vector $\overrightarrow{RP}=(0,0,0)-(3,-3,2)=(-3,3,-2)$.
$\overrightarrow{RP}\wedge\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\-3&3&-2\\1&2&-1\end{vmatrix}=\vec{i}-5\vec{j}-9\vec{k}$; $|\overrightarrow{PR}\wedge\vec{v}|=\sqrt{1^2+(-5)^2+(-9)^2}=\sqrt{107}$
Entonces: $d=\dfrac{|\overrightarrow{PR}\wedge\vec{v}|}{|\vec{v}|}=\dfrac{\sqrt{107}}{\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{642}}{6}\ u$

43. En $r:(x,y,z)=(3,-3,2)+(1,2,-1)t$ un punto cualquiera es $Q_r=(3+t,-3+2t,2-t)$.
Construimos el vector que une ese punto con $P(0,0,0)$:
$\overrightarrow{Q_rP}=(3+t,-3+2t,2-t)-(0,0,0)=(3+t,-3+2t,2-t)$.
Ese vector debe ser perpendicular al vector de la recta $\vec{v}=(1,2,-1)$
$\overrightarrow{Q_rP}\cdot\vec{v}=0 \rightarrow (3+t)\cdot 1+(-3+2t)\cdot 2+(2-t)\cdot(-1)=0 \;;\; t=5/6$
El punto M de la recta es $M=(3+\frac{5}{6},-3+2\cdot\frac{5}{6},2-\frac{5}{6})=(\frac{23}{6},-\frac{8}{6},\frac{7}{6})$



Por ser M el punto medio entre P y P': $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OP'}) \rightarrow \overrightarrow{OP'}=2\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OP}$
$\overrightarrow{OP'}=2\cdot(\frac{23}{6},-\frac{8}{6},\frac{7}{6})-(0,0,0)=(\frac{23}{3},-\frac{8}{3},\frac{7}{3})$. El punto buscado es el $(\frac{23}{3},-\frac{8}{3},\frac{7}{3})$.

44. $r_1:\frac{x}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z}{-2}$; $r_2:\frac{x-1}{-1}=\frac{y}{2}=\frac{z-2}{2}$.
Sus vectores directores son $\vec{v}_1=(2,1,-2)$; $\vec{v}_2=(-1,2,2)$. No son iguales ni proporcionales por tanto las rectas no pueden ser coincidentes ni paralelas. Supondremos que se cruzan y calculamos su distancia. Si da cero no se cruzan, se cortan.
(Podríamos calcular el posible punto de corte, es rápido. Pero hago trampa, sé que se cruzan.)
Un punto de r_1 es $P_1=(0,-1,0)$, uno de r_2 es $P_2=(1,0,2)$. $\overrightarrow{P_1P_2}=(1,0,2)-(0,-1,0)=(1,1,2)$
Calculamos el producto vectorial de $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$:
$$\vec{v}_1\wedge\vec{v}_2=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\2&1&-2\\-1&2&2\end{vmatrix}=6\vec{i}-2\vec{j}+5\vec{k} \;;\; |\vec{v}_1\wedge\vec{v}_2|=\sqrt{6^2+(-2)^2+5^2}=\sqrt{65}$$
$\overrightarrow{P_1P_2}\cdot(\vec{v}_1\wedge\vec{v}_2)=(1,1,2)\cdot(6,-2,5)=1\cdot 6+1\cdot(-2)+2\cdot 5=6-2+10=14$
$d=\frac{|\overrightarrow{P_1P_2}\cdot(\vec{v}_1\wedge\vec{v}_2)|}{|\vec{v}_1\wedge\vec{v}_2|}=\frac{14}{\sqrt{65}}=\frac{14\sqrt{65}}{65}$ u es la distancia entre ellas y se cruzan.

45. La recta r pasa por $A(-2,0,0)$ y $B(0,3,0)$.
Un vector director de r es: $\overrightarrow{AB}=(0,3,0)-(-2,0,0)=(2,3,0)$.
Un punto de r, con ese vector director y tomando como punto el B, es: $Q=(2t,3+3t,0)$.
La recta buscada pasa por Q y $P(4,1,-2)$. Su vector director es $\overrightarrow{QP}=(4-2t,-2-3t,-2)$.
Para que esa recta sea perpendicular a r: $\overrightarrow{QP}\cdot\overrightarrow{AB}=0$
$\overrightarrow{QP}\cdot\overrightarrow{AB}=(4-2t,-2-3t,-2)\cdot(2,3,0)=(4-2t)\cdot 2+(-2-3t)\cdot 3=8-4t-6-9t=2-13t$
Y si $\overrightarrow{QP}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ entonces $2-13t=0$; $t=2/13$.
El vector director de la recta que buscamos es $\overrightarrow{QP}=(4-2t,-2-3t,-2)$ con $t=2/13$:
$\overrightarrow{QP}=\left(4-2\cdot\frac{2}{13},-2-3\cdot\frac{2}{13},-2\right)=\left(\frac{48}{13},-\frac{32}{13},-2\right)\equiv(48,-32,-26)\equiv(-24,16,13)$
Como pasa por P, con ese vector director la recta es: $r:\frac{x-4}{-24}=\frac{y-1}{16}=\frac{z+2}{13}$.

46. La ecuación vectorial es $(x,y,z)=(1,-2,2)+(-1,0,1)s+(2,1,0)t$,
y las ecuaciones paramétricas serán: $\begin{cases}x=1-s+2t\\y=-2+t\\z=2+s\end{cases}$

47. El vector normal a ese plano es $\vec{n}=\vec{u}\wedge\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\-1&0&1\\2&1&0\end{vmatrix}=-\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}=(-1,2,-1)=(A,B,C)$
y la ecuación general del plano será $-x+2y-z+D=0$. Como pasa por $(1,-2,2)$ sustituimos para hallar D: $-(1)+2(-2)-(2)+D=0 \rightarrow D=7$ y la ecuación es $-x+2y-z+7=0$.

48. Tenemos el plano $-x+2y-z+7=0$.
Corta a OX en el punto con $y=z=0$. Sustituyendo, $x=7$; es decir, en $(7,0,0)$.
Corta a OY en el punto con $x=z=0$. Sustituyendo, $y=-7/2$; es decir, en $(0,-7/2,0)$
Corta a OZ en el punto con $x=y=0$. Sustituyendo, $z=7$; es decir, en $(0,0,7)$.

49. Si pasa $A(2,0,1)$, $B(-3,1,1)$ y $C(0,4,2)$ sus vectores generadores pueden ser $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.
$\overrightarrow{AB}=(-3,1,1)-(2,0,1)=(-5,1,0)$, $\overrightarrow{AC}=(0,4,2)-(2,0,1)=(-2,4,1)$.
El vector normal al plano es $\vec{n}=\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\-5&1&0\\-2&4&1\end{vmatrix}=\vec{i}+5\vec{j}-18\vec{k}=(1,5,-18)$
Por ello el plano es $x+5y-18z+D=0$. Calculamos D sustituyendo el punto *A*:
$(2)+5(0)-18(1)+D=0$ → $D=16$, y la ecuación del plano es $x+5y-18z+16=0$.

50. $H(2,1,1)$ está en el plano $2x-y+z+3=0$ si cumple su ecuación. Sustituimos para saberlo:
$2(2)-(1)+(1)+3\neq 0$ por lo tanto, el punto *H* no está en ese plano.
Para obtener dos puntos de ese plano vamos a dar valores a dos variables y hallar la otra:
Si $x=1$, $y=1$: $2(1)-(1)+z+3=0$ → $z=-4$ y un punto de ese plano es $(1,1,-4)$.
Si $x=0$, $z=2$: $2(0)-y+2+3=0$ → $y=5$ y otro punto de ese plano es $(0,5,2)$.

51. Si contiene a la recta $r:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{-3}=\dfrac{z}{1}$
sabemos que un punto del plano es $A(1,-1,0)$ y un vector del plano es $\vec{v}=(2,-3,1)$.
Como además pasa por $M(0,1,1)$ otro vector del plano es $\overrightarrow{AM}=(0,1,1)-(1,-1,0)=(-1,2,1)$
El vector normal al plano es $\vec{n}=\vec{v}\wedge\overrightarrow{AM}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\2&-3&1\\-1&2&1\end{vmatrix}=-5\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k}=(-5,-3,1)$
Por ello el plano es $-5x-3y+z+D=0$. Calculamos D sustituyendo el punto *M*:
$-5(0)-3(1)+(1)+D=0$ → $D=2$, y la ecuación del plano es $-5x-3y+z+2=0$.

52. Si $r:\begin{cases}x-y+z+2=0\\2x+y-z+1=0\end{cases}$ resolvamos el sistema indeterminado: $\begin{cases}x-y=-z-2\\2x+y=z-1\end{cases}$
El determinante del sistema es: $|A|=\begin{vmatrix}1&-1\\2&1\end{vmatrix}=3$, y aplicando la regla de Cramer,
$x=\dfrac{1}{3}\begin{vmatrix}-z-2&-1\\z-1&1\end{vmatrix}=\dfrac{1}{3}[(-z-2)\cdot 1-(-1)(z-1)]=\dfrac{1}{3}(-3)=-1$
$y=\dfrac{1}{3}\begin{vmatrix}1&-z-2\\2&z-1\end{vmatrix}=\dfrac{1}{3}[1\cdot(z-1)-2\cdot(-z-2)]=\dfrac{1}{3}(3z+3)=z+1$
Las paramétricas son $r:\begin{cases}x=-1\\y=t+1\\z=t\end{cases}$ es decir, su ecuación continua es $r:\dfrac{x+1}{0}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z}{1}$.
También se podía haber hecho de otra forma:
Dada $r:\begin{cases}x-y+z+2=0\\2x+y-z+1=0\end{cases}$ encontremos una solución particular. Elegimos $z=0$ y resolvemos.
Sumando las ecuaciones $3x+3=0$ → $x=-1$. Y sustituyendo en la 1ª: $y=1$.
Así pues, un punto que está en ambos planos (y por tanto en la recta) es el $(-1,1,0)$.
Para calcular el vector director de la recta usamos que $\vec{n}_1=(1,-1,1)$ y $\vec{n}_2=(2,1,-1)$
$\vec{v}=\vec{n}_1\wedge\vec{n}_2=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&-1&1\\2&1&-1\end{vmatrix}=0\vec{i}+3\vec{j}+3\vec{k}=(0,3,3)$ que simplificado da $\vec{v}=(0,1,1)$
Con el punto y el vector calculados, la ecuación continua es la misma que se obtuvo al resolver el sistema.

53. Estudiaremos el sistema que forman $\pi_1: x-z+3=0$, $\pi_2: x+y+z+1=0$, $\pi_3: 2x-y+z=0$
El determinante de la matriz de coeficientes del sistema es:
$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 1\end{vmatrix}=1+0+1-(-2-1+0)=2-(-3)=5\neq 0$$
Así el sistema tiene solución única [rang(A)=rang(A*)] y los tres planos se cortan en un punto.

54. La recta $(x,y,z)=(2,2,0)+(1,-2,2)t$ se puede escribir así $r: \dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z}{2}$
De la primera igualdad: $(-2)(x-2)=y-2$ → $-2x-y+6=0$ o bien $2x+y-6=0$
De la segunda igualdad: $2(y-2)=-2z$ → $2y+2z-4=0$ o bien $y+z-2=0$.
Los planos $2x+y-6=0$, $y+z-2=0$ se cortarán en la recta dada.

55. La recta $(x,y,z)=(2,2,0)+(1,-2,2)t$ tiene como vector director $\vec{v}=(1,-2,2)$.
El plano $\pi: 4x+y-z-2=0$ tiene como vector normal $\vec{n}=(4,1,-1)$.
Los dos vectores no son proporcionales. Si lo fueran, la recta sería perpendicular al plano.
Veamos su producto escalar: $\vec{n}\cdot\vec{v}=(4,1,-1)\cdot(1,-2,2)=4\cdot 1+1\cdot(-2)+(-1)\cdot 2=4-2-2=0$
Por lo tanto $\vec{n}\perp\vec{v}$ y la recta y el plano son paralelos (y por ello, no se cortan).
Si el producto escalar hubiese dado distinto de cero, la recta cortaría al plano en algún punto.

56. El ángulo que forman dos planos es el que forman sus vectores normales.
Si $\pi: x-y+4=0$ → $\vec{n_\pi}=(1,-1,0)$, si $\sigma: 2x-y+2z-1=0$ → $\vec{n_\sigma}=(2,-1,2)$.
El ángulo que forman lo calculamos mediante su producto escalar.
$\vec{n_\pi}\cdot\vec{n_\sigma}=(1,-1,0)\cdot(2,-1,2)=3$, $|\vec{n_\pi}|=\sqrt{1^2+(-1)^2+0^2}=\sqrt{2}$, $|\vec{n_\sigma}|=\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}=\sqrt{9}=3$
De modo que $\cos\alpha=\dfrac{\vec{n_\pi}\cdot\vec{n_\sigma}}{|\vec{n_\pi}|\cdot|\vec{n_\sigma}|}=\dfrac{3}{3\cdot\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, por lo tanto forman 45º.

