PROBABILIDAD III. DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

1. El 20% de las piezas fabricadas por una máquina son defectuosas. Calcular la probabilidad de que al elegir 20 piezas al azar haya 4 defectuosas.
2. En un centro de fertilidad la probabilidad de que una mujer quede embarazada tras una inseminación artificial es del 30%. En una determinada semana acuden al centro 10 mujeres para el tratamiento. a) Calcula la probabilidad de que ninguna mujer quede embarazada. b) Calcula la probabilidad de que alguna quede embarazada. c) Calcula la probabilidad de queden embarazadas menos de 2 mujeres.
3. Un examen tipo test tiene 50 preguntas y cada pregunta tres respuestas diferentes, siendo solo una la correcta. Para aprobar hay que responder bien 25 preguntas; para sacar notable, 35; y para un sobresaliente, 45. Si se responde al azar: a) ¿qué probabilidad hay de aprobar? b) ¿y de suspender? c) ¿y la de sacar notable? d) ¿y la de sacar sobresaliente?
4. Un bar dispone de cervezas y refrescos. La probabilidad de que un cliente pida una cerveza es $\frac{2}{3}$ y la de que pida un refresco es $\frac{1}{3}$. Si son atendidos 20 clientes, ¿cuál es la probabilidad de que 14 pidan una cerveza?
5. Lanzamos un dado de seis caras 5 veces. a) Calcula la probabilidad de obtener 2 cuatros. b) Si se tira un dado de seis caras 8 veces, halla la probabilidad de obtener tres veces el número seis. c) Lanzamos ahora una moneda 20 veces, calcula la probabilidad de obtener 10 caras.
6. Una bolsa tiene 6 bolas blancas y 8 bolas negras. Sacamos 5 bolas con reemplazamiento. ¿Qué es más probable, sacar 2 bolas blancas o sacar 3 bolas blancas?
7. Una empresa fabrica memorias USB. La probabilidad de que llegue al mercado una memoria USB que no funcione bien es del 0,1%. Si compramos 5 memorias USB, ¿qué probabilidad hay de que todas funcionen bien?
8. Una máquina produce 12 piezas defectuosas de cada 1000 fabricadas. Calcula la probabilidad de que, en 40 piezas, haya: a) Una sola pieza defectuosa. b) ninguna defectuosa.
9. En cierta facultad se gradúan el 40% de los estudiantes que se matricularon el primer año. Si elegimos 10 estudiantes al azar, calcula la probabilidad de que: a) Ninguno se gradúe, b) se gradúen todos, c) solo se gradúe uno de los 10.
10. En una clase de 20 estudiantes cada alumno falta a clase el 4% de los días. Calcula la probabilidad de que un día de clase: a) No falte ninguno, b) falten menos de 3 alumnos, c) falte un único alumno.
11. En un tipo de gatos la probabilidad de que nazca una hembra es del 56%. Una gata ha tenido 5 crías. Calcula la probabilidad de que: a) Sean 3 hembras, b) sean al menos 2 hembras.

12. El 20% de los boletos de una rifa tienen premio. Si compramos 4 boletos, calcula la probabilidad de que tengamos, como mucho, 2 boletos premiados.
13. La probabilidad de que un esquiador principiante se caiga en la pista es 0,4. Si intenta esquiar 5 veces, calcula la probabilidad de que se caiga al menos 3 veces.
14. Se lanza una moneda 4 veces. Calcula la probabilidad de que salgan más caras que cruces.
15. En un bombo tenemos 10 bolas idénticas numeradas del 0 al 9 y tras cada extracción devolvemos la bola al bombo. Calcula la probabilidad de que: a) Con 5 extracciones, salga el número 7 menos de tres veces, b) con 10 extracciones, salga el número 7 al menos 2 veces.
16. En unas pruebas de alcoholemia se ha visto que el 5% de los conductores dan positivo, que el 10% no llevaban puesto el cinturón de seguridad y que ambas infracciones son independientes. En un control se para a 5 conductores al azar. Calcula la probabilidad de que: a) Exactamente tres conductores hayan cometido alguna de las dos infracciones, b) Al menos uno de los conductores haya cometido alguna de las dos infracciones.
17. El 0,08% de las pilas recargables que produce una empresa son defectuosas. Si se venden 15 000 pilas, calcula: a) la cantidad de pilas que se espera que resulten defectuosas, b) la desviación típica.

