Integral peculiar

Queremos resolver la integral

$$\int \frac{1}{x^4+1}\, dx \tag{1}$$

Como integral racional que es habría que intentar factorizar el denominador y dejarlo como potencias de x^2 o simplemente x, cuyas integrales son inmediatas. Una forma de hacerlo es completando el denominador como un cuadrado,

$$x^4+1 = x^4+2x^2+1-2x^2 = (x^2+1)^2-2x^2, \tag{2}$$

lo cual significa que hemos obtenido una diferencia de cuadrados que como bien sabemos se puede poner como una suma por una diferencia

$$(x^2+1)^2-2x^2 = ((x^2+1)+\sqrt{2}x)\cdot((x^2+1)-\sqrt{2}x), \tag{3}$$

o lo que es lo mismo

$$(x^2+1)^2-2x^2 = (x^2+\sqrt{2}x+1)\cdot(x^2-\sqrt{2}x+1) \tag{4}$$

Con esta factorización ya podemos hacer la descomposición en fracciones simples de $1/(x^4+1)$

$$\frac{1}{x^4+1} = \frac{Ax+B}{x^2+\sqrt{2}x+1} + \frac{Cx+D}{x^2-\sqrt{2}x+1} \tag{5}$$

Haciendo la suma de las dos fracciones algebraicas llegamos a que los numeradores de dichas fracciones han de ser iguales

$$(Ax+B)\cdot(x^2-\sqrt{2}x+1)+(Cx+D)\cdot(x^2+\sqrt{2}x+1) = 1, \tag{6}$$

y desarrollando todos los productos

$$Ax^3-A\sqrt{2}x^2+Ax+Bx^2-B\sqrt{2}x+B+Cx^3+C\sqrt{2}x^2+Cx+Dx^2+D\sqrt{2}x+D = 1$$

de donde se deduce el siguiente sistema de ecuaciones para A, B, C y D

$$A+C = 0 \tag{7}$$
$$B+D = 1 \tag{8}$$
$$-A\sqrt{2}+C\sqrt{2} = -1 \tag{9}$$
$$-B\sqrt{2}+D\sqrt{2} = 0 \tag{10}$$

cuyas soluciones son sencillas combinando las ecuaciones (7) y (9) y luego (8) y (10), llegando a

$$A = \frac{1}{2\sqrt{2}} \qquad B = \frac{1}{2} \qquad C = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \qquad D = \frac{1}{2}$$

Por la tanto la descomposición en fracciones simples dada en la ecuación (5) es pues

$$\frac{1}{x^4+1} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}x + \frac{1}{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1} + \frac{-\frac{1}{2\sqrt{2}}x + \frac{1}{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1} \tag{11}$$

que admite a su vez una reorganización más adecuada de la siguiente manera

$$\frac{1}{x^4+1} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1} - \frac{x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right) \tag{12}$$

Así ya estamos a un paso de conseguir que la derivada del denominador se halle en el numerador, pues

$$\begin{aligned}(x^2+\sqrt{2}x+1)' &= 2x+\sqrt{2}\\ (x^2-\sqrt{2}x+1)' &= 2x-\sqrt{2}\end{aligned}$$

Como nos falta un factor 2 delante de la x vamos a multiplicar y dividir todo por 2 y la ecuación (12) queda ahora

$$\frac{1}{x^4+1} = \frac{1}{4\sqrt{2}}\left(\frac{2x+2\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1} - \frac{2x-2\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right) \tag{13}$$

y a su vez podemos poner $2\sqrt{2} = \sqrt{2}+\sqrt{2}$, por lo tanto

$$\frac{1}{x^4+1} = \frac{1}{4\sqrt{2}}\left(\frac{2x+\sqrt{2}+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1} - \frac{2x-\sqrt{2}-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right) \tag{14}$$

en donde vemos claramente la derivada del denominador. La integral quedaría pues

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^4+1}\,dx = {} & \frac{1}{4\sqrt{2}}\int \frac{2x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}\,dx + \frac{1}{4\sqrt{2}}\int \frac{\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}\,dx\\ & -\frac{1}{4\sqrt{2}}\int \frac{2x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}\,dx + \frac{1}{4\sqrt{2}}\int \frac{\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}\,dx\end{aligned} \tag{15}$$

La primera y la tercera integral son inmediatas y la segunda y la cuarta admiten una ligera simplificación

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^4+1}\,dx = {} & \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln(x^2+\sqrt{2}x+1) + \frac{1}{4}\int \frac{1}{x^2+\sqrt{2}x+1}\,dx\\ & -\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln(x^2-\sqrt{2}x+1) + \frac{1}{4}\int \frac{1}{x^2-\sqrt{2}x+1}\,dx\end{aligned} \tag{16}$$

Ahora quedan por resolver las integrales

$$\int \frac{1}{x^2+\sqrt{2}x+1}\,dx, \qquad \int \frac{1}{x^2-\sqrt{2}x+1}\,dx \tag{17}$$

Se pueden completar los cuadrados de los denominadores al igual que antes teniendo en cuenta que

$$x^2+\sqrt{2}x+1 = \left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2} = \left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \tag{18}$$

$$x^2-\sqrt{2}x+1 = \left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2} = \left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \tag{19}$$

La primera de las integrales (17) resulta ser

$$\int \frac{1}{x^2+\sqrt{2}x+1}\,dx = \int \frac{dx}{\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} \tag{20}$$

Esta integral es inmediata sin más que hacer el cambio de variable

$$x+\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\,t \to dx = \frac{\sqrt{2}}{2}\,dt \tag{21}$$

por lo tanto

$$\int \frac{dx}{\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \int \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\,dt}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 t^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}\int \frac{dt}{t^2+1} = \sqrt{2}\tan^{-1} t \tag{22}$$

De la ecuación 21

$$t = \frac{2}{\sqrt{2}}\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = (\sqrt{2}\,x+1) \tag{23}$$

Tenemos finalmente para la primera de las integrales (17)

$$\int \frac{1}{x^2+\sqrt{2}x+1}\,dx = \sqrt{2}\tan^{-1}(\sqrt{2}\,x+1) \tag{24}$$

Para la segunda de las integrales (17) se deduce fácilmente por analogía con lo que acabamos de realizar que

$$\int \frac{1}{x^2-\sqrt{2}x+1}\,dx = \sqrt{2}\tan^{-1}(\sqrt{2}\,x-1) \tag{25}$$

Ahora estamos ya en condiciones de juntar todos los resultados intermedios que hemos obtenido. Volviendo a la fórmula (16) y haciendo simplificaciones logarítmicas

$$\boxed{\int \frac{1}{x^4+1}\,dx = \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left[\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right]+\frac{\sqrt{2}}{4}\left[\tan^{-1}(\sqrt{2}\,x+1)+\tan^{-1}(\sqrt{2}\,x-1)\right]+C}$$