PROBABILIDAD

1. Introducción

Todo lo que es objeto de nuestra experiencia sensible nos hace preguntarnos por qué ocurre de la manera que lo hace. Buscamos leyes que nos permitan saber la relación causa-efecto de los distintos fenómenos. Pero esto solo es posible en fenómenos deterministas.

Son fenómenos deterministas aquellos en los que, conociendo las causas que intervienen y aplicando las leyes de la Lógica o de la Naturaleza, somos capaces de predecir los efectos.

Pero muchos fenómenos no son deterministas. Se les llama fenómenos aleatorios y el efecto que observamos depende del azar. Ejemplos de fenómenos aleatorios son el lanzamiento de un dado, la duración de una bombilla o la longitud que recorrerá un avión de papel al ser lanzado.

Los fenómenos aleatorios tienen un resultado incierto. La certidumbre de un acontecimiento se mueve entre la imposibilidad y la seguridad, la probabilidad de que ocurra el acontecimiento es la medida de esa certidumbre.

A un suceso imposible le asignamos una probabilidad cero. A un suceso seguro le asignamos una probabilidad de valor 1. La probabilidad de un suceso aleatorio estará entre 0 y 1.

2. Definiciones

Experimento aleatorio.

Es el que: a) tiene más de un resultado posible, b) conocemos de antemano todos los resultados posibles, y c) desconocemos el resultado que obtendremos entre los que son posibles.

Para estas definiciones usaremos como ejemplo de experimento el lanzamiento de un dado.

Espacio muestral.

Es el conjunto de todos los resultados posibles de un experimento aleatorio. Se designa con la letra Ω. El número de elementos de Ω se denomina cardinal de Ω y se designa como: $\text{card}(\Omega)$

En nuestro ejemplo: $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ y $\text{card}(\Omega) = 6$.

Suceso.

Es cualquier subconjunto S de Ω, $S \subset \Omega$. Por ejemplo: $A = \{1,2,3\}$, $B = \{1,2,4,5\}$ o $C = \{3,5\}$.

Suceso elemental.

Es el que tiene un único resultado posible. Por ejemplo: $A = \{\text{Obtener un múltiplo de 5}\} = \{5\}$

Suceso compuesto.

Es el que tiene más de un resultado posible. Por ejemplo: $B = \{\text{Obtener valor par}\} = \{2,4,6\}$

Suceso seguro.

Es el que siempre ocurre. Por ejemplo: $\{\text{sacar menos que 7}\} = \{1,2,3,4,5,6\} = \Omega$

Suceso imposible.

Es el que nunca ocurre. Por ejemplo: $\{\text{sacar más que 6}\} = \{\ \} = \varnothing$

Suceso contrario (o complementario)

Dado el suceso A se llama suceso contrario de A a la negación de A, y se escribe $\overline{A}$ o A^c.

Por ejemplo: Si $A = \{\text{Sacar par}\} = \{2,4,6\}$ su suceso contrario es: $\overline{A} = \{\text{Sacar impar}\} = \{1,3,5\}$

3. Operaciones con sucesos

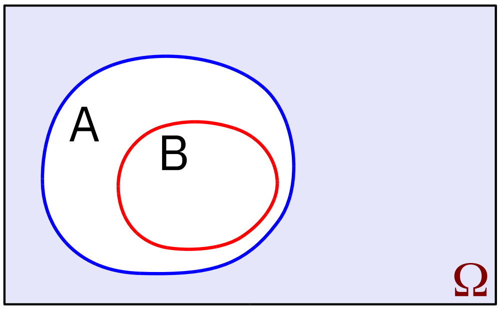
Las ilustraremos con diagramas de Venn y con este ejemplo numérico: Al lanzar un dado con $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ consideraremos estos cuatro sucesos: $P = \{\text{Obtener valor par}\} = \{2,4,6\}$, $Q = \{\text{Obtener más que } 4\} = \{5,6\}$, $R = \{\text{Obtener menos que } 3\} = \{1,2\}$, $S = \{\text{Obtener } 6\} = \{6\}$.

Inclusión.

Si el suceso B está incluido dentro del suceso A, se indica así: $B \subset A$

Con nuestros ejemplos: $P \subset \Omega$, $S \subset Q$, $S \subset P$, $R \not\subset P$

Tendremos que, si ocurre 'el más pequeño', ocurrirá también 'el más grande':
Como $S \subset P$, si sacamos un seis (S) también ocurre 'obtener par' (P).



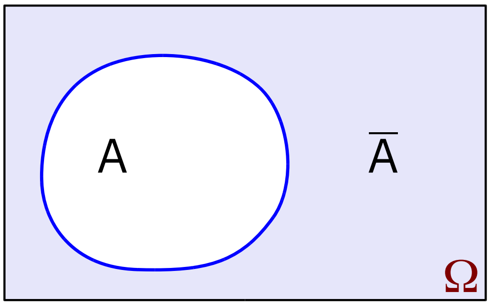
$A \subset \Omega$

$B \subset A$

Complementación.

El suceso complementario (o contrario) de A es $\overline{A}$, el que ocurre cuando no ocurre A.

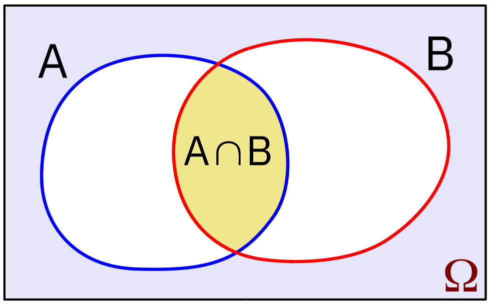
Por ejemplo: Si $Q = \{\text{Obtener más que } 4\} = \{5,6\}$, su suceso contrario es: $\overline{Q} = \{1,2,3,4\}$.



Intersección.

Si A y B tienen elementos comunes, esos elementos comunes se designan $A \cap B$.
El suceso $A \cap B$ ocurre cuando se dan, al mismo tiempo, A y B.

Con nuestros ejemplos: $P \cap Q = \{6\}$, $P \cap R = \{2\}$, $R \cap S = \varnothing$



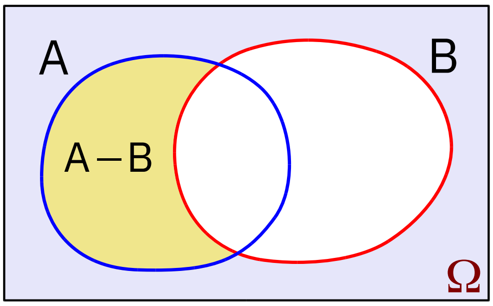
Dos sucesos A, B son **incompatibles** si no pueden ocurrir a la vez: $A \cap B = \varnothing$

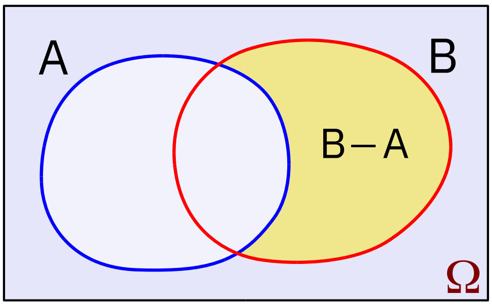
Por ejemplo: A y $\overline{A}$ son incompatibles, por eso: $A \cap \overline{A} = \varnothing$

Diferencia.

Si tenemos dos sucesos A y B, su diferencia $A-B$ se da cuando ocurre A pero no B.
Los elementos de $A-B$ son los de A sin los elementos de $A\cap B$: $A-B=A-(A\cap B)$

Con nuestros ejemplos: $P-Q=\{2,4\}$, $P-R=\{4,6\}$, $Q-S=\{5\}$





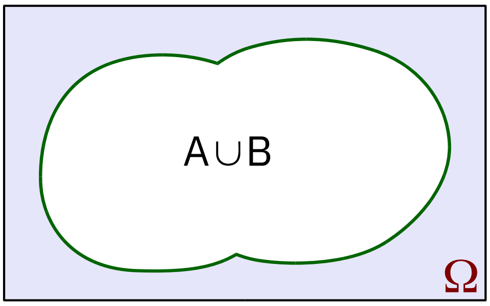
Si dos sucesos A, B son incompatibles, $A\cap B=\varnothing$, tendremos que $A-B=A$ y $B-A=B$

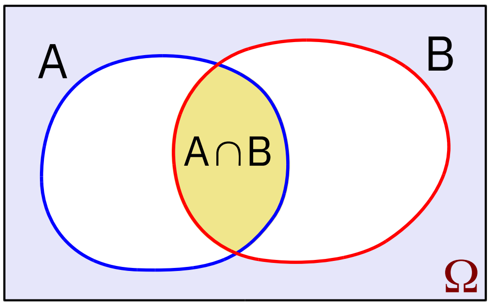
Además, se cumple que: $A-B=A\cap\overline{B}$ y, de igual forma: $B-A=B\cap\overline{A}$

Unión.

Si tenemos dos sucesos A y B, su unión $A\cup B$ se da cuando ocurre A o B, cualquiera de ellos.
Es decir, $A\cup B$ contiene tanto los elementos de A como los elementos de B.

Con nuestros ejemplos: $P\cup R=\{1,2,4,6\}$, $P\cup Q=\{2,4,5,6\}$, $R\cup S=\{1,2,6\}$





Siempre se cumple que: $\boxed{A\cup\overline{A}=\Omega}$.
Esto equivale a decir que cualquier suceso y su contrario completan el espacio muestral.

Por otro lado, no hay que confundir $A\cup B$ con $A+B$.

$A+B$ corresponde a poner juntos todos los elementos de A y todos los elementos de B.
Esto hace que los elementos de $A\cap B$ hayan sido contados dos veces, una en A y otra en B.

Por eso: $\boxed{A\cup B=A+B-A\cap B}$

Esta relación es especialmente importante para hacer cálculos.

Escribimos a continuación algunas de las operaciones anteriores como operaciones lógicas:

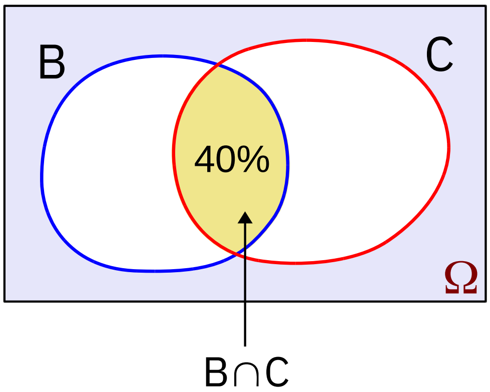
		Traducción al lenguaje de la Lógica	
Suceso contrario	$\overline{A}$	Negación de A	No A
Suceso intersección	$A\cap B$	Conjunción de A-B	A y B
Suceso unión	$A\cup B$	Disyunción de A-B	A o B

E.01 *En una clase de la ESO el 70% del alumnado lleva comida para la hora del recreo. El 60% del alumnado lleva bebida y el 40% del alumnado lleva tanto comida como bebida. ¿Qué porcentaje del alumnado no lleva ni comida ni bebida?*

Lo mejor es hacer diagramas de Venn para entender la situación.

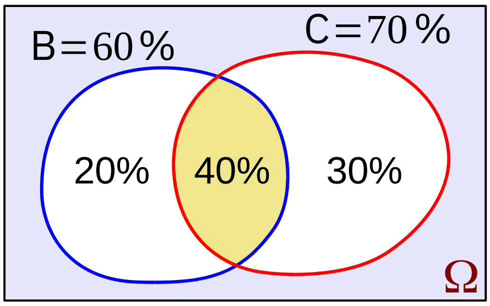
El espacio muestral es la clase completa: $\Omega = 100\%$.

Llamamos C al suceso 'llevar comida' y B al suceso 'llevar bebida'.
Tienen una zona común, B y C, que es: $B \cap C = 40\%$



Para que el suceso B 'llevar bebida' tenga un valor del 60%, la zona $B - C = 20\%$.

Para que el suceso C 'llevar comida' tenga un valor del 70%, la zona $C - B = 30\%$.



Vemos que los alumnos que llevan, o comida o bebida, son: $20\% + 40\% + 30\% = 90\%$

Los que no llevan nada serán el porcentaje que falta hasta el 100%: $100\% - 90\% = 10\%$

$\boxed{\text{Los que no llevan ni comida ni bebida son el 10\% del alumnado.}}$

Podríamos resolver este problema de una manera más 'técnica' así:

El espacio muestral es la clase completa: $\Omega = 100\%$.

Llamamos C al suceso 'llevar comida' y B al suceso 'llevar bebida'.

Los que cumplen B o C son:

$$B \cup C = B + C - B \cap C$$

El problema pide el grupo que no cumple eso:

$$(B \cup C) + \left(\overline{B \cup C}\right) = \Omega \quad \rightarrow \quad \overline{B \cup C} = \Omega - B \cup C$$

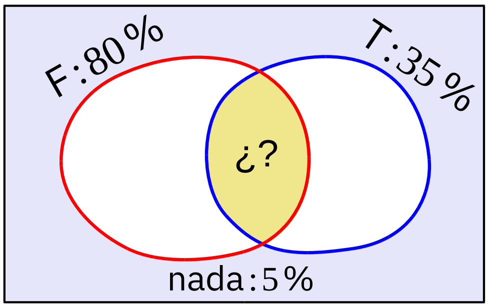
Por eso, la solución es:

$$\begin{aligned} \overline{B \cup C} &= \Omega - (B + C - B \cap C) = \\ &= 100\% - (60\% + 70\% - 40\%) = \\ &= 100\% - 90\% = \\ &= 10\% \end{aligned}$$

E.02 *En unas pruebas para la Policía Nacional el 80% de los presentados aprobó las pruebas físicas, el 35% de los presentados aprobó las pruebas técnicas y el 5% de los presentados no aprobó ninguna de las dos. ¿Qué porcentaje de los presentados aprobó ambas pruebas?*

Llamemos a los sucesos F: 'aprobó las pruebas físicas' y T: 'aprobó las pruebas ténicas'.

Tenemos esta situación:



Es decir: $F=80\%$, $T=35\%$, $\overline{F\cup T}=5\%$. Queremos averiguar $F\cap T$.

Por lo tanto: $F\cup T=\Omega-\overline{F\cup T}=100\%-5\%=95\%$

Y de la fórmula para la unión tenemos:

$$F\cup T=F+T-F\cap T \;\rightarrow\; 95\%=80\%+35\%-F\cap T \;\Rightarrow\; F\cap T=20\%$$

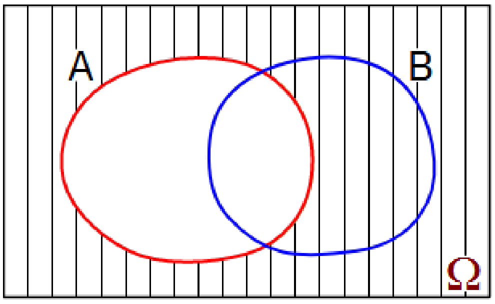
$\boxed{\text{El 20\% de los presentados aprobó ambas pruebas.}}$

Leyes de De Morgan.

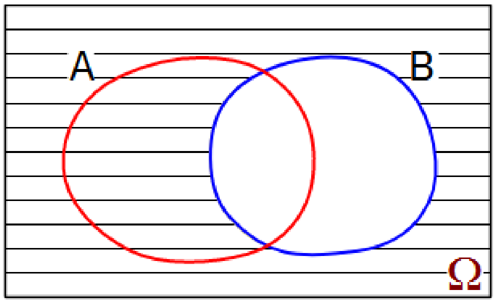
Son dos leyes importantes para trabajar con diagramas de Venn (con conjuntos). Son estas:

$$\boxed{\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}} \qquad \boxed{\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}}$$

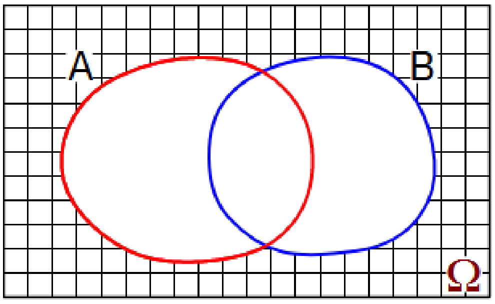
Podemos comprobar que son ciertas a la vista de estas imágenes:



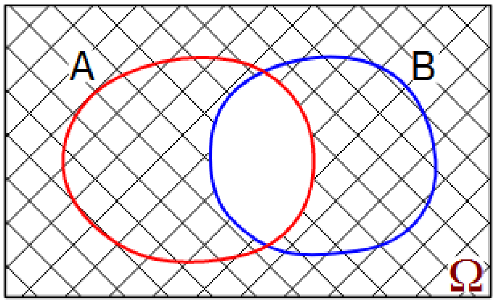
Con trama vertical: $\overline{A}$



Con trama horizontal: $\overline{B}$



Con trama cuadrada: $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$

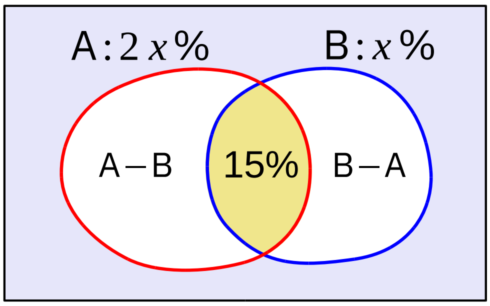


Con trama diagonal: $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$

E.03 *Los alumnos de una autoescuela se han presentado a los exámenes para obtener el permiso de conducir turismos. Hicieron la prueba teórica y la prueba práctica. El 15% de los alumnos aprobó ambas pruebas. El 75% de los alumnos solo aprobó una prueba. La prueba teórica se les dio mejor, pues el número de alumnos que la superaron fue el doble que el número de alumnos que superó la prueba práctica. ¿Qué porcentaje de los alumnos falló las 2 pruebas? ¿Qué porcentaje de los alumnos aprobó cada una de las pruebas?*

Llamemos a los sucesos A: 'aprobó la prueba teórica' y B: 'aprobó la prueba práctica'.

Tenemos esta situación:



Tenemos que usar el dato 'el 75% solo aprobó una prueba'.

Los que aprueban solo la prueba teórica son el grupo $A-B$.

Como $A-B=A-(A\cap B)$

los que aprueban solo la prueba teórica son: $A-(A\cap B)$

Los que aprueban solo la prueba práctica son el grupo $B-A$.

Como $B-A=B-(A\cap B)$

los que aprueban solo la prueba práctica son: $B-(A\cap B)$

Por lo tanto, los que aprueban una sola prueba son:

$$[A-(A\cap B)]+[B-(A\cap B)]=A+B-2(A\cap B)$$

Puesto que ese número es el 75%, y puesto que ya sabíamos que $A\cap B=15\%$, tenemos:

$$75\%=A+B-2\times 15\% \;\rightarrow\; A+B=105\%$$

Los que aprueban alguna de las dos pruebas (la prueba A o la prueba B o ambas) son:

$$A\cup B=A+B-(A\cap B)$$
$$A\cup B=105\%-15\%$$
$$A\cup B=90\%$$

Los que no aprueban ninguna de las dos pruebas son:

$$\overline{A\cup B}=100\%-(A\cup B)=100\%-90\%=10\%$$

$\boxed{\text{El 10\% falló ambas pruebas.}}$

Como $A+B=105\%$ tenemos:

$$2x\%+x\%=105\% \;\rightarrow\; 3x\%=105\% \;\Rightarrow\; x=35\%$$

Por lo que: $\boxed{\text{El 70\% aprobó la prueba teórica (A) y el 35\% aprobó la prueba práctica (B).}}$

4. Probabilidad de Laplace

Al lanzar 6 veces un dado, es difícil que obtengamos 1 vez cada uno de los 6 valores posibles. Si lo lanzamos 600 veces, tampoco obtendremos 100 veces cada valor. Pero, a mayor sea el número de lanzamientos, más se parecerá la frecuencia con la que obtenemos cada valor a la sexta parte del número de lanzamientos ($1/6 = 0{,}16666...$)

Con un programa informático podemos simular un gran número de tiradas de un dado. Estos son los resultados que he obtenido, con las frecuencias relativas cada millón de tiradas:

Tiradas	**Sale 1**	**Sale 2**	**Sale 3**	**Sale 4**	**Sale 5**	**Sale 6**
1.000.000	0,16712	0,16678	0,16596	0,16654	0,16680	0,16680
2.000.000	0,16704	0,16692	0,16598	0,16658	0,16675	0,16673
3.000.000	0,16712	0,16683	0,16625	0,16643	0,16673	0,16664
4.000.000	0,16681	0,16685	0,16634	0,16656	0,16666	0,16678
5.000.000	0,16677	0,16669	0,16636	0,16668	0,16668	0,16682
6.000.000	0,16674	0,16677	0,16640	0,16669	0,16672	0,16668
7.000.000	0,16669	0,16678	0,16646	0,16672	0,16673	0,16662
8.000.000	0,16671	0,16680	0,16645	0,16673	0,16672	0,16660
9.000.000	0,16667	0,16677	0,16646	0,16678	0,16670	0,16662
10.000.000	0,16665	0,16679	0,16642	0,16674	0,16673	0,16666
11.000.000	0,16669	0,16677	0,16646	0,16671	0,16667	0,16670
12.000.000	0,16669	0,16672	0,16653	0,16667	0,16670	0,16669
13.000.000	0,16663	0,16676	0,16654	0,16668	0,16666	0,16673
14.000.000	0,16661	0,16674	0,16655	0,16674	0,16663	0,16673
15.000.000	0,16666	0,16671	0,16655	0,16672	0,16662	0,16674
16.000.000	0,16666	0,16668	0,16660	0,16666	0,16666	0,16675
17.000.000	0,16664	0,16667	0,16661	0,16668	0,16667	0,16671
18.000.000	0,16666	0,16669	0,16660	0,16671	0,16668	0,16666
19.000.000	0,16669	0,16669	0,16662	0,16668	0,16667	0,16665
20.000.000	0,16668	0,16665	0,16666	0,16666	0,16669	0,16665

Esto se conoce como **ley de los grandes números**: Cuando un experimento se repite un gran número de veces, la frecuencia relativa con la que se obtiene cada resultado se va acercando paulatinamente a un valor que se conoce como probabilidad teórica de ese resultado.

Esa probabilidad teórica la definió Laplace. Su fórmula es válida con dos condiciones:

1. El espacio muestral debe ser finito (el número de casos posibles no es infinito).
2. La probabilidad de las posibilidades es uniforme, todas tienen igual probabilidad.

La probabilidad del suceso $A \subset \Omega$ es:

$$\boxed{P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}}$$

Se conoce como **probabilidad de Laplace**

Es decir, que la probabilidad de A es el cociente de los casos favorables (los de A) entre todos los casos posibles (los de Ω).

Por eso, la probabilidad de sacar un 5 al lanzar un dado es:

$$\left[\begin{array}{lll} A = \{5\} & \rightarrow & \text{card}(A) = 1 \\ \Omega = \{1,2,3,4,5,6\} & \rightarrow & \text{card}(\Omega) = 6 \end{array}\right. \Rightarrow P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{1}{6}$$

Con esta definición, la probabilidad de un suceso imposible valdrá cero:

La probabilidad de sacar un 7 es:

$$\begin{bmatrix} A=\{\ \} & \to & \text{card}(A)=0 \\ \Omega=\{1,2,3,4,5,6\} & \to & \text{card}(\Omega)=6 \end{bmatrix} \Rightarrow P(A)=\frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}=\frac{0}{6}=0$$

Y la probabilidad de un suceso seguro valdrá uno:

La probabilidad de sacar un valor menor que 7 es:

$$\begin{bmatrix} A=\{1,2,3,4,5,6\} & \to & \text{card}(A)=6 \\ \Omega=\{1,2,3,4,5,6\} & \to & \text{card}(\Omega)=6 \end{bmatrix} \Rightarrow P(A)=\frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}=\frac{6}{6}=1$$

El valor de la probabilidad se puede expresar de **tres formas**. Veámoslo con la probabilidad de sacar un número par al lanzar un dado:

$$\begin{bmatrix} A=\{2,4,6\} & \to & \text{card}(A)=3 \\ \Omega=\{1,2,3,4,5,6\} & \to & \text{card}(\Omega)=6 \end{bmatrix} \Rightarrow P(A)=\frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

Esta es la primera forma, como una fracción: $P(A)=\frac{1}{2}$

Evaluando la fracción sería la segunda forma: $P(A)=0,50$ (es un 'tanto por uno')

Como un porcentaje sería la tercera forma: $P(A)=0,50\times 100\%=50\%$

Las tres formas son equivalentes. La forma fraccional es la mejor para hacer cálculos exactos.

E.04 *Una bolsa contiene 5 bolas rojas, 3 blancas y 2 negras. Calcula la probabilidad de sacar: a) Una bola roja, b) una bola que no sea blanca, c) una bola negra, d) una bola roja o blanca.*

a) $P(\text{roja})=\frac{5}{10}=\boxed{\frac{1}{2}=0,50=50\%}$ b) $P(\text{no blanca})=\boxed{\frac{7}{10}=0,70=70\%}$

c) $P(\text{negra})=\frac{2}{10}=\boxed{\frac{1}{5}=0,20=20\%}$ d) $P(\text{roja o blanca})=\frac{8}{10}=\boxed{\frac{4}{5}=0,80=80\%}$

E.05 *Una baraja española tiene 48 cartas, 12 de cada palo. Cada palo tiene solo tres figuras (la sota, el caballo y el rey). Si sacamos una carta al azar, calcula la probabilidad de que sea: a) De oros, b) una figura de oros, c) una figura, d) que sea figura o sea de oros.*

a) $P(\text{oros})=\frac{12}{48}=\boxed{\frac{1}{4}=0,25=25\%}$ b) $P(\text{figura de oros})=\frac{3}{48}=\boxed{\frac{1}{16}=0,0625=6,25\%}$

c) $P(\text{figura})=\frac{12}{48}=\boxed{\frac{1}{4}=0,25=25\%}$ d) $P(\text{figura o oros})=\frac{21}{48}=\boxed{\frac{7}{16}=0,4375=43,75\%}$

En este último caso, se pudo hacer: $P(\text{figura o oros})=P(\text{figura})+P(\text{oros})-P(\text{figura y oros})$

con lo que: $P(\text{figura o oros})=\frac{12}{48}+\frac{12}{48}-\frac{3}{48}=\frac{12+12-3}{48}=\frac{21}{48}$ con el mismo resultado.

E.06 *En un estudio para conocer si un grupo de personas sabe bailar o no, se obtuvo esto:*

	Mujer (M)	Hombre (H)	
Baila	500	200	700
No baila	300	1000	1300
	800	1200	2000

Si se elige a una persona de ese grupo, calcula la probabilidad de que:

a) Sea mujer.

b) Sepa bailar.

c) Sea una mujer que sabe bailar.

Esta presentación de los datos se denomina **tabla de contingencia** y se usa habitualmente.
El espacio muestral lo forman 2000 personas, así que: $\text{card}(\Omega) = 2000$.

a) $P(\text{mujer}) = \dfrac{800}{2000} = \boxed{\dfrac{2}{5} = 0,40 = 40\%}$ b) $P(\text{sabe bailar}) = \dfrac{700}{2000} = \boxed{\dfrac{7}{20} = 0,35 = 35\%}$

c) $P(\text{mujer y sabe bailar}) = \dfrac{500}{2000} = \boxed{\dfrac{1}{4} = 0,25 = 25\%}$

E.07 *Se lanzan dos dados y se mira la suma de sus puntos. Calcula la probabilidad de:*
a) Obtener menos de 4 puntos, b) Obtener 7 puntos, c) Obtener más de 9 puntos.

Hacemos una tabla de contingencia con todas las sumas que pueden ocurrir.

La cabecera de las filas indica el valor del primer dado, la cabecera de las columnas indica el valor del segundo dado.

Hay un total de 36 valores (no únicos).

	1	2	3	4	5	6
1	1	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

a) $P(\text{menos de } 4) = \dfrac{3}{36} = \boxed{\dfrac{1}{12} = 0,0833 = 8,33\%}$ (Hay 3 posibilidades. Las que suman 1 y 3.)

b) $P(\text{obtener } 7) = \dfrac{6}{36} = \boxed{\dfrac{1}{6} = 0,1667 = 16,67\%}$ (Hay 6 posibilidades. Es la suma más probable.)

c) $P(\text{más de } 9) = \dfrac{6}{36} = \boxed{\dfrac{1}{6} = 0,1667 = 16,67\%}$ (Hay 6 posibilidades. Las que suman 10, 11, 12.)

E.08 *Si se lanzan dos monedas (que tienen cara y cruz), calcula la probabilidad de que:*
a) Salga al menos una cara, b) No salga ninguna cara, c) salgan una cara y una cruz.

El espacio muestral tiene 4 elementos: $\Omega = \{CC,\ C+,\ +C,\ ++\}$ (C = cara, + = cruz)

a) $P(\text{al menos una cara}) = \boxed{\dfrac{3}{4} = 0,75 = 75\%}$ (son los 3 casos: $CC,\ C+,\ +C$)

b) $P(\text{ninguna cara}) = \boxed{\dfrac{1}{4} = 0,25 = 25\%}$ (es tan solo un caso: $++$)

c) $P(\text{una cara y una cruz}) = \dfrac{2}{4} = \boxed{\dfrac{1}{2} = 0,50 = 50\%}$ (son los dos casos: $C+,\ +C$)

E.09 *En una asignatura, el número de las chicas que se han matriculado es el doble que el número de chicos. Al final del curso aprobaron el 80% de las chicas y el 60% de los chicos. Calcula: a) El porcentaje de chicas matriculadas respecto al total, b) El porcentaje de aprobados respecto a los matriculados, c) el porcentaje de chicas entre los suspendidos.*

Lo resolveremos con una tabla de contingencia.

Como sabemos que el número de chicas es el doble que el de chicos,
si llamamos x al número de chicos, el número de chicas será $2x$.

Aprobó el 80% de las chicas, es decir: $0,80 \cdot 2x = 1,6x$.

Suspendió el 20% de las chicas, es decir: $0,20 \cdot 2x = 0,4x$

Aprobó el 60% de los chicos, es decir: $0,60 \cdot x = 0,6x$.

Suspendió el 40% de los chicos, es decir: $0,40 \cdot x = 0,4x$

Completemos la tabla:

	Mujer (M)	Hombre (H)	
Aprueba (A)	$1,6x$	$0,6x$	$2,2x$
Suspende (S)	$0,4x$	$0,4x$	$0,8x$
	$2x$	x	$3x$

a) $\%\text{chicas matriculadas} = \dfrac{2x}{3x} = \boxed{\dfrac{2}{3} = 0,6667 = 66,67\%}$

b) $\%\text{aprobados sobre matriculados} = \dfrac{2,2x}{3x} = \dfrac{22/10}{3} = \dfrac{22}{30} = \boxed{\dfrac{11}{15} = 0,7333 = 73,33\%}$

c) $\%\text{chicas entre suspendidos} = \dfrac{0,4x}{0,8x} = \dfrac{0,4}{0,8} = \dfrac{4}{8} = \boxed{\dfrac{1}{2} = 0,50 = 50\%}$

E.10 *En un estudio para conocer si un grupo de personas tiene o no artrosis se obtuvo esto:*

	Mujer (M)	Hombre (H)	
Artrosis (A)	55	45	100
No artrosis ($\overline{A}$)	15	30	45
	70	75	145

Si se elige a una persona de ese grupo, calcula la probabilidad de que:

a) Tenga artrosis.

b) Tenga artrosis o sea mujer.

c) Sea hombre y no tenga artrosis.

a) $P(A) = \dfrac{100}{145} = \boxed{\dfrac{20}{29} = 0,6897 = 68,97\%}$

b) $P(A \cup M) = P(A) + P(M) - P(A \cap M) = \dfrac{100}{145} + \dfrac{70}{145} - \dfrac{55}{145} = \dfrac{115}{145} = \boxed{\dfrac{23}{29} = 0,7931 = 79,31\%}$

c) $P(H \cap \overline{A}) = P(H - A) = P(H) - P(H \cap A) = \dfrac{75}{145} - \dfrac{45}{145} = \dfrac{30}{145} = \boxed{\dfrac{6}{29} = 0,2069 = 20,69\%}$

5. Probabilidad de Kolmogórov

El matemático Andréi Kolmogórov desarrolló la teoría de la probabilidad a partir de axiomas. Utilizó el lenguaje de la teoría de conjuntos y, a partir de sus axiomas, se pueden obtener las diferentes propiedades de la probabilidad (algunas las hemos mencionado ya). Estableció que:

La probabilidad P es una función definida sobre los sucesos de un espacio muestral Ω, y cuyos valores son números reales. Esa función verifica estos axiomas:

1. $P(\Omega)=1$
2. Si $A\subset\Omega \;\rightarrow\; P(A)\geq 0$
3. Si A y B son incompatibles, es decir $A\cap B=\varnothing \;\rightarrow\; P(A\cap B)=P(A)+P(B)$

Propiedades de la probabilidad

De los axiomas de Kolmogórov se pueden deducir las siguientes propiedades. No vamos a obtenerlas aquí, nos bastará con entender su significado. Algunas de ellas las conocemos ya.

a) $P(\varnothing)=0$

b) Si $A\subset\Omega \;\rightarrow\; 0\leq P(A)\leq 1$

c) Si $A,B\subset\Omega$, puesto que $A\cup B=B\cup A \;\rightarrow\; P(A\cup B)=P(B\cup A)$

d) Si $A,B\subset\Omega$, puesto que $A\cap B=B\cap A \;\rightarrow\; P(A\cap B)=P(B\cap A)$

e) Si $A\subset\Omega \;\rightarrow\; P(\overline{A})=1-P(A)$

f) Si $A\subset B \;\rightarrow\; P(A)\leq P(B)$

g) Si $A\subset B \;\rightarrow\; P(B-A)=P(B)-P(A)$; si $B\subset A \;\rightarrow\; P(A-B)=P(A)-P(B)$

h) Si $A,B\subset\Omega \;\rightarrow\; P(B-A)=P(B)-P(A\cap B)$, $P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)$

i) Si $A,B\subset\Omega \;\rightarrow\; P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

j) Si $\mathrm{card}(\Omega)$ es finito y $A\subset\Omega$ es uniforme $\rightarrow\; P(A)=\dfrac{\mathrm{card}(A)}{\mathrm{card}(\Omega)}$ [Ley de Laplace]

E.11 *De los sucesos A, B sabemos que* $P(A)=0.65$, $P(B)=0.45$, $P(A\cap B)=0.25$

Calcula: a) $P(A\cup B)$, *b)* $P(\overline{A})$, *c)* $P(\overline{A}\cap\overline{B})$, *d)* $P(A\cap\overline{B})$, *e)* $P(\overline{A}\cap B)$

a) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0,65+0,45-0,25=\boxed{0,85}$

b) $P(\overline{A})=1-P(A)=1-0,65=\boxed{0,35}$

c) $P(\overline{A}\cap\overline{B})=\ldots\{\text{Ley de De Morgan}\}\ldots=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-0,85=\boxed{0,15}$

d) $P(A\cap\overline{B})=P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)=0,65-0,25=\boxed{0,40}$

e) $P(\overline{A}\cap B)=P(B\cap\overline{A})=P(B-A)=P(B)-P(A\cap B)=0,45-0,25=\boxed{0,20}$

6. Probabilidad condicionada

Para entender mejor el concepto de probabilidad condicionada, retomaremos el ejemplo 06:

En un estudio para conocer si un grupo de personas sabe bailar o no, se obtuvo esto:

	Mujer (M)	Hombre (H)	
Baila	500	200	700
No baila	300	1000	1300
	800	1200	2000

Designaremos a los sucesos así:

M : Mujer H : Hombre

B : Baila $\overline{B}$: No baila.

Si elegimos a una persona al azar de ese grupo, la probabilidad del suceso 'sabe bailar' es:

$$P(B) = \frac{700}{2000} = \frac{7}{20} \quad \text{(700 personas de un total de 2000)}$$

Si sabemos que se trata de una mujer, el suceso 'sabe bailar condicionado a ser mujer' se escribe $B|M$ y la probabilidad de ese suceso es:

$$P(B|M) = \frac{500}{800} = \frac{5}{8} \quad \text{(500 mujeres de un total de 800)}$$

Vemos que tener información adicional (aquí, saber que es mujer) cambia mucho las cosas.

Esta última probabilidad podemos escribirla así:

$$P(B|M) = \frac{P(B \cap M)}{P(M)} = \frac{500/2000}{800/2000} = \frac{500}{800} = \frac{5}{8}$$

Se define la **probabilidad del suceso A condicionado a B** (sabemos que se ha dado B) así:

$$\boxed{P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}}$$

Sucesos independientes.

Dos sucesos A y B se dice que son independientes si la ocurrencia de uno no afecta al otro:

$$P(A|B) = P(A) \quad \text{si A y B son independientes}$$

En ese caso tendremos: $P(A|B) = P(A) \;\rightarrow\; P(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} \;\Rightarrow\; \boxed{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)}$

E.12 *Con la tabla del ejemplo 06, ¿son independientes los sucesos 'sabe bailar' y 'ser mujer'?*

La probabilidad de 'sabe bailar' es: $P(B) = \dfrac{700}{2000} = \dfrac{7}{20}$

La probabilidad de 'ser mujer' es: $P(M) = \dfrac{800}{2000} = \dfrac{2}{5}$

La probabilidad de 'ser mujer' y 'saber bailar' es: $P(B \cap M) = \dfrac{500}{2000} = \dfrac{1}{4}$

Como $P(B) \cdot P(M) = \dfrac{7}{20} \cdot \dfrac{2}{5} = \dfrac{7}{50} \neq \dfrac{1}{4} = P(B \cap M)$ $\boxed{\text{no son sucesos independientes.}}$

[Los datos de la tabla indican una preferencia por el baile distinta para hombres y mujeres.]

E.13 *De los sucesos A, B sabemos que* $P(A)=3/4$, $P(B)=1/3$, $P(A\cap B)=1/5$

Calcula: a) $P(A\cup B)$, *b)* $P(A|B)$, *c)* $P(\overline{A}|B)$, *d)* $P(\overline{A}|\overline{B})$

a) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{3}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}=\boxed{\frac{53}{60}}$

b) $P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{1/5}{1/3}=\boxed{\frac{3}{5}}$

c) $P(\overline{A}|B)=\frac{P(\overline{A}\cap B)}{P(B)}=\frac{P(B-A)}{P(B)}=\frac{P(B)-P(A\cap B)}{P(B)}=1-P(A|B)=1-\frac{3}{5}=\boxed{\frac{2}{5}}$

d) $P(\overline{A}|\overline{B})=\frac{P(\overline{A}\cap\overline{B})}{P(\overline{B})}=\frac{P(\overline{A\cup B})}{P(\overline{B})}=\frac{1-P(A\cup B)}{1-P(B)}=\frac{1-53/60}{1-1/3}=\boxed{\frac{7}{40}}$

E.14 *De un estudio con 200 personas sobre la relación entre fumar y tener cáncer se tiene:*

	Fumador	No Fumador	
Con cáncer	80	20	100
Sin cáncer	30	70	100
	110	90	200

Si se elige a una persona al azar de ese grupo, calcula la probabilidad de que:

a) Tenga cáncer (C).

b) Tenga cáncer y sea fumador (C y F).

c) ¿Son independientes fumar y tener cáncer?

a) $P(C)=\frac{100}{200}=\boxed{\frac{1}{2}}$

b) $P(C\cap F)=\frac{80}{200}=\boxed{\frac{2}{5}}$

c) $P(C|F)=\frac{80}{110}=\frac{8}{11}$, como $P(C)\neq P(C|F)$ $\rightarrow$ $\boxed{\text{son dependientes.}}$

E.15 *Demuestra que, si A y B son independientes,* $\overline{A}$ *y* $\overline{B}$ *también lo son.*

Si A y B son independientes: $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$

Por lo tanto: $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A)\cdot P(B)$

Si $\overline{A}$ y $\overline{B}$ son independientes debe ocurrir que: $P(\overline{A}\cap\overline{B})=P(\overline{A})\cdot P(\overline{B})$

$$P(\overline{A}\cap\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-\left[P(A)+P(B)-P(A)\cdot P(B)\right]=$$
$$=1-P(A)-P(B)\left[1-P(A)\right]=\left[1-P(A)\right]\left[1-P(B)\right]=P(\overline{A})\cdot P(\overline{B})$$

Luego, $\boxed{\text{si A y B son independientes, } \overline{A} \text{ y } \overline{B} \text{ también lo son.}}$

E.16 *De los sucesos A, B sabemos que* $P(A)=3/8$, $P(B)=2/5$, $P\left(\overline{A}\cup\overline{B}\right)=17/20$
Calcula si A y B son independientes.

$$P\left(\overline{A}\cup\overline{B}\right)=\ldots\{\text{Ley de De Morgan}\}\ldots=P\left(\overline{A\cap B}\right)=1-P(A\cap B)$$

$$\rightarrow\ \frac{17}{20}=1-P(A\cap B)\ \Rightarrow\ P(A\cap B)=1-\frac{17}{20}=\frac{3}{20}$$

$$P(A)\cdot P(B)=\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{5}=\frac{3}{20}=P(A\cap B)\ \Rightarrow\ \boxed{\text{A y B son independientes.}}$$

E.17 *De los sucesos A, B sabemos que* $P(A)=2/3$, $P(B|A)=1/2$, $P(B)=x$
Calcula el menor valor posible de x y el mayor valor posible de x.

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}\ \rightarrow\ P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B|A)=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$$

$P(B)=x$ debe cumplir que: a) $P(A\cap B)\le P(B)$ y b) $P(A\cup B)\le 1$

Por (a) tenemos que: $\frac{1}{3}\le x$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{2}{3}+x-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}+x$$

Por (b) tenemos que: $\frac{1}{3}+x\le 1\ \rightarrow\ x\le\frac{2}{3}$

Uniendo los dos resultados: $\boxed{\frac{1}{3}\le x\le\frac{2}{3}}$

E.18 *A y B son sucesos independientes. La probabilidad de que ocurran simultáneamente es* $1/6$ *y la probabilidad de que no ocurra ninguno es* $1/3$. *Calcula las probabilidades de A y B.*

La probabilidad de que ocurran simultáneamente es: $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)=\frac{1}{6}$

La probabilidad de que no ocurra ninguno es: $P\left(\overline{A\cup B}\right)=\frac{1}{3}\ \rightarrow\ P(A\cup B)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\ \rightarrow\ \frac{2}{3}=P(A)+P(B)-\frac{1}{6}\ \Rightarrow\ P(A)+P(B)=\frac{5}{6}$$

Llamando $x=P(A)$, $y=P(B)$ tenemos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x\cdot y=1/6 \quad\rightarrow\quad y=1/(6x) \\ x+y=5/6 \qquad\qquad\qquad \rightarrow\quad x+1/(6x)=5/6 \quad \text{Multiplicamos todo por } 6x \end{cases}$$

$$\Rightarrow\ 6x^2-5x+1=0\ \begin{cases} b^2-4ac=(-5)^2-4\cdot 6\cdot 1=1 \\ x=\dfrac{-(-5)\pm\sqrt{1}}{2\cdot 6}=\dfrac{5\pm 1}{12}=\begin{bmatrix} 1/3 & \rightarrow & y=1/(6x)=1/2 \\ 1/2 & \rightarrow & y=1/(6x)=1/3 \end{bmatrix} \end{cases}$$

$\boxed{\text{Las probabilidades de A y B son } 1/2 \text{ y } 1/3 \text{ (intercambiables)}}$

7. Diagramas de árbol

Además de los diagramas de Venn y las tablas de contingencia, existe un tercer método visual para analizar problemas de probabilidad: Los diagramas de árbol.

En un diagrama de árbol se representan los posibles resultados de un experimento. A partir del nudo inicial se pone una rama para cada una de las posibilidades, con su probabilidad. Al final de cada rama se pone un nuevo nudo del que partirán nuevas ramas con sus probabilidades.

La suma de probabilidades de las ramas de cada nudo debe dar 1.

La probabilidad de cada punto final (ramas que van del nudo inicial hasta ahí) será el producto de las probabilidades de las ramas que se han recorrido.

Veamos como se usan con varios ejemplos:

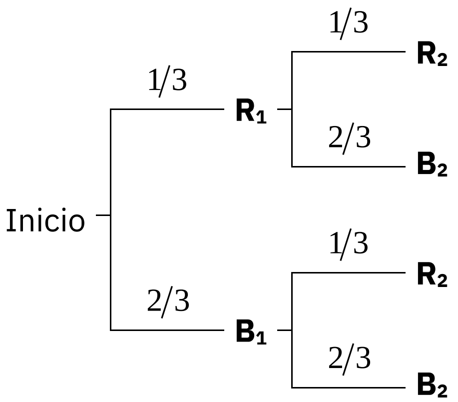
E.19 *Tenemos un dado de 6 caras coloreadas. Dos de las caras son rojas, las otras cuatro son blancas. Si lanzamos dos veces el dado, calcula la probabilidad de que se obtenga: a) Una sola cara roja, b) al menos una cara blanca, c) ambas caras del mismo color.*

La probabilidad de obtener una cara roja al lanzar el dado es: $P(R) = 2/6 = 1/3$

La probabilidad de obtener una cara blanca al lanzar el dado es: $P(B) = 4/6 = 2/3$

El árbol que tenemos al hacer los dos lanzamientos es este:

Lanzamientos: 1º 2º Probabilidad



$$R_2 \Rightarrow P(R_1 \cap R_2) = P(R_1)\cdot P(R_2) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

$$B_2 \Rightarrow P(R_1 \cap B_2) = P(R_1)\cdot P(B_2) = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{2}{9}$$

$$R_2 \Rightarrow P(B_1 \cap R_2) = P(B_1)\cdot P(R_2) = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{2}{9}$$

$$B_2 \Rightarrow P(B_1 \cap B_2) = P(B_1)\cdot P(B_2) = \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{4}{9}$$

El resultado de cada lanzamiento es independiente de lo obtenido anteriormente, por eso la probabilidad de cada punto final es el producto de las probabilidades de las ramas seguidas.

