

Una finca agrícola cultiva tres tipos de plantas que producen: **tomates**, **pimientos** y **calabacines**. Estas plantas son susceptibles de sufrir una plaga que puede afectar su rendimiento. La finca utiliza tres métodos de control de plagas: **control biológico**, **pesticidas químicos** y **métodos orgánicos**. La efectividad de cada método varía según el tipo de planta.

- El **50%** del área está dedicada a **tomates**, el **30%** a **pimientos** y el **20%** a **calabacines**.
- Para los **tomates**, la finca utiliza **control biológico** en el **40%** de la finca, **pesticidas químicos** en el **30%** y **métodos orgánicos** en el **30%**.
- Para los **pimientos**, la finca utiliza **control biológico** en el **30%**, **pesticidas químicos** en el **40%** y **métodos orgánicos** en el **30%**.
- Para los **calabacines**, se utiliza **control biológico** en el **20%**, **pesticidas químicos** en el **50%** y **métodos orgánicos** en el **30%**.

La efectividad de cada método de control para evitar la plaga, en porcentaje, es la siguiente:

- Para los **tomates**:
 - El **control biológico** tiene un **85%** de efectividad.
 - Los **pesticidas químicos** tienen un **95%** de efectividad.
 - Los **métodos orgánicos** tienen un **80%** de efectividad.
- Para los **pimientos**:
 - El **control biológico** tiene un **80%** de efectividad.
 - Los **pesticidas químicos** tienen un **90%** de efectividad.
 - Los **métodos orgánicos** tienen un **75%** de efectividad.
- Para los **calabacines**:
 - El **control biológico** tiene un **70%** de efectividad.
 - Los **pesticidas químicos** tienen un **85%** de efectividad.
 - Los **métodos orgánicos** tienen un **65%** de efectividad.

Responda a estos apartados:

1. [0.75 puntos]

¿Cuál es la probabilidad de que una planta seleccionada al azar en toda la finca esté libre de plagas (sin importar qué tipo de planta ni el método utilizado)?

2. [0.75 puntos]

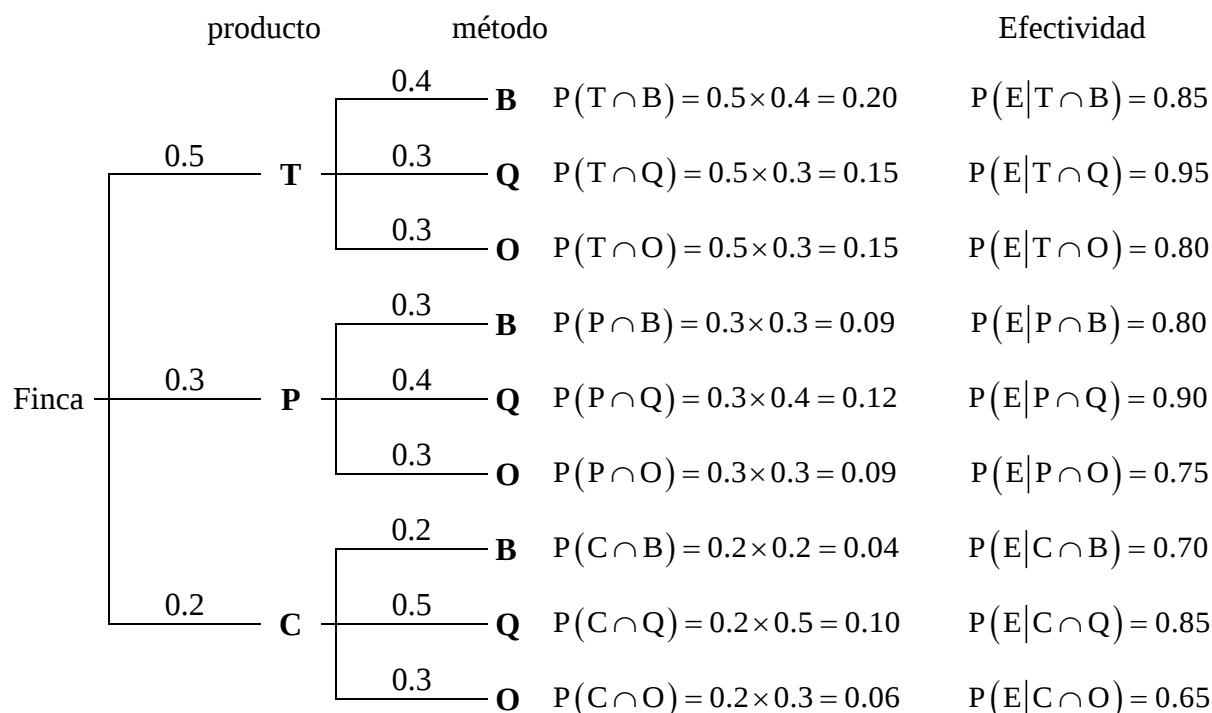
Si se sabe que una planta seleccionada está libre de plagas, ¿cuál es la probabilidad de que esa planta sea un pimiento?

