Problemas iniciales

1. Resuelve: $\frac{2x+1}{6}=\frac{x}{3}$

Multiplicamos en cruz y simplificamos:

$$3\cdot(2x+1)=6\cdot x$$
$$6x+3=6x$$
$$3=0$$

Esta igualdad no es cierta nunca, por lo tanto la ecuación propuesta no tiene solución.

$\boxed{\text{No tiene solución}}$

2. Resuelve: $(x+1)^2-(x-1)^2=4x$

Efectuamos los cuadrados y simplificamos:

$$(\cancel{x^2}+2x+\cancel{1})-(\cancel{x^2}-2x+\cancel{1})=4x$$
$$4x=4x$$

Esta igualdad es cierta para cualquier valor de *x*, así que cualquier $x\in\mathbb{R}$ resuelve la ecuación.

$\boxed{\text{Solución: Todos los valores } x\in\mathbb{R}}$

3. Resuelve: $\begin{cases}6x+9y=15\\4x+6y=10\end{cases}$

Simplificamos las dos ecuaciones:

$$\begin{cases}6x+9y=15 \xrightarrow{\div 3} 2x+3y=5\\4x+6y=10 \xrightarrow{\div 2} 2x+3y=5\end{cases}$$

La segunda ecuación es idéntica a la primera, por lo que no aporta información.

(Geométricamente las dos ecuaciones corresponden a la misma recta)

La solución del sistema la forman todos los puntos de la recta $2x+3y=5$.

Podemos escribir esos puntos en forma paramétrica así:

$\boxed{\begin{cases}x=t\\y=\dfrac{5-2t}{3}\quad \text{con } t\in\mathbb{R}\end{cases}}$ (Llamamos *t* a la variable *x* y despejamos el valor de *y*)

o más elegante: $\begin{matrix}\text{Un punto de la recta es el } (1,1)\\ \text{Un vector de la recta es el } (3,-2)\end{matrix} \Rightarrow \boxed{\begin{cases}x=1+3t\\y=1-2t\quad \text{con } t\in\mathbb{R}\end{cases}}$

4. Resuelve: $\begin{cases}6x+9y=3\\4x+6y=4\end{cases}$

Simplificamos las dos ecuaciones:

$$\begin{cases}6x+9y=3 \xrightarrow{\div 3} 2x+3y=1\\4x+6y=4 \xrightarrow{\div 2} 2x+3y=2\end{cases}$$

Que no tiene solución, pues $2x+3y$ no puede dar, a la vez, 1 y 2.

(Geométricamente son dos rectas paralelas y nunca se cortan)

$\boxed{\text{El sistema no tiene solución}}$

El método de Gauss

Es un procedimiento para resolver sistemas de ecuaciones. Es el método de reducción que se estudia en Secundaria pero adaptado para trabajar cómodamente con sistemas que tengan muchas ecuaciones.

Para ilustrar el método de Gauss resolveremos este sistema sencillo: $\begin{cases} x+3y=7 \\ 3x+5y=9 \end{cases}$

1. El sistema se escribe como una matriz. Solo se ponen los coeficientes y los términos independientes:

   Nuestro ejemplo se escribe así: $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 7 \\ 3 & 5 & 9 \end{array}\right)$ es decir, una matriz de dos filas (tantas como ecuaciones).

   La línea vertical que separa los términos independientes no es necesaria, pero ayuda a ver todo mejor.

2. El objetivo es triangular la matriz, consiguiendo ceros bajo la diagonal de los coeficientes.

   Eso equivale a tener una matriz como: $\left(\begin{array}{cc|c} * & * & * \\ 0 & * & * \end{array}\right)$ o como: $\left(\begin{array}{ccc|c} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{array}\right)$ cuando haya 3 ecuaciones.

3. Las transformaciones que se pueden hacer son:

   a) Cambiar de posición las filas de la matriz. Preferiremos que la primera fila empiece por 1 o –1.
   (Equivale a cambiar de lugar las ecuaciones del sistema original, el sistema sigue siendo el mismo).

   b) Multiplicar o dividir una ecuación por un número (equivale a simplificar o aumentar una ecuación).

   c) Sumar o restar dos o más filas (que equivale a sumar o restar ecuaciones).

   En nuestro ejemplo, la primera fila empieza con 1 y no hace falta que las cambiemos de lugar.

   Para triangular la matriz, multiplicamos la 1ª fila por 3 y el resultado lo restamos a la segunda fila:

   $$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 7 \\ 3 & 5 & 9 \end{array}\right) \leftarrow F2-3F1 \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 7 \\ 0 & -4 & -12 \end{array}\right)$$

   La segunda fila se puede simplificar, dividiéndola por –4. Hagámoslo:

   $$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 7 \\ 0 & -4 & -12 \end{array}\right) \leftarrow \frac{F2}{-4} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

   Ahora ya podemos resolver el sistema.

   De la segunda fila, recuperando las variables que antes quitamos al escribir la matriz, tenemos:

   $0x+1y=3 \;\rightarrow\; y=3$

   Y sustituyendo en la primera fila podemos calcular la otra variable:

   $1x+3y=7 \;\rightarrow\; x+3\cdot 3=7 \;\Rightarrow\; x=-2$

   La solución del sistema es: $x=-2$, $y=3$.

Resuelve con el método de Gauss el sistema de ecuaciones: $\left.\begin{array}{r} x+y+z=3 \\ 2x-y+z=2 \\ 3x+y+z=5 \end{array}\right\}$

En primer lugar consigamos tener ceros en la primera columna, debajo del 1:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 5 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \leftarrow \mathrm{F2}-2\cdot\mathrm{F1} \\ \leftarrow \mathrm{F2}-3\cdot\mathrm{F1} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & -4 \\ 0 & -2 & -2 & -4 \end{array}\right)$$

Ahora queremos conseguir un cero más en la tercera fila, para ‘triangular’.

Los números no son amables, pero podemos mejorarlos simplificando la tercera fila:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & -4 \\ 0 & -2 & -2 & -4 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow \mathrm{F3}/(-2) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Intercambiamos las filas 2 y 3 (cada una es una ecuación del sistema y se puede hacer).

Ahora es sencillo conseguir un cero bajo el primer 1 que tenemos en la segunda fila:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & -4 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow \mathrm{F3}+3\cdot\mathrm{F2} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

Ya hemos triangulado la parte de los coeficientes y el sistema está técnicamente resuelto.

(Cada sistema de ecuaciones es un caso distinto. La estrategia adoptada aquí no sirve siempre)

Acabemos la resolución, convirtiendo cada fila en una ecuación.

De la tercera fila obtenemos:

$$2z=2 \;\rightarrow\; z=1$$

De la segunda fila obtenemos:

$$y+z=2 \;\rightarrow\; y+1=2 \;\Rightarrow\; y=1$$

De la primera fila obtenemos:

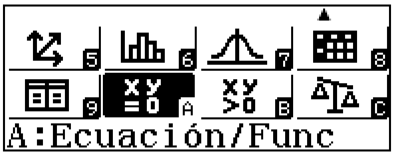
$$x+y+z=3 \;\rightarrow\; x+1+1=3 \;\Rightarrow\; x=1$$

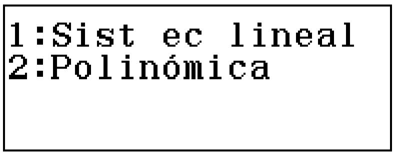
La solución del sistema de ecuaciones es:

$$\boxed{x=1,\ y=1,\ z=1}$$

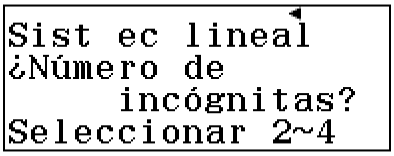
(Recuerda lo importante que es marcar con claridad la solución del problema)

Con la calculadora se pueden resolver sistemas de ecuaciones, usando la opción adecuada:



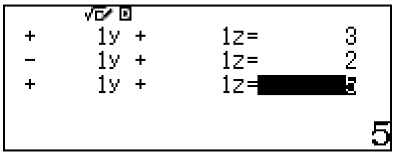


Pulsamos la opción 1.

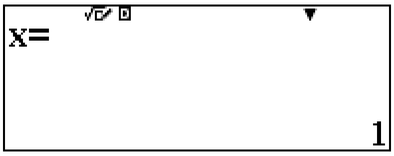


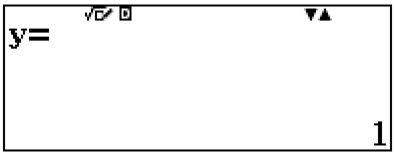
Introducimos el valor 3

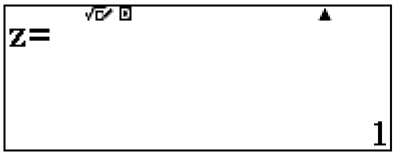
Introducimos los valores...



Y aparecerá la solución:



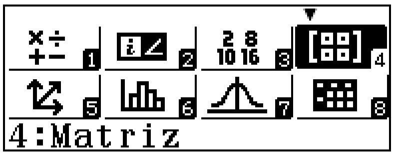


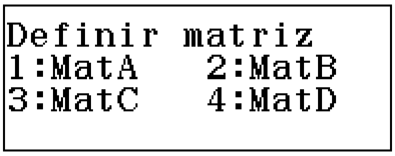


Ya veremos que, casi siempre, es mejor resolver en forma matricial.

Esto es así porque los sistemas que resolveremos no serán simples como este, con solución única.

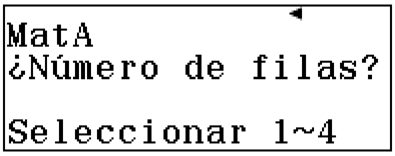
Para resolver en forma matricial con la calculadora usamos el menú 4:

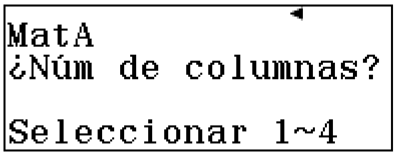




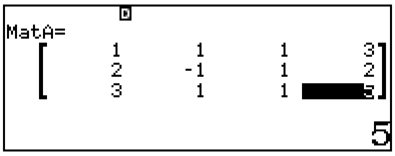
Definiremos la matriz A

Con 3 filas y 4 columnas:





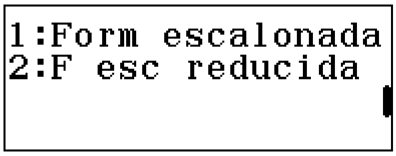
Introducimos los datos:

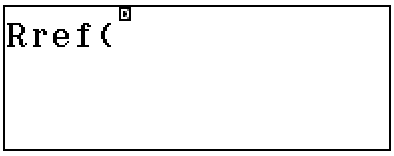


Pulsamos AC y OPTN

Y usamos la opción:

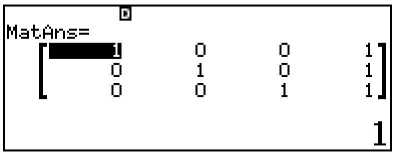
F(orma) **esc**(alonada) **reducida**





Pulsamos: OPTN 3
(actuará sobre la matriz A)

Y pulsamos =



Obteniendo la solución

Cada fila nos da el valor de una de las variables del sistema: $x=1,\ y=1,\ z=1$.

El método de Gauss — 2

Discute, usando el método de Gauss, el sistema de ecuaciones: $\left.\begin{aligned} x+\ \ y+\ \ z&=4\\ 3x+4y+\ 5z&=5\\ 7x+9y+11z&=a \end{aligned}\right\}$

(Problema sacado de las PAU de Valencia de 2019)

Discutir un sistema de ecuaciones consiste en saber si tiene o no solución y de qué tipo es.

La novedad del problema es que aparece una letra a. Eso pasará a partir de ahora, habrá letras. Esas letras se llaman 'parámetros'. Según sea el valor de los parámetros, la solución cambiará. Corresponden a los valores que pueden cambiar en un problema de Ciencia pero no cambian la esencia del problema: Por ejemplo en una caída libre, el valor de g (en la Tierra $g \approx 9.81\ \text{m/s}^2$).

Para estos problemas con parámetros, existen otros métodos de resolución que veremos adelante. Pero siempre se puede usar el método de Gauss, ya sabemos como se aplica. Siempre es lo mismo.

En primer lugar consigamos tener ceros en la primera columna, debajo del 1:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 5 \\ 7 & 9 & 11 & a \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \leftarrow \text{F2}-3\cdot\text{F1} \\ \leftarrow \text{F2}-7\cdot\text{F1} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -7 \\ 0 & 2 & 4 & a-28 \end{array}\right)$$

Ahora queremos conseguir un cero más en la tercera fila, para 'triangular':

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -7 \\ 0 & 2 & 4 & a-28 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow \text{F3}-2\cdot\text{F2} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & a-14 \end{array}\right)$$

Ya hemos triangulado la parte de los coeficientes y el sistema está técnicamente resuelto.

Las dos primeras filas del sistema son independientes: no se puede conseguir una de ellas multiplicando la otra por un número (Se debe al cero que hay en la segunda fila).

Pueden suceder tres cosas con la tercera fila, dependiendo del valor del parámetro a.

Que la tercera ecuación...

1. Sea independiente de las otras dos: Solución única. Sistema compatible.
2. No aporte información: Solución múltiple. Sistema compatible indeterminado.
3. No tenga solución: El sistema no tiene solución. Sistema incompatible.

Veamos qué opciones tenemos en este problema. Una forma de escribir la tercera fila es:

$$0z = a-14 \ \rightarrow \ \begin{cases} \text{si } a=14 \ \rightarrow \ \text{Queda: } 0z=0 \ \Rightarrow \ \text{Siempre es cierto} \\ \text{si } a\neq 14 \ \rightarrow \ \text{Queda: } 0z\neq 0 \ \Rightarrow \ \text{Nunca es cierto} \end{cases}$$

De esto se deduce que...

Si $a=14$ la tercera fila no aporta información. Solo hay dos ecuaciones independientes.

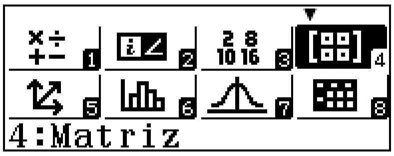
El sistema es Compatible (hay solución) e Indeterminado (solución múltiple).

Si $a\neq 14$ la tercera fila no tiene solución y el sistema no puede resolverse.

El sistema es Incompatible (sin solución).

La calculadora no puede resolver sistemas de ecuaciones con letras (si se pudiera la prohibirían). Pero podemos usarla para ver si nuestra solución es correcta.

Veamos que sucede para el caso $a = 14$. Usamos el menú 4:




```
Definir matriz
1:MatA   2:MatB
3:MatC   4:MatD
```

Definiremos la matriz A

Con 3 filas y 4 columnas:

```
MatA
¿Número de filas?

Seleccionar 1~4
```

```
MatA
¿Núm de columnas?

Seleccionar 1~4
```

Introducimos los datos:

MatA=
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 5 \\ 7 & 9 & 11 & 14 \end{bmatrix}$$
14

Pulsamos AC y OPTN

Y usamos la opción:

F(orma) **esc**(alonada) **reducida**

```
1:Form escalonada
2:F esc reducida
```

```
Rref(
```

Pulsamos: OPTN 3
(actuará sobre la matriz A)

```
Rref(MatA
```

Y pulsamos =

MatAns=
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 11 \\ 0 & 1 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
1

Vemos que la tercera fila no aporta información ($0 = 0$)

Para el caso $a \neq 14$ editamos la matriz y cambiamos el valor 14 por cualquier otro, por ejemplo 5.

Pulsamos AC y OPTN

Y usamos la opción 2
'Editar matriz'

```
1:Definir matriz
2:Editar matriz
3:MatA   4:MatB
5:MatC   6:MatD
```

```
Editar matriz
1:MatA   2:MatB
3:MatC   4:MatD
```

Pulsamos la opción 1
para editar la matriz A

MatA=
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 5 \\ 7 & 9 & 11 & 14 \end{bmatrix}$$
1

Nos desplazamos hasta el valor 14 e introducimos el nuevo valor, 5.

MatA=
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 5 \\ 7 & 9 & 11 & 5 \end{bmatrix}$$
5

Pedimos nuevamente la forma escalonada reducida de la matriz A

```
Rref(MatA
```

MatAns=
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
1

La tercera fila no tiene solución pues equivale a $0 = 1$.

Todo es conforme a la solución que hemos encontrado manualmente.

Álgebra matricial

¿Qué es una matriz?

En Ciencia se llaman magnitudes escalares a las que quedan bien definidas por su cantidad. Ejemplos de magnitudes escalares son la masa o la temperatura. Existe otro tipo de magnitudes que tienen además de cantidad, dirección y sentido. Son magnitudes vectoriales la velocidad o la fuerza.

En Matemáticas un **escalar** es un número (en este curso no aparecerán números complejos, así que un escalar será un número real). Un **vector** es una lista de escalares (dos números reales si trabajamos en el plano, tres números reales si trabajamos en el espacio tridimensional. Es posible definir vectores con más elementos pero no aparecerán este curso).

Podemos pensar en una **matriz** como en una lista de vectores. Esta idea nos será útil más adelante. Dicho de la forma más general posible una matriz es una tabla de números dispuestos en filas y columnas. Las matrices son un elemento de trabajo básico en muchas áreas matemáticas, científicas y tecnológicas.

Las matrices se nombran con letras mayúsculas: A, B, C,... Ejemplos de matrices serían estos:

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{B}=\begin{pmatrix} 5 & -3 & 7 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{C}=\begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 9 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{D}=\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 4 & 7 \\ -4 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2/3 \end{pmatrix}$$

Las líneas horizontales de una matriz se llaman filas, las líneas verticales se llaman columnas.

La matriz A tiene dos filas y dos columnas. Decimos que es una matriz 2×2 (filas $\times$ columnas).
La matriz B tiene dos filas y tres columnas. Decimos que es una matriz 2×3.
La matriz C tiene tres filas y dos columnas. Decimos que es una matriz 3×2.
La matriz D tiene tres filas y tres columnas. Decimos que es una matriz 3×3.

Si una matriz tiene *m* filas y *n* columnas, se trata de una matriz de dimensión $m\times n$.

Los elementos de una matriz se nombran con la letra minúscula correspondiente al nombre de la matriz y dos subíndices que indican en qué fila y columna está ese elemento (y en ese orden):

En la matriz A el elemento de la primera fila y la segunda columna es el $a_{12}=4$.

De igual forma tenemos que: $a_{21}=-2$, $b_{23}=6$, $c_{31}=5$, $d_{22}=0$, $d_{33}=2/3$.

Existen tipos de matrices con nombre:

- Matriz fila es la que solo tiene una fila, con cualquier número de columnas.
- Matriz columna es la que solo tiene una columna, con cualquier número de filas. Se usan para vectores.
- Matriz rectangular es la que tiene un número de filas distinto al número de columnas.
- Matriz cuadrada es la que tiene tantas filas como columnas. Son las que más se usan, existen subtipos:
  - Matriz diagonal es aquella cuyos elementos son cero salvo en la diagonal, desde a_{11} hasta a_{nn} (es la llamada 'diagonal principal').
  - Matriz identidad es la matriz diagonal cuyos elementos en la diagonal principal son todos 1.

    Las matrices identidad se escriben como I con un subíndice que indica su dimensión: $\mathrm{I}_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

    En una matriz identidad se cumple que $a_{ii}=1$, $a_{ij}=0$ si $i\neq j$.
  - Matriz triangular es aquella cuyos elementos son cero por encima de la diagonal principal (matriz triangular inferior) o por debajo de la diagonal principal (matriz triangular superior).
  - Matriz simétrica es aquella tal que $a_{ij}=a_{ji}$ (por ejemplo: $a_{31}=a_{13}$) para todos sus elementos.

Operaciones con matrices

- Igualdad de matrices

Dos matrices son iguales si sus elementos son iguales: $A = B \leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}$ con $i = 1\ldots m,\ j = 1\ldots n$

- Matriz transpuesta

Dada una matriz A, su transpuesta A^T es la que resulta de intercambiar filas por columnas.

Por ejemplo:

$$\text{si } A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{si } B = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 7 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow B^T = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -3 & 2 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}$$

- Suma y resta de matrices

Solo se pueden sumar o restar matrices de igual dimensión.
La operación se efectúa elemento a elemento: $A = \{a_{ij}\},\ B = \{b_{ij}\} \rightarrow A \pm B = \{a_{ij} \pm b_{ij}\}$

Por ejemplo:

$$\text{si } A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \ B = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow A + B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \text{ y } A - B = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$$

Esta operación es conmutativa y asociativa: $A + B = B + A$, $A + (B + C) = (A + B) + C$.
La matriz O (todos sus elementos son ceros) cumple que: $A + O = O + A = A$

- Producto de una matriz por un escalar

Si una matriz se multiplica por un escalar se multiplican todos sus elementos por ese número:

$A = \{a_{ij}\},\ k \in \mathbb{R} \rightarrow k \cdot A = \{k \cdot a_{ij}\}$

Por ejemplo:

$$\text{si } A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow 2A = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{si } B = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 7 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow (-3)B = \begin{pmatrix} -15 & 9 & -21 \\ 0 & -6 & -18 \end{pmatrix}$$

- Producto de matrices

Solo puede hacerse si el número de columnas de la 1ª matriz es igual al número de filas de la 2ª matriz.
$A_{2\times3}$ se puede multiplicar por $B_{3\times3}$ o por $B_{3\times2}$ pero no por $B_{2\times3}$: Debe cumplirse $A_{m\times i} \cdot B_{i\times n}$
El resultado tiene tantas filas como la 1ª matriz y tantas columnas como la 2ª: $A_{m\times i} \cdot B_{i\times n} = (A \cdot B)_{m\times n}$

Para realizar el producto se efectúa de esta forma: (Con palabras es difícil de comprender)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} \rightarrow A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot6+3\cdot8 & 2\cdot7+3\cdot9 \\ 4\cdot6+5\cdot8 & 4\cdot7+5\cdot9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 & 41 \\ 64 & 73 \end{pmatrix}$$

La primera fila de la 1ª matriz 'recorre' las columnas de la 2ª matriz para crear los elementos de la primera fila del producto.

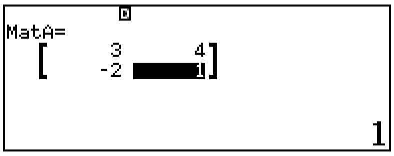
El proceso se repite para las demás filas de la 1ª matriz, para dar las restantes filas del producto.

El producto de matrices NO es, en general, conmutativo: $A \cdot B \neq B \cdot A$

Sí se cumplen las propiedades asociativa: $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$
y distributiva: $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ [Por cumplirla, es un producto]

La matriz identidad (de la dimensión adecuada) cumple que: $A \cdot I = I \cdot A = A$
Una potencia de una matriz es un producto repetido. Por ejemplo: $A^2 = A \cdot A$, $A^3 = A \cdot A \cdot A$, etc.

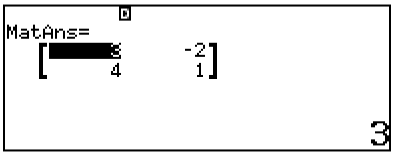
Estas operaciones pueden efectuarse con la calculadora, con el modo 4. Hacemos los ejemplos anteriores:



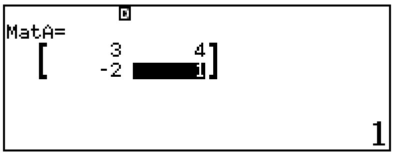
Pedimos la transpuesta de la matriz A y pulsamos [=]

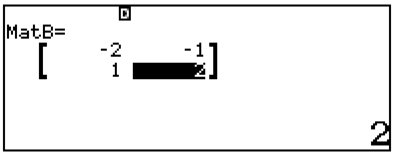
Recuerda: Se pulsa [AC] y con [OPTN] elegimos operación.

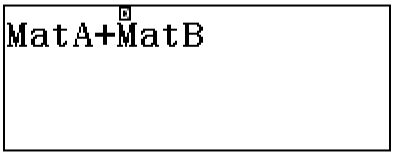
Y con [=] obtenemos A^T



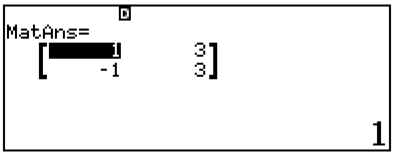
Introducimos A y B para obtener $A+B$ y $A-B$

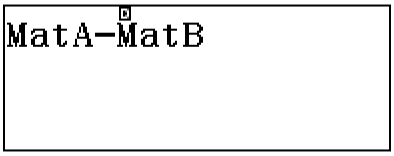




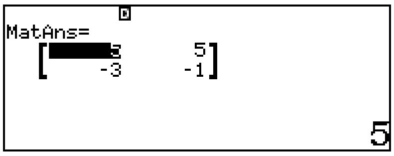


Pulsa [=]

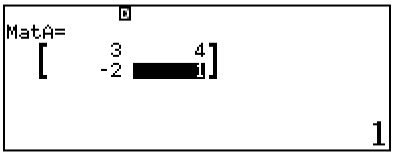


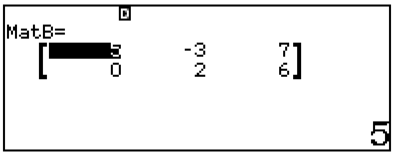


Pulsa [=]

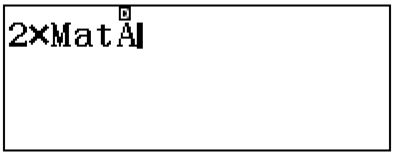


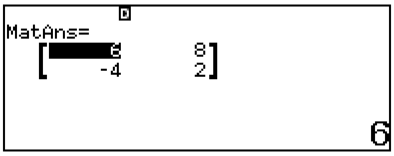
Introducimos A y B para obtener $2A$ y $(-3)B$

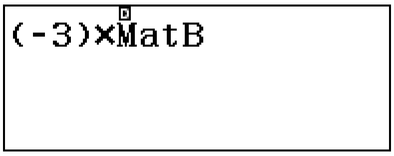


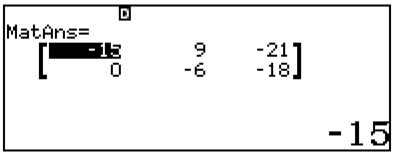


Tecleamos las operaciones requeridas y pulsamos [=]

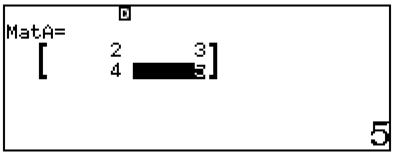


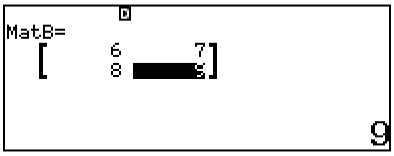




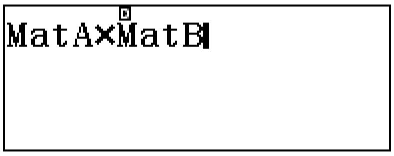


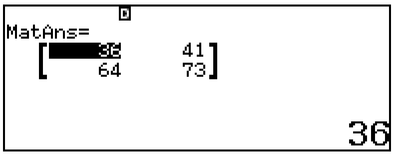
Introducimos A y B para obtener $A \cdot B$



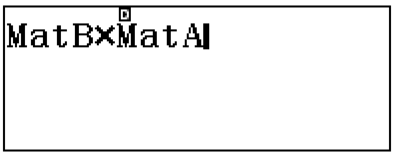


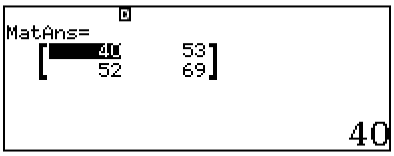
Tecleamos la operación requerida y pulsamos [=]





Veamos cuánto da $B \cdot A$





Comprobamos que el producto de matrices no es conmutativo.

Matriz Inversa

Si A es una matriz cuadrada, se llama **matriz inversa** de A a la matriz A^{-1} que tiene igual dimensión que la matriz A y que cumple:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$$

donde I es la matriz identidad de la misma dimensión que A (y por lo tanto, que A^{-1}).

No todas las matrices cuadradas A tienen matriz inversa. En el capítulo siguiente, dedicado a los determinantes, veremos qué condición debe cumplir A para que exista su matriz inversa A^{-1}.

Las matrices cuadradas que tienen inversa se llaman **matrices regulares**.
Las matrices cuadradas que no tienen inversa se llaman **matrices singulares**.

Ejemplo. Supongamos que una matriz A cumple: $A^2 = A + I$. Demuestra que existe A^{-1}.

Tenemos que encontrar una matriz A^{-1} tal que $A \cdot A^{-1} = I$

Transformamos: $A^2 = A + I \;\rightarrow\; A^2 - A = I \;\Rightarrow\; A \cdot (A - I) = I$

Por lo tanto, la matriz inversa de A existe y es: $A^{-1} = A - I$, puesto que al multiplicar por A da I.

Veremos una forma general para calcular A^{-1} cuando veamos los determinantes, pero podemos calcular A^{-1} de esta forma:

Escribimos la matriz A y al lado una matriz identidad y hacemos transformaciones como las que vimos en el método de Gauss, hasta que la matriz A se transforme en la identidad. La que empezó como matriz identidad será la A^{-1} que buscamos. Veámoslo con un ejemplo:

Queremos la inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$. Escribimos la identidad al lado y transformamos:

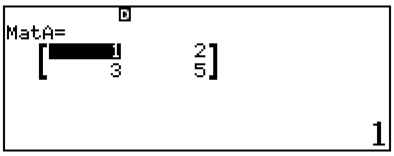
$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \leftarrow F2 - 3 \cdot F1 \end{array} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \leftarrow F1 + 2 \cdot F2 \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -5 & 2 \\ 0 & -1 & -3 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \leftarrow -F2 \end{array} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -5 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{array}\right)$$

Así pues, tenemos que: $A^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

Comprobamos que es correcta: $A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5+6 & 2-2 \\ -15+15 & 6-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$

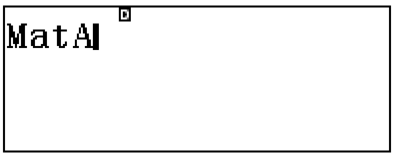
Con la calculadora podemos calcular la inversa de una matriz en el modo 4:

Introducimos la matriz A

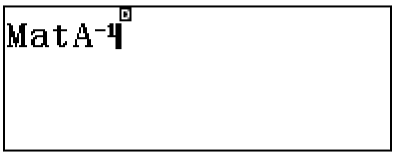


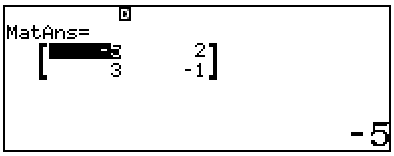
Y pulsamos AC OPTN

Elegimos la matriz A



Y pulsamos x^{-1} e =





Obteniendo el mismo resultado que en el ejemplo anterior.

Veremos más adelante qué otras propiedades cumple la inversa de una matriz. Antes de empezar con el siguiente tema, cito una operación sencilla que se aplica a matrices cuadradas: La **traza** de una matriz.

Se escribe $\operatorname{tr}(A)$ y es la suma de los elementos de la diagonal principal: $\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$

Determinante de una matriz cuadrada

Es una operación sobre los elementos de una matriz cuadrada que produce un número.

Si la matriz es de dimensión 1×1, su determinante es igual al único elemento de la matriz:

Ejemplo: Si $A=\left(-2\right) \rightarrow |A| = -2$ o bien $\det(A) = -2$

El determinante de una matriz se indica escribiendo la matriz entre barras o con la función 'det'.

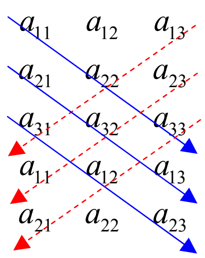
Si la matriz es de dimensión 2×2 su determinante se calcula así:

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightarrow \det(A) = a\cdot d - b\cdot c$, o bien se puede escribir así: $|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a\cdot d - b\cdot c$

Ejemplo: Si $A = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \det(A) = (-2)\cdot 5 - (-3)\cdot 4 = -10 - (-12) = -10 + 12 = 2$

Si la matriz es de dimensión 3×3 se puede usar la que se conoce como 'regla de Sarrus' que explico:

Tenemos la matriz: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ y queremos calcular su determinante.



Repetimos las dos primeras filas de la matriz debajo de ella

Sumamos los productos de las diagonales descendentes (en línea continua azul) y restamos los productos de las diagonales ascendentes (en línea discontinua roja)

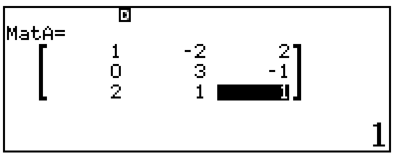
De esta forma, el determinante resultará así:

$$\det(A) = a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33} + a_{21}\cdot a_{32}\cdot a_{13} + a_{31}\cdot a_{12}\cdot a_{23} - \\ -(a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31} + a_{23}\cdot a_{32}\cdot a_{11} + a_{33}\cdot a_{12}\cdot a_{21})$$

Ejemplo:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \det(A) = 1\cdot 3\cdot 1 + 0\cdot 1\cdot 2 + 2\cdot(-2)\cdot(-1) - \\ -\left[2\cdot 3\cdot 2 + (-1)\cdot 1\cdot 1 + 1\cdot(-2)\cdot 0\right] = 3+0+4-\left[12-1+0\right] = -4$$

$$\begin{matrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \end{matrix}$$

Se puede hacer con la calculadora usando el modo 4. Introducimos la matriz y pedimos su determinante:



Cálculo de un determinante desarrollando por los elementos de una línea

Este método de cálculo del determinante es más general que los anteriores.
Se puede utilizar para matrices de cualquier tamaño.

Para usarlo se elige una línea de la matriz (una fila o una columna). Se puede elegir cualquier línea.
El determinante será una suma de productos: Cada elemento de la línea elegida por su **adjunto**.

Como ejemplo usaremos la matriz 3×3 que vimos antes:

Ejemplo: $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 2\\ 0 & 3 & -1\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix} \rightarrow$ Elegimos como línea la 1ª columna (Mejor elegir una línea con ceros) $\rightarrow \det(A)=1\cdot A_{11}+0\cdot A_{21}+2\cdot A_{31}$

donde A_{11} es el adjunto del elemento a_{11} , A_{21} es el adjunto de a_{21} y A_{31} es el adjunto de a_{31}

El **adjunto** A_{ij} del elemento a_{ij} se calcula así: el producto $(-1)^{i+j}\cdot\det(\alpha_{ij})$
donde α_{ij} es el **menor complementario** del elemento a_{ij}

El menor complementario α_{ij} es la submatriz que resulta al eliminar la fila y la columna del elemento a_{ij}

Ejemplo: $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 2\\ 0 & 3 & -1\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix} \rightarrow \quad \alpha_{11}=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix} \quad \alpha_{21}=\begin{pmatrix}-2 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix} \quad \alpha_{31}=\begin{pmatrix}-2 & 2\\ 3 & -1\end{pmatrix}$

Por lo que los adjuntos que buscamos son:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}3 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=(+1)\cdot\left[3\cdot 1-(-1)\cdot 1\right]=+\left[3+1\right]=4$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}-2 & 2\\ 1 & 1\end{vmatrix}=(-1)\cdot\left[(-2)\cdot 1-2\cdot 1\right]=-\left[-2-2\right]=4$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}-2 & 2\\ 3 & -1\end{vmatrix}=(+1)\cdot\left[(-2)\cdot(-1)-2\cdot 3\right]=+\left[2-6\right]=-4$$

Y el determinante será:

$\det(A)=1\cdot A_{11}+0\cdot A_{21}+2\cdot A_{31}=1\cdot 4+0\cdot 4+2\cdot(-4)=4+0-8=-4$ que es correcto.

Es interesante hacer el cálculo anterior partiendo de otra línea de la matriz A. Se debe obtener lo mismo.

Al hacer el cálculo manualmente, es útil (evita olvidos y errores) tener los signos $(-1)^{i+j}$ puestos de antemano. El elemento a_{11} es positivo y a partir de él los signos se van alternando:

$\begin{pmatrix}+ & - & +\\ - & + & -\\ + & - & +\end{pmatrix}$ con matrices de otro tamaño ocurre lo mismo.

Hay que ensayar el cálculo de adjuntos pues se usará para calcular la matriz inversa.

Dada una matriz A se llama **matriz adjunta** (o matriz de adjuntos) a la que se obtiene sustituyendo a cada elemento por su adjunto. Se puede escribir A^{adj} o también $\mathrm{adj}(A)$.

Propiedades de los determinantes

El cálculo de determinantes se usa en la discusión y resolución de sistemas de ecuaciones y en diversos tópicos de Geometría por lo que es importante llevarse bien con ellos.

Si tuviéramos que calcular el determinante de una matriz 4×4 con el método anterior se descompondría en 4 determinantes 3×3. No es un trabajo enorme pero empieza a ser molesto. Con matrices mayores es aún peor. Por eso conviene tener formas de reducir el trabajo.

Ese, entre otros, es el objetivo de conocer las propiedades de los determinantes. Son las siguientes:

1. El determinante de la matriz traspuesta es igual al de la original: $\det(\mathrm{A}^{\mathrm{T}})=\det(\mathrm{A})$

2. Si una matriz tiene una línea (fila o columna) de ceros, su determinante es cero.
   Si dos líneas paralelas son iguales o proporcionales, el determinante también es cero.
   Si una línea es combinación lineal de otras líneas paralelas, el determinante es cero.

3. Si una línea de la matriz se multiplica por un número k, el determinante queda multiplicado por k:
$$\begin{vmatrix} \mathrm{k}\cdot a & \mathrm{k}\cdot b & \mathrm{k}\cdot c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \mathrm{k}\cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

4. Si una matriz se multiplica por un número k, el determinante queda multiplicado por k^{n}, donde n es la dimensión de la matriz:
   si A es una matriz $\mathrm{n}\times\mathrm{n}$, $\det(\mathrm{k}\cdot\mathrm{A})=\mathrm{k}^{\mathrm{n}}\cdot\det(\mathrm{A})$

5. El determinante de un producto de matrices es el producto de los determinantes de cada matriz:
$$\det(\mathrm{A}\cdot\mathrm{B})=\det(\mathrm{A})\cdot\det(\mathrm{B})$$

6. Si a una línea de la matriz A se le suma o resta una línea paralela multiplicada por un número, el determinante de la matriz no cambia:
$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c+\mathrm{k}_1\cdot a+\mathrm{k}_2\cdot b \\ d & e & f+\mathrm{k}_1\cdot d+\mathrm{k}_2\cdot e \\ g & h & i+\mathrm{k}_1\cdot g+\mathrm{k}_2\cdot h \end{vmatrix}$$
   Esta propiedad es la más útil para resolver determinantes, creando ceros para que al desarrollar por los elementos de una línea contribuya el menor número de términos posible.

7. Si se intercambian dos líneas paralelas de la matriz, su determinante cambia de signo.

8. Si todos los elementos de una línea se descomponen en dos sumandos, el determinante de la matriz es igual a la suma de los dos determinantes que tienen en dicha línea uno de los sumandos:
$$\begin{vmatrix} a & b+\mathrm{x} & c \\ d & e+\mathrm{y} & f \\ g & h+\mathrm{z} & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & \mathrm{x} & c \\ d & \mathrm{y} & f \\ g & \mathrm{z} & i \end{vmatrix}$$

9. Si una matriz es triangular, su determinante es el producto de los elementos de la diagonal principal.

Ejemplo 1: Calcula el determinante de la matriz $A=\begin{pmatrix} a & 3a & 5ab \\ 3 & -2 & 4b \\ 2 & 5 & -b \end{pmatrix}$ donde a y b son parámetros reales.

Por la propiedad (3), podemos 'sacar' un factor a de la 1ª fila y un factor b de la 3ª columna:

$$\det(A)=a\cdot b\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & -2 & 4 \\ 2 & 5 & -1 \end{vmatrix}$$

Podríamos aplicar la regla de Sarrus para hacer el determinante numérico o desarrollar por los elementos de una línea. Para practicar, haremos uso de la propiedad (6), consiguiendo ceros.