Soluciones

1. $P(X = 4) = \binom{20}{4} \cdot 0,2^4 \cdot (1 - 0,2)^{20-4} = 0,218$
2. a) $P(X = 0) = \binom{10}{0} \cdot 0,3^0 \cdot (1 - 0,3)^{10} = 0,028$
 b) $P(X > 0) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0,028 = 0,972$
 c) $P(X < 2) = P(X, 0) + P(X, 1) = 0,028 + 0,121 = 0,149$
3. a) $P(X = 25) = \binom{50}{25} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{25} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{25} = 0,0059$. b) $P(\text{suspender}) = 1 - P(X = 25) = 1 - 0,0059 = 0,9941$. c) $P(X = 35) = 1,02 \times 10^{-7}$. d) $P(X = 45) = 9,44 \times 10^{-17}$
4. $P(X = 14) = \binom{20}{14} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{14} \cdot \left(1 - \frac{2}{3}\right)^{20-14} = \binom{20}{14} \cdot \frac{2^{14}}{3^{20}} = 0,182$
5. a) $P(X = 2) = \binom{5}{2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{5-2} = \frac{625}{3888} = 0,16075$. b) $P(X = 3) = 0,10419$.
 c) $P(X = 10) = 0,17619$.
6. $P(X = 2) = 0,34271$, $P(X = 3) = 0,25703$. Por lo tanto es más probable sacar 2 bolas blancas que sacar 3 bolas blancas.

7. $P(X = 5) = 0,99501$
8. a) $P(X = 1) = 0,29975$. b) $P(X = 0) = 0,61699$
9. a) $P(X = 0) = 0,006047$. b) $P(X = 10) = 0,000105$. c) $P(X = 1) = 0,04031$
10. a) $P(X = 0) = 0,44200$, b) $P(X < 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 0,95614$,
c) $P(X = 1) = 0,36834$
11. a) $P(X = 3) = 0,3399$, b) $P(X \geq 2) = P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) =$
 $1 - (P(X = 0) + P(X = 1)) = 1 - (0,0164916 + 0,1049466) = 0,87856$
12. $P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 1 - (P(X = 3) + P(X = 4)) =$
 $1 - (0,0256 + 0,0016) = 0,9728$.
13. $P(X \geq 3) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) = 0,2304 + 0,0768 + 0,01024 = 0,31744$
14. $P(X \geq 2) = P(X = 3) + P(X = 4) = 4 \cdot 0,5^4 + 0,5^4 = 0,3125$
15. a) $P(X \leq 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 0,99144$
b) $P(X \geq 2) = P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) + \dots + P(X = 9) + P(X = 10) =$
 $1 - (P(X = 0) + P(X = 1)) = 0,2639$
16. Como nos preguntan la probabilidad de un suceso u otro, la calcularemos con la fórmula
 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B) =$
 $0,05 + 0,1 - 0,05 \cdot 0,10 = 0,145$. El problema es ahora una distribución binomial con
 $p = 0,145$. a) $P(X = 3) = \binom{5}{3} \cdot (0,145)^3 \cdot (1 - 0,145)^2 = 0,02229$
b) $P(X \geq 1) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) =$
 $1 - P(X = 0) = 1 - \binom{5}{0} \cdot (0,145)^0 \cdot (1 - 0,145)^5 = 0,54309$.
17. a) $\bar{x} = N \cdot p = 15000 \cdot 0,0008 = 12$, b) $\sigma = \sqrt{N \cdot p \cdot (1 - p)} = 3,46$

FÓRMULAS DE LA DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

$$P(X = k) = \binom{N}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{N-k} = \frac{N!}{k! \cdot (N - k)!} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{N-k} \quad (1)$$

$$N! = N \cdot (N - 1) \cdot (N - 2) \dots \cdot 1 \quad (2)$$

$$\bar{x} = N \cdot p \quad (3)$$

$$\sigma = \sqrt{N \cdot p \cdot (1 - p)} \quad (4)$$