57. Calculemos las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por $P(-1,1,0)$ y $Q(2,2,1)$.
Su vector director es $\overrightarrow{PQ}=(2,2,1)-(-1,1,0)=(3,1,1)$. Usando el punto P, tenemos que sus ecuaciones paramétricas son: $\{x=-1+3t$, $y=1+t$, $z=t$.
Por lo tanto un punto cualquiera de la recta es $Q_r=(-1+3t,1+t,t)$
Para ver dónde corta la recta al plano, sustituimos ese punto genérico en la ecuación del plano:
$\tau: x-y+2z-1=0$ → $(-1+3t)-(1+t)+2(t)-1=0$
Y tenemos: $-1+3t-1-t+2t-1=0$, $4t-3=0$ así que $t=3/4$.
La recta corta al plano con $t=3/4$: $Q_r=\left(-1+3\cdot\dfrac{3}{4},1+\dfrac{3}{4},\dfrac{3}{4}\right)=\left(\dfrac{5}{4},\dfrac{7}{4},\dfrac{3}{4}\right)$.

58. El ángulo que forman la recta y el plano es el complementario del que forman el vector director de la recta y el vector normal del plano.
Como $\vec{v}=(3,1,1)$ y $\vec{n}=(1,-1,2)$ tendremos:
$\vec{v}\cdot\vec{n}=(3,1,1)\cdot(1,-1,2)=4$, $|\vec{v}|=\sqrt{3^2+1^2+1^2}=\sqrt{11}$, $|\vec{n}|=\sqrt{1^2+(-1)^2+2^2}=\sqrt{6}$
De modo que $\cos\alpha=\dfrac{\vec{v}\cdot\vec{n}}{|\vec{v}|\cdot|\vec{n}|}=\dfrac{4}{\sqrt{11}\cdot\sqrt{6}}=\dfrac{4\cdot\sqrt{66}}{66}=\dfrac{2\sqrt{66}}{33}$, $\alpha\simeq 60.5^o$
Por lo tanto el ángulo que forman la recta y el plano es $90^o-\alpha\simeq 29.5^o$.

59. Se puede hallar la posición relativa de las rectas de una forma similar al ejercicio 44, pero esta vez lo haremos estudiando el sistema que forman. Son 4 ecuaciones con 3 incógnitas.
Como la matriz de coeficientes del sistema no puede tener rango 4, veamos si tiene rango 3:
$\begin{vmatrix}2 & 3 & -1\\ -1 & 2 & 0\\ 1 & -1 & 0\end{vmatrix}=...=1$ y rang(A)=3, pero para la ampliada $\begin{vmatrix}2 & 3 & -1 & 1\\ -1 & 2 & 0 & -4\\ 1 & -1 & 0 & 2\\ 3 & 1 & -1 & 5\end{vmatrix}=...=0$
por lo que rang(A*)=3. Así, rang(A)=rang(A*) y hay solución única: Se cortan en un punto.

60. La distancia de $P(2,1,-3)$ a $\sigma: 6x+2y-3z-20=0$ la calculamos con la fórmula:

$$d=\frac{|A\cdot x_p+B\cdot y_p+C\cdot z_p+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|6\cdot(2)+2\cdot(1)-3\cdot(-3)-20|}{\sqrt{6^2+2^2+(-3)^2}}=\frac{|12+2+9-20|}{\sqrt{36+4+9}}=\frac{3}{\sqrt{49}}=\frac{3}{7}\ u$$

61. $\pi_1: 3x+k\cdot y-z+2=0 \rightarrow \vec{n}_1=(3,k,-1)$, $\pi_2: x+2y+z+5=0 \rightarrow \vec{n}_2=(1,2,1)$

a) Para ser paralelos los vectores normales deben ser proporcionales.

Se debe cumplir $\frac{3}{1}=\frac{k}{2}=\frac{-1}{1}$ que no tiene solución. Ningún valor de k los hace paralelos.

b) Para ser perpendiculares, los vectores normales deben tener producto escalar cero:

$\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2=(3,k,-1)\cdot(1,2,1)=3+2k-1=2+2k$ que se anula si $k=-1$. Si $k=-1$ $\pi_1\perp\pi_2$.

62. $\pi: 2x-3y+z+7=0 \rightarrow \vec{n}=(2,-3,1)$

La recta que es perpendicular al plano π tiene como vector director el vector normal del plano.
Así pues $\vec{v}=(2,-3,1)$ y como debe pasar por $A(2,-1,-3)$,
su ecuación continua es $\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{-3}=\frac{z+3}{1}$.

63. El punto simétrico C' está en la misma recta perpendicular al plano que el punto original C.
Una recta perpendicular a $x+2y-z+3=0 \rightarrow \vec{n}=(1,2,-1)$ tiene como vector director a $\vec{n}$.
Puesto que pasa por $C(3,5,-2)$ su ecuación es $(x,y,z)=(3,5,-2)+(1,2,-1)t$
y un punto cualquiera de ella es $(3+t,5+2t,-2-t)$.
Calculemos el punto M en el que esa recta corta al plano. Ese punto es el medio entre C y C'.
Sustituimos el punto genérico de la recta perpendicular en la ecuación del plano:
$(3+t)+2\cdot(5+2t)-(-2-t)+3=0 \rightarrow 3+t+10+4t+2+t+3=0$, $6t+18=0$, $t=-3$
Por lo tanto el punto M, con $t=-3$, es $M=(3+(-3),5+2(-3),-2-(-3))=(0,-1,1)$.
Por ser M el punto medio de C y C': $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\cdot(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OC'}) \rightarrow \overrightarrow{OC'}=2\cdot\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OC}$
$\overrightarrow{OC'}=2\cdot(0,-1,1)-(3,5,-2)=(0,-2,2)-(3,5,-2)=(-3,-7,4)$
El punto simétrico a C es $C'=(-3,-7,4)$.

64. Si $r: \frac{x-2}{2}=\frac{y-4}{-4}=\frac{z+1}{-3}$ hallamos dos planos que la contengan de las dos igualdades:
De la primera: $-4(x-2)=2(y-4) \rightarrow -2(x-2)=y-4$, $-2x+4=y-4$, $2x+y-8=0$.
De la segunda: $-3(y-4)=-4(z+1) \rightarrow -3y+12=-4z-4$, $3y-4z-16=0$.
El haz de planos es una combinación lineal de estos dos, tomaremos la forma simple que contiene todos los planos que pasan por la recta salvo el segundo de los que hemos calculado:
$k\cdot(2x+y-8=0)+(3y-4z-16=0) \rightarrow 2k\cdot x+(k+3)y-4z+(-8k-16)=0$

65. Para hallar del conjunto del haz de planos cuál está a 4 unidades del origen, usamos la fórmula

$$d=\frac{|A\cdot x_p+B\cdot y_p+C\cdot z_p+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|2k\cdot 0+(k+3)\cdot 0-4\cdot 0+(-8k-16)|}{\sqrt{(2k)^2+(k+3)^2+(-4)^2}}=\frac{|-8k-16|}{\sqrt{5k^2+6k+25}}=4$$

$-8k-16=\pm 4\sqrt{5k^2+6k+25} \rightarrow \pm(2k+4)=\sqrt{5k^2+6k+25}$, $(2k+4)^2=5k^2+6k+25$
$4k^2+16k+16=5k^2+6k+25$, $k^2-10k+9=0 \Rightarrow k=1$, $k=9$. Sustituyendo en el haz:
Si $k=1$, $2x+4y-4z-24=0 \rightarrow x+2y-2z-12=0$
Si $k=9$, $18x+12y-4z-88=0 \rightarrow 9x+6y-2z-44=0$ son los dos planos solución.

66. Un plano paralelo a $\pi: x+2y-2z+1=0$ tiene su mismo vector normal, luego su ecuación es:
$\sigma: x+2y-2z+D=0$. Queremos que un punto cualquiera de π esté a 6 unidades de σ .
Un punto cualquiera de π lo hallamos con $y=z=0$: $x=-1$, el punto es $P(-1,0,0)$.
Su distancia a σ es: $d=\frac{|A\cdot x_p+B\cdot y_p+C\cdot z_p+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|(-1)+2\cdot(0)-2\cdot(0)+D|}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}}=\frac{|D-1|}{3}=6$
$|D-1|=18$, $D-1=\pm 18 \rightarrow D=19$, -17
Los planos solución son $\sigma_1: x+2y-2z+19=0$ y $\sigma_2: x+2y-2z-17=0$

Ejercicios de rectas y planos. Distancias

1.- Sean los puntos $P(2,1,-1)$, $Q(5,2,-3)$, $R(8,a,b)$ con $a,b \in \mathbb{R}$. Calcula:
a) La distancia entre P y Q b) El valor de *a* y *b* para que P, Q y R estén alineados.

---

a) La distancia entre P y Q es el módulo del vector que los une: $d(P,Q) = |\overrightarrow{PQ}|$

$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = (5,2,-3) - (2,1,-1) = (3,1,-2)$

$d(P,Q) = |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{3^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{14}\ u$

b) P, Q y R estarán alineados si $\overrightarrow{PQ}$ *y* $\overrightarrow{QR}$ son proporcionales.

Como: $\overrightarrow{PQ} = (3,1,-2)$ $\overrightarrow{QR} = (3,a-2,b+3)$ debe cumplirse que:

$$\frac{3}{3} = \frac{a-2}{1} = \frac{b+3}{-2} \rightarrow \begin{cases} a-2=1 & \Rightarrow\ a=+3 \\ b+3=-2 & \Rightarrow\ b=-5 \end{cases}$$

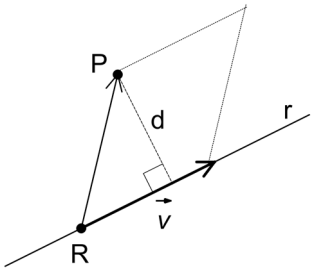
2.- Sean el punto $P(-1,8,-6)$ y la recta: $r \equiv \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{-4} = \frac{z}{1}$.
Calcula si el punto P pertenece a la recta r y, si no pertenece a ella, calcula la distancia de P a r.

Si el punto P pertenece a r, cumplirá su ecuación. Sustituyendo las coordenadas de P en r, tenemos:

$\frac{-1-1}{3} \neq \frac{8+2}{-4} \neq \frac{-6}{1}$ con lo que no cumple la ecuación de r. El punto P no pertenece a la recta r.

La recta r pasa por el punto $R(1,-2,0)$ y tiene como vector director: $\vec{v} = (3,-4,1)$.

Para calcular la distancia entre P y r obtendremos el área del paralelogramo formado por $\overrightarrow{RP}$ y $\vec{v}$.



Como $\overrightarrow{RP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OR} = (-1,8,-6) - (1,-2,0) = (-2,10,-6)$, tendremos:

$$S = |\overrightarrow{RP} \wedge \vec{v}| = \left\| \begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 10 & -6 \\ 3 & -4 & 1 \end{matrix} \right\| = \left| (10-24)\vec{i} - (-2-(-18))\vec{j} + (8-30)\vec{k} \right| =$$

$$= \left| -14\vec{i} - 16\vec{j} - 22\vec{k} \right| = \sqrt{(-14)^2 + (-16)^2 + (-22)^2} = \sqrt{196+256+484} = \sqrt{936}\ u^2$$

Y la distancia entre P y r es la altura de ese paralelogramo correspondiente a la base $|\vec{v}|$.

Como $|\vec{v}| = \sqrt{3^2 + (-4)^2 + 1^2} = \sqrt{9+16+1} = \sqrt{26}\ u$, queda finalmente:

$$d = \frac{|\overrightarrow{RP} \wedge \vec{v}|}{|\vec{v}|} = \frac{\sqrt{936}}{\sqrt{26}} = \sqrt{\frac{936}{26}} = \sqrt{36} = 6\ u$$

3.- Sean los puntos $A(3,-2,4)$, $B(3,1,-2)$ y el plano $\pi \equiv 2x-6y+3z-12=0$.

Calcula cuál de los dos puntos es el más cercano al plano π.

La distancia de un punto P al plano $Ax+By+Cz+D=0$ es: $d=\dfrac{|Ax_P+By_P+Cz_P+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

Para el punto A: $d=\dfrac{|2\cdot 3-6\cdot(-2)+3\cdot 4-12|}{\sqrt{2^2+(-6)^2+3^2}}=\dfrac{18}{\sqrt{49}}=\dfrac{18}{7}\ u$

Para el punto B: $d=\dfrac{|2\cdot 3-6\cdot 1+3\cdot(-2)-12|}{\sqrt{2^2+(-6)^2+3^2}}=\dfrac{18}{\sqrt{49}}=\dfrac{18}{7}\ u$

Los dos puntos están a la misma distancia del plano π.

(El vector $\overrightarrow{AB}=(0,3,-6)$ no es perpendicular a $\vec{n}=(2,-6,3)$ pues $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}\neq 0$. Por lo tanto, los puntos A y B no están 'al mismo lado' del plano π. Uno está 'encima' y otro 'debajo'.
Si estuvieran al mismo lado del plano, A y B pertenecerían a una recta paralela al plano.)

4.- Calcula la distancia entre las rectas: $r\equiv\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-5}{2}=\dfrac{z-5}{2}$, $s\equiv\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z-4}{-2}$

La recta r pasa por $P_r(2,5,5)$ y tiene como vector director: $\vec{v}_r=(1,2,2)$.