Vamos a sustituir la columna 2 por: $C2-3\cdot C1$ y la columna 3 por: $C3-5\cdot C1$ al hacer estas dos sustituciones, el determinante no cambiará:

$$\det(A)=a\cdot b\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & -2 & 4 \\ 2 & 5 & -1 \end{vmatrix}=\ldots\left\{\begin{matrix} C2\leftarrow C2-3\cdot C1 \\ C3\leftarrow C3-5\cdot C1 \end{matrix}\right\}\ldots=a\cdot b\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -11 & -11 \\ 2 & -1 & -11 \end{vmatrix}=\ldots$$

Ahora, vamos a desarrollar por los elementos de la 1ª fila:

$$\ldots=a\cdot b\cdot\left[1\cdot\begin{vmatrix} -11 & -11 \\ -1 & -11 \end{vmatrix}-0+0\right]=a\cdot b\cdot\begin{vmatrix} -11 & -11 \\ -1 & -11 \end{vmatrix}=(-11)\cdot a\cdot b\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -11 \end{vmatrix}=\ldots$$

Ahora, cambiamos la 2ª fila por $F2+F1$, el determinante no cambiará:

$$\ldots=(-11)\cdot a\cdot b\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -10 \end{vmatrix}=(-11)\cdot a\cdot b\cdot\left[1\cdot(-10)-1\cdot 0\right]=(-11)\cdot a\cdot b\cdot(-10)=110\,a\,b$$

Ejemplo 2: Calcula el determinante de la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 0 & 6 \\ 3 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

Vamos a sustituir la 4ª columna por: $C4-3\cdot C1$ para conseguir ceros en la 1ª fila:

$$\det(A)=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 0 & 6 \\ 3 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 2 \end{vmatrix}=\ldots\left\{C4\leftarrow C4-3\cdot C1\right\}\ldots=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & -8 \\ 1 & 4 & 2 & -1 \end{vmatrix}=$$

Ahora sustituimos la 4ª columna por: $C4+8\cdot C3$ Así conseguimos otro cero en la columna 4:

$$=\ldots\left\{C4\leftarrow C4+8\cdot C3\right\}\ldots=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 15 \end{vmatrix}=\ldots$$

Y puesto que es una matriz triangular (es una matriz triangular inferior), su determinante es el producto de los elementos de la diagonal principal:

$$\ldots=1\cdot 2\cdot 1\cdot 15=30$$

Cálculo de la matriz inversa

Dada una matriz cuadrada A, su matriz inversa A^{-1} se puede calcular con una de estas fórmulas:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \left[\mathrm{adj}(A)\right]^T = \frac{1}{\det(A)} \cdot \left[\mathrm{adj}(A^T)\right]$$

Es decir, hay un número (el recíproco del determinante de A) que multiplica a una matriz. Esa matriz es la matriz adjunta de A y luego transpuesta (a mí me gusta hacerlo de esa forma pues escribo menos) o bien primero se calcula la transpuesta de A y de ella se hace la matriz adjunta. De ambas formas sale lo mismo.

Para que la matriz inversa A^{-1} exista, el $\det(A)$ debe ser distinto de cero, por eso se empieza por ahí.

Veamos dos ejemplos:

Ejemplo 1: Calcula la matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Empezamos con el determinante: $\det(A) = 2 \cdot 1 - 4 \cdot 0 = 2$ como es distinto de cero, A^{-1} existe.

Calculamos la matriz adjunta de A. Recuerda que el adjunto de cada elemento es un signo que multiplica al determinante del menor que resulta al eliminar la fila y la columna correspondientes.

Los signos son: $\begin{pmatrix} + & - \\ - & + \end{pmatrix}$ y al quitar, para cada elemento, su fila y su columna solo queda un número.

Por eso la matriz adjunta es: $\mathrm{adj}(A) = \begin{pmatrix} +(1) & -(0) \\ -(4) & +(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$

La inversa buscada, usando la primera fórmula es:

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Se puede escribir directamente la matriz transpuesta (ahorrando el primer paso de la línea anterior). El resultado se puede dejar con el factor $1/2$ fuera de la matriz (como el penúltimo paso).

Ejemplo 2: Calcula la matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

El determinante, con la regla de Sarrus es: $\det(A) = 0 + 0 + 1 - (0 + 0 + 0) = 1$ luego existe A^{-1}.

La matriz adjunta tiene como signos: $\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$ y sus valores son los determinantes 2×2 que resultan al eliminar la fila y la columna correspondiente a cada elemento. Se obtiene que:

$$\mathrm{adj}(A) = \begin{pmatrix} +(0) & -(0) & +(1) \\ -(-1) & +(0) & -(1) \\ +(-1) & -(-1) & +(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Y añadiendo el factor numérico y transponiendo: $A^{-1} = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Recuerda que siempre puedes comprobar la corrección del cálculo usando que: $A \cdot A^{-1} = I$

Propiedades de la matriz inversa

Dada una matriz cuadrada A, su matriz inversa A^{-1} es la que cumple: $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = \mathrm{I}$, donde I es la matriz identidad del mismo orden que la matriz A. Si existe, la matriz A^{-1} es única.

Para que exista la matriz inversa A^{-1}, debe cumplirse que $\det(A) \neq 0$.
Si existe A^{-1}, se dice que A es regular. Si no existe A^{-1} [es decir, $\det(A) = 0$] se dice que A es singular.

1. $(A^{-1})^{-1} = A$
2. $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$
3. $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)} \cdot [\mathrm{adj}(A)]^{T}$
4. $(A^{-1})^{T} = (A^{T})^{-1}$
5. $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

Ejercicio 1: Demuestra que $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$

Según la definición de matriz inversa: $A \cdot A^{-1} = \mathrm{I}$

Tomando determinantes en ambos miembros: $\det\left(A \cdot A^{-1}\right) = \det\left(\mathrm{I}\right)$

Por las propiedades de los determinantes, $\det\left(A \cdot A^{-1}\right) = \det\left(A\right) \cdot \det\left(A^{-1}\right)$ y $\det\left(\mathrm{I}\right) = 1$

Por lo que tenemos: $\det\left(A\right) \cdot \det\left(A^{-1}\right) = 1$ de donde se deduce la igualdad pedida.

Ejercicio 2: Demuestra que $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

Según la definición de matriz inversa: $\left(A \cdot B\right)^{-1} \cdot \left(A \cdot B\right) = \mathrm{I}$

Multiplicando en ambos miembros por B^{-1} *por la derecha*, al ser el producto asociativo:

$$\left(A \cdot B\right)^{-1} \cdot A \cdot B \cdot B^{-1} = \mathrm{I} \cdot B^{-1} \;\; \rightarrow \;\; \left(A \cdot B\right)^{-1} \cdot A = B^{-1}$$

Usando que $B \cdot B^{-1} = \mathrm{I}$ y que $\mathrm{I} \cdot B^{-1} = B^{-1}$

Multiplicando en ambos miembros por A^{-1} *por la derecha*, al ser el producto asociativo:

$$\left(A \cdot B\right)^{-1} \cdot A \cdot A^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1} \;\; \rightarrow \;\; \left(A \cdot B\right)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

Usando que $A \cdot A^{-1} = \mathrm{I}$

Este último procedimiento, multiplicar en ambos miembros por una matriz inversa (en ambos por el mismo lado porque el producto no es conmutativo), se usa frecuentemente para resolver ecuaciones.

Propiedades de la matriz transpuesta

Dada una matriz A, su matriz traspuesta A^{T} se obtiene poniendo las filas como columnas.
Sus propiedades más importantes son las siguientes:

1. $(A^{T})^{T} = A$
2. $(k \cdot A)^{T} = k \cdot A^{T}$
3. $(A \cdot B)^{T} = B^{T} \cdot A^{T}$
4. $(A + B)^{T} = A^{T} + B^{T}$
5. $\det(A^{T}) = \det(A)$
6. si $A = A^{T} \rightarrow A$ es simétrica

Ejercicios de matrices resueltos (con problemas PAU de 2013 a 2022)

1.- Sean las matrices fila $A=(1,-1,2)$ y $B=(2,1,0)$. Calcula la matriz: $X=(A^T\cdot B)^8-(A^T\cdot B)^5$

Calculamos lo que aparece en cada paréntesis: $A^T\cdot B=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1&0\\-2&-1&0\\4&2&0\end{pmatrix}$

$\left(A^T\cdot B\right)^2=\begin{pmatrix}2&1&0\\-2&-1&0\\4&2&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&1&0\\-2&-1&0\\4&2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1&0\\-2&-1&0\\4&2&0\end{pmatrix}=A^T\cdot B$, al elevar al cuadrado queda lo mismo.

Calculamos la potencia 3: $\left(A^T\cdot B\right)^3=\left(A^T\cdot B\right)^2\cdot\left(A^T\cdot B\right)=\left(A^T\cdot B\right)\cdot\left(A^T\cdot B\right)=\left(A^T\cdot B\right)^2=A^T\cdot B$

Por lo tanto, tendremos que, para cualquier potencia: $\left(A^T\cdot B\right)^n=A^T\cdot B$

La matriz buscada es: $X=(A^T\cdot B)^8-(A^T\cdot B)^5=A^T\cdot B-A^T\cdot B=$ matriz nula de dimensiones 3×3.

2.- Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}x&3&1\\x+1&4&2\\x&x&2\end{pmatrix}$ calcula:

a) Para qué valores de x existe la matriz A^{-1}.
b) Para qué valores de x se cumple que: $\det(2A)=-48$

a) Para que exista A^{-1} debe cumplirse que $\det(A)\neq0$.

$$\det(A)=\begin{vmatrix}x&3&1\\x+1&4&2\\x&x&2\end{vmatrix}=\ldots\begin{bmatrix}F2\leftarrow F2-F1\\F3\leftarrow F3-F1\end{bmatrix}\ldots=\begin{vmatrix}x&3&1\\1&1&1\\0&x-3&1\end{vmatrix}=x+0+(x-3)-\left[0+x(x-3)+3\right]=$$

$$=2x-3-x(x-3)-3=-x^2+5x-6=-(x-2)(x-3)$$

El determinante se anula si $x=2$, $x=3$. Por lo tanto, existe A^{-1} si $x\neq2$ y $x\neq3$.

b) Como A es una matriz de orden 3, $\det(2A)=2^3\cdot\det(A)=8\cdot\det(A)$.

Y como, del apartado anterior: $\det(A)=-x^2+5x-6$, tendremos: $\det(2A)=8\cdot(-x^2+5x-6)=-48$

De ahí: $-x^2+5x-6=-6\ \rightarrow\ -x^2+5x=0\ \Rightarrow\ x=0,\ x=5$

3.- Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}-1&3&x-2\\1&0&x\\-2&x&x\end{pmatrix}$ calcula:

a) Para qué valores de x existe la matriz A^{-1}.
b) Para qué valores de x se cumple que: $\det(3A)=-243$

a) A^{-1} existirá para los valores de x que hagan $\det(A)\neq0$.

$$\det(A)=\begin{vmatrix}-1&3&x-2\\1&0&x\\-2&x&x\end{vmatrix}=\ldots\begin{bmatrix}F1\leftarrow F1-F2\\F3\leftarrow F3-F2\end{bmatrix}\ldots=\begin{vmatrix}-2&3&-2\\1&0&x\\-3&x&0\end{vmatrix}=0-9x-2x-(0-2x^2+0)=2x^2-11x$$

Que se anula para: $x=0,\ x=11/2$. Por lo tanto, existe A^{-1} si $x\neq 0$ y $x\neq 11/2$.

b) $\det(3A)=3^3\cdot\det(A)=27\cdot\det(A)=27\cdot(2x^2-11x)$

Si $27\cdot(2x^2-11x)=-243 \to 2x^2-11x=-9,\ 2x^2-11x+9=0 \Rightarrow x=1,\ x=9/2$

4.- Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}-1&3&-1\\1&0&1\\-2&1&1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&3&2\\1&-1&2\end{pmatrix}$. Calcula: a) $\left|A^3\cdot(5B)\right|$ b) $\left|A^{-1}\cdot B^2\cdot(B^{-1}\cdot A)^2\right|$ c) $X=(A^T+I)\cdot(B-I)$ { En este problema y en el siguiente, I es la matriz identidad de orden 3 }.

a) $\left|A^3\cdot(5B)\right|=\left|A\right|^3\cdot 5^3\cdot\left|B\right|=\ldots$

$$\left[\ \left|A\right|=\begin{vmatrix}-1&3&-1\\1&0&1\\-2&1&1\end{vmatrix}=0-6-1-(0-1+3)=-9\ ,\quad \left|B\right|=\begin{vmatrix}2&1&0\\0&3&2\\1&-1&2\end{vmatrix}=12+2+0-(0-4+0)=18\ \right]$$

$\ldots=(-9)^3\cdot 5^3\cdot 18=-1640250$

b) $\left|A^{-1}\cdot B^2\cdot(B^{-1}\cdot A)^2\right|=\left|A\right|^{-1}\cdot\left|B\right|^2\cdot\left[\left|B\right|^{-1}\cdot\left|A\right|\right]^2=\left|A\right|^{-1}\cdot\left|B\right|^2\cdot\left|B\right|^{-2}\cdot\left|A\right|^2=\left|A\right|=-9$

c) $$X=(A^T+I)\cdot(B-I)=\left[\begin{pmatrix}-1&1&-2\\3&0&1\\-1&1&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right]\cdot\left[\begin{pmatrix}2&1&0\\0&3&2\\1&-1&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right]=$$

$$=\begin{pmatrix}0&1&-2\\3&1&1\\-1&1&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1&0\\0&2&2\\1&-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&4&0\\4&4&3\\1&-1&4\end{pmatrix}$$

5.- Usando las mismas matrices A y B que en el problema anterior calcula, si existe, la matriz X en los dos casos siguientes: a) $X=(A-B)^{-1}$ b) $X\cdot A=9\cdot I$

a) $$A-B=\begin{pmatrix}-1&3&-1\\1&0&1\\-2&1&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&1&0\\0&3&2\\1&-1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&2&-1\\1&-3&-1\\-3&2&-1\end{pmatrix}$$

Esta matriz tiene determinante nulo por tener dos filas iguales, luego no tiene inversa. No existe X.

b) $A=\begin{pmatrix}-1&3&-1\\1&0&1\\-2&1&1\end{pmatrix}$ su determinante fue calculado en el apartado (4a), $\left|A\right|=-9$ [Por tanto existe A^{-1}]

$X\cdot A=9\cdot I$, multiplicamos por A^{-1} por la derecha: $X\cdot A\cdot A^{-1}=9\cdot I\cdot A^{-1} \to X=9\cdot A^{-1}$

$A^{-1}=\dfrac{1}{\det(A)}\cdot\left[\operatorname{adj}(A)\right]^T$. Calculamos la matriz $\operatorname{adj}(A)$ y la traspondremos al escribir A^{-1}:

$$\mathrm{adj}(A)=\begin{pmatrix} +(-1) & -(+3) & +(+1) \\ -(+4) & +(-3) & -(+5) \\ +(+3) & -(0) & +(-3) \end{pmatrix} \text{ por tanto: } X=9\cdot A^{-1}=9\cdot\frac{1}{9}\cdot\begin{pmatrix} -1 & -4 & 3 \\ -3 & -3 & 0 \\ 1 & -5 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & -4 & 3 \\ -3 & -3 & 0 \\ 1 & -5 & -3 \end{pmatrix}$$

6.- Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ obtén estos determinantes:

a) $|A+B|$ y $\left|\frac{1}{2}(A+B)^{-1}\right|$ b) $\left|(A+B)^{-1}A\right|$ y $\left|A^{-1}(A+B)\right|$ c) $\left|2ABA^{-1}\right|$ y $\left|A^3B^{-1}\right|$

a) $|A|=\ldots\{\text{Desarrollando por los elementos de la 1ª fila}\}\ldots=(-2)\cdot[1\cdot(-2)-0\cdot 0]=4$

$|B|=\ldots\{\text{Desarrollando por los elementos de la 1ª columna}\}\ldots=2\cdot[(-1)\cdot 2-5\cdot 0]=-4$

$$A+B=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad |A+B|=0+20+4-(0+0+0)=24$$

$$\left|\frac{1}{2}(A+B)^{-1}\right|=\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\frac{1}{|A+B|}=\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{24}=\frac{1}{192}$$

b) $\left|(A+B)^{-1}A\right|=\dfrac{1}{|A+B|}\cdot|A|=\dfrac{1}{24}\cdot 4=\dfrac{4}{24}=\dfrac{1}{6}$

$$\left|A^{-1}(A+B)\right|=\frac{1}{|A|}\cdot|A+B|=\frac{1}{4}\cdot 24=\frac{24}{4}=6$$

c) $\left|2ABA^{-1}\right|=2^3\cdot|A|\cdot|B|\cdot|A|^{-1}=8\cdot|B|=8\cdot(-4)=-32$

$$\left|A^3B^{-1}\right|=|A|^3\cdot|B|^{-1}=4^3\cdot\frac{1}{-4}=-4^2=-16$$

7.- Comprueba que:

a) Si el producto de dos matrices cuadradas A y B es conmutativo, se deduce: $A^2B^2=(AB)^2$.

b) La matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 10 \\ 0 & -3 & 7 \end{pmatrix}$ satisface la relación: $A^2-3A+2I=O$ [I y O son las matrices unidad y nula de orden 3x3], y que una matriz que cumple $A^2-3A+2I=O$ tiene inversa.

c) Si una matriz A cumple $A^2-3A+2I=O$, obtén una expresión simple para A^3.

a) $A^2B^2=A\cdot A\cdot B\cdot B=A\cdot(A\cdot B)\cdot B=\ldots[AB=BA]\ldots=A\cdot B\cdot A\cdot B=(AB)^2$

b) $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 10 \\ 0 & -3 & 7 \end{pmatrix} \to A^2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 10 \\ 0 & -3 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 10 \\ 0 & -3 & 7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -14 & 30 \\ 0 & -9 & 19 \end{pmatrix}$

$$A^2-3A+2I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-14&30\\0&-9&19\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-4&10\\0&-3&7\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

Si $A^2-3A+2I=O \rightarrow A^2-3A=-2I \rightarrow A(A-3I)=-2I \rightarrow A\left(\frac{3}{2}I-\frac{1}{2}A\right)=I$

Por lo que $A^{-1}=\left(\frac{3}{2}I-\frac{1}{2}A\right)$

c) $A^2-3A+2I=O \rightarrow A^2=3A-2I$

$A^3=A\cdot A^2=A\cdot(3A-2I)=3A^2-2A=3(3A-2I)-2A=9A-6I-2A=7A-6I$

8.- Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-2\\1\\-1\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}-1&1&3\end{pmatrix}$ obtén:

a) La matriz inversa A^{-1} de la matriz A.
b) La matriz X que resuelve la ecuación: $AX=BC$.
c) El determinante de $2M^3$ si M es de orden 2 y el determinante de M vale 1/2.

---

a) $A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ como es triangular: $|A|=1\cdot1\cdot1=1$

$$\operatorname{adj}(A)=\begin{pmatrix}+(+1)&-(0)&+(0)\\-(-1)&+(+1)&-(0)\\+(-2)&-(+1)&+(+1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\-2&-1&1\end{pmatrix}\rightarrow A^{-1}=\frac{1}{1}\cdot\begin{pmatrix}1&1&-2\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&-2\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

b) $AX=BC \rightarrow A^{-1}AX=A^{-1}BC \rightarrow X=A^{-1}BC$

$$B\cdot C=\begin{pmatrix}-2\\1\\-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1&1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-2&-6\\-1&1&3\\1&-1&-3\end{pmatrix},\ X=A^{-1}BC=\begin{pmatrix}1&1&-2\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-2&-6\\-1&1&3\\1&-1&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1&3\\-2&2&6\\1&-1&-3\end{pmatrix}$$

c) $|2M^3|=2^2\cdot|M|^3=2^2\cdot(1/2)^3=1/2$

9.- a) Halla el determinante de $S=\begin{pmatrix}2&-2&1\\1&1&1\\-1&3&5\end{pmatrix}$ y su matriz inversa S^{-1} si existe.

b) El determinante de la matriz $\left(4T^2\right)^{-1}$ si T es una matriz cuadrada de 3 filas y determinante 20.

c) La solución *a* de la ecuación $\begin{pmatrix}a&a^2-1&-3\\a+1&2&a^2+4\\-3&4a&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&a+1&-3\\a^2-1&2&4a\\-3&a^2+4&1\end{pmatrix}$

a) $\det(S)=\begin{vmatrix}2&-2&1\\1&1&1\\-1&3&5\end{vmatrix}=\ldots\begin{bmatrix}F1\leftarrow F1-2\cdot F2\\F3\leftarrow F3+F2\end{bmatrix}\ldots=\begin{vmatrix}0&-4&-1\\1&1&1\\0&4&6\end{vmatrix}=(-1)\cdot\begin{vmatrix}-4&-1\\4&6\end{vmatrix}=-(-24+4)=20$

$$\mathrm{adj}(S)=\begin{pmatrix}+(+2)&-(+6)&+(+4)\\-(-13)&+(+11)&-(+4)\\+(-3)&-(+1)&+(+4)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-6&4\\13&11&-4\\-3&-1&4\end{pmatrix}\rightarrow S^{-1}=\frac{1}{20}\cdot\begin{pmatrix}2&13&-3\\-6&11&-1\\4&-4&4\end{pmatrix}$$

b) $\left|\left(4T^2\right)^{-1}\right|=\dfrac{1}{|4T^2|}=\dfrac{1}{4^3\cdot|T|^2}=\dfrac{1}{4^3\cdot 20^2}=\dfrac{1}{64\cdot 400}=\dfrac{1}{25600}$

c) Igualando los elementos no idénticos: $\left.\begin{array}{l}a^2-1=a+1\\a^2+4=4a\end{array}\right\}$ Restando, $5=3a-1\ \rightarrow\ a=2$.

(La segunda ecuación equivale a: $(a-2)^2=0$ por lo que no puede haber otras soluciones).

10.- Se dan las matrices $A=\begin{pmatrix}1&-3\\2&2\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1&3\\2&-2\end{pmatrix}$ obtén:

a) La matriz inversa de A. b) Las matrices X e Y que cumplen: $XA=B$ y $AY=B$.

c) Justifica que si M es una matriz cuadrada con $M^2=I$, se verifica que: $M^3=M^7$

a) $\det(A)=2-(-6)=8$, existe la matriz inversa.

$$\mathrm{adj}(A)=\begin{pmatrix}+(+2)&-(+2)\\-(-3)&+(+1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-2\\3&1\end{pmatrix}\rightarrow A^{-1}=\frac{1}{8}\cdot\begin{pmatrix}2&-2\\3&1\end{pmatrix}^T=\frac{1}{8}\cdot\begin{pmatrix}2&3\\-2&1\end{pmatrix}$$

b) $XA=B\ \rightarrow\ XA\cdot A^{-1}=B\cdot A^{-1}\ \rightarrow\ X=B\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}1&3\\2&-2\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{8}\cdot\begin{pmatrix}2&3\\-2&1\end{pmatrix}=\frac{1}{8}\cdot\begin{pmatrix}-4&6\\8&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1/2&3/4\\1&2\end{pmatrix}$

$AY=B\ \rightarrow\ A^{-1}AY=A^{-1}B\ \rightarrow\ Y=A^{-1}\cdot B=\frac{1}{8}\cdot\begin{pmatrix}2&3\\-2&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&3\\2&-2\end{pmatrix}=\frac{1}{8}\cdot\begin{pmatrix}8&0\\0&-8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$

c) $M^7=M^3\cdot M^2\cdot M^2=M^3\cdot I\cdot I=M^3$ (Y como $M^3=M^2\cdot M=I\cdot M=M$, se tiene que: $M^3=M^7=M$)

11.- Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}x&1&-1\\y&2&3\\z&1&0\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}x&1&-1\\1&2&3\\0&1&0\end{pmatrix}$ obtén:

a) Los valores *x* para los que la matriz B tiene inversa.

b) El valor del determinante de las matrices A^3 y $\begin{pmatrix}2x&5&-1\\2y&10&3\\2z&5&0\end{pmatrix}$ si el determinante de A es 8.

c) Los valores x, y, z para los cuales $A^2=\begin{pmatrix}0&0&4\\3&7&6\\-1&3&2\end{pmatrix}$.

a) B tiene inversa si su determinante es distinto de cero.

$$\det(B)=\begin{vmatrix} x & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}=(-1)\cdot\begin{vmatrix} x & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=-(3x+1) \text{ que se anula para } x=-1/3$$

B tiene inversa para $x\neq -1/3$

b) $|A^3|=|A|^3=8^3=512$

$$\begin{vmatrix} 2x & 5 & -1 \\ 2y & 10 & 3 \\ 2z & 5 & 0 \end{vmatrix}=2\cdot 5\cdot\begin{vmatrix} x & 1 & -1 \\ y & 2 & 3 \\ z & 1 & 0 \end{vmatrix}=10\cdot|A|=10\cdot 8=80$$

c) $$A^2=\begin{pmatrix} x & 1 & -1 \\ y & 2 & 3 \\ z & 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x & 1 & -1 \\ y & 2 & 3 \\ z & 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x^2+y-z & x+1 & -x+3 \\ xy+2y+3z & y+7 & -y+6 \\ xz+y & z+2 & -z+3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 3 & 7 & 6 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$\left.\begin{matrix} x+1=0 \\ -x+3=4 \end{matrix}\right\}\to x=-1,\quad \left.\begin{matrix} y+7=7 \\ -y+6=6 \end{matrix}\right\}\to y=0,\quad \left.\begin{matrix} z+2=3 \\ -z+3=2 \end{matrix}\right\}\to z=1$. Para la 1ª columna, se cumplen.

12.- Se da la matriz $A=\begin{pmatrix} \sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ obtén:

a) La comprobación de que $A^{-1}=5^{-1}A^T$, siendo A^T la matriz transpuesta de la matriz A.
b) Los valores de λ para los que la matriz $A-\lambda I$ no es invertible. (I es la matriz identidad 3×3).
c) El valor del determinante mayor que cero de una matriz cuadrada B que cumple que: $B^{-1}=B^T$.

a) $\det(A)=\sqrt{5}+0+0-(0-4\sqrt{5}+0)=5\sqrt{5}$, no es nulo: existe la matriz inversa.

$$\operatorname{adj}(A)=\begin{pmatrix} +(+5) & -(0) & +(0) \\ -(0) & +(\sqrt{5}) & -(2\sqrt{5}) \\ +(0) & -(-2\sqrt{5}) & +(\sqrt{5}) \end{pmatrix}\to A^{-1}=\frac{1}{5\sqrt{5}}\cdot\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{5} & 2\sqrt{5} \\ 0 & -2\sqrt{5} & \sqrt{5} \end{pmatrix}=\frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix} \sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}=5^{-1}\cdot A^T$$

b) $A-\lambda I$ no es invertible si su determinante es nulo.

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix} \sqrt{5}-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -2 \\ 0 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix}=(\sqrt{5}-\lambda)(1-\lambda)^2+4(\sqrt{5}-\lambda)=(\sqrt{5}-\lambda)(\lambda^2-2\lambda+5)$$

Que se anula para un único valor real: $\lambda=\sqrt{5}$

c) si $B^{-1}=B^T$, sacando determinantes en los dos lados,

$|B^{-1}|=|B^T|$ y como siempre se cumple que: $|B^{-1}|=\dfrac{1}{|B|}$, $|B^T|=|B|$

Tenemos: $\dfrac{1}{|B|}=|B|\to |B|^2=1\to |B|=\pm 1$. La solución positiva es: $|B|=1$

13.- Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&2&1\\0&1&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&1&-1\\2&1&2\\1&0&-1\end{pmatrix}$ e $I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ obtén:

a) $\left|A\left(2B^2\right)\right|$ y $\left|A\left(2B^2\right)\left(3A^{-1}\right)\right|$ b) Las matrices A^{-1} y $\left(\left(B\cdot A\right)^{-1}\cdot B\right)^{-1}$

b) La solución de la ecuación matricial $A\cdot X+B\cdot X=3I$.

a) $\left|A\cdot 2B^2\right|=2^3\cdot|A|\cdot|B|^2=\dots$

$$\left[|A|=\begin{vmatrix}1&1&-1\\1&2&1\\0&1&1\end{vmatrix}=2+0-1-(0+1+1)=-1\,,\quad |B|=\begin{vmatrix}0&1&-1\\2&1&2\\1&0&-1\end{vmatrix}=0+2+0-(-1+0-2)=5\right]$$

$$\dots=8\cdot(-1)\cdot 5^2=-200$$

$$\left|A\left(2B^2\right)\left(3A^{-1}\right)\right|=|A|\cdot 2^3\cdot|B|^2\cdot 3^3\cdot\frac{1}{|A|}=1\cdot 2^3\cdot 5^2\cdot 3^3\cdot\frac{1}{1}=5400$$

b) $\left(\left(B\cdot A\right)^{-1}\cdot B\right)^{-1}=B^{-1}\cdot\left[(B\cdot A)^{-1}\right]^{-1}=B^{-1}\cdot(B\cdot A)=\left(B^{-1}\cdot B\right)\cdot A=I\cdot A=A$

$$|A|=-1,\;\; \mathrm{adj}(A)=\begin{pmatrix}+(+1)&-(+1)&+(+1)\\-(+2)&+(+1)&-(+1)\\+(+3)&-(+2)&+(+1)\end{pmatrix}\to A^{-1}=\frac{1}{-1}\cdot\begin{pmatrix}1&-2&3\\-1&1&-2\\1&-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&2&-3\\1&-1&2\\-1&1&-1\end{pmatrix}$$

c) $A+B=\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&2&1\\0&1&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1&-1\\2&1&2\\1&0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&-2\\3&3&3\\1&1&0\end{pmatrix}$ $\quad |A+B|=\begin{vmatrix}1&2&-2\\3&3&3\\1&1&0\end{vmatrix}=0+6-6-(-6+3+0)=3$

$$A\cdot X+B\cdot X=3I\to(A+B)\cdot X=3I\to(A+B)^{-1}\cdot(A+B)\cdot X=3(A+B)^{-1}\to X=3(A+B)^{-1}$$

$$\mathrm{adj}(A+B)=\begin{pmatrix}+(-3)&-(-3)&+(0)\\-(+2)&+(+2)&-(-1)\\+(+12)&-(+9)&+(-3)\end{pmatrix}\to X=3(A+B)^{-1}=3\cdot\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}-3&-2&12\\3&2&-9\\0&1&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&-2&12\\3&2&-9\\0&1&-3\end{pmatrix}$$

14.- a) Comprueba que, si $C=\begin{pmatrix}5&-4&2\\2&-1&1\\-4&4&-1\end{pmatrix}$, $C^2=2C-I$. Halla también la matriz C^4.

b) El valor del determinante de la matriz $\left(3A^4\right)\left(4A^2\right)^{-1}$

sabiendo que A es una matriz cuadrada de 4 columnas cuyo determinante vale -1.

c) La matriz B que admite inversa y que verifica la igualdad $BB=B$.

a) $C^2=\begin{pmatrix}5&-4&2\\2&-1&1\\-4&4&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5&-4&2\\2&-1&1\\-4&4&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9&-8&4\\4&-3&2\\-8&8&-3\end{pmatrix}$, $\quad 2C-I=2\begin{pmatrix}5&-4&2\\2&-1&1\\-4&4&-1\end{pmatrix}-I=\begin{pmatrix}9&-8&4\\4&-3&2\\-8&8&-3\end{pmatrix}$

$$C^4=C^2\cdot C^2=\left(2C-I\right)\left(2C-I\right)=4C^2-2C-2C+I=4\left(2C-I\right)-4C+I=4C-3I=\begin{pmatrix}17&-16&8\\8&-7&4\\-16&16&-7\end{pmatrix}$$

b) $\left|\left(3A^4\right)\left(4A^2\right)^{-1}\right| = 3^4 \cdot |A|^4 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^4 \cdot \frac{1}{|A|^2} = 3^4 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^4 \cdot (-1)^2 = \frac{81}{256}$

c) $BB = B \;\rightarrow\; B^{-1}BB = B^{-1}B \;\rightarrow\; B = I$

15.- Sean A y B dos matrices cuadradas de orden 3 tales que: $A^2 = -A - I$ y $2B^3 = B$. Obtén:

a) La justificación de que la matriz A es invertible y el cálculo de la matriz A^3 en función de A e I.
b) Los valores posibles del determinante de B.
c) El valor del determinante de la matriz B^2, sabiendo que la matriz B tiene inversa.

a) $A^2 = -A - I \;\rightarrow\; -A^2 - A = I \;\rightarrow\; A(-A - I) = I \;\rightarrow\; A^{-1} = -A - I$

$$A^3 = A \cdot A^2 = A(-A - I) = -A^2 - A = -(-A - I) - A = A + I - A = I$$

b) $2B^3 = B \rightarrow \left|2B^3\right| = |B| \;\rightarrow\; 2^3 \cdot |B|^3 = |B| \;\rightarrow\; 2^3 \cdot |B|^3 - |B| = 0$

$$|B|\left(2^3 \cdot |B|^2 - 1\right) = 0 \;\rightarrow\; \begin{cases} |B| = 0 \\ |B| = \pm\sqrt{\dfrac{1}{2^3}} = \pm\dfrac{1}{2\sqrt{2}} = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{4} \end{cases}$$

c) Si B tiene inversa, el determinante de B no es nulo, entonces: $|B| = \pm\frac{\sqrt{2}}{4}$

$$\left|B^2\right| = |B|^2 = \left(\pm\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$$

16.- Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Obtén:

a) La justificación de que la matriz A tiene inversa y el cálculo de dicha matriz inversa A^{-1}.
b) La justificación de que $A^4 = I$.
c) El cálculo de las matrices A^7, A^{30} y A^{100}.

a) $\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)(-1) = 1$, por lo tanto existe la matriz inversa de A.

$$\mathrm{adj}(A) = \begin{pmatrix} +(0) & -(0) & +(-1) \\ -(0) & +(+1) & -(0) \\ +(+1) & -(0) & +(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $A^4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) $A^7 = A^4 \cdot A^2 \cdot A = I \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$A^{30}=A^{4\cdot 7+2}=\left(A^4\right)^7\cdot A^2=I^7\cdot A^2=I\cdot A^2=A^2=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

$$A^{100}=A^{4\cdot 25}=\left(A^4\right)^{25}=I^{25}=I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

17.- Sea A una matriz cuadrada tal que $A^2+2A=3I$, donde I es la matriz identidad. Calcula:

a) Los valores de a y b para los cuales $A^{-1}=aA+bI$.

b) Los valores de a y b para los cuales $A^4=aA+bI$.

c) El valor del determinante de la matriz $2B^{-1}$, sabiendo que $B_{3\times 3}$ tiene determinante 2.

a) $A^2+2A=3I \;\rightarrow\; A\left(A+2I\right)=3I \;\Rightarrow\; A\cdot\frac{1}{3}\left(A+2I\right)=I$

Como la matriz inversa cumple: $A\cdot A^{-1}=I \;\rightarrow\; A^{-1}=\frac{1}{3}\left(A+2I\right)=\frac{1}{3}A+\frac{2}{3}I \;\Rightarrow\; a=\frac{1}{3}\,,\; b=\frac{2}{3}$

b) $A^2+2A=3I \;\rightarrow\; A\left(A^2+2A\right)=A\left(3I\right) \;\Rightarrow\; A^3+2A^2=3A\,,\; A^3=3A-2A^2$, sustituiremos A^2:

$A^2+2A=3I \;\rightarrow\; A^2=3I-2A$ colocamos este resultado en la expresión anterior:

$A^3=3A-2A^2 \;\rightarrow\; A^3=3A-2\left(3I-2A\right) \;\Rightarrow\; A^3=3A-6I+4A=7A-6I$

$A^3=7A-6I \;\rightarrow\; A\cdot A^3=A\cdot\left(7A-6I\right) \;\Rightarrow\; A^4=7A^2-6A=7\left(3I-2A\right)-6A=-20A+21I$

Si $A^4=aA+bI$ tendremos que: $a=-20\,,\; b=21$

c) Si $\det\left(B_{3\times3}\right)=2 \;\rightarrow\; \det\left(B^{-1}{}_{3\times3}\right)=2^{-1} \;\Rightarrow\; \det\left(2B^{-1}{}_{3\times3}\right)=2^3\cdot 2^{-1}=4$

18.- a) Dadas A y B, matrices cuadradas del mismo orden tales que $AB=A$ y $BA=B$, deduce que $A^2=A$ y $B^2=B$.

b) Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$ encuentra los parámetros *a*, *b* para que la matriz $B=\begin{pmatrix}a&0\\1&b\end{pmatrix}$ cumpla que $B^2=B$ pero de manera que $AB\neq A$ y $BA\neq B$.

c) Sabiendo que $\begin{vmatrix}x&1&0\\y&2&1\\z&3&2\end{vmatrix}=3$ calcula el valor de $\begin{vmatrix}2x&1&0\\2y&2&1\\2z&3&2\end{vmatrix}$ y $\begin{vmatrix}x+1&1&0\\y+1&2&1\\z+1&3&2\end{vmatrix}$.

a) Como el producto de matrices cumple la propiedad asociativa tendremos:

$$A^2=A\cdot A=\ldots\{AB=A\}\ldots=AB\cdot AB=A\left(B\cdot A\right)B=\ldots\{BA=B\}\ldots=A\left(B\right)B=\left(AB\right)\cdot B=$$
$$=\ldots\{AB=A\}\ldots=\left(A\right)\cdot B=\ldots\{AB=A\}\ldots=A$$

$$B^2=B\cdot B=\ldots\{BA=B\}\ldots=BA\cdot BA=B\left(A\cdot B\right)A=\ldots\{AB=A\}\ldots=B\left(A\right)A=\left(BA\right)\cdot A=$$
$$=\ldots\{BA=B\}\ldots=\left(B\right)\cdot A=\ldots\{BA=B\}\ldots=B$$

b) Si $B=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix} \rightarrow B^2=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ a+b & b^2 \end{pmatrix}$

Si $B^2=B \rightarrow \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ a+b & b^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a^2=a & a^2-a=0 \quad a=0,\ a=1 \\ a+b=1 & \\ b^2=b & b^2-b=0 \quad b=0,\ b=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=0,\ b=1 \\ a=1,\ b=0 \end{cases}$

Pero ocurre: $AB=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow a\neq 1$

Y también: $BA=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix} \rightarrow b\neq 0$

La única forma de satisfacerlo todo es: $a=0$, $b=1$

c) $\begin{vmatrix} 2x & 1 & 0 \\ 2y & 2 & 1 \\ 2z & 3 & 2 \end{vmatrix}=2\cdot\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ y & 2 & 1 \\ z & 3 & 2 \end{vmatrix}=2\cdot 3=6$

$$\begin{vmatrix} x+1 & 1 & 0 \\ y+1 & 2 & 1 \\ z+1 & 3 & 2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ y & 2 & 1 \\ z & 3 & 2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}=3+(4+1+0)-(0+2+3)=3+5-5=3$$

19.- Sean la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ -2 & a+1 & 2 \\ -3 & a-1 & a \end{pmatrix}$ con $a\in\mathbb{R}$ y la matriz $B_{3\times 3}$ tal que $B^2=\frac{1}{3}I-2B$. Calcula:

a) El rango de la matriz A en función de a y el determinante de $2A^{-1}$ para $a=1$

b) Todas las soluciones del sistema de ecuaciones: $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ para $a=-1$

c) La comprobación de que B es invertible, encontrando m y n tales que $B^{-1}=mB+nI$

a) Veamos en qué casos el rango de la matriz es 3 (que es el valor máximo en una matriz 3×3)

$$\det(A)=\begin{vmatrix} 1 & 0 & a \\ -2 & a+1 & 2 \\ -3 & a-1 & a \end{vmatrix}=a(a+1)+0-2a(a-1)-[-3a(a+1)+0+2(a-1)]=$$

$$=a^2+a-2a^2+2a-[-3a^2-3a+2a-2]=2a^2+4a+2=2(a^2+2a+1)=2(a+1)^2$$

Si $\det(A)=0 \rightarrow 2(a+1)^2=0 \Rightarrow a=-1$

Si $a\neq -1$ el rango de A es 3.