Para calcular las probabilidades pedidas sumaremos las probabilidades de los puntos finales que contribuyen en cada caso.

a) $P(\text{una sola cara roja}) = P(R_1 \cap B_2) + P(B_1 \cap R_2) = \frac{2}{9} + \frac{2}{9} = \boxed{\frac{4}{9} = 0,4444 = 44,44\%}$

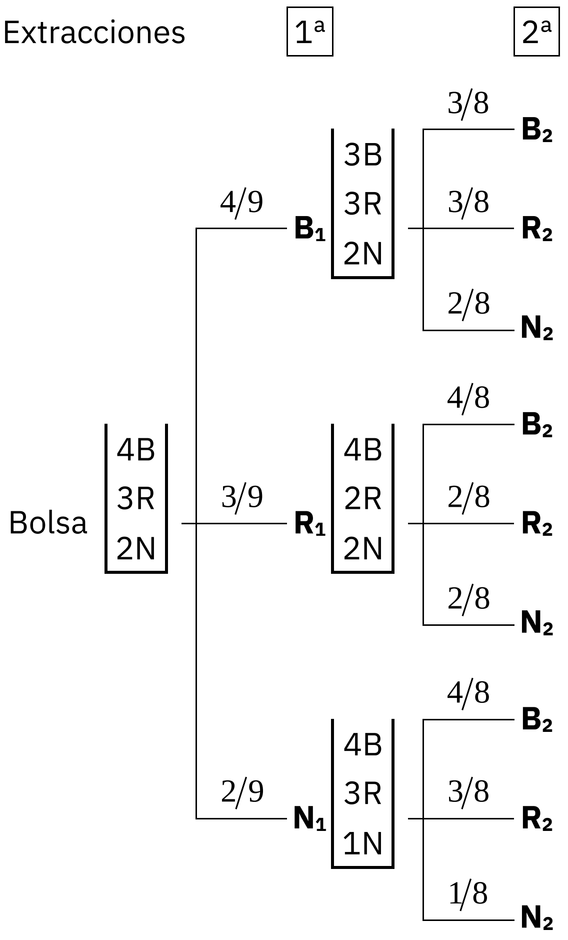
b) $P(\text{al menos una cara blanca}) = P(R_1 \cap B_2) + P(B_1 \cap R_2) + P(B_1 \cap B_2) =$

$$= \frac{2}{9} + \frac{2}{9} + \frac{4}{9} = \boxed{\frac{8}{9} = 0,8889 = 88,89\%}$$

c) $P(\text{caras del mismo color}) = P(R_1 \cap R_2) + P(B_1 \cap B_2) = \frac{1}{9} + \frac{4}{9} = \boxed{\frac{5}{9} = 0,5556 = 55,56\%}$

E.20 *En una bolsa tenemos 4 bolas blancas, 3 bolas rojas y 2 bolas negras. Sacamos una bola al azar de la bolsa y, sin devolverla a la bolsa, sacamos una segunda bola.*
Calcula la probabilidad de que:
a) Ambas sean del mismo color, b) al menos una sea roja, c) una única bola sea negra.

El diagrama de árbol correspondiente es este (se indica en cada caso el estado de la bolsa):



$$\Rightarrow P(B_1 \cap B_2) = \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} = \frac{12}{72}$$
$$\Rightarrow P(B_1 \cap R_2) = \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} = \frac{12}{72}$$
$$\Rightarrow P(B_1 \cap N_2) = \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{8} = \frac{8}{72}$$
$$\Rightarrow P(R_1 \cap B_2) = \frac{3}{9} \cdot \frac{4}{8} = \frac{12}{72}$$
$$\Rightarrow P(R_1 \cap R_2) = \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} = \frac{6}{72}$$
$$\Rightarrow P(R_1 \cap N_2) = \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} = \frac{6}{72}$$
$$\Rightarrow P(N_1 \cap B_2) = \frac{2}{9} \cdot \frac{4}{8} = \frac{8}{72}$$
$$\Rightarrow P(N_1 \cap R_2) = \frac{2}{9} \cdot \frac{3}{8} = \frac{6}{72}$$
$$\Rightarrow P(N_1 \cap N_2) = \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{8} = \frac{2}{72}$$

a) La probabilidad de que sean del mismo color:

$$P(\text{el mismo color}) = P(B_1 \cap B_2) + P(R_1 \cap R_2) + P(N_1 \cap N_2) =$$
$$= \frac{12}{72} + \frac{6}{72} + \frac{2}{72} = \frac{20}{72} = \boxed{\frac{5}{18} = 0,2778 = 27,78\%}$$

b) La probabilidad de que al menos una sea roja:

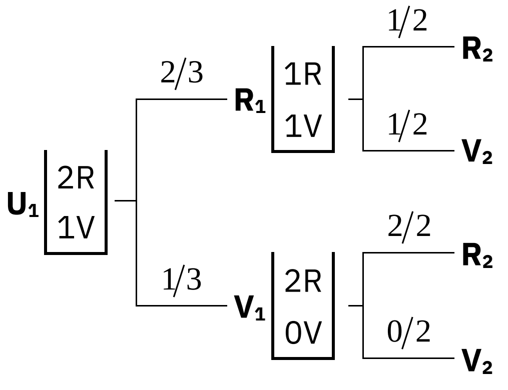
$$P(\text{una o más roja}) =$$
$$= P(B_1 \cap R_2) + P(R_1 \cap B_2) + P(R_1 \cap R_2) + P(R_1 \cap N_2) + P(N_1 \cap R_2) =$$
$$= \frac{12}{72} + \frac{12}{72} + \frac{6}{72} + \frac{6}{72} + \frac{6}{72} = \frac{42}{72} = \boxed{\frac{5}{18} = 0,2778 = 27,78\%}$$

c) La probabilidad de que una única bola sea negra:

$$P(\text{solo una negra}) = P(B_1 \cap N_2) + P(R_1 \cap N_2) + P(N_1 \cap B_2) + P(N_1 \cap R_2) =$$
$$= \frac{8}{72} + \frac{6}{72} + \frac{8}{72} + \frac{6}{72} = \frac{28}{72} = \boxed{\frac{7}{18} = 0,3889 = 38,89\%}$$

E.21 *Tenemos dos urnas. La U_1 contiene 2 bolas rojas y 1 bola verde. La U_2 contiene 1 bola roja y 2 bolas verdes. Extraemos dos bolas de la urna U_1 y, sin mirar el color, las ponemos en la urna U_2. Si extraemos una bola de la urna U_2, ¿qué probabilidad tiene cada color?*

El diagrama de árbol correspondiente a la extracción de dos bolas de U_1 es:



$$\Rightarrow P(R_1 \cap R_2) = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow P(R_1 \cap V_2) = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

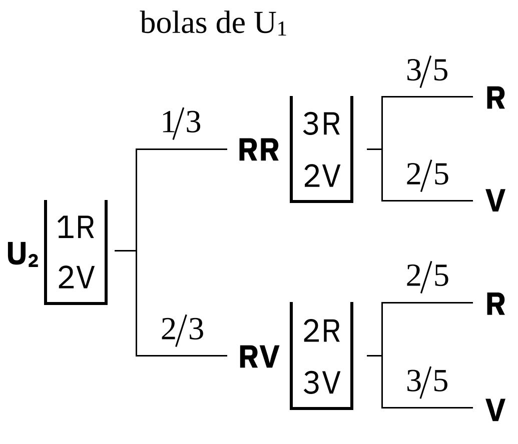
$$\Rightarrow P(V_1 \cap R_2) = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow P(V_1 \cap V_2) = \frac{1}{3}\cdot\frac{0}{2} = \frac{0}{6} = 0$$

Como no se puede extraer 2 bolas verdes: $P(VV) = 0$, las únicas posibilidades son:

2 bolas rojas: $P(RR) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ o bien 1 bola roja y 1 bola verde: $P(RV) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

Introducimos las dos bolas en U_2 y extraemos una bola:



$$\Rightarrow P(RR \cap R) = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5} = \frac{3}{15}$$

$$\Rightarrow P(RR \cap V) = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5} = \frac{2}{15}$$

$$\Rightarrow P(RV \cap R) = \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{5} = \frac{4}{15}$$

$$\Rightarrow P(RV \cap V) = \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{5} = \frac{6}{15}$$

La probabilidad de sacar una bola roja de U_2 es:

$$P(R) = P(RR \cap R) + P(RV \cap R) = \frac{3}{15} + \frac{4}{15} = \frac{7}{15}$$

La probabilidad de sacar una bola verde de U_2 es:

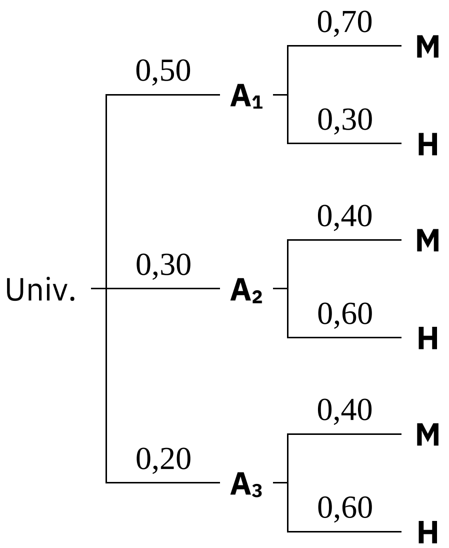
$$P(V) = P(RR \cap V) + P(RV \cap V) = \frac{2}{15} + \frac{6}{15} = \frac{8}{15}$$

Las probabilidades buscadas son: $\boxed{P(R) = \frac{7}{15},\ P(V) = \frac{8}{15}}$

(Por supuesto, ambas probabilidades sumadas dan 1. Bastaba calcular una de ellas.)

E.22 *Una Universidad está formada por tres facultades: La A_1 con el 50% de los estudiantes, la A_2 con el 30% de los estudiantes y la A_3 con el 20%. En la A_1 las mujeres son el 70% de los estudiantes, tanto en la A_2 como en la A_3 las mujeres son el 40% de los estudiantes.*
Si elegimos un estudiante al azar de esa Universidad, calcula la probabilidad de que:
a) Sea mujer, b) sea mujer de la facultad A_1 , c) sea de la facultad A_1 , sabiendo que es mujer, d) sea mujer, sabiendo que es de la facultad A_1 .

El diagrama de árbol correspondiente es este: (Facultades: A, B, C; Sexo: Mujer, Hombre)



$$\Rightarrow \ \mathrm{P}\left(\mathrm{A}_1 \cap \mathrm{M}\right)=0,50\times 0,70=0,35$$
$$\Rightarrow \ \mathrm{P}\left(\mathrm{A}_1 \cap \mathrm{H}\right)=0,50\times 0,30=0,15$$
$$\Rightarrow \ \mathrm{P}\left(\mathrm{A}_2 \cap \mathrm{M}\right)=0,30\times 0,40=0,12$$
$$\Rightarrow \ \mathrm{P}\left(\mathrm{A}_2 \cap \mathrm{H}\right)=0,30\times 0,60=0,18$$
$$\Rightarrow \ \mathrm{P}\left(\mathrm{A}_3 \cap \mathrm{M}\right)=0,20\times 0,40=0,08$$
$$\Rightarrow \ \mathrm{P}\left(\mathrm{A}_3 \cap \mathrm{H}\right)=0,20\times 0,60=0,12$$

a) La probabilidad de que sea mujer será la suma de todos los casos que tengan M:

$$\mathrm{P}(\mathrm{M})=\mathrm{P}\left(\mathrm{A}_1 \cap \mathrm{M}\right)+\mathrm{P}\left(\mathrm{A}_2 \cap \mathrm{M}\right)+\mathrm{P}\left(\mathrm{A}_3 \cap \mathrm{M}\right)=0,35+0,12+0,08=\boxed{0,55=55\%}$$

Puesto que: $\mathrm{P}\left(\mathrm{M}|\mathrm{A}_1\right)=\dfrac{\mathrm{P}\left(\mathrm{A}_1 \cap \mathrm{M}\right)}{\mathrm{P}\left(\mathrm{A}_1\right)}$, $\mathrm{P}\left(\mathrm{M}|\mathrm{A}_2\right)=\dfrac{\mathrm{P}\left(\mathrm{A}_2 \cap \mathrm{M}\right)}{\mathrm{P}\left(\mathrm{A}_2\right)}$, $\mathrm{P}\left(\mathrm{M}|\mathrm{A}_3\right)=\dfrac{\mathrm{P}\left(\mathrm{A}_3 \cap \mathrm{M}\right)}{\mathrm{P}\left(\mathrm{A}_3\right)}$

resulta que: $\mathrm{P}(\mathrm{M})=\mathrm{P}\left(\mathrm{M}|\mathrm{A}_1\right)\cdot \mathrm{P}\left(\mathrm{A}_1\right)+\mathrm{P}\left(\mathrm{M}|\mathrm{A}_2\right)\cdot \mathrm{P}\left(\mathrm{A}_2\right)+\mathrm{P}\left(\mathrm{M}|\mathrm{A}_3\right)\cdot \mathrm{P}\left(\mathrm{A}_3\right)$

A esto se le conoce como **probabilidad total** y será el objeto del siguiente capítulo:

Si $\Omega=\mathrm{A}_1 \cup \mathrm{A}_2 \cup \ldots \cup \mathrm{A}_n$ y $\mathrm{M}\subset\Omega$ se tiene que: $\mathrm{P}(\mathrm{M})=\sum_{i\leq n}\mathrm{P}\left(\mathrm{M}|\mathrm{A}_i\right)\cdot \mathrm{P}\left(\mathrm{A}_i\right)$

b) La probabilidad de que sea mujer de la facultad A_1 es:

$$\mathrm{P}\left(\mathrm{A}_1 \cap \mathrm{M}\right)=\boxed{0,35=35\%}$$

c) La probabilidad de que sea de la facultad A_1 , sabiendo que es mujer, es:

$$\mathrm{P}\left(\mathrm{A}_1|\mathrm{M}\right)=\frac{\mathrm{P}\left(\mathrm{A}_1 \cap \mathrm{M}\right)}{\mathrm{P}(\mathrm{M})}=\frac{35\%}{55\%}=\boxed{0,6364=63,64\%}$$

[Las mujeres en A_1 son 0,35 de un total para la Universidad de: $(0,35+0,12+0,08)=0,55$]

d) La probabilidad de que sea mujer, sabiendo que es de la facultad A_1 , es:

$$\mathrm{P}\left(\mathrm{M}|\mathrm{A}_1\right)=\frac{\mathrm{P}\left(\mathrm{A}_1 \cap \mathrm{M}\right)}{\mathrm{P}\left(\mathrm{A}_1\right)}=\frac{35\%}{50\%}=\boxed{0,70=70\%}$$

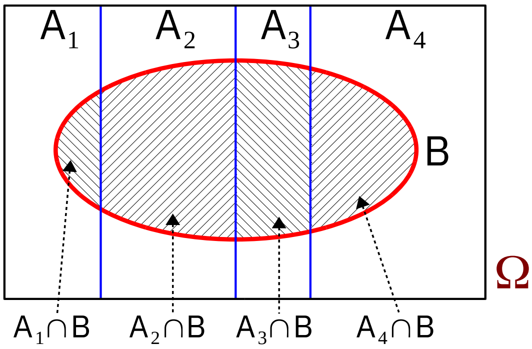
[En A_1 las mujeres son 0,35 de un total de: $(0,35+0,15)=0,50$]

8. Probabilidad total

Lo hemos visto, para un caso particular, en el apartado (a) del ejemplo anterior (22). Como es un tema importante lo exponemos ahora de una forma más general.

Supongamos que los casos A_i con $1 \le i \le n$ son una partición de Ω.
Quiere decir que cubren por entero el espacio muestral: $\Omega = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_{n-1} \cup A_n$

Si consideremos el suceso $B \subset \Omega$, tenemos: $B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \ldots \cup (A_n \cap B)$



Por eso, la probabilidad del suceso B será:

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \ldots + P(A_n \cap M) \qquad (\ast)$$

Las probabilidades de B condicionadas a los sucesos A_i son:

$$P(B|A_1) = \frac{P(A_1 \cap B)}{P(A_1)} \;;\; P(B|A_2) = \frac{P(A_2 \cap B)}{P(A_2)} \;;\ldots;\; P(B|A_n) = \frac{P(A_n \cap B)}{P(A_n)}$$

Por lo que las probabilidades de las intersecciones $A_i \cap B$ son:

$$P(A_1 \cap B) = P(B|A_1) \cdot P(A_1) \;;\; P(A_2 \cap B) = P(B|A_2) \cdot P(A_2) \;;\ldots \text{ etc.}$$

Y sustituyendo en (∗) tendremos:

$$P(B) = P(B|A_1) \cdot P(A_1) + P(B|A_2) \cdot P(A_2) + \ldots + P(B|A_n) \cdot P(A_n)$$

Que se puede escribir así:

$$\boxed{P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B|A_i) \cdot P(A_i)}$$

Es el **Teorema de la probabilidad total**

E.23 *Dos empresas X e Y fabrican bombillas. El 60% de las bombillas del mercado las produce X, el 40% restante las produce Y. El 99% de las bombillas de X lucen más de 5000 horas. El 95% de las bombillas de Y lucen más de 5000 horas.*
¿Cuál es la probabilidad de que una bombilla elegida al azar dure más de 5000 horas?

La probabilidad de que una bombilla sea de X o Y es: $P(A_X) = 60/100$, $P(A_Y) = 40/100$

Si B es el suceso 'durar más de 5000 horas': $P(B|A_X) = 99/100$, $P(B|A_Y) = 95/100$

$$\Rightarrow \; P(B) = P(B|A_X) \cdot P(A_X) + P(B|A_Y) \cdot P(A_Y) =$$

$$= \frac{99}{100} \cdot \frac{60}{100} + \frac{95}{100} \cdot \frac{40}{100} = \boxed{\frac{487}{500} = 0{,}974 = 97{,}4\%}$$

E.24 *En unas oposiciones al Cuerpo de Bomberos, el 30% de los presentados son mujeres. Entre las mujeres presentadas, las que miden más de 1,80m son el 40%. Entre los hombres presentados, los que miden más de 1,80m son el 60%. Si se elige una persona entre los que se han presentado, ¿cuál es la probabilidad de que mida más de 1,80m?*

El espacio muestral queda cubierto por los grupos 'Hombre' y 'Mujer'. De cada grupo conocemos la probabilidad del suceso 'medir más de 1,80m'. Por eso, vamos a aplicar el teorema de la probabilidad total:

Llamamos A_1 al suceso 'Hombre' y A_2 al suceso 'Mujer': $\Omega = A_1 \cup A_2$

Según los datos del problema: $P(A_1) = \frac{70}{100}$, $P(A_2) = \frac{30}{100}$

Llamamos B al suceso 'medir más de 1,80m': $P(B|A_1) = \frac{60}{100}$, $P(B|A_2) = \frac{40}{100}$

$$P(B) = P(B|A_1)\cdot P(A_1) + P(B|A_2)\cdot P(A_2) = \frac{60}{100}\cdot\frac{70}{100} + \frac{40}{100}\cdot\frac{30}{100} = \boxed{\frac{27}{50} = 0,54 = 54\%}$$

E.25 *En un acuario tienen peces Ángel de 3 colores. El 50% son plateados, el 30% dorados y el 20% negros. De los plateados son machos el 60%, de los dorados son machos el 40% y de los negros son machos el 80%. Si se elige un pez al azar de ese acuario, calcula la probabilidad de que: a) Sea hembra, b) sea negro, sabiendo que es hembra.*

El espacio muestral queda cubierto por los colores 'Plateado', 'Dorado' y 'Negro'.
De cada grupo conocemos la probabilidad del suceso 'ser Macho'.

Calculemos la probabilidad del suceso 'ser Macho'. Con ella tendremos la de 'ser Hembra'.

$$P(M) = P(M|A_P)\cdot P(A_P) + P(M|A_D)\cdot P(A_D) + P(M|A_N)\cdot P(A_N) =$$
$$= \frac{60}{100}\cdot\frac{50}{100} + \frac{40}{100}\cdot\frac{30}{100} + \frac{80}{100}\cdot\frac{20}{100} = \frac{29}{50}$$

a) La probabilidad de elegir una hembra es:

$$P(H) = 1 - P(M) = 1 - \frac{29}{50} = \boxed{\frac{21}{50} = 0,42 = 42\%}$$

b) Queremos obtener $P(A_N|H)$.

$$P(A_N|H) = \frac{P(A_N \cap H)}{P(H)} = \ldots$$

$$\left\{ P(H|A_N) = \frac{P(A_N \cap H)}{P(A_N)} \;\rightarrow\; P(A_N \cap H) = P(H|A_N)\cdot P(A_N) \right\}$$

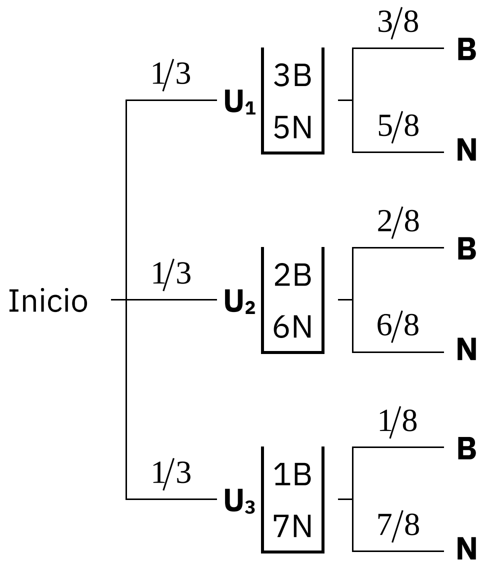
$$\ldots = \frac{P(H|A_N)\cdot P(A_N)}{P(H)} = \frac{\left[1 - P(M|A_N)\right]\cdot P(A_N)}{P(H)} =$$

$$= \frac{[100\% - 80\%]\cdot 20\%}{42\%} = \boxed{\frac{2}{21} = 0,0952 = 9,52\%}$$

(Muchas veces es más claro hacerlo con un diagrama de árbol, aquí preferí hacerlo así.)

E.26 *En un concurso se nos da a elegir entre 3 urnas. La primera urna tiene 3 bolas blancas y 5 bolas negras, la segunda tiene 2 blancas y 6 negras, la tercera urna 1 blanca y 7 negras. Elegimos una urna al azar y de ella sacamos una bola al azar. Calcula la probabilidad de que: a) La bola sea blanca, b) Si la bola es blanca, haberla sacado de la primera urna.*

El diagrama de árbol correspondiente es este:



$$\Rightarrow P(U_1 \cap B) = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{8} = \frac{3}{24}$$

$$\Rightarrow P(U_1 \cap N) = \frac{1}{3}\cdot\frac{5}{8} = \frac{5}{24}$$

$$\Rightarrow P(U_2 \cap B) = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{8} = \frac{2}{24}$$

$$\Rightarrow P(U_2 \cap N) = \frac{1}{3}\cdot\frac{6}{8} = \frac{6}{24}$$

$$\Rightarrow P(U_3 \cap B) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{8} = \frac{1}{24}$$

$$\Rightarrow P(U_3 \cap N) = \frac{1}{3}\cdot\frac{7}{8} = \frac{7}{24}$$

a) La probabilidad de que la bola sea blanca es:

$$P(B) = P(U_1 \cap B) + P(U_2 \cap B) + P(U_3 \cap B) =$$

$$= \frac{3}{24} + \frac{2}{24} + \frac{1}{24} = \frac{6}{24} = \boxed{\frac{1}{4} = 0,25 = 25\%}$$

Con el teorema de la probabilidad total, tendríamos el mismo resultado:

$$P(B) = P(B|U_1)\cdot P(U_1) + P(B|U_2)\cdot P(U_2) + P(B|U_3)\cdot P(U_3) =$$

$$= \frac{3}{8}\cdot\frac{1}{3} + \frac{2}{8}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{3} = \frac{3}{24} + \frac{2}{24} + \frac{1}{24} = \frac{6}{24} = \boxed{\frac{1}{4} = 0,25 = 25\%}$$

b) La probabilidad de haberla sacado de la primera urna, sabiendo que es blanca, es:

$$P(U_1|B) = \frac{P(U_1 \cap B)}{P(B)} = \frac{3/24}{1/4} = \frac{3\cdot 4}{1\cdot 24} = \frac{12}{24} = \boxed{\frac{1}{2} = 0,50 = 50\%}$$

La probabilidad del suceso $B|U_1$ es:

$$P(B|U_1) = \frac{P(U_1 \cap B)}{P(U_1)} \rightarrow P(U_1 \cap B) = P(B|U_1)\cdot P(U_1)$$

Con este resultado, podríamos reescribir $P(U_1|B)$ de esta manera:

$$P(U_1|B) = \frac{P(U_1 \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|U_1)\cdot P(U_1)}{P(B)}$$

Esta forma de escribir la probabilidad condicionada se conoce como Teorema de Bayes y será el objeto del siguiente capítulo.

9. Teorema de Bayes

Supongamos que los casos A_i con $1 \le i \le n$ son una partición de Ω.
Es decir, que cubren por entero el espacio muestral: $\Omega = \mathrm{A}_1 \cup \mathrm{A}_2 \cup \mathrm{A}_3 \cup \ldots \cup \mathrm{A}_{n-1} \cup \mathrm{A}_n$

Y consideremos el suceso $\mathrm{B} \subset \Omega$.

Las probabilidades $\mathrm{P}(\mathrm{A}_i)$ reciben el nombre de **probabilidades a priori** de los sucesos A_i.

Estamos interesados en saber cómo cambian si sabemos que se ha producido el suceso B.

Se llama **probabilidad a posteriori** del suceso $\mathrm{A}_i|\mathrm{B}$ a la probabilidad $\mathrm{P}(\mathrm{A}_i|\mathrm{B})$.

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}_i|\mathrm{B}) = \frac{\mathrm{P}(\mathrm{A}_i \cap \mathrm{B})}{\mathrm{P}(\mathrm{B})} = \ldots$$

$$\left\{ \mathrm{P}(\mathrm{B}|\mathrm{A}_i) = \frac{\mathrm{P}(\mathrm{A}_i \cap \mathrm{B})}{\mathrm{P}(\mathrm{A}_i)} \;\rightarrow\; \mathrm{P}(\mathrm{A}_i \cap \mathrm{B}) = \mathrm{P}(\mathrm{B}|\mathrm{A}_i)\cdot \mathrm{P}(\mathrm{A}_i) \right\}$$

$$\ldots = \frac{\mathrm{P}(\mathrm{B}|\mathrm{A}_i)\cdot \mathrm{P}(\mathrm{A}_i)}{\mathrm{P}(\mathrm{B})}$$

Esta fórmula: $\boxed{\mathrm{P}(\mathrm{A}_i|\mathrm{B}) = \frac{\mathrm{P}(\mathrm{B}|\mathrm{A}_i)\cdot \mathrm{P}(\mathrm{A}_i)}{\mathrm{P}(\mathrm{B})}}$ se conoce como **Teorema de Bayes**.

Usando el teorema de la probabilidad total: $\mathrm{P}(\mathrm{B}) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(\mathrm{B}|\mathrm{A}_i)\cdot \mathrm{P}(\mathrm{A}_i)$ se puede escribir así:

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}_i|\mathrm{B}) = \frac{\mathrm{P}(\mathrm{B}|\mathrm{A}_i)\cdot \mathrm{P}(\mathrm{A}_i)}{\sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(\mathrm{B}|\mathrm{A}_i)\cdot \mathrm{P}(\mathrm{A}_i)}$$

Esta última forma es totalmente equivalente a la anterior, solo es más ‘espectacular’.
Pero muestra con claridad que la fórmula permite calcular $\mathrm{P}(\mathrm{A}_i|\mathrm{B})$, con las $\mathrm{P}(\mathrm{B}|\mathrm{A}_i)$.

El teorema de Bayes es muy importante pues relaciona la probabilidad de A sabiendo B con la probabilidad de B sabiendo A. Por ejemplo: Conociendo la probabilidad de tener fiebre, si se sabe que se tiene COVID, se podría hallar la probabilidad de tener COVID si se tiene fiebre.

Es útil para estudiar las relaciones causa-efecto. Normalmente se conoce, para una causa dada, cuál es la probabilidad de su efecto (por ejemplo, si tienes hipotiroidismo qué probable es que pierdas peso). El teorema de Bayes permite calcular, para un efecto determinado, cuál es la probabilidad de las causas que lo pudieron producir (si pierdes peso qué probable es que tengas hipotiroidismo).

La inferencia bayesiana es un tipo de deducción basada en estadísticas en la que las evidencias o las observaciones se emplean para averiguar la probabilidad de que una hipótesis pueda ser cierta. Su nombre proviene del uso que se hace del teorema de Bayes durante el proceso. El teorema de Bayes tiene muchos campos de aplicación y es una herramienta matemática básica para cualquier Ciencia.

E.27 *Tenemos dos monedas, una normal y otra trucada en la que sale cara el triple de veces que cruz. Cogemos una moneda al azar y la lanzamos al aire obteniendo cara. Calcula la probabilidad de que la moneda lanzada fuese la moneda trucada.*

Llamamos A a la moneda normal y B a la moneda trucada.

Las dos monedas tienen la misma probabilidad de ser elegidas: $P(A)=\frac{1}{2},\ P(B)=\frac{1}{2}$

La moneda normal (A) tiene como probabilidad de obtener cara: $P(\text{cara}|A)=\frac{1}{2}$

La moneda trucada (B) de cada 4 lanzamientos produce 3 caras: $P(\text{cara}|B)=\frac{3}{4}$

La probabilidad total de obtener cara es:

$$P(\text{cara})=P(\text{cara}|A)\cdot P(A)+P(\text{cara}|B)\cdot P(B)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{5}{8}$$

Queremos calcular la probabilidad de que la moneda elegida sea la B: $P(B|\text{cara})$

Según el teorema de Bayes:

$$P(B|\text{cara})=\frac{P(\text{cara}|B)\cdot P(B)}{P(\text{cara})}=\frac{3/4\cdot 1/2}{5/8}=\frac{3\cdot 8}{5\cdot 4\cdot 2}=\boxed{\frac{3}{5}=0,6=60\%}$$

E.28 *La urna A contiene 6 bolas rojas y 4 bolas verdes. La urna B contiene 5 bolas rojas y 10 bolas verdes. Elegimos una urna al azar y sacamos dos bolas que son ambas rojas. Calcula la probabilidad de que la urna elegida sea la A.*

Las dos urnas tienen la misma probabilidad de ser elegidas: $P(A)=\frac{1}{2},\ P(B)=\frac{1}{2}$

En la urna A, la probabilidad de elegir 2 bolas rojas es: $P(R_1\cap R_2|A)=\frac{6}{10}\cdot\frac{5}{9}=\frac{1}{3}$

(En A hay 6 rojas de 10. Tras sacar la primera bola roja quedan 5 bolas rojas de 9.)

En la urna B, la probabilidad de elegir 2 bolas rojas es: $P(R_1\cap R_2|B)=\frac{5}{15}\cdot\frac{4}{14}=\frac{2}{21}$

(En B hay 5 rojas de 15. Tras sacar la primera bola roja quedan 4 bolas rojas de 14.)

Así, la probabilidad de sacar dos bolas rojas es:

$$P(R_1\cap R_2)=P(R_1\cap R_2|A)\cdot P(A)+P(R_1\cap R_2|B)\cdot P(B)=$$
$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{2}{21}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{14}$$

Queremos calcular la probabilidad de que la urna elegida sea la A: $P(A|R_1\cap R_2)$

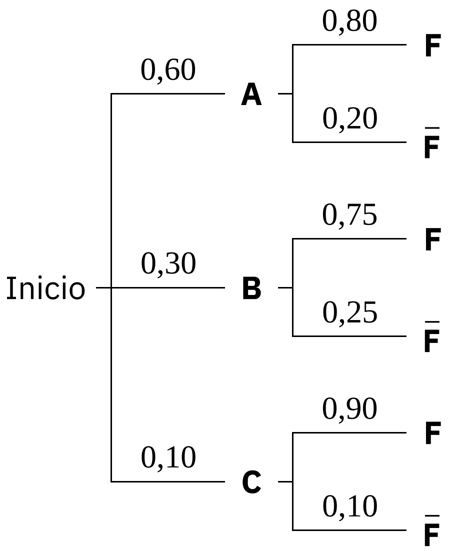
Según el teorema de Bayes:

$$P(A|R_1\cap R_2)=\frac{P(R_1\cap R_2|A)\cdot P(A)}{P(R_1\cap R_2)}=\frac{1/3\cdot 1/2}{3/14}=\frac{14}{3\cdot 3\cdot 2}=\boxed{\frac{7}{9}=0,7778=77,78\%}$$

E.29 *En una ciudad hay cajeros automáticos de 3 redes. El 60% de esos cajeros son de la red A, el 30% de la B y el 10% de la C. Cierto día estaban operativos el 80% de los cajeros de la red A, el 75% de la red B y el 90% de la red C. Ese día un cliente eligió un cajero al azar e intentó sacar dinero. Calcula la probabilidad de que:*
a) El cajero funcionase, b) si el cajero funcionó, que fuera un cajero de la red A.

Llamamos F al suceso 'el cajero funciona' y $\overline{F}$ al suceso 'el cajero no funciona'.

El diagrama de árbol del problema es el siguiente:



$$\Rightarrow P(A\cap F)=0,80\cdot 0,60=0,480$$
$$\Rightarrow P(A\cap \overline{F})=0,80\cdot 0,20=0,160$$
$$\Rightarrow P(B\cap F)=0,30\cdot 0,75=0,225$$
$$\Rightarrow P(B\cap \overline{F})=0,30\cdot 0,25=0,075$$
$$\Rightarrow P(C\cap F)=0,10\cdot 0,90=0,090$$
$$\Rightarrow P(C\cap \overline{F})=0,10\cdot 0,10=0,010$$

a) La probabilidad de que el cajero elegido funcione es:

$$P(F)=P(A\cap F)+P(B\cap F)+P(C\cap F)=$$
$$=0,480+0,225+0,090=\boxed{\frac{159}{200}=0,795=79,5\%}$$

Usando el teorema de la probabilidad total sería:

$$P(F)=P(F|A)\cdot P(A)+P(F|B)\cdot P(B)+P(F|C)\cdot P(C)=$$
$$=\frac{80}{100}\cdot\frac{60}{100}+\frac{75}{100}\cdot\frac{30}{100}+\frac{90}{100}\cdot\frac{10}{100}=\boxed{\frac{159}{200}=0,795=79,5\%}$$

b) Queremos obtener la probabilidad de que el cajero sea de A sabiendo que funcionó.

Con los datos del diagrama de árbol tenemos:

$$P(A|F)=\frac{0,480}{0,480+0,225+0,090}=\frac{0,480}{0,795}=\boxed{\frac{32}{53}=0,6038=60,38\%}$$

[La probabilidad de que el cajero que funciona sea el A es 0,480 de $0,480+0,225+0,090$]

Ahora lo haremos usando el teorema de Bayes:

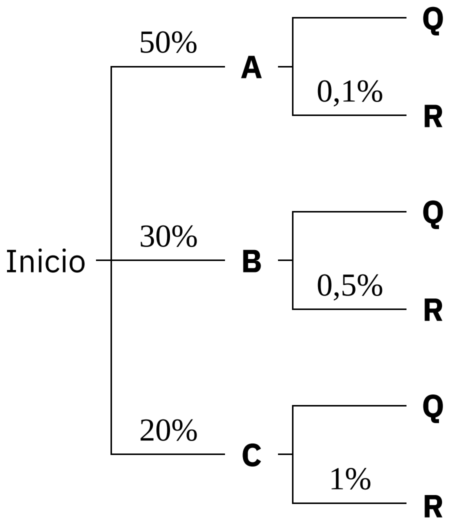
$$P(A|F)=\frac{P(F|A)\cdot P(A)}{P(F)}=\frac{80/100\cdot 60/100}{159/200}=\boxed{\frac{32}{53}=0,6038=60,38\%}$$

(Por supuesto, no hay que hacer cada apartado de dos formas. Sirvió como comprobación.)

E.30 *Una empresa recibe material de tres proveedores: A, B y C. El 50% del material lo suministra A, el 30% lo suministra B y el 20% C. Algunos lotes no pasan el control de calidad. No lo pasan el 0,1% de los lotes de A, el 0,5% de los lotes de B y el 1% de los lotes de C.*
Calcula: a) ¿Qué porcentaje de los lotes es rechazado?
b) Si un lote es rechazado, ¿qué proveedor es el más probable?

Llamamos Q al suceso 'lote pasa control de calidad' y R al suceso 'lote rechazado'.

El diagrama de árbol del problema es el siguiente (solo nos interesan los rechazados):



$$\Rightarrow\ P(A\cap R)=\frac{50}{100}\cdot\frac{0,1}{100}=\frac{1}{2000}$$

$$\Rightarrow\ P(B\cap R)=\frac{30}{100}\cdot\frac{0,5}{100}=\frac{3}{2000}$$

$$\Rightarrow\ P(C\cap R)=\frac{20}{100}\cdot\frac{1}{100}=\frac{1}{500}$$

a) La probabilidad de que un lote sea rechazado es:

$$P(R)=P(A\cap R)+P(B\cap R)+P(C\cap R)=$$

$$=\frac{1}{2000}+\frac{3}{2000}+\frac{1}{500}=\boxed{\frac{1}{250}=0,004=0,4\%}$$

Usando el teorema de la probabilidad total sería:

$$P(R)=P(R|A)\cdot P(A)+P(R|B)\cdot P(B)+P(R|C)\cdot P(C)=$$

$$=\frac{0,1}{100}\cdot\frac{50}{100}+\frac{0,5}{100}\cdot\frac{30}{100}+\frac{1}{100}\cdot\frac{20}{100}=\boxed{\frac{1}{250}=0,004=0,4\%}$$

b) Queremos obtener la probabilidad de que el proveedor sea A, B, C si fue rechazado.

Lo haremos usando el teorema de Bayes para cada proveedor:

$$P(A|R)=\frac{P(R|A)\cdot P(A)}{P(R)}=\frac{0,1/100\cdot 50/100}{1/250}=\frac{1}{8}=0,125$$

$$P(B|R)=\frac{P(R|B)\cdot P(B)}{P(R)}=\frac{0,5/100\cdot 30/100}{1/250}=\frac{3}{8}=0,375$$

$$P(C|R)=\frac{P(R|C)\cdot P(C)}{P(R)}=\frac{1/100\cdot 20/100}{1/250}=\frac{1}{2}=0,500$$

$\boxed{\text{Si un lote es rechazado, el proveedor más probable es el C.}}$

(De las anteriores, es la mayor probabilidad sabiendo que el lote ha sido rechazado.)

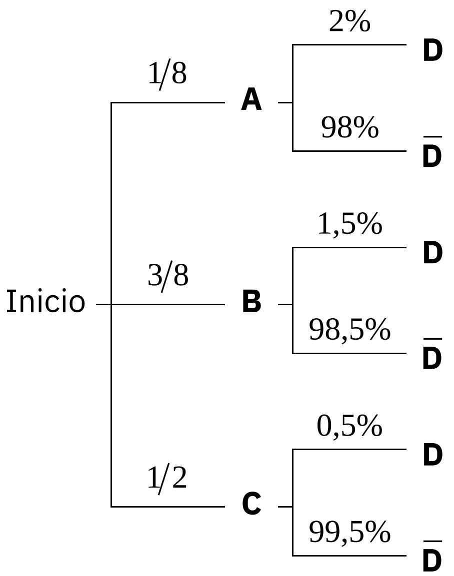
E.31 *En una factoría 3 máquinas fabrican una misma pieza. La máquina A fabrica 1000 unidades al día, un 2% defectuosas. La máquina B, 3000 unidades al día, un 1,5% defectuosas. La C fabrica 4000 unidades al día, un 0,5% defectuosas. a) ¿Cuál es la probabilidad de que una pieza elegida al azar sea defectuosa? b) Si una pieza es defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido fabricada por la máquina A? c) Sabiendo que una pieza no es defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de no haber sido fabricada por la máquina C?*

Llamamos A, B, C a los sucesos de fabricación por cada máquina y D a 'pieza defectuosa'.

Las máquinas fabrican 8000 unidades diarias. La probabilidad para cada máquina es:

$$P(A)=\frac{1000}{8000}=\frac{1}{8}\ ,\ P(B)=\frac{3000}{8000}=\frac{3}{8},\ P(C)=\frac{4000}{8000}=\frac{1}{2}$$

El diagrama de árbol del problema es el siguiente:



$$\Rightarrow P(A\cap D)=\frac{1}{8}\cdot\frac{2}{100}=\frac{1}{400}$$

$$\Rightarrow P(A\cap \overline{D})=\frac{1}{8}\cdot\frac{98}{100}=\frac{49}{400}$$

$$\Rightarrow P(B\cap D)=\frac{3}{8}\cdot\frac{1,5}{100}=\frac{9}{1600}$$

$$\Rightarrow P(B\cap \overline{D})=\frac{3}{8}\cdot\frac{98,5}{100}=\frac{591}{1600}$$

$$\Rightarrow P(C\cap D)=\frac{1}{2}\cdot\frac{0,5}{100}=\frac{1}{400}$$

$$\Rightarrow P(C\cap \overline{D})=\frac{1}{2}\cdot\frac{99,5}{100}=\frac{199}{400}$$

a) La probabilidad de que una pieza sea defectuosa es (probabilidad total):

$$P(D)=P(A\cap D)+P(B\cap D)+P(C\cap D)=$$

$$=\frac{1}{400}+\frac{9}{1600}+\frac{1}{400}=\boxed{\frac{17}{1600}=0,010625=1,06\%}$$

b) La probabilidad de que una pieza haya sido fabricada por A, sabiendo que es defectuosa, la calculamos usando el teorema de Bayes:

$$P(A|D)=\frac{P(D|A)\cdot P(A)}{P(D)}=\frac{P(A\cap D)}{P(D)}=\frac{1/400}{17/1600}=\boxed{\frac{4}{17}=0,2353=23,53\%}$$

c) La probabilidad de que una pieza no haya sido fabricada por C, si no es defectuosa, es la probabilidad de haber sido fabricada por A o por B, sabiendo que no es defectuosa:

$$P(\overline{C}|\overline{D})=P(A|\overline{D})+P(B|\overline{D})=\frac{P(A\cap\overline{D})}{P(\overline{D})}+\frac{P(B\cap\overline{D})}{P(\overline{D})}=\frac{P(A\cap\overline{D})+P(B\cap\overline{D})}{1-P(D)}=$$

$$=\frac{\frac{49}{400}+\frac{591}{1600}}{1-\frac{17}{1600}}=\boxed{\frac{787}{1583}=0,4972=49,72\%}$$

E.01 *En una clase de la ESO el 70% del alumnado lleva comida para la hora del recreo. El 60% del alumnado lleva bebida y el 40% del alumnado lleva tanto comida como bebida. ¿Qué porcentaje del alumnado no lleva ni comida ni bebida?*

E.02 *En unas pruebas para la Policía Nacional el 80% de los presentados aprobó las pruebas físicas, el 35% de los presentados aprobó las pruebas técnicas y el 5% de los presentados no aprobó ninguna de las dos. ¿Qué porcentaje de los presentados aprobó ambas pruebas?*

E.03 *Los alumnos de una autoescuela se han presentado a los exámenes para obtener el permiso de conducir turismos. Hicieron la prueba teórica y la prueba práctica. El 15% de los alumnos aprobó ambas pruebas. El 75% de los alumnos solo aprobó una prueba. La prueba teórica se les dio mejor, pues el número de alumnos que la superaron fue el doble que el número de alumnos que superó la prueba práctica. ¿Qué porcentaje de los alumnos falló las 2 pruebas? ¿Qué porcentaje de los alumnos aprobó cada una de las pruebas?*

E.04 *Una bolsa contiene 5 bolas rojas, 3 blancas y 2 negras. Calcula la probabilidad de sacar: a) Una bola roja, b) una bola que no sea blanca, c) una bola negra, d) una bola roja o blanca.*

E.05 *Una baraja española tiene 48 cartas, 12 de cada palo. Cada palo tiene solo tres figuras (la sota, el caballo y el rey). Si sacamos una carta al azar, calcula la probabilidad de que sea: a) De oros, b) una figura de oros, c) una figura, d) que sea figura o sea de oros.*

E.06 *En un estudio para conocer si un grupo de personas sabe bailar o no, se obtuvo esto:*

	Mujer (M)	Hombre (H)	
Baila	500	200	700
No baila	300	1000	1300
	800	1200	2000

Si se elige a una persona de ese grupo, calcula la probabilidad de que:

a) Sea mujer.

b) Sepa bailar.

c) Sea una mujer que sabe bailar.

E.07 *Se lanzan dos dados y se mira la suma de sus puntos. Calcula la probabilidad de: a) Obtener menos de 4 puntos, b) Obtener 7 puntos, c) Obtener más de 9 puntos.*

E.08 *Si se lanzan dos monedas (que tienen cara y cruz), calcula la probabilidad de que: a) Salga al menos una cara, b) No salga ninguna cara, c) salgan una cara y una cruz.*

E.09 *En una asignatura, el número de las chicas que se han matriculado es el doble que el número de chicos. Al final del curso aprobaron el 80% de las chicas y el 60% de los chicos. Calcula: a) El porcentaje de chicas matriculadas respecto al total, b) El porcentaje de aprobados respecto a los matriculados, c) el porcentaje de chicas entre los suspendidos.*

E.10 *En un estudio para conocer si un grupo de personas tiene o no artrosis se obtuvo esto:*

	Mujer (M)	Hombre (H)	
Artrosis (A)	55	45	100
No artrosis ($\overline{A}$)	15	30	45
	70	75	145

Si se elige a una persona de ese grupo, calcula la probabilidad de que:

a) Tenga artrosis.

b) Tenga artrosis o sea mujer.

c) Sea hombre y no tenga artrosis.

E.11 *De los sucesos A, B sabemos que* $P(A)=0.65$, $P(B)=0.45$, $P(A\cap B)=0.25$

Calcula: a) $P(A\cup B)$, *b)* $P(\overline{A})$, *c)* $P(\overline{A}\cap\overline{B})$, *d)* $P(A\cap\overline{B})$, *e)* $P(\overline{A}\cap B)$

E.12 *Con la tabla del ejemplo 06, ¿son independientes los sucesos 'sabe bailar' y 'ser mujer'?*

E.13 *De los sucesos A, B sabemos que* $P(A)=3/4$, $P(B)=1/3$, $P(A\cap B)=1/5$

Calcula: a) $P(A\cup B)$, *b)* $P(A|B)$, *c)* $P(\overline{A}|B)$, *d)* $P(\overline{A}|\overline{B})$

E.14 *De un estudio con 200 personas sobre la relación entre fumar y tener cáncer se tiene:*

	Fumador	No Fumador	
Con cáncer	80	20	100
Sin cáncer	30	70	100
	110	90	200

Si se elige a una persona al azar de ese grupo, calcula la probabilidad de que:

a) Tenga cáncer (C).

b) Tenga cáncer y sea fumador (C y F).

c) ¿Son independientes fumar y tener cáncer?

E.15 *Demuestra que, si A y B son independientes,* $\overline{A}$ *y* $\overline{B}$ *también lo son.*

E.16 *De los sucesos A, B sabemos que* $P(A)=3/8$, $P(B)=2/5$, $P(\overline{A}\cup\overline{B})=17/20$

Calcula si A y B son independientes.