La recta s pasa por $P_s(-1,-3,4)$ y tiene como vector director: $\vec{v}_s=(3,2,-2)$.

Los vectores directores no son iguales ni proporcionales, las rectas no son coincidentes ni paralelas.
Por lo tanto, las rectas r y s o bien se cortan o bien se cruzan.
Vamos a calcular la distancia entre ellas suponiendo que se cruzan. Si da cero es que se cortan.

Esa distancia es la altura del paralelepípedo formado por $\overrightarrow{P_rP_s}, \vec{v}_r, \vec{v}_s$ con $\vec{v}_r, \vec{v}_s$ en la base.

$$\vec{v}_r\wedge\vec{v}_s=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 2 & 2\\ 3 & 2 & -2\end{vmatrix}=(-4-4)\vec{i}-(-2-6)\vec{j}+(2-6)\vec{k}=-8\vec{i}+8\vec{j}-4\vec{k}$$

$$\overrightarrow{P_rP_s}=\overrightarrow{OP_s}-\overrightarrow{OP_r}=(-1,-3,4)-(2,5,5)=(-3,-8,-1)$$

$$\overrightarrow{P_rP_s}\cdot(\vec{v}_r\wedge\vec{v}_s)=(-3,-8,-1)\cdot(-8,8,-4)=$$
$$=(-3)\cdot(-8)+(-8)\cdot 8+(-1)\cdot(-4)=24-64+4=-36$$

$$|\vec{v}_r\wedge\vec{v}_s|=|-8\vec{i}+8\vec{j}-4\vec{k}|=\sqrt{(-8)^2+8^2+(-4)^2}=\sqrt{64+64+16}=\sqrt{144}=12$$

$$\Rightarrow\quad d=\frac{V_{paralelepípedo}}{S_{base}}=\frac{|\overrightarrow{P_rP_s}\cdot(\vec{v}_r\wedge\vec{v}_s)|}{|\vec{v}_r\wedge\vec{v}_s|}=\frac{|-36|\,u^3}{12\,u^2}=3\ u$$

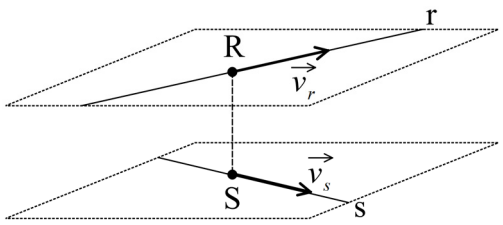
La distancia entre las rectas r y s es $3\ u$. Las dos rectas se cruzan (pues la distancia no es cero).

Ejercicios de rectas y planos. Rectas que se cruzan.

1.- Sean las rectas: $\mathrm{r} \equiv \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-5}{2} = \dfrac{z-5}{2}$, $\mathrm{s} \equiv \dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y+3}{2} = \dfrac{z-4}{-2}$

Calcula el punto de r y el punto de s en los que la distancia entre ambas rectas es mínimo.

Estas rectas son las del último problema de distancias. Vimos que la distancia entre ellas es 3.



Vamos a calcular para qué dos puntos (punto R de la recta r y punto S de la recta s) la distancia es 3 (que es la mínima entre r y s).

Lo vamos a hacer de dos formas. Para ambos necesitamos tener las ecuaciones paramétricas de r y s:

$$\mathrm{r} \equiv \begin{cases} x = 2+t \\ y = 5+2t \\ z = 5+2t \end{cases} \ , \ t \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{s} \equiv \begin{cases} x = -1+3k \\ y = -3+2k \\ z = 4-2k \end{cases} \ , \ k \in \mathbb{R}$$

Así: para un punto $\mathrm{R} \in \mathrm{r} \ \rightarrow \ \overrightarrow{\mathrm{OR}} = (2+t\,,\ 5+2t\,,\ 5+2t)$

y para un punto $\mathrm{S} \in \mathrm{s} \ \rightarrow \ \overrightarrow{\mathrm{OS}} = (-1+3k\,,-3+2k\,,\ 4-2k)$

con lo que: $\overrightarrow{\mathrm{RS}} = \overrightarrow{\mathrm{OS}} - \overrightarrow{\mathrm{OR}} = (-1+3k\,,-3+2k\,,\ 4-2k) - (2+t\,,\ 5+2t\,,\ 5+2t) =$

$= (-3+3k-t\ ,\ -8+2k-2t\ ,\ -1-2k-2t)$

Método 1.

Usaremos que el vector $\overrightarrow{\mathrm{RS}}$ debe ser paralelo al vector $\vec{\mathrm{v}}_\mathrm{r} \wedge \vec{\mathrm{v}}_\mathrm{s}$.

$$\vec{\mathrm{v}}_\mathrm{r} \wedge \vec{\mathrm{v}}_\mathrm{s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = (-4-4)\vec{i} - (-2-6)\vec{j} + (2-6)\vec{k} = -8\vec{i} + 8\vec{j} - 4\vec{k}$$

Por la condición de paralelismo: $\dfrac{-3+3k-t}{-8} = \dfrac{-8+2k-2t}{8} = \dfrac{-1-2k-2t}{-4}$

$$\begin{cases} -3+3k-t = -(-8+2k-2t) & \rightarrow \ 5k-3t = 11 \\ -3+3k-t = 2(-1-2k-2t) & \rightarrow \ 7k+3t = 1 \end{cases}$$

Sumando estas dos ecuaciones tenemos: $12k \ = 12 \ \rightarrow \ k = 1$

Y, sustituyendo en la segunda ecuación: $7 \cdot 1 + 3t = 1 \ \rightarrow \ 3t = -6\ ,\ t = -2$

Por lo tanto, el punto $\mathrm{R} \in \mathrm{r}$ es: $\mathrm{R}\,(2+t\,,\ 5+2t\,,\ 5+2t)\big|_{t=-2} = (0,1,1)$

y el punto $\mathrm{S} \in \mathrm{s}$ es: $\mathrm{S} = (-1+3k\,,-3+2k\,,\ 4-2k)\big|_{k=1} = (2,-1,2)$

Podemos comprobar: $\overrightarrow{\mathrm{RS}} = \overrightarrow{\mathrm{OS}} - \overrightarrow{\mathrm{OR}} = (2-0,-1-1,2-1) = (2,-2,1)$ y $|\overrightarrow{\mathrm{RS}}| = \sqrt{2^2+(-2)^2+1^2} = 3\ u$

Método 2.

Usaremos que el vector $\overrightarrow{RS}$ debe ser perpendicular tanto al vector $\vec{v}_r$ como al vector $\vec{v}_s$, es decir, que se debe cumplir que: $\overrightarrow{RS} \cdot \vec{v}_r = 0$ y $\overrightarrow{RS} \cdot \vec{v}_s = 0$.

Puesto que:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{RS} \cdot \vec{v}_r &= (-3+3k-t\ ,\ -8+2k-2t\ ,\ -1-2k-2t)\cdot(1,2,2) = \\ &= 1\cdot(-3+3k-t)+2\cdot(-8+2k-2t)+2\cdot(-1-2k-2t) = \\ &= -3+3k-t-16+4k-4t-2-4k-4t = \\ &= -21+3k-9t\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{RS} \cdot \vec{v}_s &= (-3+3k-t\ ,\ -8+2k-2t\ ,\ -1-2k-2t)\cdot(3,2,-2) = \\ &= 3\cdot(-3+3k-t)+2\cdot(-8+2k-2t)+(-2)\cdot(-1-2k-2t) = \\ &= -9+9k-3t-16+4k-4t+2+4k+4t = \\ &= -23+17k-3t\end{aligned}$$

Usando que $\overrightarrow{RS} \cdot \vec{v}_r = 0$ y $\overrightarrow{RS} \cdot \vec{v}_s = 0$, tenemos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} -21+\ 3k-9t=0 \ \rightarrow\ \ k-3t=7 \\ -23+17k-3t=0 \ \rightarrow\ 17k-3t=23 \end{cases}$$

Si a la 2ª ecuación le restamos la 1ª: $16k = 16 \ \rightarrow\ k=1$

Y sustituyendo en la 1ª ecuación: $1-3t=7 \ \rightarrow\ 3t=-6\ ,\ t=-2$

Obtenemos la misma solución que con el método 1 (¡por supuesto!).

Por lo tanto, el punto $R \in r$ es: $R(2+t\ ,\ 5+2t\ ,\ 5+2t)\big|_{t=-2} = (0,1,1)$

y el punto $S \in s$ es: $S = (-1+3k\ ,-3+2k\ ,\ 4-2k)\big|_{k=1} = (2,-1,2)$

(Este segundo método de resolución es el que se usa con más frecuencia. Yo prefiero el primero.)

Solución:

Los puntos de las rectas r y s que se encuentran a la mínima distancia ($d = 3\ u$) son:
$R(0,1,1) \in r\ ,\ S(2,-1,2) \in s$

Ejercicios de rectas y planos. Posiciones relativas.

1.- Sean la recta: $\mathrm{r} \equiv \begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ 2x + 2y - z = 2 \end{cases}$ y el plano: $\pi \equiv a\,x + y + z = b$, con $a, b \in \mathbb{R}$.

Calcula sus posiciones relativas en función de los posibles valores de *a* y *b*.

Encontremos un punto y un vector de la recta r.

Un punto de la recta r es una solución particular del sistema que define la recta.

Tomemos $z = 0$ y el sistema se convierte en:

$$\left.\begin{matrix} x - y = 1 \\ 2x + 2y = 2 \end{matrix}\right\} \rightarrow \left.\begin{matrix} x - y = 1 \\ x + y = 1 \end{matrix}\right\}$$

Sumando las ecuaciones: $2x = 2 \rightarrow x = 1$, y de la 2ª ecuación: $1 + y = 1 \rightarrow y = 0$.

Por lo tanto, un punto de la recta r es: $\mathrm{P}(1,0,0)$.

Un vector de la recta r se puede obtener de los vectores normales de los planos que la definen:

$$\vec{\mathrm{v}} = \vec{\mathrm{n}}_1 \wedge \vec{\mathrm{n}}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (1-4)\vec{i} - (-1-4)\vec{j} + (2-(-2))\vec{k} = -3\vec{i} + 5\vec{j} + 4\vec{k}$$

Por lo tanto, el vector director de la recta es: $\vec{\mathrm{v}} = (-3,5,4)$.

Así la recta r es: $\mathrm{r} \equiv (x,y,z) = (1,0,0) + t\,(-3,5,4) = (1-3t\ ,\ 5t\ ,\ 4t) \quad \text{con } t \in \mathbb{R}$.

Una forma alternativa para obtener la recta r es resolver el sistema de los planos que la definen:

$$\mathrm{r} \equiv \begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ 2x + 2y - z = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x - y = 1 - 2z \\ 2x + 2y = 2 + z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x - y = 1 - 2z \\ x + y = 1 + z/2 \end{cases}$$

Sumando las ecuaciones: $2x = 2 - 3/2\,z \rightarrow x = 1 - 3/4\,z$

Tomando $z = 4t$ tenemos: $x = 1 - 3t$

Sustituyendo en la 2ª ecuación: $y = 1 + z/2 - x \rightarrow y = 1 + 2t - (1-3t) = 5t$

y la recta r es: $\mathrm{r} \equiv (x,y,z) = (1-3t\ ,\ 5t\ ,\ 4t) \quad \text{con } t \in \mathbb{R}$

El plano $\pi \equiv a\,x + y + z = b$ tiene como vector normal:

$$\vec{\mathrm{n}} = (a,1,1)$$

y un punto de él es:

$$\mathrm{Q}(0,0,b)$$

[No nos va a hacer falta este punto.]

Las posiciones relativas entre una recta y un plano son 3:

a) La recta es paralela al plano. No hay puntos en común. Forman un sistema incompatible.
El vector de la recta es perpendicular al vector normal del plano.

b) La recta está incluida en el plano. Infinitos puntos en común: Sistema compatible indeterminado.

c) La recta corta al plano en un punto. Tienen un punto en común: Sistema compatible determinado.

Caso (a): $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$, ningún punto de la recta r pertenece al plano π.

Caso (b): $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$, cualquier punto de la recta r pertenece al plano π.

Caso (c): $\vec{v} \cdot \vec{n} \neq 0$, un solo punto de la recta r pertenece al plano π.

Como $\vec{v} \cdot \vec{n} = (-3) \cdot a + 5 \cdot 1 + 4 \cdot 1 = 9 - 3a$

Si $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0 \ \rightarrow \ 9 - 3a = 0 \ \Rightarrow \ a = 3$

Si $a = 3$, el punto de la recta $P(1,0,0)$ pertenece al plano si:

$\pi \equiv a\,x + y + z = b \ \rightarrow \ 3 \cdot 1 + 0 + 0 = b \ \Rightarrow \ b = 3$

Por lo tanto, tendremos que:

a) Si $a = 3$, $b \neq 3$ la recta es paralela al plano.

b) Si $a = 3$, $b = 3$ la recta está incluida en el plano.

c) Si $a \neq 3$ la recta corta al plano en un punto.

Ejercicios de rectas y planos. Haz de planos.

1.- Sea el plano: $\pi \equiv 3x - 6y + 2z - 12 = 0$ y sea P el punto en el que ese plano π corta al eje OY.

Calcula la recta o rectas que pasan por P y están contenidas en el plano π.

