Radiación de ondas gravitatorias

Según la teoría de la relatividad general, la pérdida de energía por ondas gravitatorias viene dada por la expresión

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -\frac{G}{45c^5}\,\dddot{D}^2{}_{\alpha\beta} \tag{1}$$

donde G es la constante de gravitación universal, c la velocidad de la luz en el vacío y $D_{\alpha\beta}$ es el tensor cuadripolar de masa, definido por

$$D_{\alpha\beta} = \int \mu(3x^\alpha x^\beta - \delta_{\alpha\beta}x_\gamma^2)dV \tag{2}$$

En la ecuación 1 la notación $\dddot{D}_{\alpha\beta}$ se refiere a la derivada tercera con respecto del tiempo[1].

Desarrollando la derivada tercera de la ecuación 1 y usando la definición de $D_{\alpha\beta}$ dada en la ecuación 2, se llega a que la pérdida de energía por ondas gravitatorias en un sistema formado por dos cuerpos de masas m_1 y m_2 es

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -\frac{32\,G}{5c^5}\left(\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\right)^2 r^4\omega^6 \tag{3}$$

donde ω es la velocidad angular de rotación del sistema, que por la tercera ley de Kepler la podemos expresar como

$$\omega^2 = \frac{G(m_1+m_2)}{r^3} \tag{4}$$

Por otra parte la energía total, $\mathcal{E}$, del sistema es la suma de la energía cinética y potencial cuyo valor es como ya sabemos

$$\mathcal{E} = -\frac{Gm_1m_2}{2r} \tag{5}$$

Sustituyendo en la ecuación 3 los valores dados por la ecuaciones 4 y 5 se llega a la ecuación diferencial de primer grado en el tiempo

$$\dot{r} = -\frac{64\,G^3 m_1 m_2(m_1+m_2)}{5c^5 r^3} \tag{6}$$

que admite una fácil solución sin más que integrar respecto de r y t

$$\int_{r_0}^{r} r^3 dr = -\frac{64\,G^3 m_1 m_2(m_1+m_2)}{5c^5}\int_{t_0}^{t} dt, \tag{7}$$

dando como resultado

[1] Véase Landau y Lifshitz, *Teoría clásica de los campos*, Ed. Reverté, pág 454-455.

$$\frac{r^4}{4} - \frac{r_0^4}{4} = -\frac{64\, G^3 m_1 m_2 (m_1 + m_2)}{5c^5}(t - t_0) \tag{8}$$

donde r_0 es la posición inicial en el instante inicial t_0. La fórmula 8 nos permite hacer una estimación del tiempo en que un sistema formado por dos cuerpos pierde su energía por radiación de ondas gravitatorias. Podemos tomar pues que en el tiempo inicial $t_0 = 0$, r_0 es la distancia a la que se hallan los dos cuerpos, y en el tiempo final t esta distancia se ha anulado, $r = 0$, ya que los dos cuerpos han colapsado. Sustituyendo todo lo dicho en la ecuación 8 llegamos a

$$\frac{r_0^4}{4} = \frac{64\, G^3 m_1 m_2 (m_1 + m_2)}{5c^5}\, t \tag{9}$$

y despejando de esta última el tiempo

$$t = \frac{5c^5 r_0^4}{256\, G^3 m_1 m_2 (m_1 + m_2)} \tag{10}$$

Vemos pues como en la ecuación 10 el tiempo empleado por un sistema en perder su energía por radiación gravitatoria crece con la cuarta potencia de la distancia entre los dos cuerpos. Además aparece un factor c^5 en el numerador y un factor G^3 en el denominador, los cuales van a generar valores muy altos para el valor del tiempo. Solo en el caso de masas extraordinariamente grandes y distancias pequeñas el tiempo se reduce de manera significativa.

A modo de ejemplo vamos a hacer una estimación de este valor del tiempo para un sistema binario formado por dos estrellas de neutrones que podemos suponer de masas iguales $m_1 = m_2 = m$ y siendo cada una de ellas el doble de la masa solar, $m = 2\,\mathrm{M}_\odot$, y que se hallan a una distancia de 500 000 km ($r_0 = 5 \times 10^8$ m). Las estrellas de neutrones tienen un límite teórico denominado límite de Tolman-Oppenheimer-Volkoff, que es del orden de $2.16\,\mathrm{M}_\odot$, con $\mathrm{M}_\odot = 1.98 \times 10^{30}$ kg. Llevados todos estos valores a la fórmula 10 obtenemos que el tiempo de colapso de estas dos estrellas de neutrones es

$$t = \frac{5c^5 r_0^4}{4096\, G^3 M_\odot^3} \simeq 8.048 \times 10^{13}\,\mathrm{s} = 2\,550\,465 \text{ años}$$

Así pues el tiempo sería del orden de 2,5 millones de años. Si la distancia se redujera a la mitad el tiempo cambiaría en un factor $\frac{1}{16}$, siendo ahora del orden de 159 404 años. A distancias de unos cuantos miles de km este tiempo llega a ser de horas y días. La relatividad general predice pues el tiempo de colapso de sistemas estelares masivos.