E.17 *De los sucesos A, B sabemos que* $P(A)=2/3$, $P(B|A)=1/2$, $P(B)=x$

Calcula el menor valor posible de x y el mayor valor posible de x.

E.18 *A y B son sucesos independientes. La probabilidad de que ocurran simultáneamente es* $1/6$ *y la probabilidad de que no ocurra ninguno es* $1/3$. *Calcula las probabilidades de A y B.*

E.19 *Tenemos un dado de 6 caras coloreadas. Dos de las caras son rojas, las otras cuatro son blancas. Si lanzamos dos veces el dado, calcula la probabilidad de que se obtenga:*
a) Una sola cara roja, b) al menos una cara blanca, c) ambas caras del mismo color.

E.20 *En una bolsa tenemos 4 bolas blancas, 3 bolas rojas y 2 bolas negras. Sacamos una bola al azar de la bolsa y, sin devolverla a la bolsa, sacamos una segunda bola.*
Calcula la probabilidad de que:
a) Ambas sean del mismo color, b) al menos una sea roja, c) una única bola sea negra.

E.21 *Tenemos dos urnas. La* U_1 *contiene 2 bolas rojas y 1 bola verde. La* U_2 *contiene 1 bola roja y 2 bolas verdes. Extraemos dos bolas de la urna* U_1 *y, sin mirar el color, las ponemos en la urna* U_2. *Si extraemos una bola de la urna* U_2, *¿qué probabilidad tiene cada color?*

E.22 *Una Universidad está formada por tres facultades: La* A_1 *con el 50% de los estudiantes, la* A_2 *con el 30% de los estudiantes y la* A_3 *con el 20%. En la* A_1 *las mujeres son el 70% de los estudiantes, tanto en la* A_2 *como en la* A_3 *las mujeres son el 40% de los estudiantes.*
Si elegimos un estudiante al azar de esa Universidad, calcula la probabilidad de que:
a) Sea mujer, b) sea mujer de la facultad A_1 , *c) sea de la facultad* A_1 , *sabiendo que es mujer, d) sea mujer, sabiendo que es de la facultad* A_1 .

E.23 *Dos empresas X e Y fabrican bombillas. El 60% de las bombillas del mercado las produce X, el 40% restante las produce Y. El 99% de las bombillas de X lucen más de 5000 horas. El 95% de las bombillas de Y lucen más de 5000 horas.*
¿Cuál es la probabilidad de que una bombilla elegida al azar dure más de 5000 horas?

E.24 *En unas oposiciones al Cuerpo de Bomberos, el 30% de los presentados son mujeres. Entre las mujeres presentadas, las que miden más de 1,80m son el 40%. Entre los hombres presentados, los que miden más de 1,80m son el 60%. Si se elige una persona entre los que se han presentado, ¿cuál es la probabilidad de que mida más de 1,80m?*

E.25 *En un acuario tienen peces Ángel de 3 colores. El 50% son plateados, el 30% dorados y el 20% negros. De los plateados son machos el 60%, de los dorados son machos el 40% y de los negros son machos el 80%. Si se elige un pez al azar de ese acuario, calcula la probabilidad de que: a) Sea hembra, b) sea negro, sabiendo que es hembra*.

E.26 *En un concurso se nos da a elegir entre 3 urnas. La primera urna tiene 3 bolas blancas y 5 bolas negras, la segunda tiene 2 blancas y 6 negras, la tercera urna 1 blanca y 7 negras. Elegimos una urna al azar y de ella sacamos una bola al azar. Calcula la probabilidad de que: a) La bola sea blanca, b) Si la bola es blanca, haberla sacado de la primera urna.*

E.27 *Tenemos dos monedas, una normal y otra trucada en la que sale cara el triple de veces que cruz. Cogemos una moneda al azar y la lanzamos al aire obteniendo cara. Calcula la probabilidad de que la moneda lanzada fuese la moneda trucada.*

E.28 *La urna A contiene 6 bolas rojas y 4 bolas verdes. La urna B contiene 5 bolas rojas y 10 bolas verdes. Elegimos una urna al azar y sacamos dos bolas que son ambas rojas.*
Calcula la probabilidad de que la urna elegida sea la A.

E.29 *En una ciudad hay cajeros automáticos de 3 redes. El 60% de esos cajeros son de la red A, el 30% de la B y el 10% de la C. Cierto día estaban operativos el 80% de los cajeros de la red A, el 75% de la red B y el 90% de la red C. Ese día un cliente eligió un cajero al azar e intentó sacar dinero. Calcula la probabilidad de que:*
a) El cajero funcionase, b) si el cajero funcionó, que fuera un cajero de la red A.

E.30 *Una empresa recibe material de tres proveedores: A, B y C. El 50% del material lo suministra A, el 30% lo suministra B y el 20% C. Algunos lotes no pasan el control de calidad. No lo pasan el 0,1% de los lotes de A, el 0,5% de los lotes de B y el 1% de los lotes de C.*
Calcula: a) ¿Qué porcentaje de los lotes es rechazado?
b) Si un lote es rechazado, ¿qué proveedor es el más probable?

E.31 *En una factoría 3 máquinas fabrican una misma pieza. La máquina A fabrica 1000 unidades al día, un 2% defectuosas. La máquina B, 3000 unidades al día, un 1,5% defectuosas. La C fabrica 4000 unidades al día, un 0,5% defectuosas. a) ¿Cuál es la probabilidad de que una pieza elegida al azar sea defectuosa? b) Si una pieza es defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido fabricada por la máquina A? c) Sabiendo que una pieza no es defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de no haber sido fabricada por la máquina C?*

Problemas teóricos de probabilidad (PAU-Valencia)

01. Junio-2005_A4

Sean A y B dos sucesos con $P(A)=0,5$; $P(B)=0,3$ y $P(A\cap B)=0,1$. Calcula:
a) $P(A\cup B)$, b) $P(A|B)$, c) $P(A|A\cap B)$, d) $P(A|A\cup B)$

a) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0,5+0,3-0,1=\boxed{0,7}$

b) $P(A|B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}=\dfrac{0,1}{0,3}=\boxed{\dfrac{1}{3}}$

c) $P(A|A\cap B)=\dfrac{P(A\cap(A\cap B))}{P(A\cap B)}=\ldots\{A\cap(A\cap B)=A\cap B\}\ldots=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A\cap B)}=\boxed{1}$

d) $P(A|A\cup B)=\dfrac{P(A\cap(A\cup B))}{P(A\cup B)}=\ldots\{A\cap(A\cup B)=A\}\ldots=\dfrac{P(A)}{P(A\cup B)}=\dfrac{0,5}{0,7}=\boxed{\dfrac{5}{7}}$

02. Junio-2006_A4

Sean A y B dos sucesos con $P(A\cup B)=0,9$; $P(\overline{A})=0,4$ y $P(A\cap B)=0,2$. Calcula:
a) $P(B)$, b) $P(A|B)$, c) $P(A\cap\overline{B})$, d) $P(\overline{A}\cup\overline{B})$

a) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\ \rightarrow\ 0,9=(1-0,4)+P(B)-0,2\ \Rightarrow\ P(B)=\boxed{0,5}$

b) $P(A|B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}=\dfrac{0,2}{0,5}=\dfrac{2}{5}=\boxed{0,4}$

c) $P(A\cap\overline{B})=P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)=(1-0,4)-0,2=\boxed{0,4}$

d) $P(\overline{A}\cup\overline{B})=P(\overline{A\cap B})=1-P(A\cap B)=1-0,2=\boxed{0,8}$

03. Septiembre-2006_B4

Dados dos sucesos aleatorios independientes se sabe que la probabilidad de que ocurran los dos simultáneamente es 3/25 y la de que ocurra al menos uno de los dos es 17/25. Calcula la probabilidad de cada uno de los dos sucesos.

$$P(A)=x\ ,\ P(B)=y\ \ \rightarrow\ \ P(A\cup B)=\frac{3}{25}=P(A)\cdot P(B)\ \ \Rightarrow\ \ x\cdot y=\frac{3}{25}$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\ \rightarrow\ \frac{17}{25}=x+y-\frac{3}{25}\ \Rightarrow\ x+y=\frac{20}{25}$$

$$y=\frac{3}{25x}\rightarrow x+\frac{3}{25x}=\frac{20}{25}\Rightarrow 25x^2-20x+3=0\begin{cases}b^2-4ac=(-20)^2-4\cdot25\cdot3=100\\ x=\dfrac{20\pm10}{50}=\dfrac{2\pm1}{5}=\begin{bmatrix}3/5 & \rightarrow & y=1/5\\ 1/5 & \rightarrow & y=3/5\end{bmatrix}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\ \boxed{P(A)=\frac{3}{5}\ ,\ P(B)=\frac{1}{5}}\ \text{ o bien, }\ \boxed{P(A)=\frac{1}{5}\ ,\ P(B)=\frac{3}{5}}$$

04. Septiembre-2007_A4

Sean A y B dos sucesos con $P(A)=0,4$; $P(B)=0,6$ y $P(A\cup B)=0,7$. Calcula:
a) ¿Son independientes A y B?, b) $P(A\cap\overline{B})$, c) $P(\overline{A}\cap\overline{B})$

a) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\ \rightarrow\ 0,7=0,4+0,6-P(A\cap B)\ \Rightarrow\ P(A\cap B)=0,3$

$P(A)\cdot P(B)=0,4\cdot 0,6=0,24\neq 0,3=P(A\cap B)$ $\boxed{\text{A y B no son independientes.}}$

b) $P(A\cap\overline{B})=P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)=0,4-0,3=\boxed{0,1}$

c) $P(\overline{A}\cap\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-0,7=\boxed{0,3}$

05. Junio-2008_A4

Sean A y B dos sucesos con $P(A\cap B)=0,1$; $P(A\cup B)=0,7$ y $P(A|B)=0,2$. Halla:
a) $P(A)$ y $P(B)$, b) ¿Son independientes A y B?, c) $P(\overline{A}\cup B)$

a) $P(A|B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}\ \rightarrow\ 0,2=\dfrac{0,1}{P(B)}\ \Rightarrow\ P(B)=\dfrac{0,1}{0,2}=\dfrac{1}{2}=\boxed{0,5}$

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\ \rightarrow\ 0,7=P(A)+0,5-0,1\ \Rightarrow\ P(A)=\boxed{0,3}$

b) $P(A)\cdot P(B)=0,3\cdot 0,5=0,15\neq 0,1=P(A\cap B)$ $\boxed{\text{A y B no son independientes.}}$

c) $P(\overline{A}\cup B)=P(\overline{A-B})=1-P(A-B)=1-\left[P(A)-P(A\cap B)\right]=1-(0,3-0,1)=\boxed{0,8}$

06. Septiembre-2008_B4

Sean A y B dos sucesos con $P(A)=0,7$; $P(B)=0,2$ y $P(A|B)=1$. Calcula:
a) $P(A\cap B)$, b) $P(A\cup B)$, c) $P(B|A)$, d) ¿Son independientes A y B?

a) $P(A|B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}\ \rightarrow\ 1=\dfrac{P(A\cap B)}{0,2}\ \Rightarrow\ P(A\cap B)=1\cdot 0,2=\boxed{0,2}$

b) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0,7+0,2-0,2=\boxed{0,7}$

c) $P(B|A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}=\dfrac{0,2}{0,7}=\boxed{\dfrac{2}{7}}$

d) $P(A)\cdot P(B)=0,7\cdot 0,2=0,14\neq 0,2=P(A\cap B)$ $\boxed{\text{A y B no son independientes.}}$

07. Junio-2010_A3

Sean A y B dos sucesos con $P(B|A)=0,9$; $P(A|B)=0,2$ y $P(A)=0,1$. Calcula:
a) $P(A\cap B)$, b) $P(B)$, c) ¿Son independientes A y B?, d) $P(A\cup\overline{B})$

a) $P(B|A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)} \rightarrow 0,9=\dfrac{P(A\cap B)}{0,1} \Rightarrow P(A\cap B)=0,1\cdot 0,9=\boxed{0,09}$

b) $P(A|B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)} \rightarrow 0,2=\dfrac{0,09}{P(B)} \Rightarrow P(B)=\dfrac{0,09}{0,2}=\boxed{0,45}$

c) $P(A)\cdot P(B)=0,1\cdot 0,45=0,045\neq 0,09=P(A\cap B)$ $\boxed{\text{A y B no son independientes.}}$

d) $P(A\cup\overline{B})=P(\overline{B-A})=1-P(B-A)=1-[P(B)-P(A\cap B)]=1-(0,45-0,09)=\boxed{0,64}$

08. Junio-2013_B3

Sean A y B dos sucesos con $P(A)=0,3$; $P(B)=0,4$ y $P(A|B)=0,2$. Calcula:
a) $P(\overline{A}\cup B)$, b) $P(B|A)$, c) $P(\overline{A}\cap\overline{B})$, d) ¿Son independientes A y B?

a) $P(A|B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)} \rightarrow 0,2=\dfrac{P(A\cap B)}{0,4} \Rightarrow P(A\cap B)=0,2\cdot 0,4=0,08$

$P(\overline{A}\cup B)=P(\overline{A-B})=1-P(A-B)=1-[P(A)-P(A\cap B)]=1-(0,3-0,08)=\boxed{0,78}$

b) $P(B|A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}=\dfrac{0,08}{0,3}=\boxed{\dfrac{4}{15}}$

c) $P(\overline{A}\cap\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-[P(A)+P(B)-P(A\cap B)]=1-(0,3+0,4-0,08)=\boxed{0,38}$

d) $P(A)\cdot P(B)=0,3\cdot 0,4=0,12\neq 0,08=P(A\cap B)$ $\boxed{\text{A y B no son independientes.}}$

09. Julio-2014_B3

Sean A y B dos sucesos con $P(\overline{A})=1/3$; $P(B)=3/4$ y $P(A \text{ y } B)=5/8$. Calcula:
a) $P(A \text{ o } B)$, b) $P(\text{ni A ni B})$, c) $P(A|B)$, d) ¿Son independientes A y B?

a) $P(A \text{ o } B)=P(A\cup B)=[1-P(\overline{A})]+P(B)-P(A\cap B)=\left(1-\dfrac{1}{3}\right)+\dfrac{3}{4}-\dfrac{5}{8}=\boxed{\dfrac{19}{24}}$

b) $P(\text{ni A ni B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-\dfrac{19}{24}=\boxed{\dfrac{5}{24}}$

c) $P(A|B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}=\dfrac{5/8}{3/4}=\boxed{\dfrac{5}{6}}$

d) $P(A)\cdot P(B)=\left(1-\dfrac{1}{3}\right)\cdot\dfrac{3}{4}=\dfrac{1}{2}\neq\dfrac{5}{8}=P(A\cap B)$ $\boxed{\text{A y B no son independientes.}}$

10. Junio-2015_B3

Sean A y B dos sucesos con $P(A)=2/3$; $P(\overline{B})=1/4$ y $P(A \text{ o } B)=19/24$. Calcula:
a) $P(A \text{ y } B)$, b) $P(\text{no } A \text{ y no } B)$, c) $P(A|B)$, d) ¿Son independientes A y B?

a) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B) \rightarrow \frac{19}{24}=\frac{2}{3}+\left(1-\frac{1}{4}\right)-P(A\cap B) \Rightarrow P(A\cap B)=\boxed{\frac{5}{8}}$

b) $P(\text{no } A \text{ y no } B)=P(\overline{A}\cap\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-\frac{19}{24}=\boxed{\frac{5}{24}}$

c) $P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{5/8}{(1-1/4)}=\boxed{\frac{5}{6}}$

d) $P(A)\cdot P(B)=\frac{2}{3}\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2}\neq\frac{5}{8}=P(A\cap B)$ $\boxed{\text{A y B no son independientes.}}$

11. Junio-2016_B3

Sea el espacio muestral: $\Omega=\{a,b,c,d,e,f\}$ con $P(a)=P(b)=P(c)=P(d)=1/12$;
$P(e)=1/2$; $P(f)=1/6$. Dados los sucesos: $A=\{a,c,d\}$ y $B=\{c,e,f\}$. Calcula:
a) $P(A\cup B)$, b) $P(\overline{A}\cup B)$, c) $P(A\cap B)$, d) $P(A|B)$

$P(A)=P(a)+P(c)+P(d)=3\cdot\frac{1}{12}=\frac{1}{4}$; $P(B)=P(c)+P(e)+P(f)=\frac{1}{12}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{3}{4}$

$P(A\cup B)=P(\{a,c,d,e,f\})=\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{11}{12}$; $P(A\cap B)=P(\{c\})=\frac{1}{12}$

a) $P(A\cup B)=\boxed{\frac{11}{12}}$

b) $P(\overline{A}\cup B)=P(\overline{A-B})=1-P(A-B)=1-[P(A)-P(A\cap B)]=1-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{12}\right)=\boxed{\frac{5}{6}}$

c) $P(A\cap B)=\boxed{\frac{1}{12}}$

d) $P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{1/12}{3/4}=\boxed{\frac{1}{9}}$

12. Julio-2018_B3

Sea el espacio muestral: $\Omega=\{a,b,c,d,e\}$ con $P(a)=P(c)=1/8$; $P(d)=1/4$; $P(e)=1/3$. Dados los sucesos: $A=\{a,b,c\}$ y $B=\{b,d,e\}$. Calcula:
a) $P(A\cap B)$, b) $P\left(A\cup\overline{B}\right)$, c) $P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)$, d) $P\left(A|\overline{B}\right)$, e) $P(B|A)$

$$P(\Omega)=1=P(a)+P(b)+P(c)+P(d)+P(e)\ \rightarrow\ P(b)=1-\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{6}$$

$$P(A)=P(a)+P(b)+P(c)=\frac{5}{12}\ ;\ P(B)=P(b)+P(d)+P(e)=\frac{1}{12}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{3}{4}$$

a) $P(A\cap B)=P(\{b\})=\boxed{\frac{1}{6}}$

b) $P\left(A\cup\overline{B}\right)=P\left(\overline{B-A}\right)=1-P(B-A)=1-\left[P(B)-P(A\cap B)\right]=1-\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{6}\right)=\boxed{\frac{5}{12}}$

c) $P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)=P(\{d,e\}\cap\{a,c\})=P(\{\varnothing\})=\boxed{0}$

d) $P\left(A|\overline{B}\right)=\dfrac{P\left(A\cap\overline{B}\right)}{P\left(\overline{B}\right)}=\dfrac{P(A-B)}{P\left(\overline{B}\right)}=\dfrac{P(A)-P(A\cap B)}{1-P(B)}=\dfrac{5/12-1/6}{1-3/4}=\boxed{1}$

e) $P(B|A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}=\dfrac{1/6}{5/12}=\boxed{\frac{2}{5}}$

13. Septiembre-2020_3

Sean A y B dos sucesos con $P(A)=0,4$; $P(A\cup B)=0,8$ y $P\left(\overline{A}\cup\overline{B}\right)=0,7$. Calcula:
a) ¿Son independientes A y B?, b) $P(\text{solo uno de los dos})$, c) $P\left(\overline{B}\right)$, d) $P\left(\overline{A}|B\right)$

$$P\left(\overline{A}\cup\overline{B}\right)=P\left(\overline{A\cap B}\right)=1-P(A\cap B)\ \rightarrow\ 0,7=1-P(A\cap B)\ \Rightarrow\ P(A\cap B)=0,3$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\ \rightarrow\ 0,8=0,4+P(B)-0,3\ \Rightarrow\ P(B)=0,7$$

a) $P(A)\cdot P(B)=0,4\cdot 0,7=0,28\neq 0,3=P(A\cap B)$ $\boxed{\text{A y B no son independientes.}}$

b) $P(\text{solo uno de los dos})=P(A\cup B)-P(A\cap B)=0,8-0,3=\boxed{0,5}$

c) $P\left(\overline{B}\right)=1-P(B)=1-0,7=\boxed{0,3}$

d) $P\left(\overline{A}|B\right)=\dfrac{P\left(\overline{A}\cap B\right)}{P(B)}=\dfrac{P(B-A)}{P(B)}=\dfrac{P(B)-P(A\cap B)}{P(B)}=\dfrac{0,7-0,3}{0,7}=\boxed{\frac{4}{7}}$

14. Junio-2021_5

Sean A y B dos sucesos con $P(A)=0,4$; $P(B|A)=0,25$ y $P(\overline{B})=0,75$. Calcula:
a) ¿Son independientes A y B?, b) $P(A\cup B)$, c) $P(A|\overline{B})$, d) $P(\overline{A}\cup\overline{B})$ y $P(\overline{A}\cap\overline{B})$

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)} \rightarrow 0,25=\frac{P(A\cap B)}{0,4} \Rightarrow P(A\cap B)=0,4\cdot 0,25=0,1$$

a) $P(A)\cdot P(B)=0,4\cdot(1-0,75)=0,1=P(A\cap B)$ $\boxed{\text{A y B son independientes.}}$

b) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0,4+(1-0,75)-0,1=\boxed{0,55}$

c) $P(A|\overline{B})=\dfrac{P(A\cap\overline{B})}{P(\overline{B})}=\dfrac{P(A-B)}{P(\overline{B})}=\dfrac{P(A)-P(A\cap B)}{P(\overline{B})}=\dfrac{0,4-0,1}{0,75}=\boxed{0,4}$

d) $P(\overline{A}\cup\overline{B})=P(\overline{A\cap B})=1-P(A\cap B)=1-0,1=\boxed{0,9}$

$P(\overline{A}\cap\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-0,55=\boxed{0,45}$

15. Julio-2022_5

Sean A y B dos sucesos con $P(B)=0,4$; $P(\overline{A}\cap\overline{B})=0,2$ y $P(A\cap B)=0,3$. Calcula:
a) $P(A\cup B)$, b) $P(\text{solo uno de los dos})$, c) $P(B|A)$, d) ¿Son independientes A y B?

a) $P(\overline{A}\cap\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B) \rightarrow 0,2=1-P(A\cup B) \Rightarrow P(A\cup B)=\boxed{0,8}$

b) $P(\text{solo uno de los dos})=P(A\cup B)-P(A\cap B)=0,8-0,3=\boxed{0,5}$

c) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B) \rightarrow 0,8=P(A)+0,4-0,3 \Rightarrow P(A)=0,7$

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{0,3}{0,7}=\boxed{\frac{3}{7}}$$

d) $P(A)\cdot P(B)=0,7\cdot 0,4=0,28\neq 0,3=P(A\cap B)$ $\boxed{\text{A y B no son independientes.}}$

Problemas de probabilidad (PAU-Valencia desde 2018)

01. Junio-2018_A3

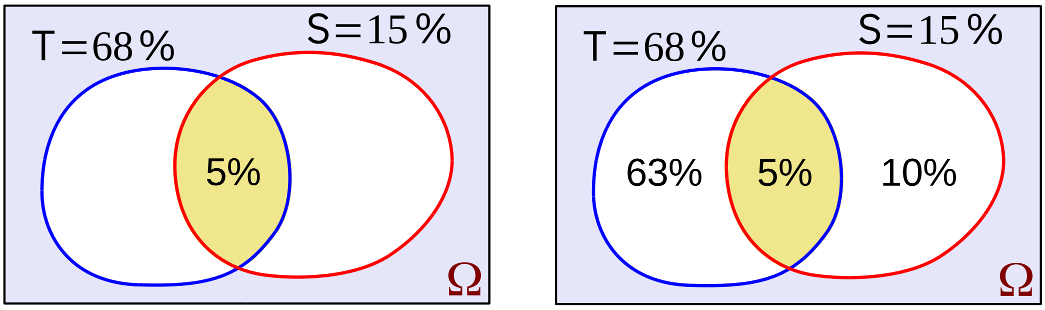
En un estudio realizado en un comercio se ha determinado que el 68% de las compras se pagan con tarjeta de crédito. El 15% de las compras superan los 500 € y ambas circunstancias (una compra supera los 500 € y se paga con tarjeta de crédito) se da el 5% de las veces. Calcula la probabilidad de que:

a) Una compra no supere los 500 € y se pague en efectivo.
b) Una compra no pase de 500 € si no se ha pagado con tarjeta de crédito.
c) Una compra se pague con tarjeta de crédito si no ha superado los 500 €.

Llamamos T al pago con tarjeta ($\overline{T}$ será pago en efectivo) y S a 'ser superior a 500€'.

Según los datos del problema: $P(T)=68\%$; $P(S)=15\%$; $P(T\cap S)=5\%$

El diagrama de Venn del problema es:



$P(S\cup T)=63\%+5\%+10\%=78\%$

a) $P\left(\overline{S}\cap\overline{T}\right)=P\left(\overline{S\cup T}\right)=1-P(S\cup T)=100\%-78\%=\boxed{22\%}$

b) $P\left(\overline{S}\,|\,\overline{T}\right)=\dfrac{P\left(\overline{S}\cap\overline{T}\right)}{P\left(\overline{T}\right)}=\dfrac{22\%}{100\%-68\%}=\dfrac{22\%}{32\%}=\boxed{\dfrac{11}{16}=0,6875=68,75\%}$

c) $P\left(T\,|\,\overline{S}\right)=\dfrac{P\left(T\cap\overline{S}\right)}{P\left(\overline{S}\right)}=\dfrac{P(T-S)}{P\left(\overline{S}\right)}=\dfrac{63\%}{100\%-15\%}=\boxed{\dfrac{63}{85}=0,7412=74,12\%}$

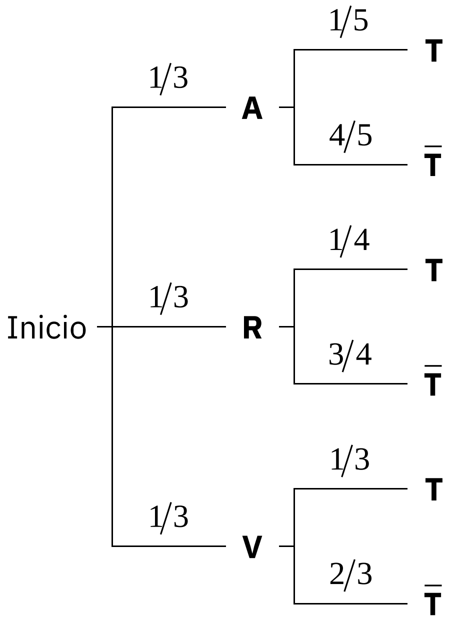
02. Junio-2018_B3

En una casa hay tres llaveros. El primer llavero (Azul) tiene 5 llaves. El segundo (Rojo) tiene 4 llaves y el tercero (Verde) tiene 3 llaves. En cada llavero hay una única llave que abre la puerta del trastero. Se escoge al azar uno de los llaveros.

a) Calcula la probabilidad de abrir el trastero con la primera llave que se prueba del llavero escogido.
b) Si se abre el trastero con la primera llave que se prueba, ¿cuál es la probabilidad de que se haya escogido el llavero Verde?
c) ¿Cuál es la probabilidad de que la primera llave que se prueba del llavero escogido al azar no abra y sí que lo haga una segunda (distinta) que se prueba del mismo llavero?

Llamamos A, R, V a los sucesos ‘elegir llavero X’ y T al suceso ‘la llave abre el trastero’.

El diagrama de árbol del problema es:



$$\Rightarrow P(A\cap T)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{15}$$

$$\Rightarrow P(A\cap \overline{T})=\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{5}=\frac{4}{15}$$

$$\Rightarrow P(B\cap T)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$$

$$\Rightarrow P(R\cap \overline{T})=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{12}$$

$$\Rightarrow P(V\cap T)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$$

$$\Rightarrow P(V\cap \overline{T})=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{9}$$

a) $P(T)=P(A\cap T)+P(B\cap T)+P(C\cap T)=\frac{1}{15}+\frac{1}{12}+\frac{1}{9}=\boxed{\frac{47}{180}=0,2611=26,11\%}$

b) $P(V|T)=\frac{P(V\cap T)}{P(T)}=\frac{1/9}{47/180}=\boxed{\frac{20}{47}=0,4255=42,55\%}$

c) Llamemos T_2 al suceso ‘la segunda llave abre el trastero’.

Para T_2: En el Azul abre 1 de 4, en el Rojo abre 1 de 3, En el Verde abre 1 de 2.

$$P(T_2\cap\overline{T}|A)=\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{5}=\frac{1}{5}\ ,\quad P(T_2\cap\overline{T}|R)=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}=\frac{1}{4}\ ,\quad P(T_2\cap\overline{T}|V)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$$

$$P(T_2\cap\overline{T})=P(T_2\cap\overline{T}|A)\cdot P(A)+P(T_2\cap\overline{T}|R)\cdot P(R)+P(T_2\cap\overline{T}|V)\cdot P(V)=$$

$$=\left(\frac{1}{5}\right)\cdot\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{15}+\frac{1}{12}+\frac{1}{9}=\boxed{\frac{47}{180}=0,2611=26,11\%}$$

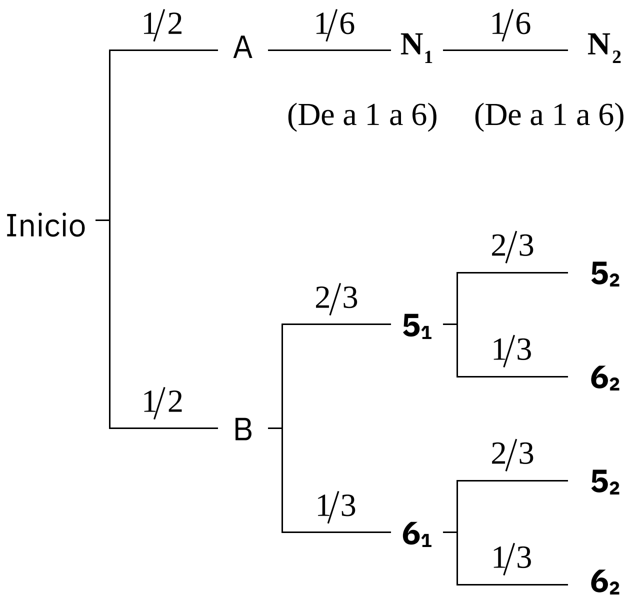
03. Julio-2018_A3

Un dado normal tiene sus caras numeradas del número 1 al 6. Otro dado está trucado y tiene cuatro caras numeradas con el 5 y las otras dos caras numeradas con el 6. Se elige un dado al azar y se realizan dos tiradas con el dado elegido. Calcula la probabilidad de:

a) Sacar un 6 en la primera tirada y un 5 en la segunda.
b) Que la suma de los resultados obtenidos en las dos tiradas sea 11.
c) Si al realizar las dos tiradas con el dado elegido al azar se obtiene un 6 en la primera tirada y un 5 en la segunda, ¿cuál es la probabilidad de haber elegido el dado trucado?

Llamamos A al dado normal y B al dado trucado [$P(5)=2/3,\ P(6)=1/3$].

El diagrama de árbol del problema es:



$\Rightarrow P(A\cap N_1\cap N_2)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{72}$ [Para las 36 posibilidades]

$\Rightarrow P(B\cap 5_1\cap 5_2)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{18}$

$\Rightarrow P(B\cap 5_1\cap 6_2)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{18}$

$\Rightarrow P(B\cap 6_1\cap 5_2)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{18}$

$\Rightarrow P(B\cap 6_1\cap 6_2)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{18}$

a) $P(5_1\cap 6_2)=P(A\cap 5_1\cap 6_2)+P(B\cap 5_1\cap 6_2)=\frac{1}{72}+\frac{2}{18}=\frac{9}{72}=\boxed{\frac{1}{8}}$

b) $P(\text{suma } 11)=P(5_1\cap 6_2)+P(6_1\cap 5_2)=$

$$=\left[P(A\cap 5_1\cap 6_2)+P(B\cap 5_1\cap 6_2)\right]+\left[P(A\cap 6_1\cap 5_2)+P(B\cap 6_1\cap 5_2)\right]=$$

$$=\frac{1}{72}+\frac{1}{72}+\frac{2}{18}+\frac{2}{18}=\boxed{\frac{1}{4}}$$

c) $P(6_1\cap 5_2)=P(A\cap 6_1\cap 5_2)+P(B\cap 6_1\cap 5_2)=\frac{1}{72}+\frac{2}{18}=\frac{1}{8}$

$$P(B|6_1\cap 5_2)=\frac{P(B\cap 6_1\cap 5_2)}{P(6_1\cap 5_2)}=\frac{2/18}{1/8}=\boxed{\frac{8}{9}}$$

04. Junio-2019_A3

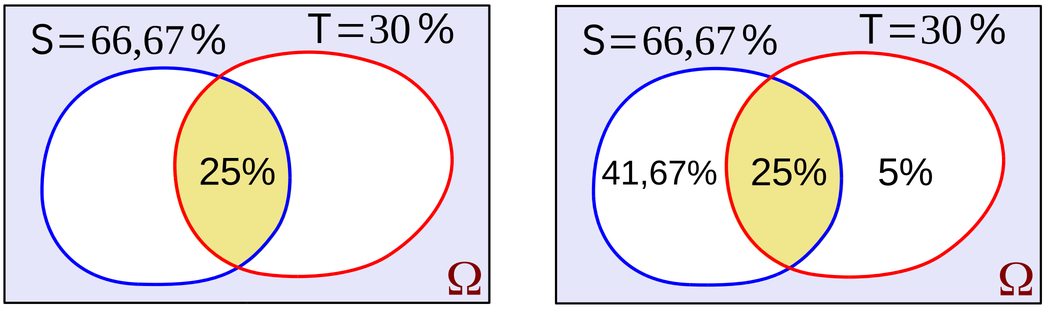
En una ciudad, las 2/3 partes de los hogares tienen Smart TV, de ellos las 3/8 partes han contratado algún servicio de televisión de pago, porcentaje que baja al 30% si consideramos el total de los hogares. Al elegir un hogar al azar, calcula la probabilidad de que:

a) No tenga Smart TV pero haya contratado televisión de pago.
b) Tenga Smart TV si sabemos que ha contratado televisión de pago.
c) No tenga Smart TV si sabemos que no ha contratado televisión de pago.

Llamamos S al suceso 'tener Smart TV' y T al suceso 'tener televisión de pago'.

Según los datos del problema: $P(S)=\frac{2}{3}=66,67\%$, $P(T)=30\%$, $P(S\cap T)=\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{3}=25\%$

El diagrama de Venn del problema es:



$$P(S\cup T)=41,67\%+25\%+5\%=71,67\%$$

a) $P\left(\bar{S}\cap T\right)=P\left(T\cap\bar{S}\right)=P(T-S)=\boxed{5\%}$

b) $P(S|T)=\frac{P(S\cap T)}{P(T)}=\frac{25\%}{30\%}=\boxed{\frac{5}{6}=0,8333=83,33\%}$

c) $P\left(\bar{S}|\bar{T}\right)=\frac{P\left(\bar{S}\cap\bar{T}\right)}{P\left(\bar{T}\right)}=\frac{P\left(\overline{S\cup T}\right)}{P\left(\bar{T}\right)}=\frac{1-P(S\cup T)}{1-P(T)}=\frac{100\%-71,67\%}{100\%-30\%}=\boxed{0,4048=40,48\%}$

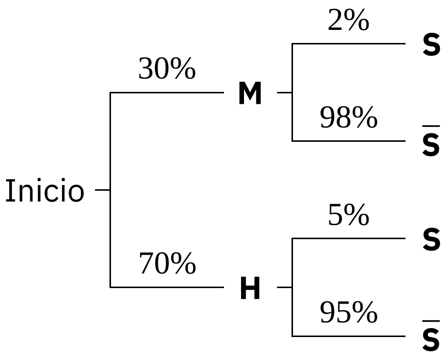
05. Junio-2019_B3

Sabemos que el 5% de los hombres y el 2% de las mujeres que trabajan en una empresa tienen un salario mensual mayor que 5000 euros. Se sabe también que el 30% de los trabajadores de dicha empresa son mujeres.

a) Calcula la probabilidad de que un trabajador de la empresa, elegido al azar, tenga un salario mensual mayor que 5000 euros.
b) Si se elige al azar un trabajador de la empresa y se observa que su salario mensual es mayor que 5000 euros, ¿cuál es la probabilidad de que dicho trabajador sea mujer?
c) ¿Qué porcentaje de trabajadores de la empresa son hombres con un salario mensual mayor que 5000 euros?

Llamamos M al suceso 'ser mujer', H a 'ser hombre' y S al suceso 'salario > 5000€'.

El diagrama de árbol del problema es:



$$\Rightarrow P(M\cap S)=\frac{30}{100}\cdot\frac{2}{100}=\frac{3}{500}=0,6\%$$

$$\Rightarrow P(M\cap \bar{S})=\frac{30}{100}\cdot\frac{98}{100}=\frac{147}{500}=29,4\%$$

$$\Rightarrow P(H\cap S)=\frac{70}{100}\cdot\frac{5}{100}=\frac{7}{200}=3,5\%$$

$$\Rightarrow P(H\cap \bar{S})=\frac{70}{100}\cdot\frac{95}{100}=\frac{133}{200}=66,5\%$$

a) $P(S)=P(S|M)\cdot P(M)+P(S|H)\cdot P(H)=P(M\cap S)+P(H\cap S)=0,6\%+3,5\%=\boxed{4,1\%}$

b) $P(M|S)=\dfrac{P(M\cap S)}{P(S)}=\dfrac{0,6\%}{4,1\%}=\dfrac{6}{41}=0,1463=\boxed{14,63\%}$

c) $P(H\cap S)=P(S|H)\cdot P(H)=\dfrac{5}{100}\cdot\dfrac{70}{100}=\dfrac{7}{200}=\boxed{3,5\%}$

06. Julio-2019_A3

Un modelo de coche se fabrica en tres versiones: Van, Urban y Suv. El 25% de los coches son de motor híbrido. El 20% son de tipo Van y el 40% de tipo Urban. El 15% de los de tipo Van y el 40% de los de tipo Urban son híbridos. Se elige un coche al azar. Calcula:

a) La probabilidad de que sea de tipo Urban, sabiendo que es híbrido.
b) La probabilidad de que sea de tipo Van, sabiendo que no es híbrido.
c) La probabilidad de que sea híbrido, sabiendo que es de tipo Suv.
d) La probabilidad de que no sea de tipo Van ni tampoco híbrido.

Llamamos V, U, S a los sucesos 'tipo de coche', H al suceso 'ser un coche híbrido'.

Los coches de tipo Suv son: $P(S)=100\%-(20\%+40\%)=40\%$

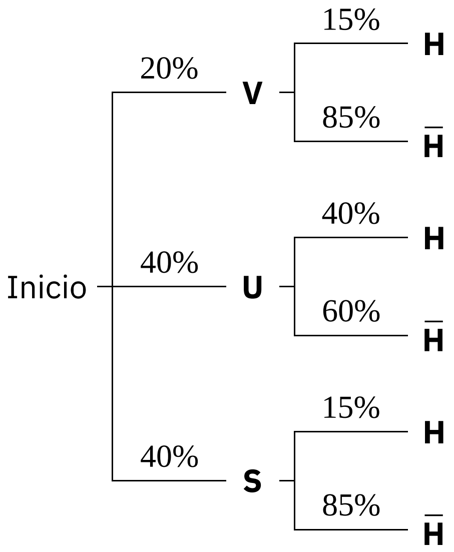
Los coches híbridos son el 25%: $P(H)=25\%$

Los Van-híbridos son: $15\%\cdot 20\%=3\%$, los Urban-híbridos son: $40\%\cdot 40\%=16\%$

Los Suv-híbridos deben ser: $25\%-3\%-16\%=6\%=P(S)\cdot P(S|H)=40\%\cdot P(H|S)$

Por lo tanto: $P(H|S)=\dfrac{6\%}{40\%}=15\%$

El diagrama de árbol del problema es:



$\Rightarrow P(V\cap H)=\dfrac{20}{100}\cdot\dfrac{15}{100}=\dfrac{3}{100}=3\%$

$\Rightarrow P(V\cap\overline{H})=\dfrac{20}{100}\cdot\dfrac{85}{100}=\dfrac{17}{100}=17\%$

$\Rightarrow P(U\cap H)=\dfrac{40}{100}\cdot\dfrac{40}{100}=\dfrac{16}{100}=16\%$

$\Rightarrow P(U\cap\overline{H})=\dfrac{40}{100}\cdot\dfrac{60}{100}=\dfrac{24}{100}=24\%$

$\Rightarrow P(S\cap H)=\dfrac{40}{100}\cdot\dfrac{15}{100}=\dfrac{6}{100}=6\%$

$\Rightarrow P(S\cap\overline{H})=\dfrac{40}{100}\cdot\dfrac{85}{100}=\dfrac{34}{100}=34\%$

a) $P(U|H)=\dfrac{P(U\cap H)}{P(H)}=\dfrac{16\%}{25\%}=\boxed{64\%}$

b) $P(V|\overline{H})=\dfrac{P(V\cap\overline{H})}{P(\overline{H})}=\dfrac{P(V\cap\overline{H})}{1-P(H)}=\dfrac{17\%}{100\%-25\%}=\boxed{22,67\%}$

c) $P(H|S)=\dfrac{P(H\cap S)}{P(S)}=\dfrac{6\%}{40\%}=\boxed{15\%}$

d) $P(\overline{V}\cap\overline{H})=P(\overline{V\cup H})=1-P(V\cup H)=1-\left[P(V)+P(H)-P(V\cap H)\right]=$

$=100\%-(20\%+25\%-3\%)=\boxed{58\%}$

07. Julio-2019_B3

Un estudiante va a la universidad el 70% de las veces usando su propio vehículo, y el doble de veces en transporte público que andando. Llega tarde el 1% de las veces si va andando, el 3% si va en transporte público y el 6% si va en su vehículo. Se pide:

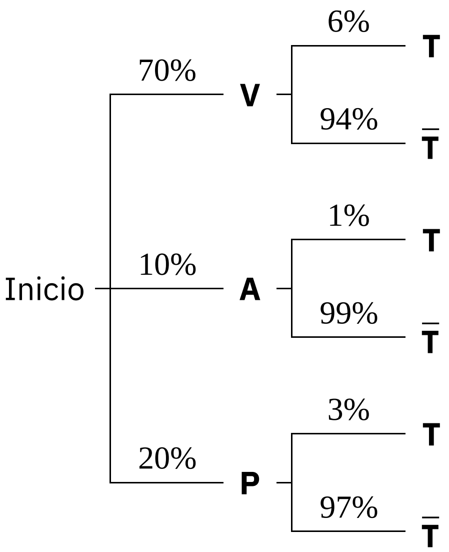
a) La probabilidad de que un día cualquiera llegue puntualmente.
b) La probabilidad de que haya acudido en transporte público, sabiendo que llegó tarde.
c) La probabilidad de que no haya acudido andando, sabiendo que llegó puntualmente.

Llamamos V, A, P a los sucesos 'ir en su vehículo', 'ir andando', 'ir en transp. público'.

Llamamos T al suceso 'llegar tarde', con lo que $\overline{T}$ será el suceso 'llega puntual'.

Como: $P(V)=70\%$ y $P(P)=2\cdot P(A)$ será: $70\%+3\cdot P(A)=100\% \;\rightarrow\; P(A)=10\%$

El diagrama de árbol del problema es:



$$\Rightarrow P(V\cap T)=\frac{70}{100}\cdot\frac{6}{100}=\frac{21}{500}=4,2\%$$

$$\Rightarrow P(V\cap \overline{T})=\frac{70}{100}\cdot\frac{94}{100}=\frac{329}{500}=65,8\%$$

$$\Rightarrow P(A\cap T)=\frac{10}{100}\cdot\frac{1}{100}=\frac{1}{1000}=0,1\%$$

$$\Rightarrow P(A\cap \overline{T})=\frac{10}{100}\cdot\frac{99}{100}=\frac{99}{1000}=9,9\%$$

$$\Rightarrow P(P\cap T)=\frac{20}{100}\cdot\frac{3}{100}=\frac{3}{500}=0,6\%$$

$$\Rightarrow P(P\cap \overline{T})=\frac{20}{100}\cdot\frac{97}{100}=\frac{97}{500}=19,4\%$$

a) $P(\overline{T})=P(V\cap\overline{T})+P(A\cap\overline{T})+P(P\cap\overline{T})=65,8\%+9,9\%+19,4\%=\boxed{95,1\%}$

Por lo tanto, $P(T)=1-P(\overline{T})=100\%-95,1\%=4,9\%$

b) $P(P|T)=\dfrac{P(P\cap T)}{P(T)}=\dfrac{P(P\cap T)}{1-P(\overline{T})}=\dfrac{0,6\%}{100\%-95,1\%}=\dfrac{6}{49}=\boxed{12,24\%}$

c) $P(\overline{A}|\overline{T})=\dfrac{P(\overline{A}\cap\overline{T})}{P(\overline{T})}=\dfrac{P(\overline{A\cup T})}{P(\overline{T})}=\dfrac{1-P(A\cup T)}{P(\overline{T})}=\dfrac{1-[P(A)+P(T)-P(A\cap T)]}{P(\overline{T})}=$

$$=\frac{100\%-[10\%+4,9\%-0,1\%]}{95,1\%}=\frac{284}{317}=\boxed{89,59\%}$$

08. Julio-2020_3

Si un habitante de la ciudad de Megalópolis es portador del anticuerpo A, entonces 2 veces de cada 5 es portador del anticuerpo B. Por el contrario, si no es portador del anticuerpo A, entonces 4 veces de cada 5 no es portador del anticuerpo B. Sabemos que la mitad de la población es portadora del anticuerpo A. Si elegimos un habitante de la ciudad de Megalópolis al azar, calcula la probabilidad de que:

a) Sea portador del anticuerpo B.
b) Si es portador del anticuerpo B lo sea también del anticuerpo A.
c) Si no es portador del anticuerpo B, tampoco lo sea del anticuerpo A.
d) Sea portador del anticuerpo A y no lo sea del anticuerpo B.

Llamamos A al suceso 'es portador del anticuerpo A' y B al suceso para el anticuerpo B.