Si $a=-1$ la matriz será: $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ \boxed{\begin{matrix} -2 & 0 \\ -3 & -2 \end{matrix}} & & \begin{matrix} 2 \\ -1 \end{matrix} \end{pmatrix}$ tiene el menor marcado con determinante igual a 4 y el rango de la matriz A será 2.

Si $a=1$ la matriz A es: $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\-2&2&2\\-3&0&1\end{pmatrix} \rightarrow \det(A)=(2+0+0)-(-6+0+0)=8$

Por lo que existe A^{-1} y $\det\left(A^{-1}\right)=8^{-1}$

Por ser A de dimensión 3×3, su inversa también lo será y $\det\left(2A^{-1}\right)=2^3\cdot\det\left(A^{-1}\right)=2^3\cdot8^{-1}=1$

b) Para $a=-1$ el sistema es: $\begin{pmatrix}1&0&-1\\-2&0&2\\-3&-2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases}x-z=-1\\-2x+2z=2\\-3x-2y-z=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x-z=-1\\3x+2y=-z\end{cases}$

Si $z=t$, $x=t-1$ y por la 2ª ecuación: $2y=-z-3x=-t-3(t-1)=-4t+3 \rightarrow y=-2t+3/2$

$(x,y,z)=(t-1,-2t+3/2,t)$ con $t\in\mathbb{R}$.

c) $B^2=\frac{1}{3}I-2B \rightarrow B^2+2B=\frac{1}{3}I \Rightarrow B(B+2I)=\frac{1}{3}I$, $B(3B+6I)=I$

Y como se cumple que $B\cdot B^{-1}=I$ tendremos que: $B^{-1}=3B+6I$

Como buscábamos $B^{-1}=mB+nI$, tendremos que:

$m=3$, $n=6$

20.- Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}1&4\\-1&6\end{pmatrix}$ y $X=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$. Calcula:

a) Los valores de a para los que la ecuación matricial $AX=aX$ solo admite una solución.

b) Todas las soluciones de la ecuación matricial $AX=5X$.

c) Comprobar que $X=\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$ es una solución de $AX=2X$ y calcular b tal que $A^{100}\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}=b\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$

a) La ecuación se puede reescribir así:

$AX=aX \rightarrow AX-aX=0 \Rightarrow (A-aI)X=0$

Tendrá solución única si la matriz $(A-aI)$ tiene determinante no nulo:

$$|A-aI|=\left|\begin{pmatrix}1&4\\-1&6\end{pmatrix}-a\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right|=\begin{vmatrix}1-a&4\\-1&6-a\end{vmatrix}=(1-a)(6-a)-4\cdot(-1)=a^2-7a+10$$

Si $|A-aI|=0 \rightarrow a^2-7a+10=0$

$$b^2-4ac=(-7)^2-4\cdot1\cdot10=49-40=9\ ,\quad a=\frac{-(-7)\pm\sqrt{9}}{2\cdot1}=\frac{7\pm3}{2}=\begin{cases}5\\2\end{cases}$$

Por lo tanto el sistema tendrá solución única si $a\neq2$ y $a\neq5$ (puesto que $|A-aI|\neq0$)

b) Si $AX=5X$ el sistema no tendrá solución única ($a=5$)

$$AX-5X=0 \rightarrow (A-5I)X=0 \Rightarrow \left[\begin{pmatrix}1&4\\-1&6\end{pmatrix}-5\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=0,\ \begin{pmatrix}-4&4\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=0$$

Que equivale a: $\begin{cases} -4x+4y=0 \\ -x+y=0 \end{cases}$ Las dos ecuaciones son la misma: $-x+y=0 \;\Rightarrow\; x=y$

Si $y=t,\ t\in\mathbb{R} \;\rightarrow\; x=t$.

La solución del sistema es: $(x,y)=(t,t)$ con $t\in\mathbb{R}$.

c) $\mathrm{A\,X}=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\cdot 4+4\cdot 1 \\ -1\cdot 4+6\cdot 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix}$, $2\mathrm{X}=2\cdot\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix}$ y se cumple $\mathrm{A\,X}=2\mathrm{X}$

Tenemos que: $\mathrm{A}\cdot\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}=2\cdot\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, multiplicando por A en ambos miembros por la izquierda:

$$\mathrm{A}\cdot\mathrm{A}\cdot\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}=\mathrm{A}\cdot 2\cdot\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \;\rightarrow\; \mathrm{A}^2\cdot\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}=2\cdot\mathrm{A}\cdot\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}=2\cdot\left[2\cdot\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}\right]=2^2\cdot\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Parece razonable suponer que $\mathrm{A}^n\cdot\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}=2^n\cdot\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$. Supongámoslo y veamos si se cumple para $n+1$:

$$\mathrm{A}^{n+1}\cdot\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}=\mathrm{A}\cdot\mathrm{A}^n\cdot\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}=\ldots\{\text{Por la hipótesis}\}\ldots=\mathrm{A}\cdot 2^n\cdot\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}=2^n\cdot\left[\mathrm{A}\cdot\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}\right]=2^n\cdot\left[2\cdot\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}\right]=2^{n+1}\cdot\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, como se cumple para $n+1$, la hipótesis es cierta.

Se deduce que: $\mathrm{A}^{100}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}=2^{100}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, por lo que, si $\mathrm{A}^{100}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}=b\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; b=2^{100}$

21.- Sean las matrices $\mathrm{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ b & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ y $\mathrm{B}=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & b & -1 \end{pmatrix}$ con $b\in\mathbb{R}$. Calcula:

a) Los valores de *b* para que cada una de las matrices $\mathrm{A\,B}$ y $\mathrm{B\,A}$ tenga inversa.

b) Los valores de *b* para que la matriz $\mathrm{A^T\,A}$ tenga inversa.

c) La inversa de $\mathrm{A^T\,A}$, cuando dicha inversa exista.

a) $\mathrm{A\,B}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ b & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & b & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 & 2b & 0 \\ -b & 0 & 2b \\ -1 & 2b & -4 \end{pmatrix}$, $|\mathrm{A\,B}|=(0-4b^2+0)-(0-4b^2+0)=0$

Como su determinante es siempre cero, no existe la matriz inversa de $\mathrm{A\,B}$ para ningún valor de *b*.

$\mathrm{B\,A}=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & b & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ b & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ b^2 & -4 \end{pmatrix}$, $|\mathrm{B\,A}|=(-3)\cdot(-4)-2\cdot b^2=12-2b^2$

Si $|\mathrm{B\,A}|=0 \;\rightarrow\; 12-2b^2=0 \;\Rightarrow\; b=\pm\sqrt{6}$

Por lo tanto, si $b\neq\pm\sqrt{6} \;\rightarrow\; |\mathrm{B\,A}|\neq 0$ y existirá la matriz inversa de $\mathrm{B\,A}$.

b) $\mathrm{A^T\,A}=\begin{pmatrix} 1 & b & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ b & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2+b^2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$, $|\mathrm{A^T\,A}|=8\left(2+b^2\right)-0\cdot 0=8\left(2+b^2\right)$

La expresión del determinante no se anula nunca ($b^2 \geq 0$) así que existe $\left(A^T A\right)^{-1}$ para cualquier b.

c) $\operatorname{adj}\left(A^T A\right) = \begin{pmatrix} +(8) & -(0) \\ -(0) & +(2+b^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 2+b^2 \end{pmatrix}$

$$\left(A^T A\right)^{-1} = \frac{1}{\det(A^T A)} \cdot \left[\operatorname{adj}(A^T A)\right]^T = \frac{1}{8\left(2+b^2\right)} \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 2+b^2 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{8\left(2+b^2\right)} \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 2+b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2+b^2} & 0 \\ 0 & 1/8 \end{pmatrix}$$

22.- Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Obtén:

a) La justificación de que A tiene inversa y el cálculo de dicha matriz inversa..

b) Dos constantes a, b de modo que $A^{-1} = A^2 + aA + bI$ usando que $A^3 - 3A^2 + 3A - I = 0$.

c) El valor de λ para que $\left(A - \lambda I\right)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ tenga infinitas soluciones. Halla esas soluciones.

a) $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (1+0+0) - (0+0+0) = 1$, como es distinto de cero existe la matriz inversa de A.

$$\operatorname{adj}\left(A\right) = \begin{pmatrix} +(1-0) & -(0-0) & +(0-0) \\ -(2-0) & +(1-0) & -(2-0) \\ +(0-0) & -(0-0) & +(1-0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \left[\operatorname{adj}(A)\right]^T = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Si $A^3 - 3A^2 + 3A - I = 0$, como existe A^{-1}, multiplicamos en ambos miembros por A^{-1}:

$A^{-1} \cdot A^3 - 3A^{-1} \cdot A^2 + 3A^{-1} \cdot A - A^{-1} = 0 \;\rightarrow\; A^2 - 3A + 3I - A^{-1} = 0 \;\Rightarrow\; A^{-1} = A^2 - 3A + 3I$

Si $A^{-1} = A^2 + aA + bI$, tendremos que: $a = -3$, $b = 3$.

c) $\left(A - \lambda I\right)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ tendrá infinitas soluciones si $\det\left(A - \lambda I\right) = 0$.

$$|A - \lambda I| = \left|\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^3 + 0 + 0 - (0+0+0) = (1-\lambda)^3$$

Si $|A - \lambda I| = 0 \;\rightarrow\; (1-\lambda)^3 = 0 \;\Rightarrow\; \lambda = 1$ es el único valor para el que habrá infinitas soluciones.

Para $\lambda=1$ la matriz $\left(\mathrm{A}-\lambda\,\mathrm{I}\right)\Big|_{\lambda=1}=\begin{pmatrix}1-\lambda & 2 & 0\\ 0 & 1-\lambda & 0\\ 0 & 2 & 1-\lambda\end{pmatrix}_{\lambda=1}=\begin{pmatrix}0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\end{pmatrix}$

Y el sistema se transforma en: $\left(\mathrm{A}-\lambda\,\mathrm{I}\right)\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\ \rightarrow\ \begin{pmatrix}0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\ \Rightarrow\ \begin{cases}2y=0\\ 0=0\\ 2y=0\end{cases}\ \Rightarrow\ y=0$

Por lo tanto la solución es: $(x,y,z)=(s,0,t)$ con $s,t\in\mathbb{R}$

23.- Dada la matriz $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}-1 & 2 & m\\ 0 & m & 0\\ 2 & 1 & m^2+1\end{pmatrix}$ con $m\in\mathbb{R}$,

a) Calcula el rango de la matriz en función del parámetro *m*.
b) Explica cuando la matriz A es invertible.
c) Resuelve la ecuación $\mathrm{X\,A}=\mathrm{I}$ donde I es la matriz identidad en el caso $m=1$.

a) La matriz A tendrá rango 3 (el máximo para una matriz 3×3) si su determinante es distinto de cero.

$$|\mathrm{A}|=\begin{vmatrix}-1 & 2 & m\\ 0 & m & 0\\ 2 & 1 & m^2+1\end{vmatrix}=-m(m^2+1)+0+0-(2m^2+0+0)=$$

$$=-m^3-2m^2-m=-m\left(m^2+2m+1\right)=-m(m+1)^2$$

Si $|\mathrm{A}|=0\ \rightarrow\ -m(m+1)^2=0\ \Rightarrow\ m=0\,,\ m=-1$

Por lo tanto, si $m\neq0$ y $m\neq-1$ el rango de la matriz A es 3.

Si $m=0,\ \mathrm{A}=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}$ y el menor $\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ tiene determinante $-1-4=-5\neq0\ \Rightarrow\ \mathrm{rang}\left(\mathrm{A}\right)=2$

Si $m=-1,\ \mathrm{A}=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 2\end{pmatrix}$ y el menor $\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ tiene determinante $-1-0\neq0\ \Rightarrow\ \mathrm{rang}\left(\mathrm{A}\right)=2$

b) La matriz A es invertible cuando su determinante sea distinto de cero.

Así pues, por el cálculo de (a), la matriz A es invertible si $m\neq0$ y $m\neq-1$.

c) Para $m=1,\ \mathrm{A}=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 2\end{pmatrix}$ y su determinante es: $|\mathrm{A}|_{m=1}=-m(m+1)^2\Big|_{m=1}=-1\left(1+1\right)^2=-4$

$$\mathrm{adj}\left(\mathrm{A}\right)=\begin{pmatrix}+(2-0) & -(0-0) & +(0-2)\\ -(4-1) & +(-2-2) & -(-1-4)\\ +(0-1) & -(0-0) & +(-1-0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0 & -2\\ -3 & -4 & 5\\ -1 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}\cdot[\operatorname{adj}(A)]^T=\frac{1}{-4}\cdot\begin{pmatrix}2&0&-2\\-3&-4&5\\-1&0&-1\end{pmatrix}^T=-\frac{1}{4}\begin{pmatrix}2&-3&-1\\0&-4&0\\-2&5&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1/2&3/4&1/4\\0&1&0\\1/2&-5/4&1/4\end{pmatrix}$$

En la ecuación $XA=I$, podemos multiplicar por A^{-1} (sabemos que existe) por la derecha:

$$XA\cdot A^{-1}=I\cdot A^{-1}\ \rightarrow\ X=A^{-1}=\begin{pmatrix}-1/2&3/4&1/4\\0&1&0\\1/2&-5/4&1/4\end{pmatrix}$$

24.- Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\-1&a&1\\1&a^2-2&3\end{pmatrix}$ con $a\in\mathbb{R}$ y $B=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\end{pmatrix}$. Obtén:

a) El rango de la matriz A según los valores del parámetro a.
b) Una matriz C tal que $AC=16\,I$, cuando $a=0$.
c) El rango de la matriz B y la discusión de si el sistema: $B\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$ tiene solución.

a) La matriz A tendrá rango 3 (el máximo para una matriz 3×3) si su determinante es distinto de cero.

$$|A|=\begin{vmatrix}1&2&3\\-1&a&1\\1&a^2-2&3\end{vmatrix}=\cancel{3a}+2-3(a^2-2)-[\cancel{3a}-6+a^2-2]=$$

$$=2-3a^2+6-a^2+8=-4a^2+16=-4(a^2-4)$$

Si $|A|=0\ \rightarrow\ -4(a^2-4)=0\ \Rightarrow\ a^2=4$, $a=\pm2$

Por lo tanto, si $a\neq2$ y $a\neq-2$ el rango de la matriz A es 3.

Si $a=2$, $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\-1&2&1\\1&2&3\end{pmatrix}$ y el menor $\begin{pmatrix}1&2\\-1&2\end{pmatrix}$ tiene determinante $2+2=4\neq0\ \Rightarrow\ \operatorname{rang}(A)=2$

Si $a=-2$, $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\-1&-2&1\\1&2&3\end{pmatrix}$ y el menor $\begin{pmatrix}2&3\\-2&1\end{pmatrix}$ tiene determinante $2+6=8\neq0\ \Rightarrow\ \operatorname{rang}(A)=2$

b) Para $a=0$, $A=\left.\begin{pmatrix}1&2&3\\-1&a&1\\1&a^2-2&3\end{pmatrix}\right|_{a=0}=\begin{pmatrix}1&2&3\\-1&0&1\\1&-2&3\end{pmatrix}$ y $|A|=-4(a^2-4)\big|_{a=0}=-4(0-4)=16$

$$\operatorname{adj}(A)=\begin{pmatrix}+(0+2)&-(-3-1)&+(2-0)\\-(6+6)&+(3-3)&-(-2-2)\\+(2-0)&-(1+3)&+(0+2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&4&2\\-12&0&4\\2&-4&2\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}\cdot\left[\operatorname{adj}(A)\right]^{T}=\frac{1}{16}\cdot\begin{pmatrix}2&4&2\\-12&0&4\\2&-4&2\end{pmatrix}^{T}=\frac{1}{16}\begin{pmatrix}2&-12&2\\4&0&-4\\2&4&2\end{pmatrix}$$

En la ecuación $AC=16\,I$ multiplicamos por la izquierda por A^{-1} (sabemos que existe):

$$A^{-1}\cdot AC=16A^{-1}\cdot I\ \rightarrow\ C=16A^{-1}=16\cdot\left[\frac{1}{16}\begin{pmatrix}2&-12&2\\4&0&-4\\2&4&2\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}2&-12&2\\4&0&-4\\2&4&2\end{pmatrix}$$

c) $B=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot1&1\cdot2&1\cdot3\\-1\cdot1&-1\cdot2&-1\cdot3\\2\cdot1&2\cdot2&2\cdot3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\-1&-2&-3\\2&4&6\end{pmatrix}$

La segunda fila es igual a la primera multiplicada por (-1).

La tercera fila es igual a la primera multiplicada por 2.

Por lo tanto, la matriz B solo tiene una fila independiente y su rango es 1.

El sistema es: $\begin{pmatrix}1&2&3\\-1&-2&-3\\2&4&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$

Los términos independientes cumplen la misma relación que hemos dicho para las filas. Por eso, la única ecuación independiente es la que se obtiene de la primera fila (la única independiente):

$x+2y+3z=1$

Si elegimos: $y=s,\ z=t\ \rightarrow\ x=1-2s-3t$ con $s,t\in\mathbb{R}$.

Así, el sistema tiene solución: $(x,y,z)=(1-2s-2t,\ s,\ t)$ con $s,t\in\mathbb{R}$

25.- Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}m&0&m-1\\-2m&m^2&1\\0&2m&1\end{pmatrix}$ con $m\in\mathbb{R}$, calcula:

a) El rango de la matriz A en función del parámetro real *m*.
b) La matriz inversa de A en el caso $m=2$.
c) El número real *m* para el cual el determinante de la matriz $2A$ es igual a -8.

---

a) La matriz A tendrá rango 3 (el máximo para una matriz 3×3) si su determinante es distinto de cero.

$$|A|=\begin{vmatrix}m&0&m-1\\-2m&m^2&1\\0&2m&1\end{vmatrix}=m^3+0-4m^2(m-1)-[0+0+2m^2]=$$

$$=m^3-4m^3+4m^2-2m^2=-3m^3+2m^2=m^2(-3m+2)$$

Si $|A|=0\ \rightarrow\ m^2(-3m+2)=0\ \Rightarrow\ m=0\ ,\ m=2/3$

Por lo tanto, si $m\neq0$ y $m\neq2/3$ el rango de la matriz A es 3.

Si $m=0$, $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ todos los menores de orden 2 tienen determinante cero $\Rightarrow$ $\operatorname{rang}(\mathrm{A})=1$

Si $m=2/3$, $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}2/3&0&-1/3\\-4/3&4/9&1\\0&4/3&1\end{pmatrix}$ y el menor $\begin{pmatrix}2/3&0\\-4/3&4/9\end{pmatrix}$ tiene determinante no nulo,

por lo tanto, $\operatorname{rang}(\mathrm{A})=2$

b) $\mathrm{A}\big|_{m=2}=\begin{pmatrix}m&0&m-1\\-2m&m^2&1\\0&2m&1\end{pmatrix}_{m=2}=\begin{pmatrix}2&0&1\\-4&4&1\\0&4&1\end{pmatrix}$ y $|\mathrm{A}|=m^2(-3m+2)\big|_{m=2}=2^2(-3\cdot2+2)=-16$

$$\operatorname{adj}(\mathrm{A})=\begin{pmatrix}+(4-4)&-(-4-0)&+(-16-0)\\-(0-4)&+(2-0)&-(8-0)\\+(0-4)&-(2+4)&+(8-0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&4&-16\\4&2&-8\\-4&-6&8\end{pmatrix}$$

$$\mathrm{A}^{-1}=\frac{1}{\det(\mathrm{A})}\cdot[\operatorname{adj}(\mathrm{A})]^{\mathrm{T}}=\frac{1}{-16}\cdot\begin{pmatrix}0&4&-16\\4&2&-8\\-4&-6&8\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}=-\frac{1}{16}\begin{pmatrix}0&4&-4\\4&2&-6\\-16&-8&8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1/4&1/4\\-1/4&-1/8&3/8\\1&1/2&-1/2\end{pmatrix}$$

c) $\det(2\mathrm{A})=\ldots\{\mathrm{A}_{3\times3}\}\ldots=2^3\cdot\det(\mathrm{A})=8\cdot\det(\mathrm{A})$

Si $\det(2\mathrm{A})=-8 \;\rightarrow\; 8\cdot\det(\mathrm{A})=-8 \;\Rightarrow\; \det(\mathrm{A})=-1$

Debe ocurrir que: $m^2(-3m+2)=-1 \;\rightarrow\; -3m^3+2m^2+1=0$

Encontremos un factor del polinomio con el método de Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr} & -3 & 2 & 0 & 1\\ 1 & & -3 & -1 & -1\\ \hline & -3 & -1 & -1 & \boxed{0}\end{array}$$

$-3m^3+2m^2+1=(m-1)(-3m^2-m-1)$

Y si $-3m^3+2m^2+1=0 \;\rightarrow\; (m-1)(-3m^2-m-1)=0 \;\Rightarrow\; \begin{cases}m=1\\-3m^2-m-1=0\end{cases}$

La segunda opción no tiene solución real: $b^2-4ac=(-1)^2-4\cdot(-3)\cdot(-1)=1-12=-11<0$

La única solución es: $m=1$

26.- Dada la matriz $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}a+b&1\\0&a-b\end{pmatrix}$ con $a,\, b\in\mathbb{R}$,

a) Calcula los valores de los parámetros *a* y *b* para que se cumpla $\mathrm{A}^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}$

b) Para los valores *a* y *b* obtenidos en el apartado anterior, calcula A^3 y A^4.

c) Calcula $\det(\mathrm{A}^{-50})$ cuando $a^2-b^2\neq0$.

a) Exijamos que $A \cdot A^{-1} = I$:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} a+b & 1 \\ 0 & a-b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & -a-b+1 \\ 0 & a-b \end{pmatrix}$$ y si el resultado es $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

debe ocurrir que: $\begin{cases} a+b=1 \\ -a-b+1=0 \\ a-b=1 \end{cases}$ Las dos primeras ecuaciones son equivalentes.

Sumando las ecuaciones primera y tercera: $2a = 2 \rightarrow a = 1$

Y sustituyendo en la primera ecuación: $a+b=1 \rightarrow 1+b=1 \Rightarrow b=0$

b) Si $a=1,\ b=0 \rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c) Si $A = \begin{pmatrix} a+b & 1 \\ 0 & a-b \end{pmatrix} \rightarrow \det(A) = (a+b)(a-b) - 1 \cdot 0 = a^2 - b^2$

Puesto que nos imponen la condición $a^2 - b^2 \neq 0$, $\det(A) \neq 0$ y existe la matriz inversa de A.

$$\det\left(A^{-50}\right) = \det\left[\left(A^{-1}\right)^{50}\right] = \left[\det\left(A^{-1}\right)\right]^{50} = \left[\frac{1}{\det(A)}\right]^{50} = \left[\frac{1}{a^2-b^2}\right]^{50} = \frac{1}{\left(a^2-b^2\right)^{50}}$$

Año PAU	Problemas
2013	6, 7
2014	8, 9
2015	10, 11
2016	12, 13
2017	14, 15, 16
2018	17, 18
2019	19, 20
2020	21, 22
2021	23, 24
2022	25, 26

Ejercicios de matrices (con problemas PAU de 2013 a 2022)

1.- Sean las matrices fila $A=(1,-1,2)$ y $B=(2,1,0)$. Calcula la matriz: $X=(A^T\cdot B)^8-(A^T\cdot B)^5$

2.- Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} x & 3 & 1 \\ x+1 & 4 & 2 \\ x & x & 2 \end{pmatrix}$ calcula:

a) Para qué valores de *x* existe la matriz A^{-1}.
b) Para qué valores de *x* se cumple que: $\det(2A)=-48$

3.- Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} -1 & 3 & x-2 \\ 1 & 0 & x \\ -2 & x & x \end{pmatrix}$ calcula:

a) Para qué valores de *x* existe la matriz A^{-1}.
b) Para qué valores de *x* se cumple que: $\det(3A)=-243$

4.- Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Calcula:

a) $\left|A^3\cdot(5B)\right|$ b) $\left|A^{-1}\cdot B^2\cdot(B^{-1}\cdot A)^2\right|$ c) $X=(A^T+I)\cdot(B-I)$

{ En este problema y en el siguiente, I es la matriz identidad de orden 3 }.

5.- Usando las mismas matrices A y B que en el problema anterior calcula, si existe, la matriz X en los dos casos siguientes:

a) $X=(A-B)^{-1}$ b) $X\cdot A=9\cdot I$

6.- Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ obtén estos determinantes:

a) $|A+B|$ y $\left|\frac{1}{2}(A+B)^{-1}\right|$ b) $\left|(A+B)^{-1}A\right|$ y $\left|A^{-1}(A+B)\right|$ c) $\left|2ABA^{-1}\right|$ y $\left|A^3B^{-1}\right|$

7.- Comprueba que:

a) Si el producto de dos matrices cuadradas A y B es conmutativo, se deduce: $A^2B^2=(AB)^2$.

b) La matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 10 \\ 0 & -3 & 7 \end{pmatrix}$ satisface la relación: $A^2-3A+2I=O$ [I y O son las matrices unidad y nula de orden 3x3], y que una matriz que cumple $A^2-3A+2I=O$ tiene inversa.

c) Si una matriz A cumple $A^2-3A+2I=O$, obtén una expresión simple para A^3.

8.- Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ obtén:

a) La matriz inversa A^{-1} de la matriz A.
b) La matriz X que resuelve la ecuación: $AX=BC$.
c) El determinante de $2M^3$ si M es de orden 2 y el determinante de M vale 1/2.

9.- a) Halla el determinante de $S=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ y su matriz inversa S^{-1} si existe.

b) El determinante de la matriz $\left(4T^2\right)^{-1}$ si T es una matriz cuadrada de 3 filas y determinante 20.

c) La solución *a* de la ecuación $\begin{pmatrix} a & a^2-1 & -3 \\ a+1 & 2 & a^2+4 \\ -3 & 4a & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a+1 & -3 \\ a^2-1 & 2 & 4a \\ -3 & a^2+4 & 1 \end{pmatrix}$

10.- Se dan las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ obtén:

a) La matriz inversa de A. b) Las matrices X e Y que cumplen: $XA=B$ y $AY=B$.
c) Justifica que si M es una matriz cuadrada con $M^2=I$, se verifica que: $M^3=M^7$

11.- Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} x & 1 & -1 \\ y & 2 & 3 \\ z & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} x & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ obtén:

a) Los valores *x* para los que la matriz B tiene inversa.

b) El valor del determinante de las matrices A^3 y $\begin{pmatrix} 2x & 5 & -1 \\ 2y & 10 & 3 \\ 2z & 5 & 0 \end{pmatrix}$ si el determinante de A es 8.

c) Los valores *x*, *y*, *z* para los cuales $A^2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 3 & 7 & 6 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

12.- Se da la matriz $A=\begin{pmatrix} \sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ obtén:

a) La comprobación de que $A^{-1}=5^{-1}A^T$, siendo A^T la matriz transpuesta de la matriz A.
b) Los valores de λ para los que la matriz $A-\lambda I$ no es invertible. (I es la matriz identidad 3×3).
c) El valor del determinante mayor que cero de una matriz cuadrada B que cumple que: $B^{-1}=B^T$.

13.- Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ 2 & 1 & 2\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}$ e $I=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ obtén:

a) $\left|A\left(2B^2\right)\right|$ y $\left|A\left(2B^2\right)\left(3A^{-1}\right)\right|$ b) Las matrices A^{-1} y $\left(\left(B\cdot A\right)^{-1}\cdot B\right)^{-1}$

b) La solución de la ecuación matricial $A\cdot X+B\cdot X=3I$.

14.- a) Comprueba que, si $C=\begin{pmatrix}5 & -4 & 2\\ 2 & -1 & 1\\ -4 & 4 & -1\end{pmatrix}$, $C^2=2C-I$. Halla también la matriz C^4.

b) El valor del determinante de la matriz $\left(3A^4\right)\left(4A^2\right)^{-1}$

sabiendo que A es una matriz cuadrada de 4 columnas cuyo determinante vale –1.

c) La matriz B que admite inversa y que verifica la igualdad $BB=B$.

15.- Sean A y B dos matrices cuadradas de orden 3 tales que: $A^2=-A-I$ y $2B^3=B$. Obtén:

a) La justificación de que la matriz A es invertible y el cálculo de la matriz A^3 en función de A e I.

b) Los valores posibles del determinante de B.

c) El valor del determinante de la matriz B^2, sabiendo que la matriz B tiene inversa.

16.- Se consideran las matrices $A=\begin{pmatrix}0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$ e $I=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$. Obtén:

a) La justificación de que la matriz A tiene inversa y el cálculo de dicha matriz inversa A^{-1}.

b) La justificación de que $A^4=I$.

c) El cálculo de las matrices A^7, A^{30} y A^{100}.

17.- Sea A una matriz cuadrada tal que $A^2+2A=3I$, donde I es la matriz identidad. Calcula:

a) Los valores de a y b para los cuales $A^{-1}=aA+bI$.

b) Los valores de a y b para los cuales $A^4=aA+bI$.

c) El valor del determinante de la matriz $2B^{-1}$, sabiendo que $B_{3\times 3}$ tiene determinante 2.

18.- a) Dadas A y B, matrices cuadradas del mismo orden tales que $AB=A$ y $BA=B$, deduce que $A^2=A$ y $B^2=B$.

b) Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ encuentra los parámetros *a*, *b* para que la matriz $B=\begin{pmatrix}a & 0\\ 1 & b\end{pmatrix}$ cumpla que $B^2=B$ pero de manera que $AB\neq A$ y $BA\neq B$.

c) Sabiendo que $\begin{vmatrix}x & 1 & 0\\ y & 2 & 1\\ z & 3 & 2\end{vmatrix}=3$ calcula el valor de $\begin{vmatrix}2x & 1 & 0\\ 2y & 2 & 1\\ 2z & 3 & 2\end{vmatrix}$ y $\begin{vmatrix}x+1 & 1 & 0\\ y+1 & 2 & 1\\ z+1 & 3 & 2\end{vmatrix}$.

19.- Sean la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & a\\ -2 & a+1 & 2\\ -3 & a-1 & a\end{pmatrix}$ con $a\in\mathbb{R}$ y la matriz $B_{3\times3}$ tal que $B^2=\frac{1}{3}I-2B$. Calcula:

a) El rango de la matriz A en función de *a* y el determinante de $2A^{-1}$ para $a=1$

b) Todas las soluciones del sistema de ecuaciones: $A\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\ 2\\ 0\end{pmatrix}$ para $a=-1$

c) La comprobación de que B es invertible, encontrando *m* y *n* tales que $B^{-1}=mB+nI$

20.- Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 4\\ -1 & 6\end{pmatrix}$ y $X=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$. Calcula:

a) Los valores de *a* para los que la ecuación matricial $AX=aX$ solo admite una solución.

b) Todas las soluciones de la ecuación matricial $AX=5X$.

c) Comprobar que $X=\begin{pmatrix}4\\ 1\end{pmatrix}$ es una solución de $AX=2X$ y calcular b tal que $A^{100}\begin{pmatrix}4\\ 1\end{pmatrix}=b\begin{pmatrix}4\\ 1\end{pmatrix}$

21.- Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ b & 0\\ -1 & 2\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\ -1 & b & -1\end{pmatrix}$ con $b\in\mathbb{R}$. Calcula:

a) Los valores de *b* para que cada una de las matrices AB y BA tenga inversa.

b) Los valores de *b* para que la matriz $A^T A$ tenga inversa.

c) La inversa de $A^T A$, cuando dicha inversa exista.

22.- Sea la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}$. Obtén:

a) La justificación de que A tiene inversa y el cálculo de dicha matriz inversa..

b) Dos constantes *a*, *b* de modo que $A^{-1}=A^2+aA+bI$ usando que $A^3-3A^2+3A-I=0$.

c) El valor de λ para que $(A-\lambda I)\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$ tenga infinitas soluciones. Halla esas soluciones.

23.- Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & m\\ 0 & m & 0\\ 2 & 1 & m^2+1\end{pmatrix}$ con $m\in\mathbb{R}$,

a) Calcula el rango de la matriz en función del parámetro *m*.

b) Explica cuando la matriz A es invertible.

c) Resuelve la ecuación $XA=I$ donde I es la matriz identidad en el caso $m=1$.

24.- Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & a & 1\\ 1 & a^2-2 & 3\end{pmatrix}$ con $a\in\mathbb{R}$ y $B=\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}$. Obtén:

a) El rango de la matriz A según los valores del parámetro *a*.
b) Una matriz C tal que $AC=16\,I$, cuando $a=0$.
c) El rango de la matriz B y la discusión de si el sistema: $B\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 2\end{pmatrix}$ tiene solución.

25.- Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}m & 0 & m-1\\ -2m & m^2 & 1\\ 0 & 2m & 1\end{pmatrix}$ con $m\in\mathbb{R}$, calcula:

a) El rango de la matriz A en función del parámetro real *m*.
b) La matriz inversa de A en el caso $m=2$.
c) El número real *m* para el cual el determinante de la matriz $2A$ es igual a -8.

26.- Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}a+b & 1\\ 0 & a-b\end{pmatrix}$ con $a,\,b\in\mathbb{R}$,

a) Calcula los valores de los parámetros *a* y *b* para que se cumpla $A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$
b) Para los valores *a* y *b* obtenidos en el apartado anterior, calcula A^3 y A^4.
c) Calcula $\det\left(A^{-50}\right)$ cuando $a^2-b^2\neq 0$.

Año PAU	Problemas
2013	6, 7
2014	8, 9
2015	10, 11
2016	12, 13
2017	14, 15, 16
2018	17, 18
2019	19, 20
2020	21, 22
2021	23, 24
2022	25, 26

El método de inducción matemática

1. Demuestra que: $1+2+3+\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

Para $n=1$ tenemos:

$$1=\frac{1(1+1)}{2} \quad \text{lo cual es cierto.}$$

Para $n=2$ tenemos:

$$1+2=\frac{2(2+1)}{2} \quad \text{lo cual es cierto.}$$

Para $n=3$ tenemos:

$$1+2+3=\frac{3(3+1)}{2} \quad \text{lo cual es cierto.}$$

Es razonable suponer que la igualdad propuesta en el problema se cumple siempre.

Tomamos como **hipótesis de inducción** que: $1+2+3+\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

Queremos demostrar que es cierta para $n+1$.

Es decir, debemos demostrar que: $1+2+3+\ldots+n+(n+1)=\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$

Operemos a partir del primer miembro:

$$1+2+3+\ldots+n+(n+1)=\ldots$$

$$\left\{1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}\right\}$$

$$\ldots=\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)=$$

$$=(n+1)\left[\frac{n}{2}+1\right]=$$

$$=(n+1)\left[\frac{n+2}{2}\right]$$

Que es lo que queríamos demostrar.

Por lo tanto, la hipótesis de inducción se cumple para $n+1$
y queda demostrado que la igualdad propuesta en el problema es cierta.

2. Calcula A^{1000} siendo: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Comencemos calculando algunas potencias de la matriz A:

$$A^1 = A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 0\cdot 1 & 1\cdot 0 + 0\cdot 1 \\ 1\cdot 1 + 1\cdot 1 & 1\cdot 0 + 1\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 0\cdot 1 & 1\cdot 0 + 0\cdot 1 \\ 2\cdot 1 + 1\cdot 1 & 2\cdot 0 + 1\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 0\cdot 1 & 1\cdot 0 + 0\cdot 1 \\ 3\cdot 1 + 1\cdot 1 & 3\cdot 0 + 1\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Podemos suponer que $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix}$

Esta será la **hipótesis de inducción**.

Ya sabemos que es cierta para $n = 1, 2, 3, 4$.

Si la hipótesis es correcta, deberá cumplirse para $n+1$, es decir, que tiene que ser cierto que:

$$A^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n+1 & 1 \end{pmatrix}$$

Veámoslo:

$$A^{n+1} = A^n \cdot A = \ldots$$

$$\left\{ \text{Según la hipótesis: } A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\ldots = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 0\cdot 1 & 1\cdot 0 + 0\cdot 1 \\ n\cdot 1 + 1\cdot 1 & n\cdot 0 + 1\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n+1 & 1 \end{pmatrix}$$

Así pues, la hipótesis de inducción se cumple para $n+1$.

Por lo tanto, la hipótesis de inducción es cierta y podemos asegurar que:

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, para $n = 1000$ tendremos:

$$\boxed{A^{1000} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1000 & 1 \end{pmatrix}}$$

3. De una matriz A sabemos que: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calcula A^{1000}.

Según la definición de matriz inversa: $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$

En la igualdad $A \cdot A^{-1} = I$, sustituimos A por A^{-1} y tenemos: $A^{-1} \cdot \left(A^{-1}\right)^{-1} = I$

Comparamos esta expresión con la igualdad $A^{-1} \cdot A = I$

Se deduce que $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$ Es una propiedad de la matriz inversa, e intuitivamente correcta.

El determinante de la matriz dada es: $|A^{-1}| = \begin{vmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 0 \cdot a = 1 \neq 0$ y esa matriz tiene inversa.

Calculamos la inversa de A^{-1}: $\operatorname{adj}(A) = \begin{pmatrix} +1 & -0 \\ -a & +1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -a & 1 \end{pmatrix}$

Así pues, $A = \left(A^{-1}\right)^{-1} = \dfrac{1}{|A^{-1}|} \operatorname{adj}(A^{-1})^T = \dfrac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -a & 1 \end{pmatrix}$

Veamos cuanto valen A^2, A^3:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Podemos suponer que $A^n = \begin{pmatrix} 1 & -n \cdot a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ [Hipótesis de inducción]

Veamos si se cumple para A^{n+1}:

$$A^{n+1} = A \cdot A^n = \begin{pmatrix} 1 & -a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -n \cdot a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -n \cdot a - a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -(n+1) \cdot a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Que está de acuerdo con la hipótesis de inducción.

Por lo tanto, se cumple que:

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & -n \cdot a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Con esa expresión calculamos A^{1000}:

$$\boxed{A^{1000} = \begin{pmatrix} 1 & -1000a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

Sistemas de ecuaciones lineales

¿Qué es un sistema de ecuaciones lineales?

Es un conjunto de ecuaciones de primer grado con varias incógnitas (dos o más). Por ejemplo:

Ejemplo 1: $\left.\begin{array}{l} 2x+3y=7 \\ 4x-5y=3 \end{array}\right\}$ es un sistema de 2 ecuaciones lineales con 2 incógnitas

Ejemplo 2: $\left.\begin{array}{l} 2x-y=4 \\ x+2y=7 \\ 3x+y=11 \end{array}\right\}$ es un sistema de 3 ecuaciones lineales con 2 incógnitas

Ejemplo 3: $\left.\begin{array}{l} x+2y-z=9 \\ 2x+y-2z=9 \\ 3x-y+z=2 \end{array}\right\}$ es un sistema de 3 ecuaciones lineales con 3 incógnitas

Resolver un sistema es encontrar los valores de las incógnitas que hacen ciertas todas las ecuaciones.

En el ejemplo 1 la solución del sistema es: $x=2,\ y=1$
En el ejemplo 2 la solución del sistema es: $x=3,\ y=2$
En el ejemplo 3 la solución del sistema es: $x=2,\ y=3,\ z=-1$ (compruébalas...)

Cuando un sistema tiene una *única solución* (como es el caso de los tres ejemplos anteriores) se dice que es un **Sistema Compatible Determinado**.

Hay sistemas que *no tienen solución*, es decir que ninguna combinación de valores de las variables cumple simultáneamente todas las ecuaciones del sistema. Se dice de un sistema así que es **Incompatible**.

