El Péndulo Matemático

1 Introducción teórica

Un péndulo matemático consta básicamente de un cuerpo puntual sujeto por un hilo y al que hacemos oscilar. El caso que vamos a tratar es el de un hilo de longitud l a cuyo extremo hay unido un cuerpo de masa m. La ecuación del movimiento es

$$\vec{M} = \vec{r} \wedge \vec{F} \tag{1}$$

y en nuestro caso particular la fuerza $\vec{F}$ es igual al peso P y el vector $\vec{r}$ tiene por módulo la distancia del centro de masas al centro de suspensión que en este caso es l. Desarrollando la ecuación (1) y usando la ecuación general de la dinámica de la rotación llegamos a

$$I\alpha = -lmg \sin\phi \tag{2}$$

si ahora tenemos en cuenta que la aceleración angular se puede poner como $\alpha = d^2\phi/dt^2$ y que los ángulos son pequeños, $\sin\phi \approx \phi$, y que al ser un cuerpo puntual el momento de inercia es $I = ml^2$ la ecuación (2) se reduce a

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} + \frac{g}{l}\phi = 0 \tag{3}$$

que no es más que la ecuación de un *movimiento armónico simple* y donde la pulsación es $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$ y como el periodo es $T = \frac{2\pi}{\omega}$ tenemos pues la siguiente relación

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \tag{4}$$

Variando la longitud del péndulo obtendremos diferentes periodos y con la ecuación (4) podemos obtener el valor de la aceleración de la gravedad g.

2 Desarrollo experimental

El procedimiento que se ha seguido en el laboratorio ha sido el de medir el periodo en función de la longitud del péndulo. Para ello lo que se hace es dar una pequeña amplitud de oscilación, esperar a que se estabilice el péndulo y cronometrar cuánto tiempo tarda en realizar 20 oscilaciones. Para cada longitud esta medida de tiempo se repite tres veces y de esas tres nos quedamos con el valor medio. El valor del periodo T será $T = t/20$ donde t es el tiempo empleado en las 20 oscilaciones. Para tener varios datos lo que se ha hecho ha sido calcular los periodos para 5 longitudes.

3 Resultados

Siguiendo lo comentado en el apartado anterior los resultados obtenidos en el laboratorio han sido los siguientes:

$l(m)$	0.200	0.400	0.600	0.800	1.000	1.200	1.300	1.400
$T(s)$	0.89	1.27	1.56	1.78	2.10	2.17	2.28	2.36

El error absoluto de las medidas de longitud es de 1 mm (0.001 m) y el de los periodos 0.01 s ya que son las divisiones más pequeñas que nuestros aparatos poseen.

4 Análisis y discusión

Con los datos experimentales obtenidos en la tabla anterior vamos a calcular el valor de la aceleración de la gravedad. Si de la ecuación (4) despejamos el periodo en función de la longitud tenemos $T^2 = \frac{4\pi^2}{g} l$. Así pues podemos hacer un ajuste lineal por mínimos cuadrados de T^2 en función de l y la pendiente de este recta tiene que dar el valor $\frac{4\pi^2}{g}$ de donde fácilmente podremos despejar g.

Usando el programa de ajuste de datos experimentales *Origin*, la gráfica de nuestras medidas y el ajuste se muestran en la siguiente figura:

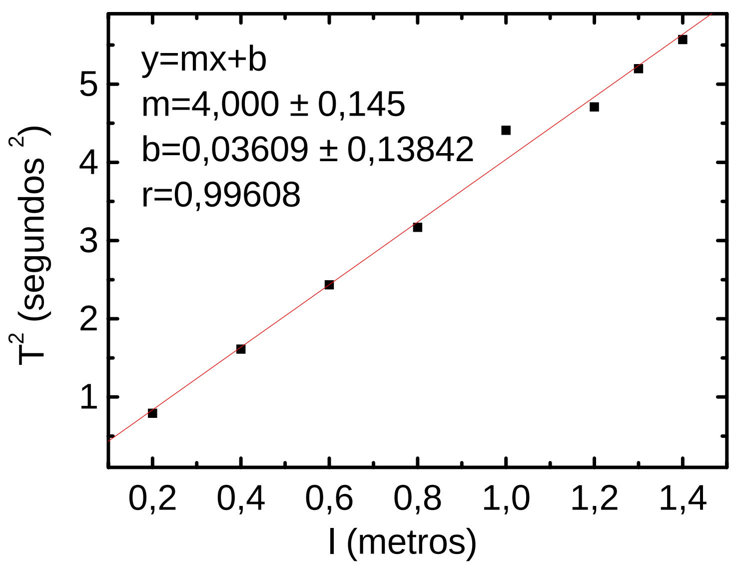

Figura 1: Ajuste de los datos experimentales por mínimos cuadrados.

En la gráfica los puntos corresponden a los datos experimentales de la tabla y la recta viene de hacer el ajuste. La pendiente de esta recta es pues $m = 4.000 \pm 0.145$, y como esta pendiente ha de dar

$$\frac{4\pi^2}{g} \tag{5}$$

despejando de esta última ecuación tenemos

$$g = \frac{4\pi^2}{m} \tag{6}$$

por lo tanto el valor que obtenemos para la aceleración de la gravedad es

$$g = 9.86 \ m/s^2 \tag{7}$$

Ahora sólo queda hallar el error. Si derivamos en la ecuación (6) respecto de m tendremos

$$\epsilon_g = \frac{4\pi^2}{m^2}\epsilon_m \tag{8}$$

y como $\epsilon_m = 0.145$ tenemos $\epsilon_g = 0.358$, así pues el valor definitivo de la aceleración de la gravedad es

$$g = 9.86 \pm 0.36 \ m/s^2 \tag{9}$$

5 Conclusión

El valor que hemos obtenido en nuestro experimento está muy cercano al valor estandar que se toma para la aceleración de la gravedad, que es 9.80 m/s^2 por lo que podemos concluir que dadas las limitaciones físicas de nuestra experiencia el resultado es más que satisfactorio.