Según los datos del problema: $P(B|A)=\frac{2}{5}$, $P(\overline{B}|\overline{A})=\frac{4}{5}$, $P(A)=\frac{1}{2}=50\%$

a) $P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)} \rightarrow P(A\cap B)=P(B|A)\cdot P(A) \Rightarrow P(A\cap B)=\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{5}=20\%$

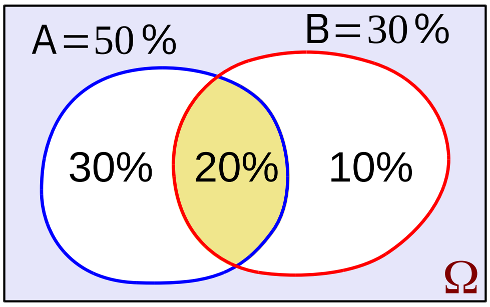
$$P(\overline{B}|\overline{A})=\frac{P(\overline{A}\cap\overline{B})}{P(\overline{A})}=\frac{P(\overline{A\cup B})}{P(\overline{A})}=\frac{1-P(A\cup B)}{1-P(A)} \rightarrow P(A\cup B)=1-P(\overline{B}|\overline{A})\cdot[1-P(A)]$$

$$\Rightarrow P(A\cup B)=1-\frac{4}{5}\cdot\left[1-\frac{1}{2}\right]=1-\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{2}=1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}=60\%$$

Con los dos cálculos anteriores podemos calcular la probabilidad de B:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B) \rightarrow \frac{3}{5}=\frac{1}{2}+P(B)-\frac{1}{5} \Rightarrow P(B)=\boxed{\frac{3}{10}=30\%}$$

El diagrama de Venn del problema es:



b) $P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{20\%}{30\%}=\boxed{\frac{2}{3}=66,67\%}$

c) $P(\overline{A}|\overline{B})=\frac{P(\overline{A}\cap\overline{B})}{P(\overline{B})}=\frac{P(\overline{A\cup B})}{P(\overline{B})}=\frac{1-P(A\cup B)}{1-P(B)}=\frac{100\%-60\%}{100\%-30\%}=\boxed{\frac{4}{7}=57,14\%}$

d) $P(A\cap\overline{B})=P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)=\frac{1}{2}-\frac{1}{5}=\boxed{\frac{3}{10}=30\%}$

[El cálculo de $P(A-B)$ era innecesario, en el diagrama de Venn se ve que es el 30%.]

09. Julio-2020_6

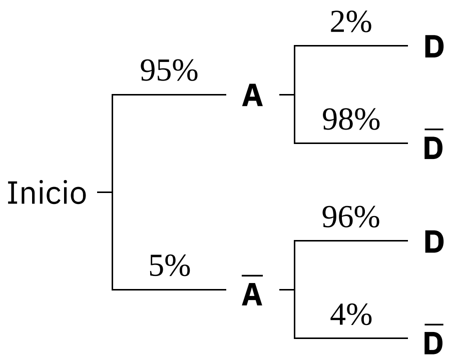
Un profesor evalúa a sus estudiantes con un trabajo final. El profesor sabe que el 5% de los trabajos no son originales, sino que son plagios. El profesor dispone de un programa informático para detectar plagios. La probabilidad de que el programa no clasifique correctamente un trabajo plagiado es 0,04 y la probabilidad de que clasifique como plagio un trabajo original es 0,02.

a) Calcula la probabilidad de que un trabajo final, elegido al azar, sea clasificado como plagio por el programa informático.
b) Un trabajo inspeccionado por el programa informático es clasificado como original. ¿Cuál es la probabilidad de que dicho trabajo sea un plagio?
c) ¿Qué porcentaje de trabajos son plagios y a la vez son clasificados como tales por el programa?

Llamamos A al suceso ‘el trabajo es original’ (auténtico) y $\overline{A}$ al suceso ‘trabajo plagiado’.

Llamamos D al suceso ‘programa detecta plagio’ y $\overline{D}$ a ‘programa no detecta plagio’.

El diagrama de árbol del problema es:



$$\Rightarrow P(A\cap D)=\frac{95}{100}\cdot\frac{2}{100}=\frac{19}{1000}=1,9\%$$

$$\Rightarrow P(A\cap \overline{D})=\frac{95}{100}\cdot\frac{98}{100}=\frac{931}{1000}=93,1\%$$

$$\Rightarrow P(\overline{A}\cap D)=\frac{5}{100}\cdot\frac{96}{100}=\frac{6}{125}=4,8\%$$

$$\Rightarrow P(\overline{A}\cap \overline{D})=\frac{5}{100}\cdot\frac{4}{100}=\frac{1}{500}=0,2\%$$

a) $P(D)=P(A\cap D)+P(\overline{A}\cap D)=1,9\%+4,8\%=\boxed{6,7\%}$

b) $P(\overline{A}|\overline{D})=\dfrac{P(\overline{A}\cap\overline{D})}{P(\overline{D})}=\dfrac{P(\overline{A}\cap\overline{D})}{1-P(D)}=\dfrac{0,2\%}{100\%-6,7\%}=\boxed{\dfrac{2}{933}=0,2144\%}$

c) $P(\overline{A}\cap D)=\boxed{4,8\%}$

10. Septiembre-2020_6

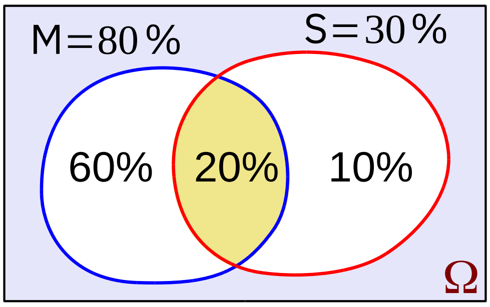
En una determinada ciudad, se sabe que el 80% de los hogares están formados por más de una persona. Se sabe también que el 30% de los hogares de esa ciudad están suscritos al canal Panoramix. Por último, se sabe que el 20% de los hogares están formados por más de una persona y están suscritos al canal Panoramix. Seleccionamos al azar un hogar de esta ciudad. Calcula la probabilidad de que ese hogar:

a) No esté suscrito al canal Panoramix.
b) Esté formado por una única persona y también esté suscrito al canal Panoramix.
c) Si está formado por una única persona, esté suscrito al canal Panoramix.
d) Si está suscrito al canal Panoramix, esté formado por más de una persona.

Llamamos M al suceso ‘el hogar es de más de una persona’ y S a ‘suscrito a Panoramix’.

Según los datos del problema: $P(M)=80\%$, $P(S)=30\%$, $P(M\cap S)=20\%$

El diagrama de Venn del problema es:



$P(M\cup S)=60\%+20\%+10=90\%$

a) $P(\overline{S})=1-P(S)=1-30\%=\boxed{70\%}$

b) $P(\overline{M}\cap S)=P(S-M)=\boxed{10\%}$

Se podría calcular sin mirarlo en el diagrama de Venn:

$P(S-M)=P(S)-P(S\cap M)=30\%-20\%=10\%$

c) $P(S|\overline{M})=\dfrac{P(S\cap\overline{M})}{P(\overline{M})}=\dfrac{P(S\cap\overline{M})}{1-P(M)}=\dfrac{10\%}{100\%-80\%}=\boxed{\dfrac{1}{2}=50\%}$

d) $P(M|S)=\dfrac{P(M\cap S)}{P(S)}=\dfrac{20\%}{30\%}=\boxed{\dfrac{2}{3}=66,67\%}$

11. Junio-2021_6

Una empresa fabrica protectores de pantalla para móviles de tres tipos: de 4 pulgadas, de 4,7 pulgadas y de 5 pulgadas. Los habitantes de una ciudad poseen un único móvil con una de estas tres medidas. Un estudio indica que el 30% de los móviles tienen una pantalla de 4 pulgadas. Este mismo estudio indica que el 30% de los usuarios de un móvil con pantalla de 4 pulgadas utilizan protector de pantalla. Este también es el caso del 25% de los que poseen un móvil con pantalla de 4,7 pulgadas y del 40% de los que poseen un móvil con pantalla de 5 pulgadas.

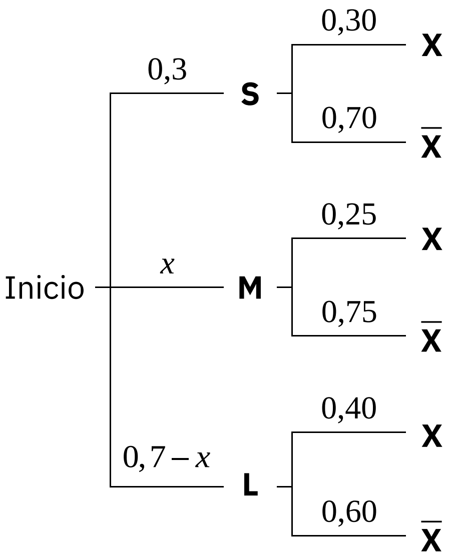
a) Si el 34% de los que tienen móvil usan protector de pantalla, calcula el porcentaje de los que usan un móvil de 4,7 pulgadas y el de los que usan un móvil de 5 pulgadas.
b) Sea un usuario de móvil con protector de pantalla. Calcula la probabilidad de que su móvil sea de 5 pulgadas.
c) Sea ahora una persona que tiene móvil con protector de pantalla y cuya pantalla no es de 4,7 pulgadas. Calcula la probabilidad de que use un móvil de 5 pulgadas.

Llamamos S, M, L a los sucesos asociados al tamaño del móvil (Small, Medium y Large).

Llamamos X al suceso ‘usar protector de pantalla’.

La probabilidad de que los usuarios tengan un móvil de tamaño M le llamaremos *x*. Así, la probabilidad de que un usuario tenga un móvil de talla L será $1-0,3-x=0,7-x$.

Con los datos del problema el diagrama de árbol es:



$\Rightarrow \ P(S\cap X)=0,3\cdot 0,3=0,09$

$\Rightarrow \ P(S\cap \overline{X})=0,3\cdot 0,7=0,21$

$\Rightarrow \ P(M\cap X)=x\cdot 0,25=0,25x$

$\Rightarrow \ P(M\cap \overline{X})=x\cdot 0,75=0,75x$

$\Rightarrow \ P(L\cap X)=(0,7-x)\cdot 0,40=0,28-0,4x$

$\Rightarrow \ P(L\cap \overline{X})=(0,7-x)\cdot 0,60=0,42-0,6x$

a) Si $P(X)=0,34$, tendremos:

$$P(X)=P(S\cap X)+P(M\cap X)+P(L\cap X) \ \rightarrow \ 0,34=0,09+0,25x+0,28-0,4x$$

$$\Rightarrow \ 0,34=0,37-0,15x \ , \quad x=0,2$$

Por lo tanto:

$$P(M)=x=0,2=\boxed{20\%} \quad \text{y} \quad P(L)=0,7-x=0,7-0,2=0,5=\boxed{50\%}$$

b) $$P(L|X)=\frac{P(L\cap X)}{P(X)}=\frac{0,28-0,4x}{0,34}=\frac{0,28-0,4\cdot 0,2}{0,34}=\boxed{0,5882=58,82\%}$$

c) $$P(L|\overline{M}\cap X)=\frac{P(L\cap X)}{P(S\cap X)+P(L\cap X)}=\frac{0,28-0,4x}{0,09+0,28-0,4x}=\boxed{\frac{20}{29}=0,6897=68,97\%}$$

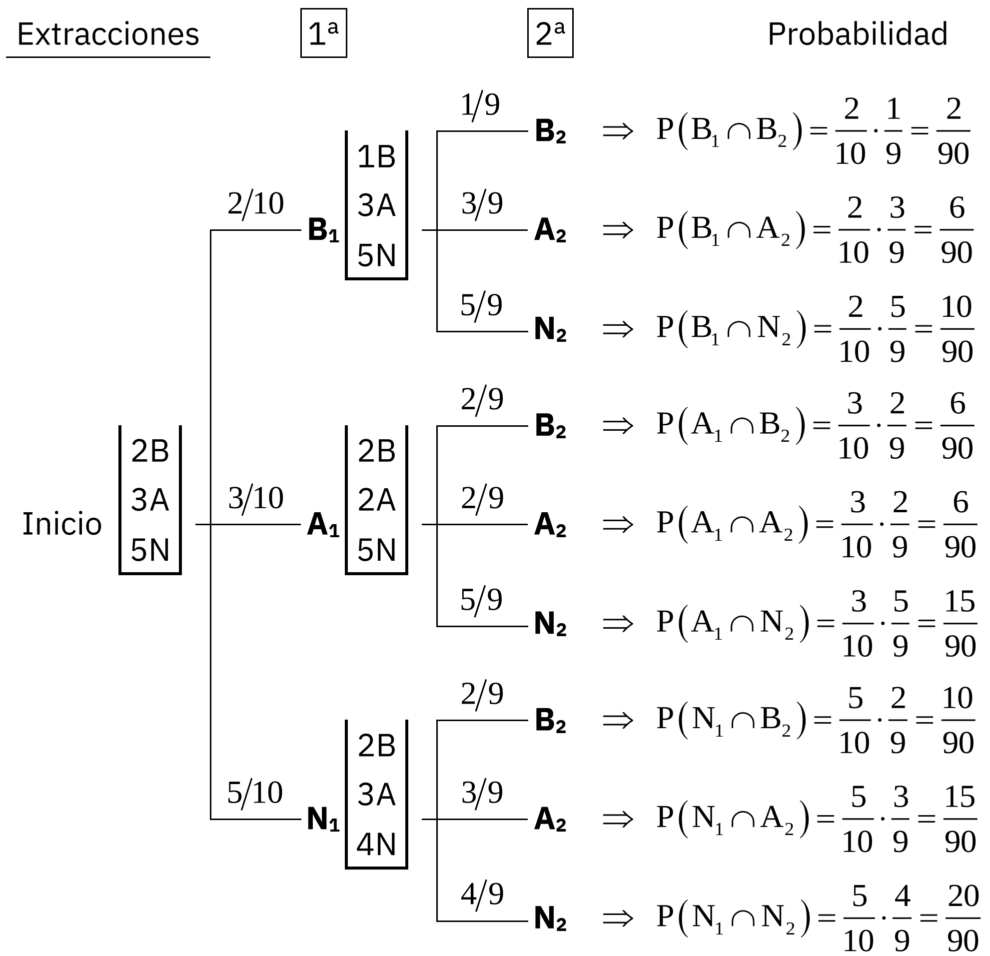
12. Julio-2021_5

En un sorteo, un jugador extrae dos bolas sin reemplazamiento de una urna con 2 bolas blancas, 3 bolas amarillas y 5 bolas negras. El jugador consigue el primer premio si las dos bolas extraídas son blancas, el segundo premio si las dos bolas extraídas son amarillas y el tercer premio si una de las dos bolas es blanca y la otra no lo es. No hay más premios en el sorteo. Calcula la probabilidad de que el jugador consiga:

a) El primer o el segundo premio.
b) El tercer premio.
c) El tercer premio sabiendo que ha obtenido algún premio.

Llamamos B, A, N a los sucesos asociados al color de la bola extraida.

El diagrama de árbol del problema es:



a) $$P(\text{1r premio o 2º premio}) = P(B_1 \cap B_2) + P(A_1 \cap A_2) = \frac{2}{90} + \frac{6}{90} = \boxed{\frac{4}{45} = 0{,}0889 = 8{,}89\%}$$

b) $$P(\text{3r premio}) = P(B_1 \cap A_2) + P(B_1 \cap N_2) + P(A_1 \cap B_2) + P(N_1 \cap B_2) =$$
$$= \frac{6}{90} + \frac{10}{90} + \frac{6}{90} + \frac{10}{90} = \boxed{\frac{16}{45} = 0{,}3556 = 35{,}56\%}$$

c) $$P(\text{premio}) = P(\text{1r premio o 2º premio}) + P(\text{3r premio}) = \frac{4}{45} + \frac{16}{45} = \boxed{\frac{4}{9} = 0{,}4444 = 44{,}44\%}$$

$$P(\text{3r premio} \mid \text{premio}) = \frac{P(\text{3r premio} \cap \text{premio})}{P(\text{premio})} = \frac{P(\text{3r premio})}{P(\text{premio})} = \frac{16/45}{4/9} = \boxed{\frac{4}{5} = 0{,}8 = 80\%}$$

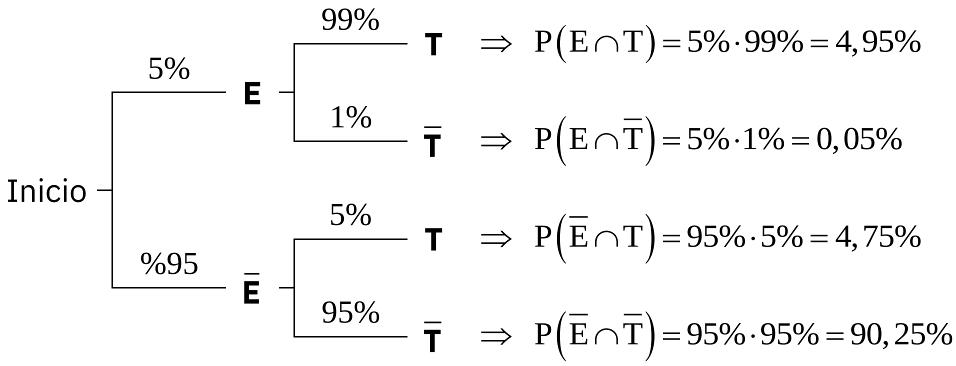
13. Julio-2021_6

Una enfermedad afecta al 5% de la población. El único test disponible para detectar la enfermedad tiene una probabilidad del 99% de clasificar correctamente a los enfermos (probabilidad de que el test dé positivo si la persona tiene la enfermedad), mientras que la probabilidad de que el test dé negativo si la persona no está enferma es del 95%. Se pide la probabilidad de:

a) Que una persona esté enferma si ha dado positivo en el test.
b) Que una persona esté sana si ha dado negativo en el test.
c) Que el test dé el resultado correcto.
d) Si la enfermedad solo afectara al 1% de la población, calcula la probabilidad de que la persona esté enferma si ha dado positivo en el test.

Llamamos E al suceso ‘tener la enfermedad’ y T al suceso ‘Test positivo’.

El diagrama de árbol del problema es:



a) La probabilidad de que el test de positivo es:

$$P(T)=P(E\cap T)+P(\overline{E}\cap T)=4,95\%+4,75\%=9,7\%$$

$$P(E|T)=\frac{P(E\cap T)}{P(T)}=\frac{4,95\%}{9,7\%}=\boxed{\frac{99}{194}=0,5103=51,03\%}$$

b) $$P(\overline{E}|\overline{T})=\frac{P(\overline{E}\cap \overline{T})}{P(\overline{T})}=\frac{P(\overline{E}\cap \overline{T})}{1-P(T)}=\frac{90,25\%}{100\%-9,7\%}=\boxed{\frac{1805}{1806}=0,9994=99,94\%}$$

c) $$P(\text{Test correcto})=P(E\cap T)+P(\overline{E}\cap \overline{T})=4,95\%+90,25\%=\boxed{95,2\%}$$

d) Si solo el 1% de la población tiene la enfermedad: $P(E)=1\%$, y sin cambios en el test:

$$P(E\cap T)=P(T|E)\cdot P(E)=99\%\cdot 1\%=0,99\%$$

$$P(\overline{E}\cap T)=P(T|\overline{E})\cdot P(\overline{E})=5\%\cdot(100\%-1\%)=5\%\cdot 99\%=4,95\%$$

La nueva probabilidad de que el test de positivo es:

$$P(T)=P(E\cap T)+P(\overline{E}\cap T)=0,99\%+4,95\%=5,94\%$$

$$P(E|T)=\frac{P(E\cap T)}{P(T)}=\frac{0,99\%}{5,94\%}=\boxed{\frac{1}{6}=0,1667=16,67\%}$$

14. Junio-2022_5

Entre los clientes de una compañía de seguros de automóviles, un 30% tiene menos de 30 años, un 55% entre 30 y 60 años, y el 15% más de 60 años. Se sabe que, entre los clientes de menos de 30 años, 3 de cada 4 no presentaron parte de accidente el año pasado; entre los que tienen entre 30 y 60 años, 9 de cada 10 no presentaron parte de accidente el año pasado; y entre los de más de 60 años, 2 de cada 5 no presentaron parte de accidente el año pasado. Seleccionamos al azar un cliente de la compañía.

a) Llamemos A al suceso "el cliente tiene más de 60 años" y llamemos B al suceso "el cliente no presentó parte de accidente año pasado". Calcula $P(A \cup B)$.

b) Llamemos C al suceso "el cliente tiene 30 años o más" y D al suceso "el cliente presentó parte de accidente el año pasado". Calcula $P(C \cap D)$.

c) Si sabemos que el cliente seleccionado presentó parte de accidente el año pasado, calcula la probabilidad de que tenga 60 años o menos.

Llamamos J, M, V a los sucesos relacionados con la edad (Joven, Maduro, Viejo) y llamamos X al suceso 'presentó parte de accidente el año pasado'.

El diagrama de árbol del problema es:

Inicio
- 30% **J**
  - 1/4 **X** $\Rightarrow P(J \cap X) = 30\% \cdot \dfrac{1}{4} = 7{,}5\%$
  - 3/4 $\overline{\mathbf{X}}$ $\Rightarrow P(J \cap \overline{X}) = 30\% \cdot \dfrac{3}{4} = 22{,}5\%$
- 55% **M**
  - 1/10 **X** $\Rightarrow P(M \cap X) = 55\% \cdot \dfrac{1}{10} = 5{,}5\%$
  - 9/10 $\overline{\mathbf{X}}$ $\Rightarrow P(M \cap \overline{X}) = 55\% \cdot \dfrac{9}{10} = 49{,}5\%$
- 15% **V**
  - 3/5 **X** $\Rightarrow P(V \cap X) = 15\% \cdot \dfrac{3}{5} = 9\%$
  - 2/5 $\overline{\mathbf{X}}$ $\Rightarrow P(V \cap \overline{X}) = 15\% \cdot \dfrac{2}{5} = 6\%$

a) $P(\overline{X}) = P(J \cap \overline{X}) + P(M \cap \overline{X}) + P(V \cap \overline{X}) = 22{,}5\% + 49{,}5\% + 6\% = 78\%$

$P(V \cup \overline{X}) = P(V) + P(\overline{X}) - P(V \cap \overline{X}) = 15\% + 78\% - 6\% = 87\% \rightarrow \boxed{P(A \cup B) = 87\%}$

b) $P(X) = P(J \cap X) + P(M \cap X) + P(V \cap X) = 7{,}5\% + 5{,}5\% + 9\% = 22\%$

$P([M \cup V] \cap X) = P(M \cap X) + P(V \cap X) = 5{,}5\% + 9\% = 14{,}5\% \rightarrow \boxed{P(C \cap D) = 14{,}5\%}$

c) $P([J \cup M] | X) = \dfrac{P([J \cup M] \cap X)}{P(X)} = \dfrac{P(J \cap X) + P(M \cap X)}{P(X)} =$

$$= \frac{7{,}5\% + 5{,}5\%}{22\%} = \boxed{\frac{13}{22} = 0{,}5909 = 59.09\%}$$

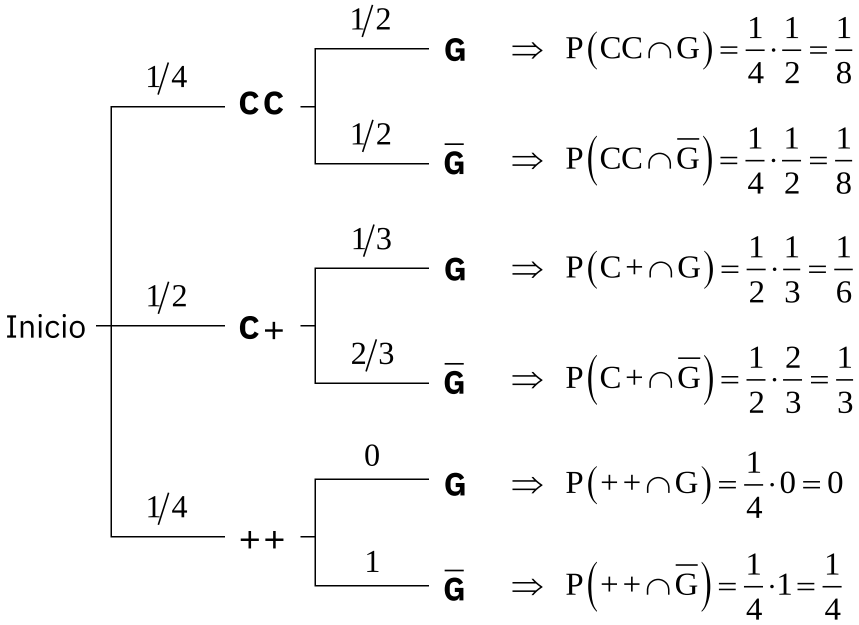
15. Junio-2022_6

> En un juego se lanzan dos monedas equilibradas y un dado de seis caras equilibrado. Un jugador gana si obtiene dos caras y un número par en el dado, o bien, si obtiene exactamente una cara y un número mayor o igual que cinco en el dado.
>
> a) Calcula la probabilidad de que el jugador gane.
> b) Si se sabe que ha ganado, ¿cuál es la probabilidad de que obtuviera dos caras?
> c) Si se sabe que ha ganado, ¿cuál es la probabilidad de que obtuviera un cinco?
> d) Llamemos A al suceso “el jugador no gana” y llamemos B al suceso “el jugador obtiene un seis al lanzar el dado”. ¿Son independientes los sucesos?

Al lanzar las dos monedas, el espacio muestral es: $\Omega=\{CC, C+, +C, ++\}$. Cada suceso tiene probabilidad $1/4$. El jugador necesita, para ganar, que salgan dos caras con probabilidad $1/4$ o que salga una cara y una cruz, en cualquier orden, con probabilidad $1/2$.

Llamemos G al suceso ‘el jugador gana’. Si obtiene CC gana si el dado sale par (probabilidad $1/2$), si obtiene $C+$, en cualquier orden, gana si el dado sale 5 o 6 (probabilidad $1/3$)

El diagrama de árbol del problema es:



a) $P(G)=P(CC\cap G)+P(C+\cap G)=\frac{1}{8}+\frac{1}{6}=\boxed{\frac{7}{24}=0,2917=29,17\%}$

b) $P(CC|G)=\frac{P(CC\cap G)}{P(G)}=\frac{1/8}{7/24}=\boxed{\frac{3}{7}=0,4286=42,86\%}$

c) $P(\text{saca }5|G)=\frac{P(\text{saca }5\cap G)}{P(G)}=\frac{P(G|\text{saca }5)\cdot P(\text{saca }5)}{P(G)}=\frac{P(C+)\cdot P(\text{saca }5)}{P(G)}=\frac{1/2\cdot 1/6}{7/24}=\boxed{\frac{2}{7}}$

d) $P(\overline{G})=1-P(G)=1-\frac{7}{24}=\frac{17}{24}$; $P(\text{saca }6)=\frac{1}{6}$

$P(\overline{G}\cap\text{saca }6)=P(++\cap\text{ saca }6)=P(++)\cdot P(\text{saca }6)=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{24}$

$\Rightarrow P(\overline{G}\cap\text{saca }6)\neq P(\overline{G})\cdot P(\text{saca }6)$ $\boxed{\text{A y B no son independientes.}}$

16. Julio-2022_6

El director de una auditora sabe que, cuando se hace una auditoría, el 30% de las empresas merece la calificación «Excelente», el 50% merece la calificación «Aceptable» y el 20% restante merece la calificación «Deficiente». El director también sabe que, entre sus auditores, el 90% siempre auditan correctamente y dan a cada empresa la calificación que merece; pero hay un 10% de auditores que no auditan correctamente y dan siempre una calificación de «Aceptable».

a) ¿Qué proporción de empresas auditadas recibe la calificación de «Deficiente»?
b) ¿Qué proporción de empresas auditadas recibe la calificación que realmente merece?
c) Para analizar si un auditor hace bien su trabajo, se le encarga auditar a una empresa escogida al azar. Si el auditor da la calificación de «Aceptable», ¿cuál es la probabilidad de que este auditor sea uno de los que siempre auditan correctamente?

Llamemos E, A, D a los sucesos de calificación ‘Excelente’ ‘Aceptable’ y ‘Deficiente’.

Al suceso ‘El auditor audita correctamente’ le llamamos C, y $\overline{C}$ al suceso ‘El auditor no audita correctamente’ (y siempre da una calificación A).

El diagrama de árbol del problema es:

Inicio → Empresa	Auditor	Probabilidad	Calificación	
30% **E**	90% **C**	$\Rightarrow P(E\cap C)=\frac{30}{100}\cdot\frac{90}{100}=0,27$	E	bien
	10% $\overline{\mathbf{C}}$	$\Rightarrow P(E\cap \overline{C})=\frac{30}{100}\cdot\frac{10}{100}=0,03$	A	mal
50% **A**	90% **C**	$\Rightarrow P(A\cap C)=\frac{50}{100}\cdot\frac{90}{100}=0,45$	A	bien
	10% $\overline{\mathbf{C}}$	$\Rightarrow P(A\cap \overline{C})=\frac{50}{100}\cdot\frac{10}{100}=0,05$	A	bien
20% **D**	90% **C**	$\Rightarrow P(D\cap C)=\frac{20}{100}\cdot\frac{90}{100}=0,18$	D	bien
	10% $\overline{\mathbf{C}}$	$\Rightarrow P(D\cap \overline{C})=\frac{20}{100}\cdot\frac{10}{100}=0,02$	A	mal

a) $P(D)=P(D\cap C)=\boxed{0,18=18\%}$

b) $P(\text{bien})=0,27+0,45+0,05+0,18=\boxed{0,95=95\%}$

c) La probabilidad de que una empresa reciba la calificación de Aceptable es:

$$P(A)=P(E\cap\overline{C})+P(A\cap C)+P(A\cap\overline{C})+P(D\cap\overline{C})=$$
$$=0,03+0,45+0,05+0,02=\boxed{0,55=55\%}$$

$$\Rightarrow P(C|A)=\frac{P(C\cap A)}{P(A)}=\frac{0,45}{0,55}=\boxed{\frac{9}{11}=0,8182=81,82\%}$$

Combinatoria

Es la rama de las Matemáticas que estudia cuántas ordenaciones se puede hacer con los elementos de un conjunto, tomados por grupos. (Estudia más cosas pero, a nuestro nivel, esto será suficiente.)

Antes de estudiar las operaciones posibles indicamos dos reglas generales que conviene conocer:

Principio aditivo

Supongamos que tenemos que hacer una elección entre varias opciones. La primera opción se presenta con a_1 posibilidades, la segunda opción se presenta con a_2 posibilidades, y así hasta la opción *n*-ésima que se presenta con a_n posibilidades.

Debemos elegir una entre todas ellas. ¿De cuántas formas distintas podemos hacer la elección?

Como hay que elegir o una posibilidad entre las de la 1ª opción o una entre las de la 2ª o una entre las de la 3ª, etc. el total es:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n \text{ posibilidades.}$$

E.01 *Vamos a comprar un perfume. En la tienda tienen perfumes de 3 marcas. La marca A ofrece 5 variedades, cada una de un tamaño. La marca B ofrece 3 variedades y la marca C ofrece solo 2 variedades. ¿Cuántas opciones tenemos en total?*

Como hay que optar entre la marca 1 o la marca 2 o la marca 3, tendremos en total:

$5+3+2=10$ posibilidades.

Principio multiplicativo

Supongamos que tenemos que hacer una elección múltiple, seleccionando una posibilidad de cada una de las opciones. La primera opción se presenta con a_1 posibilidades, la segunda opción se presenta con a_2 posibilidades, y así hasta la opción *n*-ésima que se presenta con a_n posibilidades.

Debemos elegir una posibilidad de la 1ª opción y una posibilidad de la 2ª opción y una posibilidad de la 3ª opción, etc. ¿De cuántas formas distintas podemos hacer la elección múltiple?

El total se obtiene multiplicando las posibilidades de cada una de las opciones:

$$a_1 \times a_2 \times \ldots \times a_n \text{ posibilidades.}$$

E.02 *Vamos a comer en un restaurante el menú del día. Disponen de 3 primeros platos, 2 segundos platos y 4 postres. ¿De cuántas formas diferentes podemos elegir el menú?*

Como hay que optar entre un 1ʳ plato y un 2º plato y un postre, tendremos en total:

$3 \times 2 \times 4 = 24$ posibilidades.

E.03 *En un concesionario venden coches de 2 marcas. La marca A dispone de 3 modelos en 4 colores. La marca B dispone de 2 modelos en 5 colores. Si queremos comprar un coche, ¿cuántas opciones diferentes tenemos?*

Para los coches de la marca A hay 3 modelos y 4 colores. El número de opciones es:

$3 \times 4 = 12$ posibilidades de la marca A.

Para los coches de la marca B hay 2 modelos y 5 colores. El número de opciones es:

$2 \times 5 = 10$ posibilidades de la marca B.

Como elegiremos o bien un coche de la marca A o bien uno de la marca B, tendremos:

$12 + 10 = 22$ posibilidades en total.

Permutaciones

Si tenemos un conjunto de *n* elementos, las permutaciones de ellos (que se escriben P_n), nos dan el número de formas de ordenarlos todos.

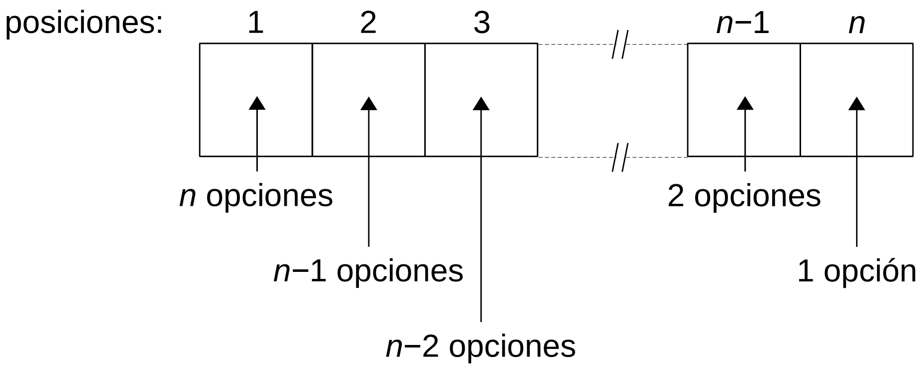
E.04 *Con el conjunto cuyos elementos son {A, B, C}, ¿cuáles son sus permutaciones?*

Las permutaciones de esos 3 elementos son: ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA.

Vamos a contar cuántas hay. Si imaginamos que tenemos *n* posiciones (una para cada elemento), para ocupar la 1ª posición tendremos *n* posibilidades (uno cualquiera de los *n* elementos).

Para ocupar la 2ª posición tenemos $n-1$ posibilidades (ya hemos puesto uno en la 1ª posición).

Para ocupar la 3ª posición tenemos $n-2$ posibilidades (ya hemos puesto dos en las dos primeras).



Si seguimos colocando elementos, cuando llegamos a la penúltima posición (la $n-1$) solo nos quedan 2 posibilidades. En la última posición (la *n*) solo nos queda 1 posibilidad.

El número total de maneras de ocupar las *n* posiciones es (por el principio multiplicativo):

$$\mathrm{P}_n = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1$$

Esta operación, que calcula el número de permutaciones de *n* elementos, se conoce como factorial del número *n* y se escribe como $n!$, es decir: $n! = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1$

$$\boxed{\mathrm{P}_n = n!}$$

E.05 *¿Cuántas permutaciones tiene un conjunto de 3 elementos, como el {A, B, C}?*

Las permutaciones de 3 elementos son: $\mathrm{P}_3 = 3! = 3\cdot 2\cdot 1 = 6$ (las 6 que obtuvimos antes).

La operación 'factorial de un número' está disponible en cualquier calculadora científica. Crece muy rápidamente: En una calculadora normal, el número más grande del que se puede calcular el factorial es 69, pues $69! = 1{,}711224524\times 10^{98}$ que es un número de 99 cifras. $70!$ producirá error.

Una propiedad interesante de la operación factorial es esta: el factorial de un número es igual a ese número multiplicado por el factorial del número anterior.

$$n! = n\cdot\left(n-1\right)!$$

Puesto que $1! = 1$, si aplicamos la fórmula anterior para $n = 1$ tendremos:

$$1! = 1\cdot\left(1-1\right)! \;\rightarrow\; 1 = 1\cdot 0! \;\Rightarrow\; \boxed{0! = 1}$$

Podemos decir que las permutaciones de 0 elementos dan 1. Coincide con la idea intuitiva de que si no hay ningún elemento solo pueden ponerse de una manera, así: $\varnothing$

Aquí podemos ver la única forma de poner cero manzanas: $\varnothing$ (sí, ahí hay cero manzanas:)

E.06 *¿Cuántas permutaciones tiene un conjunto de 4 elementos, como el {A, B, C, D}?*

Las permutaciones de 4 elementos son: $\mathrm{P}_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$. Son estas 24 formas:

ABCD	BACD	CABD	DABC
ABDC	BADC	CADB	DACB
ACBD	BCAD	CBAD	DBAC
ACDB	BCDA	CBDA	DBCA
ADBC	BDAC	CDAB	DCAB
ADCB	BDCA	CDBA	DCBA

E.07 *¿Cuántos elementos debe tener un conjunto para que sus permutaciones sean 5040?*

$5040 = 2^4 \times 3^2 \times 5 \times 7 = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 7! = \mathrm{P}_7$. Hacen falta 7 elementos.

E.08 *En una carrera participan 8 atletas. ¿De cuántas formas pueden llegar a la meta?*

Pueden llegar de $\mathrm{P}_8 = 8! = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 40320$ formas.

E.09 *En una mesa circular se sientan 4 jugadores de cartas. ¿De cuántas formas distintas se pueden sentar a la mesa?*

Para que solo importe su colocación relativa (y dé igual que giremos toda la mesa) fijaremos la posición de uno de los jugadores. Así, bastará mover a los otros tres.
El número de formas de sentarse a la mesa será: $\mathrm{P}_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ formas.

Variaciones

Si tenemos un conjunto de *n* elementos, las variaciones de ellos (que se escriben $\mathrm{V}_{n,k}$) nos dan el número de formas de ordenarlos en grupos de *k* elementos.

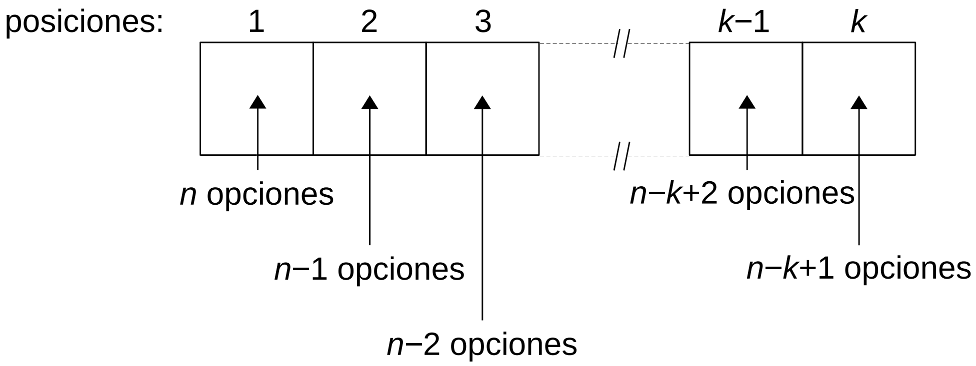
E.10 *Con el conjunto cuyos elementos son {A, B, C}, ¿cuáles son sus variaciones de 2 en 2?*

Las variaciones en grupos de 2 son: AB, BA, AC, CA, BC, CB.

Vamos a contar cuántas hay. Hay que rellenar *k* posiciones. Para ocupar la 1ª posición tenemos *n* posibilidades (uno cualquiera de los *n* elementos).

Para ocupar la 2ª posición tenemos $n-1$ posibilidades (ya hemos puesto uno en la 1ª posición).

Para ocupar la 3ª posición tenemos $n-2$ posibilidades (ya hemos puesto dos en las dos primeras).



Para ocupar la penúltima posición (la $k-1$), como ya hemos colocado $k-2$ elementos, nos quedan $n-(k-2) = n-k+2$ posibilidades.

Para ocupar la última posición (la *k*), como ya hemos colocado $k-1$ elementos, los elementos que nos quedan son: $n-(k-1) = n-k+1$ posibilidades.

Por lo tanto, para las variaciones de *n* elementos en grupos de *k* elementos tendremos:

$$\begin{aligned}\mathrm{V}_{n,k} &= n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+2)\cdot(n-k+1)=\\ &= n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+2)\cdot(n-k+1)\cdot\frac{(n-k)\cdot(n-k-1)\cdot\ldots\cdot2\cdot1}{(n-k)\cdot(n-k-1)\cdot\ldots\cdot2\cdot1}=\\ &= \frac{n!}{(n-k)!}\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathrm{V}_{n,k}=\frac{n!}{(n-k)!}}$$

E.11 *Con cuatro atletas, ¿de cuántas formas pueden quedar un campeón y un subcampeón?*

Llamemos a los atletas A, B, C y D. Escribiremos en orden campeón y subcampeón:

AB, BA, AC, CA, AD, DA, BC, CB, BD, DB, CD, DC. Son 12 formas.

$$\mathrm{V}_{4,2}=\frac{4!}{(4-2)!}=\frac{4!}{2!}=\frac{4\cdot3\cdot2\cdot1}{2\cdot1}=4\cdot3=12 \text{ formas.}$$

E.12 *En un colegio con 50 profesores hay que elegir una persona para la dirección, otra para la subdirección y otra para la jefatura de estudios. ¿De cuántas formas se puede hacer la elección de esas 3 personas?*

Son 50 elementos que hay que elegir en grupos de 3. Serán:

$$\mathrm{V}_{50,3}=\frac{50!}{(50-3)!}=\frac{50!}{47!}=\frac{50\cdot49\cdot48\cdot47!}{47!}=50\cdot49\cdot48=117\,600 \text{ formas.}$$

El cálculo de las variaciones usando factoriales puede ser incómodo, pero existe un truco que evita los factoriales. Fijémonos en los dos ejemplos anteriores: El número *k* (tamaño del grupo) es el número de factores decrecientes que se debe escribir a partir del número *n*. Podemos escribir:

$$\boxed{\mathrm{V}_{n,k}=\underbrace{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}_{k\text{ factores}}}$$

E.13 *En una liga con 20 equipos: ¿Cuántos partidos se tienen que jugar?*

Tenemos 20 elementos que hay que elegir en grupos de 2.

AB y BA son diferentes, el primer equipo es local, el segundo es visitante. Serán:

$$\mathrm{V}_{20,2}=\underbrace{20\cdot19}_{2\text{ factores}}=380 \text{ partidos.}$$

En cada jornada, los 20 equipos juegan 10 partidos (de 2 en 2). Disputarán 38 jornadas.

E.14 *¿Cuántos números de 5 cifras (pueden empezar por cero) existen que tengan alguna de sus cifras repetidas?*

Calculemos primero cuántos números hay que no tengan ninguna cifra repetida.

Hay 10 elementos (las cifras del 0 al 9) que hay que elegir en grupos de 5. Serán:

$$\mathrm{V}_{10,5}=\underbrace{10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6}_{5\text{ factores}}=30\,240 \text{ números sin cifras repetidas.}$$

Todos los números de 5 cifras van del $00\,000$ al $99\,999$, en total son $100\,000$.

Números de 5 cifras en los que haya alguna repetida serán: $100\,000-30\,240=69\,760$.

Combinaciones

Si tenemos un conjunto de *n* elementos, las combinaciones de ellos (que se escriben $C_{n,k}$), nos dan el número de formas de ordenarlos en grupos de *k* elementos pero sin importar su orden. (AB = BA)

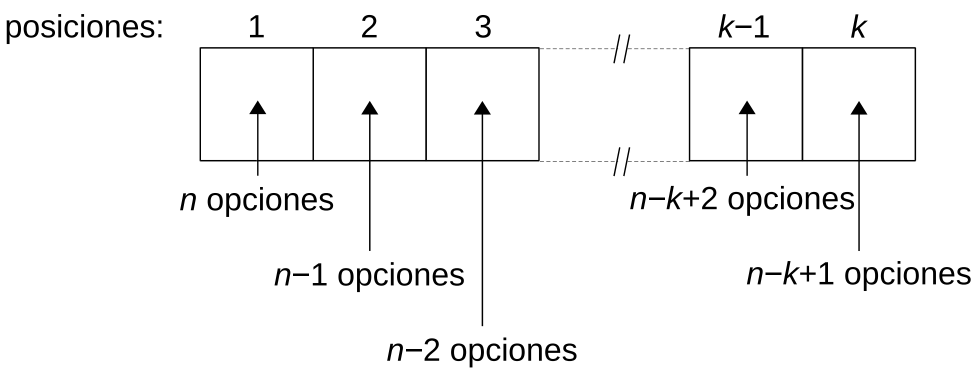
E.15 *Con el conjunto de elementos {A, B, C}, ¿cuáles son sus combinaciones de 2 en 2?*

Las combinaciones en grupos de 2 son: AB, AC, BC. (Recuerda: No importa el orden)

E.16 *Con el conjunto de elementos {A,B,C,D,E}, ¿cuáles son sus combinaciones de 2 en 2?*

Las combinaciones en grupos de 2 son: AB, AC, AD, AE, BC, BD, BE, CD, CE, DE.

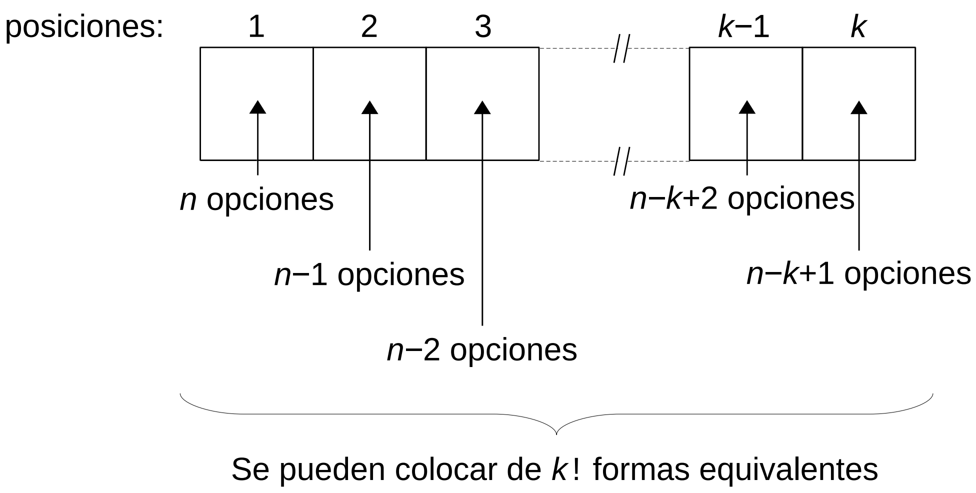
Para calcular cuántas combinaciones pueden hacerse con *n* elementos en grupos de *k* elementos, partamos del cálculo anterior de las variaciones que se puede hacer con ellos:



$$V_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Pero, en las combinaciones, no importa el orden en que coloquemos los elementos. Cualquier permutación de los *k* elementos será equivalente.