Un ejemplo de sistema incompatible es el siguiente:

$\left.\begin{array}{l} 3x+2y=6 \\ 6x+4y=10 \end{array}\right\}$ pues multiplicando por 2 la primera ecuación tenemos: $\left.\begin{array}{l} 6x+4y=12 \\ 6x+4y=10 \end{array}\right\}$

y no puede cumplirse que $6x+4y$ sea, al mismo tiempo, 12 y 10.

Aún existe un tipo más de sistemas, los que tienen *infinitas soluciones*. Eso ocurre cuando las ecuaciones no dan información suficiente para encontrar el valor concreto de las variables. En ese caso se dice que el sistema es un **Sistema Compatible Indeterminado**.

Un ejemplo de sistema compatible indeterminado es el siguiente:

$\left.\begin{array}{l} 3x+2y=6 \\ 6x+4y=12 \end{array}\right\}$ pues multiplicando por 2 la primera ecuación tenemos: $\left.\begin{array}{l} 6x+4y=12 \\ 6x+4y=12 \end{array}\right\}$

y solo tenemos realmente una ecuación, esta: $3x+2y=6$

Para escribir la solución, despejamos la variable *y*: $y=\dfrac{6-3x}{2}=3-\dfrac{3}{2}x$

y si *x* es un valor *t* real cualquiera, tenemos que las soluciones son: $\left\{\begin{array}{l} x=t \\ y=3-\dfrac{3}{2}t \quad \text{con } t\in\mathbb{R} \end{array}\right.$

las infinitas soluciones se obtienen dando valores a *t*.

Normalmente nos propondrán sistemas en los que algunos coeficientes o términos independientes serán parámetros (letras). **Discutir** un sistema es encontrar para qué valores de esos parámetros el sistema es compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible.

Sistemas como ecuaciones matriciales

Todo sistema de ecuaciones lineales se puede escribir como una ecuación matricial.

Por ejemplo: $\left.\begin{array}{r} x+2y-\ \ z=9 \\ 2x+\ \ y-2z=9 \\ 3x-\ \ y+\ \ z=2 \end{array}\right\}$ equivale a la ecuación matricial: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix}$

La matriz de los coeficientes de las variables se llama A, la matriz de las variables se llama X
y la matriz de los términos independientes se llama B.

Así, el sistema puede escribirse como: $\mathrm{A} \cdot \mathrm{X} = \mathrm{B}$, con: $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathrm{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix}$

Si la matriz A es cuadrada (en el ejemplo 2 de la página anterior, la matriz A no sería cuadrada) la ecuación matricial se podrá resolver si la matriz A es invertible, es decir si existe la matriz A^{-1}:

Si $\quad \mathrm{A} \cdot \mathrm{X} = \mathrm{B}$, multiplicando en ambos lados por la izquierda por A^{-1} tendremos:

$\mathrm{A}^{-1} \cdot \mathrm{A} \cdot \mathrm{X} = \mathrm{A}^{-1} \cdot \mathrm{B}$, y usando que $\mathrm{A}^{-1} \cdot \mathrm{A} = \mathrm{I}$ y que $\mathrm{I} \cdot \mathrm{X} = \mathrm{X}$ quedará:

$$\mathrm{X} = \mathrm{A}^{-1} \cdot \mathrm{B}$$

No suele ser sencillo resolver así un sistema, pero nos da una idea de en qué casos hay solución única.

Lo primero que haremos siempre en un sistema, si la matriz de coeficientes A es cuadrada,
es ver si está definida su inversa A^{-1}: Estudiaremos en qué casos $\det(\mathrm{A}) \neq 0$

El sistema será un sistema compatible determinado (solución única) si $\det(\mathrm{A}) \neq 0$.

Cuando $\det(\mathrm{A}) = 0$ el sistema necesitará un análisis que veremos más adelante.

Sistemas Compatibles Determinados

Son aquellos en los que $\det(\mathrm{A}) \neq 0$. Se pueden resolver con cualquier método pero es preferible usar...

La regla de Cramer: Dice que el valor buscado de cada variable es: $x_i = \dfrac{\det(\mathrm{A}_i)}{\det(\mathrm{A})}$

x_1 es la primera variable (usualmente *x*), x_2 es la segunda variable (usualmente *y*), x_3 es la tercera variable (usualmente *z*), etc. [No es frecuente que tengamos que resolver sistemas mayores]

A_i es la matriz obtenida al sustituir la columna *i* por la matriz columna de los términos independientes.

Ejemplo: $\left.\begin{array}{r} 2x+3y=7 \\ 4x-5y=3 \end{array}\right\}$ la matriz de coeficientes es: $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$ y $\det(\mathrm{A}) = -10-12 = -22 \neq 0$

Por lo tanto es un sistema compatible determinado, pues A tiene inversa ya que $\det(\mathrm{A}) \neq 0$.

Las soluciones son, aplicando la regla de Cramer, las siguientes:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 3 & -5 \end{vmatrix}}{-22} = \frac{-35-9}{-22} = \frac{-44}{-22} = 2 \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}}{-22} = \frac{6-28}{-22} = \frac{-22}{-22} = 1 \quad \Rightarrow \boxed{x=2,\ y=1}$$

¿Qué hacer en los casos en los que el sistema no es compatible determinado?

Normalmente en los problemas de sistemas de ecuaciones hay uno o más parámetros.

Para ciertos valores de esos parámetros sabemos, al estudiar el determinante de la matriz de coeficientes, que el sistema no es compatible determinado.

Lo más sencillo es **estudiar cada caso por separado**.
Es decir, para cada valor problemático, sustituirlo en el sistema y ver qué sucede.

Para este estudio hay dos métodos posibles.

El primero de esos métodos ya lo conocemos, es el **método de Gauss**.

Para ver cómo funciona propondré tres ejemplos. Uno de ellos solo con dos ecuaciones y dos incógnitas, otros dos con 3 ecuaciones y 3 incógnitas.

Estos dos últimos están sacados de las PAU de Valencia.

Para que sirva de referencia tendrás disponible el documento en el que he reunido todos los problemas de sistemas de ecuaciones que han aparecido en las PAU de Valencia desde 1994.

La numeración de los dos ejemplos a los que me he referido sigue la de ese documento.

Tras esos ejemplos, veremos el otro método de estudio de los sistemas no compatibles determinados.

Ejercicio. Sea el sistema de ecuaciones lineales: $\left.\begin{array}{r} x+2y=4 \\ 3x+a\,y=b \end{array}\right\}$ donde *a* y *b* son parámetros reales.
Discute el sistema para los posibles valores de *a* y *b*. Resuélvelo cuando sea posible.

La matriz de coeficientes es: $\mathrm{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & a \end{pmatrix}$ su determinante es: $|\mathrm{A}|=a-6$ que es nulo para $a=6$

Así, el sistema tiene solución única (sistema compatible determinado) para $a\neq 6$ pues existe A^{-1}.

Estudiemos qué sucede para $a=6$ usando el método de Gauss:

$$(\mathrm{A}|\mathrm{B})=\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 6 & b \end{array}\right)\leftarrow \mathrm{F2}-3\mathrm{F1}\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & b-12 \end{array}\right)$$

La 2ª fila equivale a la ecuación: $0\cdot y=b-12$ [✳]

Veamos qué posibles casos se pueden dar. Dependerá de que $b-12$ sea o no cero:

1) Si $a=6$

Si $b\neq 12$ La ecuación [✳] no tiene solución.
Por lo tanto el sistema de ecuaciones no tiene solución.
Decimos que es un *sistema incompatible*.

Si $b=12$ En la ecuación [✳] cualquier valor de la variable *y* es solución.
Solo sabemos lo que dice la 1ª fila: $x+2y=4$, la ecuación de una recta.
Decimos que *el sistema es compatible* (con solución) *pero indeterminado*.
Podemos escribir todas las soluciones parametrizando esa recta:

Si $y=t$, $x=4-2t$ siendo $t\in\mathbb{R}$.

2) Si $a\neq 6$ El *sistema será compatible y determinado* (con solución única).
Podemos resolver con la regla de Cramer. Como $|\mathrm{A}|=a-6$ tendremos:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ b & a \end{vmatrix}}{a-6}=\frac{4a-2b}{a-6} \quad , \quad y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & b \end{vmatrix}}{a-6}=\frac{b-12}{a-6}$$

La discusión del sistema es:

$$\text{Si } a=6 \rightarrow \begin{cases} \text{si } b\neq 12 & \Rightarrow \quad \text{Sistema Incompatible} \\ \text{si } b=12 & \Rightarrow \quad \text{Sistema Compatible Indeterminado} \end{cases}$$

$$\text{Si } a\neq 6 \quad \Rightarrow \quad \text{Sistema Compatible Determinado}$$

Las soluciones del sistema son:

$$\text{Si } a=6 \rightarrow \begin{cases} \text{si } b\neq 12 & \Rightarrow \quad \text{No hay solución} \\ \text{si } b=12 & \Rightarrow \quad x=4-2t,\ y=t \ \text{ para } \ t\in\mathbb{R} \end{cases}$$

$$\text{Si } a\neq 6 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{4a-2b}{a-6},\ y=\frac{b-12}{a-6}$$

[Puedes comprobar las soluciones en `www.wolframalpha.com`
escribiendo en la caja: `x+2y=4,3x+ay=b` y pulsando ENTER o INTRO]

57.- Sea el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} x+\ \ y+az=\ \ 1 \\ x+ay+\ \ z=\ \ 1 \\ ax+\ \ y+\ \ z=-2 \end{cases}$ siendo a un parámetro real.

a) Discútelo en función del parámetro a. [*5 puntos*]

b) Resuélvelo para $a=-2$. [*3 puntos*]

c) Resuélvelo para $a=0$. [*2 puntos*]

a) El determinante de los coeficientes del sistema es:

$$|\mathrm{A}|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix}=a+a+a-(a^3+1+1)=-a^3+3a-2$$

Si $|\mathrm{A}|=0 \ \rightarrow\ -a^3+3a-2=0$

Con Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr} & -1 & 0 & 3 & -2 \\ +1 & & -1 & -1 & +2 \\ \hline & -1 & -1 & 2 & \lfloor 0 \end{array}$$

Factorizamos el cociente obtenido:

$$-a^2-a+2=0 \ \rightarrow\ a=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{-2}=\begin{cases} +1 \\ -2 \end{cases}$$

El determinante solo se anula para $a=+1$ (solución doble) y para $a=-2$

El sistema es compatible y determinado si $a\neq +1,-2$ puesto que existirá A^{-1} .

Veamos que sucede si $a=+1$ o si $a=-2$:

Si $a=+1$ usando el método de Gauss tenemos:

$$\left(\mathrm{A}|\mathrm{B}\right)=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \mathrm{F2}\leftarrow \mathrm{F2}-\mathrm{F1} \\ \mathrm{F3}\leftarrow \mathrm{F3}-\mathrm{F1} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right) \Leftarrow \text{ Es imposible}$$

El sistema es incompatible.

Si $a=-2$ usando el método de Gauss tenemos:

$$\left(\mathrm{A}|\mathrm{B}\right)=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \mathrm{F2}\leftarrow \mathrm{F2}-\mathrm{F1} \\ \mathrm{F3}\leftarrow \mathrm{F3}+\mathrm{F1}+\mathrm{F2} \end{array} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Leftarrow \text{ No da información}$$

El sistema es compatible indeterminado (solo dos ecuaciones independientes)

$\Rightarrow$ $\boxed{\begin{array}{l} \text{Si } a\neq +1,-2 \text{ el sistema es compatible determinado.} \\ \text{Si } a=+1 \text{ el sistema es incompatible.} \\ \text{Si } a=-2 \text{ el sistema es compatible indeterminado.} \end{array}}$

b) Si $a=-2$ de la expresión que obtuvimos en el apartado anterior para la matriz ampliada deducimos:

De la segunda ecuación: $-3y+3z=0 \quad \to \quad y=z$

De la primera ecuación: $x+y-2z=1 \quad \to \quad x=1+z$

Con lo que las soluciones del sistema son:

$$\begin{cases} x=1+t \\ y=t \\ z=t \qquad \text{con } t\in\mathbb{R} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{Si } a=-2 \quad \to \quad (x,y,z)=(1+t\,,\,t\,,\,t) \ \text{ con } t\in\mathbb{R}}$

c) Si $a=0$ sabemos [por el apartado (a)] que el sistema es compatible determinado.

Podríamos resolver el sistema con la regla de Cramer, pero usaremos un método elemental.

Sustituyendo $a=0$ en el sistema original:

$$\begin{cases} x+y=\ \ 1 & \to \ x+y=1 \\ x+z=\ \ 1 & \\ y+z=-2 & \end{cases} \quad \left.\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right] \text{Restamos: } x-y=3$$

Sumando estas dos ecuaciones: $2x=4 \quad \to \quad x=2$

De la primera ecuación: $x+y=1 \quad \to \quad 2+y=1 \quad \Rightarrow \quad y=-1$

De la segunda ecuación: $x+z=1 \quad \to \quad 2+z=1 \quad \Rightarrow \quad z=-1$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{La solución para } a=0 \text{ es: } x=2,\ y=-1,\ z=-1}$

58.- Dado el sistema de ecuaciones: $\left.\begin{array}{l} x+a\,y+2z=3 \\ x-3y+a\,z=-2 \\ x+\ \ y+2z=a \end{array}\right\}$ siendo a un parámetro real. Calcula:

a) Los valores de a para los cuales el sistema es compatible. [*4 puntos*]

b) La solución del sistema cuando $a=0$. [*3 puntos*]

c) Las soluciones del sistema cuando sea compatible indeterminado. [*3 puntos*]

a) El determinante de los coeficientes del sistema es:

$$|\mathrm{A}|=\begin{vmatrix} 1 & a & 2 \\ 1 & -3 & a \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}=-6+a^2+2-(-6+2a+a)=a^2-3a+2$$

Si $|\mathrm{A}|=0 \ \rightarrow \ a^2-3a+2=0$

Resolvemos: $a^2-3a+2=0 \ \rightarrow \ \begin{array}{l} \Delta=(-3)^2-4\cdot 1\cdot 2=1 \\ a=\dfrac{3\pm\sqrt{1}}{2}=\begin{cases} +2 \\ +1 \end{cases} \end{array}$

El determinante solo se anula para $a=+1$ y para $a=+2$

El sistema es compatible y determinado si $a\neq +1,-2$ puesto que existirá A^{-1}.

Veamos que sucede si $a=+1$ o si $a=+2$:

Si $a=+1$ usando el método de Gauss tenemos:

$$(\mathrm{A}|\mathrm{B})=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \mathrm{F2}\leftarrow \mathrm{F2}-\mathrm{F1} \\ \mathrm{F3}\leftarrow \mathrm{F3}-\mathrm{F1} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right) \Leftarrow \text{ Es imposible}$$

El sistema es incompatible.

Si $a=+2$ usando el método de Gauss tenemos:

$$(\mathrm{A}|\mathrm{B})=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \mathrm{F2}\leftarrow \mathrm{F2}-\mathrm{F1} \\ \mathrm{F3}\leftarrow \mathrm{F3}-\mathrm{F1} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & 0 & -5 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right) \left.\begin{array}{l} \\ \\ \end{array}\right\} \text{son la misma ecuación}$$

El sistema es compatible indeterminado (solo dos ecuaciones independientes)

$\Rightarrow$ Si $a\neq +1,+2$ el sistema es compatible determinado.
Si $a=+1$ el sistema es incompatible.
Si $a=+2$ el sistema es compatible indeterminado.

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{Por lo tanto, el sistema es compatible cuando } a\neq +1}$

b) Si $a=0$ el sistema es compatible determinado.

Resolveremos usando la regla de Cramer.

El determinante de la matriz de coeficientes es: $|\mathrm{A}| = a^2 - 3a + 2$

Para $a=0$ tendremos que: $|\mathrm{A}| = a^2 - 3a + 2\Big|_{a=0} = 0^2 - 3\cdot 0 + 2 = 2$

Aplicando la regla de Cramer, tenemos:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{2} = \frac{1}{2}\cdot\left[-18+0-4-(0+0+0)\right] = \frac{-22}{2} = -11$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}}{2} = \frac{1}{2}\cdot\left[-4+0+0-(-4+6+0)\right] = \frac{-6}{2} = -3$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & -3 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{2} = \frac{1}{2}\cdot\left[0+0+3-(-9+0-2)\right] = \frac{14}{2} = 7$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{La solución para } a=0 \;\rightarrow\; (x,y,z) = (-11,-3,7)}$

c) El sistema es compatible indeterminado para $a=+2$.

Del estudio anterior con el método de Gauss obtuvimos:

$$\left(\mathrm{A}|\mathrm{B}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & 0 & -5 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right) \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array}\right\} \text{son la misma ecuación}$$

De la 3ª ecuación tenemos: $(-1)\cdot y = -1 \;\rightarrow\; y = 1$

Sustituyendo en la primera ecuación:

$x + 2y + 2z = 3 \;\rightarrow\; x + 2\cdot 1 + 2z = 3 \;\Rightarrow\; x + 2z = 1$

Y si tomamos que $z = t$ tendremos:

$x = 1 - 2t$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{La solución para } a=+2 \;\rightarrow\; (x,y,z) = (1-2t,\, 1,\, t) \text{ con } t\in\mathbb{R}}$

Rango de una matriz

El segundo método para discutir un sistema necesita el concepto de ‘rango de una matriz’.

Se llama rango de una matriz a la dimensión de la submatriz cuadrada (se le llama ‘menor’) más grande que contiene la matriz, que tenga determinante no nulo.

Veámoslo con ejemplos:

Ej.1: $A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 4 & 6\end{pmatrix}$ El menor cuadrado más grande que contiene esta matriz es la propia matriz que es de dimensión 2 (o sea, 2×2). Si su determinante fuera distinto de cero, el rango de la matriz sería 2.

Sin embargo, ese menor tiene determinante cero, por lo que la matriz no tiene rango 2.

Como la matriz tiene 4 menores de dimensión 1 (1×1) que son los 4 elementos de la matriz, y por lo menos hay uno distinto de cero (de hecho, los 4 son distintos de cero), la matriz tiene rango 1.

Podemos escribir: $\operatorname{rang}(A)=1$.

Ej.2: $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 6\\ 4 & 9\end{pmatrix}$ Existen 3 menores 2×2 en esa matriz: $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 6\\ 4 & 9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & 9\end{pmatrix}$. No hay de 3×3.

Por lo tanto, el rango de la matriz es como máximo 2.

Puesto que el segundo de los menores que hemos escrito arriba tiene determinante $27-24=3\neq 0$ el rango de la matriz es 2, puesto que hay al menos un menor de orden 2 con determinante no nulo y podemos escribir: $\operatorname{rang}(A)=2$.

Ej.3: $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 5\\ 2 & 6 & 7\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}$ tiene un menor de orden 3 (la propia matriz) así que puede ser que su rango sea 3.

Pero: $\det(A)=12+21+30-(30+12+21)=0$ con lo que el rango de la matriz no es 3.

Hay varios menores de orden 2, pero algunos tienen determinante cero:

Este: $\left(\begin{array}{cc|c}\boxed{\begin{matrix}1 & 3\\ 2 & 6\end{matrix}} & & \begin{matrix}5\\ 7\end{matrix}\\ 1 & 3 & 2\end{array}\right)$ y este: $\begin{pmatrix}\begin{matrix}1 & 3\end{matrix} & 5\\ \boxed{\begin{matrix}2 & 6\\ 1 & 3\end{matrix}} & \begin{matrix}7\\ 2\end{matrix}\end{pmatrix}$ tienen determinante cero. Este: $\begin{pmatrix}\begin{matrix}1\\ 2\end{matrix} & \boxed{\begin{matrix}3 & 5\\ 6 & 7\end{matrix}}\\ 1 & \begin{matrix}3 & 2\end{matrix}\end{pmatrix}$ no da cero.

Por lo tanto, el rango de la matriz es 2: $\operatorname{rang}(A)=2$.

Ej.4: $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 5\\ 0 & 1 & 4\\ 2 & 3 & 0\end{pmatrix}$ tiene un menor de orden 3 (la propia matriz) así que puede ser que su rango sea 3.

Como, $\det(A)=0+24+0-(10+0+12)=2\neq 0$ el rango de la matriz es 3: $\operatorname{rang}(A)=3$

Ej.5: $A=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ Esta matriz tiene rango cero. En la matriz no hay ningún menor, de ningún tamaño, con determinante distinto de cero. Así pues, $\operatorname{rang}(A)=0$

Ej.6: $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 9 & 4 \end{pmatrix}$ esta matriz tiene el tamaño habitual de la matriz ampliada en un sistema.

Podría tener como máximo rango 3, pues no hay ningún menor de orden 4 (4×4).

Desde luego, hay un menor de orden 2 con determinante no nulo: En la esquina superior izquierda tenemos: $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1-0=1\neq 0$ con lo que, como mínimo, la matriz A tiene rango 2.

Para ver si tiene rango 3, 'orlamos' ese menor.
Esto quiere decir que lo 'completamos' a ver si, de alguna de las formas posibles, alcanza rango 3.

Eso puede hacerse aquí de dos maneras:

a) Así: $\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} \mathbf{5} & 2 \\ \mathbf{4} & 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} \mathbf{1} & \mathbf{4} \end{matrix} & \begin{matrix} \mathbf{9} & 4 \end{matrix} \end{pmatrix}$ b) O así: $\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 5 & \mathbf{2} \\ 4 & \mathbf{1} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \mathbf{1} & \mathbf{4} \end{matrix} & \begin{matrix} 9 & \mathbf{4} \end{matrix} \end{pmatrix}$

En el caso (a) el determinante es:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix} = 9+12+0-(5+0+16)=21-21=0$$

Así que este menor falla para llegar a rango 3.

Veamos el determinante en el caso (b):

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 4+3+0-(2+0+4)=7-6=1\neq 0$$

Este menor si tiene determinante no nulo.

Por lo tanto, como hay un menor de orden 3 de determinante no nulo, el rango de la matriz es 3:

$$\operatorname{rang}(A)=3$$

Si las dos formas de orlar el menor con determinante no nulo hubieran fallado, tendríamos que la matriz sería de rango 2.

El procedimiento de orlar un menor, del que sabemos que tiene determinante no nulo, nos permite ahorrar tiempo y complicaciones.

Teorema de Rouché-Frobenius

Vamos con el segundo método para discutir un sistema.

Consiste en usar el teorema de Rouché-Frobenius, que dice lo siguiente:

Sea el sistema de ecuaciones con n incógnitas dado por la ecuación matricial $\mathrm{A} \cdot \mathrm{X} = \mathrm{B}$

Si $\operatorname{rang}(\mathrm{A}) = n$ el sistema es compatible determinado.

[y ocurre que $\operatorname{rang}(\mathrm{A}) = \operatorname{rang}(\mathrm{A}|\mathrm{B}) = n$]

Si $\operatorname{rang}(\mathrm{A}) = \operatorname{rang}(\mathrm{A}|\mathrm{B}) < n$ el sistema es compatible indeterminado.

Si $\operatorname{rang}(\mathrm{A}) \neq \operatorname{rang}(\mathrm{A}|\mathrm{B})$ el sistema es incompatible.

Sistemas de ecuaciones homogéneos

Son los sistemas en los que los términos independientes son cero.

Por ejemplo: $\begin{cases} x + 2y + az = 0 \\ 2x + ay + z = 0 \\ 3x - 2y - z = 0 \end{cases}$

En ellos ocurre que, al ser los elementos de la matriz columna B todos cero, el rango de A coincidirá siempre con el rango de la matriz ampliada $(\mathrm{A}|\mathrm{B})$.

Por ello, el sistema siempre será compatible (habrá que estudiar si determinado o indeterminado).

Esto es así, además, porque el sistema siempre admite la solución: $x = y = z = 0$.

Estos sistemas se estudian con los mismos métodos que hemos visto hasta ahora, bien con el método de Gauss o bien con el teorema de Rouché-Frobenius.

Se citan simplemente por la característica de que siempre son compatibles, no porque requieran de ningún método de trabajo especial.

Veamos cómo aplicar el teorema de Rouché con dos ejemplos, problemas 55 y 56, de las PAU de 2019. (documento de Sistemas de Ecuaciones de las PAU de Valencia)

55.- Dado el sistema de ecuaciones: $\left.\begin{array}{r} x+\ \ y+\ \ z=4 \\ 3x+4y+\ 5z=5 \\ 7x+9y+11z=\alpha \end{array}\right\}$ siendo α un parámetro real. Calcula:

a) Los valores de α para los que el sistema es compatible o incompatible. [*4 puntos*]

b) Las soluciones del sistema cuando el sistema sea compatible. [*4 puntos*]

c) La discusión del sistema cuando se cambia el coeficiente 11 por otro. [*2 puntos*]

a) El determinante de los coeficientes del sistema es:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 7 & 9 & 11 \end{vmatrix} = 44+35+27-(28+33+45) = 106-106 = 0$$

El determinante es nulo.

El sistema nunca será compatible determinado puesto que no existe A^{-1}.

El menor de orden 2 de la esquina superior izquierda tiene como determinante: $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4-3 = 1 \neq 0$

Por lo tanto: $\operatorname{rang}(A) = 2 < n = 3$

Estudiemos el rango de la matriz ampliada: $(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 5 \\ 7 & 9 & 11 & \alpha \end{array}\right)$

Orlando el menor de orden 2 anterior, cuyo determinante es distinto de cero, tenemos:

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & \mathbf{4} \\ 3 & 4 & 5 & \mathbf{5} \\ \mathbf{7} & \mathbf{9} & 11 & \boldsymbol{\alpha} \end{array}\right)$$

su determinante es: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 7 & 9 & \alpha \end{vmatrix} = 4\alpha+35+108-(112+3\alpha+45) = \alpha-14$

Este determinante se anula si $\alpha-14=0 \ \rightarrow \ \alpha=14$

Por lo tanto:

Si $\alpha=14$ tenemos que: $\operatorname{rang}(A|B)=2$ por lo que $\operatorname{rang}(A)=\operatorname{rang}(A|B)=2<n=3$
y el sistema es compatible indeterminado.

Si $\alpha\neq 14$ tenemos que: $\operatorname{rang}(A|B)=3$ por lo que $\operatorname{rang}(A)\neq\operatorname{rang}(A|B)$
y el sistema es incompatible.

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{El sistema es compatible cuando } \alpha=14}$

b) Para $\alpha = 14$ el rango de A y de $A|B$ es 2. Solo hay dos ecuaciones independientes.

Estas ecuaciones son de las que se extrajo el menor de orden 2 con determinante no nulo.

Así pues, hemos de resolver: $\left.\begin{array}{r} x+\ \ y+\ \ z=4 \\ 3x+4y+\ 5z=5 \end{array}\right\}$

Pasamos los términos con z al segundo miembro y resolvemos, por ejemplo con la regla de Cramer:

$\left.\begin{array}{r} x+\ \ y=4-z \\ 3x+4y=5-5z \end{array}\right\}$ el determinante de los coeficientes es: $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4-3=1$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4-z & 1 \\ 5-5z & 4 \end{vmatrix}}{1} = 4\cdot(4-z)-1\cdot(5-5z) = 16-4z-5+5z = 11+z$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 4-z \\ 3 & 5-5z \end{vmatrix}}{1} = 1\cdot(5-5z)-3\cdot(4-z) = 5-5z-12+3z = -7-2z$$

Y si elegimos $z=t$ con $t\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{La solución para el sistema compatible es: } (x,y,z)=(11+t,-7-2t,t) \quad t\in\mathbb{R}}$

c) Si cambiamos el coeficiente 11 por otro distinto, por ejemplo *k* con $k \neq 11$, tendremos:

$$\left.\begin{array}{r} x+\ \ y+\ \ \ z=4 \\ 3x+4y+\ 5z=5 \\ 7x+9y+k\cdot z=\alpha \end{array}\right\}$$

El determinante de la matriz de coeficientes será:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 7 & 9 & k \end{vmatrix} = 4k+35+27-(28+3k+45) = k-11$$

Y como $k \neq 11$ ese determinante será distinto de cero.

Por lo tanto, existirá A^{-1} y el sistema será compatible determinado.

O bien, $\text{rang}(A) = \text{rang}(A|B) = 3 = n$ y el sistema será compatible determinado.

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{El sistema será compatible determinado (para cualquier valor de } \alpha)}$

56.- Dado el sistema de ecuaciones: $\left.\begin{aligned} 2x \quad\;\; +3z &= \alpha \\ x-2y+2z &= 5 \\ 3x-\;\; y+5z &= \alpha+1 \end{aligned}\right\}$ siendo α un parámetro real. Calcula:

a) Los valores de α para los que el sistema es compatible determinado. [*4 puntos*]

b) Las soluciones del sistema cuando $\alpha=-1$. [*3 puntos*]

c) El valor de α para que el sistema tenga una solución (x,y,z) que cumpla que $x+y+z=0$. [*3 puntos*]

a) El determinante de los coeficientes del sistema es:

$$|\mathrm{A}| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix} = -20+0-3-(-18+0-4) = -23-(-22) = -1$$

El determinante es distinto de cero.

El sistema será compatible determinado puesto que existe A^{-1}.

O bien, $\mathrm{rang}(\mathrm{A}) = \mathrm{rang}(\mathrm{A}|\mathrm{B}) = 3 = n$ y el sistema es compatible determinado (para cualquier α)

La matriz ampliada es: $(\mathrm{A}|\mathrm{B}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 3 & \alpha \\ 1 & -2 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & 5 & \alpha+1 \end{array}\right)$ y si $\mathrm{rang}(\mathrm{A})=3$ también $\mathrm{rang}(\mathrm{A}|\mathrm{B})=3$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{El sistema es compatible determinado, para cualquier valor de } \alpha.}$

b) Resolvamos el sistema para cualquier valor de α. Así nos servirá también para el apartado (c).

Como $|\mathrm{A}|=-1$, usando la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} \alpha & 0 & 3 \\ 5 & -2 & 2 \\ \alpha+1 & -1 & 5 \end{vmatrix}}{-1} = -[-10\alpha+0-15-(-6\alpha-6+0-2\alpha)] = -[-2\alpha-9] = 2\alpha+9$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & \alpha & 3 \\ 1 & 5 & 2 \\ 3 & \alpha+1 & 5 \end{vmatrix}}{-1} = -[50+6\alpha+3\alpha+3-(45+5\alpha+4\alpha+4)] = -4$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & \alpha \\ 1 & -2 & 5 \\ 3 & -1 & \alpha+1 \end{vmatrix}}{-1} = -[-4\alpha-4+0-\alpha-(-6\alpha+0-10)] = -[\alpha+6] = -\alpha-6$$

Para el caso $\alpha = -1$ tendremos:

$$x = 2\alpha + 9\Big|_{\alpha=-1} = 2\cdot(-1) + 9 = 7$$

$$y = -4\Big|_{\alpha=-1} = -4$$

$$z = -\alpha - 6\Big|_{\alpha=-1} = -(-1) - 6 = -5$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{La solución para } \alpha = -1 \text{ es: } (x, y, z) = (7, -4, -5)}$

c) Para cualquier valor de α tenemos:

$$x = 2\alpha + 9$$

$$y = -4$$

$$z = -\alpha - 6$$

Con lo que:

$$x + y + z = (2\alpha + 9) + (-4) + (-\alpha - 6) = \alpha - 1$$

Buscamos el valor de α para el que $x + y + z = 0$ con lo que debe ocurrir que:

$$\alpha - 1 = 0 \;\rightarrow\; \alpha = 1$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{El sistema tiene solución con } x + y + z = 0 \text{ si } \alpha = 1}$

Resolveré a continuación los problemas de sistemas propuestos en las PAU de Valencia en los años 2016, 2017 y 2018. Corresponden a los números 50, 51, 52, 53 y 54 de mi documento.

Empezaré siempre discutiendo el sistema, empleando los diversos métodos que conocemos.

50.- Se da el sistema de ecuaciones: $\left.\begin{array}{l} ax \qquad -z=a \\ 2x+ay+z=1 \\ 2x \qquad +z=2 \end{array}\right\}$ siendo a un parámetro real. Calcula:

a) Los valores de a para los cuales el sistema es incompatible. [*4 puntos*]

b) Las soluciones del sistema cuando sea compatible indeterminado. [*3 puntos*]

c) La solución del sistema cuando $a=-1$. [*3 puntos*]

a) Comenzamos discutiendo el sistema. El determinante de los coeficientes del sistema es:

$$|\mathrm{A}| = \begin{vmatrix} a & 0 & -1 \\ 2 & a & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = a^2+0+0-(-2a+0+0) = a^2+2a$$

Si $|\mathrm{A}|=0 \;\rightarrow\; a^2+2a=0,\; a(a+2)=0 \;\Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ a=-2 \end{cases}$

El determinante solo se anula para $a=0$ y para $a=-2$

El sistema es **compatible determinado** si $\boxed{a \neq 0,-2}$ ya que existe A^{-1} ($|\mathrm{A}| \neq 0$) y $\operatorname{rang}(\mathrm{A}) = 3 = n$.

Veamos que sucede si $a=0$ o si $a=-2$:

Si $\boxed{a=0}$ tenemos para la matriz ampliada: $\left(\mathrm{A}|\mathrm{B}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$

A simple vista notamos que las filas 2 y 3 producen ecuaciones incompatibles: $\begin{cases} \mathrm{F2} \;\rightarrow\; 2x+z=1 \\ \mathrm{F3} \;\rightarrow\; 2x+z=2 \end{cases}$

con lo que **el sistema es incompatible**.

Si $\boxed{a=-2}$ tenemos para la matriz ampliada: $\left(\mathrm{A}|\mathrm{B}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$

A simple vista notamos que las filas 1 y 3 producen ecuaciones equivalentes: $\begin{cases} \mathrm{F1} \;\rightarrow\; -2x-z=-2 \\ \mathrm{F3} \;\rightarrow\; \;\;2x+z=\;\;2 \end{cases}$

Con lo que una de ellas (pongamos la fila 1) no aporta información. Si la eliminamos, tenemos:

$$\left(\mathrm{A}|\mathrm{B}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

El menor $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ tiene como determinante: $0-(-4)=4$ que es distinto de cero, con lo que:

$\operatorname{rang}(\mathrm{A}) = \operatorname{rang}(\mathrm{A}|\mathrm{B}) = 2 < n = 3$ y **el sistema es compatible indeterminado**.

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{El sistema es incompatible si } a=0}$

b) El sistema es compatible indeterminado para $a=-2$

Para ese caso el sistema se reduce, como vimos antes, a: $\left(A|B\right)=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$

Podemos trasladarlo a ecuaciones así:

$$\begin{cases} 2x-2y=1-z & \to\ -2y=(1-z)-2x=(1-z)-(2-z)=-1 \ \Rightarrow\ y=1/2 \\ 2x\qquad\ =2-z & \to\ x=1-z/2 \end{cases}$$

Tomando $z=2t$ con $t\in\mathbb{R}$ tendremos:

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{Las soluciones para el caso compatible indeterminado son: } (x,y,z)=(1-t,1/2,2t) \text{ con } t\in\mathbb{R}}$

c) Si $a=-1$ el sistema es compatible determinado. Resolvemos con la regla de Cramer:

El valor del determinante de los coeficientes es: $|A|=a^2+2a\big|_{a=-1}=(-1)^2+2(-1)=1-2=-1$

$$x=\frac{\begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{-1}=-[1+0+0-(2+0+0)]=-[-1]=1$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{-1}=-[-1-2-4-(-2-2-2)]=-[-7-(-6)]=-[-1]=1$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}}{-1}=-[2+0+0-(2+0+0)]=-[2-2]=0$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{La soluciones para el caso } a=-1 \text{ es: } (x,y,z)=(1,1,0)}$

51.- Se da el sistema de ecuaciones: $\left.\begin{array}{r} x+\ \ y+2z=\ \ 2 \\ -3x+2y+3z=-2 \\ 2x+\alpha y-5z=-4 \end{array}\right\}$ siendo α un parámetro real. Calcula:

a) La solución del sistema cuando $\alpha = 0$.

b) El valor del parámetro α para el que el sistema es incompatible.

c) Los valores del parámetro α para los que el sistema es compatible y determinado y obtener la solución en función del parámetro α.

a) Comenzamos discutiendo el sistema. El determinante de los coeficientes del sistema es:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 3 \\ 2 & \alpha & -5 \end{vmatrix} = -10+6-6\alpha-(8+15+3\alpha) = -9\alpha-27$$

Si $|A| = 0 \ \rightarrow\ -9\alpha - 27 = 0 \ \Rightarrow\ \alpha = -3$

El determinante solo se anula para $\alpha = -3$

El sistema es **compatible determinado** si $\boxed{\alpha \neq -3}$ ya que existe A^{-1} ($|A| \neq 0$) y $\operatorname{rang}(A) = 3 = n$.

Veamos que sucede si $\alpha = -3$:

Si $\boxed{\alpha = -3}$ usando el método de Gauss tenemos:

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ -3 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & -3 & -5 & -4 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ F2 \leftarrow F2+3\cdot F1 \\ F3 \leftarrow F3-2\cdot F1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 9 & 4 \\ 0 & -5 & -9 & -8 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ F3 \leftarrow F3+F2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 9 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right)$$

La fila 3 equivale a la ecuación: $0\cdot z = -4$ que no tiene solución.

El sistema es **incompatible**.

Para $\alpha = 0$ podemos resolver con la regla de Cramer:

El determinante de la matriz de coeficientes es: $|A| = -9\alpha - 27\big|_{\alpha=0} = -27$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \\ -4 & 0 & -5 \end{vmatrix}}{-27} = \frac{1}{-27}\cdot[-20-12+0-(-16+10+0)] = \frac{1}{-27}\cdot[-32-(-6)] = \frac{-26}{-27} = \frac{26}{27}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -3 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & -5 \end{vmatrix}}{-27} = \frac{1}{-27}\cdot[10+12+24-(-8+30-12)] = \frac{1}{-27}\cdot[46-(10)] = \frac{36}{-27} = -\frac{4}{3}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1 & 2\\ -3 & 2 & -2\\ 2 & 0 & -4\end{vmatrix}}{-27}=\frac{1}{-27}\cdot[-8-4+0-(8+12+0)]=\frac{1}{-27}\cdot[-12-20]=\frac{32}{27}$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{Por lo tanto, la solución para } \alpha=0 \text{ es: } (x,y,z)=(26/27,-4/3,32/27)}$

b) Según la discusión del sistema que hicimos antes:

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{El sistema es incompatible si } \alpha=-3}$

c) Según la discusión del sistema que hicimos antes:

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{El sistema es compatible determinado si } \alpha\neq-3}$

La solución para el caso compatible determinado podemos obtenerla con la regla de Cramer:

El determinante de los coeficientes del sistema, como obtuvimos antes, es: $|\mathrm{A}|=-9\alpha-27$

$$x=\frac{\begin{vmatrix}2 & 1 & 2\\ -2 & 2 & 3\\ -4 & \alpha & -5\end{vmatrix}}{-9\alpha-27}=\frac{-20-12-4\alpha-(-16+10+6\alpha)}{-9\alpha-27}=\frac{-10\alpha-26}{-9\alpha-27}=\frac{10\alpha+26}{9\alpha+27}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}1 & 2 & 2\\ -3 & -2 & 3\\ 2 & -4 & -5\end{vmatrix}}{-9\alpha-27}=\frac{10+12+24-(-8+30-12)}{-9\alpha-27}=\frac{36}{-9\alpha-27}=-\frac{4}{\alpha+3}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1 & 2\\ -3 & 2 & -2\\ 2 & \alpha & -4\end{vmatrix}}{-9\alpha-27}=\frac{-8-4-6\alpha-(8+12-2\alpha)}{-9\alpha-27}=\frac{-4\alpha-32}{-9\alpha-27}=\frac{4\alpha+32}{9\alpha+27}$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{La solución para } \alpha\neq-3 \text{ es: } (x,y,z)=\left(\frac{10\alpha+26}{9\alpha+27},-\frac{4}{\alpha+3},\frac{4\alpha+32}{9\alpha+27}\right)}$

52.- Se da el sistema de ecuaciones: $\left.\begin{array}{r}-x+ay+2z=a\\ 2x+ay-\ z=2\\ ax-\ y+2z=a\end{array}\right\}$ donde a es un parámetro real. Calcula:

a) La solución del sistema cuando $a=2$.

b) Los valores del parámetro a para los que el sistema es compatible y determinado.

c) El valor del parámetro a para el que el sistema es compatible e indeterminado y obtener todas las soluciones para ese valor de a.

a) Comenzamos discutiendo el sistema. El determinante de los coeficientes del sistema es:

$$|\mathrm{A}|=\begin{vmatrix}-1 & a & 2\\ 2 & a & -1\\ a & -1 & 2\end{vmatrix}=-2a-a^2-4-(2a^2+4a-1)=-3a^2-6a-3=-3(a^2+2a+1)=-3(a+1)^2$$

Si $|\mathrm{A}|=0 \rightarrow -3(a+1)^2=0 \Rightarrow a=-1$

El sistema es **compatible determinado** si $\boxed{a\neq -1}$ ya que existe A^{-1} ($|\mathrm{A}|\neq 0$) y $\operatorname{rang}(\mathrm{A})=3=n$.