Empezamos por calcular el punto P.

Puesto que es un punto del eje OY, es de la forma: $P(0, k, 0)$.

Sustituyendo en la ecuación del plano π:

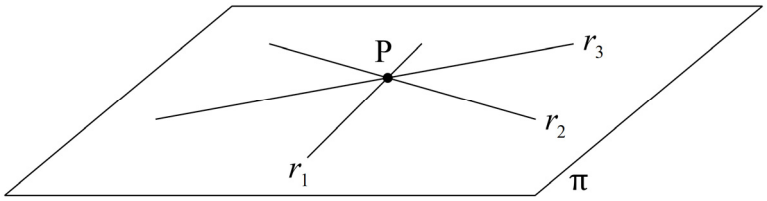
$$3 \cdot 0 - 6 \cdot k + 2 \cdot 0 - 12 = 0 \;\rightarrow\; -6k = 12 \;\Rightarrow\; k = -2$$

Por lo que el punto es: $P(0, -2, 0)$

Siempre que se pueda hacer algún cálculo previo que hará falta después, se hace.

Ahora, hacemos el dibujo cualitativo de lo que plantea el problema.

En los problemas de Geometría es conveniente hacer un dibujo cualitativo siempre que se pueda.



Vemos que hay infinitas rectas que están contenidas en el plano π y pasan por el punto P.

Esto quiere decir que la solución tendrá un parámetro, por ejemplo λ, que al ir variando producirá todas las rectas que nos piden.

El problema resulta difícil a quienes están aprendiendo. Es más sencillo que nos pidan calcular un objeto concreto (punto, recta o plano). Este problema necesita un nivel de abstracción más alto.

Ahora que ya sabemos lo que queremos hay que encontrar un método para hacerlo.

Lo haré de dos formas, aunque el problema se ha propuesto para hacerlo con el primer método.

Método 1.

Este método puede resultar raro por que, para el alumnado, dar una recta se traduce en dar su forma vectorial, paramétrica o continua. O su equivalente, encontrar un punto y un vector de ella.

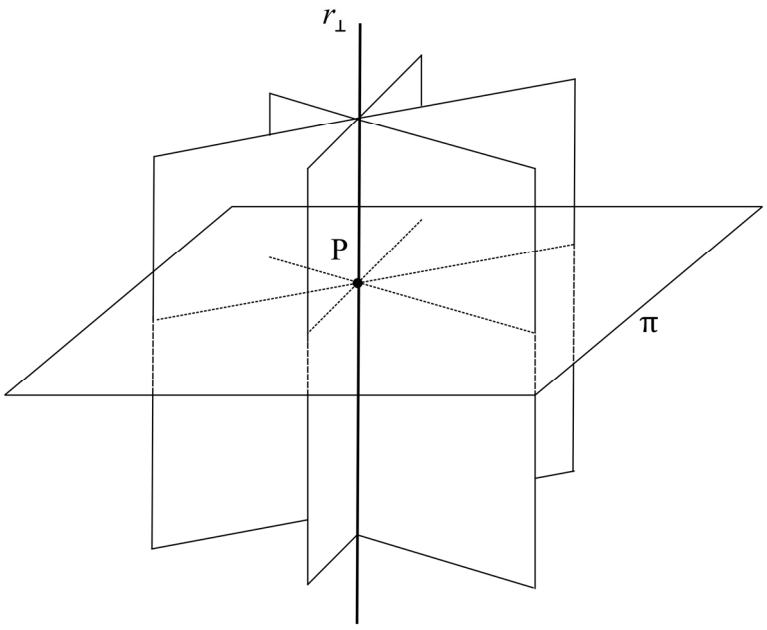
Hay que aprender que dar una recta como el corte de dos planos es una forma perfectamente válida.

Las rectas que debemos encontrar son el corte de cada uno de los planos perpendiculares a π que pasan por el punto P y el propio plano π.

Estos planos perpendiculares son un haz de planos:
El haz que corresponde a una recta perpendicular al plano π que pasa por el punto P.

Veámoslo con un dibujo:

(La recta perpendicular al plano, que genera el haz de planos, la llamo $r_\perp$)



La recta perpendicular $\mathrm{r}_\perp$ *es fácil de obtener: pasa por P y su vector director es el normal al plano.*

Como el vector normal al plano π es: $\vec{n} = (3,-6,2)$ y $P(0,-2,0)$ tendremos:

$$\mathrm{r}_\perp \equiv \frac{x}{3} = \frac{y+2}{-6} = \frac{z}{2}$$

Obtengamos el haz de los planos que pasan por esa recta.

Igualando las fracciones 1ª y 2ª, y las fracciones 1ª y 3ª obtenemos dos planos que pasan por $\mathrm{r}_\perp$:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{3} = \dfrac{y+2}{-6} & \rightarrow \; -6x = 3(y+2)\,,\; -2x = y+2 \;\Rightarrow\; 2x+y+2=0 \\ \dfrac{x}{3} = \dfrac{z}{2} & \rightarrow \; 2x = 3z \;\Rightarrow\; 2x-3z=0 \end{cases}$$

Así que el haz de planos que pasan por la recta $\mathrm{r}_\perp$ es:

$$(2x+y+2=0)+\lambda(2x-3z=0) \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R}$$

Y, reuniendo coeficientes:

$$(2+2\lambda)x+y-3\lambda z+2=0 \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R}$$

Las rectas que buscamos son el corte de cada uno de estos planos con el plano π.

Por lo tanto, la solución del problema es:

$$\mathrm{r} \equiv \begin{cases} (2+2\lambda)x+y-3\lambda z+2=0 \\ 3x-6y+2z-12=0 \end{cases} \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R}$$

Hay que insistir: Dar una recta como corte de dos planos es una solución perfectamente válida.

Vamos con el segundo método de resolución.

Método 2.

Este método puede que te parezca más directo. Vamos a encontrar una expresión para todos los vectores contenidos en el plano. Serán todos los posibles vectores directores de las rectas buscadas.

Recuerda que un plano es generado por un punto y dos vectores independientes.

El plano π tiene como vector normal a: $\vec{n} = (3, -6, 2)$.

Necesitamos dos vectores independientes que generen el plano. Formarán 90º con $\vec{n}$.

Elegimos uno del tipo $\vec{v}_1 = (a, b, 0)$ y otro del tipo $\vec{v}_2 = (0, c, d)$ eso hará que sean independientes.

Por formar 90º con $\vec{n}$ cumplirán que: $\vec{n} \cdot \vec{v}_1 = 0$ y $\vec{n} \cdot \vec{v}_2 = 0$

Por lo tanto tendremos:

$$\vec{n} \cdot \vec{v}_1 = 0 \;\rightarrow\; 3 \cdot a + (-6) \cdot b + 2 \cdot 0 = 0 \;\Rightarrow\; 3a = 6b \;,\; a = 2b$$

El vector $\vec{v}_1$ será: $\vec{v}_1 = (a, b, 0) = (2b, b, 0) \sim (2, 1, 0)$

$$\vec{n} \cdot \vec{v}_2 = 0 \;\rightarrow\; 3 \cdot 0 + (-6) \cdot c + 2 \cdot d = 0 \;\Rightarrow\; 2d = 6c \;,\; d = 3c$$

El vector $\vec{v}_2$ será: $\vec{v}_2 = (0, c, d) = (0, c, 3c) \sim (0, 1, 3)$

Un vector cualquiera del plano π será una combinación lineal de estos dos vectores, es decir:

$$\vec{v} = \alpha \cdot \vec{v}_1 + \beta \cdot \vec{v}_2 \quad \text{con } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Así pues:

$$\vec{v} = \alpha \cdot (2, 1, 0) + \beta \cdot (0, 1, 3) = (2\alpha,\ \alpha + \beta,\ 3\beta) \quad \text{con } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Por lo tanto, las rectas buscadas tienen $\vec{v} = (2\alpha,\ \alpha + \beta,\ 3\beta)$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y pasan por $P(0, -2, 0)$.

La expresión final de las rectas es:

$$r \equiv \frac{x}{2\alpha} = \frac{y+2}{\alpha + \beta} = \frac{z}{3\beta} \quad \text{con } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Como dije antes, el problema resulta complicado por que las infinitas soluciones se obtienen dando valores a los parámetros.

El problema fue propuesto para ilustrar un uso del haz de planos y para recalcar que una recta puede darse como corte de dos planos. O sea, el método 1 es el que yo quería utilizar.

¿Son equivalentes los resultados obtenidos con ambos métodos?

Añado en la página siguiente una breve discusión sobre este asunto.

El texto que viene a continuación va dirigido a las personas interesadas, pero puede resultar difícil.

Por suerte, no es necesario para entender lo que se hizo antes.

Tenemos: $\mathrm{r} \equiv \begin{cases} (2+2\lambda)x + y - 3\lambda z + 2 = 0 \\ 3x - 6y + 2z - 12 = 0 \end{cases}$ con $\lambda \in \mathbb{R}$ y $\mathrm{r} \equiv \dfrac{x}{2\alpha} = \dfrac{y+2}{\alpha+\beta} = \dfrac{z}{3\beta}$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

El punto $P(0,-2,0)$ cumple ambas ecuaciones, fueron construidas de manera que eso es cierto.

Es más complicado ver si el vector director de la recta, para cada valor de λ, es el mismo que con α y β.

La segunda expresión del vector, con α y β, produce más posibilidades puesto que tiene dos parámetros.

Muchas de ellas solo producen un vector de igual dirección, pero diferente módulo:

Por ejemplo, con $\alpha = 1$ y $\beta = 3 \rightarrow (2,4,9)$; con $\alpha = 2$ y $\beta = 6 \rightarrow (4,8,18)$ tienen la misma dirección.

(Y ocurrirá igual con otros múltiplos de $\alpha = 1$, $\beta = 3$)

Comencemos averiguando si para cada valor de λ en la expresión de la recta como corte de 2 planos, existen valores de α y β en la segunda expresión que produzcan el mismo vector director.

El vector director de la recta dada como intersección de dos planos es:

$$\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2+2\lambda & 1 & -3\lambda \\ 3 & -6 & 2 \end{vmatrix} = (2-18\lambda)\,\vec{i} - (4+4\lambda+9\lambda)\,\vec{j} + (-12-12\lambda-3)\,\vec{k} =$$

$$= (2-18\lambda)\,\vec{i} + (-4-13\lambda)\,\vec{j} + (-15-12\lambda)\,\vec{k} = \qquad (*)$$

$$= 2(1-9\lambda)\,\vec{i} + (-4-13\lambda)\,\vec{j} + 3(-5-4\lambda)\,\vec{k} = \ldots$$

$$\left[\text{Eligiendo: } \begin{cases} \alpha = 1-9\lambda \\ \beta = -5-4\lambda \end{cases} \rightarrow \alpha + \beta = -4-13\lambda \right]$$

$$\ldots = 2\alpha\,\vec{i} + (\alpha+\beta)\,\vec{j} + 3\beta\,\vec{k}$$

Por lo tanto, para cada λ, podemos encontrar valores de α y β que produzcan el mismo vector director.

Y veamos qué sucede si tenemos valores de α y β para el vector director de r.
¿Existirá siempre un valor de λ que produzca un vector director equivalente?

Para que sea así debemos resolver:

$$\begin{cases} 2\alpha = k \cdot 2(1-9\lambda) & \rightarrow \alpha = k \cdot (1-9\lambda) \\ \alpha + \beta = k \cdot (-4-13\lambda) & \\ 3\beta = k \cdot 3(-5-4\lambda) & \rightarrow \beta = k \cdot (-5-4\lambda) \end{cases} \Rightarrow \frac{\alpha}{\beta} = \frac{1-9\lambda}{-5-4\lambda}$$

Despejando λ se obtiene:

$$\lambda = \frac{5\alpha + \beta}{9\beta - 4\alpha}$$

Y, dados α y β, obtenemos un vector director equivalente con esa elección de λ.

Solo falla en el caso en que $9\beta - 4\alpha = 0$. Esto ocurre porque en la expresión del haz de planos (en el método 1) hemos usado la versión 'reducida' con un solo parámetro que deja fuera un plano. Este plano que queda fuera es el $2x - 3z = 0$ que produce la recta de vector director $\vec{v} = (18,13,12)$ con $9\beta = 4\alpha$.

En definitiva, las dos expresiones iniciales son equivalentes, salvo para la recta con $\vec{v} = (18,13,12)$.

Ejercicios de rectas y planos. Varios.

1.- Sea el plano $\pi \equiv x-2y+2z+3=0$. Calcula el plano o planos que distan 2 unidades del plano π.

Los planos buscados deben ser paralelos a π. Si dos planos se cortan, la distancia entre ellos es cero.

Y deben ser 2, uno 'encima' y otro 'debajo' del plano π.

Por ser paralelos al plano π sus ecuaciones son de la forma: $\pi_{\parallel} \equiv x-2y+2z+\mathrm{D}=0$.

Un punto cualquiera de estos planos será $\mathrm{P}(x_0, y_0, z_0)$ y cumplirá que: $x_0-2y_0+2z_0+\mathrm{D}=0$.

La distancia entre dos planos paralelos es igual a la distancia de un punto cualquiera de ellos al otro plano. Al ser paralelos, da igual qué punto del primer plano se escoja.