3. [1 punto]

Un consumidor compra 11 tomates que han sido controlados mediante métodos orgánicos. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos 3 de ellos hayan evitado los efectos de la plaga?

Llamaremos T a los tomates, P a los pimientos y C a los calabacines.
 Llamaremos B al control biológico, Q a los pesticidas químicos y O a los métodos orgánicos.
 Llamaremos E a la efectividad del tratamiento usado.

Hagamos el diagrama de árbol correspondiente al problema:



1. Probabilidad de que una planta esté libre de plagas.

Será la probabilidad total de que el tratamiento aplicado sea efectivo.

$$\begin{aligned}
 P(E) &= P(T \cap B) \cdot P(E|T \cap B) + P(T \cap Q) \cdot P(E|T \cap Q) + P(T \cap O) \cdot P(E|T \cap O) + \\
 &\quad + P(P \cap B) \cdot P(E|P \cap B) + P(P \cap Q) \cdot P(E|P \cap Q) + P(P \cap O) \cdot P(E|P \cap O) + \\
 &\quad + P(C \cap B) \cdot P(E|C \cap B) + P(C \cap Q) \cdot P(E|C \cap Q) + P(C \cap O) \cdot P(E|C \cap O) = \\
 &= 0.20 \cdot 0.85 + 0.15 \cdot 0.95 + 0.15 \cdot 0.80 + \quad (\leftarrow \text{prob. de tomates libres de plagas}) \\
 &\quad + 0.09 \cdot 0.80 + 0.12 \cdot 0.90 + 0.09 \cdot 0.75 + \quad (\leftarrow \text{prob. de pimientos libres de plagas}) \\
 &\quad + 0.04 \cdot 0.70 + 0.10 \cdot 0.85 + 0.06 \cdot 0.65 \quad (\leftarrow \text{prob. de calabacines libres de plagas}) \\
 &= 0.832 = 83.2\%
 \end{aligned}$$

La probabilidad de que el tratamiento sea efectivo es 83,2%.

2. Probabilidad de que la planta elegida sea un pimiento, sabiendo que esté libre de plagas.

Será la probabilidad de P (pimiento) sabiendo E (tratamiento efectivo).

$$\begin{aligned}
 P(P|E) &= \frac{P(P \cap E)}{P(E)} = \\
 &= \frac{P(P \cap B) \cdot P(E|P \cap B) + P(P \cap Q) \cdot P(E|P \cap Q) + P(P \cap O) \cdot P(E|P \cap O)}{P(E)} = \\
 &= \frac{0.09 \cdot 0.80 + 0.12 \cdot 0.9 + 0.09 \cdot 0.75}{0.832} = \frac{0.2475}{0.832} = 0.2974759 = 29.75\%
 \end{aligned}$$

La probabilidad de que una planta libre de plagas sea un pimiento es 29.75%.

3. Probabilidad de que de 11 tomates tratados orgánicamente al menos 3 estén libres de plagas.

De esos 11 tomates tratados orgánicamente, algunos estarán libres de plagas y otros no.

La probabilidad de que un tomate tratado por métodos orgánicos esté libre de plagas es:

$$P(E|T \cap O) = 0.80$$

Se trata por tanto de una distribución binomial en la que se hacen 11 experimentos y en la que, si llamamos éxito a estar libre de plagas, $p = 0.80$

$$B(11; 0.8)$$

La probabilidad que queremos calcular es $P(X \geq 3)$.

$$\begin{aligned} P(X \geq 3) &= P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) + \dots + P(X = 10) + P(X = 11) = \\ &= 1 - P(X = 0) - P(X = 1) - P(X = 2) = \\ &= 1 - \binom{11}{0} \cdot 0.8^0 \cdot 0.2^{11} - \binom{11}{1} \cdot 0.8^1 \cdot 0.2^{10} - \binom{11}{2} \cdot 0.8^2 \cdot 0.2^9 = \\ &\quad \left\{ \binom{11}{0} = \frac{11!}{0! \cdot 11!} = 1; \binom{11}{1} = \frac{11!}{1! \cdot 10!} = 11; \binom{11}{2} = \frac{11!}{2! \cdot 9!} = \frac{11 \cdot 10}{2} = 55 \right\} \\ &= 1 - 1 \cdot 1 \cdot 0.2^{11} - 11 \cdot 0.8 \cdot 0.2^{10} - 55 \cdot 0.64 \cdot 0.2^9 = \\ &= 1 - 0.2^9 (0.04 + 1.76 + 35.2) = 1 - 0.000000512 \cdot 37 = \\ &= 1 - 0.000018944 = 0.999981056 = 99.9981\% \end{aligned}$$

Comprando 11 tomates, la probabilidad de que al menos 3 están libres de plagas, es del 99.9981% lo que prácticamente es el 100%.