En el caso en que $\boxed{a=-1}$ tendremos para la matriz ampliada:

$$(\mathrm{A}|\mathrm{B})=\left(\begin{array}{ccc|c}-1 & -1 & 2 & -1\\ 2 & -1 & -1 & 2\\ -1 & -1 & 2 & -1\end{array}\right)$$

A simple vista notamos que la fila 3 es idéntica a la fila 1 y no aporta información.

Eliminamos la fila 3 y nos queda:

$$(\mathrm{A}|\mathrm{B})=\left(\begin{array}{ccc|c}-1 & -1 & 2 & -1\\ 2 & -1 & -1 & 2\end{array}\right)$$

El menor $\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 2 & -1\end{pmatrix}$ tiene determinante $1-(-2)=3$ que es distinto de cero.

Por lo tanto: $\operatorname{rang}(\mathrm{A})=\operatorname{rang}(\mathrm{A}|\mathrm{B})=2<n=3$

y el sistema es **compatible indeterminado**.

Cuando $a=2$ el sistema es compatible determinado y se puede resolver con la regla de Cramer:

El determinante de los coeficientes del sistema es: $|\mathrm{A}|=-3(a+1)^2\Big|_{a=2}=-3\cdot 3^2=-27$

$$x=\frac{\begin{vmatrix}2 & 2 & 2\\ 2 & 2 & -1\\ 2 & -1 & 2\end{vmatrix}}{-27}=\frac{1}{-27}\cdot[8-4-4-(8+8+2)]=\frac{1}{-27}\cdot[0-(18)]=\frac{-18}{-27}=\frac{2}{3}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}-1 & 2 & 2\\ 2 & 2 & -1\\ 2 & 2 & 2\end{vmatrix}}{-27}=\frac{1}{-27}\cdot[-4-4+8-(8+8+2)]=\frac{1}{-27}\cdot[0-18]=\frac{-18}{-27}=\frac{2}{3}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}-1 & 2 & 2\\ 2 & 2 & 2\\ 2 & -1 & 2\end{vmatrix}}{-27}=\frac{1}{-27}\cdot[-4+8-4-(8+8+2)]=\frac{1}{-27}\cdot[0-18]=\frac{-18}{-27}=\frac{2}{3}$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{La solución del sistema cuando } a=2 \text{ es } (x,y,z)=\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)}$

b) Según la discusión del sistema que hicimos antes:

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{El sistema es compatible determinado para } a\neq -1}$

c) Según la discusión del sistema que hicimos antes:

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{El sistema es compatible indeterminado para } a=-1}$

En ese caso teníamos: $\left(\mathrm{A}\middle|\mathrm{B}\right)=\left(\begin{array}{ccc|c}-1 & -1 & 2 & -1\\ 2 & -1 & -1 & 2\end{array}\right)$

que podemos escribir como ecuaciones así: $\begin{cases}-x-y=-1-2z\\ 2x-y=2+z\end{cases} \rightarrow \begin{cases}x+y=1+2z\\ 2x-y=2+z\end{cases}$

Sumando las dos ecuaciones:

$3x=3+3z \;\rightarrow\; x=1+z$

Y sustituyendo en la primera ecuación:

$(1+z)+y=1+2z \;\rightarrow\; y=z$

Elegimos $z=t$ y tenemos que:

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{Las soluciones del sistema para } a=-1 \text{ son: } (x,y,z)=(1+t,t,t) \quad \text{con} \quad t\in\mathbb{R}}$

53.- Dado el sistema de ecuaciones: $\left.\begin{array}{r} y-z=1-a \\ -x \quad +z=5 \\ -ax+y-z=1 \end{array}\right\}$ siendo a un parámetro real. Calcula:

a) Los valores del parámetro a para los que el sistema es compatible determinado.

b) Las soluciones del sistema cuando $a=3$.

c) Las soluciones del sistema para los valores de a que lo hacen compatible indeterminado.

a) Comenzamos discutiendo el sistema. El determinante de los coeficientes del sistema es:

$$|\mathrm{A}|=\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -a & 1 & -1 \end{vmatrix}=0-a+1-(0+1+0)=-a$$

Si $|\mathrm{A}|=0 \rightarrow a=0$.

El sistema es **compatible determinado** si $\boxed{a \neq 0}$ ya que existe A^{-1} ($|\mathrm{A}| \neq 0$) y $\operatorname{rang}(\mathrm{A})=3=n$.

Para el caso en que $\boxed{a=0}$ la matriz ampliada es:

$$(\mathrm{A}|\mathrm{B})=\left(\begin{array}{rrr|r} 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

A simple vista notamos que la fila 3 es idéntica a la fila 1 y no aporta información.

Eliminamos la fila 3 y nos queda:

$$(\mathrm{A}|\mathrm{B})=\left(\begin{array}{rrr|r} 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

El menor $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ tiene determinante $0-(-1)=1$ que es distinto de cero.

Por lo tanto: $\operatorname{rang}(\mathrm{A})=\operatorname{rang}(\mathrm{A}|\mathrm{B})=2<n=3$

y el sistema es **compatible indeterminado**.

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{El sistema es compatible determinado cuando } a \neq 0}$

b) Para $a=3$ el sistema es compatible determinado, lo resolvemos con la regla de Cramer.

El determinante de los coeficientes del sistema es: $|\mathrm{A}|=-a|_{a=3}=-3$

$$x=\frac{\begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 5 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{-3}=\frac{1}{-3}\cdot[0+1-5-(0-5-2)]=\frac{1}{-3}\cdot[-4-(-7)]=\frac{3}{-3}=-1$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}0&-2&-1\\-1&5&1\\-3&1&-1\end{vmatrix}}{-3}=\frac{1}{-3}\cdot[0+6+1-(15-2+0)]=\frac{1}{-3}\cdot[7-13]=\frac{-6}{-3}=2$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}0&1&-2\\-1&0&5\\-3&1&1\end{vmatrix}}{-3}=\frac{1}{-3}\cdot[0-15+2-(0-1+0)]=\frac{1}{-3}\cdot[-13-(-1)]=\frac{-12}{-3}=4$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{La solución del sistema cuando } a=3 \text{ es } (x,y,z)=\left(-1,2,4\right)}$

c) El sistema es compatible determinado, según discutimos antes, para $a=0$.

En ese caso teníamos:

$$\left(A|B\right)=\left(\begin{array}{ccc|c}0&1&-1&1\\-1&0&1&5\end{array}\right)$$

que podemos escribir como ecuaciones así: $\begin{cases} y=1+z\\ -x=5-z\end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=1+z\\ x=-5+z\end{cases}$

Elegimos $z=t$ y tenemos que:

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{Las soluciones del sistema para } a=0 \text{ son: } (x,y,z)=(-5+t,1+t,t) \quad \text{con} \quad t\in\mathbb{R}}$

54.- Sea el sistema de ecuaciones: $\left.\begin{array}{l} x+ \quad y \quad =1 \\ (a-1)y+ \quad z=0 \\ x+ \quad ay+(a-1)z=a \end{array}\right\}$ siendo a un parámetro real. Calcula: a) Los valores de a para los que el sistema es compatible. b) Las soluciones del sistema cuando $a=1$. c) La solución del sistema cuando $a=0$.

a) Comenzamos discutiendo el sistema. El determinante de los coeficientes del sistema es:

$$|\mathrm{A}|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & a-1 & 1 \\ 1 & a & a-1 \end{vmatrix}=(a-1)^2+1+0-(0+0+a)=a^2-2a+1+1-a=a^2-3a+2$$

Si $|\mathrm{A}|=0 \quad \rightarrow \quad a^2-3a+2=0$

Resolvamos: $\Delta=(-3)^2-4\cdot 1\cdot 2=1$, $a=\dfrac{3\pm\sqrt{1}}{2\cdot 1}=\dfrac{3\pm 1}{2}=\begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases}$

El sistema es **compatible determinado** si $\boxed{a\neq 1\,,\,2}$ ya que existe A^{-1} ($|\mathrm{A}|\neq 0$) y $\operatorname{rang}(\mathrm{A})=3=n$.

Para el caso $\boxed{a=1}$ la matriz ampliada es:

$$(\mathrm{A}|\mathrm{B})=\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

A simple vista notamos que la fila 3 es idéntica a la fila 1 y no aporta información.

Si eliminamos la fila 3 tenemos:

$$(\mathrm{A}|\mathrm{B})=\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

El menor $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ tiene determinante $1-0=1$ que es distinto de cero.

Por lo tanto: $\operatorname{rang}(\mathrm{A})=\operatorname{rang}(\mathrm{A}|\mathrm{B})=2<n=3$

y el sistema es **compatible indeterminado**.

Para el caso $\boxed{a=2}$ la matriz ampliada es:

$$(\mathrm{A}|\mathrm{B})=\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

El menor de orden 2 de la esquina superior izquierda tiene como determinante: $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=1-0=1\neq 0$

Por lo tanto: $\operatorname{rang}(\mathrm{A})=2<n=3$ (ya sabemos que, si $a=2$, la matriz A no tiene rango 3)

Estudiemos el rango de la matriz ampliada.

Orlando el menor de orden 2 anterior, cuyo determinante es distinto de cero, tenemos:

$$(A|B)=\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{matrix}} & \begin{matrix}0\\1\end{matrix} & \begin{matrix}\mathbf{1}\\ \mathbf{0}\end{matrix} \\ \mathbf{1}\quad \mathbf{2} & 1 & \mathbf{2}\end{pmatrix}$$

su determinante es: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2+0+0-(1+0+0)=1$

Como es distinto de cero, el rango de la matriz ampliada es 3.

Así pues, en este caso, $\operatorname{rang}(A) \neq \operatorname{rang}(A|B)$ y el sistema es **incompatible**.

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{El sistema es compatible cuando } a \neq 2}$

b) Para $a=1$ el sistema, como discutimos antes, es compatible indeterminado.

Obtuvimos antes: $(A|B)=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$ que equivale a: $\begin{cases} x+y=1 \\ z=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=1-y \\ z=0 \end{cases}$

Elegimos $y=t$ con $t \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{La solución para } a=1 \text{ es: } (x,y,z)=(1-t,t,0) \quad t \in \mathbb{R}}$

c) Para $a=0$ el sistema es compatible determinado y lo resolvemos con la regla de Cramer.

El determinante de los coeficientes del sistema es: $|A| = a^2-3a+2\big|_{a=0} = 0^2-3\cdot 0+2=2$

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{2} = \frac{1}{2}\cdot[1+0+0-(0+0+0)] = \frac{1}{2}\cdot[+1] = \frac{1}{2}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{2} = \frac{1}{2}\cdot[0+1+0-(0+0+0)] = \frac{1}{2}\cdot[+1] = \frac{1}{2}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{2} = \frac{1}{2}\cdot[0+0+0-(-1+0+0)] = \frac{1}{2}\cdot[-(-1)] = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{La solución del sistema cuando } a=3 \text{ es: } (x,y,z)=(1/2,1/2,1/2)}$

Añado tres problemas más, no están sacados de las PAU pero son interesantes.

A.- Sea el sistema de ecuaciones: $\left.\begin{array}{r} x+2y=1 \\ 2x+a\,y=2 \\ a\,x+a\,y=a \end{array}\right\}$ siendo a un parámetro real.

Discute el sistema según los valores de a y resuelve cuando sea compatible.

La matriz de coeficientes del sistema es: $\mathrm{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & a \\ a & a \end{pmatrix}$

El menor $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & a \end{pmatrix}$ tiene determinante: $1\cdot a-2\cdot 2=a-4$ que se anula si $a=4$.

Pero, para $a=4$ el menor $\begin{pmatrix} 2 & a \\ a & a \end{pmatrix}$ tiene determinante: $\left(2\cdot a-a\cdot a\right)\Big|_{a=4}=2a-a^2\Big|_{a=4}=8-16=-8\neq 0$

Por lo tanto: $\operatorname{rang}(\mathrm{A})=2$ para cualquier valor de a.

La matriz ampliada es: $\left(\mathrm{A}\middle|\mathrm{B}\right)=\left(\begin{array}{cc:c} 1 & 2 & 1 \\ 2 & a & 2 \\ a & a & a \end{array}\right)$

Pero el determinante de esa matriz es cero, porque las columnas 1 y 3 son iguales.

Por lo tanto: $\operatorname{rang}(\mathrm{A}|\mathrm{B})=2$ (como la matriz A) para cualquier valor de a.

Así pues, $\operatorname{rang}(\mathrm{A})=\operatorname{rang}(\mathrm{A}|\mathrm{B})=2=n$ por lo que el sistema es compatible determinado.

Para resolverlo, podemos quedarnos con las dos primeras ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} x+2y=1 \\ 2x+a\,y=2 \end{array}\right\}\begin{array}{l} \text{multiplicamos por 2} \\ \text{la dejamos igual} \end{array}\;\rightarrow\;\left.\begin{array}{r} 2x+4y=2 \\ 2x+a\,y=2 \end{array}\right\}$$

Si restamos las dos ecuaciones: $(4-a)\,y=0$

Y como esto debe ser cierto para cualquier valor de a, tenemos que: $y=0$.

Sustituyendo en la primera ecuación: $x+2y=1\;\rightarrow\;x+2\cdot 0=1\;\Rightarrow\;x=1$.

(Si el sistema se resuelve con la regla de Cramer se llega, por supuesto, al mismo resultado).

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{La solución del sistema para cualquier valor de } a \text{ es: } (x,y)=(1,0)}$

B.- Sea el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} x+2y+az=0 \\ 2x+ay+\ \ z=0 \\ 3x-2y-\ \ z=0 \end{cases}$ siendo a un parámetro real.

Discute el sistema según los valores de a y resuelve cuando sea compatible.

Comenzamos discutiendo el sistema. El determinante de los coeficientes del sistema es:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ 2 & a & 1 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -a+6-4a-(3a^2-4-2) = -3a^2-5a+12$$

$$\text{Si } |A|=0 \ \rightarrow \ -3a^2-5a+12=0 \ \Rightarrow \ a=\begin{cases} -3 \\ 4/3 \end{cases}$$

El sistema es **compatible determinado** si $\boxed{a \neq -3\ ,\ 4/3}$ ya que existe A^{-1} ($|A| \neq 0$) y $\operatorname{rang}(A)=3=n$.

Como es un sistema homogéneo, la solución en este caso es: $x=y=z=0$.

Para el caso $\boxed{a=-3}$ la matriz ampliada solo añade una columna de ceros.

Puesto que el menor 2×2 de la esquina superior izquierda tiene determinante: $a-4\big|_{a=-3}=-7\neq 0$

tendremos que: $\operatorname{rang}(A)=\operatorname{rang}(A|B)=2<n=3$ y el sistema es **compatible indeterminado**.

Para el caso $\boxed{a=4/3}$ la matriz ampliada solo añade una columna de ceros.

Puesto que el menor 2×2 de la esquina superior izquierda tiene determinante: $a-4\big|_{a=4/3}=-8/3\neq 0$

tendremos que: $\operatorname{rang}(A)=\operatorname{rang}(A|B)=2<n=3$ y el sistema es **compatible indeterminado**.

Resolvemos los dos casos en los que el sistema es compatible indeterminado, con las ecuaciones 1 y 3:

$$\begin{cases} x+2y+az=0 \\ 3x-2y-\ \ z=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+2y=-az \\ 3x-2y=z \end{cases}$$

Sumando las dos ecuaciones: $4x=(1-a)z \ \rightarrow \ x=\dfrac{1-a}{4}z$

De la primera ecuación: $x+2y=-az \ \rightarrow \ 2y=-az-\dfrac{1-a}{4}z=\left(\dfrac{-1-3a}{4}\right)z \ \Rightarrow \ y=\left(\dfrac{-1-3a}{8}\right)z$

Sustituyendo cada uno de los valores de a y tomando $z=t$, tendremos:

Para el caso $\boxed{a=-3}$ la solución es: $(x,y,z)=(t,t,t)$ con $t\in\mathbb{R}$

Para el caso $\boxed{a=4/3}$ la solución es: $(x,y,z)=\left(-\dfrac{1}{12}t,-\dfrac{5}{8}t,t\right)$ con $t\in\mathbb{R}$

C.- Sea el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} ax - y + z = 4 \\ x + y + az = a \\ 3x + by + 3z = 6 \end{cases}$ siendo a y b parámetros reales.

Discute el sistema según los valores de a y b.

Comenzamos discutiendo el sistema. El determinante de los coeficientes del sistema es:

$$|A| = \begin{vmatrix} a & -1 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 3 & b & 3 \end{vmatrix} = 3a - 3a + b - (3 - 3 + a^2 b) = b - a^2 b = b(1 - a^2) = b(1+a)(1-a)$$

Si $|A| = 0 \;\rightarrow\; b(1+a)(1-a) = 0 \;\Rightarrow\; b = 0,\ a = \pm 1$

El sistema es **compatible determinado** si $\boxed{a \neq \pm 1 \text{ y } b \neq 0}$ pues $\exists A^{-1}$ ($|A| \neq 0$) y $\operatorname{rang}(A) = 3 = n$.

Para el caso $\boxed{b = 0}$ la matriz ampliada es: $(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} a & -1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & a & a \\ 3 & 0 & 3 & 6 \end{array}\right)$

El menor de orden 2×2 de la esquina inferior izquierda cumple: $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot 0 - 3 \cdot 1 = -3 \neq 0$

por lo que $\operatorname{rang}(A) = 2$ para cualquier valor de a.

Orlando ese menor tenemos: $(A|B) = \begin{pmatrix} a & -1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & a & a \\ 3 & 0 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ cuyo determinante es:

$$\begin{vmatrix} a & -1 & 4 \\ 1 & 1 & a \\ 3 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 6a - 3a + 0 - (12 - 6 + 0) = 3a - 6 = 3(a - 2)$$ que solo se anula si $a = 2$

Por lo tanto, si $\begin{cases} a = 2 \;\rightarrow\; \operatorname{rang}(A|B) = 2 = \operatorname{rang}(A) \;\Rightarrow\; \text{Sistema compatible indeterminado} \\ a \neq 2 \;\rightarrow\; \operatorname{rang}(A|B) = 3 \neq \operatorname{rang}(A) \;\Rightarrow\; \text{Sistema incompatible} \end{cases}$

En resumen: si $b = 0 \;\rightarrow\; \begin{cases} a = 2 \;\rightarrow\; \textbf{Sistema compatible indeterminado} \\ a \neq 2 \;\rightarrow\; \textbf{Sistema incompatible} \end{cases}$

(sigue en la siguiente página...)

Para el caso $\boxed{a=1}$ la matriz ampliada es: $(A|B)=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & b & 3 & 6 \end{array}\right)$

El menor de orden 2×2 de la esquina superior izquierda cumple: $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=1\cdot 1-(-1)\cdot 1=2\neq 0$

por lo que $\operatorname{rang}(A)=2$ para cualquier valor de b.

Orlando ese menor tenemos: $(A|B)=\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 1 & \mathbf{4} \\ 1 & \mathbf{1} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \mathbf{3} & \boldsymbol{b} \end{matrix} & \begin{matrix} 3 & \mathbf{6} \end{matrix} \end{pmatrix}$ cuyo determinante es:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & b & 6 \end{vmatrix}=6-3+4b-(12-6+b)=-3+3b=3(b-1) \quad \text{que solo se anula si } b=1$$

Por lo tanto, si $\begin{cases} b=1 \ \rightarrow \ \operatorname{rang}(A|B)=2=\operatorname{rang}(A) \ \Rightarrow \ \text{Sistema compatible indeterminado} \\ b\neq 1 \ \rightarrow \ \operatorname{rang}(A|B)=3\neq \operatorname{rang}(A) \ \Rightarrow \ \text{Sistema incompatible} \end{cases}$

En resumen: si $a=1 \ \rightarrow \begin{cases} b=1 \ \rightarrow \ \textbf{Sistema compatible indeterminado} \\ b\neq 1 \ \rightarrow \ \textbf{Sistema incompatible} \end{cases}$

Para el caso $\boxed{a=-1}$ la matriz ampliada es: $(A|B)=\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 3 & b & 3 & 6 \end{array}\right)$

Aquí, cambiando los signos de la primera fila tenemos: $(A|B)=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 3 & b & 3 & 6 \end{array}\right)$

y el **sistema es incompatible**, pues las dos primeras filas equivalen a: $\begin{cases} x+y-z=-4 \\ x+y-z=1 \end{cases}$

que no pueden satisfacerse al mismo tiempo.

La respuesta completa a este problema es:

Si $a\neq \pm 1$ y $b\neq 0$ **Sistema compatible determinado**
Si $b=0 \ \rightarrow \begin{cases} \text{si } a=2 \ \rightarrow \ \textbf{Sistema compatible indeterminado} \\ \text{si } a\neq 2 \ \rightarrow \ \textbf{Sistema incompatible} \end{cases}$
Si $a=1 \ \rightarrow \begin{cases} \text{si } b=1 \ \rightarrow \ \textbf{Sistema compatible indeterminado} \\ \text{si } b\neq 1 \ \rightarrow \ \textbf{Sistema incompatible} \end{cases}$
Si $a=-1 \ \rightarrow$ **Sistema incompatible**

1.- 94-J.B4 Pon 3 ejemplos de sistemas de 3 ecuaciones con 2 incógnitas que sean compatible determinado, compatible indeterminado e incompatible. Interpreta geométricamente cada uno.

2.- 94-E.B4 Representa en la forma matricial $A \cdot X = B$ el sistema de ecuaciones: y construye y resuelve a continuación el sistema de ecuaciones representado por $A^2 \cdot X = B$

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 2 \\ 2x - 2y = -4 \end{array}\right\}$$

3.- 95-J.A4 Encuentra el conjunto de soluciones del sistema:

Interpreta geométricamente el resultado.

$$\left.\begin{array}{r} x + y - 3z = 0 \\ 2x + 6y + 2z = 0 \\ x + 13y + 21z = 2 \end{array}\right\}$$

4.- 95-E.A4 Resuelve el sistema sólo en el caso en el que el sistema tenga infinitas soluciones. En ese caso interpreta geométricamente el significado de cada ecuación y del sistema.

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z = 7 \\ -x + 2y + z = 5 \\ 2x - y + az = 2 \end{array}\right\}$$

5.- 96-J.B4 Dado el sistema de ecuaciones, determina:

a) El valor de m para que el sistema tenga soluciones.
Para ese valor de m calcula todas las soluciones del sistema.

b) Los valores de m para los que el sistema carece de solución.

$$\left.\begin{array}{r} x + y + 2z = 3 \\ x + 2y + 3z = 5 \\ x + 3y + mz = 7 \end{array}\right\}$$

6.- 96-E.B4 Resuelve el sistema. Sea S el conjunto de soluciones obtenido, y sea:
S1 es el conjunto de soluciones de: x + y + z = 2.
S2 es el conjunto de soluciones de: 2x + z = 2
S3 es el conjunto de soluciones de: 4x + 2z = 4

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z = 2 \\ 2x + z = 2 \\ 4x + 2z = 4 \end{array}\right\}$$

Razona cuales de las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas:

a) S1 ∩ S2 ⊂ S3
b) S2 = S3
c) S2 ∩ S3 ⊂ S
d) S1 ∩ S3 = S

7.- 97-J.A4 Estudia, según los valores del parámetro λ, el sistema de ecuaciones:

Resuélvelo en los casos en que sea compatible.

$$\left.\begin{array}{r} \lambda x + y = 1 \\ \lambda x + z = 1 \\ \lambda x + 2y + z = 1 \end{array}\right\}$$

8.- 97-J.B4 Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:

Encuentra la relación entre las soluciones obtenidas y la matriz inversa de la matriz de los coeficientes: $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

$$\left.\begin{array}{r} 2x + 3y = 1 \\ x - y = 0 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r} 2x + 3y = 0 \\ x - y = 1 \end{array}\right\}$$

9.- 97-E.A4 Resuelve los sistemas y encuentra la relación entre las soluciones anteriores y las soluciones del sistema $\left.\begin{array}{r} 2x + y = a \\ x - y = b \end{array}\right\}$ justificando la relación obtenida, bien por matrices o por otro método.

$$\left.\begin{array}{r} 2x + y = 1 \\ x - y = 0 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r} 2x + y = 0 \\ x - y = 1 \end{array}\right\}$$

10.- 97-E.B4 Estudia, según los valores del parámetro λ, el sistema de ecuaciones:

No es necesario resolver el sistema para ningún valor de λ.

$$\left.\begin{array}{r} x - y + \lambda z = \lambda \\ x + \lambda y - z = \lambda \\ y + \lambda z = \lambda \end{array}\right\}$$

11.- 98-J.A4 Resuelve el sistema y justifica si tiene o no las mismas soluciones que el sistema: $\left.\begin{array}{r} x + y + z = 3 \\ 2x - y = 1 \end{array}\right\}$.

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z = 3 \\ 2x - y = 1 \\ -x + 2y + z = 2 \end{array}\right\}$$

12.- 98-E.A4 Calcula el valor de *a* para que el sistema tenga soluciones distintas de (0,0,0), y en este caso halla todas las soluciones del sistema, interpretando el resultado obtenido como una intersección de planos.

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=0 \\ 2x+y+3z=0 \\ x+az=0 \end{array}\right\}$$

13.- 98-E.B4 Calcula el producto de matrices: $\begin{pmatrix} -3 & -6 & 4 \\ 9/2 & 8 & -11/2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 7 & 6 & 6 \end{pmatrix}$

$$\left.\begin{array}{r} 5x+4y+2z=2 \\ 2x+2y+3z=3 \\ 7x+6y+6z=5 \end{array}\right\}$$

y utiliza el producto anterior para obtener la solución del sistema.

14.- 99-J.A1 Calcula el valor de *m* para el que el sistema tiene infinitas soluciones, y obtén todas esas soluciones.

Calcula razonadamente que no hay valores de *m* para los que el sistema no tenga solución.

$$\left.\begin{array}{r} x+2y+z=3 \\ x+3y+2z=5 \\ x+my+3z=7 \end{array}\right\}$$

15.- 99-E.A4 Representa matricialmente los sistemas, resuélvelos y averigua si existe alguna relación entre las soluciones obtenidas y la inversa de la matriz $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 11 & 4 \end{pmatrix}$. Justifica la relación obtenida.

$$\left.\begin{array}{r} 3x+y=1 \\ 11x+4y=0 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r} 3x+y=0 \\ 11x+4y=1 \end{array}\right\}$$

16.- 99-E.B2 Calcula el valor de λ para el que admite infinitas soluciones el sistema:

Calcula todas las soluciones e interpreta geométricamente el resultado obtenido, recordando que cada ecuación representa un plano.

$$\left.\begin{array}{r} x+y+2z=3 \\ x+2y+\lambda z=5 \\ 2x+y-3z=4 \end{array}\right\}$$

17.- 00-J.B2 Averigua para qué valores de *k* tiene una única solución el sistema: y obtén para qué valores de *k* el sistema tiene infinitas soluciones.

Da el significado geométrico de que el sistema tenga infinitas soluciones, recordando que cada ecuación representa un plano.

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=1 \\ x+2y+3z=3 \\ 3x+4y+kz=k \end{array}\right\}$$

18.- 00-E.A1 Calcula el valor de λ para el que tiene infinitas soluciones el sistema:

Obtén todas las soluciones para el valor de λ e interpreta geométricamente por qué el sistema tiene infinitas soluciones.

$$\left.\begin{array}{r} x+y-z=0 \\ 2x+y+z=0 \\ \lambda x+y=0 \end{array}\right\}$$

19.- 00-E.B2 Obtén en función de λ las soluciones del sistema:

Explica la relación entre el conjunto de soluciones obtenidas y la intersección de los planos $\alpha: x-3y=-2$ y $\beta: -x+3z=2$

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=3+\lambda \\ x-3y=-2 \\ -x+3z=2 \end{array}\right\}$$

20.- 01-E.A4 Prueba que para un valor real de *m*, el sistema dado es indeterminado:

Para ese valor de *m* encuentra todas las soluciones del sistema.

Interpreta geométricamente el significado del sistema.

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=1 \\ x+2y+3z=4 \\ 3x+5y+mz=9 \end{array}\right\}$$

21.- 01-E.B1 Dado el sistema:

Obtén para qué valores reales de *m* tiene una única solución y calcúlala para cada uno de esos valores de *m*.

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=2 \\ x+2y+z=3 \\ 3x+5y+mz=8 \end{array}\right\}$$

22.- 02-J.A1 Para cada terna de números reales (*x*, *y*, *z*) se consideran las matrices:

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 5 \end{pmatrix} \text{ y } \mathrm{B}=\begin{pmatrix} 2 & x & 1 \\ 1 & y & -1 \\ 2 & z & -1 \end{pmatrix}$$

i) Calcula los determinantes de las matrices A y B.
ii) Para $x = y = z = 1$, calcula el determinante de la matriz producto A·B.
iii) Obtén, razonadamente, para qué valores de *x*, *y*, *z* no tienen inversa ni A ni B.

23.- Dado el sistema de ecuaciones lineales, dependiente de λ, se pide:

02-E.B1

$$\left.\begin{aligned} x+\ y+\ \ z&=\lambda \\ 2x+3y+\ 5z&=2 \\ 3x+5y+\lambda^2 z&=1 \end{aligned}\right\}$$

i) Discute el sistema según los valores de λ.
ii) El conjunto S de soluciones para el caso compatible indeterminado.
iii) Obtén el vector de S ortogonal (perpendicular) al vector (1, 1, 2).

24.- Dado el sistema de ecuaciones, dependiente del parámetro λ, se pide:

03-J.A1

$$\left.\begin{aligned} \lambda x\qquad +2z&=0 \\ \lambda y-\ \ z&=\lambda \\ x+3y+\ \ z&=5 \end{aligned}\right\}$$

a) Determina para qué valores de λ el sistema es compatible determinado, compatible indeterminado e incompatible.
b) Obtén las soluciones en los casos en que sea compatible.

25.- Dado el sistema de ecuaciones lineales, dependiente de λ, se pide:

04-J.A1

$$\left.\begin{aligned} x-\ y+\ \ z&=\lambda \\ \lambda x+2y-\ \ z&=3\lambda \\ 2x+\lambda y-2z&=6 \end{aligned}\right\}$$

a) Discute el sistema según los valores de λ.
b) Halla las soluciones para el caso compatible determinado.
c) Halla las soluciones para el caso compatible indeterminado.

26.- Obtén todos los valores reales *x*, *y*, *z*, *t* para los que se verifica A·X = X·A, siendo:

04-E.A1

$$\mathrm{X}=\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \text{ y } \mathrm{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

27.-

04-E.B1 Para las matrices reales siguientes: $\mathrm{A}=\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 3 & -5 & 6 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ e $\mathrm{I}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Justifica que existe la matriz A^{-1}, inversa de A, y calcular el determinante de A^{-1}.
b) Calcula la matriz $\mathrm{B}=\mathrm{A}(\mathrm{A}+4\mathrm{I})$.
c) Determina los números *x*, *y*, *z*, *t* que cumplen: $\mathrm{A}^{-1}=x\mathrm{A}+y\mathrm{I}$, $\mathrm{A}^2=z\mathrm{A}+t\mathrm{I}$.

28.- El sistema de ecuaciones lineales depende del parámetro real α:

05-J.B1

$$\left.\begin{aligned} x+\alpha\ y+\alpha^2 z&=1 \\ x+\alpha\ y+\alpha\ z&=\alpha \\ x+\alpha^2 y+\alpha^2 z&=\alpha^2 \end{aligned}\right\}$$

Discute para qué valores de α es incompatible, compatible determinado e indeterminado, y resuelve en los casos compatibles.

29.-

05-E.A1 Dadas las matrices: $\mathrm{A}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\mathrm{B}=\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\mathrm{C}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathrm{D}=\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\mathrm{E}=\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\mathrm{X}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Calcula razonadamente la matriz X que satisface la ecuación: $(\mathrm{A}\mathrm{B}^{\mathrm{T}}+\mathrm{C})\mathrm{X}=(\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{D})\mathrm{E}$.

30.- En el mercado podemos encontrar tres alimentos preparados para gatos que se fabrican
05-E.B1 poniendo, por kilo, las siguientes cantidades de carne, pescado y verdura:

- Alimento *Migato*: 600 g de carne, 300 g de pescado y 100 g de verdura.
- Alimento *Catomeal*: 300 g de carne, 400 g de pescado y 300 g de verdura.
- Alimento *Comecat*: 200 g de carne, 600 g de pescado y 200 g de verdura.

Si queremos ofrecer a nuestro gato 470 g de carne, 370 g de pescado y 160 g de verdura por kilo de alimento, ¿Qué porcentaje de cada compuesto hemos de mezclar para conseguirlo?

31.- Dado el sistema de ecuaciones con incógnitas *x*, *y*, *z* :

06-J.A1

$$\left.\begin{aligned} x+2y-\ 3z&=\alpha \\ 2x+6y-11z&=2 \\ x-2y+\ 7z&=1 \end{aligned}\right\}$$

a) Determina el valor de α para el que el sistema es compatible.
b) Para el valor obtenido de α en el apartado (a) calcula las soluciones del sistema.
c) Explica la posición relativa de los tres planos definidos por cada una de las ecuaciones del sistema, en función de los valores de α.

32.- Dado el sistema de ecuaciones con incógnitas x, y, z y parámetro λ:

$$\left.\begin{aligned}(\lambda+2)\,x-y+z=0\\3x+(\lambda+6)\,y-3z=0\\5x+5y+(\lambda-2)\,z=0\end{aligned}\right\}$$

06-E.A1
a) Calcula para qué valores de λ el sistema sólo admite la solución $(x, y, z) = (0, 0, 0)$
b) Para cada valor de λ que hace indeterminado el sistema, obtén todas sus soluciones.
c) Explica la posición relativa de los tres planos definidos por cada una de las ecuaciones del sistema cuando $\lambda = -3$.

33.- Dado el sistema de ecuaciones lineales, se pide:

$$\left.\begin{aligned}x+\alpha y+z=9\\3x+5y+z=9\\\alpha x+\ \ y+z=9\end{aligned}\right\}$$

07-J.1-2
a) Prueba que es siempre compatible, obteniendo los valores de α para los que es indeterminado.
b) Resuelve el sistema anterior para $\alpha = 7$.

34.- Dado el sistema de ecuaciones lineales, se pide:

$$\left.\begin{aligned}6x+3y+2z=5\\3x+4y+6z=3\\x+3y+2z=\alpha\end{aligned}\right\}$$

07-E.1-1
a) Justifica que para cualquier valor del parámetro real α, el sistema tiene solución única.
b) Halla la solución del sistema en función del parámetro α.
c) Determina α para el que la solución satisface $x+y+z=1$.

35.- Dado el sistema dependiente del parámetro α, se pide:

$$\left.\begin{aligned}\alpha x+y+z=1\\x+\alpha y+z=1\\x+y+\alpha z=1\end{aligned}\right\}$$

08-J.1-1
a) Determina, razonadamente, los valores de α que hacen al sistema compatible determinado, compatible indeterminado e incompatible.
b) Resuelve el sistema cuando es compatible determinado.
c) Obtén, razonadamente, la solución del sistema cuando $\alpha = 0$.

36.- Dado el sistema de ecuaciones lineales, se pide:

$$\left.\begin{aligned}x+y+z=\alpha+3\\2x-y+z=\alpha+1\\3x+\alpha y+2z=4\end{aligned}\right\}$$

08-E.1-1
a) Prueba que es compatible para todo valor de α.
b) Obtén el valor α para el que el sistema es indeterminado.
c) Resuelve el sistema, con los cálculos necesarios, si $\alpha = 0$.

37.- Dado el sistema de ecuaciones lineales, se pide:

$$\left.\begin{aligned}(\alpha+3)\,x-4y-2z=4\\x-2y-(\alpha+2)\,z=2\\2x+(\alpha-3)\,y-2z=4\end{aligned}\right\}$$

09-J.1-2
a) Justifica que para el valor $\alpha = 0$ el sistema es incompatible.
b) Determina los valores de α para los que el sistema es compatible y determinado.
c) Resuelve el sistema para el valor del parámetro α para el cual es compatible indeterminado.

38.- Dado el sistema de ecuaciones lineales, se pide:

$$\left.\begin{aligned}x+y+z=0\\2x+3y+4z=0\\5x+7y+\alpha z=0\end{aligned}\right\}$$

09-E.1-2
a) Deduce, razonadamente, para qué valores de α el sistema sólo admite la solución $(x, y, z) = (0, 0, 0)$.
b) Resuelve el sistema para el valor de α que lo hace indeterminado.

39.- Dado el sistema de ecuaciones lineales con parámetros a, b, c, se pide:

$$\left.\begin{aligned}2ax+by+z=3c\\3x-2by-2cz=a\\5ax-2y+cz=-4b\end{aligned}\right\}$$

10-J.B1
a) Justifica razonadamente que para los valores de los parámetros $a = 0$, $b = -1$ y $c = 2$, el sistema es incompatible.
b) Determina razonadamente los valores de los parámetros a, b y c, para los que $(x, y, z) = (3, 2, 1)$ es solución del sistema.
c) Justifica si esa solución $(x, y, z) = (3, 2, 1)$ es, o no, única.

40.- Dado el sistema de ecuaciones lineales con el parámetro α, se pide:

$$\left.\begin{aligned}\alpha x+\alpha^3 y+z=1\\\alpha x+\alpha y+z=1\\\alpha^3 x+\alpha y+z=1\end{aligned}\right\}$$

10-E.A1
a) Deduce para qué valores de α es compatible determinado.
b) Deduce para qué valores de α es compatible indeterminado.
c) Resuelve el sistema en los casos en que es compatible indeterminado.

41.- Sea el sistema de ecuaciones con el parámetro *m*, calcula:

$$\left.\begin{aligned} x+y+z&=m \\ 2x+z&=2m+1 \\ x+3y+(m-2)z&=m-1 \end{aligned}\right\}$$

11-J.A1

a) Todas las soluciones del sistema cuando *m* = 2.
b) Todos los valores de *m* para los que tiene solución única.
c) El valor de *m* para el que el sistema admite la solución $(x,y,z)=(3/2,-1/2,0)$.

42.- Se da el sistema de ecuaciones con el parámetro α, calcula:

$$\left.\begin{aligned} 2x+\alpha^2 z&=5 \\ x+(1-\alpha)y+z&=1 \\ x+2y+\alpha^2 z&=1 \end{aligned}\right\}$$

12-J.A1

a) La solución del sistema cuando α = 0.
b) Todas las soluciones del sistema cuando α = –1.
c) El valor de α para el que el sistema es incompatible.

43.- Se da el sistema de ecuaciones con el parámetro α, calcula:

$$\left.\begin{aligned} x-2y-3z&=0 \\ 3x+10y-z&=0 \\ x+14y+\alpha z&=0 \end{aligned}\right\}$$

12-E.A1

a) La solución del sistema cuando α = 0.
b) El valor de α para el que el sistema tiene infinitas soluciones.
c) Todas las soluciones del sistema si α tiene el valor obtenido en (b).