Así pues, si la distancia debe ser 2 unidades, tendremos:

$$\mathrm{d}(\pi_{\parallel}, \pi) = \mathrm{d}(\mathrm{P}, \pi) = \frac{|x_0-2y_0+2z_0+3|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}} \;\rightarrow\; 2 = \frac{|x_0-2y_0+2z_0+3|}{3} \;\Rightarrow\; |x_0-2y_0+2z_0+3| = 6$$

Pero como el punto P cumple que $x_0-2y_0+2z_0+\mathrm{D}=0$, tenemos: $x_0-2y_0+2z_0=-\mathrm{D}$

Y la ecuación que tenemos se transforma en:

$$|-\mathrm{D}+3| = 6$$

Es decir: $-\mathrm{D}+3=\pm 6 \;\rightarrow\; \mathrm{D}=3\pm 6 \;\Rightarrow\; \mathrm{D}_1=9,\ \mathrm{D}_2=-3$

Los planos buscados son: $\pi_1 \equiv x-2y+2z+9=0$ y $\pi_2 \equiv x-2y+2z-3=0$

2.- Sean los planos $\pi_1 \equiv 2x-4y+z=4$, $\pi_2 \equiv 2z=3$ y sea el punto $\mathrm{P}(2,5,0)$.
Calcula la ecuación de la recta r que es paralela a los planos π_1 y π_2 y pasa por el punto P.

Los planos π_1 y π_2 no son paralelos, puesto que sus vectores normales no son proporcionales.

Por lo tanto, π_1 y π_2 se cortan en una recta.

La recta que buscamos es paralela a esa recta, pues así será paralela tanto a π_1 como a π_2.

La recta en la que se cortan π_1 y π_2 tiene como vector director:

$$\vec{\mathrm{v}} = \vec{\mathrm{n}}_1 \wedge \vec{\mathrm{n}}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (-8-0)\vec{i} - (4-0)\vec{j} + (0-0)\vec{k} = (-8,-4,0) \sim (2,1,0)$$

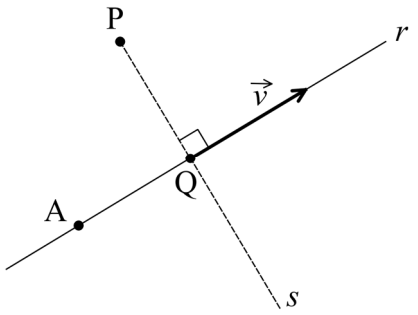
(El vector marca una dirección, por eso lo podemos 'simplificar').

La recta buscada pasa por: $\mathrm{P}(2,5,0)$ y su vector director es: $\vec{\mathrm{v}} = (2,1,0)$.

Sus ecuaciones paramétricas son: $\mathrm{r} \equiv \begin{cases} x = 2+2t \\ y = 5+t \\ z = 0 \end{cases}$ con $t \in \mathbb{R}$

3.- Sea la recta r que pasa por $A(2,-2,3)$ y tiene como vector director $\vec{v}=(3,1,-2)$. Y sea el punto $P(10,-4,0)$. Calcula la recta s que corta perpendicularmente a la recta r y pasa por el punto P.

La situación es la que aparece en este dibujo:



La recta r tiene como ecuaciones paramétricas:

$$r \equiv \begin{cases} x = 2+3t \\ y = -2+t \\ z = 3-2t \quad \text{con } t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

De modo que un punto cualquiera Q de ella es:

$$Q(2+3t,-2+t,3-2t)$$

Queremos encontrar el punto Q de r tal que el vector $\overrightarrow{QP}$ sea perpendicular a $\vec{v}$: $\overrightarrow{QP}\cdot\vec{v}=0$

El vector $\overrightarrow{QP}$ es:

$$\overrightarrow{QP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OQ}=(10,-4,0)-(2+3t,-2+t,3-2t)=(8-3t,-2-t,-3+2t)$$

Con lo que el producto escalar es:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{QP}\cdot\vec{v} &= 3\cdot(8-3t)+1\cdot(-2-t)+(-2)\cdot(-3+2t)= \\ &= 24-9t-2-t+6-4t= \\ &= 28-14t\end{aligned}$$

Si $\overrightarrow{QP}\cdot\vec{v}=0 \;\rightarrow\; 28-14t=0 \;\Rightarrow\; t=2$

El punto Q, donde se cortan las rectas r y s será:

$$Q(2+3t,-2+t,3-2t)\big|_{t=2}=(8,0,-1)$$

y el vector director de la recta s será:

$$\overrightarrow{QP}=(8-3t,-2-t,-3+2t)\big|_{t=2}=(2,-4,1)$$

La recta s que pasa por el punto P y tiene como vector director a $\overrightarrow{QP}$ será:

$$r \equiv \frac{x-10}{2}=\frac{y+4}{-4}=\frac{z}{1}$$

Ejercicios de rectas y planos. Proyecciones.

1.- Sea el triángulo de vértices $A(2,1,3)$, $B(2,2,4)$, $C(3,0,6)$. Calcula el ángulo en el vértice B. Calcula cuánto mide la proyección del lado AB sobre el lado AC.

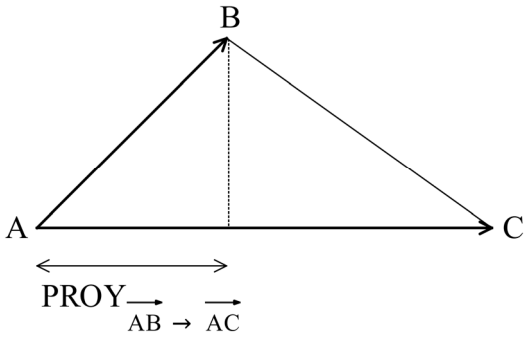
Los vectores correspondientes a cada lado son:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (2,2,4) - (2,1,3) = (0,1,1)$$
$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = (3,0,6) - (2,1,3) = (1,-1,3)$$
$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = (3,0,6) - (2,2,4) = (1,-2,2)$$

El ángulo en B es el ángulo que forman los vectores $\overrightarrow{BA} = (0,-1,-1)$ y $\overrightarrow{BC} = (1,-2,2)$:

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \cdot 1 + (-1) \cdot (-2) + (-1) \cdot 2 = 0 + 2 - 2 = 0$$

Con lo que son perpendiculares, por lo que el ángulo en el vértice B es 90º.

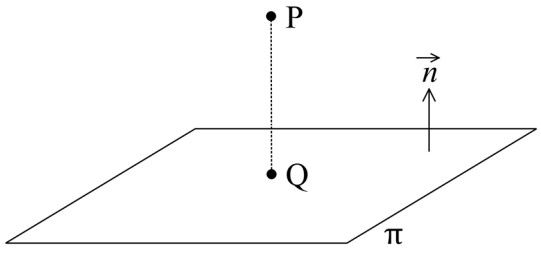


La proyección del vector $\overrightarrow{AB}$ sobre el vector $\overrightarrow{AC}$ es:

$$P = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}$$

Así pues: $P = \dfrac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|} = \dfrac{0 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 3}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 3^2}} = \dfrac{2}{\sqrt{11}} = \dfrac{2\sqrt{11}}{11}\ u$

2.- Sean el plano $\pi \equiv 2x - y + 2z = 4$ y el punto $P(5,-1,1)$.
Calcula el punto que es la proyección perpendicular de P sobre el plano π.



La proyección perpendicular de P sobre el plano π es el punto Q.

El punto Q es el punto en el que la recta perpendicular a π que pasa por P, corta al plano π.

La recta perpendicular al plano que pasa por $P(5,-1,1)$ tiene como vector director $\vec{n} = (2,-1,2)$.

Sus ecuaciones paramétricas son: $r \equiv \begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = -1 - t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$ con $t \in \mathbb{R}$

El corte de esa recta con el plano p lo encontramos sustituyendo esas ecuaciones en la ecuación de π:

$$2(5+2t) - (-1-t) + 2(1+2t) = 4 \ \rightarrow\ 10 + 4t + 1 + t + 2 + 4t = 4\ ,\ 9t = -9 \ \Rightarrow\ t = -1$$

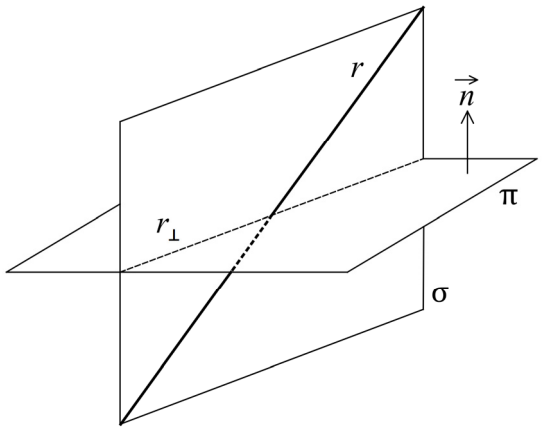
Por lo tanto, el punto Q es el punto de la recta r con $t = -1$:

$$Q(5+2t, -1-t, 1+2t)\big|_{t=-1} = (3,0,-1)$$

3.- Sean el plano $\pi \equiv 2x - y + 2z = 4$ y la recta $\mathrm{r} \equiv \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z}{1}$.

Calcula la recta que es la proyección perpendicular de r sobre el plano π.

La proyección perpendicular de r sobre el plano π es la recta $\mathrm{r}_\perp$ del dibujo:



Esa recta $\mathrm{r}_\perp$ es la que definen los planos π (el dato del problema) y σ.

El plano σ es el plano perpendicular a π que contiene a la recta r.

La recta r pasa por (1,1,0) y su vector director es: $\vec{v} = (1,-1,1)$.

El plano σ contiene a la recta r así que pasa por (1,1,0) y uno de sus vectores es $\vec{v} = (1,-1,1)$.

El otro vector que define a σ es el vector normal a π: $\vec{n} = (2,-1,2)$.

Así, la ecuación de σ es:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \;\rightarrow\; (x-1)(-2+1) - (y-1)(2-2) + z(-1+2) = 0$$

Simplificando: $(x-1)(-1) + z = 0$, $-x+1+z = 0 \;\Rightarrow\; x - z = 1$

Por lo tanto, la recta $\mathrm{r}_\perp$ definida por la intersección de π y σ es:

$$\mathrm{r}_\perp \equiv \begin{cases} 2x - y + 2z = 4 \\ x - z = 1 \end{cases}$$ (Esto puede darse como la solución final.)

Podemos obtener las ecuaciones paramétricas de $\mathrm{r}_\perp$ resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} 2x - y + 2z = 4 \;\rightarrow\; 2x + 2z = 4 + y \;\Rightarrow\; x + z = 2 + y/2 \\ x - z = 1 \end{cases}$$

Sumando las dos ecuaciones: $2x = 3 + y/2 \;\rightarrow\; x = 3/2 + y/4$

Eligiendo $y = 2 + 4t$ tenemos: $x = 3/2 + (2+4t)/4 = 3/2 + (1+2t)/2 = 2 + t$

Y de la segunda ecuación: $z = x - 1 = (2+t) - 1 = 1 + t$

$$\mathrm{r}_\perp \equiv (x,y,z) = (2+t, 2+4t, 1+t) \quad \text{con } t \in \mathbb{R}$$

Ejercicios de rectas y planos. Distancias y Ángulos.

1.- Sean el plano $\pi \equiv 2x-2y+z-4=0$ y la recta $\mathrm{r} \equiv \begin{cases} x-y=3 \\ 2y+z=4 \end{cases}$.

Calcula: a) Los puntos de r que están situados a 2 unidades de π. b) El ángulo que forman r y π.

Empecemos por convertir la expresión de la recta r a su forma paramétrica.

Un punto de r es una solución particular del sistema que la define. Tomemos $z=0$.

De la 2ª ecuación: $2y+0=4 \;\rightarrow\; y=2$. Sustituyendo en la 1ª ecuación: $x-2=3 \;\rightarrow\; x=5$.

Por lo tanto la recta r pasa por el punto $(5,2,0)$.

El vector director de la recta es el producto vectorial de los vectores normales de los planos:

$$\vec{\mathrm{v}} = \vec{\mathrm{n}}_1 \wedge \vec{\mathrm{n}}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1-0)\,\vec{i} - (1-0)\,\vec{j} + (2-0)\,\vec{k} = (-1,-1,2)$$

Así que cualquier punto de la recta r es de la forma: $(x,y,z) = (5-t, 2-t, 2t)$ con $t \in \mathbb{R}$.

a) Queremos encontrar los puntos de la recta r que distan 2 unidades de π.

Igualaremos la distancia de un punto de r a π a 2 y calcularemos para qué valores de *t* sucede eso:

$$\mathrm{d}(\mathrm{P}_r, \pi) = \frac{|2(5-t)-2(2-t)+(2t)-4|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}} = \frac{|10-2t-4+2t+2t-4|}{\sqrt{9}} = \frac{|2+2t|}{3}$$

$$\text{Si } \mathrm{d}(\mathrm{P}_r,\pi)=2 \;\rightarrow\; \frac{|2+2t|}{3}=2,\;\; 2+2t=\pm 6 \;\Rightarrow\; 2t=-2\pm 6,\;\; t=\begin{cases} +2 \\ -4 \end{cases}$$

Los puntos buscados son:

$$(x,y,z) = (5-t,2-t,2t)\big|_{t=2} = (3,0,4) \quad \text{y} \quad (x,y,z) = (5-t,2-t,2t)\big|_{t=-4} = (9,6,-8)$$

b) El ángulo que forman r y π es el complementario del que forman $\vec{\mathrm{v}}_\mathrm{r}$ y $\vec{\mathrm{n}}_\pi$.

