

ÁLGEBRA MATRICIAL

1. Di de qué dimensión es cada una de las matrices siguientes y escribe las matrices transpuestas, A^t , B^t , C^t , D^t y E^t .

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 0 \\ 7 & 3 & 8 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \\ 7 & 6 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 8 \\ 0 & 5 & 7 \end{pmatrix} \quad D = (2 \ 5 \ 0 \ -1) \quad E = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$$

2. Escribe una matriz de dimensión 3×3 tal que $A^t = A$, es decir una matriz simétrica. Pon los números que quieras. Escribe también una matriz antisimétrica, $A^t = -A$.

3. Dadas las matrices siguientes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 7 & 3 & 8 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 7 & 1 & -1 \\ 8 & 10 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 5 \\ 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

calcula la matriz $E = 2A - 3B + C - 2D$

4. Dada la matriz

$$M = (1 \ 0 \ -2 \ 3 \ -1 \ -4)$$

calcula el producto $M \cdot M^t$

5. Efectúa todos los posibles productos entre las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 & 5 \\ 6 & 3 & 0 & 0 \\ -2 & -5 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

6. Para las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -7 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$$

- (a) comprueba la propiedad distributiva: $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
- (b) calcula $(A - B) \cdot C$
- (c) calcula $A \cdot B \cdot C$

7. Dada la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

comprueba que $(M - I)^2 = 0$, siendo I la matriz identidad de dimensión 2×2 .

8. Calcula el rango de las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 10 & -8 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 8 & -4 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 9 & -3 & -6 \end{pmatrix}$$

9. Estudia el rango de las matrices siguientes según el valor del parámetro k .

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & k \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & k & 2 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & 4 & k \\ 4 & 12 & 8 & -4 \end{pmatrix} \quad Q = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 10 & 3 & k \end{pmatrix}$$

10. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

calcula A^n , con $n \in \mathbb{N}$.

11. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Obtener la matriz $M = (A - \alpha I)^2$, donde α es un parámetro real.

(b) El valor de α , si existe, para el cual la matriz M es la matriz nula.

12. Calcula el determinante de las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -6 & 7 \end{pmatrix}$$

Comprueba que: $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$ y que $\det(C \cdot D) = \det(C) \cdot \det(D)$

13. Con las matrices C y D del problema anterior calcula C^{-1} y D^{-1} por el método de Gauss y comprueba que está bien.

14. Calcula la matriz X en la ecuación matricial $C \cdot X = D + I$, siendo C y D las matrices del problema número 12. I es la matriz identidad de dimensión 2×2 .

Las soluciones en el QR de clase.

SOLUCIONES

1. A es una matriz 3×3 , B es 3×2 , C es 2×3 , D es 1×4 y E es 2×2

$$A^t = \begin{pmatrix} -2 & 7 & 3 \\ 5 & 3 & 0 \\ 0 & 8 & 1 \end{pmatrix} \quad B^t = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad C^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 5 \\ 8 & 7 \end{pmatrix} \quad D^t = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad E^t = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

2.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 8 \end{pmatrix} \quad A' = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 6 \\ -3 & -6 & 0 \end{pmatrix}$$

3.

$$E = \begin{pmatrix} 18 & -1 & -18 \\ 22 & 9 & -1 \end{pmatrix}$$

4. $M \cdot M^t = 31$

5.

$$A \cdot C = \begin{pmatrix} 8 & -2 & 4 & 5 \\ 24 & -4 & -1 & -10 \end{pmatrix} \quad A \cdot D = \begin{pmatrix} 7 & 18 & -4 \\ 0 & 30 & 5 \end{pmatrix} \quad D \cdot C = \begin{pmatrix} -6 & -1 & 2 & 5 \\ 26 & 5 & 2 & 0 \\ 38 & 38 & -1 & 10 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 7 & 14 & 21 \\ -3 & 3 & -2 \\ -2 & 5 & 1 \\ -5 & 26 & 13 \end{pmatrix} \quad C \cdot B = \begin{pmatrix} 22 & 28 \\ 39 & 3 \\ -9 & -4 \end{pmatrix}$$

6. (a)

$$A \cdot (B + C) = \begin{pmatrix} -18 & -2 \\ -41 & -4 \end{pmatrix} = A \cdot B + A \cdot C$$

(b)

$$(A - B) \cdot C = \begin{pmatrix} -14 & -18 \\ -16 & -12 \end{pmatrix}$$

(c)

$$A \cdot B \cdot C = \begin{pmatrix} 5 & 20 \\ 9 & 43 \end{pmatrix}$$

7.

$$(M - I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

8. $r(A) = 3$; $r(B) = 2$; $r(C) = 3$; $r(D) = 1$

9. Matriz M

$$r(M) = 3, \forall k \in \mathbb{R}.$$

Matriz N

$$\text{Si } k = -\frac{1}{2}, r(N) = 2. \text{ Si } k \neq -\frac{1}{2}, r(N) = 3.$$

Matriz P

$$\text{Si } k = -2, r(P) = 1. \text{ Si } k \neq -2, r(P) = 2.$$

Matriz Q

$$\text{Si } k = 2, r(Q) = 2. \text{ Si } k \neq 2, r(Q) = 3.$$

10.

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5n & 1 \end{pmatrix}$$

11.

$$(A - \alpha I)^2 = \begin{pmatrix} \alpha^2 - 1 & 2(\alpha - 1) & 4(\alpha - 1) \\ 2(\alpha - 1) & \alpha^2 - 1 & 4(\alpha - 1) \\ -2(\alpha - 1) & -2(\alpha - 1) & (\alpha - 1)(\alpha - 5) \end{pmatrix} = (\alpha - 1) \begin{pmatrix} \alpha + 1 & 2 & 4 \\ 2 & \alpha + 1 & 4 \\ -2 & -2 & \alpha - 5 \end{pmatrix}$$

$$\text{Si } \alpha = 1, (A - \alpha I)^2 = 0$$

12. $|A| = -6$, $|B| = 8$, $|C| = -5$, $|D| = -2$.

13.

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix} \quad D^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{2} & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

14.

$$X = C^{-1} \cdot (D + I) = \begin{pmatrix} -\frac{9}{5} & 2 \\ \frac{2}{5} & 0 \end{pmatrix}$$