44.- Se tiene el sistema, donde *a*, *b* y *c* son números reales, calcula:

$$\left.\begin{aligned} 2x+5y&=a \\ -x-4y&=b \\ 2x+y&=c \end{aligned}\right\}$$

13-J.A1

a) La relación que deben verificar los números *a*, *b* y *c* para que el sistema sea compatible.
b) La solución del sistema cuando *a* = –1, *b* = 2 y *c* = 3.
c) La solución del sistema cuando se verifica la relación *a* = *c* = −2*b*.

45.- Se da el sistema de ecuaciones con el parámetro real α, calcula:

$$\left.\begin{aligned} \alpha x+y+z&=1 \\ x+\alpha y+z&=1 \\ 3x+5y+z&=1 \end{aligned}\right\}$$

13-E.B1

a) Todas las soluciones del sistema cuando α = 7.
b) Los valores de α que hacen al sistema compatible indeterminado.
c) Los valores de α que hacen al sistema compatible determinado.

46.- Dado el sistema de ecuaciones donde *k* es un parámetro real, calcula:

$$\left.\begin{aligned} x+3y+2z&=-1 \\ 2x+4y+5z&=k-2 \\ x+k^2 y+3z&=2k \end{aligned}\right\}$$

14-J.A1

a) Discutir razonadamente el sistema según los valores de *k*.
b) Obtener razonadamente todas las soluciones del sistema si *k* = −1.
c) Resolver razonadamente el sistema cuando *k* = 0.

47.- Se tiene el sistema de ecuaciones con el parámetro α, calcula:

$$\left.\begin{aligned} (1-\alpha)x+2y+z&=4 \\ x+y-2z&=-4 \\ x+4y-(\alpha+1)z&=-2\alpha \end{aligned}\right\}$$

14-E.B1

a) Los valores de α para los que el sistema es incompatible.
b) Los valores de α que hacen al sistema compatible determinado.
c) Todas las soluciones del sistema cuando α = 2.

48.- Dado el sistema de ecuaciones con parámetro α, calcula:

$$\left.\begin{aligned} (1-\alpha)x+(2\alpha+1)y+(2\alpha+2)z&=\alpha \\ \alpha x+\alpha y&=2\alpha+2 \\ 2x+(\alpha+1)y+(\alpha-1)z&=\alpha^2-2\alpha+9 \end{aligned}\right\}$$

15-J.B1

a) Todas las soluciones del sistema cuando $\alpha = 1$.
b) Si el sistema es compatible o incompatible si $\alpha = 2$.
c) Los valores de α para ser compatible determinado.

49.- Se da el sistema de ecuaciones, donde α es un parámetro real, calcula:

$$\left.\begin{aligned} x+3y+z&=\alpha \\ x+y-\alpha z&=1 \\ 2x+\alpha y-z&=2\alpha+3 \end{aligned}\right\}$$

15-E.A1

a) La solución del sistema cuando $\alpha = -1$.
b) Todas las soluciones del sistema cuando $\alpha = 0$.
c) El valor de α para el que el sistema es incompatible.

50.- Se da el sistema de ecuaciones, donde *a* es un parámetro real, calcula:

$$\left.\begin{aligned} ax-z&=a \\ 2x+ay+z&=1 \\ 2x+z&=2 \end{aligned}\right\}$$

16-J.A1

a) Los valores de *a* para los cuales el sistema es incompatible.
b) Las soluciones del sistema cuando sea compatible indeterminado.
c) La solución del sistema cuando *a* = −1.

51.- Se da el sistema, donde α es un parámetro real, calcula:

$$\left.\begin{aligned} x+\ \ y+2z&=\ \ 2 \\ -3x+2y+3z&=-2 \\ 2x+\alpha y-5z&=-4 \end{aligned}\right\}$$

16-E.A1
a) La solución del sistema cuando $\alpha = 0$.
b) El valor del parámetro α para el que el sistema es incompatible.
c) Los valores del parámetro α para los que el sistema es compatible y determinado y obtener la solución en función del parámetro α.

52.- Se da el sistema, dependiente del parámetro real *a*, calcula:

$$\left.\begin{aligned} -x+ay+2z&=a \\ 2x+ay-\ \ z&=2 \\ ax-\ \ y+2z&=a \end{aligned}\right\}$$

17-J.A1
a) La solución del sistema cuando $a = 2$.
b) Los valores de *a* para los que el sistema es compatible determinado.
c) El valor del parámetro *a* para el que el sistema es compatible e indeterminado y obtener todas las soluciones para ese valor de *a*.

53.- Se da el sistema, dependiente del parámetro real *a*, calcula:

$$\left.\begin{aligned} y-z&=1-a \\ -x\qquad+z&=5 \\ -ax+y-z&=1 \end{aligned}\right\}$$

18-J.A1
a) Los valores de *a* para los que el sistema es compatible determinado.
b) Las soluciones del sistema cuando $a = 3$.
c) Las soluciones del sistema para los valores de *a* que lo hacen compatible indeterminado.

54.- Dado el sistema de ecuaciones con parámetro real *a*, calcula:

$$\left.\begin{aligned} x+\qquad y\qquad\qquad&=1 \\ (a-1)y+\qquad z&=0 \\ x+\quad ay+(a-1)z&=a \end{aligned}\right\}$$

18-E.A1
a) Los valores de *a* para los que el sistema es compatible.
b) Las soluciones del sistema cuando $a = 1$.
c) La solución del sistema cuando $a = 0$.

55.- Se tiene el sistema de ecuaciones con parámetro real α, calcula:

$$\left.\begin{aligned} x+\ \ y+\ \ z&=4 \\ 3x+4y+\ 5z&=5 \\ 7x+9y+11z&=\alpha \end{aligned}\right\}$$

19-J.B1
a) Los valores de α para los que el sistema es compatible o incompatible.
b) Las soluciones del sistema cuando el sistema sea compatible.
c) La discusión del sistema cuando se cambia el coeficiente 11 por otro.

56.- Dado el sistema de ecuaciones con parámetro real α, calcula:

$$\left.\begin{aligned} 2x\qquad+3z&=\alpha \\ x-2y+2z&=5 \\ 3x-\ \ y+5z&=\alpha+1 \end{aligned}\right\}$$

19-E.A1
a) Los valores de α para los que el sistema es compatible determinado.
b) Las soluciones del sistema cuando $\alpha=-1$.
c) El valor de α para que el sistema tenga una solución (x, y, z) que cumpla que $x+y+z=0$.

57.- Dado el sistema de ecuaciones con parámetro real *a*, calcula:

$$\left.\begin{aligned} x+y+a\,z&=1 \\ x+a\,y+z&=1 \\ a\,x+y+z&=-2 \end{aligned}\right\}$$

20-J.1
a) El estudio del sistema en función del parámetro *a*.
b) Las soluciones del sistema cuando $a=-2$.
c) La solución del sistema cuando $a=0$.

58.- Dado el sistema de ecuaciones con parámetro real *a*, calcula:

$$\left.\begin{aligned} x+a\,y+2z&=3 \\ x-3y+a\,z&=-2 \\ x+\ \ y+2z&=a \end{aligned}\right\}$$

20-E.1
a) Los valores de *a* para los cuales el sistema es compatible.
b) La solución del sistema cuando $a=0$.
c) Las soluciones del sistema cuando sea compatible indeterminado.

59.- Dado el sistema de ecuaciones con parámetro real *a*, calcula:

$$\left.\begin{aligned} x+y+(a+1)z&=2 \\ x+(a-1)y+2\,z&=1 \\ 2x+ay+z&=-1 \end{aligned}\right\}$$

21-J.1
a) Estúdialo en función del parámetro *a*.
b) Encuentra las soluciones cuando el sistema sea compatible.

60.- Dado el sistema de ecuaciones con parámetro real *m*, calcula:

$$\left.\begin{aligned} 2x-y+z&=m \\ x+y+3\,z&=0 \\ 5x-4y+mz&=m \end{aligned}\right\}$$

21-E.1
a) Discute el sistema según los posibles valores de *m*.
b) La solución del sistema cuando $m=1$.
c) Las soluciones del sistema cuando sea compatible indeterminado.

61.- Dado el sistema de ecuaciones con parámetro real a, calcula:

22-E.1

$$\left.\begin{array}{l} a\,x + y = 1 \\ x + z = 1 \\ x + a\,y + (a-1)z = a \end{array}\right\}$$

a) Discute el sistema en función del parámetro real a.
b) Todas las soluciones del sistema cuando este sea compatible.

Algunos problemas (42) que he puesto en todo tipo de exámenes.

[Son de dificultad diversa, algunos son de exámenes estándar o de voluntarios, otros de suficiencias]

1. Sea la matriz $A(k)=\begin{pmatrix}1 & 2 & k-2\\ 4 & 3 & 2\\ k & k & -6\end{pmatrix}$ siendo *k* un parámetro real.

a) Calcula para qué valores de *k* existe la inversa de la matriz $A(k)$.

b) Calcula para qué valores de *k* el determinante de la matriz inversa de $A(k)$ es igual a $\dfrac{1}{46}$.

1-a) La matriz inversa existirá siempre que el determinante de la matriz original sea distinto de cero.

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 2 & k-2\\ 4 & 3 & 2\\ k & k & -6\end{vmatrix}=\ldots\{1^a \text{ fila} \leftarrow 1^a+2^a\}\ldots=\begin{vmatrix}5 & 5 & k\\ 4 & 3 & 2\\ k & k & -6\end{vmatrix}=\ldots\{1^a \text{ col} \leftarrow 1^a-2^a\}\ldots=\begin{vmatrix}0 & 5 & k\\ 1 & 3 & 2\\ 0 & k & -6\end{vmatrix}=$$

$$=(-1)\begin{vmatrix}5 & k\\ k & -6\end{vmatrix}=(-1)(-30-k^2)=30+k^2$$

Así pues, si $|A|=0 \rightarrow 30+k^2=0$

Esta ecuación no tiene solución real, por lo que el determinante no se anula en ningún caso y la matriz inversa existirá para cualquier valor real del parámetro *k*.

▸ **La matriz inversa de A(*k*) existe para cualquier valor real de *k*.**

1-b) Puesto que la matriz inversa de A cumple que $A^{-1}\cdot A=I$, tomando determinantes en ambos miembros se tiene que: $\det\left(A^{-1}\right)\cdot\det\left(A\right)=1 \rightarrow \det\left(A^{-1}\right)=\dfrac{1}{\det\left(A\right)}$.

Por lo tanto, en nuestro problema tenemos que: $\left|A(k)^{-1}\right|=\dfrac{1}{|A(k)|}=\dfrac{1}{30+k^2}$.

El resultado será $\dfrac{1}{46}$ si $30+k^2=46 \rightarrow k^2=16 \Rightarrow k=\pm 4$

▸ **El determinante de la matriz inversa de A(*k*) es 1/46 si k es +4 o –4.**

2. Sea el sistema $\begin{cases} 2x - y + 3z = a \\ x + 2y + kz = 4 \\ x - 3y + z = 3 \end{cases}$

a) Discute el sistema para los diferentes valores de los parámetros *a* y *k*.

b) Resuélvelo para el caso en el que sea compatible e indeterminado.

2-a) El determinante de la matriz de los coeficientes del sistema es:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & k \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 4 - k - 9 - (6 - 6k - 1) = -5 - k - 5 + 6k = 5k - 10$$

Este determinante solo se anula si: $5k - 10 = 0 \rightarrow k = 2$

Así pues, si $k \neq 2$ el sistema es compatible y determinado.

- Si k es 2, vamos a estudiar la matriz ampliada. Puesto que el menor de orden 2 de la esquina superior izquierda tiene determinante no nulo el rango de la matriz de coeficientes es 2 y el de la ampliada es como mínimo 2.

  Si orlamos ese menor de orden 2, su determinante es:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & a \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & -3 & 3 \end{vmatrix} = 12 - 4 - 3a - (2a - 24 - 3) = 8 - 3a - 2a + 27 = 35 - 5a$$

  que solo se anula si $35 - 5a = 0 \rightarrow a = 7$.

  Para este valor la matriz ampliada tiene rango 2 igual al rango de la matriz de coeficientes, por lo que el sistema es compatible e indeterminado. Si $a \neq 7$ el sistema será incompatible.

- **Si *k* es distinto de 2 el sistema es compatible determinado. Si *k* es 2 hay dos posibilidades: si *a* es 7 es sistema es compatible e indeterminado, si *a* es distinto de 7 es incompatible.**

2-b) El sistema es compatible e indeterminado si k es 2 y a es 7. En este caso, el sistema tiene rango 2 y podemos eliminar una ecuación. Nos quedamos con las dos últimas, que son independientes.

$$\left.\begin{array}{l} x + 2y = 4 - 2z \\ x - 3y = 3 - z \end{array}\right\} \text{ Restándolas: } 5y = 1 - z \rightarrow y = \frac{1 - z}{5}.$$

Sustituyendo en la segunda: $x = 3y + 3 - z = 3\frac{1 - z}{5} + 3 - z = \frac{3 - 3z + 15 - 5z}{5} = \frac{18 - 8z}{5}$

- **Si *k* es 2 y *a* es 7, la solución es: $\mathbf{x = 1/5\ (18 - 8z)\ ,\ y = 1/5\ (1 - z)\ ;\ z \in \mathbb{R}}$.**

3.- Dadas las matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ a & -3 & a-1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -4 \\ 5 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ y la ecuación matricial: $X \cdot A = B$

a) ¿Para qué valores del parámetro *a* tiene la ecuación una solución única?

b) Encuentra la matriz X que cumple la ecuación cuando $a = 3$.

3-a) La ecuación matricial es equivalente a un sistema de ecuaciones.
La ecuación tiene solución única si ese sistema de ecuaciones es compatible y determinado.
Para que lo sea debe existir la matriz inversa de A, es decir, A debe tener determinante no nulo.

$$|A| = -3 + (a-1) + 0 - [3 + 0 - a] = 2a - 7$$

$$\text{y si } |A| = 0 \;\rightarrow\; 2a - 7 = 0, \quad a = 7/2 .$$

▸ **La ecuación tiene solución única si $a = 7/2$.**

3-b) Si $a = 3$, al ser distinto de 7/2, $|A| \neq 0$ y existe A^{-1}.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad |A| = -3 + 2 + 0 - (3 + 0 - 3) = -1, \quad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -1 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(A^T)_{adj} = \begin{bmatrix} -3 & -(-1) & 1 \\ -(+5) & 2 & -(-1) \\ -3 & -(-1) & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot (A^T)_{adj} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 5 & -2 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Transformamos la ecuación:

$$\begin{array}{lll} X \cdot A & = B & \text{multiplicamos por } A^{-1} \text{ por la derecha en ambos miembros} \\ X \cdot A \cdot A^{-1} & = B \cdot A^{-1} & \\ X \cdot \quad I & = B \cdot A^{-1} & \text{hemos usado que } A \cdot A^{-1} \text{ es I} \\ X & = B \cdot A^{-1} & \end{array}$$

Y tenemos:

$$X = B \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & -2 & -4 \\ 5 & -2 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 5 & -2 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -31 & 11 & 5 \\ 20 & -6 & -3 \end{bmatrix}$$

▸ **X =** $\begin{bmatrix} \mathbf{-31} & \mathbf{11} & \mathbf{5} \\ \mathbf{20} & \mathbf{-6} & \mathbf{-3} \end{bmatrix}$

4.- Sabemos que la matriz $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\a&b&c\\x&y&z\end{pmatrix}$ tiene su determinante igual a 6. Calcula:

a) $\begin{vmatrix}a&b&c\\-5&-5&-5\\\dfrac{2x+3a}{10}&\dfrac{2y+3b}{10}&\dfrac{2z+3c}{10}\end{vmatrix}$

b) $|A^3|+|2A^T\cdot A^{-1}|$

4-a) Sacamos factor común a (-5) en la 2ª fila, y a $1/10$ en la 3ª fila.
Esos factores salen multiplicando.
Intercambiamos la 1ª y la 2ª fila, lo que añade un factor (-1).

El determinante buscado es ahora:

$$(-1)(-5)\frac{1}{10}\cdot\begin{vmatrix}1&1&1\\a&b&c\\2x+3a&2y+3b&2z+3c\end{vmatrix}$$

El determinante que queda no cambia si a la 3ª fila le restamos 3 veces la 2ª fila.

$$(-1)(-5)\frac{1}{10}\cdot\begin{vmatrix}1&1&1\\a&b&c\\2x&2y&2z\end{vmatrix}$$

Y si después sacamos un factor común 2 de la 3ª fila, nos quedará:

$$(-1)(-5)\frac{1}{10}\cdot2\cdot\begin{vmatrix}1&1&1\\a&b&c\\x&y&z\end{vmatrix}=(-1)(-5)\frac{1}{10}\cdot2\cdot6=6$$

▸ **El determinante buscado vale 6**.

4-b) Usamos las propiedades de los determinantes:

$$|A^3|=|A|^3=6^3=216.$$

$$|2\cdot A^T\cdot A^{-1}|=\ldots$$

[A es de orden 3: el factor 2 en el determinante produce 2^3]

$$\ldots=2^3\cdot|A^T\cdot A^{-1}|=2^3\cdot|A^T|\cdot|A^{-1}|=\ldots$$

[$|A^T|=|A|$, $|A^{-1}|=1/|A|$]

$$\ldots=2^3\cdot|A|\cdot1/|A|=2^3=8.$$

▸ $\mathbf{|A^3|+|2\cdot A^T\cdot A^{-1}|=216+8=224}$.

5.- Tenemos el sistema de ecuaciones lineales: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -4 & -1 & -5 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \\ m \\ m \end{pmatrix}$. Calcula:

a) La solución o soluciones, si las tiene, cuando $m=0$.

b) La solución o soluciones, si las tiene, cuando $m=1$.

La matriz de los coeficientes del sistema tiene determinante nulo,
pues 1ª columna + 2ª columna = 3ª columna.

El determinante del menor de orden 2 de la esquina superior izquierda no es cero:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1) - 1\cdot(-4) = -1+4 = 3 \neq 0$$

por ello, el rango de la matriz de coeficientes del sistema es 2: rang(A) = 2.

5-a) Si $m=0$, el rango de la matriz ampliada también es 2,
puesto que solo añade una columna de ceros, que no cambia el rango.

El sistema es compatible e indeterminado: rang(A) = rang(A ampliada) $=2<n=3$.

Para resolver, como el rango es 2, eliminamos la 3ª ecuación.

$$\begin{aligned} x+y+2z=0 \quad &\to \quad x+y=-2z \quad (\#) \\ -4x-y-5z=0 \quad &\to \quad -4x-y=\ 5z \end{aligned}$$

Sumamos ambas: $-3x = 3z \quad \to \quad x=-z$,

y si usamos (#): $x+y=-2z$

$$(-z)+y=-2z \quad \to \quad y=-z.$$

▸ **Si $m=0$: $x=-t$, $y=-t$, $z=t$ con $t\in\mathbb{R}$.**

5-b) Si $m=1$, orlamos el menor de orden 2 de la matriz de coeficientes
con los dos primeros números de la 3ª fila (3 y 1) y
con la columna de términos independientes (que son los tres iguales a 1).

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -4 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1+3-4-(-3+1-4) = -2-(-6) = 4 \neq 0$$

El determinante de la matriz orlada es distinto de cero por lo que
el rango de la matriz ampliada es 3, que es diferente del rango de la matriz del sistema que es 2.

▸ **Si $m=1$: El sistema es incompatible, sin solución**.

6.- Dado el sistema dependiente del parámetro *k* : $\begin{cases} x + \quad y \quad = 1 \\ \quad k\,y + \quad z = 0 \\ x + (k+1)y + k\,z = k+1 \end{cases}$

a) Discute el sistema según los valores de *k*.

b) Para $z = 2$, encuentra los valores de *x* e *y*.

6-a) El determinante del sistema vale:

$$|\mathrm{A}| = k^2 + 1 + 0 - (0 + 0 + k + 1) = k^2 - k = k(k-1)$$

$$\text{si } |\mathrm{A}| = 0 \;\rightarrow\; k(k-1) = 0, \quad k = 0 \vee k = 1.$$

Si $k \neq 0 \wedge k \neq 1$, $|\mathrm{A}| \neq 0$ y el sistema es compatible determinado, con solución única.

Para $k = 0$ la matriz de Gauss del sistema es: $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$

La 3ª fila es igual a la primera, por lo que no aporta información.
Las otras dos filas son independientes, de modo que el sistema es compatible e indeterminado.

Para $k = 1$ usamos el método de eliminación de Gauss:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right] \mathrm{F3} \leftarrow \mathrm{F3} - \mathrm{F2} - \mathrm{F1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Como de la última fila se deduciría que 0 es igual a 1, el sistema es incompatible.

- **Si $k \neq 0 \wedge k \neq 1$ el sistema es compatible determinado**.
  Si $k = 0$ el sistema es compatible indeterminado.
  Si $k = 1$ el sistema es incompatible.

6-b) Si $z = 2$, la 2ª ecuación quedará: $k \cdot y = -2 \quad (\#)$

Sumando la 1ª ecuación con este resultado, tenemos:

$$\begin{array}{rl} & x + \quad y = 1 \\ + & \quad k \cdot y = -2 \\ \hline & x + y + k \cdot y = 1 + (-2) \\ & x + (k+1)\,y = -1 \end{array}$$

Si en la 3ª ecuación ponemos $z = 2$, e introducimos la última expresión:

$$x + (k+1)\,y + k \cdot z = k + 1$$

$$(-1) \qquad + k \cdot 2 = k + 1$$

y despejando de aquí, obtenemos que $k = 2$. (Sistema compatible determinado)

Por la relación (#): $k \cdot y = -2$, si $k = 2$ resulta que $y = -1$.

Usando la 1ª ecuación del sistema: $x + y = 1 \;\rightarrow\; x + (-1) = 1, \quad x = 2$.

- **Si $z = 2$: $x = 2$, $y = -1$**.

7.- a) Sean A y B dos matrices cuadradas del mismo orden. Halla qué relación deben cumplir esas matrices (si deben cumplir alguna) para que sea cierta la igualdad: $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.

b) Si $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ k & 2 \end{pmatrix}$ encuentra qué forma debe tener la matriz B para que ocurra la igualdad de (a).

7-a) Por la propiedad distributiva del producto de matrices:

$$\begin{aligned}(A+B)^2 &= (A+B)(A+B) = \\ &= A\cdot A + A\cdot B + B\cdot A + B\cdot B = \\ &= A^2 + A\cdot B + B\cdot A + B^2 \qquad \text{esto siempre es cierto.}\end{aligned}$$

$$(A+B)^2 = A^2 + 2\cdot A\cdot B + B^2 \qquad \text{es lo que queremos conseguir.}$$

Para ello se debe cumplir que:

$$A\cdot B + B\cdot A = 2\cdot A\cdot B$$

así, $\quad B\cdot A = 2\cdot A\cdot B - A\cdot B$

y... $\quad B\cdot A = A\cdot B$

- **Debe ocurrir que: $\mathbf{A\cdot B = B\cdot A}$, es decir, A y B deben conmutar.**

7-b) Con $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ k & 2 \end{bmatrix}$ y tomando $B = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$

calculamos $A\cdot B$ y $B\cdot A$ e igualamos:

$$A\cdot B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ k & 2 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x-z & 2y-t \\ kx+2z & ky+2t \end{bmatrix}$$

$$B\cdot A = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ k & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x+ky & -x+2y \\ 2z+kt & -z+2t \end{bmatrix}$$

$$\text{si } A\cdot B = B\cdot A \ \Rightarrow \ \begin{cases} 2x-z = 2x+ky & \rightarrow \ ky=-z \\ 2y-t = -x+2y & \rightarrow \ x=t \\ kx+2z = 2z+kt & \rightarrow \ x=t \\ ky+2t = -z+2t & \rightarrow \ ky=-z \end{cases}$$

Y solo queda: $x=t$, $z=-ky$.

- **La matriz B es de la forma: $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} & \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{-ky} & \boldsymbol{x} \end{bmatrix}$.**

8.- Dadas las matrices: $A=\begin{pmatrix} a & -1 & 2 \\ 2 & 1 & a \\ a & 2 & -1 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 6 \\ -12 \\ 18 \end{pmatrix}$ y la ecuación matricial: $A\cdot X=B$,

a) ¿Para qué valores del parámetro a tiene la ecuación solución única?

b) Encuentra la matriz X que cumple la ecuación cuando $a=-1$.

8-a) La ecuación matricial es equivalente a un sistema de ecuaciones.
La ecuación tiene solución única si ese sistema de ecuaciones es compatible y determinado.
Para que lo sea debe existir la matriz inversa de A, es decir, A debe tener determinante no nulo.

$$|A|=-a-a^2+8-\left(2a+2a^2+2\right)=-3a^2-3a+6=-3\left(a^2+a-2\right)$$

y si $|A|=0 \;\rightarrow\; a^2+a-2=0, \quad a=1 \vee a=-2.$

▸ **La ecuación tiene solución única si:** $\boldsymbol{a\neq 1 \wedge a\neq -2}$.

8-b) Si $a=-1$, según lo dicho arriba, $|A|\neq 0$ y existe A^{-1}:

$$A=\begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad |A|=1-1+8-(-2+2+2)=6, \quad A^T=\begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\left(A^T\right)_{adj}=\begin{bmatrix} 1 & -(-3) & -1 \\ -(-3) & 3 & -(-3) \\ 5 & -(-3) & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot\left(A^T\right)_{adj}=\frac{1}{6}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & 3 & 3 \\ 5 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Transformamos la ecuación:

$$\begin{aligned} A\cdot X &= B & &\text{multiplicamos por } A^{-1} \text{ por la izquierda en ambos miembros} \\ A^{-1}\cdot A\cdot X &= A^{-1}\cdot B \\ I\;\cdot X &= A^{-1}\cdot B & &\text{hemos usado que } A^{-1}\cdot A \text{ es I} \\ X &= A^{-1}\cdot B \end{aligned}$$

Y tenemos:

$$X=A^{-1}\cdot B=\frac{1}{6}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & 3 & 3 \\ 5 & 3 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 6 \\ -12 \\ 18 \end{bmatrix}=\frac{1}{6}\cdot\begin{bmatrix} -48 \\ 36 \\ 12 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -8 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

▸ $\mathbf{X}=\begin{bmatrix} -8 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$

9.- Dadas las matrices $A(x)=\begin{pmatrix} x+2 & 4 & 6 \\ 2x+3 & 3 & 6 \\ 4x+4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ y $B(y)=\begin{pmatrix} 3y+5 & 7 & 12 \\ 2y+3 & 3 & 6 \\ 3y+4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$,

a) Calcula el determinante de la matriz $3\cdot A(x)$ y halla el valor de *x* para el que dicho determinante vale 162.

b) Demuestra que la matriz $B(y)$ no tiene inversa para ningún valor real de *y*.

9-a) Calculamos $|A(x)|$:

En primer lugar: {a}, a la 1ª columna le sumamos la 2ª y le restamos la 3ª.
Con esta operación el determinante no cambia.
Después: {b}, sacamos un factor *x* de la 1ª columna y un factor 6 de la 3ª columna.

$$|A(x)|=\begin{vmatrix} x+2 & 4 & 6 \\ 2x+3 & 3 & 6 \\ 4x+4 & 2 & 6 \end{vmatrix}=\ldots\{a\}\ldots=\begin{vmatrix} x & 4 & 6 \\ 2x & 3 & 6 \\ 4x & 2 & 6 \end{vmatrix}=\ldots\{b\}\ldots=6x\cdot\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$|A(x)|=6x\cdot[3+16+4-(12+2+8)]=6x\cdot 1=6x$$

Calculamos ya el determinante que nos piden:

$$|3\cdot A(x)|=\ldots$$

[A es de orden 3: el factor 3 sale como $3^3=27$]

$$\ldots=27\cdot|A(x)|=27\cdot 6x=162x$$

Y para que $|3\cdot A(x)|=162 \;\rightarrow\; 162x=162, \quad x=1$

▸ $\mathbf{|3\cdot A(x)|=162}$ **para** $\mathbf{x=1}$**.**

9-b) B(*y*) no tendrá inversa para ningún valor de *y* si su determinante es siempre nulo.

Calculamos $|B(y)|$:

En primer lugar: {a}, a la 1ª columna le sumamos la 2ª y le restamos la 3ª.
Con esta operación el determinante no cambia.
Después: {b}, sacamos un factor *y* de la 1ª columna y un factor 6 de la 3ª columna.

$$|B(y)|=\begin{vmatrix} 3y+5 & 7 & 12 \\ 2y+3 & 3 & 6 \\ 3y+4 & 2 & 6 \end{vmatrix}=\ldots\{a\}\ldots=\begin{vmatrix} 3y & 7 & 12 \\ 2y & 3 & 6 \\ 3y & 2 & 6 \end{vmatrix}=\ldots\{b\}\ldots=6y\cdot\begin{vmatrix} 3 & 7 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$|B(y)|=6y\cdot[9+21+8-(18+6+14)]=6y\cdot 0=0$$

▸ $\mathbf{|B(y)|=0}$ **para cualquier valor de *y*, por lo que no existe** $\mathbf{B(y)^{-1}}$ **para ningún valor de *y*.**

10.- Dado el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro k : $\begin{cases} x - \ \ y + 2z = 0 \\ 2x + \ \ y + \ \ z = 0 \\ x + 2y + k\,z = 0 \end{cases}$

a) Discute el sistema según los valores de *k*.

b) Resuelve el sistema para los valores de k para los que exista solución.

10-a) El determinante de la matriz de los coeficientes del sistema es:

$$|\mathrm{A}| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & k \end{vmatrix} = k - 1 + 8 - (2 + 2 - 2k) = 3k + 3$$

si $|\mathrm{A}| = 0 \ \rightarrow \ 3k + 3 = 0, \quad k = -1$

Si $k \neq -1$ el rango de A es 3 y coincide con el rango de A ampliada (no puede ser 4):
rang(A) = rang(A ampliada) = 3 = *n*, y el sistema es compatible y determinado.

Si $k = -1$ el rango de A es 2, pues el determinante del menor de orden 2 de la esquina superior izquierda es distinto de cero:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - (-2) = 3 \neq 0$$

Como los términos independientes son ceros, el rango de la matriz ampliada no puede ser distinto y también vale 2, menor que el número de incógnitas:
rang(A) = rang(A ampliada) = 2 < *n* = 3, y el sistema es compatible e indeterminado.

- **Si $k \neq -1$ el sistema es compatible y determinado.**
  Si $k = -1$ el sistema es compatible e indeterminado.

10-b) Existe solución en todos los casos.

Si $k \neq -1$, como es un sistema homogéneo solo tiene la solución trivial: $x = y = z = 0$.

Si $k = -1$, al ser rang(A) = 2, nos quedamos con las dos primeras ecuaciones.

Sumándolas:

$$\begin{array}{rl} & x - y + 2z = 0 \\ + & 2x + y + \ z = 0 \\ \hline & 3x \qquad + 3z = 0 \ \rightarrow \ x = -z \end{array}$$

Sustituyendo en la 1ª:

$$\begin{array}{l} x \ \ - y + 2z = 0 \\ (-z) - y + 2z = 0 \ \rightarrow \ y = z \end{array}$$

- **Si $k \neq -1$: $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.**
  Si $k = -1$: $x = -t$, $y = t$, $z = t$, con $t \in \mathbb{R}$.

11.- Dado el sistema de ecuaciones dependiente de los parámetros k y m: $\begin{cases} x - \ y + 2z = 5 \\ 2x + \ y + \ z = 4 \\ x + 2y + k\,z = m \end{cases}$

a) Discute el sistema según los valores de k y m.

b) Resuelve el sistema para los casos en los que $m = -1$.

11-a) El determinante de la matriz del sistema es: $|\mathrm{A}| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & k \end{vmatrix} = k - 1 + 8 - (2 + 2 - 2k) = 3k + 3$

si $|\mathrm{A}| = 0 \ \rightarrow \ 3k + 3 = 0, \quad k = -1.$

Si $k \neq -1$ el rango de A es 3 y coincide con el rango de A ampliada (que no puede ser 4): rang(A) = rang(A ampliada) = 3 = n, y el sistema es compatible y determinado.

Si $k = -1$ el rango de A es 2, pues el determinante del menor de orden 2 de la esquina superior izquierda es distinto de cero:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - (-2) = 3 \neq 0$$

Orlando ese menor con los dos primeros coeficientes de la 3ª ecuación y con la columna de términos independientes, calculamos su determinante para ver el rango de la matriz A ampliada:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & m \end{vmatrix} = m - 4 + 20 - (5 + 8 - 2m) = 3m + 3$$

que se anula si $m = -1$. Por ello, si $m = -1$: rang(A ampliada) = 2 = rang(A) < n = 3,
si $m \neq -1$: rang(A ampliada) = 3 $\neq$ rang(A).

- **Si $k \neq -1$ el sistema es compatible y determinado**
  Si $k = -1$ para $m = -1$ el sistema es compatible e indeterminado,
  para $m \neq -1$ el sistema es incompatible.

11-b) Para $m = -1$, resolvemos con el método de eliminación de Gauss:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & k & -1 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ F2 \leftarrow F2 - 2F1 \\ F3 \leftarrow F3 - F1 \end{matrix} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & -3 & -6 \\ 0 & 3 & k-2 & -6 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ F2 \leftarrow F2 \div 3 \\ F3 \leftarrow F3 - F2 \end{matrix} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & k+1 & 0 \end{array}\right]$$

La última ecuación es: $(k+1)z = 0$. Si $k = -1$ no aporta información, si $k \neq -1$ entonces $z = 0$.

Si $k = -1$, la 3ª ecuación no aporta información,
la 2ª ecuación dice: $y - z = -2 \ \rightarrow \ y = z - 2$,
la 1ª ecuación dice: $x - y + 2z = 5 \ \rightarrow \ x = 5 + y - 2z = 5 + (z-2) - 2z = 3 - z$.

Si $k \neq -1$, la 3ª ecuación dice: $z = 0$,
la 2ª ecuación dice: $y - z = -2 \ \rightarrow \ y = 0 - 2 = -2$,
la 1ª ecuación dice: $x - y + 2z = 5 \ \rightarrow \ x = 5 + y - 2z = 5 + (-2) - 0 = 3$.

- **Para $m = -1$, si $k = -1$: $x = 3 - t$, $y = t - 2$, $z = t$, con $t \in \mathbb{R}$.**
  si $k \neq -1$: $x = 3$, $y = -2$, $z = 0$.

12.- a) Calcula todas las matrices de la forma $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m & -2 \end{pmatrix}$ que cumplen que $A^2 + A = 2I$, donde I es la matriz identidad de orden 2.

b) Justifica que si A es una matriz cuadrada que cumple la igualdad $A^2 + A = 2I$, entonces A es invertible y calcula la expresión de A^{-1} en función de las matrices A e I.

12-a) Calculamos $A^2 + A$ y lo igualaremos a $2 \cdot I$ para ver qué obtenemos para *m*:

$$A^2 + A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ m & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ m & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ m & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -m & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ m & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = 2 \cdot I$$

Con la A dada, $A^2 + A$ siempre resulta $2 \cdot I$ sin importar el valor de *m*.

- **Todas las matrices $\mathbf{A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ m & -2 \end{bmatrix}}$ cumplen $\mathbf{A^2 + A = 2 \cdot I,\ \forall m \in \mathbb{R}}$.**

12-b) A^{-1}, matriz inversa de A, se define como aquella matriz que cumple $A \cdot A^{-1} = I$.

Vamos a transformar la expresión que nos dan en otra que tenga ese aspecto:

$$A^2 + A = 2 \cdot I \quad \text{sacamos factor común en el primer miembro}$$
$$A \cdot (A + I) = 2 \cdot I \quad \text{y pasamos el factor 2 al primer miembro}$$
$$A \cdot \left(\frac{A + I}{2} \right) = I$$

- **Por ello A es invertible, pues existe una expresión que multiplicada por A da I. La inversa de A será: $\mathbf{A^{-1} = \frac{1}{2}(A + I)}$, pues así se cumple que $\mathbf{A \cdot A^{-1} = I}$.**

13.- Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & x-2 \\ 1 & 0 & x \\ -2 & x & x \end{pmatrix}$ calcula:

a) Para qué valores de *x* existe la matriz A^{-1}.
b) Para qué valores de *x* se cumple que: $\det(3A) = -243$

13.- $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & x-2 \\ 1 & 0 & x \\ -2 & x & x \end{pmatrix}$ tendremos que: $\det(A) = 0 - 6x + x(x-2) - [0 - x^2 + 3x] = 2x^2 - 11x$

a) La matriz A^{-1} existe si $\det(A) \neq 0$. Como $2x^2 - 11x = 2x(x - 11/2)$ se anula en 0 *y* $11/2$
Por lo tanto la matriz inversa existe si $x \neq 0,\ x \neq 11/2$

b) $\det(3A) = 3^3 \det(A)$, por lo que si $\det(3A) = -243$ tendremos que $\det(A) = -243/3^3 = -9$
Por ello: $2x^2 - 11x = -9$ cuyas soluciones son $x = 1,\ x = 9/2$

14.- Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}-1 & 3 & -1\\ 1 & 0 & 1\\ -2 & 1 & 1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 2\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}$. Calcula:

a) $\left|A^3\cdot(5B)\right|$ b) $\left|A^{-1}\cdot B^2\cdot(B^{-1}\cdot A)^2\right|$ c) $X=(A^T+I)\cdot(B-I)$

14.- $A=\begin{pmatrix}-1 & 3 & -1\\ 1 & 0 & 1\\ -2 & 1 & 1\end{pmatrix}\rightarrow \det(A)=-9$; $B=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 2\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}\rightarrow \det(B)=18$

a) $\left|A^3\cdot(5B)\right|=|A|^3\cdot 5^3\cdot|B|=(-9)^3\cdot 5^3\cdot 18=-1640250$

b) $\left|A^{-1}\cdot B^2\cdot(B^{-1}\cdot A)^2\right|=|A|^{-1}\cdot|B|^2\cdot\left(|B|^{-1}\cdot|A|\right)^2=|A|^{-1}\cdot|B|^2\cdot|B|^{-2}\cdot|A|^2=|A|=-9$

c) $X=(A^T+I)\cdot(B-I)=\left[\begin{pmatrix}-1 & 1 & -2\\ 3 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right]\cdot\left[\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 2\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right]=$

$=\begin{pmatrix}0 & 1 & -2\\ 3 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 2\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 4 & 0\\ 4 & 4 & 3\\ 1 & -1 & 4\end{pmatrix}$

15.- Usando las mismas matrices A y B que en el problema anterior calcula, si existe, la matriz X en los dos casos siguientes:

a) $X=(A-B)^{-1}$ b) $X\cdot A=9\cdot I$

15.- a) $X=(A-B)^{-1}$, $A-B=\begin{pmatrix}-1 & 3 & -1\\ 1 & 0 & 1\\ -2 & 1 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 2\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & 2 & -1\\ 1 & -3 & -1\\ -3 & 2 & -1\end{pmatrix}$

Como esta matriz tiene dos filas iguales, su determinante es nulo y no tiene inversa.
Por lo tanto, no existe la matriz X.

b) $X\cdot A=9\cdot I$, $X\cdot A\cdot A^{-1}=9\cdot I\cdot A^{-1}\ \rightarrow\ X=9A^{-1}=9\cdot\frac{1}{\det(A)}{A_{adj}}^T=\frac{9}{-9}{A_{adj}}^T=-{A_{adj}}^T$

$A_{adj}=\begin{pmatrix}-1 & -3 & 1\\ -4 & -3 & -5\\ 3 & 0 & -3\end{pmatrix}$, por lo tanto: $X=-\begin{pmatrix}-1 & -4 & 3\\ -3 & -3 & 0\\ 1 & -5 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 4 & -3\\ 3 & 3 & 0\\ -1 & 5 & 3\end{pmatrix}$

16.- Sean las matrices fila $A=(1\ \ -1\ \ 2)$ y $B=(2\ \ 1\ \ 0)$. Calcula la matriz: $X=(A^T\cdot B)^8-(A^T\cdot B)^5$

Llamemos M al producto $A^T\cdot B$, entonces: $M=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1&0\\-2&-1&0\\4&2&0\end{pmatrix}$

$$M^2=\begin{pmatrix}2&1&0\\-2&-1&0\\4&2&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&1&0\\-2&-1&0\\4&2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4-2+0&2-1+0&0+0+0\\-4+2+0&-2+1+0&0+0+0\\8-4+0&4-2+0&0+0+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1&0\\-2&-1&0\\4&2&0\end{pmatrix}=M$$

Así, $M^4=M^2\cdot M^2=M\cdot M=M^2=M$

Por lo tanto, $X=M^8-M^5=M^4\cdot M^4-M^4\cdot M=M\cdot M-M\cdot M=0$ (la matriz nula de dimensión 3×3).