El ángulo α que forman $\vec{\mathrm{v}}_\mathrm{r}$ y $\vec{\mathrm{n}}_\pi$ es: $\vec{\mathrm{n}}_\pi \cdot \vec{\mathrm{v}}_\mathrm{r} = |\vec{\mathrm{n}}_\pi| \cdot |\vec{\mathrm{v}}_\mathrm{r}| \cdot \cos\alpha$.

Como: $\vec{\mathrm{n}}_\pi \cdot \vec{\mathrm{v}}_\mathrm{r} = (2,-2,1)\cdot(-1,-1,2) = 2\cdot(-1)+(-2)\cdot(-1)+1\cdot 2 = -2+2+2 = 2$

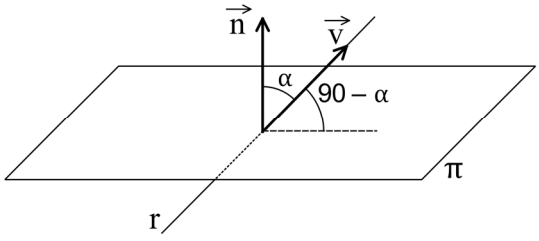
$$|\vec{\mathrm{v}}_\mathrm{r}| = \sqrt{(-1)^2+(-1)^2+2^2} = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}\;,\;\; |\vec{\mathrm{n}}_\pi| = \sqrt{2^2+(-2)^2+1^2} = \sqrt{4+4+1} = \sqrt{9} = 3$$

Tendremos:

$$\cos\alpha = \frac{2}{3\cdot\sqrt{6}} = \frac{2\cdot\sqrt{6}}{3\cdot 6} = \frac{\sqrt{6}}{9} \;\rightarrow\; \alpha = \arccos\frac{\sqrt{6}}{9} \simeq 74.21^\mathrm{o}$$

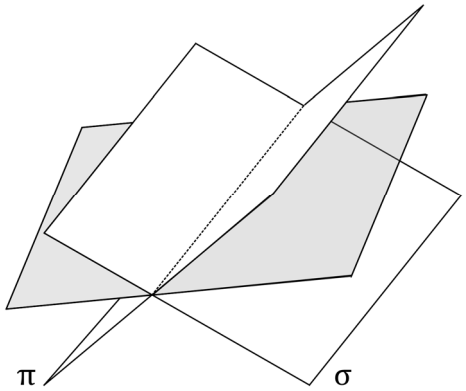
Y el ángulo que forman r y π será:

$$\angle \mathrm{r},\pi = 90^\mathrm{o} - \alpha = 90^\mathrm{o} - 74.21^\mathrm{o} = 15.79^\mathrm{o}$$



2.- Sean los planos $\pi \equiv 2x-2y+z-4=0$ y $\sigma \equiv 3x+4z-12=0$. Calcula los planos bisectores de r y π.

Uno de los planos bisectores es el que aparece coloreado en el dibujo:

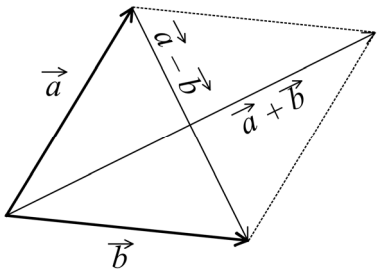


El otro plano bisector es perpendicular a él y también pasa por la intersección de π y σ.

Puesto que ambos planos bisectores pasan por la recta intersección de π y σ, forman parte de su haz de planos. Por lo tanto, ambos planos bisectores son una combinación lineal de π y σ.

Por otra parte, el ángulo que forman dos planos es el que forman sus vectores normales.

Si los planos π y σ tuvieran sus vectores normales de igual módulo, conseguiríamos los vectores normales de los planos bisectores sumando y restando esos vectores normales:



En el dibujo, al ser $|\vec{a}|=|\vec{b}|$, se cumple que:

$\vec{a}+\vec{b}$ tiene la dirección de la bisectriz de $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

$\vec{a}-\vec{b}$ es perpendicular a $\vec{a}+\vec{b}$.

(Es fácil comprobar ambas cosas con el producto escalar.)

Así pues, los planos bisectores se pueden conseguir sumando y restando los planos π y σ, siempre y cuando esos planos tengan los vectores normales de igual módulo.

Puesto que: $\vec{n}_\pi = (2,-2,1) \rightarrow |\vec{n}_\pi| = \sqrt{2^2+(-2)^2+1^2} = \sqrt{9} = 3$

$\vec{n}_\sigma = (3,0,4) \rightarrow |\vec{n}_\sigma| = \sqrt{3^2+0^2+4^2} = \sqrt{25} = 5$

Conseguiremos que los vectores normales tengan el mismo módulo multiplicando la ecuación del plano π por 5 y la ecuación del plano σ por 3. Esas ecuaciones representan a los mismos planos.

$\pi \equiv 5(2x-2y+z-4=0) \equiv 10x-10y+5z-20=0$

$\sigma \equiv 3(3x+4z-12=0) \equiv 9x+12z-36=0$

Y los planos bisectores son:

$\pi+\sigma \equiv (10x-10y+5z-20=0)+(9x+12z-36=0) \equiv 19x-10y+17z-56=0$

$\pi-\sigma \equiv (10x-10y+5z-20=0)-(9x+12z-36=0) \equiv x-10y-7z+16=0$

Los planos bisectores buscados son: $19x-10y+17z-56=0$ y $x-10y-7z+16=0$

Si quieres, comprueba que todo es correcto:

$\pi+\sigma$ y $\pi-\sigma$ forman el mismo ángulo con π que con σ.

Ejercicios de rectas y planos. Varios 2.

1.- Sean las rectas: $r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{a}$, $s \equiv \frac{x-2}{b} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{-4}$ con $a, b \in \mathbb{R}$.

Sabemos que existe un plano π perpendicular tanto a la recta r como a la recta s.

Calcula la posición relativa de las rectas r y s.

Si una recta es perpendicular a un plano, el vector director de la recta es el vector normal del plano.

El vector director de la recta r es: $\vec{v}_r = (1, -1, a)$ por lo que el plano π tendrá como vector normal:

$$\vec{n} = (1, -1, a)$$

El vector director de la recta s es: $\vec{v}_s = (b, 2, -4)$ por lo que el plano π tendrá como vector normal:

$$\vec{n} = (b, 2, -4)$$

Para que ambas cosas sean ciertas, debe cumplirse que:

$$\frac{1}{b} = \frac{-1}{2} = \frac{a}{-4} \rightarrow \begin{cases} \frac{1}{b} = \frac{-1}{2} \Rightarrow b = -2 \\ \frac{-1}{2} = \frac{a}{-4} \Rightarrow a = 2 \end{cases}$$

Así, la recta r tendrá como vector director: $\vec{v}_r = (1, -1, 2)$ y su ecuación será:

$$r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{2}$$

y la recta s tendrá como vector director: $\vec{v}_s = (-2, 2, -4) \sim (1, -1, 2)$ y su ecuación será:

$$s \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{2}$$

Por lo tanto, las rectas r y s tienen el mismo vector director y son paralelas o coincidentes.

La recta r pasa por el punto $P_r(1, 2, -1)$.

Si ese punto está contenido en la recta s, ambas rectas son coincidentes, en caso contrario, paralelas.

Veamos si el punto $P_r(1, 2, -1)$ está contenido en la recta s.

Sustituyéndolo en la ecuación continua de la recta s tenemos:

$$\frac{1-2}{1} = \frac{2-1}{-1} = \frac{(-1)-1}{2} \rightarrow -1 = -1 = -1$$

Que, al ser cierto, resulta que $P_r \in s$.

Como tienen el mismo vector director y un punto de r está en s, las rectas r y s son coincidentes.

2.- Sean el plano: $\pi \equiv 2x - y + z + 3 = 0$ y la recta: $\mathrm{r} \equiv \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z}{-1}$.

Calcula la ecuación de la recta s que es paralela a π, corta a r y pasa por el punto $\mathrm{A}(0,2,1)$.

De la recta s ya conocemos el punto $\mathrm{A}(0,2,1)$. Necesitamos otro punto de ella o un vector director.

Por ser una recta paralela al plano π, sabemos que $\vec{v}_s$ es perpendicular a $\vec{n} = (2,-1,1)$.

Se deduce que $\vec{n} \cdot \vec{v}_s = 0$.

Es una condición que se debe cumplir, pero que no permite encontrar el vector $\vec{v}_s$.

La recta s corta a la recta r, eso quiere decir que pasa por un punto genérico de r.

Encontremos ese punto genérico de r.

De la ecuación continua de r tenemos que: $\mathrm{P}(1,-1,0)$, $\vec{v}_r = (2,1,-1)$

Así que un punto genérico de r es:

$$\mathrm{P}_r(x,y,z) = (1,-1,0) + t(2,1,-1) = (1+2t, -1+t, -t)$$

Como la recta s pasa por $\mathrm{A}(0,2,1)$ y por $\mathrm{P}_r(1+2t,-1+t,-t)$ un vector director de s es:

$$\vec{v}_s = \overrightarrow{\mathrm{AP}_r} = \overrightarrow{\mathrm{OP}_r} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = (1+2t,-1+t,-t) - (0,2,1) = (1+2t,-3+t,-1-t)$$

Ahora ya podemos usar la condición $\vec{n} \cdot \vec{v}_s = 0$:

$$\begin{aligned}\vec{n} \cdot \vec{v}_s &= (2,-1,1) \cdot (1+2t,-3+t,-1-t) = \\ &= 2 \cdot (1+2t) + (-1) \cdot (-3+t) + 1 \cdot (-1-t) = \\ &= 2 + 4t + 3 - t - 1 - t = \\ &= 4 + 2t\end{aligned}$$

Y si $\vec{n} \cdot \vec{v}_s = 0 \;\rightarrow\; 4 + 2t = 0 \;\Rightarrow\; t = -2$

Por lo tanto, el vector director de la recta s es:

$$\vec{v}_s = (1+2t,-3+t,-1-t)\big|_{t=-2} = (-3,-5,1) \sim (3,5,-1)$$

Como la recta s pasa por $\mathrm{A}(0,2,1)$ y su vector director es $\vec{v}_s = (3,5,-1)$, su ecuación continua será:

$$\mathrm{s} \equiv \frac{x}{3} = \frac{y-2}{5} = \frac{z-1}{-1}$$

y sus ecuaciones paramétricas serán:

$$\mathrm{s} \equiv \begin{cases} x = 3t \\ y = 2 + 5t \\ z = 1 - t \quad \text{con } t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Ejercicios de rectas y planos. Varios 3.

1.- Sean los planos en el espacio: $\pi \equiv x+5y-14=0$, $\sigma \equiv 2x-3y+11=0$, $\tau \equiv 3x+2y-16=0$.
Sean la recta q: intersección π y σ, la recta r: intersección de π y τ, y la recta s: intersección de σ y τ.

Calcula las posiciones relativas de las rectas q, r y s.

La recta q es la solución del sistema que forman π y σ: $\begin{cases} x+5y-14=0 \\ 2x-3y+11=0 \end{cases}$

$\begin{cases} x+5y-14=0 \\ 2x-3y+11=0 \end{cases} \begin{matrix} \\ \rightarrow \\ \rightarrow \end{matrix} \begin{matrix} \\ 2x+10y-28=0 \\ 2x-\ 3y+11=0 \end{matrix}$ Restando: $13y-39=0$, $y=3$

Sustituyendo en la 1ª ecuación: $x+15-14=0$, $x=-1$

Como no sabemos nada de la variable *z*, podrá tomar cualquier valor.

La forma paramétrica de la recta q es: $q \equiv (-1,3,\lambda)$ con $\lambda \in \mathbb{R}$

La recta r es la solución del sistema que forman π y τ: $\begin{cases} x+5y-14=0 \\ 3x+2y-16=0 \end{cases}$

$\begin{cases} x+5y-14=0 \\ 3x+2y-16=0 \end{cases} \begin{matrix} \\ \rightarrow \\ \rightarrow \end{matrix} \begin{matrix} \\ 3x+15y-42=0 \\ 3x+\ 2y-16=0 \end{matrix}$ Restando: $13y-26=0$, $y=2$

Sustituyendo en la 1ª ecuación: $x+10-14=0$, $x=4$

Como no sabemos nada de la variable *z*, podrá tomar cualquier valor.

La forma paramétrica de la recta r es: $r \equiv (4,2,\alpha)$ con $\alpha \in \mathbb{R}$

La recta s es la solución del sistema que forman σ y τ: $\begin{cases} 2x-3y+11=0 \\ 3x+2y-16=0 \end{cases}$

$\begin{cases} 2x-3y+11=0 \\ 3x+2y-16=0 \end{cases} \begin{matrix} \\ \rightarrow \\ \rightarrow \end{matrix} \begin{matrix} \\ 6x-9y+33=0 \\ 6x+4y-32=0 \end{matrix}$ Restando: $-13y+65=0$, $y=5$

Sustituyendo en la 1ª ecuación: $2x-15+11=0$, $x=2$

Como no sabemos nada de la variable *z*, podrá tomar cualquier valor.