Esos *k* elementos se pueden colocar de $k!$ formas –todas ellas equivalentes–, por lo que el número de combinaciones será igual al número de variaciones que teníamos dividido por $k!$, es decir:



$$C_{n,k} = \frac{V_{n,k}}{P_k} = \frac{n!}{(n-k)!} \div k! = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

$$\boxed{C_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}}$$

E.17 *Calcula el número de combinaciones con 4 elementos tomados de 2 en 2. Escríbelas.*

El valor buscado es: $C_{4,2}=\dfrac{4!}{(4-2)!\cdot 2!}=\dfrac{4!}{2!\cdot 2!}=\dfrac{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{2\cdot 1\cdot 2\cdot 1}=\dfrac{4\cdot 3}{2\cdot 1}=6$.

Son estas 6 posibilidades: AB, AC, AD, BC, BD, CD.

E.18 *Calcula el número de combinaciones con 5 elementos tomados de 3 en 3. Escríbelas.*

El valor buscado es: $C_{5,3}=\dfrac{5!}{(5-3)!\cdot 3!}=\dfrac{5!}{2!\cdot 3!}=\dfrac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{2\cdot 1\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=\dfrac{5\cdot 4}{2\cdot 1}=10$.

Las 10 combinaciones: ABC, ABD, ABE, ACD, ACE, ADE, BCD, BCE, BDE, CDE.

E.19 *Queremos coger 4 caramelos de una bolsa que contiene 6, cada uno de un sabor. ¿De cuántas formas distintas podemos coger los 4 caramelos?*

Por lo que dice el problema, el orden en que los cojamos no importa: Combinaciones.

El valor buscado es: $C_{6,4}=\dfrac{6!}{(6-4)!\cdot 4!}=\dfrac{6!}{2!\cdot 4!}=\dfrac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{2\cdot 1\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=\dfrac{6\cdot 5}{2\cdot 1}=15$.

Si identificamos a los caramelos como A, B, C, D, E, F, las formas de coger 4 son:

ABCD ABCE ABCF	ABDE ABDF	ABEF	ACDE ACDF	ACEF	ADEF
BCDE BCDF	BCEF	BDEF	CDEF	Han sido escritas en un orden fácil de seguir.	

E.20 *Calcula el número de combinaciones con 10 elementos tomados de 6 en 6.*

El valor buscado es: $C_{10,6}=\dfrac{10!}{(10-6)!\cdot 6!}=\dfrac{10!}{4!\cdot 6!}=\dfrac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6!}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot 6!}=\dfrac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=210$.

E.21 *Calcula el número de combinaciones con 10 elementos tomados de 4 en 4.*

El valor buscado es: $C_{10,4}=\dfrac{10!}{(10-4)!\cdot 4!}=\dfrac{10!}{6!\cdot 4!}=\dfrac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6!}{6!\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=\dfrac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=210$.

E.22 *¿Por qué son iguales* $C_{10,6}$ *y* $C_{10,4}$*?*

Cuando calculamos $C_{10,6}$ tenemos las formas de elegir 6 elementos de un total de 10.

Eso quiere decir que hemos dejado de elegir 4 elementos.

Las formas de dejar 4 elementos, de un total de 10, son: $C_{10,4}$

Puesto que es lo mismo coger 6 de 10 que dejar 4 de 10, tendremos: $C_{10,6}=C_{10,4}$

Esa propiedad de las combinaciones solo es una entre otras que tenemos que conocer.

Veremos esas propiedades en el apartado ‘números combinatorios’.

Antes vamos a ver cómo calcular permutaciones, variaciones y combinaciones con la calculadora.

Uso de la calculadora en cálculos combinatorios

Las calculadoras científicas disponen de estas 3 opciones: $\boxed{x!}$ $\boxed{\text{nPr}}$ $\boxed{\text{nCr}}$ para estos cálculos.

Las tres son funciones secundarias, de manera que antes se debe pulsar la tecla SHIFT.
Busca en tu calculadora dónde están esas 3 opciones, a continuación las usaremos.
(Cualquier calculadora científica valdrá, las teclas que indicaré son las de cualquier modelo CASIO).

La opción $\boxed{x!}$ calcula factoriales. Se introduce el número, se pulsa $\boxed{x!}$ y después $\boxed{=}$.

Cálculo de $10!$	Pulsa: 1 0 SHIFT x^{-1} =	10! 3628800
Cálculo de $52!$	Pulsa: 5 2 SHIFT x^{-1} =	52! 8.065817517×10⁶⁷

Así pues: $10!=3628800$ y $52!=8{,}065817517\times10^{67}$

La opción $\boxed{\text{nPr}}$ calcula variaciones. Se introduce el número de elementos *n*, se pulsa $\boxed{\text{nPr}}$, se pone el número de elementos de los grupos (la calculadora lo llama *r*) y por último se pulsa $\boxed{=}$.

Esta forma de escribirlo se debe a que, en los Estados Unidos de Norteamérica, a las variaciones se les llama permutaciones parciales. La notación que usan es: ${}_nP_k$ que es lo mismo que: $V_{n,k}$.

Cálculo de $V_{12,7}$	Pulsa: 1 2 SHIFT × 7 =	12P7 3991680
Cálculo de $V_{30,9}$	Pulsa: 3 0 SHIFT × 9 =	30P9 5.191778592×10¹²

Así pues: $V_{12,7}=3991680$ y $V_{30,9}=5{,}191778592\times10^{12}$

La opción $\boxed{\text{nCr}}$ calcula combinaciones. Se introduce el número de elementos *n*, se pulsa $\boxed{\text{nCr}}$, se pone el número de elementos de los grupos (la calculadora lo llama *r*) y por último se pulsa $\boxed{=}$.

En los Estados Unidos de Norteamérica, las combinaciones se escriben así: ${}_nC_k$ idéntico a: $C_{n,k}$.

Cálculo de $C_{42,8}$	Pulsa: 4 2 SHIFT ÷ 8 =	42C8 118030185
Cálculo de $C_{70,9}$	Pulsa: 7 0 SHIFT ÷ 9 =	70C9 6.503352856×10¹⁰

Así pues: $C_{42,8}=118030185$ y $C_{70,9}=6{,}503352856\times10^{10}$.
En los ejemplos, a partir de aquí, usaremos la calculadora cuando sea necesario.

E.23 *Queremos hacer bolsas para regalar con 3 bombones distintos y 5 caramelos distintos. Disponemos de bombones de 5 tipos y caramelos de 7 tipos. ¿De cuántas formas diferentes podemos hacer las bolsas?*

El número de formas de seleccionar los bombones es: $C_{5,3} = 10$.

El número de formas de seleccionar los caramelos es: $C_{7,5} = 21$.

Por el principio multiplicativo, el número buscado será: $N = 10 \times 21 = 210$ bolsas.

E.24 *En 2º de Bachillerato A hay 24 alumnos y en 2º de Bachillerato A hay 30 alumnos. Queremos seleccionar un equipo de 3 alumnos, (portavoz, primer ayudante y segundo ayudante) que debe ser o bien del grupo A o bien del grupo B. ¿De cuántas formas diferentes se puede crear el equipo?*

Los 3 alumnos que se seleccionen tienen 'cargos' diferentes: El orden importa.

Por lo tanto, los equipos en cada grupo se calcularán como variaciones de 3 en 3.

En el grupo A el número de equipos posible es: $V_{24,3} = 12144$.

En el grupo B el número de equipos posible es: $V_{30,3} = 24360$.

Como hay que elegir un grupo o del A o del B, por el principio aditivo el total será:

$N = 12144 + 24360 = 36504$ equipos.

E.25 *En la Bonoloto se extraen 6 bolas de un bombo que tiene bolas del 1 al 49. No importa en qué posición se extraen las bolas. ¿De cuántas formas distintas pueden extraerse?*

Las 6 bolas, de un total de 49, se extraen sin importar su orden.

Por lo tanto, las posibles extracciones se calcularán como combinaciones de 6 en 6.

El número de posibles extracciones es: $C_{49,6} = 13983816$ formas diferentes.

E.26 *En una tienda, además de mí, hay otras 13 personas comprando. Cuando terminen de elegir los productos se pondrán en cola para pagar. ¿De cuántas formas diferentes se pueden poner en la cola si estoy seguro de que me va a tocar ser el último?*

Como voy a ser el último, las otras 13 personas se recolocarán delante de mí.

El número de posibles colocaciones es: $P_{13} = 13! = 6337020800$ formas diferentes.

E.27 *En una panadería venden 12 tipos de pan. Me quiero llevar 4 panes, uno de cada tipo. ¿De cuántas formas diferentes puedo elegir mis 4 panes?*

Los 4 panes que elijo no tienen un orden particular. Lo calcularé con combinaciones.

El número de formas de elegir los panes es: $C_{12,4} = 495$ formas diferentes.

E.28 A *una oposición se presentan 600 personas. La pasan las 10 mejores notas.*
a) Calcula de cuántas formas pueden ordenarse las personas con las 10 mejores notas.
b) Calcula de cuántas formas se puede elegir un grupo de 10 personas de las 600.

a) Si miramos su nota, el orden importa: Lo calcularemos con variaciones.

$V_{600,10} = 5,607472331 \times 10^{27}$ formas de listar 10 personas fijándonos en la nota.

b) Ahora no miramos su nota, el orden no importa: Lo calculamos con combinaciones.

$C_{600,10} = 1,545269051 \times 10^{21}$ formas de listar 10 personas sin fijarnos en la nota.

Números combinatorios

Se llaman números combinatorios a los que se obtienen al calcular el número de combinaciones de n elementos dispuestos en grupos de k elementos:

$$\boxed{\binom{n}{k} = \mathrm{C}_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!\cdot k!}}$$

Estos números son importantes en Matemáticas y tienen varias propiedades interesantes.

1. $\binom{n}{0} = \frac{n!}{(n-0)!\cdot 0!} = \frac{n!}{n!\cdot 1} = 1 \Rightarrow \boxed{\binom{n}{0} = 1}$ **2.** $\binom{n}{1} = \frac{n!}{(n-1)!\cdot 0!} = \frac{n\cdot(n-1)!}{(n-1)!\cdot 1} = n \Rightarrow \boxed{\binom{n}{1} = n}$

3. $\binom{n}{n} = \frac{n!}{(n-n)!\cdot n!} = \frac{n!}{0!\cdot n!} = 1 \Rightarrow \boxed{\binom{n}{n} = 1}$ **4.** $\binom{n}{n-1} = \frac{n!}{1!\cdot(n-1)!} = \binom{n}{1} = n \Rightarrow \boxed{\binom{n}{n-1} = n}$

5. $\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-(n-k))!\cdot(n-k)!} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} = \binom{n}{k} \Rightarrow \boxed{\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}}$

6. $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-(k-1))!\cdot(k-1)!} + \frac{n!}{(n-k)!\cdot k!} =$

$$= \frac{n!}{(n-k+1)!\cdot(k-1)!}\cdot\frac{k}{k} + \frac{n!}{(n-k)!\cdot k!}\cdot\frac{(n-k+1)}{(n-k+1)} =$$

$$= \frac{n!}{(n-k+1)!\cdot k!}\cdot k + \frac{n!}{(n-k+1)!\cdot k!}\cdot(n-k) = \frac{n!}{(n-k+1)!\cdot k!}\cdot\left[k+(n-k)\right] =$$

$$= \frac{n!}{(n-k+1)!\cdot k!}\cdot n = \frac{(n+1)!}{(n+1-k)!\cdot k!} = \binom{n+1}{k} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}}$$

Esta propiedad permite escribir los números combinatorios en forma de triángulo, conocido como **triángulo de Pascal**. Cada línea corresponde a los números combinatorios para un valor de n:

$n=0$									1								
$n=1$								1		1							
$n=2$							1		2		1						
$n=3$						1		3		3		1					
$n=4$					1		4		6		4		1				
$n=5$				1		5		10		10		5		1			
$n=6$			1		6		15		20		15		6		1		
$n=7$		1		7		21		35		35		21		7		1	
$n=8$	1		8		28		56		70		56		28		8		1

La fila $n=0$ solo tiene $\binom{0}{0}$; la fila $n=1$ tiene $\binom{1}{0}$ y $\binom{1}{1}$; la fila $n=2$ tiene $\binom{2}{0}$, $\binom{2}{1}$ y $\binom{2}{2}$; etc.

Cada elemento de la tabla, de acuerdo con la propiedad (6) es la suma de los dos elementos que están situados directamente encima. Además, por la propiedad (5) la tabla es simétrica.

Un uso del triángulo de Pascal es que en él aparecen los coeficientes del binomio de Newton:

$n=0$	$(a+b)^0 \Rightarrow$	$(a+b)^0 = \mathbf{1}$
$n=1$	$(a+b)^1 \Rightarrow$	$(a+b)^1 = \mathbf{1}\cdot a+\mathbf{1}\cdot b$
$n=2$	$(a+b)^2 \Rightarrow$	$(a+b)^2 = \mathbf{1}\cdot a^2+\mathbf{2}\cdot ab+\mathbf{1}\cdot b^2$
$n=3$	$(a+b)^3 \Rightarrow$	$(a+b)^3 = \mathbf{1}\cdot a^3+\mathbf{3}\cdot a^2b+\mathbf{3}\cdot ab^2+\mathbf{1}\cdot b^3$
$n=4$	$(a+b)^4 \Rightarrow$	$(a+b)^4 = \mathbf{1}\cdot a^4+\mathbf{4}\cdot a^3b+\mathbf{6}\cdot a^2b^2+\mathbf{4}\cdot ab^3+\mathbf{1}\cdot b^4$
$n=5$	$(a+b)^5 \Rightarrow$	$(a+b)^5 = \mathbf{1}\cdot a^5+\mathbf{5}\cdot a^4b+\mathbf{10}\cdot a^3b^2+\mathbf{10}\cdot a^2b^3+\mathbf{5}\cdot ab^4+\mathbf{1}\cdot b^5$
$n=6$	$(a+b)^6 \Rightarrow$	$(a+b)^6 = \mathbf{1}\cdot a^6+\mathbf{6}\cdot a^5b+\mathbf{15}\cdot a^4b^2+\mathbf{20}\cdot a^3b^3+\mathbf{15}\cdot a^2b^4+\mathbf{6}\cdot ab^5+\mathbf{1}\cdot b^6$

En general, para un exponente *n* cualquiera, tenemos esta fórmula para el binomio de Newton:

$$\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot a^{n-k}\cdot b^k}$$

7. $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n}$

Esta es la última propiedad de los números combinatorios que vamos a ver aquí.
Dice que la suma de los números combinatorios de la fila *n* del triángulo de Pascal vale 2^n.

Comprobémoslo para $n=4$: $\binom{4}{0}+\binom{4}{1}+\binom{4}{2}+\binom{4}{3}+\binom{4}{4}=1+4+6+4+1=16=2^4$. Es cierto.

Vamos a demostrar esta propiedad:

Con un conjunto de *n* elementos, el número de subconjuntos es: $x=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n}$

Pero podemos contar todas las formas de hacer subconjuntos de otra forma: Para cada uno de los subconjuntos, asignamos un 1 a cada uno de los *n* elementos que pertenecen a él y un cero a cada uno de los que no pertenecen a él. Cada subconjunto será una lista de *n* dígitos binarios. ¿Cuántos números binarios se puede hacer con *n* dígitos? Son un total de 2^n posibilidades. Por lo tanto el valor de *x* (número de subconjuntos) es 2^n, y queda demostrada la propiedad (7).

E.29 *Calcula manualmente el valor de:* $\binom{100}{98}+\binom{100}{99}$

Por la propiedad (5) o propiedad de simetría, tendremos:

$$\binom{100}{98}+\binom{100}{99}=\binom{100}{2}+\binom{100}{1}=\frac{100\cdot 99}{2\cdot 1}+100=50\cdot 99+100=4950+100=5050.$$

E.30 *Calcula cuántos subconjuntos distintos tiene un conjunto de 10 elementos*.

Por la propiedad (7): $\displaystyle\sum_{k=0}^{10}\binom{10}{k}=2^{10}=1024$ subconjuntos distintos.

Permutaciones con repetición

Tenemos un conjunto de *n* elementos, en los que hay elementos repetidos. Hay un elemento que está repetido *a* veces, otro que está repetido *b* veces, uno más que está repetido *c* veces, etc.

Contando todos los elementos del conjunto tenemos el total, así que: $a+b+c+\ldots=n$

Se llama permutaciones con repetición $\mathrm{PR}_n^{a,b,c,\ldots}$ al número de formas de ordenar esos elementos.

E.31 *Con los elementos A, A, B, ¿cuáles son sus permutaciones con repetición?*

Son estas 3: AAB, ABA, BAA. (B solo puede ocupar 3 posiciones diferentes)

E.32 *Con los elementos A, A, B, B, ¿cuáles son sus permutaciones con repetición?*

Son estas 6: AABB, ABAB, ABBA, BAAB, BABA, BBAA.

Si no hubiera repeticiones, el número de permutaciones de *n* elementos ya sabemos que es $n!$.

Los elementos repetidos *a* veces se pueden colocar de $a!$ maneras, pero todas son la misma.

Los elementos repetidos *b* veces se pueden colocar de $b!$ maneras, pero todas son la misma.

Los elementos repetidos *c* veces se pueden colocar de $c!$ maneras, pero todas son la misma, etc.

Así, el número de formas de ordenar los *n* elementos será:

$$\boxed{\mathrm{PR}_n^{a,b,c,\ldots}=\frac{n!}{a!\cdot b!\cdot c!\cdot\ldots}}$$

E.33 *Tenemos 3 vasos, 2 copas y 2 tazas. ¿De cuántas formas se pueden alinear?*

Son 7 elementos: $\mathrm{PR}_7^{3,2,2}=\dfrac{7!}{3!\cdot 2!\cdot 2!}=\dfrac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3!}{3!\cdot 2\cdot 1\cdot 2\cdot 1}=7\cdot 6\cdot 5=210$ formas.

E.34 *Tenemos 10 bolas rojas, 4 verdes y 6 azules. ¿De cuántas formas se pueden alinear?*

Son 20 elementos: $\mathrm{PR}_{20}^{10,4,6}=\dfrac{20!}{10!\cdot 4!\cdot 6!}=38\,798\,760$ formas (usando la calculadora)

E.35 *Con 15 chicas y 10 chicos, ¿de cuántas formas se pueden ordenar por su sexo?*

Son 25 elementos: $\mathrm{PR}_{25}^{15,10}=\dfrac{25!}{15!\cdot 10!}=\dfrac{25!}{(25-10)!\cdot 10!}=\dbinom{25}{10}=3\,268\,760$ formas.

Vemos mediante este último ejemplo que, si los elementos son solo de dos tipos, el número de permutaciones con repetición se puede escribir como un número combinatorio:

Pongamos que tenemos *n* elementos de dos tipos. Un tipo aparece *k* veces y el otro $n-k$ veces.

$$\mathrm{PR}_n^{n-k,k}=\frac{n!}{(n-k)!\cdot k!}=\binom{n}{k}$$

E.36 *Tenemos 36 bolas rojas y 4 bolas verdes. ¿De cuántas formas se pueden ordenar?*

Son 40 elementos: $\mathrm{PR}_{40}^{36,4}=\dfrac{40!}{36!\cdot 4!}=\dfrac{40!}{(40-4)!\cdot 4!}=\dbinom{40}{4}=91390$ formas.

E.37 *¿Cuántos números binarios se pueden escribir usando 5 unos y 3 ceros?*

Son 8 elementos: $\mathrm{PR}_8^{5,3}=\dfrac{8!}{5!\cdot 3!}=\dfrac{8!}{(8-3)!\cdot 3!}=\dbinom{8}{3}=56$ números binarios.

Variaciones con repetición

Tenemos un conjunto de n elementos. Queremos colocarlos en k posiciones, pudiendo repetir las veces que queramos alguno o varios de los n elementos.

Se llama variaciones con repetición $\mathrm{VR}_{n,k}$ al número de formas de ordenar esos elementos.

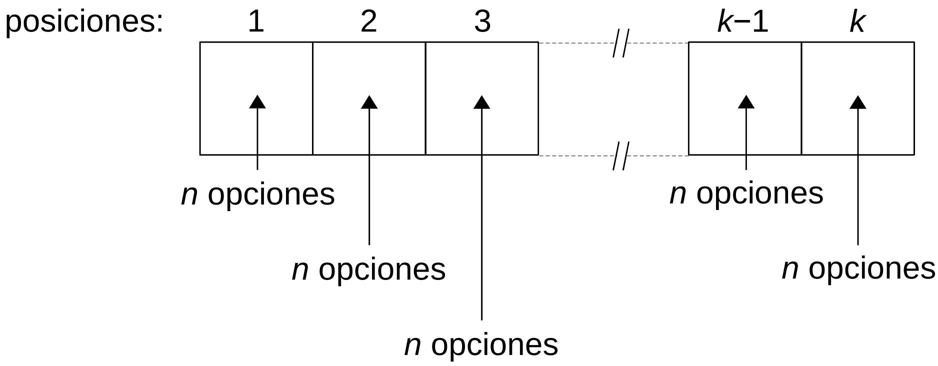
E.38 *Con los elementos A, B; ¿cuáles son sus variaciones con repetición tomados de 3 en 3?*

Son estas 8: AAA, AAB, ABA, BAA, ABB, BAB, BBA, BBB.

E.39 *Con los elementos A, B, C; ¿cuáles son sus variaciones con repetición de 2 en 2?*

Son estas 9: AA, AB, AC, BA, CA, BB, BC, CB, CC.

Tenemos n elementos, y cada uno puede ir en cualquiera de las k posiciones disponibles:



El número total de formas de colocar los n elementos será (por el principio multiplicativo):

$$\mathrm{VR}_{n,k} = \overbrace{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}^{k \text{ veces}}$$

$$\boxed{\mathrm{VR}_{n,k} = n^k}$$

E.40 *Las cifras binarias son solo dos: 0 y 1. ¿Cuántos números binarios hay de 8 cifras?*

Tenemos 2 elementos en grupos de 8: $\mathrm{VR}_{2,8} = 2^8 = 256$ números binarios.

E.41 *En una quiniela de 14 partidos que se marcan con 1, X o 2. ¿Cuántas diferentes hay?*

Tenemos 3 elementos en grupos de 14: $\mathrm{VR}_{3,14} = 3^{14} = 4\,782\,969$ quinielas diferentes.

E.42 *¿Cuántos números decimales de 5 cifras son capicúas (o palíndromos)?*

Los números capicúas de 5 cifras tienen la 5ª cifra igual a la 1ª y la 4ª cifra igual a la 2ª.

Por lo tanto, solo tienen 3 cifras libres: $\mathrm{VR}_{10,3} = 10^3 = 1000$ números capicúas.

E.43 *Desde el año 2000 las matrículas españolas tienen 4 cifras decimales y 3 letras que se eligen entre estas: B, C, D, F, G, H, J, K, L, M, N, P, R, S, T, V, W, X, Y, Z. Las letras pueden repetirse. ¿Cuántas matrículas distintas se podrán formar?*

La parte numérica usa 10 cifras en grupos de 4: $\mathrm{VR}_{10,4} = 10^4 = 10\,000$ números.

La parte alfabética usa 20 letras en grupos de 3: $\mathrm{VR}_{20,3} = 20^3 = 8000$ letras.

Por el principio multiplicativo serán: $\mathrm{N} = 10000 \times 8000 = 80 \text{ millones}$ de matrículas.

Combinaciones con repetición

Tenemos un conjunto de n elementos. Queremos colocarlos en k posiciones, pudiendo repetir las veces que queramos alguno o varios de los n elementos, sin que su orden importe. (AB = BA)

Se llama combinaciones con repetición $\mathrm{CR}_{n,k}$ al número de formas de ordenar esos elementos.

E.44 *Con los elementos A, B; ¿cuáles son sus combinaciones con repetición en grupos de 3?*

Son solo estas 4: AAA, AAB, ABB, BBB.

E.45 *Con los elementos A, B, C; ¿cuáles son sus combinaciones con repetición de 2 en 2?*

Son estas 6: AA, AB, AC, BB, BC, CC.

Para contar cuántas formas distintas producen las combinaciones con repetición, veamos cómo se puede pensar usando el ejemplo anterior.

Son 3 elementos ABC para colocar en 2 posiciones. Ya sabemos que hay 6 formas de colocarlos.

Como el orden es indiferente, vamos a contar las formas de colocarlos poniendo primero las A, luego las B y, por último las C. Hemos de colocar 2 elementos (hay 2 posiciones).

Pondremos un ‘separador’ entre las A y las B, y otro ‘separador’ entre las B y las C. El separador lo codificaremos como un cero, y cada aparición de una letra la codificaremos con un 1:

Combinación:	La colocamos con separadores:	Y la codificamos así:
AA	A A × ×	1100
AB	A × B ×	1010
AC	A × × C	1001
BB	× B B ×	0110
BC	× B × C	0101
CC	× × C C	0011

El número de combinaciones con repetición será el número de formas que tenemos de colocar esos ceros y unos con los que hemos codificado cada combinación.

Resulta igual a las permutaciones con repetición de 4 elementos (suma de las 2 posiciones que hay que ocupar más los dos ceros que hacen de separador –al ser 3 elementos, hay 2 separadores–) en las que uno de los elementos se repite 2 veces y otro de los elementos se repite 2 veces:

$$\mathrm{PR}_4^{2,2}=\frac{4!}{2!\cdot 2!}=\frac{4!}{(4-2)!\cdot 2!}=\binom{4}{2}=\frac{4\cdot 3}{2\cdot 1}=6$$ que es el número que esperábamos.

Pasemos ahora al caso general con n elementos. Entre ellos pondríamos $n-1$ separadores (los ceros). Y si hay que ocupar k posiciones, habrá que colocar k veces el número 1.

El número total de unos y ceros será: $n-1+k$ que escribiremos, más estéticamente, así: $n+k-1$

El número de combinaciones con repetición serán las permutaciones con repetición de unos y ceros:

$$\mathrm{CR}_{n,k}=\mathrm{PR}_{n+k-1}^{n-1,k}=\frac{(n+k-1)!}{(n-1)!\cdot k!}=\binom{n+k-1}{k}$$

(Con la fórmula ya vista de las permutaciones con repetición cuando solo hay 2 tipos de elementos.)

$$\boxed{\mathrm{CR}_{n,k}=\binom{n+k-1}{k}}$$

E.46 *Con 7 elementos, ¿cuántas combinaciones con repetición hay tomándolos de 4 en 4?*

Serán: $CR_{7,4} = \binom{7+4-1}{4} = \binom{10}{4} = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 10\cdot 3\cdot 7 = 210$ combinaciones.

E.47 *Con 699 elementos, ¿cuántas combinaciones con repetición hay tomándolos de 2 en 2?*

Serán: $CR_{699,2} = \binom{699+2-1}{2} = \binom{700}{2} = \frac{700\cdot 699}{2\cdot 1} = 350\cdot 699 = 244650$ combinaciones.

E.48 *Para hacer una bebida tenemos 5 tipos de zumo. Queremos usar 3, sean o no distintos, poniendo igual cantidad de cada uno. ¿Cuántas bebidas diferentes podemos hacer?*

Como los zumos se mezclaran, no importará el orden en el que los añadamos.

Además, se permite que los zumos se repitan. Serán combinaciones con repetición.

Serán: $CR_{5,3} = \binom{5+3-1}{3} = \binom{7}{3} = \frac{7\cdot 6\cdot 5}{3\cdot 2\cdot 1} = 7\cdot 5 = 35$ bebidas diferentes.

E.49 *En una feria escolar del Libro, a quien aporte un libro le obsequian con una flor, la que prefiera entre un grupo de 5 diferentes. Si una alumna aporta 4 libros, ¿de cuántas formas diferentes puede elegir las flores que le regalarán? (Puede repetir tipo de flor).*

Sean ABCDE los tipos de flores. ¿De cuántas formas puede elegir 4, una por libro?

Según el enunciado, el orden no es importante: Serán combinaciones con repetición.

Serán: $CR_{5,4} = \binom{5+4-1}{4} = \binom{8}{4} = \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 7\cdot 2\cdot 5 = 70$ formas diferentes.

E.50 *Tenemos 6 puntos en un plano formando un hexágono. ¿Cuántas líneas distintas se pueden trazar uniendo dos puntos diferentes?*

Sean los puntos ABCDEF. Una línea unirá por ejemplo A y B. Es la misma línea que la que une B y A, así que el orden no importa: Serán combinaciones sin repetición.

Serán: $C_{6,2} = \binom{6}{2} = \frac{6\cdot 5}{2\cdot 1} = 15$ líneas diferentes.

De ellas, 6 serán los lados del hexágono. Las otras 9 serán las diagonales del hexágono.

E.51 *Un laborario etiqueta sus muestras con dos letras y dos números. Para las letras usan ABCDEF y pueden repetir letras. Para los números usan los dígitos 12345, siempre se escribe primero el mayor y no se puede repetir ningún dígito. ¿Cuántas etiquetas distintas pueden componer?*

Para las letras, tienen 6 y las eligen de 2 en 2. Por ejemplo, son posibles AA, AB o BA. Se trata de variaciones con repetición de 6 elementos tomados de 2 en 2:

$VR_{6,2} = 6^2 = 36$ posibilidades con las letras.

Para los números usan 5 dígitos (12345) y deben escoger 2 sin repetir. Como se escribe primero el mayor, la opción 31 es válida, la 13 no. Por eso, cambiar el orden no da una posibilidad distinta y se trata de combinaciones sin repetición de 5 elementos de 2 en 2:

$C_{5,2} = \binom{5}{2} = \frac{5\cdot 4}{2\cdot 1} = 10$ (Son estas: 21, 31, 32, 41, 42, 43, 51, 52, 53 y 54.)

En total, por el principio multiplicativo, son: $N = 36\times 10 = 360$ etiquetas diferentes.

E.52 *En una votación con un censo de 1000 votantes se debía votar SÍ o NO. Ha habido un número de abstenciones. ¿De cuántas formas diferentes se pueden repartir los votos?*

Supongamos que cada uno de los tipos de voto los ponemos en un grupo. Los votos SÍ los apuntamos, cada uno, con un 1. Ponemos un cero para separar del siguiente grupo. Los votos NO los apuntamos, cada uno, con un 1. Ponemos un cero para separarlos del último grupo. En este apuntamos las abstenciones, cada una con un 1.

Tendremos un total de 1000 unos y 2 ceros (separadores), 1002 elementos en total.

El total de posibilidades será: $PR_{1002}^{1000,2}=\dfrac{1002!}{1000!\cdot 2!}=\dfrac{1002\cdot 1001}{2\cdot 1}=501\cdot 1001=501501$

E.53 *Entre los números de 5 cifras, ¿cuántos hay con 3 cifras impares y 2 cifras pares? (Se cuentan entre esos números los que empiecen por cero.)*

Si llamamos `I` a una cifra par y `P` a una cifra par, los números que buscamos son, por ejemplo, de tipos como `IPIIP`, `PIPII` o `IIPPI`.

¿Cuántos tipos, atendiendo a si las cifras son pares o impares, podemos tener?

Serán: $PR_5^{3,2}=\dfrac{5!}{3!\cdot 2!}=\dfrac{5\cdot 4}{2\cdot 1}=10$ tipos.

En uno cualquiera de esos tipos hay 3 cifras impares (de un total de cinco: 1, 3, 5, 7, 9). ¿De cuántas formas se pueden colocar esas 3 cifras impares?

De: $VR_{5,3}=5^3=125$ formas para las 3 cifras impares.

En uno cualquiera de esos tipos hay 2 cifras pares (de un total de cinco: 0, 2, 4, 6, 8). ¿De cuántas formas se pueden colocar esas 2 cifras pares?

De: $VR_{5,2}=5^2=25$ formas para las 2 cifras pares.

Por el principio multiplicativo, en cada uno de los tipos las posibilidades serán:

$N=125\times 25=3125$ posibilidades en cada uno de los 10 tipos.

Así, el total de números buscado será: $N_{\text{Total}}=3125\times 10=31250$ números de 5 cifras.

E.54 *Francis tiene 7 bolígrafos y 5 rotuladores. De todos ellos quiere elegir solo 4, que son los que le caben en el bolsillo de la camisa. Pero, para hacer su trabajo, debe llevar al menos un bolígrafo y un rotulador. ¿De cuántas formas distintas los puede elegir?*

Hacer el conteo de forma directa es complicado, lo haremos de una forma indirecta.

Si no hubiera que distinguir entre bolígrafos y rotuladores habría simplemente 12 (7+5) elementos para elegir en grupos de 4. Como el orden no es importante, serían:

$C_{12,4}=\dbinom{12}{4}=495$ posibilidades.

Pero, para tener al menos un bolígrafo, hay que descartar las opciones que solo tienen rotuladores: $C_{5,4}$ y, para tener al menos un rotulador, hay que descartar las opciones que solo tienen bolígrafos: $C_{7,4}$.

Estas opciones que hay que descartar son: $C_{5,4}=\dbinom{5}{4}=5$ y $C_{7,4}=\dbinom{7}{4}=35$

Las opciones restantes son: $N=495-5-35=455$ formas distintas.

E.55 *Calcula de cuántas formas se pueden repartir 7 bombones entre 3 personas de forma que le toque al menos 1 bombón a cada persona. (Es equivalente a calcular los valores enteros de a, b y c para que sumen 7, siendo cada uno de los 3 valores mayor de cero).*

Para empezar, damos a cada una de las tres personas un bombón. Nos quedan cuatro.

A cada persona a quien toque cada uno de estos 4 bombones le apuntamos un 1. Separaremos las 3 personas con 2 ceros: uno entre la 1ª y la 2ª y uno entre la 2ª y la 3ª.

Así, los 4 bombones que debemos repartir podrían quedar así: 101101 o así: 100111.

Tendremos: $PR_6^{4,2} = \dfrac{6!}{4!\cdot 2!} = \dfrac{6!}{(6-2)!\cdot 2!} = \dbinom{6}{2} = \dfrac{6\cdot 5}{2\cdot 1} = 15$ formas de repartirlos.

E.56 *Calcula de cuántas formas se pueden escribir los números decimales de 4 cifras, de forma que no contengan dos cifras consecutivas. (Valdría 0952, no valdría 1738).*

Para comenzar, encontremos las formas de elegir 4 cifras ordenadas de menor a mayor en las que no haya dos cifras consecutivas.

Supongamos que las 4 cifras son, por ejemplo 2469. Sea cual sea la primera cifra queda prohibida la cifra siguiente. En nuestro ejemplo, quedaría prohibido el 3. No se prohibe la cifra anterior, porque están ordenadas de menor a mayor. Esto mismo ocurre por la elección de las cifras segunda y tercera, quedan prohibidos el 5 y el 7.

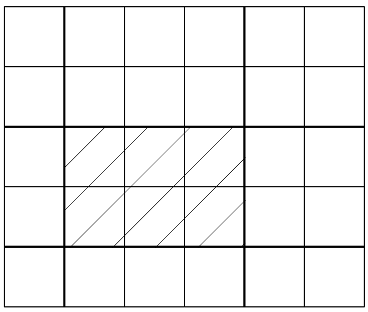
Es decir, siempre quedan prohibidas 3 cifras de las 10 que tiene la numeración decimal.

El número de posibilidades será: $C_{7,4} = \dbinom{7}{4} = \dfrac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 35$ formas de menor a mayor.

Cada una de ellas dará, por sus posibles reordenaciones, $4! = 24$ números distintos.

En total tendremos: $N = 35\times 24 = 840$ números de 4 cifras sin dos cifras consecutivas.

E.57 *En una cuadrícula de 6×5 cuadritos, ¿cuántos rectángulos se pueden dibujar en ella?*



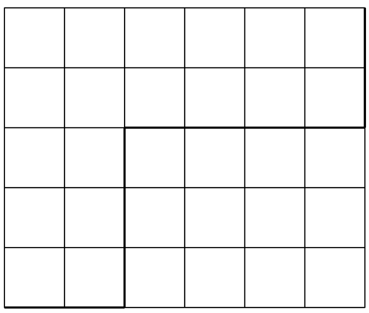
Cada uno de los rectángulos que se pueden dibujar está delimitado por dos líneas horizontales y dos verticales.

Hay 7 verticales, de 2 en 2 son: $C_{7,2} = 21$ parejas.

Hay 6 horizontales, de 2 en 2 son: $C_{6,2} = 15$ parejas.

En total: $N = 21\times 15 = 315$ rectángulos en la cuadrícula.

E.58 *En una cuadrícula de 6×5 cuadritos, calcula cuántos caminos mínimos (sin retroceso) unen dos esquinas opuestas.*



El camino del dibujo puede ponerse: HHVVVHHHHVV.

Cada paso se indica con H (horizontal) o V (vertical).

Cualquier camino mínimo tendrá 6 H y 5 V.

El total de caminos mínimos será:

$PR_{11}^{6,5} = \dfrac{11!}{6!\cdot 5!} = \dfrac{11!}{(11-5)!\cdot 5!} = \dbinom{11}{5} = 462$ caminos.

Tabla de operaciones combinatorias

Operación	¿En otro **orden** es diferente?	¿Entran **todos** los elementos?	¿Se **repiten** elementos?	*Fórmula*
Permutaciones	✓	✓	⊘	$\mathrm{P}_n = n! = n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1$
Variaciones	✓	⊘	⊘	$\mathrm{V}_{n,k} = \dfrac{n!}{(n-k)!}$
Combinaciones	⊘	⊘	⊘	$\mathrm{C}_{n,k} = \dbinom{n}{k} = \dfrac{n!}{(n-k)!\cdot k!}$
Permutaciones con repetición	✓	✓	✓	$\mathrm{PR}_n^{a,b,c,\ldots} = \dfrac{n!}{a!\cdot b!\cdot c!\cdot\ldots}$
Variaciones con repetición	✓	⊘	✓	$\mathrm{VR}_{n,k} = n^k$
Combinaciones con repetición	⊘	⊘	✓	$\mathrm{CR}_{n,k} = \dbinom{n+k-1}{k}$

Propiedades de los números combinatorios

$$\boxed{\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\cdot k!}} \qquad \binom{n}{0} = 1 \qquad \binom{n}{1} = n \qquad \binom{n}{n-1} = n \qquad \binom{n}{n} = 1$$

$$\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$$

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$$

Triángulo de Pascal

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

Por último, añado unos problemas sencillos que se han usado para evaluar la comprensión de la combinatoria por el alumnado. Son útiles para conocer qué clase de problemas pueden plantear dificultades conceptuales, pese a ser de solución simple. Mis breves soluciones intentan ser claras.

Quien esté interesado en la Didáctica de la Matemática sobre el tema de Combinatoria, puede ver:

https://www.ugr.es/~batanero/pages/ARTICULOS/combinatoria.pdf
https://www.ugr.es/~batanero/pages/ARTICULOS/RAZON.pdf
https://www.ugr.es/~batanero/pages/ARTICULOS/TesisRoa.pdf
https://digibug.ugr.es/bitstream/handle/10481/61877/5283-157-9402-3-10-20190911.pdf

Problemas sencillos de combinatoria. (Navarro-Pelayo, 1994 [1-13] y Gascón, 1988 [14-15])

Prob.1 Cuatro chicos son enviados al director del colegio por alborotar en la clase. Para esperar su castigo, tienen que alinearse en fila ante la puerta del despacho. Supongamos que los niños se llaman Andrés, Benito, Carlos y Daniel (pondremos A, B, C y D). Escribe todos los órdenes posibles en que podrían alinearse. Por ejemplo: para A como 1º, B como 2º, C como 3º y D como 4º, escribiremos ABCD. ¿Cuántas formas diferentes hay en total?

▷ Tenemos 4 elementos: A, B, C y D. Queremos alinear los 4 (todos), el orden importa y no se repiten. Así pues, serán permutaciones de 4 elementos: $P_4 = 4! = 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 24$ formas.

Las 24 formas diferentes son:	ABCD	BACD	CABD	DABC
	ABDC	BADC	CADB	DACB
	ACBD	BCAD	CBAD	DBAC
	ACDB	BCDA	CBDA	DBCA
	ADBC	BDAC	CDAB	DCAB
(6 empiezan con cada letra)	ADCB	BDCA	CDBA	DCBA

Prob.2 En una caja hay cuatro fichas de colores: dos azules, una blanca y una roja. Se toma una ficha al azar y se anota su color. Sin devolver la ficha a la caja, se toma una segunda ficha, y se anota su color. Se continúa de esta forma hasta que se han seleccionado, una detrás de otra, las cuatro fichas. ¿De cuántas formas diferentes se puede hacer la selección de las fichas? Ejemplo: se pueden seleccionar en el orden Blanca, Azul, Roja y Azul.

▷ El problema es equivalente a alinear las 4 fichas: AABR. Se usan todos los elementos, el orden importa y hay elementos repetidos: se trata de permutaciones con repetición.

$PR_4^{2,1,1} = \frac{4!}{2!\cdot 1!\cdot 1!} = \frac{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{2\cdot 1\cdot 1\cdot 1} = 4\cdot 3 = 12$ formas diferentes.

Son estas formas: AABR, AARB, ABAR, ARAB, ABRA, ARBA,
BAAR, RAAB, BARA, RABA, BRAA, RBAA.

Prob.3 Disponemos de tres cartas iguales. Deseamos colocarlas en cuatro sobres de diferentes colores: Amarillo, Blanco, Crema y Dorado. Si cada sobre sólo puede contener, a lo sumo, una carta. ¿De cuántas formas podemos colocar las tres cartas en los cuatro sobres diferentes? Ejemplo: podemos colocar una carta en el sobre Amarillo, otra en el Blanco y otra en el Crema.

▷ Llamemos por su inicial a los sobres que tienen carta. El caso del ejemplo sería: ABC. Tenemos 4 elementos que hay que tomar de 3 en 3, no importa el orden (ABC = CAB) y no hay repetidos: son combinaciones de 4 elementos en grupos de 3.

$C_{4,3} = \frac{4!}{(4-3)!\cdot 3!} = \frac{4!}{1!\cdot 3!} = \frac{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{1\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 4$ formas de colocar las cartas.

Estas formas son: ABC, ABD, ACD, BCD.

Como un sobre queda vacío, hay 4 posibilidades: que quede vacío el A, el B, el C o el D.

Esto corresponde a: $C_{4,1} = \frac{4!}{(4-1)!\cdot 1!} = \frac{4!}{3!\cdot 1!} = \frac{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{3\cdot 2\cdot 1\cdot 1} = 4$. Se cumple que: $\binom{4}{3} = \binom{4}{1}$

Prob.4 Un niño tiene cuatro coches de colores diferentes (azul, blanco, verde y rojo) y decide regalarlos a sus hermanos Fernando, Luis y Teresa. ¿De cuántas formas diferentes puede dar los coches a sus hermanos? Ejemplo: podría dar los cuatro coches a su hermano Luis.

▷ Llamemos a los hermanos F, L y T. Para los coches usaremos 4 posiciones (azul-blanco-verde-rojo), de forma que si los 4 le correspondieron a L escribimos: LLLL, si el azul le correspondió a F, el blanco y el verde a L y el rojo a T escribimos: FLLT.

En cada una de las 4 posiciones podemos colocar cualquiera de las 3 letras. El orden importa, y hay repetidas: variaciones con repetición de 3 elementos en grupos de 4.

$VR_{3,4} = 3^4 = 81$ formas de regalar los coches.

Prob.5 En una urna hay tres bolas numeradas con los dígitos 2, 4 y 7. Extraemos una bola de la urna y anotamos su número. Sin devolver la bola extraída, se elige una segunda bola y se anota su número; y sin devolverla, se saca una tercera bola y se anota su número. ¿Cuántos números de tres cifras diferentes podemos obtener? Ejemplo: el número 724.

▷ El problema es idéntico a alinear de todas las formas posibles los tres dígitos. El orden importa, se toman todos y no hay repeticiones: son permutaciones de 3 elementos.

$P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ números diferentes se podrán obtener.

Son estos: 247, 274, 427, 472, 724 y 742.

Prob.6 Cuatro niños Alicia, Berta, Carlos y Diana, van a pasar la noche a casa de su abuela. Esta tiene dos habitaciones diferentes (salón y buhardilla) donde poder colocar los niños para dormir. ¿De cuántas formas diferentes puede la abuela colocar los cuatro niños en las dos habitaciones? (puede quedar alguna habitación vacía). Ejemplo: Alicia, Berta y Carlos pueden dormir en el salón y Diana en la buhardilla.

▷ A cada uno de los niños podemos asignarle una de las habitaciones. Si ponemos S para salón y B para buhardilla, el ejemplo que da el problema podría escribirse así: SSSB.

Cada una de las 4 posiciones se asigna a S o a B. El orden importa, no aparecen todos los elementos y hay repeticiones: variaciones con repetición de 2 elementos en grupos de 4.

$VR_{2,4} = 2^4 = 16$ formas diferentes.

Las posibles formas son: SSSS, SSSB, SSBS, SBSS, BSSS, SSBB, SBSB, SBBS, BSSB, BSBS, BBSS, SBBB, BSBB, BBSB, BBBS, BBBB.

Prob.7 Un grupo de cuatro amigos, Andrés, Benito, Clara y Daniel, tienen que realizar dos trabajos diferentes, uno de Matemáticas y otro de Lengua. Para realizarlo deciden dividirse en dos grupos de dos chicos cada uno. ¿De cuántas formas pueden dividirse para realizar los trabajos? Ejemplo: Andrés-Benito pueden hacer el trabajo de Matemáticas y Clara-Daniel el trabajo de Lengua.

▷ Dos de ellos hacen el trabajo de Matemáticas. Una vez elegidos estos, los otros dos, sin opciones, harán el de Lengua. Así que nos basta con ver quiénes hacen el de Matemáticas.

Si de 4 elementos (los amigos) debemos escoger dos, no importa el orden y no hay repeticiones: se trata de combinaciones de 4 elementos en grupos de 2.

$C_{4,2} = \dfrac{4!}{(4-2)! \cdot 2!} = \dfrac{4!}{2! \cdot 2!} = \dfrac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = 3 \cdot 2 = 6$ formas de dividirse los trabajos.

Las 6 formas son: AB-CD, AC-BD, AD-BC, BC-AD, BD-AC, CD-AB

Prob.8 Una maestra tiene que elegir tres estudiantes para borrar la pizarra. Para ello dispone de cinco voluntarios: Elisa, Fernando, Germán, Jorge y María. ¿De cuántas formas puede elegir tres de estos alumnos? Ejemplo: Elisa, Fernando y María.

▷ Tiene que elegir 3 personas de un total de 5. No importa el orden y no hay repeticiones: son combinaciones de 5 elementos tomados de 3 en 3.

$$C_{5,3}=\frac{5!}{(5-3)!\cdot 3!}=\frac{5!}{2!\cdot 3!}=\frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{2\cdot 1\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=\frac{5\cdot 4}{2\cdot 1}=10 \text{ formas de elegirlos.}$$

Las formas son: EFG, EFJ, EFM, EGJ, EGM, EJM, FGJ, FGM, FJM, GJM.