17.- Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}x&3&1\\x+1&4&2\\x&x&2\end{pmatrix}$ calcula:

a) Para qué valores de x existe la matriz A^{-1}.
b) Para qué valores de x se cumple que: $\det(2A)=-48$

a) $|A|=8x+6x+x(x+1)-[4x+2x^2+6(x+1)]=14x+x^2+x-[4x+2x^2+6x+6]=-x^2+5x-6$

Si $|A|=0\ \rightarrow\ -x^2+5x-6=0\ \Rightarrow\ x=\dfrac{-5\pm\sqrt{25-24}}{-2}=\begin{cases}2\\3\end{cases}$ Por eso, A^{-1} existe si x no es ni 2 ni 3

b) $|2A|=\ldots\{$ Por ser A de dimensión 3 $\}\ldots=2^3|A|=8|A|$

Y si $|2A|=-48\ \rightarrow\ 8|A|=-48$, por lo que se debe cumplir que $|A|=-6$

Usando la expresión para $|A|$: $-x^2+5x-6=-6\ \rightarrow\ -x^2+5x=0,\ -x(x-5)=0\ \Rightarrow\ x=0,\ x=5$

18.- Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&2&1\\0&1&1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}0&1&-1\\2&1&2\\1&0&-1\end{pmatrix}$. Calcula:

a) $|A\cdot 2B^2|$ b) $|A\cdot B^3\cdot A^{-1}|$ c) $X=A^{-1}\cdot\left((B\cdot A)^{-1}\cdot B\right)^{-1}$

Calculamos los determinantes de A y B que nos harán falta después:

$|A|=2+0-1-(0+1+1)=1-(2)=-1,\quad |B|=0+2+0-(-1+0-2)=2-(-3)=5$

a) $|A\cdot 2B^2|=|A|\cdot|2B^2|=|A|\cdot 2^3|B\cdot B|=|A|\cdot 2^3|B|\cdot|B|=(-1)\cdot 8\cdot 5\cdot 5=-200$

b) $|A\cdot B^3\cdot A^{-1}|=|A|\cdot|B^3|\cdot|A^{-1}|=|A|\cdot|B|^3\cdot\dfrac{1}{|A|}=|B|^3=5^3=125$

c) $X=A^{-1}\cdot\left((B\cdot A)^{-1}\cdot B\right)^{-1}=\ldots\left\{\text{Usando } (P\cdot Q)^{-1}=Q^{-1}\cdot P^{-1}\right\}\ldots=A^{-1}\cdot\left(A^{-1}\cdot B^{-1}\cdot B\right)^{-1}=$

$=\ldots\{B^{-1}\cdot B=I\}\ldots=A^{-1}\cdot\left(A^{-1}\right)^{-1}=A^{-1}\cdot A=I$ (la matriz identidad de dimensión 3×3).

19.- Usando las mismas matrices A y B que en el problema anterior, calcula la matriz X que cumple la ecuación: $A \cdot X + B \cdot X = I$, donde I es la matriz identidad de orden 3.

Si $A \cdot X + B \cdot X = I$, factorizando por la derecha: $(A + B) \cdot X = I$

Si multiplicamos por la inversa de (*A* + *B*) por la izquierda: $(A + B)^{-1} \cdot (A + B) \cdot X = (A + B)^{-1} \cdot I$

Y por lo tanto: $X = (A + B)^{-1}$

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad |A + B| = 0 + 6 - 6 - (-6 + 3 + 0) = 0 - (-3) = 3$$

$$\left(A + B\right)^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{Adj}\left(A + B\right)^T = \begin{pmatrix} +(-3) & -(+2) & +(+12) \\ -(-3) & +(+2) & -(+9) \\ +(+0) & -(-1) & +(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 12 \\ 3 & 2 & -9 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto: $(A + B)^{-1} = \dfrac{1}{|A + B|} \cdot \mathrm{Adj}\ (A + B)^T = \dfrac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -2 & 12 \\ 3 & 2 & -9 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

Y tendremos que: $X = (A + B)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2/3 & 4 \\ 1 & 2/3 & -3 \\ 0 & 1/3 & -1 \end{pmatrix}$

20.- Sea el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} x + y - z = 2 \\ x - y + z = 2 \\ x - 2y + a \cdot z = 0 \end{cases}$ donde *a* es un parámetro real.

Calcula para qué valores de *a* el sistema es compatible y determinado. [10 *puntos*]

El determinante de los coeficientes del sistema es: $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & a \end{vmatrix} = -a + 1 + 2 - (1 + a - 2) = -2a + 4$

El sistema es compatible determinado si $|A| \neq 0$

Puesto que si $|A| = 0 \;\rightarrow\; -2a + 4 = 0 \;\Rightarrow\; a = 2$, el sistema es compatible determinado si $a \neq 2$

▸ **El sistema es compatible determinado para $a \neq 2$.**

21.- Sean: $A=\begin{pmatrix}5 & 8\\ 9 & 4\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & -3 & 2\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -3 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix}$ $D=\begin{pmatrix}3 & 7\\ 1 & 2\end{pmatrix}$

a) Calcula la matriz $M=A-2\cdot B\cdot C$ [5 *puntos*]

b) Calcula la matriz X que cumple: $D\cdot X=M$ [8 *puntos*]

21-a) Calculamos en primer lugar el producto B·C:

$$B\cdot C=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & -3 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & -1\\ -3 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-3-1 & -1+2-4\\ 4+9+2 & -2-6+8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & -3\\ 15 & 0\end{pmatrix}$$

Y procedemos al cálculo de M:

$$M=A-2\cdot B\cdot C=\begin{pmatrix}5 & 8\\ 9 & 4\end{pmatrix}-2\cdot\begin{pmatrix}-2 & -3\\ 15 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 8\\ 9 & 4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-4 & -6\\ 30 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9 & 14\\ -21 & 4\end{pmatrix}$$

▸ $\mathbf{M}=\begin{pmatrix}\mathbf{9} & \mathbf{14}\\ \mathbf{-21} & \mathbf{4}\end{pmatrix}$

21-b) Partimos de la ecuación:

$$D\cdot X=M$$

Multiplicamos por D^{-1} por la izquierda en ambos miembros:

$$\left\{\text{Como: } \det(D)=3\cdot 2-7\cdot 1=-1\neq 0 \ \rightarrow\ \text{Existe } D^{-1}\right\}$$

$$D^{-1}\cdot D\cdot X=D^{-1}\cdot M$$

Y, puesto que $D^{-1}\cdot D=I$, tendremos que:

$$X=D^{-1}\cdot M$$

Calculemos D^{-1}:
$$\begin{cases}\text{Adj}(D)=\begin{pmatrix}+(+2) & -(+1)\\ -(+7) & +(+3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -7 & 3\end{pmatrix} \ \rightarrow\ [\text{Adj}(D)]^T=\begin{pmatrix}2 & -7\\ -1 & 3\end{pmatrix}\\ D^{-1}=\dfrac{1}{\det(D)}\cdot[\text{Adj}(D)]^T=\dfrac{1}{-1}\cdot\begin{pmatrix}2 & -7\\ -1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 7\\ 1 & -3\end{pmatrix}\end{cases}$$

Por lo tanto:

$$X=D^{-1}\cdot M=\begin{pmatrix}-2 & 7\\ 1 & -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}9 & 14\\ -21 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-18-147 & -28+28\\ 9+63 & 14-12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-165 & 0\\ 72 & 2\end{pmatrix}$$

▸ $\mathbf{X}=\begin{pmatrix}\mathbf{-165} & \mathbf{0}\\ \mathbf{72} & \mathbf{2}\end{pmatrix}$

22.- a) Una matriz A cumple: $A^2 = 2 \cdot A - I$, siendo I la matriz identidad. Calcula la matriz A^4 en función de A e I. [*6 puntos*] b) Si B es una matriz cuadrada de cuatro columnas cuyo determinante vale -1, calcula el valor del determinante de la matriz $(3B^4)(4B^2)^{-1}$. [6 *puntos*]

22-a) Como $A^2 = 2 \cdot A - I$, tendremos:

$$A^4 = A^2 \cdot A^2 = (2A - I) \cdot (2A - I) = 4A \cdot A - 2A \cdot I - I \cdot 2A + I \cdot I = 4A^2 - 4A + I = \ldots$$

$$\left\{ \text{Usamos que } A^2 = 2 \cdot A - I \right\}$$

$$\ldots = 4 \cdot (2A - I) - 4A + I = 8A - 4I - 4A + I = 4A - 3I$$

▸ $\mathbf{A^4 = 4A - 3I}$

22-b) $\det\left[(3B^4)(4B^2)^{-1}\right] = \ldots$

$$\left\{ \det(P \cdot Q) = \det(P) \cdot \det(Q) \right\}$$

$$\ldots = \det\left[3B^4\right] \cdot \det\left[(4B^2)^{-1}\right] = \ldots$$

$$\left\{ \det(P^{-1}) = \frac{1}{\det(P)} \right\}$$

$$\ldots = \det\left[3B^4\right] \cdot \frac{1}{\det\left[4B^2\right]} = \ldots$$

$$\left\{ \det(k \cdot P) = k^n \det(P), \text{ n es el orden de la matriz} \right\}$$

$$\ldots = 3^4 \cdot \det\left[B^4\right] \cdot \frac{1}{4^4 \cdot \det\left[B^2\right]} = \ldots$$

$$\left\{ \det(P^x) = \left[\det(P)\right]^x \right\}$$

$$\ldots = 3^4 \cdot \left[\det(B)\right]^4 \cdot \frac{1}{4^4 \cdot \left[\det(B)\right]^2} = \frac{3^4}{4^4} \cdot \left[\det(B)\right]^2 = \frac{3^4}{4^4} \cdot (-1)^2 = \frac{3^4}{4^4} = \frac{81}{256}$$

▸ $\mathbf{\det\left[(3B^4)(4B^2)^{-1}\right] = \frac{81}{256}}$

23.- Sabemos que la matriz $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\a&b&c\\x&y&z\end{pmatrix}$ tiene su determinante igual a 6. Calcula:

a) $\begin{vmatrix}a&b&c\\-5&-5&-5\\\frac{2x+3a}{10}&\frac{2y+3b}{10}&\frac{2z+3c}{10}\end{vmatrix}$ [*6 puntos*]

b) $\det(A^3)+\det(2A^T\cdot A^{-1})$ [*6 puntos*]

23-a) $\begin{vmatrix}a&b&c\\-5&-5&-5\\\frac{2x+3a}{10}&\frac{2y+3b}{10}&\frac{2z+3c}{10}\end{vmatrix}=\ldots\left\{\begin{matrix}\text{Sacamos un factor }-5\text{ de la 2ª fila}\\\text{Sacamos un factor }\frac{1}{10}\text{ de la 3ª fila}\end{matrix}\right\}$

$\ldots=(-5)\cdot\left(\frac{1}{10}\right)\cdot\begin{vmatrix}a&b&c\\1&1&1\\2x+3a&2y+3b&2z+3c\end{vmatrix}=\ldots\{\text{ F3}\leftarrow\text{F3}-3\cdot\text{F1, el determinante no cambia }\}$

$\ldots=(-5)\cdot\left(\frac{1}{10}\right)\cdot\begin{vmatrix}a&b&c\\1&1&1\\2x&2y&2z\end{vmatrix}=\ldots\{\text{ Sacamos un factor 2 de la 3ª fila }\}$

$\ldots=(-5)\cdot\left(\frac{1}{10}\right)\cdot 2\cdot\begin{vmatrix}a&b&c\\1&1&1\\x&y&z\end{vmatrix}=\ldots\{\text{ Intercambiamos las filas 1 y 2, eso añade un signo }-\}$

$\ldots=-(-5)\cdot\left(\frac{1}{10}\right)\cdot 2\cdot\begin{vmatrix}1&1&1\\a&b&c\\x&y&z\end{vmatrix}=-(-5)\cdot\left(\frac{1}{10}\right)\cdot 2\cdot 6=\frac{5\cdot 2}{10}\cdot 6=6$

▸ **El determinante da 6.**

23-b) $\det(A^3)+\det(2A^T\cdot A^{-1})=\ldots$

$\left\{\det(A^3)=[\det(A)]^3,\ \det(k\cdot A)=k^n\cdot\det(A),\ \det(P\cdot Q)=\det(P)\cdot\det(Q)\right\}$

$\ldots=[\det(A)]^3+2^3\cdot\det(A^T)\cdot\det(A^{-1})=\ldots$

$\left\{\det(A^T)=\det(A),\ \det(A^{-1})=\frac{1}{\det(A)}\right\}$

$\ldots=[\det(A)]^3+2^3\cdot\det(A)\cdot\frac{1}{\det(A)}=[\det(A)]^3+2^3=6^3+2^3=216+8=224$

▸ $\mathbf{\det(A^3)+\det(2A^T\cdot A^{-1})=224}$

24.- Sea la matriz $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&a&-1\\0&1&a+2\end{pmatrix}$ donde *a* es un parámetro real.

a) Calcula para qué valor o valores de *a* la matriz A es invertible. [*5 puntos*]

b) Si *a* es un valor positivo, calcula la matriz X que cumple: $A^2-A\cdot X=A$ [*8 puntos*]

24-a) La matriz A será invertible si su determinante es distinto de cero.

$$\det(A)=\begin{vmatrix}2&0&0\\0&a&-1\\0&1&a+2\end{vmatrix}=2\cdot\begin{vmatrix}a&-1\\1&a+2\end{vmatrix}=2\cdot[a(a+2)-(-1)]=2\cdot(a^2+2a+1)=2\cdot(a+1)^2$$

que solo se anula si $a=-1$.

Por lo tanto, la matriz A es invertible si $a\neq-1$

▸ **La matriz A es invertible si $a\neq-1$.**

24-b) Si *a* es un valor positivo, la matriz A tendrá inversa, pues su determinante será distinto de cero.

Tenemos la ecuación:

$$A^2-A\cdot X=A,$$

multiplicamos por A^{-1} por la izquierda en ambos lados y aplicamos la propiedad distributiva:

$$A^{-1}\cdot A^2-A^{-1}\cdot A\cdot X=A^{-1}\cdot A$$

Como el producto de matrices cumple la propiedad asociativa:

$$(A^{-1}\cdot A)\cdot A-(A^{-1}\cdot A)\cdot X=(A^{-1}\cdot A)$$

Y usando que $A^{-1}\cdot A=I$, tendremos:

$$I\cdot A-I\cdot X=I$$

Como cualquier matriz multiplicada por la matriz identidad queda igual:

$$A-X=I$$

Y despejando, queda:

$$X=A-I$$

Operando:

$$X=A-I=A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&a&-1\\0&1&a+2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&a-1&-1\\0&1&a+1\end{pmatrix}$$

▸ $\mathbf{X=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&a-1&-1\\0&1&a+1\end{pmatrix}}$ **que es válida para cualquier *a* distinto de –1.**

25.- Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}4 & k\\ 2 & 5\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -2 & 0\end{pmatrix}$ siendo k un parámetro real.

a) Para $k=4$, calcula la matriz X que cumple la ecuación: $A\cdot X-B=X$ [*5 puntos*]

b) Calcula para qué valor de k no es posible encontrar la matriz X. [*5 puntos*]

25-a) Reorganizamos la ecuación que debemos resolver:

$A\cdot X-B=X$

$A\cdot X-X=B$

$(A-I)\cdot X=B$, donde I es la matriz identidad 2×2.

La matriz $A-I=\begin{pmatrix}4 & 4\\ 2 & 5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 2 & 4\end{pmatrix}$

tiene $\det(A-I)=3\cdot 4-2\cdot 4=4$ distinto de cero. Por lo tanto tiene inversa.

Multiplicando ambos lados de la ecuación por la izquierda por esa matriz inversa, tenemos:

$(A-I)^{-1}\cdot(A-I)\cdot X=(A-I)^{-1}\cdot B$

$X=(A-I)^{-1}\cdot B$

Calculemos $(A-I)^{-1}$: $\begin{cases}\det(A-I)=4,\quad \text{Adj}(A-I)=\begin{pmatrix}+4 & -2\\ -4 & +3\end{pmatrix},\ \left(\text{Adj}(A-I)\right)^T=\begin{pmatrix}4 & -4\\ -2 & 3\end{pmatrix}\\ \Rightarrow\ (A-I)^{-1}=\dfrac{1}{\det(A-I)}\cdot\left(\text{Adj}(A-I)\right)^T=\dfrac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix}4 & -4\\ -2 & 3\end{pmatrix}\end{cases}$

$$X=(A-I)^{-1}\cdot B=\frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix}4 & -4\\ -2 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -2 & 0\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix}-4+8 & +8+0\\ +2-6 & -4+0\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix}4 & 8\\ -4 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & -1\end{pmatrix}$$

▸ $\mathbf{X=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & -1\end{pmatrix}}$

25-b) No podremos resolver la ecuación matricial si no existe $(A-I)^{-1}$, es decir, si $\det(A-I)=0$.

Para un valor k cualquiera, tenemos:

$A-I=\begin{pmatrix}4 & k\\ 2 & 5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & k\\ 2 & 4\end{pmatrix}$

Su determinante es: $\det(A-I)=3\cdot 4-2\cdot k=12-2k$

Que se anula si: $12-2k=0\ \rightarrow\ k=6$

▸ **No se puede resolver la ecuación si $\mathbf{k=6}$.**

26.- Usando las propiedades de los determinantes, calcula el determinante de la matriz:

$$M=\begin{pmatrix}1 & a & a^2 & a^3\\ 1 & a+1 & (a+1)^2 & a^3+1\\ 1 & a-1 & (a-1)^2 & a^3-1\\ 1 & a+2 & a^2+b & a^3+4\end{pmatrix}$$ siendo a y b parámetros reales. [*10 puntos*]

26- $$\det(M)=\begin{vmatrix}1 & a & a^2 & a^3\\ 1 & a+1 & (a+1)^2 & a^3+1\\ 1 & a-1 & (a-1)^2 & a^3-1\\ 1 & a+2 & a^2+b & a^3+4\end{vmatrix}=\ldots\left\{\begin{matrix}\text{Restamos la 1ª fila a cada una de las otras}\\ \text{El determinante no cambiará}\end{matrix}\right\}\ldots=$$

$$=\begin{vmatrix}1 & a & a^2 & a^3\\ 0 & 1 & 2a+1 & 1\\ 0 & -1 & -2a+1 & -1\\ 0 & 2 & b & 4\end{vmatrix}=\ldots\left\{\text{Desarrollamos por menores de la 1ª columna}\right\}\ldots=$$

$$=1\cdot\begin{vmatrix}1 & 2a+1 & 1\\ -1 & -2a+1 & -1\\ 2 & b & 4\end{vmatrix}=\ldots\left\{\begin{matrix}\text{A la 2ª fila le sumamos la 1ª fila}\\ \text{El determinante no cambia}\end{matrix}\right\}\ldots=$$

$$=1\cdot\begin{vmatrix}1 & 2a+1 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ 2 & b & 4\end{vmatrix}=\ldots\left\{\text{Desarrollamos por menores de la 2ª fila}\right\}\ldots=$$

$$=1\cdot 2\cdot\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 4\end{vmatrix}=1\cdot 2\cdot(4\cdot 1-1\cdot 2)=2\cdot(4-2)=2\cdot 2=4$$

▸ $\mathbf{det(M)=4}$.

27.- Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}2 & a\\ 1 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2\\ -1\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}5\\ 3\end{pmatrix}$ donde *a* es un parámetro real.

Calcula el valor de *a* sabiendo que se cumple la ecuación matricial: A·B = C [10 *puntos*]

Operamos el primer miembro de la ecuación: $A\cdot B=\begin{pmatrix}2 & a\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot 2+a\cdot(-1)\\ 1\cdot 2+(-1)\cdot(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4-a\\ 3\end{pmatrix}$

E igualando al segundo miembro, tenemos: $\begin{pmatrix}4-a\\ 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\ 3\end{pmatrix}\ \rightarrow\ 4-a=5\ \Rightarrow\ a=-1$

▸ **El valor de *a* es: $\boldsymbol{a=-1}$**

28.- Sea el sistema de ecuaciones lineales: $\begin{cases} x - 2y - z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \\ 3x + k\cdot y - z = 0 \end{cases}$ donde k es un parámetro real.

a) Discute el sistema para los posibles valores del parámetro k. [*6 puntos*]

b) Resuelve el sistema para los valores de k para los que tiene solución. [*4 puntos*]

28-a) El sistema es homogéneo y siempre tiene solución. Pero tratémoslo sin usar este hecho.

El determinante de los coeficientes es: $|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & k & -1 \end{vmatrix} = -1+6-2k-(-3-k+4) = -k+4$.

Se anula para: $|A| = 0 \;\to\; -k+4=0 \;\Rightarrow\; k=4$.

Por lo tanto, el sistema es compatible y determinado (solución única) si $k \neq 4$.

Cuando $k=4$ analizamos el sistema con el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & -1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ F2 \leftarrow F2 - 2\cdot F1 \\ F3 \leftarrow F3 - 3\cdot F1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 10 & 2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ F3 \leftarrow F3 - 2\cdot F2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

La tercera línea no aporta información. La primera y la segunda línea son independientes, de manera que el sistema es compatible indeterminado. [$\text{rang}(A^+) = \text{rang}(A) = 2 < n = 3$]

▸ **Si $k \neq 4$ el sistema es compatible determinado. Si $k = 4$ el sistema es compatible indeterminado.**

28-b) Para $k \neq 4$ solo tiene la solución trivial. Veámoslo con la regla de Cramer:

$$x = \frac{1}{|A|}\cdot\begin{vmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & k & -1 \end{vmatrix} = 0\,,\quad y = \frac{1}{|A|}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0\,,\quad z = \frac{1}{|A|}\cdot\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & k & 0 \end{vmatrix} = 0$$

(Los determinantes son nulos pues tienen una columna de ceros y $|A| \neq 0$ para $k \neq 4$)

Para $k=4$, del método de Gauss que usamos en el apartado (a) tenemos:

$$\left.\begin{array}{r} x - 2y - z = 0 \\ 5y + z = 0 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} x - 2y = z \\ 5y = -z \end{array}\right\} \to \text{Si } z = 5t,\; y = -t \;\Rightarrow\; x = 2y + z = -2t + 5t = 3t$$

▸ **Si $k \neq 4$: $(x,y,z) = (0,0,0)$. Si $k=4$: $(x,y,z) = (3t,-t,5t)$ siendo t un parámetro real.**

29.- Sea el sistema de ecuaciones lineales: $\begin{cases} x+2y-z=1 \\ -x-y+2z=-1 \\ 2x+3y+a\cdot z=b \end{cases}$ donde a y b son parámetros reales.

a) Discute el sistema para los posibles valores de los parámetros a y b. [*6 puntos*]

b) Resuelve el sistema para $a=-2$. (Las soluciones dependerán de b.) [*4 puntos*]

29-a) El determinante de los coeficientes es: $|A|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & a \end{vmatrix}=-a+8+3-(2+6-2a)=a+3$.

Se anula para: $|A|=0 \rightarrow a+3=0 \Rightarrow a=-3$.

Por lo tanto, el sistema es compatible y determinado (solución única) si $a\neq -3$.

Cuando $a=-3$ analizamos el sistema con el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -3 & b \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ F2\leftarrow F2+F1 \\ F3\leftarrow F3-2\cdot F1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & b-2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ F3\leftarrow F3+F2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b-2 \end{array}\right)$$

La 3ª ecuación, si $b=2$, no aporta información y el sistema es compatible indeterminado.

Pero si $b\neq 2$ la 3ª ecuación no tiene solución y el sistema es incompatible.

- **Si $a\neq -3$: El sistema es compatible determinado.**
  Si $a=-3$: Si $b\neq 2$ el sistema es incompatible,
  Si $b=2$ el sistema es compatible indeterminado.

29-b) Para $a=-2$, según lo estudiado en el apartado (a) el sistema es compatible determinado.

Lo resolvemos con la regla de Cramer. Tendremos que: $|A|=a+3=-2+3=1$.

$$x=\frac{1}{|A|}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ b & 3 & -2 \end{vmatrix}=\frac{1}{1}\cdot[2+4b+3-(b+6+4)]=3b-5$$

$$y=\frac{1}{|A|}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & b & -2 \end{vmatrix}=\frac{1}{1}\cdot[2+4+b-(2+2b+2)]=-b+2$$

$$z=\frac{1}{|A|}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & b \end{vmatrix}=\frac{1}{1}\cdot[-b-4-3-(-2-3-2b)]=b-2$$

- **Para $a=-2$ la solución del sistema es: $(x,y,z)=(3b-5,-b+2,b-2)$**

30.- Sean las matrices: $A=\begin{pmatrix}2&1&1\\-1&1&1\\0&2&-1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&0&1\\0&2&-2\end{pmatrix}$.

a) Calcula la matriz X en la ecuación matricial: $AX-B=X$ [*6 puntos*]

b) Calcula el valor del determinante: $\left|(A\cdot B)^2\cdot\left(3A\right)^{-1}\right|$ [*4 puntos*]

30-a) Tenemos que: $AX-B=X$. Despejemos la matriz X:

$$A\cdot X-B=X$$
$$A\cdot X-X=B$$
$$\left(A-\mathrm{I}\right)\cdot X=B$$

La matriz $A-\mathrm{I}=\begin{pmatrix}2&1&1\\-1&1&1\\0&2&-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&0&1\\0&2&-2\end{pmatrix}$ resulta ser igual a la matriz B.

Por lo tanto, la ecuación a resolver es: $B\cdot X=B$

El determinante de B es: $|B|=\begin{vmatrix}1&1&1\\-1&0&1\\0&2&-2\end{vmatrix}=0+0-2-(0+2+2)=-6$.

Como no es nulo, existe su matriz inversa. Multiplicamos la ecuación por B^{-1} por la izquierda:

$$B\cdot X=B \;\rightarrow\; B^{-1}\cdot B\cdot X=B^{-1}\cdot B \;\Rightarrow\; X=\mathrm{I}$$

- **La solución de la ecuación es $\mathbf{X=I}$.**

30-b) $|A|=\begin{vmatrix}2&1&1\\-1&1&1\\0&2&-1\end{vmatrix}=-2+0-2-(0+4+1)=-9$, y según un cálculo anterior: $|B|=-6$

Usando las propiedades de los determinantes:

$$\left|(A\cdot B)^2\cdot\left(3A\right)^{-1}\right|=\left|(A\cdot B)^2\right|\cdot\left|\left(3A\right)^{-1}\right|=|A\cdot B|^2\cdot\frac{1}{|3A|}=|A|^2\cdot|B|^2\cdot\frac{1}{3^3|A|}=\frac{1}{3^3}\cdot|A|\cdot|B|^2$$

Sustituyendo los valores de $|A|$ y $|B|$ que tenemos, resulta:

$$\left|(A\cdot B)^2\cdot\left(3A\right)^{-1}\right|=\frac{1}{3^3}\cdot(-9)\cdot(-6)^2=\frac{-9\cdot 36}{9\cdot 3}=-\frac{36}{3}=-12$$

- **El valor del determinante es: $\left|(\mathbf{A\cdot B})^2\cdot\left(\mathbf{3A}\right)^{-1}\right|=\mathbf{-12}$.**

31.- De una matriz A cuadrada sabemos que cumple la relación: $(A-I)^2 = O$

donde I es la matriz identidad y O la matriz nula con las mismas dimensiones que la matriz A.

a) Deduce de la relación dada una expresión –si la hay– para A^{-1}. [5 *puntos*]

b) Deduce de la relación dada una expresión para A^5 en función de A e I. [5 *puntos*]

31-a) Operamos en la relación que nos dan:

$$(A-I)^2 = O$$

$$(A-I)\cdot(A-I) = O \qquad \text{aplicamos la propiedad distributiva:}$$

$$A^2 - \underbrace{A\cdot I}_{\downarrow} - \underbrace{I\cdot A}_{\downarrow} + \underbrace{I\cdot I}_{\downarrow} = O$$

$$A^2 - A - A + I = O$$

$$A^2 - 2A + I = O$$

Para obtener una expresión para A^{-1} debemos tener la matriz identidad en el segundo miembro:

$$2A - A^2 = I \qquad \text{y sacando factor común a A:}$$

$$A\cdot(2I - A) = I$$

Puesto que $A\cdot A^{-1} = I \;\rightarrow\; A^{-1} = 2I - A$

- **La inversa de A existe y su expresión es: $A^{-1} = 2I - A$.**

31-b) En el apartado anterior obtuvimos:

$$A^2 - 2A + I = O$$

Por lo tanto:

$$A^2 = 2A - I$$

Entonces:

$$A^3 = A\cdot A^2 = A\cdot(2A - I) = 2A^2 - A = \ldots\left\{\text{ sustituimos la expresión para } A^2\right\}$$

$$\ldots = 2\cdot(2A - I) - A = 4A - 2I - A = 3A - 2I$$

Para obtener A^5 combinamos estos dos resultados y aplicamos la propiedad distributiva:

$$A^5 = A^3A^2 = (3A - 2I)(2A - I) =$$

$$= 6A^2 - 3A - 4A + 2I = 6A^2 - 7A + 2I$$

y sustituyendo la expresión para A^2 quedará:

$$A^5 = 6(2A - I) - 7A + 2I = 12A - 6I - 7A + 2I = 5A - 4I$$

- **La expresión para A^5 es: $A^5 = 5A - 4I$**

32.- Sea el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x \quad\quad + z = 0 \\ x + 2y - z = 6 \\ x + \ \ y \quad\ \ = a \end{cases}$ donde *a* es un parámetro real.

a) Discute el sistema para los posibles valores del parámetro *a*. [*4 puntos*]

b) Resuelve el sistema en todos los casos en los que tenga solución. [*4 puntos*]

c) Para los casos en los que tenga solución calcula el valor de: $5x+3y+2z$. [*2 puntos*]

32-a) Veamos el valor del determinante de la matriz de coeficientes del sistema:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0+0+1-(2+0-1) = 1-1 = 0 \qquad \text{pero el menor: } \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2-0 = 2 \neq 0$$

Por lo tanto: $\text{rang}(A) = 2$. Estudiemos qué pasa con la matriz ampliada:

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 6 \\ 1 & 1 & 0 & a \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \leftarrow F2-F1 \\ \leftarrow F3-F1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & a \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \leftarrow F2/2 \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & a \end{array}\right)$$

Si $a \neq 3$ la 2ª y la 3ª ecuación no pueden satisfacerse a la vez y el sistema es incompatible.

Si $a = 3$ la 2ª y la 3ª ecuación dicen lo mismo, de manera que una de ellas es redundante.

En este caso, $\text{rang}(A) = \text{rang}(A|B) = 2 < n = 3$ y el sistema es compatible e indeterminado.

- **Si $a \neq 3$ el sistema es incompatible.**
  Si $a = 3$ el sistema es compatible e indeterminado.

32-b) Solo hay solución en el caso $a = 3$. La matriz ampliada del sistema es:

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{-1} & \cancel{3} \end{array}\right) \begin{array}{l} \to x+z=0 \ , \ \ x=-z \\ \to y-z=3 \ , \ \ y=3+z \\ \\ \end{array} \Rightarrow \begin{cases} x = -t \\ y = 3+t \\ z = t \quad , t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

- **Para el caso $a = 3$ la solución del sistema es: $(x,y,z) = (-t, 3+t, t)$ con $t \in \mathbb{R}$.**

32-c) Para el único caso con solución, $a = 3$, la expresión buscada será:

$$5x+3y+2z = 5\cdot(-t)+3\cdot(3+t)+2\cdot(t) = -5t+9+3t+2t = 9$$

- **Para el caso $a = 3$ tendremos que: $5x+3y+2z = 9$**

33.- Sea el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x + 3y + 2z = -1 \\ x + k^2 y + 3z = 2k \\ 3x + 7y + 7z = k - 3 \end{cases}$ donde *k* es un parámetro real.

a) Discute el sistema para los posibles valores del parámetro *k*. [*6 puntos*]

b) Resuelve el sistema para el caso en el que $k = -1$. [*4 puntos*]

33-a) Veamos el valor del determinante de la matriz de coeficientes del sistema:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & k^2 & 3 \\ 3 & 7 & 7 \end{vmatrix} = 7k^2 + 27 + 14 - (6k^2 + 21 + 21) = k^2 - 1 = (k+1)(k-1)$$

y si $|A| = 0 \;\rightarrow\; (k+1)(k-1) = 0 \;\Rightarrow\; k = 1,\ k = -1$

Si $k \neq 1$ y $k \neq -1$: $\text{rang}(A) = \text{rang}(A|B) = 3 = n$ y el sistema es compatible y determinado.

Si $k = 1$, estudiemos la matriz ampliada:

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 7 & 7 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \leftarrow F2 - F1 \\ \leftarrow F3 - 3F1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

la 2ª y la 3ª ecuación no pueden satisfacerse a la vez y el sistema es incompatible.

Si $k = -1$, estudiemos la matriz ampliada:

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & -2 \\ 3 & 7 & 7 & -4 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \leftarrow F2 - F1 \\ \leftarrow F3 - 3F1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \end{array}\right) \quad \text{el menor } \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -2$$

la 2ª y la 3ª ecuación dicen lo mismo, de manera que una de ellas es redundante.

$\text{rang}(A) = \text{rang}(A|B) = 2 < 3 = n$ y el sistema es compatible e indeterminado.

- **Si $k \neq \pm 1$ el sistema es compatible y determinado.**
  Si $k = +1$ el sistema es incompatible.
  Si $k = -1$ el sistema es compatible e indeterminado.

33-b) Si $k = -1$, la matriz ampliada que obtuvimos anteriormente nos permite resolver:

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \rightarrow\; x + 2z = -1 - 3y \\ \rightarrow\; z = -1 + 2y \end{array} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - 7t \\ y = t \\ z = -1 + 2t \;,\; t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

(He considerado mejor llamar *t* a la variable *y* en lugar de a la *z*, así la solución es más 'limpia'.)

- **Para el caso $k = -1$ la solución del sistema es: $(x, y, z) = (1 - 7t, t, -1 + 2t)$ con $t \in \mathbb{R}$.**

34.- Sean las matrices: $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\\ k & 2\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}-1 & k & 2\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}$ donde k es un parámetro real.

a) Calcula, si existen, los valores de k para los que la matriz $A\cdot B$ es invertible*. [*5 puntos*]

b) Calcula, si existen, los valores de k para los que la matriz $B\cdot A$ es invertible*. [*5 puntos*]

[✳] Una matriz es invertible si existe su matriz inversa.

34-a) El producto buscado es:

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\\ k & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & k & 2\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & k & 0\\ -1 & 0 & 1\\ 2-k & k^2 & 2k-2\end{pmatrix}$$

Para que esta matriz cuadrada sea invertible es condición necesaria y suficiente que su determinante sea distinto de cero. Calculemos su determinante:

$$\begin{vmatrix}1 & k & 0\\ -1 & 0 & 1\\ 2-k & k^2 & 2k-2\end{vmatrix}=0+k(2-k)+0-\left[0+k^2-k(2k-2)\right]=2k-k^2-\left[k^2-2k^2+2k\right]=0$$

Así pues, como el determinante es siempre cero, la matriz $A\cdot B$ no es invertible nunca.

▸ **La matriz $A\cdot B$ no es invertible para ningún valor de *k*.**

34-b) El producto buscado es:

$$B\cdot A=\begin{pmatrix}-1 & k & 2\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\\ k & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1+2k & 2-k\\ 1-k & 0\end{pmatrix}$$

Para que esta matriz cuadrada sea invertible es condición necesaria y suficiente que su determinante sea distinto de cero. Calculemos su determinante:

$$\begin{vmatrix}-1+2k & 2-k\\ 1-k & 0\end{vmatrix}=0-(2-k)(1-k)=-(2-k)(1-k)$$

Este determinante será nulo si: $-(2-k)(1-k)=0 \;\rightarrow\; k=1\,,\ k=2$

Así pues, la matriz $B\cdot A$ será invertible cuando su determinante sea no nulo: si $k\neq 1$ o $k\neq 2$

▸ **La matriz $B\cdot A$ es invertible si $k\neq 1$ o $k\neq 2$.**

35.- Sean las matrices: $A=\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&-1\\1&0\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}6&-3\\5&-2\end{pmatrix}$.

Calcula la matriz X que es la solución de la ecuación matricial: $A\cdot X\cdot B=C$ [*10 puntos*]

35- Despejamos X en la ecuación dada:

(Como calcularemos más abajo, las inversas de A y B existen ambas pues los determinantes de A y B son ambos distintos de cero).

$A\cdot X\cdot B=C$ Multiplicamos por A^{-1} por la izquierda en ambos miembros

$A^{-1}\cdot A\cdot X\cdot B=A^{-1}\cdot C$

$X\cdot B=A^{-1}\cdot C$ Multiplicamos por B^{-1} por la derecha en ambos miembros

$X\cdot B\cdot B^{-1}=A^{-1}\cdot C\cdot B^{-1}$

$X=A^{-1}\cdot C\cdot B^{-1}$

Hemos utilizado que $A\cdot A^{-1}=B\cdot B^{-1}=I$ y que $X\cdot I=I\cdot X=X$.

Obtengamos las inversas de las matrices A y B:

$$A=\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}\rightarrow |A|=2\cdot1-1\cdot1=2-1=1 \quad \text{por lo tanto: } |A|\neq 0\rightarrow \exists A^{-1}$$

$$\mathrm{Adj}(A)=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&2\end{pmatrix}\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot \mathrm{Adj}(A)^T=\frac{1}{1}\cdot\begin{pmatrix}1&-1\\-1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&2\end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix}2&-1\\1&0\end{pmatrix}\rightarrow |B|=2\cdot0-(-1)\cdot1=0+1=1 \quad \text{por lo tanto: } |B|\neq 0\rightarrow \exists B^{-1}$$

$$\mathrm{Adj}(B)=\begin{pmatrix}0&-1\\1&2\end{pmatrix}\Rightarrow B^{-1}=\frac{1}{|B|}\cdot \mathrm{Adj}(B)^T=\frac{1}{1}\cdot\begin{pmatrix}0&1\\-1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\-1&2\end{pmatrix}$$

Y calculemos ahora la matriz X:

$$X=A^{-1}\cdot C\cdot B^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}6&-3\\5&-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&1\\-1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3&0\\2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1\\1&2\end{pmatrix}$$

▸ **La matriz X es: $X=\begin{pmatrix}1&-1\\1&2\end{pmatrix}$.**

36.- Sea el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x+y+2z=k \\ -4x-y-5z=2k \\ 3x+y+4z=k \end{cases}$ donde k es un parámetro real. Resuélvelo para todos los casos del parámetro k para los que tenga solución.	[*10 puntos*]

36- Veamos el valor del determinante de la matriz de coeficientes del sistema:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -4 & -1 & -5 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -4-15-8-(-6-16-5) = -27-(-27) = 0$$

pero el menor: $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} = -1-(-4) = -1+4 = 3 \neq 0$. Por lo tanto: $\text{rang}(A) = 2$.