La forma paramétrica de la recta s es: $s \equiv (2,5,\beta)$ con $\beta \in \mathbb{R}$

Las tres rectas tienen como vector director a: $\vec{v}=(0,0,1)$ [Es decir, son paralelas al eje OZ.]

Por lo tanto las rectas q, r y s son paralelas o coincidentes.

Pero: La recta q pasa por el punto $P_q(-1,3,0)$ que no está ni en la recta r ni en la recta s.

La recta r pasa por el punto $P_r(4,2,0)$ que no está ni en la recta q ni en la recta s.

La recta s pasa por el punto $P_s(2,5,0)$ que no está ni en la recta q ni en la recta r.

Se trata de tres rectas paralelas.

También se puede decir que el sistema que forman los planos π, σ y τ es un sistema incompatible en el que los planos se cortan dos a dos (formando una 'tienda de campaña').

2.- Sean el plano: $\pi \equiv x + y + a\,z = 2$ donde $a \in \mathbb{R}$ y la recta: $\mathrm{r} \equiv \dfrac{x-1}{2} = y = z$.

Calcula, para el caso en el que π y r no tengan ningún punto en común, la ecuación del plano σ que es perpendicular a π y contiene a la recta r.

El plano π tiene como vector normal: $\vec{\mathrm{n}} = (1,1,a)$.

La recta r es: $\mathrm{r} \equiv \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-0}{1} = \dfrac{z-0}{1}$, así que pasa por $\mathrm{P}(1,0,0)$ y su vector director es: $\vec{\mathrm{v}} = (2,1,1)$.

Si el plano π y la recta r no tienen ningún punto en común, es que son paralelos.

En ese caso se cumplirá que: $\vec{\mathrm{n}} \cdot \vec{\mathrm{v}} = 0$.

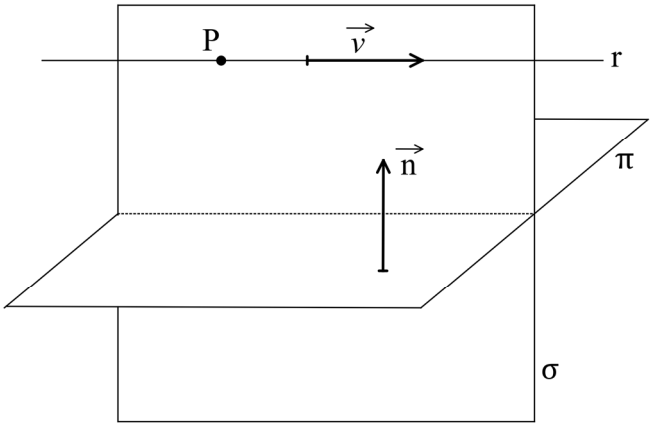
Tendremos:

$$\vec{\mathrm{n}} \cdot \vec{\mathrm{v}} = (1,1,a) \cdot (2,1,1) = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + a \cdot 1 = 3 + a$$

y si $\vec{\mathrm{n}} \cdot \vec{\mathrm{v}} = 0 \;\rightarrow\; 3 + a = 0 \;\Rightarrow\; a = -3$

Y el vector normal al plano π es: $\vec{\mathrm{n}} = (1,1,-3)$

La situación que tenemos es la del dibujo:



El plano σ queda definido por el punto $\mathrm{P}(1,0,0)$ y los vectores $\vec{\mathrm{v}} = (2,1,1)$, $\vec{\mathrm{n}} = (1,1,-3)$.

Por lo tanto, la ecuación de σ es:

$$\sigma \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

Calculando el determinante:

$$(x-1)\cdot(-3-1) - (y-0)\cdot(-6-1) + (z-0)\cdot(2-1) = 0$$
$$(x-1)\cdot(-4) - y\cdot(-7) + z\cdot 1 = 0$$
$$-4x + 4 + 7y + z = 0$$
$$-4x + 7y + z + 4 = 0$$

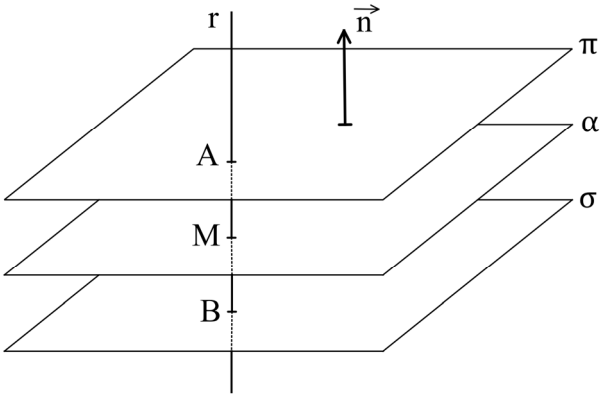
$$\sigma \equiv -4x + 7y + z + 4 = 0$$

Ejercicios de rectas y planos. Simetrías.

1.- Sean los planos en el espacio: $\pi \equiv 6x-3y+2z-8=0$, $\sigma \equiv 6x-3y+2z+12=0$.

Calcula la ecuación del plano que equidista de ambos (es decir, el plano situado 'en medio' de ellos).

Llamemos α al plano que queremos calcular. Si r es una recta perpendicular a los 3 planos, tenemos:



Esa recta r tiene como vector director: $\vec{v}=\vec{n}=(6,-3,2)$ y pasa por un punto A.

El punto A es un punto cualquiera del plano π. Basta que cumpla la ecuación de ese plano.

Elegimos el punto $A(0,0,4)$, pues cumple que: $6\cdot 0-3\cdot 0+2\cdot 4-8=0$

$$\text{Con lo cual, } r\equiv\begin{cases}x=6t\\ y=-3t\\ z=4+2t\end{cases}\quad \text{con } t\in\mathbb{R}$$

Esa recta r corta al plano σ en el punto B. Calculemos qué punto es ese.

Para ello, sustituimos las ecuaciones paramétricas de r en la ecuación de σ:

$$6\cdot(6t)-3\cdot(-3t)+2\cdot(4+2t)+12=0$$

$$36t+9t+8+4t+12=0\ ,\ 49t+20=0\ \rightarrow\ t=-\frac{20}{49}$$

Así que el punto B es el punto de la recta r con $t=-20/49$:

$$B(6t,-3t,4+2t)\ \Big|_{t=-\frac{20}{49}}=\left(-\frac{120}{49},\frac{60}{49},\frac{156}{49}\right)$$

El punto M es el punto medio de A y B:

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)=\frac{1}{2}\left[(0,0,4)+\left(-\frac{120}{49},\frac{60}{49},\frac{156}{49}\right)\right]=\frac{1}{2}\left[\left(-\frac{120}{49},\frac{60}{49},\frac{352}{49}\right)\right]=\left(-\frac{60}{49},\frac{30}{49},\frac{176}{49}\right)$$

Como el plano α tiene como ecuación: $\alpha\equiv 6x-3y+2z+D=0$, por pasar por el punto M, tenemos:

$$6\cdot\left(-\frac{60}{49}\right)-3\cdot\left(\frac{30}{49}\right)+2\cdot\left(\frac{176}{49}\right)+D=0 \qquad \text{Multiplicamos todo por 49:}$$

$$-360-90+352+49\cdot D=0\ ,\ -98+49\cdot D=0\ \rightarrow\ D=2$$

El plano buscado es: $\alpha\equiv 6x-3y+2z+2=0$

Vamos a hacerlo con otro método.

Buscamos el plano: $\alpha \equiv 6x-3y+2z+\mathrm{D}=0$ por ser paralelo a π y a σ.

Un punto cualquiera de ese plano es: $\mathrm{P}(a,b,c)$ de manera que: $6a-3b+2c+\mathrm{D}=0$.

La distancia de ese punto P al plano π debe ser igual a su distancia al plano σ: $\mathrm{d}(\mathrm{P},\pi)=\mathrm{d}(\mathrm{P},\sigma)$.

Usando la fórmula de la distancia de un punto a un plano tendremos:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{d}(\mathrm{P},\pi) & = & \mathrm{d}(\mathrm{P},\sigma) \\ \dfrac{|6a-3b+2c-8|}{\sqrt{6^2+(-3)^2+2^2}} & = & \dfrac{|6a-3b+2c+12|}{\sqrt{6^2+(-3)^2+2^2}} \end{array} \quad \rightarrow \quad |6a-3b+2c-8|=|6a-3b+2c+12|$$

Esta ecuación tiene tres variables, pero podemos simplificarla con la expresión para D anterior:

$$6a-3b+2c+\mathrm{D}=0 \;\rightarrow\; 6a-3b+2c=-\mathrm{D}$$

Y la ecuación quedará:

$$|6a-3b+2c-8|=|6a-3b+2c+12| \quad \rightarrow \quad |-\mathrm{D}-8|=|-\mathrm{D}+12|$$

La solución puede ser una de estas dos:

$$-\mathrm{D}-8=+(-\mathrm{D}+12) \;\Rightarrow\; \text{sin solución}$$

$$\begin{aligned} -\mathrm{D}-8=-(-\mathrm{D}+12) \;\Rightarrow\; & -\mathrm{D}-8=\mathrm{D}-12 \\ & 12-8=2\mathrm{D} \\ & \mathrm{D}=2 \end{aligned}$$

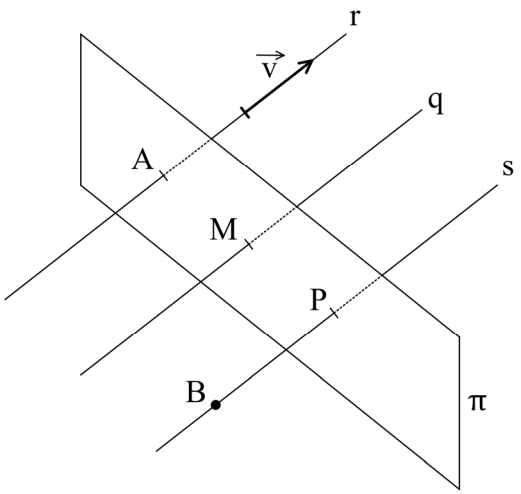
Por lo tanto, el plano buscado es: $\alpha \equiv 6x-3y+2z+2=0$

(Lo mismo que obtuvimos antes, pero más corto.

El método anterior lo puse para ilustrar el uso de una recta auxiliar.)

2.- Sean las rectas paralelas: r, que pasa por el punto $A(1,1,4)$ y s, que pasa por el punto $B(-5,3,6)$, ambas con vector director $\vec{v}=(1,-2,1)$.
Calcula la ecuación de la recta situada entre ambas y paralela a ambas.

Usaremos un plano auxiliar π, perpendicular a las rectas r, s y a la recta pedida que llamaremos q:



El plano π, tiene como vector normal el vector director de las rectas, $\vec{n}=(1,-2,1)$, así que:

$$\pi \equiv x-2y+z+D=0$$

y por pasar por A: $1-2\cdot 1+4+D=0 \;\rightarrow\; D=-3$

Con lo que: $\pi \equiv x-2y+z-3=0$

La recta s tiene como ecuaciones paramétricas: $s\equiv\begin{cases} x=-5+t \\ y=3-2t \\ z=6+t \end{cases}$ con $t\in\mathbb{R}$

El punto P es en el que la recta s corta al plano π, por lo que un punto de s cumple la ecuación de π:

$$(-5+t)-2\cdot(3-2t)+(6+t)-3=0$$

$$-5+t-6+4t+6+t-3=0\ ,\ 6t-8=0 \;\rightarrow\; t=\frac{4}{3}$$

Por lo que el punto P es: $P(-5+t,3-2t,6+t)\Big|_{t=\frac{4}{3}}=\left(-\frac{11}{3},\frac{1}{3},\frac{22}{3}\right)$

El punto M es el punto medio de A y P:

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OP}\right)=\frac{1}{2}\left[(1,1,4)+\left(-\frac{11}{3},\frac{1}{3},\frac{22}{3}\right)\right]=\frac{1}{2}\left[\left(-\frac{8}{3},\frac{4}{3},\frac{34}{3}\right)\right]=\left(-\frac{4}{3},\frac{2}{3},\frac{17}{3}\right)$$

Por lo tanto, la recta q buscada como pasa por M es:

$$q\equiv\begin{cases} x=-4/3+t \\ y=2/3-2t \\ z=17/3+t \end{cases} \text{ con } t\in\mathbb{R}$$

tomando $t=\frac{1}{3}$ un punto 'mejor' de q es: $\begin{cases} x=-4/3+1/3=-1 \\ y=2/3-2/3=0 \\ z=17/3+1/3=6 \end{cases}$

Y la recta q nos queda así: $q\equiv\begin{cases} x=-1+t \\ y=-2t \\ z=6+t \end{cases}$ con $t\in\mathbb{R}$

Ejercicios de rectas y planos. Rectas que se cruzan y posiciones relativas.

1.- Sean las rectas: $r \equiv \frac{x+2}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{2}$, $s \equiv \frac{x-9}{3} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-6}{0}$. Comprueba que se cruzan y halla:

a) La distancia entre r y s (con la fórmula habitual).

b) El plano π que contiene a r y es paralelo a s y el plano σ que contiene a s y es paralelo a r. Comprueba que la distancia entre esos dos planos coincide con el valor obtenido en (a).