Prob.9 El garaje de Ángel tiene cinco plazas. Como la casa es nueva, hasta ahora sólo hay tres coches; el de Angel, Beatriz y Carmen que pueden colocar cada día el coche en el lugar que prefieran, si no está ocupado. Este es el esquema de la cochera:

1	2	3	4	5

Por ejemplo, Ángel puede aparcar su coche en el aparcamiento número 1, Beatriz en el número 2 y Carmen en el número 4. ¿De cuántas formas posibles pueden Ángel, Beatriz y Carmen aparcar sus coches en la cochera?

▷ El ejemplo del enunciado podemos escribirlo como 124. Cualquiera de las posibilidades tendrá 3 valores (hay 3 coches) tomados entre los números 1, 2, 3, 4, 5 (hay cinco plazas).

No entran todos los elementos, el orden importa y no hay repeticiones: son variaciones de 5 elementos tomados de 3 en 3.

$V_{5,3}=5\cdot 4\cdot 3=60$ formas de aparcar.

Prob.10 María y Carmen tienen cuatro cromos numerados 1, 2, 3 y 4. Deciden repartírselos entre las dos (dos cromos para cada una). ¿De cuántas formas se pueden repartir los cromos? Ejemplo: María puede quedarse con los cromos 1 y 2, y Carmen con los cromos 3 y 4.

▷ Una vez María se queda con dos cromos, ya no quedan opciones para Carmen que debe quedarse con los otros dos. Por lo tanto, nos basta con ver las opciones de María.

Para María, de 4 cromos debe elegir 2. No importa el orden y no hay repeticiones: son combinaciones de 4 elementos tomados de 2 en 2.

$$C_{4,2}=\frac{4!}{(4-2)!\cdot 2!}=\frac{4!}{2!\cdot 2!}=\frac{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{2\cdot 1\cdot 2\cdot 1}=3\cdot 2=6 \text{ formas de repartírselos.}$$

Las 6 formas son: 12-34, 13-24, 14-23, 23-14, 24-14, 34-12.

Prob.11 En un bombo hay cuatro bolas numeradas con los dígitos 2, 4, 7 y 9. Elegimos una bola del bombo y anotamos su número. La bola extraída se introduce en el bombo. Se elige una segunda bola y se anota su número. La bola extraída se vuelve a introducir en el bombo. Finalmente se elige una tercera bola y se anota su número. ¿Cuántos números de tres cifras podemos obtener? Ejemplo: se puede obtener el número 222.

▷ El problema es equivalente a tomar de 4 elementos (2, 4, 7 y 9) solo tres de ellos.

No se toman todos los elementos, importa su orden y se pueden repetir elementos (al devolver las bolas al bombo, se podrán repetir): son variaciones con repetición de 4 elementos (2, 4, 7, 9) en grupos de 3.

$VR_{4,3}=4^3=64$ números de tres cifras.

Prob.12 Disponemos de cinco cartas, cada una de ellas tiene grabada una letra: A, B, C, C y C. ¿De cuántas formas diferentes se pueden colocar en la mesa las cinco cartas, una al lado de la otra formando una hilera? Ejemplo: pueden estar colocadas de la forma ACBCC.

▷ Tenemos que la A está una vez, la B una vez y la C tres veces. Son 5 elementos en total.

En cada ordenación participan todos los elementos, importa el orden y hay repeticiones: son permutaciones con repetición de 5 elementos.

$PR_5^{1,1,3} = \dfrac{5!}{1!\cdot 1!\cdot 3!} = \dfrac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{1\cdot 1\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 5\cdot 4 = 20$ formas de colocar las cartas.

Prob.13 Se quiere elegir un comité formado por tres miembros: presidente, tesorero y secretario. Para seleccionarlo disponemos de cuatro candidatos: Arturo, Basilio, Carlos y David. ¿Cuántos comités diferentes se pueden elegir entre los cuatro candidatos? Ejemplo: que Arturo sea presidente, Carlos sea tesorero y David sea secretario.

▷ El ejemplo del enunciado será: ACD. El cargo lo indicamos por la colocación de los miembros: el primero es el presidente, el segundo el tesorero, el tercero el secretario.

Tenemos 4 elementos (los candidatos) que hay que elegir en grupos de 3. Importa el orden y no hay repeticiones: son variaciones de 4 elementos en grupos de 3.

$V_{4,3} = 4\cdot 3\cdot 2 = 24$ comités diferentes.

Prob.14 Un niño tiene doce cartas: 9 de ellas son los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9. Las tres restantes son las figuras: sota, caballo y rey. ¿De cuantas maneras se pueden alinear cuatro de las doce cartas, con la condición de que siempre estén seleccionadas las tres figuras? Ejemplo: sota, caballo, rey, 1.

▷ Tenemos que seleccionar 4 cartas: tres figuras (F) y una carta normal (X), así: $F_1F_2F_3X$, y ver después las diferentes formas en que se pueden ordenar.

Las figuras son siempre las mismas, pero para el lugar X hay 9 cartas posibles. En total hay 9 maneras de seleccionar las 4 cartas.

Para cada una de esas maneras, las posibles formas de alinearlas serán las formas de ordenarlas todas: $P_4 = 4! = 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 24$ formas.

El número total será: $N = 24\times 9 = 216$ maneras de alinear las 4 cartas.

Prob.15 ¿Cuántos números de cinco cifras pueden formarse utilizando los dígitos 1, 2, 4, 6 y 8, si cada uno de ellos debe contener exactamente dos ochos? Ejemplo: 88124.

▷ Los números serán de la forma $88X_1X_2X_3$, siendo X_i uno cualquiera de los 1, 2, 4, 6 (con repetición) y pudiendo ocupar cualquiera de los 5 elementos cualquier posición.

Veamos primero las maneras de seleccionar los 5 elementos y después cómo ordenarlos.

Para los X_i tenemos 4 dígitos (1, 2, 4 6) para colocar en 3 posiciones. El orden es importante y se pueden repetir: son variaciones con repetición, $VR_{4,3} = 4^3 = 64$ maneras.

Con una selección hecha de los X_i , las formas de colocar los 8 y las X_i serán, puesto que son 5 elementos (dos 8 y tres X_i), importa el orden y con repeticiones:

$PR_5^{2,3} = \dfrac{5!}{2!\cdot 3!} = \dfrac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{2\cdot 1\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = \dfrac{5\cdot 4}{2\cdot 1} = 10$ formas para cada selección de los 5 elementos.

En total habrá: $N = 64\times 10 = 640$ números de cinco cifras.

Distribución binomial

Experimentos binomiales

Un experimento aleatorio en el que solo puede haber dos resultados se denomina binomial. A uno de los dos posibles resultados lo llamaremos ‘éxito’ y al otro le llamaremos ‘fracaso’.

Ejemplos de experimentos aleatorios binomiales son:

Lanzar una moneda y ver si sale cara o cruz, Lanzar un dado y ver si sale un valor mayor de 4 o no, extraer una carta de una baraja y ver si es de oros o no, producir bombillas y ver si son defectuosas o no, jugar un partido de fútbol y ver si gana el equipo local o no, comprar un bolígrafo y ver si nos dura más de un mes o no. La variedad de experimentos binomiales es ilimitada.

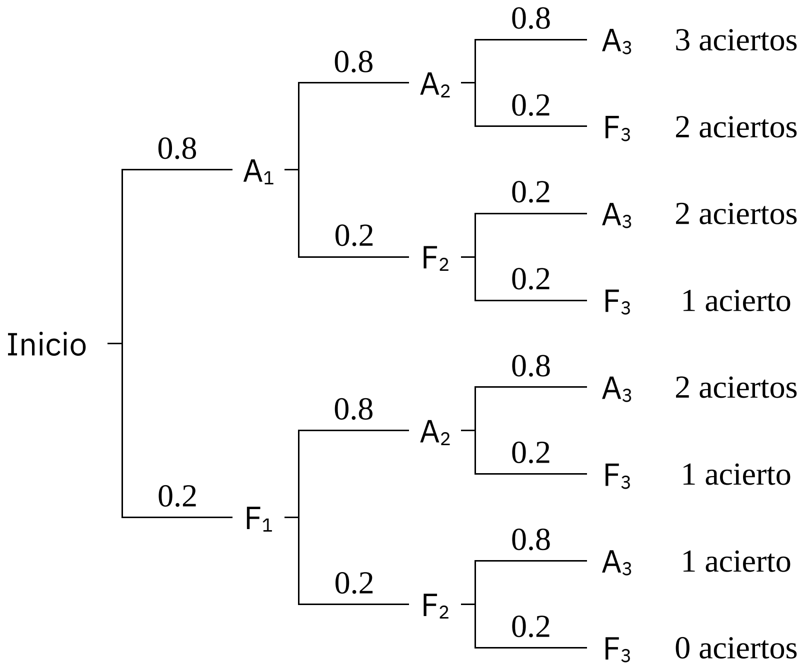
En el problema típico tendremos una situación binomial en la que el resultado ‘éxito’ tendrá una probabilidad p y el resultado ‘fracaso’ una probabilidad q (como no hay más opciones: $q=1-p$). Si se repite N veces el experimento, calcularemos la probabilidad de que ‘éxito’ ocurra X veces.

Veamos un ejemplo:

Un jugador de baloncesto tiene una estadística de acierto en los lanzamientos de tiro libre del 80%. Si lanza tres tiros libres, ¿Cuál es la probabilidad de que acierte solo 2 de los 3 tiros?

Vamos a hacer un diagrama de árbol de la situación. Llamaremos A a acertar (canasta) y F a fallar.

1ʳ tiro 2º tiro 3ʳ tiro Nos interesan solo 2 aciertos



$P(A_1A_2)=0.8\times0.8\times0.2=0.128$

$P(A_1A_3)=0.8\times0.2\times0.8=0.128$

$P(A_2A_3)=0.2\times0.8\times0.8=0.128$

$$P(X=2 \text{ aciertos de } 3)=P(A_1A_2)+P(A_1A_3)+P(A_2A_3)=0.128+0.128+0.128=0.384=38.4\%$$

Puesto que cada uno de los sumandos es de la forma $P(A_1A_2)=P(A_1A_3)=P(A_2A_3)=0.8^2\times0.2$ se pudo haber escrito así: $P(X=2 \text{ aciertos de } 3)=3\times0.8^2\times0.2=3\times0.8^2\times(1-0.8)^{3-2}$

El factor 3 que aparece se debe a que, con 3 intentos, las formas de conseguir 2 aciertos son 3.

Son estas: A_1A_2, A_1A_3, A_2A_3. Se escribe así: $\binom{3}{2}$ y se le llama número combinatorio. Da 3.

Como queremos 2 aciertos, la probabilidad de acierto (0.8) está al cuadrado y la de fallo $(1-0.8)$ está elevada a $3-2$ que será el número de fallos (solo uno) al hacer 3 lanzamientos.

Tal y como hemos visto, la probabilidad de tener 2 aciertos en 3 lanzamientos, si la probabilidad de acertar en un solo lanzamiento es 0.8, se calcula así: $\mathrm{P}\left(\mathrm{X}=2 \text{ éxitos}\right)=\binom{3}{2}\cdot 0.8^{2}\cdot(1-0.8)^{3-2}$

Las probabilidades de conseguir 0 aciertos, 1 acierto, 2 aciertos o 3 aciertos serán estas:

$$\mathrm{P}\left(\mathrm{X}=0 \text{ éxitos}\right)=\binom{3}{0}\cdot 0.8^{0}\cdot(1-0.8)^{3-0}=0.008 \qquad \left[\binom{3}{0}=1 \text{ Solo hay una forma de hacer 0 aciertos}\right]$$

$$\mathrm{P}\left(\mathrm{X}=1 \text{ éxitos}\right)=\binom{3}{1}\cdot 0.8^{1}\cdot(1-0.8)^{3-1}=0.096 \qquad \left[\binom{3}{1}=3 \text{ Hay 3 formas de hacer 1 solo acierto}\right]$$

$$\mathrm{P}\left(\mathrm{X}=2 \text{ éxitos}\right)=\binom{3}{2}\cdot 0.8^{2}\cdot(1-0.8)^{3-2}=0.384 \qquad \left[\binom{3}{2}=3 \text{ Hay 3 formas de hacer 2 aciertos}\right]$$

$$\mathrm{P}\left(\mathrm{X}=3 \text{ éxitos}\right)=\binom{3}{3}\cdot 0.8^{3}\cdot(1-0.8)^{3-3}=0.512 \qquad \left[\binom{3}{3}=1 \text{ Solo hay una forma de hacer 3 aciertos}\right]$$

Por supuesto, estas probabilidades suman 1 pues representan todas las situaciones posibles.

Decimos que estas probabilidades de la variable estadística X están asociadas a una distribución binomial con $\mathrm{N}=3$ y $p=0.8$ (la probabilidad de éxito) lo que se escribe así: $\mathrm{X}\sim\mathrm{B}\left(3,\, 0.8\right)$.

La probabilidad de cada posible valor de la variable X es: $\mathrm{P}\left(\mathrm{X}=k \text{ éxitos}\right)=\binom{3}{k}\cdot 0.8^{k}\cdot(1-0.8)^{3-k}$

Fórmula de la probabilidad binomial

Consideremos una variable aleatoria X que sigue una distribución binomial: $\boxed{\mathrm{X}\sim\mathrm{B}\left(\mathrm{N}, p\right)}$

Esto supone que hacemos N experimentos binomiales en los que la probabilidad de 'éxito' es *p* y la probabilidad de 'fracaso' es $1-p$. La probabilidad de tener *k* éxitos, es decir, que $\mathrm{X}=k$ éxitos es:

$$\boxed{\mathrm{P}\left(\mathrm{X}=k \text{ éxitos}\right)=\binom{\mathrm{N}}{k}\cdot p^{k}\cdot(1-p)^{\mathrm{N}-k}}$$

El valor del número combinatorio, también llamado coeficiente binomial, viene dado por:

$$\boxed{\binom{\mathrm{N}}{k}=\frac{\mathrm{N}!}{k!\cdot\left(\mathrm{N}-k\right)!}}$$

Se obtiene del estudio de una rama de las Matemáticas que se llama Combinatoria. Sin saber cómo ha sido obtenida esta expresión, ya se pueden hacer cálculos de la distribución binomial. Las dos fórmulas que aparecen encuadradas es todo lo que se necesita para resolver los problemas.

Pero es recomendable tener una idea básica de los conceptos que llevan hasta esa expresión. En las dos páginas siguientes te explico los conceptos clave de la Combinatoria y cómo calcular números combinatorios con la calculadora.

Combinatoria

1. **Permutaciones**

Se llaman permutaciones a las diferentes formas de reordenar todos los elementos de un conjunto.

Si queremos reordenar todos los elementos de un conjunto de *x* elementos, podemos colocar en la primera posición uno cualquiera de los *x* elementos. Una vez colocado, para la segunda posición tenemos $x-1$ posibilidades. Colocado este, para la tercera posición tenemos $x-2$ posibilidades.

Si seguimos así, para la penúltima posición quedan 2 posibilidades y para la última solo 1.

En total, para reordenar *x* elementos, tenemos: $x\cdot(x-1)\cdot(x-2)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1$ posibilidades.

Ese valor, las permutaciones de *x* elementos, se llama '*x* factorial' y se escribe: $x!$

Por ejemplo, para reordenar los elementos `ABCD` tenemos $4!=4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=24$ posibilidades:

`ABCD, ABDC, ACBD, ACDB, ADBC, ADCB, BACD, BADC, BCAD, BCDA, BDAC, BDCA, CABD, CADB, CBAD, CBDA, CDAB, CDBA, DABC, DACB, DBAC, DBCA, DCAB, DCBA.`

2. **Variaciones**

Si no queremos reordenarlos todos, sino solo *z* de los *x* elementos, tendremos x (que son $x-0$) elementos posibles para colocar en la primera posición, $x-1$ elementos posibles para colocar en la segunda posición, y seguiríamos así hasta la posición *z*. Para ella tendríamos $x-(z-1)=x-z+1$ elementos posibles.

Para reordenar *z* elementos de un total de *x*, tenemos: $x\cdot(x-1)\cdot(x-2)\cdot\ldots\cdot(x-z+1)$ posibilidades.

Este valor se llama 'variaciones de *x* elementos tomados en grupos de *z* elementos' y se escribe:

$$\mathrm{V}_{x,z}=x\cdot(x-1)\cdot(x-2)\cdot\ldots\cdot(x-z+1)=\frac{x\cdot(x-1)\cdot(x-2)\cdot\ldots\cdot(x-z+1)\cdot(x-z)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1}{(x-z)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1}=\frac{x!}{(x-z)!}$$

Por ejemplo, para hacer grupos de 2 elementos de un conjunto de 3 elementos `ABC`, tenemos:

$$\mathrm{V}_{3,2}=\frac{3!}{(3-2)!}=\frac{3\cdot 2\cdot 1}{1}=6$$ que son estas: `AB, BA, AC, CA, BC, CB`

3. **Combinaciones**

Se llaman combinaciones de *x* elementos en grupos de z elementos a las formas de elegirlos sin que importe el orden, es decir que $\mathrm{AB}=\mathrm{BA}$. Son como las variaciones pero, para que no importe el orden, las $z!$ maneras de colocar una de las variaciones serán equivalentes. Por eso, tenemos:

$$\mathrm{C}_{x,z}\equiv\binom{x}{z}=\frac{\mathrm{V}_{x,z}}{z!}=\frac{x!}{z!\cdot(x-z)!}$$ que es la fórmula para calcular números combinatorios.

Las combinaciones de 3 elementos en grupos de 2 son: $\mathrm{C}_{3,2}\equiv\binom{3}{2}=\frac{3!}{2!\cdot(3-2)!}=\frac{3\cdot 2\cdot 1}{2\cdot 1\cdot 1}=3$

Con los elementos `ABC` serían estas tres: `AB, AC, BC`. Con $\mathrm{A_1A_2A_3}$ serían: $\mathrm{A_1A_2}$, $\mathrm{A_1A_3}$, $\mathrm{A_2A_3}$.

Veamos otro ejemplo.

Las combinaciones de 6 elementos en grupos de 3 son: $\mathrm{C}_{6,3}\equiv\binom{6}{3}=\frac{6!}{3!\cdot(6-3)!}=\frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{3\cdot 2\cdot 1\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=20$

Si los 6 elementos son `ABCDEF`, las 20 combinaciones que existen tomándolos de 3 en 3 son:

`ABC, ABD, ABE, ABF, ACD, ACE, ACF, ADE, ADF, AEF,`
`BCD, BCE, BCF, BDE, BDF, BEF, CDE, CDF, CEF, DEF`

4. **Uso de la calculadora en cálculos combinatorios**

Las calculadoras científicas disponen de estas 3 opciones: $\boxed{x!}$ $\boxed{\text{nPr}}$ $\boxed{\text{nCr}}$ para estos cálculos.

Las tres son funciones secundarias, de manera que antes se debe pulsar la tecla $\boxed{\text{SHIFT}}$.
Busca en tu calculadora dónde están esas 3 opciones, a continuación las usaremos.
(Cualquier calculadora científica valdrá, las teclas que indicaré son las de cualquier modelo CASIO).

La opción $\boxed{x!}$ calcula factoriales. Se introduce el número, se pulsa $\boxed{x!}$ y después $\boxed{=}$.

Cálculo de $10!$	Pulsa: $\boxed{1}$ $\boxed{0}$ $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{x^{-1}}$ $\boxed{=}$	10! 3628800
Cálculo de $52!$	Pulsa: $\boxed{5}$ $\boxed{2}$ $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{x^{-1}}$ $\boxed{=}$	52! 8.065817517×10^67

Así pues: $10! = 3628800$ y $52! = 8{,}065817517 \times 10^{67}$

La opción $\boxed{\text{nPr}}$ calcula variaciones. Se introduce el número de elementos *n*, se pulsa $\boxed{\text{nPr}}$, se pone el número de elementos de los grupos (la calculadora lo llama *r*) y por último se pulsa $\boxed{=}$.

Esta forma de escribirlo se debe a que, en los Estados Unidos de Norteamérica, a las variaciones se les llama permutaciones parciales. La notación que usan es: ${}_nP_k$ que es lo mismo que: $V_{n,k}$.

Cálculo de $V_{12,7}$	Pulsa: $\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{7}$ $\boxed{=}$	12P7 3991680
Cálculo de $V_{30,9}$	Pulsa: $\boxed{3}$ $\boxed{0}$ $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{9}$ $\boxed{=}$	30P9 5.191778592×10^12

Así pues: $V_{12,7} = 3991680$ y $V_{30,9} = 5{,}191778592 \times 10^{12}$

La opción $\boxed{\text{nCr}}$ calcula combinaciones. Se introduce el número de elementos *n*, se pulsa $\boxed{\text{nCr}}$, se pone el número de elementos de los grupos (la calculadora lo llama *r*) y por último se pulsa $\boxed{=}$.

En los Estados Unidos de Norteamérica, las combinaciones se escriben así: ${}_nC_k$ idéntico a: $C_{n,k}$.

Cálculo de $C_{42,8}$	Pulsa: $\boxed{4}$ $\boxed{2}$ $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{8}$ $\boxed{=}$	42C8 118030185
Cálculo de $C_{70,9}$	Pulsa: $\boxed{7}$ $\boxed{0}$ $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{9}$ $\boxed{=}$	70C9 6.503352856×10^10

Así pues: $C_{42,8} = \binom{42}{8} = 118030185$ y $C_{70,9} = \binom{70}{9} = 6{,}503352856 \times 10^{10}$.

Es importante saber que $0! = 1$ (compruébalo). Solo hay una forma de ordenar 0 elementos: $\varnothing$

E.01 *Lanzamos un dado de seis caras 5 veces. Calcula la probabilidad de obtener 2 cuatros.*

Es una distribución binomial. $N=5$, 'éxito' es 'sacar un 4' con probabilidad 1/6.

$$P(X=2)=\binom{5}{2}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\left(1-\frac{1}{6}\right)^{5-2}=\frac{5!}{2!\cdot 3!}\cdot\frac{1}{6^2}\cdot\frac{5^3}{6^3}=10\cdot\frac{1}{36}\cdot\frac{125}{216}=0.16075=\boxed{16.08\%}$$

E.02 *Lanzamos un dado de seis caras 8 veces. Calcula la probabilidad de obtener 3 seises.*

Es una distribución binomial. $N=8$, 'éxito' es 'sacar un 6' con probabilidad 1/6.

$$P(X=3)=\binom{8}{3}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^3\cdot\left(1-\frac{1}{6}\right)^{8-3}=\frac{8!}{3!\cdot 5!}\cdot\frac{1}{6^3}\cdot\frac{5^5}{6^5}=56\cdot\frac{1}{216}\cdot\frac{3125}{7776}=0.10419=\boxed{10.42\%}$$

E.03 *Lanzamos una moneda 20 veces. Calcula la probabilidad de obtener 10 caras.*

Es una distribución binomial. $N=20$, 'éxito' es 'sacar cara' con probabilidad 1/2.

$$P(X=10)=\binom{20}{10}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)^{20-10}=\frac{20!}{10!\cdot 10!}\cdot\frac{1}{2^{10}}\cdot\frac{1}{2^{10}}=0.17619=\boxed{17.62\%}$$

E.04 *Una bolsa tiene 6 bolas blancas y 8 bolas negras. Sacamos 5 bolas con reemplazamiento. Calcula qué es más probable, sacar 2 bolas blancas o sacar 3 bolas blancas.*

Es una distribución binomial. $N=5$, 'éxito' es 'sacar bola blanca' con probabilidad $\frac{6}{14}=\frac{3}{7}$.

$$P(X=2)=\binom{5}{2}\cdot\left(\frac{3}{7}\right)^2\cdot\left(1-\frac{3}{7}\right)^{5-2}=\frac{5!}{2!\cdot 3!}\cdot\frac{3^2}{7^2}\cdot\frac{4^3}{7^3}=10\cdot\frac{9}{49}\cdot\frac{64}{343}=0.34271=34.27\%$$

$$P(X=3)=\binom{5}{3}\cdot\left(\frac{3}{7}\right)^3\cdot\left(1-\frac{3}{7}\right)^{5-3}=\frac{5!}{3!\cdot 2!}\cdot\frac{3^3}{7^3}\cdot\frac{4^2}{7^2}=10\cdot\frac{27}{343}\cdot\frac{16}{49}=0.25703=25.70\%$$

$\boxed{\text{Es más probable sacar 2 bolas blancas que sacar 3 bolas blancas.}}$

E.05 *Una empresa produce memorias flash. La probabilidad de que llegue al mercado una memoria flash que no funciona bien es del 0.1%. Si compramos 5 memorias flash ¿qué probabilidad hay de que todas funcionen bien?*

Es una distribución binomial. $N=5$, 'éxito' es 'funcionar bien' con probabilidad 99.9%.

$$P(X=5)=\binom{5}{5}\cdot(0.999)^5\cdot(1-0.999)^0=\frac{5!}{5!\cdot 0!}\cdot 0.999^5\cdot 1=0.99501=\boxed{99.50\%}$$

E.06 *Una máquina produce 12 piezas defectuosas de cada 1000 fabricadas. Calcula la probabilidad de que, en 40 piezas, haya: a) Una sola pieza defectuosa, b) Ninguna defectuosa.*

Es una distribución binomial. $N=40$, 'éxito' es 'ser defectuosa' con probabilidad 0.012.

a) $P(X=1)=\binom{40}{1}\cdot(0.012)^1\cdot(1-0.012)^{39}=40\cdot 0.012\cdot 0.988^{39}=0.29975=\boxed{29.98\%}$

b) $P(X=0)=\binom{40}{0}\cdot(0.012)^0\cdot(1-0.012)^{40}=1\cdot 1\cdot 0.988^{40}=0.61699=\boxed{61.70\%}$

E.07 *En cierta facultad solo se licencian el 40% de las personas que se matricularon el primer año. Si elegimos 10 estudiantes al azar, calcula la probabilidad de que: a) Ninguno se licencie, b) Se licencien todos, c) Solo se licencie uno de los 10.*

Es una distribución binomial. $N=10$, 'éxito' es 'licenciarse' con probabilidad 0.4.

a) $P(X=0)=\binom{10}{0}\cdot(0.4)^0\cdot(1-0.4)^{10}=1\cdot1\cdot0.6^{10}=0.006047=\boxed{0.60\%}$

b) $P(X=10)=\binom{10}{10}\cdot(0.4)^{10}\cdot(1-0.4)^0=1\cdot0.4^{10}\cdot1=0.000105=\boxed{0.01\%}$

c) $P(X=1)=\binom{10}{1}\cdot(0.4)^1\cdot(1-0.4)^9=10\cdot0.4\cdot0.6^9=0.04031=\boxed{4.03\%}$

E.08 *En una clase de 20 alumnos cada alumno falta a clase el 4% de los días. Calcula la probabilidad de que un día de clase: a) No falte ninguno, b) Falten menos de 3 alumnos, c) Falte un único alumno.*

Es una distribución binomial. $N=20$, 'éxito' es 'faltar a clase' con probabilidad 0.04.

a) $P(X=0)=\binom{20}{0}\cdot(0.04)^0\cdot(1-0.04)^{20}=1\cdot1\cdot0.96^{20}=0.44200=\boxed{44.20\%}$

b) $P(X<3)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)=$

$$=\binom{20}{0}\cdot(0.04)^0\cdot(0.96)^{20}+\binom{20}{1}\cdot(0.04)^1\cdot(0.96)^{19}+\binom{20}{2}\cdot(0.04)^2\cdot(0.96)^{18}=$$

$$=1\cdot1\cdot0.96^{20}+20\cdot0.04\cdot0.96^{19}+190\cdot0.04^2\cdot0.96^{18}=0.95614=\boxed{95.61\%}$$

c) $P(X=1)=\binom{20}{1}\cdot(0.04)^1\cdot(1-0.04)^{19}=20\cdot0.04\cdot0.96^{19}=0.36834=\boxed{36.83\%}$

E.09 *En un tipo de gatos la probabilidad de que nazca una hembra es del 56%. Una gata ha tenido 5 crías. Calcula la probabilidad de que: a) Sean 3 hembras, b) Sean al menos 2 hembras.*

Es una distribución binomial. $N=5$, 'éxito' es 'ser hembra' con probabilidad 0.56.

a) $P(X=3)=\binom{5}{3}\cdot(0.56)^3\cdot(1-0.56)^2=10\cdot0.56^3\cdot0.44^2=0.33999=\boxed{34.00\%}$

b) $P(X\ge2)=P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)=$

$$\{\text{Requerirá menos cálculos si lo hacemos de la siguiente manera}\}$$

$$=1-\left[P(X=0)+P(X=1)\right]=$$

$$=1-\left[\binom{5}{0}\cdot(0.56)^0\cdot(1-0.56)^5+\binom{5}{1}\cdot(0.56)^1\cdot(1-0.56)^4\right]=$$

$$=1-\left[1\cdot1\cdot0.44^5+5\cdot0.56\cdot0.44^4\right]=$$

$$=1-\left[0.0164916224+0.104946688\right]=$$

$$=0.87856=\boxed{87.86\%}$$

E.10 *El 20% de los boletos de una rifa tienen premio. Si compramos 4 boletos, calcula la probabilidad de que tengamos, como mucho, 2 boletos premiados.*

Es una distribución binomial. $N=4$, 'éxito' es 'tener premio' con probabilidad 0.20.

$$P(X\le 2)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)=$$

$$\{\text{Requerirá menos cálculos si lo hacemos de la siguiente manera}\}$$

$$=1-\left[P(X=3)+P(X=4)\right]=$$

$$=1-\left[\binom{4}{3}\cdot(0.2)^3\cdot(1-0.2)^1+\binom{4}{4}\cdot(0.2)^4\cdot(1-0.2)^0\right]=$$

$$=1-\left[4\cdot 0.2^3\cdot 0.8+1\cdot 0.2^4\cdot 1\right]=$$

$$=1-\left[0.0256+0.0016\right]=$$

$$=0.9728=\boxed{97.28\%}$$

E.11 *La probabilidad de que un esquiador principiante se caiga en la pista es 0.4. Si intenta esquiar 5 veces, calcula la probabilidad de que se caiga al menos 3 veces.*

Es una distribución binomial. $N=5$, 'éxito' es 'caer' con probabilidad 0.4.

$$P(X\ge 3)=P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)=$$

$$=\binom{5}{3}\cdot(0.4)^3\cdot(1-0.4)^2+\binom{5}{4}\cdot(0.4)^4\cdot(1-0.4)^1+\binom{5}{5}\cdot(0.4)^5\cdot(1-0.4)^0=$$

$$=10\cdot 0.4^3\cdot 0.6^2+5\cdot 0.4^4\cdot 0.6+1\cdot 0.4^5\cdot 1=$$

$$=0.2304+0.0768+0.01024=0.31744=\boxed{31.74\%}$$

E.12 *En una zona de cultivo de pimientos de Padrón el 85% de ellos no son picantes. Si elegimos 8 pimientos de esa zona, calcula la probabilidad de que: a) Todos sean no picantes, b) Más de 6 sean no picantes, c) Al menos la mitad sean no picantes.*

Es una distribución binomial. $N=8$, 'éxito' es 'ser no picante' con probabilidad 0.85.

a) $P(X=8)=\binom{8}{8}\cdot(0.85)^8\cdot(1-0.85)^0=1\cdot 0.85^8\cdot 1=0.27249=\boxed{27.25\%}$

b) $P(X>6)=P(X=7)+P(X=8)=$

$$=\binom{8}{7}\cdot(0.85)^7\cdot(1-0.85)^1+\binom{8}{8}\cdot(0.85)^8\cdot(1-0.85)^0=$$

$$=8\cdot 0.85^7\cdot 0.15+1\cdot 0.85^8\cdot 1=0.65718=\boxed{65.72\%}$$

c) $P(X\ge 4)=P(X=4)+P(X=5)+P(X=6)+P(X=7)+P(X=8)=$

$$=\binom{8}{4}\cdot 0.85^4\cdot 0.15^4+\binom{8}{5}\cdot 0.85^5\cdot 0.15^3+\binom{8}{6}\cdot 0.85^6\cdot 0.15^2+$$

$$+\binom{8}{7}\cdot 0.85^7\cdot 0.15^1+\binom{8}{8}\cdot 0.85^8\cdot 0.15^0=$$

$$=0.018499+0.08386+0.237604+0.384693+0.272491=$$

$$=0.997147=\boxed{99.71\%}$$

E.13 *Se lanza una moneda 4 veces. Calcula la probabilidad de que salgan más caras que cruces.*

Es una distribución binomial. $N=4$, 'éxito' es 'salir cara' con probabilidad 0.5.

$$P(X>2)=P(X=3)+P(X=4)=$$
$$=\binom{4}{3}\cdot(0.5)^3\cdot(1-0.5)^1+\binom{4}{4}\cdot(0.5)^4\cdot(1-0.5)^0=$$
$$=4\cdot 0.5^3\cdot 0.5^1+1\cdot 0.5^4\cdot 1=4\cdot 0.5^4+0.5^4=5\cdot 0.5^4=0.3125=\boxed{31.25\%}$$

E.14 *En un bombo tenemos 10 bolas idénticas numeradas del 0 al 9 y tras cada extracción devolvemos la bola al bombo. Calcula la probabilidad de que: a) Con 5 extracciones, salga el número 7 menos de tres veces, b) Con 10 extracciones, salga el número 7 al menos dos veces.*

Es una distribución binomial. 'Éxito' es 'salir un 7' con probabilidad 0.1. $N_a=5,\ N_b=10$.

a) $P(X<3)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)=$
$$=\binom{5}{0}\cdot(0.1)^0\cdot(1-0.1)^5+\binom{5}{1}\cdot(0.1)^1\cdot(1-0.1)^4+\binom{5}{2}\cdot(0.1)^2\cdot(1-0.1)^3=$$
$$=1\cdot 1\cdot 0.9^5+5\cdot 0.1\cdot 0.9^4+10\cdot 0.1^2\cdot 0.9^3=0.99144=\boxed{99.14\%}$$

b) $P(X\geq 2)=P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)+\ldots+P(X=8)+P(X=9)+p(X=10)=$

{Requerirá menos cálculos si lo hacemos de la siguiente manera }

$$=1-\left[P(X=0)+P(X=1)\right]=1-\left[\binom{10}{0}\cdot(0.1)^0\cdot(1-0.1)^{10}+\binom{10}{1}\cdot(0.1)^1\cdot(1-0.1)^9\right]=$$
$$=1-\left[1\cdot 1\cdot 0.9^{10}+10\cdot 0.1\cdot 0.9^9\right]=1-[0.7361]=0.2639=\boxed{26.39\%}$$

E.15 *En unas pruebas de alcoholemia se ha visto que el 5% de los conductores dan positivo, que el 10% de los conductores no llevan puesto el cinturón de seguridad y que ambas infracciones son independientes. En un control se para a 5 conductores al azar. Calcula la probabilidad de que: a) Exactamente tres conductores hayan cometido alguna de las dos infracciones, b) Al menos uno de los conductores haya cometido alguna de las dos infracciones.*

Llamemos A al suceso 'dar positivo' y B al suceso 'no llevar cinturón de seguridad'.

La probabilidad de que un conductor haya cometido la infracción A o la infracción B es:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\ldots\{\text{independientes}\}\ldots=P(A)+P(B)-P(A)\cdot P(B)=$$
$$=5\%+10\%-5\%\cdot 10\%=14.5\%=0.145$$

Si en el control paran a 5 conductores para ver si han cometido alguna infracción, se trata de una distribución binomial. 'Éxito' es 'cometió alguna infracción' con $p=0.145$ para $N=5$.

a) $P(X=3)=\binom{5}{3}\cdot(0.145)^3\cdot(1-0.145)^2=10\cdot 0.145^3\cdot 0.855^2=0.02229=\boxed{2.23\%}$

b) $P(X\geq 1)=P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)=$

{Requerirá menos cálculos si lo hacemos de la siguiente manera }

$$=1-P(X=0)=1-\binom{5}{0}\cdot(0.145)^0\cdot(1-0.145)^5=$$
$$=1-1\cdot 1\cdot 0.855^5=1-0.45691=0.54309=\boxed{54.31\%}$$

Distribución binomial

Experimentos binomiales

Un experimento aleatorio en el que solo puede haber dos resultados se denomina binomial. A uno de los dos posibles resultados lo llamaremos 'éxito' y al otro le llamaremos 'fracaso'.

Ejemplos de experimentos aleatorios binomiales son:

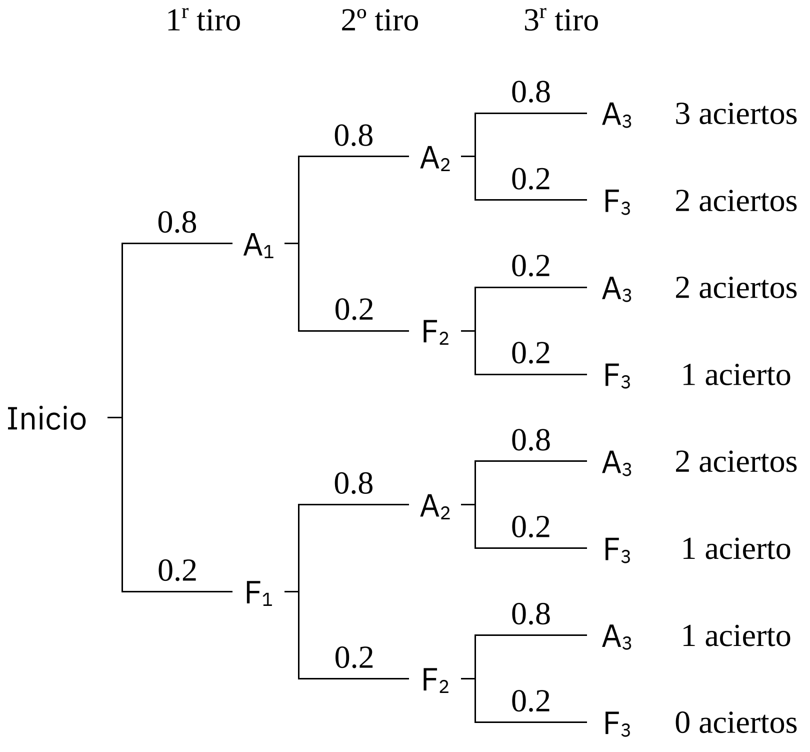
Lanzar una moneda y ver si sale cara o cruz, Lanzar un dado y ver si sale un valor mayor de 4 o no, extraer una carta de una baraja y ver si es de oros o no, producir bombillas y ver si son defectuosas o no, jugar un partido de fútbol y ver si gana el equipo local o no, comprar un bolígrafo y ver si nos dura más de un mes o no. La variedad de experimentos binomiales es ilimitada.

En el problema típico tendremos una situación binomial en la que el resultado 'éxito' tendrá una probabilidad p y el resultado 'fracaso' una probabilidad q (como no hay más opciones: $q=1-p$). Si se repite N veces el experimento, calcularemos la probabilidad de que 'éxito' ocurra X veces.

Veamos un ejemplo:

Un jugador de baloncesto tiene una estadística de acierto en los lanzamientos de tiro libre del 80%. Si lanza tres tiros libres, ¿Cuál es la probabilidad de que acierte solo 2 de los 3 tiros?

Vamos a hacer un diagrama de árbol de la situación. Llamaremos A a acertar (canasta) y F a fallar.



$\mathrm{P}(\mathrm{A_1A_2}) = 0.8\times0.8\times0.2 = 0.128$

$\mathrm{P}(\mathrm{A_1A_3}) = 0.8\times0.2\times0.8 = 0.128$

$\mathrm{P}(\mathrm{A_2A_3}) = 0.2\times0.8\times0.8 = 0.128$

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}=2 \text{ aciertos de } 3) = \mathrm{P}(\mathrm{A_1A_2}) + \mathrm{P}(\mathrm{A_1A_3}) + \mathrm{P}(\mathrm{A_2A_3}) = 0.128+0.128+0.128 = 0.384 = 38.4\%$$

Puesto que cada uno de los sumandos es de la forma $\mathrm{P}(\mathrm{A_1A_2}) = \mathrm{P}(\mathrm{A_1A_3}) = \mathrm{P}(\mathrm{A_2A_3}) = 0.8^2\times0.2$ se pudo haber escrito así: $\mathrm{P}(\mathrm{X}=2 \text{ aciertos de } 3) = 3\times0.8^2\times0.2 = 3\times0.8^2\times(1-0.8)^{3-2}$

El factor 3 que aparece se debe a que, con 3 intentos, las formas de conseguir 2 aciertos son 3.

Son estas: $\mathrm{A_1A_2}$, $\mathrm{A_1A_3}$, $\mathrm{A_2A_3}$. Se escribe así: $\binom{3}{2}$ y se le llama número combinatorio. Da 3.

Como queremos 2 aciertos, la probabilidad de acierto (0.8) está al cuadrado y la de fallo $(1-0.8)$ está elevada a $3-2$ que será el número de fallos (solo uno) al hacer 3 lanzamientos.

Tal y como hemos visto, la probabilidad de tener 2 aciertos en 3 lanzamientos, si la probabilidad de acertar en un solo lanzamiento es 0.8, se calcula así: $\mathrm{P}(\mathrm{X}=2 \text{ éxitos})=\binom{3}{2}\cdot 0.8^{2}\cdot(1-0.8)^{3-2}$

Las probabilidades de conseguir 0 aciertos, 1 acierto, 2 aciertos o 3 aciertos serán estas:

$\mathrm{P}(\mathrm{X}=0 \text{ éxitos})=\binom{3}{0}\cdot 0.8^{0}\cdot(1-0.8)^{3-0}=0.008$ $\left[\binom{3}{0}=1 \text{ Solo hay una forma de hacer 0 aciertos}\right]$

$\mathrm{P}(\mathrm{X}=1 \text{ éxitos})=\binom{3}{1}\cdot 0.8^{1}\cdot(1-0.8)^{3-1}=0.096$ $\left[\binom{3}{1}=3 \text{ Hay 3 formas de hacer 1 solo acierto}\right]$

$\mathrm{P}(\mathrm{X}=2 \text{ éxitos})=\binom{3}{2}\cdot 0.8^{2}\cdot(1-0.8)^{3-2}=0.384$ $\left[\binom{3}{2}=3 \text{ Hay 3 formas de hacer 2 aciertos}\right]$

$\mathrm{P}(\mathrm{X}=3 \text{ éxitos})=\binom{3}{3}\cdot 0.8^{3}\cdot(1-0.8)^{3-3}=0.512$ $\left[\binom{3}{3}=1 \text{ Solo hay una forma de hacer 3 aciertos}\right]$

Por supuesto, estas probabilidades suman 1 pues representan todas las situaciones posibles.

Decimos que estas probabilidades de la variable estadística X están asociadas a una distribución binomial con $\mathrm{N}=3$ y $p=0.8$ (la probabilidad de éxito) lo que se escribe así: $\mathrm{X}\sim\mathrm{B}(3,\ 0.8)$.

La probabilidad de cada posible valor de la variable X es: $\mathrm{P}(\mathrm{X}=k \text{ éxitos})=\binom{3}{k}\cdot 0.8^{k}\cdot(1-0.8)^{3-k}$

Fórmula de la probabilidad binomial

Consideremos una variable aleatoria X que sigue una distribución binomial: $\boxed{\mathrm{X}\sim\mathrm{B}(\mathrm{N}, p)}$

Esto supone que hacemos N experimentos binomiales en los que la probabilidad de 'éxito' es *p* y la probabilidad de 'fracaso' es $1-p$. La probabilidad de tener *k* éxitos, es decir, que $\mathrm{X}=k$ éxitos es:

$$\boxed{\mathrm{P}(\mathrm{X}=k \text{ éxitos})=\binom{\mathrm{N}}{k}\cdot p^{k}\cdot(1-p)^{\mathrm{N}-k}}$$

El valor del número combinatorio, también llamado coeficiente binomial, viene dado por:

$$\boxed{\binom{\mathrm{N}}{k}=\frac{\mathrm{N}!}{k!\cdot(\mathrm{N}-k)!}}$$

Se obtiene del estudio de una rama de las Matemáticas que se llama Combinatoria. Sin saber cómo ha sido obtenida esta expresión, ya se pueden hacer cálculos de la distribución binomial. Las dos fórmulas que aparecen encuadradas es todo lo que se necesita para resolver los problemas.

Pero es recomendable tener una idea básica de los conceptos que llevan hasta esa expresión. En las dos páginas siguientes te explico los conceptos clave de la Combinatoria y cómo calcular números combinatorios con la calculadora.

Combinatoria

1. **Permutaciones**

Se llaman permutaciones a las diferentes formas de reordenar todos los elementos de un conjunto.

Si queremos reordenar todos los elementos de un conjunto de *x* elementos, podemos colocar en la primera posición uno cualquiera de los *x* elementos. Una vez colocado, para la segunda posición tenemos $x-1$ posibilidades. Colocado este, para la tercera posición tenemos $x-2$ posibilidades.

Si seguimos así, para la penúltima posición quedan 2 posibilidades y para la última solo 1.

En total, para reordenar *x* elementos, tenemos: $x\cdot(x-1)\cdot(x-2)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1$ posibilidades.

Ese valor, las permutaciones de *x* elementos, se llama '*x* factorial' y se escribe: $x!$

Por ejemplo, para reordenar los elementos `ABCD` tenemos $4!=4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=24$ posibilidades:

`ABCD, ABDC, ACBD, ACDB, ADBC, ADCB, BACD, BADC, BCAD, BCDA, BDAC, BDCA, CABD, CADB, CBAD, CBDA, CDAB, CDBA, DABC, DACB, DBAC, DBCA, DCAB, DCBA.`

2. **Variaciones**

Si no queremos reordenarlos todos, sino solo *z* de los *x* elementos, tendremos x (que son $x-0$) elementos posibles para colocar en la primera posición, $x-1$ elementos posibles para colocar en la segunda posición, y seguiríamos así hasta la posición *z*. Para ella tendríamos $x-(z-1)=x-z+1$ elementos posibles.

Para reordenar *z* elementos de un total de *x*, tenemos: $x\cdot(x-1)\cdot(x-2)\cdot\ldots\cdot(x-z+1)$ posibilidades.