Estudiemos qué pasa con la matriz ampliada:

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & k \\ -4 & -1 & -5 & 2k \\ 3 & 1 & 4 & k \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \leftarrow F2+4F1 \\ \leftarrow F3-3F1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & k \\ 0 & 3 & 3 & 6k \\ 0 & -2 & -2 & -2k \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \leftarrow F2/3 \\ \leftarrow F3/(-2) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & k \\ 0 & 1 & 1 & 2k \\ 0 & 1 & 1 & k \end{array}\right)$$

De las filas 2ª y 3ª deducimos que el sistema solo tendrá solución si se cumple que:

$$2k = k \;\rightarrow\; 2k-k=0 \;\rightarrow\; k=0$$

Si $k \neq 0$ el sistema será incompatible (la matriz ampliada tendrá rango 3).

Si $k = 0$ el sistema será compatible e indeterminado (la matriz ampliada tendrá rango 2).

En el caso $k=0$, la matriz ampliada queda así: $(A|B)_{k=0} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$

La solución será: $\begin{cases} x+y+2z=0 & \Rightarrow\; x+(-z)+2z=0 \;\rightarrow\; x=-z \\ \quad y+\;z=0 \;\rightarrow\; y=-z & \end{cases}$

Tomando $z=-t$, $t \in \mathbb{R}$ tendremos que: $x=t$, $y=t$, $z=-t$ con $t \in \mathbb{R}$

▸ **El sistema solo tiene solución si $k=0$. Esa solución es: $(x,y,z)=(t,t,-t)$ con $t \in \mathbb{R}$.**

37.- Sea el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x+\ \ y+\ z=k \\ 2x+a\cdot y-\ z=4 \\ x+\ 2y-2z=1 \end{cases}$ donde a y k son parámetros reales.

Discute el sistema para los posibles valores de los parámetros a y k. [*10 puntos*]

37- Veamos el valor del determinante de la matriz de coeficientes del sistema:

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & a & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix}=-2a-1+4-(a-4-2)=-3a+9$$

y si $|A|=0 \ \rightarrow\ -3a+9=0\ ,\ 3a=9 \ \Rightarrow\ a=3$

Si $a\neq 3$: $\mathrm{rang}(A)=\mathrm{rang}(A|B)=3=n$ y el sistema es compatible y determinado.

Si $a=3$, $\mathrm{rang}(A)=2$, pues hay un menor de orden 2 con determinante no nulo.

Estudiemos en este caso la matriz ampliada:

$$(A|B)=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & k \\ 2 & 3 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \leftarrow F2-2F1 \\ \leftarrow F3-F1 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & k \\ 0 & 1 & -3 & 4-2k \\ 0 & 1 & -3 & 1-k \end{array}\right)$$

De las filas 2ª y 3ª deducimos que el sistema solo tendrá solución si:

$$4-2k=1-k \ \rightarrow\ 4-1=2k-k \ \rightarrow\ k=3$$

Si $k\neq 3$ el sistema será incompatible (el rango de la matriz ampliada será 3).

Si $k=3$ el sistema será compatible e indeterminado (el rango de la matriz ampliada será 2).

- **Si $a\neq 3$ el sistema es compatible y determinado.**

Si $a=3$ $\begin{cases} \boldsymbol{k\neq 3} & \textbf{Sistema incompatible.} \\ \boldsymbol{k=3} & \textbf{Sistema compatible indeterminado.} \end{cases}$

38.- Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & a \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ donde a es un parámetro real.

a) Calcula para qué valores del parámetro a existe la matriz inversa de A. [4 *puntos*]

b) Para $a=-1$ calcula la matriz X en la ecuación matricial: $A\cdot X=B$ [6 *puntos*]

38-a) La matriz inversa de una matriz A se calcula así: $A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot \mathrm{adj}(A^T)=\frac{1}{|A|}\cdot \mathrm{adj}(A)^T$

Esa matriz inversa no se puede calcular si $|A|=0$, pues no está definida la división por cero.

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & 1 & a \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}=6+1+2a-(-3a+1-4)=7+2a-(-3a-3)=7+2a+3a+3=10+5a$$

Si $|A|=0 \;\rightarrow\; 10+5a=0 \;\Rightarrow\; a=-2$

- **La matriz inversa de A no existe si $\boldsymbol{a=-2}$**

38-b) Para $a=-1$, según el apartado anterior, la matriz inversa de A sí existe.

En la ecuación $A\cdot X=B$, multiplicamos en ambos miembros por A^{-1} por la izquierda:

$$A^{-1}\cdot A\cdot X=A^{-1}\cdot B$$

y como $A^{-1}\cdot A=I \;\rightarrow\; A^{-1}\cdot A\cdot X=X$ por lo que tendremos:

$$X=A^{-1}\cdot B$$

$$\mathrm{adj}(A)=\mathrm{adj}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} +(3+2) & -(1-1) & +(2+3) \\ -(1+2) & +(2-1) & -(4+1) \\ +(-1+3) & -(-2+1) & +(6-1) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 0 & 5 \\ -3 & 1 & -5 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$|A|=10+5a \;\rightarrow\; |A|=10+5\cdot(-1)=5 \;\Rightarrow\; A^{-1}=\frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix} 5 & 0 & 5 \\ -3 & 1 & -5 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}^T=\frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 5 & -5 & 5 \end{pmatrix}$$

$$X=A^{-1}\cdot B=\frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 5 & -5 & 5 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}=\frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix} 5+0+0 \\ 0+0+0 \\ 5+0+0 \end{pmatrix}=\frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- **La matriz buscada es $\boldsymbol{X=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$**

39.- Sea el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} 2x-5y-3z=3 \\ 2x+2y-3z=-4 \\ -4x+ay+6z=2 \end{cases}$ donde a es un parámetro real.

a) Discute el sistema según los valores de a. [5 *puntos*]

b) Resuelve el sistema para el caso en que sea compatible e indeterminado. [5 *puntos*]

39-a) El determinante de los coeficientes del sistema es:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -5 & -3 \\ 2 & 2 & -3 \\ -4 & a & 6 \end{vmatrix} = 24-60-6a-(24-60-6a)=0$$

Esto ocurre porque 3 veces la 1ª columna es igual a (-2) veces la 3ª columna.

Como $|A|=0$ para cualquier valor de a, el sistema nunca es compatible determinado.

El determinante 2×2 de la esquina superior izquierda de A es:

$$\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 4-(-10)=14\neq0$$

Por lo que el rango de la matriz A es 2.

Para estudiar el rango de la matriz ampliada $(A|B)$ orlamos el determinante 2×2 anterior:

$$\begin{vmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 2 & 2 & -4 \\ -4 & a & 2 \end{vmatrix} = 8-80+6a-(-24-20-8a) = -72+6a+44+8a = 14a-28$$

Este determinante es nulo si $14a-28=0 \;\rightarrow\; a=2$

Si $a\neq2$ el rango de $(A|B)$ es 3 y como $\text{rang}(A)=2$ el sistema es incompatible.

Si $a=2$ el rango de $(A|B)$ es 2 y como $\text{rang}(A)=2$ el sistema es compatible indeterminado.

▸ **Si $a\neq2$ el sistema es incompatible. Si $a=2$ el sistema es compatible indeterminado**.

39-b) El sistema es compatible indeterminado para $a=2$. En ese caso, la 3ª ecuación es innecesaria.

$$\begin{cases} 2x-5y=3+3z \\ 2x+2y=-4+3z \end{cases}$$

Restando las dos ecuaciones tenemos:

$$-7y=7 \;\rightarrow\; y=-1$$

Tomando $z=2t$, de la primera ecuación tenemos:

$$2x-5y=3+3z \;\rightarrow\; 2x=5\cdot(-1)+3+3\cdot2t=-2+6t \;\Rightarrow\; x=-1+3t$$

▸ **Para $a=2$, la solución del sistema es: $(x,y,z)=(-1+3t,-1,2t)$ con $t\in\mathbb{R}$.**

40.- Las matrices A y B son matrices 3×3 tales que $\det(2A)=48$ y $\det(B^3)=64$. Calcula:

a) $\det(\frac{1}{2}A^3)+\det(3B^{-1})$ detallando qué propiedades has utilizado. [*5 puntos*]

b) $\det\left(4A^{-1}B^T(B^{-1}A)^2\right)$ detallando qué propiedades has utilizado. [*5 puntos*]

Para una matriz cuadrada de orden n, $\det(k\cdot A)=k^n\cdot\det(A)$

Por lo tanto, como A es de orden 3: si $\det(2A)=48 \ \rightarrow\ 2^3\cdot\det(A)=48 \ \Rightarrow\ \det(A)=48/2^3=6$

Para una matriz cuadrada, $\det(A^n)=\left[\det(A)\right]^n$

Por lo tanto, si $\det(B^3)=64 \ \rightarrow\ \left[\det(B)\right]^3=64 \ \Rightarrow\ \det(B)=\sqrt[3]{64}=4$

a) Usamos que:

$$\det(k\cdot A)=k^n\cdot\det(A)$$

$$\det(A^n)=\left[\det(A)\right]^n \quad \text{y por lo tanto:} \quad \det(A^{-1})=\left[\det(A)\right]^{-1}$$

$$\begin{aligned}\det(\tfrac{1}{2}A^3)+\det(3B^{-1})&=\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\det(A^3)+3^3\cdot\det(B^{-1})=\\&=\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\left[\det(A)\right]^3+3^3\cdot\left[\det(B)\right]^{-1}=\\&=\frac{1}{8}\cdot 6^3+27\cdot 4^{-1}=\frac{216}{8}+\frac{27}{4}=\frac{108}{4}+\frac{27}{4}=\frac{135}{4}\end{aligned}$$

b) Usamos que:

$$\det(k\cdot A)=k^n\cdot\det(A)$$

$$\det(A^n)=\left[\det(A)\right]^n \quad \text{y por lo tanto:} \quad \det(A^{-1})=\left[\det(A)\right]^{-1}$$

$$\det(A\cdot B)=\det(A)\cdot\det(B)$$

$$\det(A^T)=\det(A)$$

$$\begin{aligned}\det\left(4A^{-1}B^T(B^{-1}A)^2\right)&=4^3\cdot\det(A^{-1})\cdot\det(B^T)\cdot\det\left((B^{-1}A)^2\right)=\\&=4^3\cdot\left[\det(A)\right]^{-1}\cdot\det(B)\cdot\left[\det(B^{-1}A)\right]^2=\\&=4^3\cdot\left[\det(A)\right]^{-1}\cdot\det(B)\cdot\left[\det(B^{-1})\cdot\det(A)\right]^2=\\&=4^3\cdot\left[\det(A)\right]^{-1}\cdot\det(B)\cdot\left[\det(B)\right]^{-2}\cdot\left[\det(A)\right]^2=\\&=4^3\cdot\left[\det(A)\right]^{+1}\cdot\left[\det(B)\right]^{-1}=\\&=64\cdot 6^1\cdot 4^{-1}=96\end{aligned}$$

$$\Rightarrow\quad \det(\tfrac{1}{2}A^3)+\det(3B^{-1})=\frac{135}{4}\ ,\quad \det\left(4A^{-1}B^T(B^{-1}A)^2\right)=96\,.$$

41.- De la matriz A sabemos que cumple la igualdad: $A^2 - 5A = I$, donde I es la matriz identidad.

a) Explica si existe o no la matriz inversa de A. Si existe, encuentra su expresión. [*2 puntos*]

b) Calcula la expresión más simple de la matriz X que resuelve $5AX + A^2 = A^4$. [*8 puntos*]

a) Por definición: $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$

Si tenemos: $A^2 - 5A = I$

Sacamos factor común por la izquierda:

$$A^2 - 5A = A(A - 5I) = I$$

Por lo tanto:

$$A^{-1} = (A - 5I)$$

La matriz A^{-1} existe pues hemos encontrado una expresión que, multiplicada por A, da la identidad.

b) Tenemos: $5AX + A^2 = A^4$

Puesto que A^{-1} sabemos que existe, multiplicamos por ella en ambos miembros por la izquierda:

$$A^{-1}(5AX + A^2) = A^{-1}A^4$$
$$5A^{-1}AX + A^{-1}A^2 = A^{-1}A^4$$

Y usamos que $A^{-1} \cdot A = I$

$$5\left(A^{-1}A\right)X + \left(A^{-1}A\right)A = \left(A^{-1}A\right)A^3$$
$$5\,IX + IA = IA^3$$
$$5X + A = A^3 \qquad (\ast)$$

Sabemos que la matriz A cumple que $A^2 - 5A = I \;\rightarrow\; A^2 = 5A + I$

Por lo que tenemos que:

$$A^3 = A^2 \cdot A =$$
$$= \left(5A + I\right) \cdot A = 5A^2 + A =$$
$$= 5\left(5A + I\right) + A = 25A + 5I + A = 26A + 5I$$

La ecuación ($\ast$) se convierte en:

$$5X + A = A^3$$
$$5X + A = 26A + 5I \;\rightarrow\; 5X = 25A + 5I \;\Rightarrow\; X = 5A + I$$

$$\Rightarrow \quad A^{-1} = (A - 5I) \quad , \quad X = 5A + I$$

42.- Sea el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} 2x-5y-3z=3 \\ -4x+ay+6z=2 \\ 2x+2y+bz=-4 \end{cases}$ donde a y b son parámetros reales.

Discute el sistema según los valores de a y b. [*10 puntos*]

Los primeros miembros de las dos primeras ecuaciones son muy similares:

$$\begin{cases} 2x-5y-3z=3 \xrightarrow{\times(-2)} -4x+10y+6z=-6 \\ -4x+ay+6z=2 \xrightarrow{\text{Idem}} -4x+ay+6z=2 \end{cases}$$

Si $a=10$ el sistema es incompatible (la misma cosa no puede valer al mismo tiempo -6 y 2)

Por lo tanto, para que el sistema tenga solución debe ocurrir que $a\neq 10$. Impondremos esta condición.

El determinante de los coeficientes del sistema es:

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & -5 & -3 \\ -4 & a & 6 \\ 2 & 2 & b \end{vmatrix}=2ab-60+24-(-6a+20b+24)=2ab+6a-20b-60$$

Si $|A|=0 \;\to\; 2ab+6a-20b-60=0$

$ab+3a-10b-30=0 \;\to\; b(a-10)+3(a-10)=0$

Como $(a-10)\neq 0$ dividimos por $(a-10)$ $\to$ $b+3=0$

$\Rightarrow\; b=-3$

Por lo tanto si $a\neq 10$ y $b\neq -3$ el sistema es compatible determinado.

Nos falta ver qué sucede si $a\neq 10$ y $b=-3$.

Usamos el método de Gauss:

$$\left(A|B\right)=\left(\begin{array}{ccc:c} 2 & -5 & -3 & 3 \\ -4 & a & 6 & 2 \\ 2 & 2 & -3 & -4 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ F2 \leftarrow F2+2F1 \\ F3 \leftarrow F3-F1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc:c} 2 & -5 & -3 & 3 \\ 0 & a-10 & 0 & 8 \\ 0 & 7 & 0 & -7 \end{array}\right)$$

De la 3ª ecuación deducimos que:

$7y=-7 \;\to\; y=-1$

Y usando este resultado en la 2ª ecuación (sabemos que $a\neq 10$):

$(a-10)y=8 \;\to\; (a-10)(-1)=8 \;\Rightarrow\; a-10=-8,\; a=2$

Es decir, la 2ª y la 3ª ecuación son equivalentes solo si $a=2$.

En ese caso, el sistema es compatible indeterminado (2 ecuaciones son la misma).

Si $a\neq 2$ las ecuaciones 2ª y 3ª producen una solución diferente y el sistema es incompatible.

$\Rightarrow$ $a=10$ Sistema Incompatible

$a\neq 10$ $b\neq -3$ Sistema Compatible Determinado

$b=-3$ $\begin{cases} \text{Si } a=2 & \text{Sistema Compatible Indeterminado} \\ \text{Si } a\neq 2 & \text{Sistema Incompatible} \end{cases}$

Nombre: ....

Todos los resultados deben obtenerse razonadamente, escribiendo todos los pasos necesarios.

1.- Sean las matrices: $A=\begin{pmatrix} a & 1 & -a \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $B=3\cdot A\cdot A^T$ ($a\in\mathbb{R}$, A^T es la matriz transpuesta de A).

a) Calcula para qué valor o valores de *a* la matriz A es invertible. [*2 puntos*]

b) Si el determinante de B da 108, calcula el valor o valores que puede tomar *a*. [*8 puntos*]

2.- Sean las matrices: $A=\begin{pmatrix} 6 & 0 & -6 \\ 0 & 3 & 0 \\ -6 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 5 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \\ -5 & -1 & 5 \end{pmatrix}$

Calcula la matriz X que resuelve la ecuación matricial: $A\cdot X=B(X+I)$ [10 *puntos*]

3.- Sea el sistema de ecuaciones lineales: $\left\{\begin{array}{l} 3y+kz=k+3 \\ kx+ky=6 \\ -x+z=k-3 \end{array}\right.$ donde $k\in\mathbb{R}$.

a) Discute el sistema para los posibles valores del parámetro *k*. [*6 puntos*]

b) Calcula la solución del sistema cuando sea compatible indeterminado. [*4 puntos*]

4.- Sea el sistema de ecuaciones lineales: $\left\{\begin{array}{l} x+y=0 \\ x-z=1 \\ ax+by+2z=1 \end{array}\right.$ donde $a, b\in\mathbb{R}$.

a) Discute el sistema para los posibles valores de los parámetros *a* y *b*. [*6 puntos*]

b) Calcula la solución del sistema cuando esa solución exista. [*4 puntos*]

1.- Sean las matrices: $A=\begin{pmatrix} a & 1 & -a \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $B=3\cdot A\cdot A^T$ ($a\in\mathbb{R}$, A^T es la matriz transpuesta de A).

a) Calcula para qué valor o valores de a la matriz A es invertible. [*2 puntos*]

b) Si el determinante de B da 108, calcula el valor o valores que puede tomar a. [*8 puntos*]

1a.- La matriz A será invertible (es decir, existe A^{-1}) solo en los casos que cumplan $|A|\neq 0$.

$$|A|=\begin{vmatrix} a & 1 & -a \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}=2a+0+0-(-a+0+2)=2a+a-2=3a-2$$

Si $|A|=0 \;\rightarrow\; 3a-2=0 \;\Rightarrow\; a=\dfrac{2}{3}$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{La matriz A será invertible si } a\neq \frac{2}{3}}$

1b.- Según los datos del problema: $|B|=108 \;\rightarrow\; |3\cdot A\cdot A^T|=108 \quad (\ast)$

Usaremos estas propiedades de los determinantes: $\left[\begin{array}{ll} ① & |k\cdot A_{n\times n}|=k^n\cdot|A_{n\times n}| \\ ② & |A\cdot B|=|A|\cdot|B| \\ ③ & |A^T|=|A| \end{array}\right.$

Aplicamos estas propiedades al primer miembro de la expresión ($\ast$):

$$\begin{aligned} |3\cdot A\cdot A^T| &= \ldots && \{\text{Usando la propiedad ①}\} \\ \ldots &= 3^3\cdot|A\cdot A^T|=\ldots && \{\text{Usando la propiedad ②}\} \\ \ldots &= 3^3\cdot|A|\cdot|A^T|=\ldots && \{\text{Usando la propiedad ③}\} \\ \ldots &= 3^3\cdot|A|\cdot|A|= \\ &= 27\cdot|A|^2 \end{aligned}$$

Así, la expresión ($\ast$) se convierte en:

$$27\cdot|A|^2=108 \;\rightarrow\; |A|^2=4 \;\Rightarrow\; |A|=\pm 2$$

En el apartado (a) teníamos $|A|=3a-2$ por lo que tendremos estas dos soluciones:

$$\begin{cases} 3a-2=-2 \;\rightarrow\; a=0 \\ 3a-2=+2 \;\rightarrow\; a=\dfrac{4}{3} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{El determinante de B da 108 si: } \begin{cases} a=0 \\ a=\frac{4}{3} \end{cases}}$

2.- Sean las matrices: $A=\begin{pmatrix}6&0&-6\\0&3&0\\-6&0&6\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}5&0&-5\\0&1&1\\-5&-1&5\end{pmatrix}$

Calcula la matriz X que resuelve la ecuación matricial: $A\cdot X=B(X+I)$ [10 *puntos*]

Vamos a mejorar la ecuación matricial:

$$A\cdot X=B(X+I)$$
$$A\cdot X=B\cdot X+B\cdot I$$
$$A\cdot X-B\cdot X=B$$
$$(A-B)\cdot X=B \qquad (\ast)$$

Esta ecuación tendrá solución única si $|A-B|\neq 0$

$$A-B=\begin{pmatrix}6&0&-6\\0&3&0\\-6&0&6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}5&0&-5\\0&1&1\\-5&-1&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&2&-1\\-1&1&1\end{pmatrix}$$

$$|A-B|=2+0+0-(2-1+0)=2-2+1=1$$

Como $|A-B|\neq 0$, existe $(A-B)^{-1}$: La ecuación matricial tiene solución y esa solución es única.

Multplicamos ambos miembros de la ecuación ($\ast$) por $(A-B)^{-1}$ por la izquierda:

$$(A-B)^{-1}(A-B)\cdot X=(A-B)^{-1}B$$
$$I\cdot X=(A-B)^{-1}B$$
$$X=(A-B)^{-1}B$$

Calculamos $(A-B)^{-1}$:

$$\operatorname{adj}(A-B)=\begin{pmatrix}+(2-(-1)) & -(0-1) & +(0-(-2))\\ -(0-(-1)) & +(1-1) & -(1-0)\\ +(0-(-2)) & -(-1-0) & +(2-0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&1&2\\-1&0&-1\\2&1&2\end{pmatrix}$$

$$(A-B)^{-1}=\frac{1}{|A-B|}\cdot\left[\operatorname{adj}(A-B)\right]^T=\frac{1}{1}\cdot\begin{pmatrix}3&1&2\\-1&0&-1\\2&1&2\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}3&-1&2\\1&0&1\\2&-1&2\end{pmatrix}$$

La solución de la ecuación matricial será:

$$X=(A-B)^{-1}B=\begin{pmatrix}3&-1&2\\1&0&1\\2&-1&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5&0&-5\\0&1&1\\-5&-1&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15-0-10 & 0-1-2 & -15-1+10\\ 5+0-5 & 0+0-1 & -5+0+5\\ 10-0-10 & 0-1-2 & -10-1+10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&-3&-6\\0&-1&0\\0&-3&-1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{X=\begin{pmatrix}5&-3&-6\\0&-1&0\\0&-3&-1\end{pmatrix}}$$

3.- Sea el sistema de ecuaciones lineales: $\begin{cases} 3y+kz=k+3 \\ kx+ky=6 \\ -x+z=k-3 \end{cases}$ donde $k\in\mathbb{R}$.

a) Discute el sistema para los posibles valores del parámetro *k*. [*6 puntos*]

b) Calcula la solución del sistema cuando sea compatible indeterminado. [*4 puntos*]

3a.- El determinante de la matriz de coeficientes del sistema es:

$$|\mathrm{A}|=\begin{vmatrix} 0 & 3 & k \\ k & k & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=0+0+0-(-k^2+0+3k)=k^2-3k=k(k-3)$$

$$\text{Si } |\mathrm{A}|=0 \;\rightarrow\; k(k-3)=0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} k=0 \\ k=3 \end{cases}$$

Así, para $k\neq 0\wedge k\neq 3 \;\rightarrow\; \mathrm{rang}(\mathrm{A})=\mathrm{rang}(\mathrm{A}|\mathrm{B})=3=n$ y el sistema es compatible determinado.

Para $k=0$ escribimos la matriz ampliada del sistema:

$$\left(\mathrm{A}|\mathrm{B}\right)=\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ -1 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right)\leftarrow \text{Equivale a: } 0x+0y+0z=6$$

Y el sistema será incompatible pues $0x+0y+0z=6$ no tiene solución.

Para $k=3$ usamos el método de Gauss en la matriz ampliada del sistema:

$$\left(\mathrm{A}|\mathrm{B}\right)=\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & 3 & 6 \\ 3 & 3 & 0 & 6 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{l}\leftarrow \mathrm{F1}/3 \\ \leftarrow \mathrm{F2}/3 \\ \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow \mathrm{F3}+\mathrm{F2}\end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

La tercera fila es idéntica a la primera fila y no aporta información. Podemos prescindir de ella.
El sistema será compatible indeterminado pues las dos primeras filas son independientes, es decir, tendremos que: $\mathrm{rang}(\mathrm{A})=\mathrm{rang}(\mathrm{A}|\mathrm{B})=2<n=3$.

$\Rightarrow$

Para $k\neq 0\wedge k\neq 3$ el sistema es compatible determinado.
Para $k=0$ el sistema es incompatible.
Para $k=3$ el sistema es compatible indeterminado.

3b.- Para el caso compatible indeterminado, según obtuvimos antes con el método de Gauss, tenemos:

$$\left.\begin{array}{l} y+z=2 \\ x+y=2 \end{array}\right\}\begin{array}{l} \rightarrow\; y=2-z \\ \qquad\qquad \rightarrow\; x=2-y \;\Rightarrow\; x=2-(2-z)=z \end{array}$$

Si elegimos $z=t$ siendo t un parámetro real, la solución para el caso compatible indeterminado es:

$\Rightarrow$

El sistema solo es compatible indeterminado para $k=3$, y la solución es: $(x,y,z)=(t,2-t,t)$ con $t\in\mathbb{R}$

4.- Sea el sistema de ecuaciones lineales: $\begin{cases} x + y = 0 \\ x - z = 1 \\ a x + b y + 2z = 1 \end{cases}$ donde $a, b \in \mathbb{R}$.

a) Discute el sistema para los posibles valores de los parámetros *a* y *b*. [*6 puntos*]

b) Calcula la solución del sistema cuando esa solución exista. [*4 puntos*]

4a.- El determinante de la matriz de coeficientes del sistema es:

$$|\mathrm{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ a & b & 2 \end{vmatrix} = 0+0-a-(0-b+2) = -a+b-2$$

Si $|\mathrm{A}| = 0 \;\rightarrow\; -a+b-2=0 \;\Rightarrow\; b=a+2$

Así, para $b \neq a+2 \;\rightarrow\;$ $\operatorname{rang}(\mathrm{A}) = \operatorname{rang}(\mathrm{A}|\mathrm{B}) = 3 = n$ y el sistema es compatible determinado.

Para $b=a+2$ usamos el método de Gauss en la matriz ampliada del sistema:

$$(\mathrm{A}|\mathrm{B}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ a & a+2 & 2 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \leftarrow \mathrm{F2}-\mathrm{F1} \\ \leftarrow \mathrm{F3}-a\cdot\mathrm{F1} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow \mathrm{F3}+2\cdot\mathrm{F2} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

La tercera fila equivale a la ecuación $0x+0y+0z=3$, que no tiene solución.
Por lo tanto el sistema no tiene solución, sus ecuaciones son incompatibles.

$\Rightarrow$ Para $b \neq a+2$ el sistema es compatible determinado.
Para $b = a+2$ el sistema es incompatible.

4b.- La solución solo existe si $b \neq a+2$, podemos resolverlo usando la regla de Cramer:

$$x = \frac{1}{|\mathrm{A}|}\cdot\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & b & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{|\mathrm{A}|}\cdot\left[0+0-1-(0+0+2)\right] = \frac{1}{|\mathrm{A}|}\cdot(-3) = -\frac{3}{b-a-2}$$

$$y = \frac{1}{|\mathrm{A}|}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ a & 1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{|\mathrm{A}|}\cdot\left[2+0+0-(0-1+0)\right] = \frac{1}{|\mathrm{A}|}\cdot(+3) = +\frac{3}{b-a-2}$$

$$z = \frac{1}{|\mathrm{A}|}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ a & b & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{|\mathrm{A}|}\cdot\left[0+0+a-(0+b+1)\right] = \frac{1}{|\mathrm{A}|}\cdot(a-b-1) = \frac{a-b-1}{b-a-2}$$

$\Rightarrow$ La solución del sistema es: $(x,y,z) = \left(-\dfrac{3}{b-a-2}, \dfrac{3}{b-a-2}, \dfrac{a-b-1}{b-a-2}\right)$

Nombre: ....

Todos los resultados deben obtenerse razonadamente, escribiendo todos los pasos necesarios.

1.- Sea la matriz: $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

a) Calcula, si es posible hacerlo, el valor de: $A^T - A^{-1}$ [*4 puntos*]

b) Calcula: A^{2023} [*6 puntos*]

2.- Sea la matriz: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & u & 2u \\ u & 2 & u+2 \end{pmatrix}$ donde $u \in \mathbb{R}$.

a) Estudia el rango de A para los posibles valores del parámetro *u*. [*6 puntos*]

b) Para $u = 3$ resuelve la ecuación matricial $A \cdot X = A^2$. [*4 puntos*]

3.- Sea el sistema de ecuaciones lineales: $\begin{cases} x & -2y & +z & = & -4 \\ 2x & +y & -(a-1)z & = & 4 \\ 4x & -(a+1)y & +z & = & -2a \end{cases}$ donde $a \in \mathbb{R}$.

a) Discute el sistema para los posibles valores del parámetro *a*. [*6 puntos*]

b) Calcula la solución del sistema cuando sea compatible indeterminado. [*4 puntos*]

4.- Sea el sistema de ecuaciones lineales: $\begin{cases} x + 3y - 2z = 2 \\ kx - 4y - kz = 4 \\ -2x + 9y - z = 6 \end{cases}$ donde $k \in \mathbb{R}$.

a) Discute el sistema para los posibles valores del parámetro *k*. [*6 puntos*]

b) Calcula la solución del sistema cuando esa solución exista. [*4 puntos*]

1.- Sea la matriz: $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

a) Calcula, si es posible hacerlo, el valor de: $A^T - A^{-1}$ [*4 puntos*]

b) Calcula: A^{2023} [*6 puntos*]

1a.- La matriz A será invertible (es decir, existe A^{-1}) solo si se cumple que: $|A| \neq 0$.

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 1 + 0 - (0+0+0) = -1. \text{ Como } |A| \neq 0, \text{ existe } A^{-1}.$$

Calculamos A^{-1}:

$$\operatorname{adj} A = \begin{pmatrix} +(0-0) & -(0-0) & +(-1-0) \\ -(0-(-1)) & +(0-0) & -(0-0) \\ +(0-0) & -(0-1) & +(0-0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot [\operatorname{adj} A]^T = \frac{1}{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T = -1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^T - A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}^T - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{matriz nula}$$

$$\Rightarrow \boxed{A^T - A^{-1} = \text{matriz nula}}$$

1b.- Calculemos el valor de A^2 y de A^3 para ver si podemos deducir el valor de A^{2023}

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+0+0 & 0+0-1 & 0+0+0 \\ 0+0+0 & 0+0+0 & 1+0+0 \\ 0-1+0 & 0+0+0 & 0+0+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-1+0 & 0+0+0 & 0+0+0 \\ 0+0+0 & 0+0-1 & 0+0+0 \\ 0+0+0 & 0+0+0 & -1+0+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -\mathrm{I}$$

Como $2023 = 2022 + 1 = 3 \times 674 + 1$ tendremos:

$$A^{2023} = A^{3\times 674+1} = A^{3\times 674} \cdot A^1 = (A^3)^{674} \cdot A = (-\mathrm{I})^{674} \cdot A =$$

$$= (-1)^{674} \cdot (\mathrm{I})^{674} \cdot A = (+1) \cdot \mathrm{I} \cdot A = (+1) \cdot A = A$$

$$\Rightarrow \boxed{A^{2023} = A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & +1 \\ +1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}}$$

2.- Sea la matriz: $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 2 & u & 2u\\ u & 2 & u+2\end{pmatrix}$ donde $u\in\mathbb{R}$.

a) Estudia el rango de A para los posibles valores del parámetro *u*. [*6 puntos*]

b) Para $u=3$ resuelve la ecuación matricial $A\cdot X=A^2$. [*4 puntos*]

2a.- El rango máximo que puede tener la matriz A es 3, por ser de dimensión 3×3. Veamos si lo tiene:

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 1 & 2\\ 2 & u & 2u\\ u & 2 & u+2\end{vmatrix}=1\cdot u\cdot(u+2)+2\cdot 2\cdot 2+1\cdot 2u\cdot u-\left[2\cdot u\cdot u+2\cdot 2u\cdot 1+2\cdot 1\cdot(u+2)\right]=$$

$$=u^2+\cancel{2u}+8+\cancel{2u^2}-\left[\cancel{2u^2}+4u+\cancel{2u}+4\right]=u^2-4u+4=(u-2)^2$$

Si $|A|=0\ \rightarrow\ (u-2)^2=0\ \Rightarrow\ u=2$

Por lo tanto, si $u\neq 2$ tendremos que $|A|\neq 0$ y será: $\operatorname{rang}(A)=3$

Para $u=2$ la matriz A se convierte en:

$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 4\\ 2 & 2 & 4\end{pmatrix}$ y vemos que las filas 2 y 3 son el doble de la fila 1.

En este caso solo hay una fila independiente, luego: $\operatorname{rang}(A)=1$

$$\Rightarrow\ \boxed{\begin{cases}\text{Si } u=2 & \rightarrow\ \operatorname{rang}(A)=1\\ \text{Si } u\neq 2 & \rightarrow\ \operatorname{rang}(A)=3\end{cases}}$$

2b.- Para $u=3$ tenemos que $|A|\neq 0$ (solo se anula para $u=2$) con lo que existe A^{-1}.

Para resolver la ecuación $A\cdot X=A^2$ multiplicamos en ambos miembros por A^{-1} por la izquierda:

$$\begin{aligned}A\cdot X&=A^2\\ A^{-1}\cdot A\cdot X&=A^{-1}\cdot A^2\\ \left(A^{-1}\cdot A\right)\cdot X&=\left(A^{-1}\cdot A\right)\cdot A\\ I\cdot X&=I\cdot A\\ X&=A\end{aligned}$$

Hemos utilizado que: $A^{-1}\cdot A=I$ y que cualquier matriz multiplicada por la identidad da ella misma.

$$X=A\big|_{u=3}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 2 & u & 2u\\ u & 2 & u+2\end{pmatrix}_{u=3}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 2 & 3 & 6\\ 3 & 2 & 5\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\ \boxed{X=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 2 & 3 & 6\\ 3 & 2 & 5\end{pmatrix}}$$

3.- Sea el sistema de ecuaciones lineales: $\begin{cases} x & -2y & +z & = & -4 \\ 2x & +y & -(a-1)z & = & 4 \\ 4x & -(a+1)y & +z & = & -2a \end{cases}$ donde $a \in \mathbb{R}$.

a) Discute el sistema para los posibles valores del parámetro a. [*6 puntos*]

b) Calcula la solución del sistema cuando sea compatible indeterminado. [*4 puntos*]

3a.- El determinante de la matriz de coeficientes del sistema es:

$$|\mathrm{A}| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -(a-1) \\ 4 & -(a+1) & 1 \end{vmatrix} = 1-2(a+1)+8(a-1)-\left[\cancel{4}+(a+1)(a-1)-\cancel{4}\right] =$$

$$= 1-2a-2+8a-8-\left[a^2-1\right] = -a^2+6a-8$$

$$\text{Si } |\mathrm{A}| = 0 \ \rightarrow \ -a^2+6a-8=0 \ \Rightarrow \ \begin{cases} b^2-4ac = 6^2-4\cdot(-1)\cdot(-8) = 4 \\ a = \dfrac{-(+6)\pm\sqrt{4}}{2\cdot(-1)} = \dfrac{-6\pm 2}{-2} = 3\pm 1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} \end{cases}$$

Así, para $a \neq 2 \wedge a \neq 4 \ \rightarrow \ \operatorname{rang}(\mathrm{A}) = \operatorname{rang}(\mathrm{A}|\mathrm{B}) = 3 = n$ y el sistema es compatible determinado.

Para $a = 4$ escribimos la matriz ampliada del sistema:

$$(\mathrm{A}|\mathrm{B}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -4 \\ 2 & 1 & -3 & 4 \\ 4 & -5 & 1 & -8 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \leftarrow \mathrm{F2}-2\cdot\mathrm{F1} \\ \leftarrow \mathrm{F3}-4\cdot\mathrm{F1} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 5 & -5 & 12 \\ 0 & 3 & -3 & 8 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \leftarrow \mathrm{F2}/5 \\ \leftarrow \mathrm{F3}/3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 12/5 \\ 0 & 1 & -1 & 8/3 \end{array}\right)$$

Y el sistema será incompatible pues las dos últimas filas (ecuaciones) no pueden cumplirse a la vez.

Para $a = 2$ usamos el método de Gauss en la matriz ampliada del sistema:

$$(\mathrm{A}|\mathrm{B}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -4 \\ 2 & 1 & -1 & 4 \\ 4 & -3 & 1 & -4 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \leftarrow \mathrm{F2}-2\cdot\mathrm{F1} \\ \leftarrow \mathrm{F3}-4\cdot\mathrm{F1} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 5 & -3 & 12 \\ 0 & 5 & -3 & 12 \end{array}\right)$$

La tercera fila es idéntica a la segunda fila y no aporta información. Podemos prescindir de ella.
El sistema será compatible indeterminado pues las dos primeras filas son independientes, es decir, tendremos que: $\operatorname{rang}(\mathrm{A}) = \operatorname{rang}(\mathrm{A}|\mathrm{B}) = 2 < n = 3$.

$\Rightarrow$

Para $a \neq 2 \wedge a \neq 4$ el sistema es compatible determinado.
Para $a = 4$ el sistema es incompatible.
Para $a = 2$ el sistema es compatible indeterminado.

3b.- Para el caso compatible indeterminado, según obtuvimos antes con el método de Gauss, tenemos:

$$\left.\begin{array}{r} x-2y+z=-4 \\ 5y-3z=12 \end{array}\right\} \rightarrow \ y = \frac{12+3z}{5} \ ; \ \text{ elegimos: } z = 5t+1 \ \Rightarrow \ y = \frac{12+(15t+3)}{5} = 3+3t$$

En la primera ecuación: $x = 2y-z-4 \ \rightarrow \ x = 2(3+3t)-(5t+1)-4 \ \Rightarrow \ x = t+1$

$\Rightarrow$

El sistema solo es compatible indeterminado para $a = 2$,
y la solución es: $(x,y,z) = (t+1, 3+3t, 5t+1)$ con $t \in \mathbb{R}$

4.- Sea el sistema de ecuaciones lineales: $\left\{ \begin{array}{r} x+3y-2z=2 \\ kx-4y-kz=4 \\ -2x+9y-\ \ z=6 \end{array} \right.$ donde $k \in \mathbb{R}$.

a) Discute el sistema para los posibles valores del parámetro *k*. [*6 puntos*]

b) Calcula la solución del sistema cuando esa solución exista. [*4 puntos*]

4a.- El determinante de la matriz de coeficientes del sistema es:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ k & -4 & -k \\ -2 & 9 & -1 \end{vmatrix} = 4-18k+6k-(-16-9k-3k) = 4\cancel{-12k}-(-16\cancel{-12k}) = 20$$

El determinante es siempre distinto cero pues no depende del valor de *k*.

Así, para cualquier valor de *k*, tendremos que:

$\text{rang}(A) = \text{rang}(A|B) = 3 = n$ y el sistema es siempre compatible determinado.

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{Para cualquier valor de } k \text{ el sistema es compatible determinado.}}$

4b.- Encontraremos la solución del sistema, para cualquier valor de *k*, con la regla de Cramer:

$$x = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 4 & -4 & -k \\ 6 & 9 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{20} \cdot \left[8-72\cancel{-18k}-(48\cancel{-18k}-12) \right] = \frac{1}{20} \cdot (-100) = -5$$

$$y = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ k & 4 & -k \\ -2 & 6 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{20} \cdot \left[-4-12k+4k-(16-6k-2k) \right] = \frac{1}{20} \cdot (-20) = -1$$

$$z = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ k & -4 & 4 \\ -2 & 9 & 6 \end{vmatrix} = \frac{1}{20} \cdot \left[-24+\cancel{18k}-24-(16+36+\cancel{18k}) \right] = \frac{1}{20} \cdot (-100) = -5$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{La solución del sistema es: } (x,y,z) = (-5,-1,-5) \ \ \forall k \in \mathbb{R}}$