Un punto de r es: $A(-2,0,1)$ con $\vec{v}_r = (3,2,2)$. Un punto de s es: $B(9,-2,6)$ con $\vec{v}_s = (3,1,0)$.

Las rectas r y s se cruzan si los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\vec{v}_r$ y $\vec{v}_s$ no son coplanarios, es decir: $\left[\overrightarrow{AB}, \vec{v}_r, \vec{v}_s\right] \neq 0$

Como $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (9,-2,6) - (-2,0,1) = (11,-2,5)$ tendremos:

$$\vec{v}_r \wedge \vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2\vec{i} + 6\vec{j} - 3\vec{k}$$

$$\left[\overrightarrow{AB}, \vec{v}_r, \vec{v}_s\right] = \overrightarrow{AB} \cdot \left(\vec{v}_r \wedge \vec{v}_s\right) = (11,-2,5) \cdot (-2,6,-3) = -22 - 12 - 15 = -49 \neq 0$$

Por lo tanto, las rectas r y s se cruzan.

a) La distancia entre dos rectas que se cruzan es: $d = \frac{|\overrightarrow{AB} \cdot (\vec{v}_r \wedge \vec{v}_s)|}{|\vec{v}_r \wedge \vec{v}_s|}$

Con los datos anteriores: $d = \frac{|-49|}{\sqrt{(-2)^2 + 6^2 + (-3)^2}} = \frac{49}{\sqrt{49}} = \frac{49}{7} = 7\ u$

b) Los planos π y σ contienen a los vectores directores de r y s. Sus vectores normales son: $\vec{n} = \vec{v}_r \wedge \vec{v}_s$

Por la tanto, para ambos planos el vector normal es: $\vec{n} = \vec{v}_r \wedge \vec{v}_s = (-2,6,-3)$.

El plano π contiene a la recta r y pasa por $A(-2,0,1)$. Su ecuación es: $\pi \equiv -2x + 6y - 3z + D_1 = 0$.

Por pasar por A: $-2 \cdot (-2) + 6 \cdot 0 - 3 \cdot 1 + D_1 = 0 \ \rightarrow \ D_1 = -1$

El plano σ contiene a la recta s y pasa por $B(9,-2,6)$. Su ecuación es: $\sigma \equiv -2x + 6y - 3z + D_2 = 0$.

Por pasar por B: $-2 \cdot 9 + 6 \cdot (-2) - 3 \cdot 6 + D_2 = 0 \ \rightarrow \ D_2 = 48$

Así pues, $\pi \equiv -2x + 6y - 3z - 1 = 0$ y $\sigma \equiv -2x + 6y - 3z + 48 = 0$

Para calcular la distancia entre ellos tomaremos el punto A del plano π y hallaremos su distancia a σ.

$$d = \frac{|-2 \cdot (-2) + 6 \cdot 0 - 3 \cdot 1 + 48|}{\sqrt{(-2)^2 + 6^2 + (-3)^2}} = \frac{|4 + 0 - 3 + 48|}{\sqrt{49}} = \frac{|49|}{7} = \frac{49}{7} = 7\ u$$

Con ambos métodos encontramos el mismo valor. La distancia entre las rectas r, s es: $d = 7\ u$.

2.- Sean la recta: $r \equiv \frac{x-1}{4} = \frac{y}{a} = \frac{z-1}{-1}$ y el plano: $\pi \equiv 2x - y + b\,z = 0$ donde $a, b \in \mathbb{R}$. Calcula:

a) La posición relativa de r y π en función de *a* y *b*, usando razonamientos geométricos.

b) La distancia entre r y π en función de *a* y *b*. [Basado en un problema de las PAU de julio-2017]

---

a) La recta r pasa por $A(1,0,1)$ y su vector director es: $\vec{v} = (4, a, -1)$.

El plano π tiene como vector normal: $\vec{n} = (2, -1, b)$.

Una recta y un plano pueden ser: a) paralelos o coincidentes si $\vec{n} \cdot \vec{v} = 0$ o b) se cortan si $\vec{n} \cdot \vec{v} \neq 0$.

En este caso, $\vec{n} \cdot \vec{v} = (2, -1, b) \cdot (4, a, -1) = 8 - a - b$

Si $\vec{n} \cdot \vec{v} = 0 \;\rightarrow\; 8 - a - b = 0 \;\Rightarrow\; a + b = 8$ condición de paralelismo o coincidencia

Serán coincidentes si el punto $A(1,0,1)$ de la recta r pertenece al plano π:

$2 \cdot 1 - 0 + b \cdot 1 = 0 \;\rightarrow\; b = -2$

En resumen: Si $a + b \neq 8$ la recta r y el plano π se cortan (son incidentes).

Si $a + b = 8$: con $b = -2$ son coincidentes, con $b \neq -2$ son paralelos.

[*El estudio de la posición relativa puede hacerse también discutiendo el sistema de ecuaciones que forman los tres planos, dos de esos planos los obtendríamos de la ecuación continua de la recta r. El procedimiento geométrico que hemos realizado es equivalente, pero requiere menos trabajo.*]

b) Si $a + b \neq 8$, puesto que la recta y el plano se cortan, su distancia es cero.

Si $a + b = 8$ y $b = -2$, puesto que la recta está en el plano, su distancia es cero.

Si $a + b = 8$ y $b \neq -2$ la recta y el plano son paralelos. La distancia entre ellos es distinta de cero.

Para calcular la distancia entre ellos tomamos el punto A de la recta r y hallamos la distancia a π:

$$d = \frac{|2 \cdot 1 - 0 + b \cdot 1|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + b^2}} = \frac{|2 + b|}{\sqrt{5 + b^2}}$$

Resumiendo: Si $a + b \neq 8$ la distancia entre r y π es cero.

Si $a + b = 8$ y $b = -2$ la distancia entre r y π es cero.

Si $a + b = 8$ y $b \neq -2$ la distancia entre r y π es: $d = \frac{|2 + b|}{\sqrt{5 + b^2}}$

Ejercicios de rectas y planos. Triángulos y posiciones relativas.

1.- Sea el triángulo de vértices $A(-1,2,a)$, $B(1,1,4)$ y $C(0,1,0)$ con $a \in \mathbb{R}$. Calcula:

a) Si el triángulo es rectángulo en A, los posibles valores de *a*. [basado en PAU, junio 2018]

b) Para $a=-2$ el área del triángulo ABC y la ecuación del plano π que contiene al triángulo ABC.

---

a) Si el triángulo es rectángulo en A quiere decir que los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ son perpendiculares.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (1,1,4) - (-1,2,a) = (2,-1,4-a)$$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = (0,1,0) - (-1,2,a) = (1,-1,-a)$$

Y por ser perpendiculares, se cumplirá que: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (2,-1,4-a)\cdot(1,-1,-a) = 2+1+(4-a)(-a) = a^2-4a+3$$

$$\text{Si } \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0 \;\rightarrow\; a^2-4a+3=0,\; a=\frac{4\pm\sqrt{16-12}}{2}=\frac{4\pm2}{2}=\begin{cases}+3\\+1\end{cases}$$

Los posibles valores de *a* son: $a=3$, $a=1$.

b) Para $a=-2$ los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ son:

$$\overrightarrow{AB} = (2,-1,4-a)\big|_{a=-2} = (2,-1,6) \qquad \overrightarrow{AC} = (1,-1,-a)\big|_{a=-2} = (1,-1,2)$$

Y su producto vectorial es:

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 6 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (-2+6)\vec{i} - (4-6)\vec{j} + (-2+1)\vec{k} = (4,2,-1)$$

El área del triángulo ABC es:

$$S = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right|$$

Por lo tanto:

$$S = \frac{1}{2}\left|(4,2,-1)\right| = \frac{1}{2}\sqrt{4^2+2^2+(-1)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{21}\ u^2$$

El plano que contiene a ABC tiene como vector normal:

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = (4,2,-1)$$

Luego su ecuación es de la forma:

$$\pi \equiv 4x+2y-z+D=0$$

Por pasar por el punto $C(0,1,0)$ tendremos:

$$4\cdot0+2\cdot1-0+D=0 \;\rightarrow\; D=-2$$

Y la ecuación del plano que contiene a ABC es:

$$\pi \equiv 4x+2y-z-2=0$$

2.- Sean la recta: $r \equiv (x, y, z) = (-3+2t, -4+3t, 3-t)$ con $t \in \mathbb{R}$ y los puntos: $P(1,0,-1)$, $Q(-1,2,3)$. Calcula el punto R de la recta r que forma con P y Q un triángulo isósceles de lados PR, QR iguales.

Un punto cualquiera de la recta r es de la forma:

$$R(-3+2t, -4+3t, 3-t)$$

Los lados PR y QR tienen estas longitudes:

$$\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OP} = (-3+2t, -4+3t, 3-t) - (1,0,-1) =$$
$$= (-4+2t, -4+3t, 4-t)$$
$$\rightarrow \left|\overrightarrow{PR}\right| = \sqrt{(-4+2t)^2 + (-4+3t)^2 + (4-t)^2} =$$
$$= \sqrt{16-16t+4t^2+16-24t+9t^2+16-8t+t^2} =$$
$$= \sqrt{14t^2-48t+48}$$

$$\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OQ} = (-3+2t, -4+3t, 3-t) - (-1,2,3) =$$
$$= (-2+2t, -6+3t, -t)$$
$$\rightarrow \left|\overrightarrow{QR}\right| = \sqrt{(-2+2t)^2 + (-6+3t)^2 + (-t)^2} =$$
$$= \sqrt{4-8t+4t^2+36-36t+9t^2+t^2} =$$
$$= \sqrt{14t^2-44t+40}$$

Y si deben ser iguales tendremos:

$$\sqrt{14t^2-48t+48} = \sqrt{14t^2-44t+40}$$
$$14t^2-48t+48 = 14t^2-44t+40$$
$$-48t+48 = -44t+40$$
$$48-40 = 48t-44t$$
$$8 = 4t$$
$$t = 2$$

Por lo tanto, el punto R buscado es:

$$R(-3+2t, -4+3t, 3-t)\big|_{t=2} = (-3+4, -4+6, 3-2) = (1,2,1)$$

El punto buscado es: $R(1,2,1)$

3.- Sean la recta: $r \equiv (x, y, z) = (-4 + 2t, -2, 1 - t)$ con $t \in \mathbb{R}$
y los planos: $\pi \equiv x + 2y + 2z = 1$, $\sigma \equiv x - 2y + 2z = -3$

Calcula las posiciones relativas de los tres objetos y haz un dibujo cualitativo de la situación.

La recta r pasa por $P(-4, -2, 1)$ y tiene como vector director: $\vec{v} = (2, 0, -1)$.

Los planos π y σ tienen como vectores normales: $\vec{n}_\pi = (1, 2, 2)$, $\vec{n}_\sigma = (1, -2, 2)$.

Empecemos con la posición relativa de los planos π y σ:

¿Son paralelos o coincidentes? Veamos si sus vectores normales son proporcionales:

$\frac{1}{1} \neq \frac{2}{-2} \neq \frac{2}{2}$ por lo que no son ni paralelos ni coincidentes.

Por lo tanto se cortan. ¿Se cortan los planos π y σ perpendicularmente?

$\vec{n}_\pi \cdot \vec{n}_\sigma = (1, 2, 2) \cdot (1, -2, 2) = 1 - 4 + 4 = 1 \neq 0$ No son perpendiculares.

Por lo tanto, los planos π y σ se cortan formando un ángulo distinto de 90º.

Veamos la posición relativa de la recta respecto al plano π:

$\vec{n}_\pi \cdot \vec{v} = (1, 2, 2) \cdot (2, 0, -1) = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 0 + 2 \cdot (-1) = 2 + 0 - 2 = 0$

La recta r es paralela o coincidente al plano π.

¿Pertenece el punto P de la recta r al plano π? Sustituimos el punto P en la ecuación de π:

$4 + 2 \cdot (-2) + 2 \cdot 1 \neq 1$ No se cumple.

Así pues, la recta r es paralela al plano π.

Veamos la posición relativa de la recta respecto al plano σ:

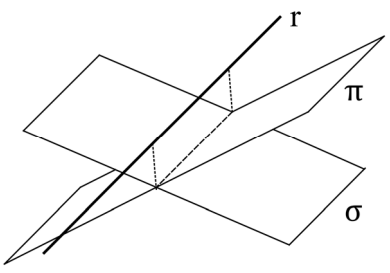
$\vec{n}_\sigma \cdot \vec{v} = (1, -2, 2) \cdot (2, 0, -1) = 1 \cdot 2 + (-2) \cdot 0 + 2 \cdot (-1) = 2 + 0 - 2 = 0$

La recta r es paralela al plano σ o coincidente con el plano σ.

¿Pertenece el punto P de la recta r al plano σ? Sustituimos el punto P en la ecuación de σ:

$4 - 2 \cdot (-2) + 2 \cdot 1 \neq -3$ No se cumple.

Así pues, la recta r es paralela al plano σ.

El gráfico cualitativo es:

(No suele pedirse, pues a algunas personas les cuesta dibujar bien.)