Este valor se llama 'variaciones de *x* elementos tomados en grupos de *z* elementos' y se escribe:

$$\mathrm{V}_{x,z}=x\cdot(x-1)\cdot(x-2)\cdot\ldots\cdot(x-z+1)=\frac{x\cdot(x-1)\cdot(x-2)\cdot\ldots\cdot(x-z+1)\cdot(x-z)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1}{(x-z)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1}=\frac{x!}{(x-z)!}$$

Por ejemplo, para hacer grupos de 2 elementos de un conjunto de 3 elementos `ABC`, tenemos:

$$\mathrm{V}_{3,2}=\frac{3!}{(3-2)!}=\frac{3\cdot 2\cdot 1}{1}=6$$ que son estas: `AB, BA, AC, CA, BC, CB`

3. **Combinaciones**

Se llaman combinaciones de *x* elementos en grupos de z elementos a las formas de elegirlos sin que importe el orden, es decir que $\mathrm{AB}=\mathrm{BA}$. Son como las variaciones pero, para que no importe el orden, las $z!$ maneras de colocar una de las variaciones serán equivalentes. Por eso, tenemos:

$$\mathrm{C}_{x,z}\equiv\binom{x}{z}=\frac{\mathrm{V}_{x,z}}{z!}=\frac{x!}{z!\cdot(x-z)!}$$ que es la fórmula para calcular números combinatorios.

Las combinaciones de 3 elementos en grupos de 2 son: $\mathrm{C}_{3,2}\equiv\binom{3}{2}=\frac{3!}{2!\cdot(3-2)!}=\frac{3\cdot 2\cdot 1}{2\cdot 1\cdot 1}=3$

Con los elementos `ABC` serían estas tres: `AB, AC, BC`. Con $\mathrm{A_1A_2A_3}$ serían: $\mathrm{A_1A_2}$, $\mathrm{A_1A_3}$, $\mathrm{A_2A_3}$.

Veamos otro ejemplo.

Las combinaciones de 6 elementos en grupos de 3 son: $\mathrm{C}_{6,3}\equiv\binom{6}{3}=\frac{6!}{3!\cdot(6-3)!}=\frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{3\cdot 2\cdot 1\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=20$

Si los 6 elementos son `ABCDEF`, las 20 combinaciones que existen tomándolos de 3 en 3 son:

```
ABC, ABD, ABE, ABF, ACD, ACE, ACF, ADE, ADF, AEF,
BCD, BCE, BCF, BDE, BDF, BEF, CDE, CDF, CEF, DEF
```

4. **Uso de la calculadora en cálculos combinatorios**

Las calculadoras científicas disponen de estas 3 opciones: $\boxed{x!}$ $\boxed{\text{nPr}}$ $\boxed{\text{nCr}}$ para estos cálculos.

Las tres son funciones secundarias, de manera que antes se debe pulsar la tecla $\boxed{\text{SHIFT}}$.
Busca en tu calculadora dónde están esas 3 opciones, a continuación las usaremos.
(Cualquier calculadora científica valdrá, las teclas que indicaré son las de cualquier modelo CASIO).

La opción $\boxed{x!}$ calcula factoriales. Se introduce el número, se pulsa $\boxed{x!}$ y después $\boxed{=}$.

Cálculo de $10!$	Pulsa: $\boxed{1}$ $\boxed{0}$ $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{x^{-1}}$ $\boxed{=}$	10! 3628800
Cálculo de $52!$	Pulsa: $\boxed{5}$ $\boxed{2}$ $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{x^{-1}}$ $\boxed{=}$	52! $8.065817517\times_{10}{}^{67}$

Así pues: $10! = 3628800$ y $52! = 8{,}065817517 \times 10^{67}$

La opción $\boxed{\text{nPr}}$ calcula variaciones. Se introduce el número de elementos *n*, se pulsa $\boxed{\text{nPr}}$, se pone el número de elementos de los grupos (la calculadora lo llama *r*) y por último se pulsa $\boxed{=}$.

Esta forma de escribirlo se debe a que, en los Estados Unidos de Norteamérica, a las variaciones se les llama permutaciones parciales. La notación que usan es: ${}_nP_k$ que es lo mismo que: $V_{n,k}$.

Cálculo de $V_{12,7}$	Pulsa: $\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{7}$ $\boxed{=}$	12P7 3991680
Cálculo de $V_{30,9}$	Pulsa: $\boxed{3}$ $\boxed{0}$ $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{9}$ $\boxed{=}$	30P9 $5.191778592\times_{10}{}^{12}$

Así pues: $V_{12,7} = 3991680$ y $V_{30,9} = 5{,}191778592 \times 10^{12}$

La opción $\boxed{\text{nCr}}$ calcula combinaciones. Se introduce el número de elementos *n*, se pulsa $\boxed{\text{nCr}}$, se pone el número de elementos de los grupos (la calculadora lo llama *r*) y por último se pulsa $\boxed{=}$.

En los Estados Unidos de Norteamérica, las combinaciones se escriben así: ${}_nC_k$ idéntico a: $C_{n,k}$.

Cálculo de $C_{42,8}$	Pulsa: $\boxed{4}$ $\boxed{2}$ $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{8}$ $\boxed{=}$	42C8 118030185
Cálculo de $C_{70,9}$	Pulsa: $\boxed{7}$ $\boxed{0}$ $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{9}$ $\boxed{=}$	70C9 $6.503352856\times_{10}{}^{10}$

Así pues: $C_{42,8} = \binom{42}{8} = 118030185$ y $C_{70,9} = \binom{70}{9} = 6{,}503352856 \times 10^{10}$.

Es importante saber que $0! = 1$ (compruébalo). Solo hay una forma de ordenar 0 elementos: $\varnothing$

E.01 *Lanzamos un dado de seis caras 5 veces. Calcula la probabilidad de obtener 2 cuatros.*

Es una distribución binomial. $N=5$, 'éxito' es 'sacar un 4' con probabilidad 1/6.

$$P(X=2)=\binom{5}{2}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\left(1-\frac{1}{6}\right)^{5-2}=\frac{5!}{2!\cdot 3!}\cdot\frac{1}{6^2}\cdot\frac{5^3}{6^3}=10\cdot\frac{1}{36}\cdot\frac{125}{216}=0.16075=\boxed{16.08\%}$$

E.02 *Lanzamos un dado de seis caras 8 veces. Calcula la probabilidad de obtener 3 seises.*

Es una distribución binomial. $N=8$, 'éxito' es 'sacar un 6' con probabilidad 1/6.

$$P(X=3)=\binom{8}{3}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^3\cdot\left(1-\frac{1}{6}\right)^{8-3}=\frac{8!}{3!\cdot 5!}\cdot\frac{1}{6^3}\cdot\frac{5^5}{6^5}=56\cdot\frac{1}{216}\cdot\frac{3125}{7776}=0.10419=\boxed{10.42\%}$$

E.03 *Lanzamos una moneda 20 veces. Calcula la probabilidad de obtener 10 caras.*

Es una distribución binomial. $N=20$, 'éxito' es 'sacar cara' con probabilidad 1/2.

$$P(X=10)=\binom{20}{10}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)^{20-10}=\frac{20!}{10!\cdot 10!}\cdot\frac{1}{2^{10}}\cdot\frac{1}{2^{10}}=0.17619=\boxed{17.62\%}$$

E.04 *Una bolsa tiene 6 bolas blancas y 8 bolas negras. Sacamos 5 bolas con reemplazamiento. Calcula qué es más probable, sacar 2 bolas blancas o sacar 3 bolas blancas.*

Es una distribución binomial. $N=5$, 'éxito' es 'sacar bola blanca' con probabilidad $\frac{6}{14}=\frac{3}{7}$.

$$P(X=2)=\binom{5}{2}\cdot\left(\frac{3}{7}\right)^2\cdot\left(1-\frac{3}{7}\right)^{5-2}=\frac{5!}{2!\cdot 3!}\cdot\frac{3^2}{7^2}\cdot\frac{4^3}{7^3}=10\cdot\frac{9}{49}\cdot\frac{64}{343}=0.34271=34.27\%$$

$$P(X=3)=\binom{5}{3}\cdot\left(\frac{3}{7}\right)^3\cdot\left(1-\frac{3}{7}\right)^{5-3}=\frac{5!}{3!\cdot 2!}\cdot\frac{3^3}{7^3}\cdot\frac{4^2}{7^2}=10\cdot\frac{27}{343}\cdot\frac{16}{49}=0.25703=25.70\%$$

$\boxed{\text{Es más probable sacar 2 bolas blancas que sacar 3 bolas blancas.}}$

E.05 *Una empresa produce memorias flash. La probabilidad de que llegue al mercado una memoria flash que no funciona bien es del 0.1%. Si compramos 5 memorias flash ¿qué probabilidad hay de que todas funcionen bien?*

Es una distribución binomial. $N=5$, 'éxito' es 'funcionar bien' con probabilidad 99.9%.

$$P(X=5)=\binom{5}{5}\cdot(0.999)^5\cdot(1-0.999)^0=\frac{5!}{5!\cdot 0!}\cdot 0.999^5\cdot 1=0.99501=\boxed{99.50\%}$$

E.06 *Una máquina produce 12 piezas defectuosas de cada 1000 fabricadas. Calcula la probabilidad de que, en 40 piezas, haya: a) Una sola pieza defectuosa, b) Ninguna defectuosa.*

Es una distribución binomial. $N=40$, 'éxito' es 'ser defectuosa' con probabilidad 0.012.

a) $P(X=1)=\binom{40}{1}\cdot(0.012)^1\cdot(1-0.012)^{39}=40\cdot 0.012\cdot 0.988^{39}=0.29975=\boxed{29.98\%}$

b) $P(X=0)=\binom{40}{0}\cdot(0.012)^0\cdot(1-0.012)^{40}=1\cdot 1\cdot 0.988^{40}=0.61699=\boxed{61.70\%}$

E.07 *En cierta facultad solo se licencian el 40% de las personas que se matricularon el primer año. Si elegimos 10 estudiantes al azar, calcula la probabilidad de que: a) Ninguno se licencie, b) Se licencien todos, c) Solo se licencie uno de los 10.*

Es una distribución binomial. $N=10$, 'éxito' es 'licenciarse' con probabilidad 0.4.

a) $P(X=0)=\binom{10}{0}\cdot(0.4)^0\cdot(1-0.4)^{10}=1\cdot 1\cdot 0.6^{10}=0.006047=\boxed{0.60\%}$

b) $P(X=10)=\binom{10}{10}\cdot(0.4)^{10}\cdot(1-0.4)^{0}=1\cdot 0.4^{10}\cdot 1=0.000105=\boxed{0.01\%}$

c) $P(X=1)=\binom{10}{1}\cdot(0.4)^1\cdot(1-0.4)^{9}=10\cdot 0.4\cdot 0.6^{9}=0.04031=\boxed{4.03\%}$

E.08 *En una clase de 20 alumnos cada alumno falta a clase el 4% de los días. Calcula la probabilidad de que un día de clase: a) No falte ninguno, b) Falten menos de 3 alumnos, c) Falte un único alumno.*

Es una distribución binomial. $N=20$, 'éxito' es 'faltar a clase' con probabilidad 0.04.

a) $P(X=0)=\binom{20}{0}\cdot(0.04)^0\cdot(1-0.04)^{20}=1\cdot 1\cdot 0.96^{20}=0.44200=\boxed{44.20\%}$

b) $P(X<3)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)=$

$$=\binom{20}{0}\cdot(0.04)^0\cdot(0.96)^{20}+\binom{20}{1}\cdot(0.04)^1\cdot(0.96)^{19}+\binom{20}{2}\cdot(0.04)^2\cdot(0.96)^{18}=$$

$$=1\cdot 1\cdot 0.96^{20}+20\cdot 0.04\cdot 0.96^{19}+190\cdot 0.04^2\cdot 0.96^{18}=0.95614=\boxed{95.61\%}$$

c) $P(X=1)=\binom{20}{1}\cdot(0.04)^1\cdot(1-0.04)^{19}=20\cdot 0.04\cdot 0.96^{19}=0.36834=\boxed{36.83\%}$

E.09 *En un tipo de gatos la probabilidad de que nazca una hembra es del 56%. Una gata ha tenido 5 crías. Calcula la probabilidad de que: a) Sean 3 hembras, b) Sean al menos 2 hembras.*

Es una distribución binomial. $N=5$, 'éxito' es 'ser hembra' con probabilidad 0.56.

a) $P(X=3)=\binom{5}{3}\cdot(0.56)^3\cdot(1-0.56)^{2}=10\cdot 0.56^{3}\cdot 0.44^{2}=0.33999=\boxed{34.00\%}$

b) $P(X\geq 2)=P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)=$

$\{$Requerirá menos cálculos si lo hacemos de la siguiente manera$\}$

$$=1-\left[P(X=0)+P(X=1)\right]=$$

$$=1-\left[\binom{5}{0}\cdot(0.56)^0\cdot(1-0.56)^5+\binom{5}{1}\cdot(0.56)^1\cdot(1-0.56)^4\right]=$$

$$=1-\left[1\cdot 1\cdot 0.44^5+5\cdot 0.56\cdot 0.44^4\right]=$$

$$=1-\left[0.0164916224+0.104946688\right]=$$

$$=0.87856=\boxed{87.86\%}$$

E.10 *El 20% de los boletos de una rifa tienen premio. Si compramos 4 boletos, calcula la probabilidad de que tengamos, como mucho, 2 boletos premiados.*

Es una distribución binomial. $N=4$, 'éxito' es 'tener premio' con probabilidad 0.20.

$$P(X\le 2)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)=$$

$$\{\text{Requerirá menos cálculos si lo hacemos de la siguiente manera}\}$$

$$=1-\left[P(X=3)+P(X=4)\right]=$$

$$=1-\left[\binom{4}{3}\cdot(0.2)^3\cdot(1-0.2)^1+\binom{4}{4}\cdot(0.2)^4\cdot(1-0.2)^0\right]=$$

$$=1-\left[4\cdot 0.2^3\cdot 0.8+1\cdot 0.2^4\cdot 1\right]=$$

$$=1-\left[0.0256+0.0016\right]=$$

$$=0.9728=\boxed{97.28\%}$$

E.11 *La probabilidad de que un esquiador principiante se caiga en la pista es 0.4. Si intenta esquiar 5 veces, calcula la probabilidad de que se caiga al menos 3 veces.*

Es una distribución binomial. $N=5$, 'éxito' es 'caer' con probabilidad 0.4.

$$P(X\ge 3)=P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)=$$

$$=\binom{5}{3}\cdot(0.4)^3\cdot(1-0.4)^2+\binom{5}{4}\cdot(0.4)^4\cdot(1-0.4)^1+\binom{5}{5}\cdot(0.4)^5\cdot(1-0.4)^0=$$

$$=10\cdot 0.4^3\cdot 0.6^2+5\cdot 0.4^4\cdot 0.6+1\cdot 0.4^5\cdot 1=$$

$$=0.2304+0.0768+0.01024=0.31744=\boxed{31.74\%}$$

E.12 *En una zona de cultivo de pimientos de Padrón el 85% de ellos no son picantes. Si elegimos 8 pimientos de esa zona, calcula la probabilidad de que: a) Todos sean no picantes, b) Más de 6 sean no picantes, c) Al menos la mitad sean no picantes.*

Es una distribución binomial. $N=8$, 'éxito' es 'ser no picante' con probabilidad 0.85.

a) $P(X=8)=\binom{8}{8}\cdot(0.85)^8\cdot(1-0.85)^0=1\cdot 0.85^8\cdot 1=0.27249=\boxed{27.25\%}$

b) $P(X>6)=P(X=7)+P(X=8)=$

$$=\binom{8}{7}\cdot(0.85)^7\cdot(1-0.85)^1+\binom{8}{8}\cdot(0.85)^8\cdot(1-0.85)^0=$$

$$=8\cdot 0.85^7\cdot 0.15+1\cdot 0.85^8\cdot 1=0.65718=\boxed{65.72\%}$$

c) $P(X\ge 4)=P(X=4)+P(X=5)+P(X=6)+P(X=7)+P(X=8)=$

$$=\binom{8}{4}\cdot 0.85^4\cdot 0.15^4+\binom{8}{5}\cdot 0.85^5\cdot 0.15^3+\binom{8}{6}\cdot 0.85^6\cdot 0.15^2+$$

$$+\binom{8}{7}\cdot 0.85^7\cdot 0.15^1+\binom{8}{8}\cdot 0.85^8\cdot 0.15^0=$$

$$=0.018499+0.08386+0.237604+0.384693+0.272491=$$

$$=0.997147=\boxed{99.71\%}$$

E.13 *Se lanza una moneda 4 veces. Calcula la probabilidad de que salgan más caras que cruces.*

Es una distribución binomial. $N=4$, 'éxito' es 'salir cara' con probabilidad 0.5.

$$P(X>2)=P(X=3)+P(X=4)=$$
$$=\binom{4}{3}\cdot(0.5)^3\cdot(1-0.5)^1+\binom{4}{4}\cdot(0.5)^4\cdot(1-0.5)^0=$$
$$=4\cdot0.5^3\cdot0.5^1+1\cdot0.5^4\cdot1=4\cdot0.5^4+0.5^4=5\cdot0.5^4=0.3125=\boxed{31.25\%}$$

E.14 *En un bombo tenemos 10 bolas idénticas numeradas del 0 al 9 y tras cada extracción devolvemos la bola al bombo. Calcula la probabilidad de que: a) Con 5 extracciones, salga el número 7 menos de tres veces, b) Con 10 extracciones, salga el número 7 al menos dos veces.*

Es una distribución binomial. 'Éxito' es 'salir un 7' con probabilidad 0.1. $N_a=5,\ N_b=10$.

a) $P(X<3)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)=$
$$=\binom{5}{0}\cdot(0.1)^0\cdot(1-0.1)^5+\binom{5}{1}\cdot(0.1)^1\cdot(1-0.1)^4+\binom{5}{2}\cdot(0.1)^2\cdot(1-0.1)^3=$$
$$=1\cdot1\cdot0.9^5+5\cdot0.1\cdot0.9^4+10\cdot0.1^2\cdot0.9^3=0.99144=\boxed{99.14\%}$$

b) $P(X\geq2)=P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)+\ldots+P(X=8)+P(X=9)+p(X=10)=$
$$\{\text{Requerirá menos cálculos si lo hacemos de la siguiente manera}\}$$
$$=1-\left[P(X=0)+P(X=1)\right]=1-\left[\binom{10}{0}\cdot(0.1)^0\cdot(1-0.1)^{10}+\binom{10}{1}\cdot(0.1)^1\cdot(1-0.1)^9\right]=$$
$$=1-\left[1\cdot1\cdot0.9^{10}+10\cdot0.1\cdot0.9^9\right]=1-\left[0.7361\right]=0.2639=\boxed{26.39\%}$$

E.15 *En unas pruebas de alcoholemia se ha visto que el 5% de los conductores dan positivo, que el 10% de los conductores no llevan puesto el cinturón de seguridad y que ambas infracciones son independientes. En un control se para a 5 conductores al azar. Calcula la probabilidad de que: a) Exactamente tres conductores hayan cometido alguna de las dos infracciones, b) Al menos uno de los conductores haya cometido alguna de las dos infracciones.*

Llamemos A al suceso 'dar positivo' y B al suceso 'no llevar cinturón de seguridad'.

La probabilidad de que un conductor haya cometido la infracción A o la infracción B es:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\ldots\{\text{independientes}\}\ldots=P(A)+P(B)-P(A)\cdot P(B)=$$
$$=5\%+10\%-5\%\cdot10\%=14.5\%=0.145$$

Si en el control paran a 5 conductores para ver si han cometido alguna infracción, se trata de una distribución binomial. 'Éxito' es 'cometió alguna infracción' con $p=0.145$ para $N=5$.

a) $P(X=3)=\binom{5}{3}\cdot(0.145)^3\cdot(1-0.145)^2=10\cdot0.145^3\cdot0.855^2=0.02229=\boxed{2.23\%}$

b) $P(X\geq1)=P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)=$
$$\{\text{Requerirá menos cálculos si lo hacemos de la siguiente manera}\}$$
$$=1-P(X=0)=1-\binom{5}{0}\cdot(0.145)^0\cdot(1-0.145)^5=$$
$$=1-1\cdot1\cdot0.855^5=1-0.45691=0.54309=\boxed{54.31\%}$$

E.16 *Cierto bollo industrial incluye un premio en el 5% de las unidades. Calcula la probabilidad de que la tercera unidad que compramos sea la primera en la que tenemos premio.*

Lo haremos de esta forma: Calcularemos la probabilidad de que en las dos primeras unidades no haya premio, después lo uniremos a la probabilidad de tener premio en la 3ª ($p=0.05$).

Veamos la probabilidad de que en las dos primeras unidades compradas no haya premio.
Es una distribución binomial. $N=2$, 'éxito' es 'hay premio' con probabilidad 0.05.

$$P(X=0)=\binom{2}{0}\cdot(0.05)^0\cdot(1-0.05)^2=1\cdot1\cdot0.95^2=0.9025$$

La probabilidad de que haya premio en la tercera unidad es 0.05.

La probabilidad de que ocurran ambas cosas (sin premio en las 2 primeras y premio en la 3ª) es el producto de ambas probabilidades, puesto que son independientes:

$$P\left(\text{Único premio en la 3ª}\right)=0.9025\times0.05=0.045125=\boxed{4.51\%}$$

E.17 *En España, el 8% de la población tiene sangre de tipo O negativo. En un grupo de 10 donantes de sangre, calcula la probabilidad de que: a) Solo uno sea del tipo O^-, b) Al menos uno sea del tipo O^-, c) Que el décimo donante sea el segundo del grupo con sangre de tipo O^-.*

Es una distribución binomial. $N=10$, 'éxito' es 'ser O^-' con probabilidad 0.08.

a) $P(X=1)=\binom{10}{1}\cdot(0.08)^1\cdot(1-0.08)^9=10\cdot0.08\cdot0.92^9=0.37773=\boxed{37.77\%}$

b) $P(X\geq1)=P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+\ldots+P(X=8)+P(X=9)+p(X=10)=$

$$\{\text{Requerirá menos cálculos si lo hacemos de la siguiente manera}\}$$

$$=1-P(X=0)=1-\binom{10}{0}\cdot(0.08)^0\cdot(1-0.08)^{10}=$$

$$=1-1\cdot1\cdot0.92^{10}=1-0.434388=0.565612=\boxed{56.56\%}$$

c) Veamos la probabilidad de que en los primeros 9 donantes solo haya uno de tipo O^-.
Es una distribución binomial. $N=9$, 'éxito' es 'ser O^-' con probabilidad 0.08.

$$P(X=1)=\binom{9}{1}\cdot(0.08)^1\cdot(1-0.08)^8=9\cdot0.08\cdot0.92^8=0.3695176$$

La probabilidad de que el 10º donante sea de tipo O^- es 0.08.

La probabilidad de que ocurran ambas cosas (solo un O^- en las 9 primeros, tipo O^- el 10º) es el producto de ambas probabilidades, puesto que son independientes:

$$P\left(\text{El 10º es el segundo } O^-\right)=0.3695176\times0.08=0.029561=\boxed{2.96\%}$$

Los casos que se plantean en los ejercicios 16 y 17c se conocen como distribución de probabilidad binomial negativa. Se utiliza en procesos en los que se necesita repetir los ensayos hasta conseguir un número de casos favorables (por ejemplo, el primer éxito).

Aunque tiene sus propias fórmulas, se puede abordar como lo hemos hecho aquí, como el producto de 2 probabilidades independientes: La probabilidad binomial para $n-1$ ensayos multiplicada por la probabilidad de éxito para el ensayo siguiente.

Valor esperado de una distribución binomial

Consideremos una variable estadística binomial X en la que la probabilidad de 'éxito' es p y que realizamos N experimentos. La probabilidad de obtener k 'éxitos' es $\mathrm{P}(\mathrm{X}=k)$, siendo la fórmula que calcula esas probabilidades la que ya conocemos.

La forma técnica de expresarlo es esta:

$$\mathrm{X} \sim \mathrm{B}(\mathrm{N}, p) \quad ; \quad \mathrm{P}(\mathrm{X}=k)=\binom{\mathrm{N}}{k} \cdot p^{k} \cdot (1-p)^{\mathrm{N}-k} \qquad \text{para } k=0,1,2,\ldots \mathrm{N}$$

Si repetimos esa medida de los N experimentos binomiales, el resultado será algunas veces de cero 'éxitos', otras veces será de un solo 'éxito', etc. En promedio, ¿cuántos éxitos obtendremos? A este número promedio se le llama valor esperado o valor medio.

Para ver cómo se calcula utilizaremos un ejemplo.

Supongamos que lanzamos 2 monedas y nos fijamos en cuántas caras aparecen.

El espacio muestral es: $\Omega=\{\mathrm{CC},\ \mathrm{C+},\ +\mathrm{C},\ ++\}$ de manera que:
25% de las veces obtenemos 0 caras, 50% de las veces 1 cara y 25% de las veces 2 caras.

Podíamos haber dicho que se trata de un variable binomial en la que la probabilidad de 'éxito' (obtener cara al lanzar una moneda) es $p=1/2$ y que vamos a hacer 2 experimentos (lanzar 2 monedas) con lo que $\mathrm{N}=2$. Así, la variable estadística es del tipo $\mathrm{X} \sim \mathrm{B}(2,1/2)$ y tendríamos:

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}=0)=\binom{2}{0} \cdot (1/2)^{0} \cdot (1-1/2)^{2-0}=1 \cdot 1 \cdot (1/2)^{2}=\frac{1}{4}=25\%$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}=1)=\binom{2}{1} \cdot (1/2)^{1} \cdot (1-1/2)^{2-1}=2 \cdot 1/2 \cdot (1/2)^{1}=\frac{1}{2}=50\%$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}=2)=\binom{2}{2} \cdot (1/2)^{2} \cdot (1-1/2)^{2-2}=1 \cdot (1/2)^{2} \cdot 1=\frac{1}{4}=25\%$$

Repitiendo 100 veces el lanzamiento de las 2 monedas, teóricamente obtendremos 0 caras 25 veces, 1 cara 50 veces y 2 caras 25 veces.

El número promedio de caras obtenidas será: $\bar{x}=\dfrac{0 \cdot 25+1 \cdot 50+2 \cdot 25}{100}=\dfrac{0+50+50}{100}=1$ cara

Usando las probabilidades, sin pensar en repetir 100 veces, obtendríamos:

$$\bar{x}=0 \cdot \mathrm{P}(\mathrm{X}=0)+1 \cdot \mathrm{P}(\mathrm{X}=1)+2 \cdot \mathrm{P}(\mathrm{X}=2)=0 \cdot 25\%+1 \cdot 50\%+2 \cdot 25\%=1$$

Para cualquier otra variable estadística binomial, se define el valor esperado o valor medio de forma análoga:

$$\bar{x}=0 \cdot \mathrm{P}(\mathrm{X}=0)+1 \cdot \mathrm{P}(\mathrm{X}=1)+\ldots+\mathrm{N} \cdot \mathrm{P}(\mathrm{X}=\mathrm{N})=\sum_{k=0}^{\mathrm{N}} k \cdot \mathrm{P}(\mathrm{X}=k)$$

$$\boxed{\bar{x}=\sum_{k=0}^{\mathrm{N}} k \cdot \mathrm{P}(\mathrm{X}=k)}$$

Vamos a calcularlo usando la fórmula para $\mathrm{P}(\mathrm{X}=k)$ que ya conocemos.

Las transformaciones algebraicas que habrá que hacer son sencillas, pero para quien no ha hecho antes este tipo de manipulación, conviene tomárselo con calma y pensar en lo que se hace en cada uno de los pasos. Se darán indicaciones para hacerlo más comprensible.

$$\bar{x} = \sum_{k=0}^{\mathrm{N}} k \cdot \mathrm{P}(\mathrm{X}=k) = \qquad \left\{ \text{Usamos que: } \mathrm{P}(\mathrm{X}=k) = \binom{\mathrm{N}}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{\mathrm{N}-k} \right\}$$

$$= \sum_{k=0}^{\mathrm{N}} k \cdot \binom{\mathrm{N}}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{\mathrm{N}-k} = \qquad \left\{ \text{Usamos que: } \binom{\mathrm{N}}{k} = \frac{\mathrm{N}!}{k!\,(\mathrm{N}-k)!} \right\}$$

$$= \sum_{k=0}^{\mathrm{N}} k \cdot \frac{\mathrm{N}!}{k!\,(\mathrm{N}-k)!} \cdot p^k \cdot (1-p)^{\mathrm{N}-k} = \qquad \left\{ \text{Separamos el término para } k=0, \text{ que da cero} \right\}$$

$$= 0 + \sum_{k=1}^{\mathrm{N}} k \cdot \frac{\mathrm{N}!}{k!\,(\mathrm{N}-k)!} \cdot p^k \cdot (1-p)^{\mathrm{N}-k} = \qquad \left\{ \text{Usamos que: } k! = k \cdot (k-1)! \right\}$$

$$= \sum_{k=1}^{\mathrm{N}} \frac{\mathrm{N}!}{(k-1)!\,(\mathrm{N}-k)!} \cdot p^k \cdot (1-p)^{\mathrm{N}-k} = \qquad \left\{ \text{Usamos que: } \mathrm{N}! = \mathrm{N} \cdot (\mathrm{N}-1)! \right\}$$

$$= \mathrm{N} \cdot \sum_{k=1}^{\mathrm{N}} \frac{(\mathrm{N}-1)!}{(k-1)!\,(\mathrm{N}-k)!} \cdot p^k \cdot (1-p)^{\mathrm{N}-k} = \qquad \left\{ \text{Usamos que: } p^k = p \cdot p^{k-1} \right\}$$

$$= \mathrm{N} \cdot p \cdot \sum_{k=1}^{\mathrm{N}} \frac{(\mathrm{N}-1)!}{(k-1)!\,(\mathrm{N}-k)!} \cdot p^{k-1} \cdot (1-p)^{\mathrm{N}-k} = \qquad \left\{ \text{Usamos que: } \mathrm{N}-k = (\mathrm{N}-1)-(k-1) \right\}$$

$$= \mathrm{N} \cdot p \cdot \sum_{k=1}^{\mathrm{N}} \frac{(\mathrm{N}-1)!}{(k-1)!\,(\mathrm{N}-k)!} \cdot p^{k-1} \cdot (1-p)^{(\mathrm{N}-1)-(k-1)} = \qquad \left\{ \text{Usamos que: } \binom{\mathrm{N}-1}{k-1} = \frac{(\mathrm{N}-1)!}{(k-1)!\,(\mathrm{N}-k)!} \right\}$$

$$= \mathrm{N} \cdot p \cdot \sum_{k=1}^{\mathrm{N}} \binom{\mathrm{N}-1}{k-1} \cdot p^{k-1} \cdot (1-p)^{(\mathrm{N}-1)-(k-1)} = \qquad \left\{ \text{Hacemos el cambio de variable: } z = k-1 \right\}$$

$$= \mathrm{N} \cdot p \cdot \sum_{z=0}^{\mathrm{N}-1} \binom{\mathrm{N}-1}{z} \cdot p^{z} \cdot (1-p)^{(\mathrm{N}-1)-z} = \qquad \left\{ \text{Hacemos el cambio de variable: } n = \mathrm{N}-1 \right\}$$

$$= \mathrm{N} \cdot p \cdot \sum_{z=0}^{n} \binom{n}{z} \cdot p^{z} \cdot (1-p)^{n-z} = \qquad \left\{ \text{Usamos que: } \mathrm{P}(\mathrm{X}=z) = \binom{n}{z} \cdot p^{z} \cdot (1-p)^{n-z} \right\}$$

$$= \mathrm{N} \cdot p \cdot \sum_{z=0}^{n} \mathrm{P}(\mathrm{X}=z) = \qquad \left\{ \text{Usamos que: } \sum_{z=0}^{n} \mathrm{P}(\mathrm{X}=z) = 1 \right\}$$

$$= \mathrm{N} \cdot p \cdot 1 =$$

$$= \mathrm{N} \cdot p$$

En los últimos pasos hemos utilizado que, para una variable binomial $\mathrm{X} \sim \mathrm{B}(n, p)$, la probabilidad de obtener z 'éxitos' es: $\mathrm{P}(\mathrm{X}=z) = \binom{n}{z} \cdot p^{z} \cdot (1-p)^{n-z}$ para $k = 0, 1, 2, \ldots n$

Y que la suma de todas las probabilidades, desde $z=0$ hasta $z=n$, es 1: $\sum_{z=0}^{n} \mathrm{P}(\mathrm{X}=z) = 1$

En definitiva, hemos encontrado que, para una variable estadística binomial $\mathrm{X} \sim \mathrm{B}(\mathrm{N}, p)$, el valor esperado o valor medio es:

$$\boxed{\bar{x} = \mathrm{N} \cdot p}$$

Aunque le he llamado $\bar{x}$, en la literatura especializada se le suele llamar μ y también $\mathrm{E(X)}$.

Aplicado al ejemplo de lanzar 2 monedas, siendo 'éxito' obtener cara, tendremos $\mathrm{N}=2$ y $p = 1/2$ con lo que $\bar{x} = \mathrm{N} \cdot p = 2 \cdot 1/2 = 1$ tal y como habíamos obtenido anteriormente.

Varianza y desviación típica de una distribución binomial

Al igual que se puede calcular el valor medio de una serie de experimentos binomiales también se puede calcular una medida de la dispersión de los valores que se van obteniendo.

La forma más habitual de medir la dispersión de una lista de valores: $\{x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_\mathrm{N}\} \equiv \{x_i\}_{i=1}^{\mathrm{N}}$ es la varianza σ^2, que es lo mismo que la desviación cuadrática media: $\sigma^2 = \dfrac{1}{\mathrm{N}}\sum_{i=1}^{\mathrm{N}}\left(x_i - \bar{x}\right)^2$

La distancia de cada valor individual a la media se eleva al cuadrado para que no importe si el valor está por encima o por debajo de la media. Después se calcula su valor promedio (sumando todas esas distancias al cuadrado y dividiendo por el número total de valores).

Como la varianza se mide en unidades al cuadrado respecto de la variable x_i se prefiere usar la raíz cuadrada de ese valor: $\sigma = \sqrt{\dfrac{1}{\mathrm{N}}\sum_{i=1}^{\mathrm{N}}\left(x_i - \bar{x}\right)^2}$

A esta medida se le llama desviación típica (o desviación estándar) de la lista $\{x_i\}_{i=1}^{\mathrm{N}}$.

La varianza (o la desviación típica) puede ser tediosa de calcular.
Veamos si se puede reorganizar la expresión para σ^2, de manera que sea más 'amable':

$$\begin{aligned}
\sigma^2 &= \frac{1}{\mathrm{N}}\sum_{i=1}^{\mathrm{N}}\left(x_i - \bar{x}\right)^2 = \frac{1}{\mathrm{N}}\sum_{i=1}^{\mathrm{N}}\left(x_i^{\,2} - 2x_i\bar{x} + \bar{x}^2\right) = \\
&= \frac{1}{\mathrm{N}}\left[\sum_{i=1}^{\mathrm{N}}\left(x_i^{\,2}\right) - \sum_{i=1}^{\mathrm{N}}\left(2x_i\bar{x}\right) + \sum_{i=1}^{\mathrm{N}}\left(\bar{x}^2\right)\right] = \\
&= \frac{1}{\mathrm{N}}\left[\sum_{i=1}^{\mathrm{N}}\left(x_i^{\,2}\right) - 2\bar{x}\cdot\sum_{i=1}^{\mathrm{N}}\left(x_i\right) + \bar{x}^2\cdot\sum_{i=1}^{\mathrm{N}}(1)\right] = \\
&= \frac{1}{\mathrm{N}}\left[\sum_{i=1}^{\mathrm{N}}\left(x_i^{\,2}\right) - 2\bar{x}\cdot\sum_{i=1}^{\mathrm{N}}\left(x_i\right) + \bar{x}^2\cdot\mathrm{N}\right] = \\
&= \frac{1}{\mathrm{N}}\cdot\sum_{i=1}^{\mathrm{N}}\left(x_i^{\,2}\right) - 2\bar{x}\cdot\frac{1}{\mathrm{N}}\cdot\sum_{i=1}^{\mathrm{N}}\left(x_i\right) + \frac{1}{\mathrm{N}}\cdot\bar{x}^2\cdot\mathrm{N} = \\
&= \frac{1}{\mathrm{N}}\cdot\sum_{i=1}^{\mathrm{N}}\left(x_i^{\,2}\right) - 2\bar{x}\cdot\bar{x} + \bar{x}^2 = \\
&= \frac{1}{\mathrm{N}}\cdot\sum_{i=1}^{\mathrm{N}}\left(x_i^{\,2}\right) - 2\bar{x}^2 + \bar{x}^2 = \\
&= \frac{1}{\mathrm{N}}\cdot\sum_{i=1}^{\mathrm{N}}\left(x_i^{\,2}\right) - \bar{x}^2 = \\
&= \overline{x^2} - \bar{x}^2
\end{aligned}$$

(Por lo tanto, la varianza es la diferencia entre la media de los cuadrados y el cuadrado de la media.)

Obtenemos:

$$\sigma^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2 \quad\Rightarrow\quad \sigma = \sqrt{\overline{x^2} - \bar{x}^2}$$

Al igual que hicimos con el valor medio de una distribución binomial, veamos qué se obtiene para la varianza (o la desviación típica) de una distribución binomial. Otra vez los cálculos se detallarán para que sea más sencillo seguir el proceso.

$$\sigma^2 = \overline{x^2} - \overline{x}^2 = \qquad \left\{ \text{Restamos y sumamos } \overline{x} \right\}$$

$$= \overline{x^2} - \overline{x} + \overline{x} - \overline{x}^2 = \qquad \left\{ \overline{x^2} = \sum_{k=0}^{N} k^2 \cdot P(X=k) \right\}$$

$$= \sum_{k=0}^{N} k^2 \cdot P(X=k) - \overline{x} + \overline{x} - \overline{x}^2 = \qquad \left\{ \overline{x} = \sum_{k=0}^{N} k \cdot P(X=k) \right\}$$

$$= \sum_{k=0}^{N} k^2 \cdot P(X=k) - \sum_{k=0}^{N} k \cdot P(X=k) + \overline{x} - \overline{x}^2 = \qquad \left\{ \text{Reunimos los sumatorios} \right\}$$

$$= \sum_{k=0}^{N} \left(k^2 - k\right) \cdot P(X=k) + \overline{x} - \overline{x}^2 = \qquad \left\{ k^2 - k = k\left(k-1\right) \right\}$$

$$= \sum_{k=0}^{N} k\left(k-1\right) \cdot P(X=k) + \overline{x} - \overline{x}^2 = \qquad \left\{ \text{Los términos para } k=0,\ k=1 \text{ dan cero} \right\}$$

$$= 0 + 0 + \sum_{k=2}^{N} k\left(k-1\right) \cdot P(X=k) + \overline{x} - \overline{x}^2 = \qquad \left\{ P(X=k) = \binom{N}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{N-k} \right\}$$

$$= \sum_{k=2}^{N} k\left(k-1\right) \cdot \binom{N}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{N-k} + \overline{x} - \overline{x}^2 = \qquad \left\{ \binom{N}{k} = \frac{N!}{k!\,(N-k)!} \right\}$$

$$= \sum_{k=2}^{N} k\left(k-1\right) \cdot \frac{N!}{k!\,(N-k)!} \cdot p^k \cdot (1-p)^{N-k} + \overline{x} - \overline{x}^2 = \qquad \left\{ k! = k\left(k-1\right)\cdot\left(k-2\right)! \right\}$$

$$= \sum_{k=2}^{N} \frac{N!}{(k-2)!\,(N-k)!} \cdot p^k \cdot (1-p)^{N-k} + \overline{x} - \overline{x}^2 = \qquad \left\{ N! = N\left(N-1\right)\cdot\left(N-2\right)! \right\}$$

$$= N\left(N-1\right) \cdot \sum_{k=2}^{N} \frac{(N-2)!}{(k-2)!\,(N-k)!} \cdot p^k \cdot (1-p)^{N-k} + \overline{x} - \overline{x}^2 = \qquad \left\{ p^k = p^2 \cdot p^{k-2} \right\}$$

$$= N\left(N-1\right) \cdot p^2 \cdot \sum_{k=2}^{N} \frac{(N-2)!}{(k-2)!\,(N-k)!} \cdot p^{k-2} \cdot (1-p)^{N-k} + \overline{x} - \overline{x}^2 = \qquad \left\{ N-k = \left(N-2\right) - \left(k-2\right) \right\}$$

$$= N\left(N-1\right) \cdot p^2 \cdot \sum_{k=2}^{N} \frac{(N-2)!}{(k-2)!\,(N-k)!} \cdot p^{k-2} \cdot (1-p)^{(N-2)-(k-2)} + \overline{x} - \overline{x}^2 =$$

$$\left\{ \text{Usamos que: } \binom{N-2}{k-2} = \frac{(N-2)!}{(k-2)!\,\left((N-k)-(k-2)\right)!} = \frac{(N-2)!}{(k-2)!\,(N-k)!} \right\}$$

$$= N\left(N-1\right) \cdot p^2 \cdot \sum_{k=2}^{N} \binom{N-2}{k-2} \cdot p^{k-2} \cdot (1-p)^{(N-2)-(k-2)} + \overline{x} - \overline{x}^2 = \qquad \left\{ \text{Cambio: } z = k-2 \right\}$$

$$= N\left(N-1\right) \cdot p^2 \cdot \sum_{z=0}^{N-2} \binom{N-2}{z} \cdot p^{z} \cdot (1-p)^{(N-2)-z} + \overline{x} - \overline{x}^2 = \left\{ \text{Cambio: } n = N-2 \right\}$$

$$= N\left(N-1\right) \cdot p^2 \cdot \sum_{z=0}^{n} \binom{n}{z} \cdot p^{z} \cdot (1-p)^{n-z} + \overline{x} - \overline{x}^2 = \qquad \left\{ P(X=z) = \binom{n}{z} \cdot p^z \cdot (1-p)^{n-z} \right\}$$

$$= N\left(N-1\right) \cdot p^2 \cdot \sum_{z=0}^{n} P(X=z) + \overline{x} - \overline{x}^2 = \qquad \left\{ \sum_{z=0}^{n} P(X=z) = 1\ ;\ \overline{x} = N \cdot p \right\}$$

$$= N\left(N-1\right) \cdot p^2 \cdot 1 + N \cdot p - \left(N \cdot p\right)^2 = \qquad \left\{ \text{Operamos} \right\}$$

$$= \left(N^2 - N\right) \cdot p^2 + N \cdot p - N^2 \cdot p^2 = \qquad \left\{ \text{Simplificamos} \right\}$$

$$= \cancel{N^2 \cdot p^2} - N \cdot p^2 + N \cdot p - \cancel{N^2 \cdot p^2} = N \cdot p \cdot (1-p)$$

$$\sigma^2 = N \cdot p \cdot (1-p) \ \Rightarrow\ \boxed{\sigma = \sqrt{N \cdot p \cdot (1-p)}}$$

E.16 *La estadística de un colegio revela que el 8.9% del alumnado matriculado históricamente es zurdo. Este año tienen 562 matriculados. Calcula: a) El valor esperado de alumnos zurdos que tendrán, b) La desviación típica del número de alumnos zurdos que tendrán.*

Es una distribución binomial. $\mathrm{N}=562$, 'éxito' es 'ser zurdo' con probabilidad 0.089.

a) El valor esperado de alumnos zurdos es:

$\bar{x}=\mathrm{N}\cdot p=562\cdot 0.089=50.02$ alumnos zurdos

b) La varianza del número de alumnos zurdos es:

$\sigma^2=\mathrm{N}\cdot p\cdot(1-p)=562\cdot 0.089\cdot(1-0.089)=45.566398$

La desviación típica del número de alumnos zurdos es:

$\sigma=\sqrt{45.566398}\cong 6.75$ alumnos zurdos

Redondeando los valores obtenidos al entero más próximo, sería razonable esperar que el número de alumnos zurdos sea 50 ± 7, así que estaría comprendido entre 43 y 57.

Este cálculo se puede mejorar usando una distribución normal, cosa que no haremos ahora. Cuando se dan las condiciones adecuadas, una distribución binomial se puede aproximar bien por una distribución normal y en ese caso se usan la media y la desviación típica vistas aquí.

E.17 *El 2% de las pilas recargables que produce una empresa no alcanzan el número de ciclos de recarga que deberían soportar. Si se venden 10000 pilas de ese tipo, calcula: a) El valor esperado de pilas defectuosas, b) La desviación típica del número de pilas defectuosas.*

Es una distribución binomial. $\mathrm{N}=10000$, 'éxito' es 'pila defectuosa' con probabilidad 0.02.

a) El valor esperado de pilas defectuosas es:

$\bar{x}=\mathrm{N}\cdot p=10000\cdot 0.02=200$ pilas defectuosas

b) La varianza del número de pilas defectuosas es:

$\sigma^2=\mathrm{N}\cdot p\cdot(1-p)=10000\cdot 0.02\cdot(1-0.02)=196$

La desviación típica del número de pilas defectuosas es:

$\sigma=\sqrt{196}=14$ pilas defectuosas

E.18 *En una tienda de ropa se sabe que el 75% de las compras se pagan con tarjeta de crédito. Si en un trimestre han hecho 9000 ventas, calcula: a) El valor esperado de ventas pagadas con tarjeta, b) La desviación típica del número de ventas pagadas con tarjeta.*

Es una distribución binomial. $\mathrm{N}=9000$, 'éxito' es 'pagado con tarjeta' con probabilidad 0.75.

a) El valor esperado de ventas pagadas con tarjeta es:

$\bar{x}=\mathrm{N}\cdot p=9000\cdot 0.75=6750$ ventas pagadas con tarjeta

b) La varianza del número de ventas pagadas con tarjeta es:

$\sigma^2=\mathrm{N}\cdot p\cdot(1-p)=9000\cdot 0.75\cdot(1-0.75)=1687.5$

La desviación típica del número de ventas pagadas con tarjeta es:

$\sigma=\sqrt{1687.5}=41.08$ ventas pagadas con tarjeta

Uso avanzado de la calculadora CASIO fx-991SP X

1. Cálculo de $n!$ para $n>69$

   $69!=1.711224524\times10^{98}$ es el mayor número del que la calculadora puede calcular su factorial.

   Para valores $n>69$ podemos calcularlo así:

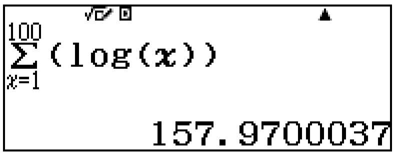
   $n!=n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot3\cdot2\cdot1 \;\Rightarrow\; \log n!=\log n+\log(n-1)+\log(n-2)+\ldots+\log3+\log2+\log1$

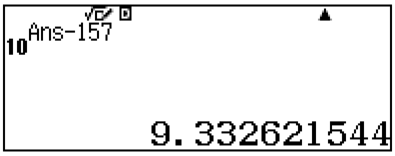
   Usaremos la función sumatorio de la calculadora así: $\log n!=\sum_{x=1}^{n}\log x$

   Ejemplo: Calculemos $100!$

   $$\log100!=\sum_{x=1}^{100}\log x$$

   SHIFT x SHIFT (−) x)
   ▼ 1 ▶ 1 0 0 =





   $$\Rightarrow\; 100!=10^{157.9700037}=10^{0.9700037}\times10^{157}=\boxed{9.332621544\times10^{157}}$$

2. Cálculo de números combinatorios grandes

   El algoritmo que usa la calculadora no funciona si $\frac{n!}{r!}$ o $\frac{n!}{(n-r)!}$ igualan o superan 1×10^{100}.

   Obtengamos una fórmula de recurrencia para los números combinatorios:

   $$\binom{n}{r}=\frac{n!}{r!\cdot(n-r)!}=\frac{n!\cdot(n-r+1)}{r\cdot(r-1)!\cdot(n-r+1)(n-r)!}=\frac{n-r+1}{r}\cdot\frac{n!}{(r-1)!\cdot\big(n-(r-1)\big)!}=\frac{n-r+1}{r}\cdot\binom{n}{r-1}$$

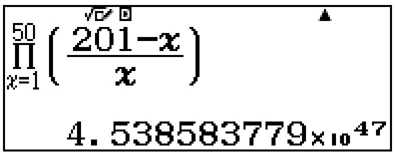
   Puesto que $\binom{n}{0}=1$ para cualquier valor de *n*, podremos usar la función productorio así:

   $$\binom{n}{r}=\prod_{x=1}^{r}\frac{n+1-x}{x}$$ o para resultados mayores que 1×10^{100}: $$\log\binom{n}{r}=\sum_{x=1}^{r}\log\frac{n+1-x}{x}$$

   Ejemplo: Calculemos $200\mathrm{C}50$ y $800\mathrm{C}400$

   $$\binom{200}{50}=\prod_{x=1}^{50}\frac{200+1-x}{x}$$

   ALPHA x ▤
   2 0 1 − x ▼ x
   ▼ 1 ▶ 5 0 =

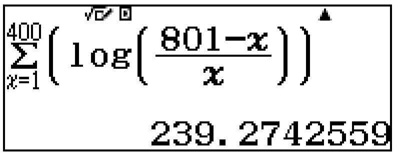


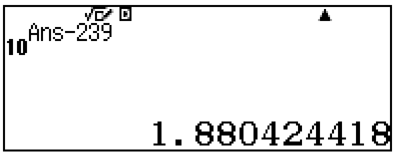
   $$\binom{200}{50}=\boxed{4.538583779\times10^{47}}$$

   (Emplea menos de 2 seg.)

   $$\log\binom{800}{400}=\sum_{x=1}^{500}\log\frac{800+1-x}{x}$$

   SHIFT x SHIFT (−) ▤
   8 0 1 − x ▼
   x ▶) ▼
   1 ▶ 4 0 0 =

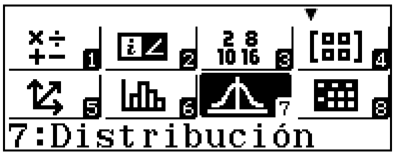


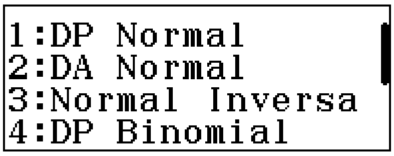


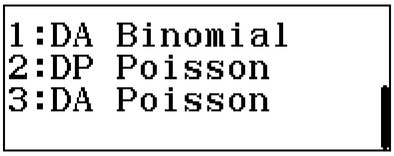
   $$\binom{800}{400}=10^{239.2742559}=10^{0.2742559}\times10^{239}=\boxed{1.880424418\times10^{239}}$$

3. Aplicación del menú ‘Distribución’ a la distribución binomial

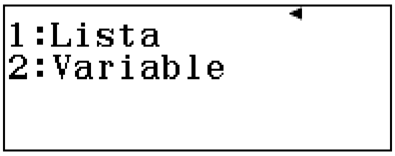
Pulsando MENU 7 tenemos acceso al cálculo de la probabilidad de la distribución binomial (DP Binomial) y de probabilidades acumuladas (DA Binomial).





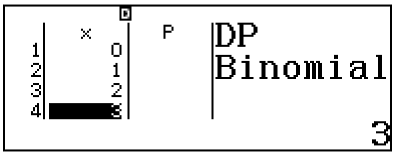


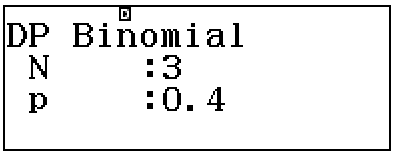
Usaremos primero la opción de cálculo de la probabilidad para X éxitos (DP Binomial).
Se puede calcular para una lista de valores de X (‘Lista’) o para un valor concreto (‘Variable’).

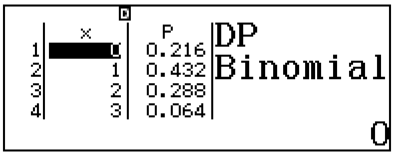


Con ‘Lista’ calcularemos: $P(X=0)$, $P(X=1)$, $P(X=2)$ y $P(X=3)$ para $X \sim B(3, 0.4)$

Pulsamos 1 (opción Lista). Escribimos los valores 0, 1, 2, 3 y pulsamos =







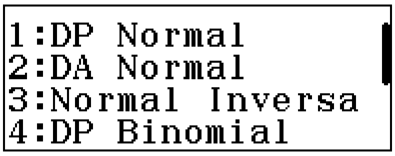
Así, si $X \sim B(3, 0.4)$: $P(X=0)=0.216$, $P(X=1)=0.432$, $P(X=2)=0.288$, $P(X=3)=0.064$

Poniendo el cursor en uno de los valores de la columna P, si pulsamos la tecla STO podemos almacenar el valor visualizado en una memoria (A, B, C, D, E, F, X, Y o M) pulsando su tecla.

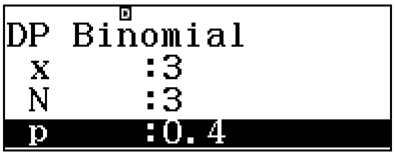
Si seleccionamos un valor x de la lista podemos cambiarlo por otro, bastará con teclearlo.

Pulsando = podemos cambiar los parámetros de la distribución o pulsando OPTN seleccionar otro tipo de cálculo o editar la lista de valores de x.

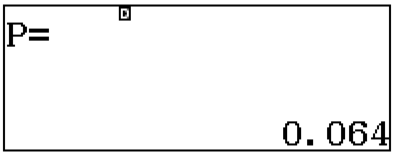
Seleccionemos ahora el cálculo de una probabilidad binomial para un valor dado (‘Variable’):



Elegimos la opción 2 para calcular $P(X=3)$ si $X \sim B(3, 0.4)$

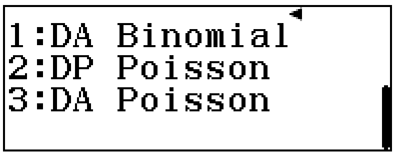


Tras introducir los datos, pulsando = se obtiene:

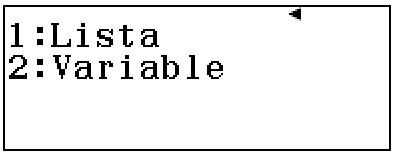


Al igual que antes, podemos almacenar ese valor en una memoria pulsando STO, pulsando = cambiar los parámetros de la distribución o pulsando OPTN seleccionar otro tipo de cálculo.

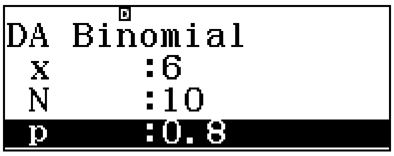
Si seleccionamos como tipo de cálculo ‘probabilidades acumuladas’ (DA Binomial), se trabaja de forma análoga. La diferencia es que se calculará la probabilidad acumulada $P(X \le x)$.
Por ejemplo, con $X \sim B(10, 0.8)$ si queremos calcular $P(X \le 6)$ haremos:

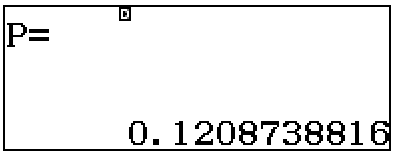


Pulsamos 1 (DA Binomial)



Pulsamos 2 (Variable) e introducimos los datos





Así, habremos calculado, para $X \sim B(10, 0.8)$, que: $P(X \le 6) = 0.1208738816$.

Cálculo de la probabilidad binomial acumulada con una calculadora programable

Sea una variable estadística $X \sim B(N, p)$. Sabemos que: $P\left(X = k\right) = \binom{N}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{N-k}$

Obtengamos una ley de recurrencia:

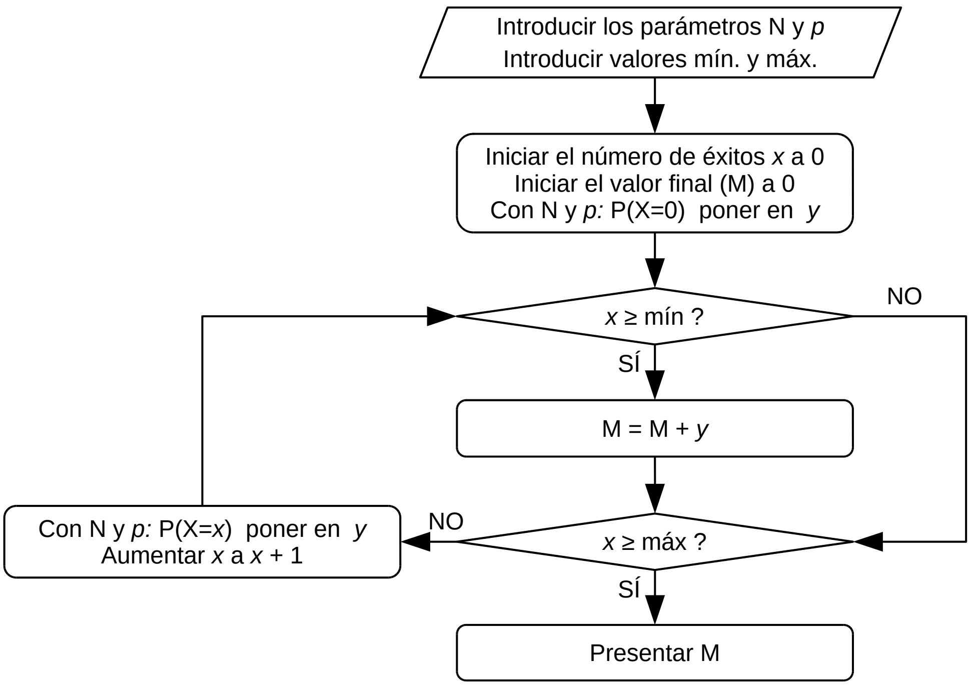
$$
\begin{aligned}
P\left(X = k+1\right) &= \binom{N}{k+1} \cdot p^{k+1} \cdot (1-p)^{N-(k+1)} = \\
&= \frac{N!}{(k+1)! \cdot (N-k-1)!} \cdot p^{k+1} \cdot (1-p)^{N-(k+1)} = \\
&= \frac{N! \cdot (N-k)}{(k+1) \cdot k! \cdot (N-k) \cdot (N-k-1)!} \cdot p \cdot p^k \cdot \frac{(1-p)^{N-k}}{1-p} = \\
&= \frac{N-k}{k+1} \cdot \frac{N!}{k! \cdot (N-k)!} \cdot p^k \cdot (1-p)^{N-k} \cdot \frac{p}{1-p} = \\
&= \frac{N-k}{k+1} \cdot \binom{N}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{N-k} \cdot \frac{p}{1-p} = \\
&= \frac{N-k}{k+1} \cdot \frac{p}{1-p} \cdot \binom{N}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{N-k} = \\
&= \frac{N-k}{k+1} \cdot \frac{p}{1-p} \cdot P\left(X = k\right)
\end{aligned}
$$

Y como $P\left(X = 0\right) = \binom{N}{0} \cdot p^0 \cdot (1-p)^{N-0} = 1 \cdot 1 \cdot (1-p)^N = (1-p)^N$ podremos calcular $P\left(X = k\right)\ \forall k$

La ley de recurrencia obtenida es: $\begin{cases} P\left(X = k+1\right) = \dfrac{N-k}{k+1} \cdot \dfrac{p}{1-p} \cdot P\left(X = k\right) \\ P\left(X = 0\right) = (1-p)^N \end{cases}$

Esta ley permite calcular, para $X \sim B(N, p)$, la probabilidad $P\left(X = k\right)$ a partir de $P\left(X = 0\right)$.

El diagrama de flujo de nuestro programa para calcular $P\left(\text{mín} \le X \le \text{máx}\right)$ será el siguiente:



El programa podrá calcular la probabilidad binomial para un número k de éxitos introduciendo los valores $\text{mín} = \text{máx} = k$. (Es decir, sirve también para probabilidades binomiales no acumuladas).

El listado del programa válido para calculadoras programables CASIO (por ejemplo, la fx-6300G, la fx-3650P II o la fx-5800P) es el siguiente:

(Las variables han sido elegidas para que funcione en la fx-3650P II, que es la más restrictiva, y para que funcione en ella no hay *prompts* al pedir valores. No se usa M+ pues algunas calculadoras no tienen esa función.)

Cálculo de $P(\text{mín} \le X \le \text{máx})$ para $X \sim B(N, p)$

`? → C : ? → D :`	**C** contendrá el valor N ,	**D** contendrá el valor p
`? → A : ? → B :`	**A** contendrá el valor mín ,	**B** contendrá el valor máx
`0 → X : 0 → M :`	**X** contendrá el valor k ,	**M** contendrá el valor a calcular
`(1−D) ^ C → Y :`	**Y** contendrá el valor $P(X = k)$. Inicialmente $P(X = 0)$	

```
Lbl 0 :
   X ≥ A ⇒ M + Y → M :
   X ≥ B ⇒ Goto 1 :
   Y × (C−X) ÷ (X+1) × D ÷ (1−D) → Y :
   X + 1 → X :
Goto 0 :
Lbl 1 : M
```

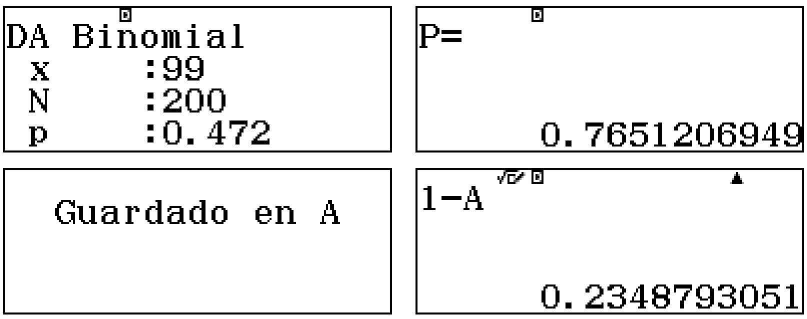
Veamos un uso del programa. Calcularemos, para $X \sim B(200,\ 0.472)$, $P(100 \le X \le 200)$.

Lanzamos el programa. Introducimos: `200→C`, `0.472→D`, `100→A`, `200→B`.

El programa produce en unos segundos: `0.234879302` o bien `0.2348793018`

(El resultado depende de la precisión de la calculadora, no todas tienen la misma precisión.)

Con una calculadora fx-991SP X, con la opción de cálculo de distribución binomial acumulada, se obtiene este resultado:



$P(X \le 99) = 0.7651206949$

$$P(100 \le X \le 200) =$$
$$= 1 - P(X \le 99)$$
$$= 0.2348793051$$

El resultado coincide en las 8 primeras cifras decimales y está de acuerdo con WolframAlpha.

(Aunque hay que reconocer que el algoritmo de cálculo de la fx-991SP X es casi instantáneo y no produce error para valores muy grandes de N y k. Buen trabajo de los programadores de CASIO.)

1.- En una clase, el 75% del alumnado aprueba Lengua Española, el 65% aprueba Inglés y el 5% no aprueba ninguna de las 2 asignaturas. Si se elige un alumno al azar, calcule la probabilidad de que:

a) Apruebe solo una de las dos asignaturas. [4 *puntos*]

b) Si sabemos que aprobó una de las asignaturas, que apruebe las dos asignaturas. [3 *puntos*]

c) Apruebe Lengua Española sabiendo que no ha aprobado Inglés. [3 *puntos*]

Si llamamos A al suceso 'aprueba Lengua Española' y B al suceso 'aprueba Inglés', tenemos que:

$$P(A)=75\% \ ; \ \ P(B)=65\% \ ; \ \ P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)=5\%$$

a) Que no apruebe ninguna de las dos asignaturas quiere decir que (no aprueba A) y (no aprueba B):

$$P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)=\ldots\left\{\text{Aplicamos una de las leyes de De Morgan: } \overline{A}\cap\overline{B}=\overline{A\cup B}\right\}$$

$$\ldots=P\left(\overline{A\cup B}\right)=1-P(A\cup B)$$

Con esto, podemos calcular la probabilidad de $A\cup B$ con los datos del problema:

$$P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)=1-P(A\cup B) \ \Rightarrow \ P(A\cup B)=1-P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)=100\%-5\%=95\%$$

Si ahora aplicamos la expresión básica para la probabilidad de $A\cup B$, tenemos:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

$$95\%=75\%+65\%-P(A\cap B) \quad \Rightarrow \quad P(A\cap B)=75\%+65\%-95\%=45\%$$

La probabilidad de aprobar solo una de las asignaturas será:

$$P(\text{aprobar solo una de las dos asignaturas})=$$
$$=P(\text{aprobar A o aprobar B})-P(\text{aprobar A y aprobar B})=$$
$$=P(A\cup B)-P(A\cap B)=$$
$$=95\%-45\%=$$
$$=50\%$$

La probabilidad de que apruebe solo una de las dos asignaturas es: $P(\text{solo una})=50\%$

b) La probabilidad de que apruebe las dos asignaturas, sabiendo que aprobó una de las asignaturas, es:

$$P(A\cap B\,|\,A\cup B)=\frac{P((A\cap B)\cap(A\cup B))}{P(A\cup B)}=\frac{P(A\cap B)}{P(A\cup B)}=\frac{45\%}{95\%}=\frac{9}{19}=0,4737=47,37\%$$

La probabilidad de aprobar las dos asignaturas si aprobó una es: $P(A\cap B\,|\,A\cup B)=47,37\%$

c) Que apruebe Lengua Española (A) sabiendo que no ha aprobado Inglés $\left(\overline{B}\right)$ es:

$$P\left(A\,|\,\overline{B}\right)=\frac{P\left(A\cap\overline{B}\right)}{P\left(\overline{B}\right)}=\frac{P(A)-P(A\cap B)}{1-P(B)}=\frac{75\%-45\%}{100\%-65\%}=\frac{30\%}{35\%}=\frac{6}{7}=0,8571=85,71\%$$

La probabilidad de aprobar Lengua Española si no ha aprobado Inglés es: $P\left(A\,|\,\overline{B}\right)=85,71\%$

2.-	En una rifa, el número de boletos sin premio es el triple que el número de boletos con premio. Si compramos 5 boletos, calcula la probabilidad de que:	
	a) Solo uno de los 5 boletos tenga premio.	[4 *puntos*]
	b) Al menos dos de los 5 boletos tengan premio.	[3 *puntos*]
	c) No tengan premio más de tres de los 5 boletos.	[3 *puntos*]

Llamemos A al suceso 'boleto con premio'. Será $\overline{A}$ el suceso 'boleto sin premio': $P(A)+P(\overline{A})=1$

Según el enunciado: $P(\overline{A})=3\cdot P(A)$, y tenemos: $P(A)+3\cdot P(A)=1 \;\Rightarrow\; 4\cdot P(A)=1 \;\Rightarrow\; P(A)=1/4$

Se trata de una distribución binomial en la que 'éxito' es 'boleto con premio' con probabilidad $p=1/4$ y con un número de intentos $N=5$, es decir: $X\sim B(5,1/4)$.

a) La probabilidad de que solo uno de los 5 boletos tenga premio es:

$$P(X=1)=\binom{5}{1}\cdot\left[\frac{1}{4}\right]^{1}\cdot\left[1-\frac{1}{4}\right]^{5-1}=$$

$$=\frac{5!}{1!\cdot(5-1)!}\cdot\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{4}=\frac{5!}{4!}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3^4}{4^4}=5\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{81}{256}=\frac{405}{1024}=0,3955=39,55\%$$

$\boxed{\text{La probabilidad de que solo uno de los boletos tenga premio es: } P(X=1)=39,55\%}$

b) La probabilidad de que al menos dos de los 5 boletos tengan premio es:

$$P(X\geq 2)=P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)=$$

$$=1-\left[P(X=0)+P(X=1)\right]=$$

$$=1-\left\{\binom{5}{0}\cdot\left[\frac{1}{4}\right]^{0}\cdot\left[1-\frac{1}{4}\right]^{5-0}+\frac{405}{1024}\right\}=$$

$$=1-\left[1\cdot 1\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{5}+\frac{405}{1024}\right]=$$

$$=1-\left[\frac{243}{1024}+\frac{405}{1024}\right]=1-\left[\frac{648}{1024}\right]=1-\left[\frac{81}{128}\right]=\frac{47}{128}=0,3672=36,72\%$$

$\boxed{\text{La probabilidad de que al menos dos de los boletos tengan premio es: } P(X\geq 2)=36,72\%}$

c) La probabilidad de que no tengan premio más de 3 de los 5 boletos es:

$$P(\text{Sin premio más de }3)=P(\text{Sin premio 4 o 5})=P(\text{Con premio 0 o 1})=$$

$$=P(X=0)+P(X=1)=\ldots\{\text{apartado anterior}\}\ldots=\frac{81}{128}=0,6328=63,28\%$$

$\boxed{\text{La probabilidad de que no tengan premio más de 3 boletos es: } P(\text{Más de 3 sin premio})=63,28\%}$

3.- Los proveedores A, B y C suministran, respectivamente, el 60%, el 30% y el 10% de las piezas que se utilizan en una empresa. Son defectuosas el 5% de las piezas producidas por A, el 2% de las producidas por B y el 1% de las producidas por C. Calcula:

a) La probabilidad de que una pieza elegida al azar sea defectuosa. [5 *puntos*]

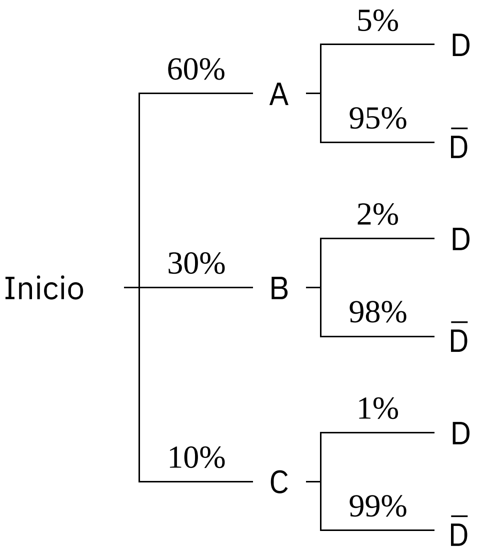
b) Si una pieza es defectuosa, la probabilidad de que no proceda del proveedor A. [5 *puntos*]

Llamemos A al suceso 'suministrado por el proveedor A' y análogamente para B y C.

Tenemos que $P(A) = 60\%$; $P(B) = 30\%$; $P(C) = 10\%$

Llamemos D al suceso 'pieza defectuosa': $P(D\,|\,A) = 5\%$; $P(D\,|\,B) = 2\%$; $P(D\,|\,C) = 1\%$

El diagrama de árbol de la situación del problema es:



$\Rightarrow P(A \cap D) = P(A) \cdot P(D\,|\,A) = 60\% \cdot 5\% = 3,00\%$

$\Rightarrow P(A \cap \overline{D}) = P(A) \cdot P(\overline{D}\,|\,A) = 60\% \cdot 95\% = 57,00\%$

$\Rightarrow P(B \cap D) = P(B) \cdot P(D\,|\,B) = 30\% \cdot 2\% = 0,60\%$

$\Rightarrow P(B \cap \overline{D}) = P(B) \cdot P(\overline{D}\,|\,B) = 30\% \cdot 98\% = 29,40\%$

$\Rightarrow P(C \cap D) = P(C) \cdot P(D\,|\,C) = 10\% \cdot 1\% = 0,10\%$

$\Rightarrow P(C \cap \overline{D}) = P(C) \cdot P(\overline{D}\,|\,C) = 10\% \cdot 99\% = 9,90\%$

a) La probabilidad de que una pieza elegida al azar sea defectuosa es:

$$P(D) = P(A \cap D) + P(B \cap D) + P(C \cap D) = 3,00\% + 0,60\% + 0,10\% = 3,70\%$$

[Teorema de la probabilidad total: $P(D) = P(A) \cdot P(D\,|\,A) + P(B) \cdot P(D\,|\,B) + P(C) \cdot P(D\,|\,C)$]

$\boxed{\text{La probabilidad de que una pieza sea defectuosa es: } P(D) = 3,70\%}$

b) La probabilidad de que no proceda del proveedor A una pieza que es defectuosa es:

$$P(\overline{A}\,|\,D) = P(B\,|\,D) + P(C\,|\,D) = \frac{P(B \cap D)}{P(D)} + \frac{P(C \cap D)}{P(D)} = \frac{P(B \cap D) + P(C \cap D)}{P(D)} =$$

$$= \frac{0,60\% + 0,10\%}{3,70\%} = \frac{0,70\%}{3,70\%} = \frac{0,7}{3,7} = \frac{7}{37} = 0,1892 = 18,92\%$$

[Se usó el teorema de Bayes para $P(B\,|\,D)$ y $P(C\,|\,D)$. Por ejemplo, para $P(B\,|\,D)$ se tiene:

$$P(B\,|\,D) = \frac{P(B) \cdot P(D\,|\,B)}{P(A) \cdot P(D\,|\,A) + P(B) \cdot P(D\,|\,B) + P(C) \cdot P(D\,|\,C)}$$]

$\boxed{\text{La probabilidad de que no proceda de A una pieza que es defectuosa es: } P(\overline{A}\,|\,D) = 18,92\%}$

4.- De los sucesos A y B sabemos que: $P(A)=\frac{1}{4}$; $P(B|A)=\frac{1}{3}$; $P\left(\overline{A}\cap B\right)=\frac{1}{4}$. Calcula:

a) Los sucesos A y B, ¿son independientes? [4 *puntos*]

b) $P(A\cup B)$ [3 *puntos*]

c) $P\left(\overline{B}|A\right)$ [3 *puntos*]

Si $P(B|A)=\frac{1}{3} \Rightarrow \frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{1}{3} \Rightarrow P(A\cap B)=\frac{P(A)}{3}=\frac{1/4}{3}=\frac{1}{12}$

Si $P\left(\overline{A}\cap B\right)=\frac{1}{4} \Rightarrow P(B)-P(A\cap B)=\frac{1}{4} \Rightarrow P(B)=\frac{1}{4}+P(A\cap B)=\frac{1}{4}+\frac{1}{12}=\frac{3}{12}+\frac{1}{12}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$

Por lo tanto, tenemos: $P(A)=\frac{1}{4}$; $P(B)=\frac{1}{3}$; $P(A\cap B)=\frac{1}{12}$

a) ¿Son independientes A y B?

Si son independientes debe ocurrir que: $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$

$$P(A)\cdot P(B)=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{12}=P(A\cap B)$$

Por lo tanto, A y B son independientes.

$\boxed{\text{Los sucesos A y B son independientes.}}$

b) Queremos calcular $P(A\cup B)$. Usamos la propiedad básica de $A\cup B$:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=$$
$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{12}=\frac{3}{12}+\frac{4}{12}-\frac{1}{12}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$$

$\boxed{P(A\cup B)=\frac{1}{2}}$

c) Queremos calcular $P\left(\overline{B}|A\right)$. Usamos la definición de probabilidad condicionada:

$$P\left(\overline{B}|A\right)=\frac{P\left(\overline{B}\cap A\right)}{P(A)}=\frac{P(A)-P(A\cap B)}{P(A)}=$$
$$=\frac{1/4-1/12}{1/4}=\frac{12\cdot(1/4-1/12)}{12\cdot 1/4}=\frac{3-1}{3}=\frac{2}{3}$$

$\boxed{P\left(\overline{B}|A\right)=2/3}$

Inicialmente no pensé en poner este problema, sino el que aparece a continuación. Las transformaciones algebraicas son un poco más complejas y, al final, lo descarté. Como me parece un problema interesante, lo añado aquí. ¿Lo hubieras resuelto?

4b.- De los sucesos A y B sabemos que: $P(A|B)=\dfrac{1}{4}$; $P(B|A)=\dfrac{1}{3}$. Calcula:

a) $P(A\cap B|A\cup B)$ [4 *puntos*]

Si sabemos, además, que A y B son independientes y no son incompatibles, calcula:

b) $P\left(A|\overline{B}\right)$ [3 *puntos*]

c) $P\left(\overline{B}|\overline{A}\right)$ [3 *puntos*]

Si $P(A|B)=\dfrac{1}{4} \Rightarrow \dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}=\dfrac{1}{4} \Rightarrow P(B)=4\cdot P(A\cap B)$

Si $P(B|A)=\dfrac{1}{3} \Rightarrow \dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}=\dfrac{1}{3} \Rightarrow P(A)=3\cdot P(A\cap B)$

a) Queremos $P(A\cap B|A\cup B)$. Usemos la definición de probabilidad condicionada:

$$P(A\cap B|A\cup B)=\frac{P\left((A\cap B)\cap(A\cup B)\right)}{P(A\cup B)}=\frac{P(A\cap B)}{P(A\cup B)}=\ldots$$

$$\left\{\begin{aligned} P(A\cup B)&=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\\ &=3\cdot P(A\cap B)+4\cdot P(A\cap B)-P(A\cap B)=\\ &=6\cdot P(A\cap B)\end{aligned}\right\}$$

$$\ldots=\frac{P(A\cap B)}{6\cdot P(A\cap B)}=\frac{1}{6}$$

$\boxed{P(A\cap B|A\cup B)=1/6}$

Para los siguientes apartados sabemos que A y B son independientes:

$$\begin{aligned} P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B) \Rightarrow P(A\cap B)&=3\cdot P(A\cap B)\cdot 4\cdot P(A\cap B)\\ P(A\cap B)&=12\cdot P(A\cap B)^2\\ 12\cdot P(A\cap B)^2-P(A\cap B)&=0\\ P(A\cap B)\cdot\left[12\cdot P(A\cap B)-1\right]&=0\end{aligned}$$

También sabemos que no son incompatibles, con lo que $P(A\cap B)\neq 0$

Por lo tanto, ocurrirá que: $12\cdot P(A\cap B)-1=0 \Rightarrow P(A\cap B)=1/12$

b) $P\left(A|\overline{B}\right)=\dfrac{P\left(A\cap\overline{B}\right)}{P\left(\overline{B}\right)}=\dfrac{P(A)-P(A\cap B)}{1-P(B)}=\dfrac{3\cdot 1/12-1/12}{1-4\cdot 1/12}=\dfrac{3-1}{12-4}=\dfrac{2}{8}=\dfrac{1}{4}$

$\boxed{P\left(A|\overline{B}\right)=1/4}$

c) $P\left(\overline{B}|\overline{A}\right)=\dfrac{P\left(\overline{B}\cap\overline{A}\right)}{P\left(\overline{A}\right)}=\dfrac{P\left(\overline{A\cup B}\right)}{P\left(\overline{A}\right)}=\dfrac{1-P(A\cup B)}{1-P(A)}=\dfrac{1-6\cdot 1/12}{1-3\cdot 1/12}=\dfrac{12-6}{12-3}=\dfrac{6}{9}=\dfrac{2}{3}$

$\boxed{P\left(\overline{B}|\overline{A}\right)=2/3}$

Nombre: ....

Todos los resultados deben obtenerse razonadamente, escribiendo todos los pasos necesarios.

1.- En una clase, el 75% del alumnado aprueba Lengua Española, el 65% aprueba Inglés y el 5% no aprueba ninguna de las 2 asignaturas. Si se elige un alumno al azar, calcule la probabilidad de que:

a) Apruebe solo una de las dos asignaturas. [4 *puntos*]

b) Si sabemos que aprobó una de las asignaturas, que apruebe las dos asignaturas. [3 *puntos*]

c) Apruebe Lengua Española sabiendo que no ha aprobado Inglés. [3 *puntos*]

2.- En una rifa, el número de boletos sin premio es el triple que el número de boletos con premio. Si compramos 5 boletos, calcula la probabilidad de que:

a) Solo uno de los 5 boletos tenga premio. [4 *puntos*]

b) Al menos dos de los 5 boletos tengan premio. [3 *puntos*]

c) No tengan premio más de tres de los 5 boletos. [3 *puntos*]

3.- Los proveedores A, B y C suministran, respectivamente, el 60%, el 30% y el 10% de las piezas que se utilizan en una empresa. Son defectuosas el 5% de las piezas producidas por A, el 2% de las producidas por B y el 1% de las producidas por C. Calcula:

a) La probabilidad de que una pieza elegida al azar sea defectuosa. [5 *puntos*]

b) Si una pieza es defectuosa, la probabilidad de que no proceda del proveedor A. [5 *puntos*]

4.- De los sucesos A y B sabemos que: $P(A)=\frac{1}{4}$; $P(B|A)=\frac{1}{3}$; $P(\overline{A}\cap B)=\frac{1}{4}$. Calcula:

a) Los sucesos A y B, ¿son independientes? [4 *puntos*]

b) $P(A\cup B)$ [3 *puntos*]

c) $P(\overline{B}|A)$ [3 *puntos*]

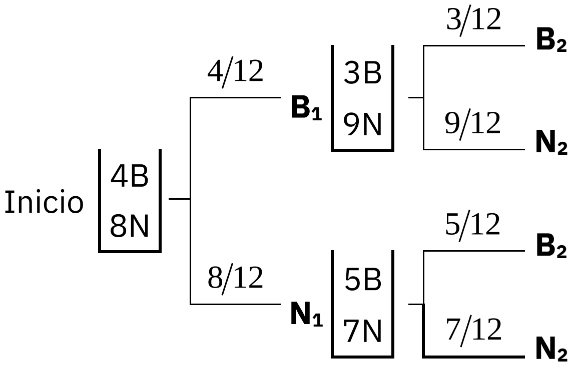
1.- Una bolsa contiene 4 bolas blancas y 8 bolas negras. Se extrae al azar una bola de la bolsa, se deja aparte y se introduce en la bolsa una nueva bola de distinto color a la extraída.
A continuación, se extrae una segunda bola de la bolsa. Calcula la probabilidad de que:

a) La segunda bola sea blanca. [4 *puntos*]

b) La segunda bola sea de distinto color que la extraída en primer lugar. [3 *puntos*]

c) La primera bola extraída haya sido negra, sabiendo que la segunda bola es blanca. [3 *puntos*]

Si llamamos A al suceso 'sacar bola blanca' y B al suceso 'sacar bola negra', tenemos este árbol:



$$\Rightarrow P(B_1 \cap B_2) = \frac{4}{12} \cdot \frac{3}{12} = \frac{12}{144}$$

$$\Rightarrow P(B_1 \cap N_2) = \frac{4}{12} \cdot \frac{9}{12} = \frac{36}{144}$$

$$\Rightarrow P(N_1 \cap B_2) = \frac{8}{12} \cdot \frac{5}{12} = \frac{40}{144}$$

$$\Rightarrow P(N_1 \cap N_2) = \frac{8}{12} \cdot \frac{7}{12} = \frac{56}{144}$$

a) Probabilidad de que la segunda bola sea blanca:

$$P(B_2) = P(B_1 \cap B_2) + P(N_1 \cap B_2) = \frac{12}{144} + \frac{40}{144} = \frac{52}{144} = \frac{13}{36} = 0,3611 = 36,11\%$$

La probabilidad de que la segunda bola sea blanca es: $P(B_2) = \frac{13}{36} = 0,3611 = 36,11\%$

b) Probabilidad de que la segunda bola sea de distinto color que la primera:

$$P(\text{distintas}) = P(B_1 \cap N_2) + P(N_1 \cap B_2) = \frac{36}{144} + \frac{40}{144} = \frac{76}{144} = \frac{19}{36} = 0,5278 = 52,78\%$$

La probabilidad de que sean de distinto color es: $P(\text{distintas}) = \frac{19}{36} = 0,5278 = 52,78\%$

c) Probabilidad de que la primera bola fuese negra si la segunda es blanca:

$$P(N_1 | B_2) = \frac{P(N_1 \cap B_2)}{P(B_2)} = \frac{40/144}{52/144} = \frac{40}{52} = \frac{10}{13} = 0,7692 = 76,92\%$$

La probabilidad de que 1ª bola fuese negra si la 2ª es blanca es: $P(N_1 | B_2) = \frac{10}{13} = 0,7692 = 76,92\%$

2.- En las abejas, dos características genéticas A y B aparecen con probabilidades respectivas de 0,1 y 0,2. La aparición de cada una de ellas es independiente de la aparición de la otra. Calcula la probabilidad de que:

a) Una abeja elegida al azar no presente ninguna de ellas. [3 *puntos*]

b) Una abeja elegida al azar presente tan solo una de ellas. [3 *puntos*]

c) Si elegimos al azar 10 abejas, alguna de ellas presente ambas características. [4 *puntos*]

Las probabilidades de ambas características son: $P(A)=0{,}1$ y $P(B)=0{,}2$

Como son sucesos independientes, tenemos que: $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)=0{,}1\cdot 0{,}2=0{,}02$

a) La probabilidad de que una abeja elegida al azar no presente ni A ni B es:

$$P(\overline{A}\cap\overline{B})=\ldots\{\text{ Ley de De Morgan }\}\ldots$$

$$\ldots=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=\ldots$$

$$\{\ P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0{,}1+0{,}2-0{,}02=0{,}28\ \}$$

$$\ldots=1-0{,}28=0{,}72$$

$\boxed{\text{La probabilidad de que una abeja elegida al azar no presente ni A ni B es: } P(\overline{A}\cap\overline{B})=0{,}72}$

b) La probabilidad de que una abeja elegida al azar presente solo la A o solo la B:

$$P(\text{solo A o solo B})=P(\text{A o B})-P(\text{A y B})=$$

$$=P(A\cup B)-P(A\cap B)=$$

$$=0{,}28-0{,}02=0{,}26$$

$\boxed{\text{La probabilidad de que una abeja presente solo la A o solo la B es: } P(\text{solo A o solo B})=0{,}26}$

c) La probabilidad de que, de 10 abejas, alguna de ellas tenga la A y la B es:

$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)=0{,}1\cdot 0{,}2=0{,}02$ por ser independientes A y B.

Se trata de una distribución binomial en la que ‘éxito’ es ‘tienen A y B’ con probabilidad $p=0{,}02$ y con un número de intentos $N=10$, es decir: $X\sim B(10,0.02)$.

$$P(X\geq 1)=P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)+\ldots+P(X=9)+P(X=10)=$$

$$=1-P(X=0)=1-\binom{10}{0}\cdot[0{,}02]^0\cdot[1-0{,}02]^{10-0}=$$

$$=1-\frac{10!}{0!\cdot(10-0)!}\cdot 0{,}02^0\cdot 0{,}98^{10}=1-1\cdot 1\cdot 0.98^{10}=1-0{,}8171=0{,}1829=18{,}29\%$$

$\boxed{\text{La probabilidad de que, de 10 abejas, alguna tenga la A y la B es: } P(X\geq 1)=18{,}29\%}$

3.- El porcentaje de mujeres en Consejos de Administración de empresas del IBEX-35 es del 33%. A una reunión asisten 10 personas elegidas al azar de esos Consejos de Administración. Calcula la probabilidad de que en esa reunión:

a) Haya al menos una mujer. [3 *puntos*]

b) La cantidad de hombres y mujeres sea paritaria. [3 *puntos*]

c) La décima persona sea la segunda mujer del grupo. [4 *puntos*]

Llamemos A al suceso 'ser mujer en Consejos del IBEX-35' y tenemos que $P(A) = 33\%$.

Se trata de una distribución binomial en la que 'éxito' es A con probabilidad $p = 0,33$ y con un número de intentos $N = 10$, es decir: $X \sim B(10, 0.33)$.

a) La probabilidad de que haya al menos una mujer es:

$$P(X \geq 1) = P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) + \ldots + P(X=9) + P(X=10) =$$

$$= 1 - P(X=0) = 1 - \binom{10}{0} \cdot [0,33]^0 \cdot [1-0,33]^{10-0} =$$

$$= 1 - \frac{10!}{0! \cdot (10-0)!} \cdot 0,33^0 \cdot 0,67^{10} = 1 - 1 \cdot 1 \cdot 0.67^{10} = 1 - 0,0182 = 0,9818 = 98,18\%$$

La probabilidad de que haya al menos una mujer es: $P(X \geq 1) = 98,18\%$

b) La probabilidad de que la cantidad de hombres y mujeres sea paritaria es:

$$P(X=5) = \binom{10}{5} \cdot [0,33]^5 \cdot [1-0,33]^{10-5} = \frac{10!}{5! \cdot (10-5)!} \cdot 0,33^5 \cdot 0,67^5 =$$

$$= \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{5! \cdot 5!} \cdot (0,33 \cdot 0,67)^5 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot (0,2211)^5 =$$

$$= 252 \cdot 0,0005284 = 0,1332 = 13,32\%$$

La probabilidad de que la cantidad de hombres y mujeres sea paritaria es: $P(X=5) = 13,32\%$

c) La probabilidad de que la décima persona sea la segunda mujer del grupo lo hacemos en 2 partes.

Para las primeras 9 personas es una binomial con $X \sim B(9, 0.33)$ y la probabilidad de que solo haya una mujer es:

$$P(X=1) = \binom{9}{1} \cdot [0,33]^1 \cdot [1-0,33]^{9-1} = \frac{9!}{1! \cdot (9-1)!} \cdot 0,33 \cdot 0,67^8 =$$

$$= 9 \cdot 0,33 \cdot 0,0406 = 0,120582$$

La probabilidad de que la décima persona sea mujer es: $P(A) = 33\%$

La probabilidad de que ocurran ambas cosas (así la 10ª persona será la segunda mujer) es:

$$P(10^{a} \text{ persona, } 2^{a} \text{ mujer}) = 0,120582 \cdot 0,33 = 0,0398 = 3,98\%$$

La probabilidad de que la décima persona sea la segunda mujer es: $P = 3,98\%$

4.- De los sucesos A y B sabemos que: $P(A|B)=\frac{1}{3}$; $P(B|A)=\frac{1}{14}$; $P(\overline{A}\cap\overline{B})=\frac{7}{15}$. Calcula:

a) $P(A\cap B)$ [6 *puntos*]

b) $P(\overline{B}|A\cup B)$ [4 *puntos*]

Si $P(A|B)=\frac{1}{3} \Rightarrow \frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{1}{3} \Rightarrow P(B)=3\cdot P(A\cap B)$

Si $P(B|A)=\frac{1}{14} \Rightarrow \frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{1}{14} \Rightarrow P(A)=14\cdot P(A\cap B)$

Si $P(\overline{A}\cap\overline{B})=\frac{7}{15} \Rightarrow P(\overline{A\cup B})=\frac{7}{15} \Rightarrow 1-P(A\cup B)=\frac{7}{15} \Rightarrow P(A\cup B)=\frac{8}{15}$

Por lo tanto, tenemos: $P(A)=14\cdot P(A\cap B)$; $P(B)=3\cdot P(A\cap B)$; $P(A\cup B)=\frac{8}{15}$

a) Calculamos $P(A\cap B)$ usando la propiedad que siempre cumple la probabilidad de $A\cup B$:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

$$\frac{8}{15}=14\cdot P(A\cap B)+3\cdot P(A\cap B)-P(A\cap B)$$

$$\frac{8}{15}=16\cdot P(A\cap B)$$

$$\Rightarrow P(A\cap B)=\frac{8}{15}\cdot\frac{1}{16}=\frac{8}{15}\cdot\frac{1}{8\cdot 2}=\frac{1}{30}$$

$$\boxed{P(A\cap B)=\frac{1}{30}}$$

b) Calculemos $P(\overline{B}|A\cup B)$:

$$P(\overline{B}|A\cup B)=\frac{P(\overline{B}\cap[A\cup B])}{P(A\cup B)}=\frac{P(A-B)}{P(A\cup B)}=\frac{P(A)-P(A\cap B)}{P(A\cup B)}=$$

$$=\frac{14\cdot P(A\cap B)-P(A\cap B)}{P(A\cup B)}=\frac{13\cdot P(A\cap B)}{P(A\cup B)}=$$

$$=\frac{13\cdot 1/30}{8/15}=\frac{13\cdot 15}{8\cdot 30}=\frac{13}{16}$$

$$\boxed{P(\overline{B}|A\cup B)=\frac{13}{16}}$$

Nombre: ....

Todos los resultados deben obtenerse razonadamente, escribiendo todos los pasos necesarios.

1.- Una bolsa contiene 4 bolas blancas y 8 bolas negras. Se extrae al azar una bola de la bolsa, se deja aparte y se introduce en la bolsa una nueva bola de distinto color a la extraída.
A continuación, se extrae una segunda bola de la bolsa. Calcula la probabilidad de que:

a) La segunda bola sea blanca. [4 *puntos*]

b) La segunda bola sea de distinto color que la extraída en primer lugar. [3 *puntos*]

c) La primera bola extraída haya sido negra, sabiendo que la segunda bola es blanca. [3 *puntos*]

2.- En las abejas, dos características genéticas A y B aparecen con probabilidades respectivas de 0,1 y 0,2. La aparición de cada una de ellas es independiente de la aparición de la otra.
Calcula la probabilidad de que:

a) Una abeja elegida al azar no presente ninguna de ellas. [3 *puntos*]

b) Una abeja elegida al azar presente tan solo una de ellas. [3 *puntos*]

c) Si elegimos al azar 10 abejas, alguna de ellas presente ambas características. [4 *puntos*]

3.- El porcentaje de mujeres en Consejos de Administración de empresas del IBEX-35 es del 33%.
A una reunión asisten 10 personas elegidas al azar de esos Consejos de Administración.
Calcula la probabilidad de que en esa reunión:

a) Haya al menos una mujer. [3 *puntos*]

b) La cantidad de hombres y mujeres sea paritaria. [3 *puntos*]

c) La décima persona sea la segunda mujer del grupo. [4 *puntos*]

4.- De los sucesos A y B sabemos que: $P(A|B)=\frac{1}{3}$; $P(B|A)=\frac{1}{14}$; $P(\overline{A}\cap\overline{B})=\frac{7}{15}$. Calcula:

a) $P(A\cap B)$ [6 *puntos*]

b) $P(\overline{B}|A\cup B)$ [4 *puntos*]