$\boxed{\text{Problemas de Cinemática 1º Bachillerato}}$

1. Sean los vectores $\vec{a} = -3\vec{i}$ y $\vec{b} = 2\vec{i} - 5\vec{j}$. Demostrar que

$$|\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi$$

   donde φ es el ángulo que forma el vector $\vec{b}$ con el eje X.

2. Una barca, que lleva una velocidad de 3 m/s, cruza un río perpendicularmente a la dirección del agua. El río fluye a 5 m/s y su cauce tiene 60 metros de ancho. Hallar el ángulo y la distancia desviada. Determina la velocidad resultante y el tiempo empleado en cruzar el río.

3. El vector de posición de un cuerpo viene dado por

$$\vec{r} = (t^2 + t + 1)\vec{i} + (1 - 3t)\vec{j}$$

   a) Obtener la ecuación de la trayectoria; b) La velocidad media entre los instantes $t_1 = 2$ s y $t_2 = 4$ s; c) Velocidad y aceleración instantáneas en $t = 3$ s.

4. Un avión ha de alcanzar 350 km/h para despegar partiendo desde el reposo. Si necesita una pista de 2 km para despegar, calcula cuánto tiempo le costará despegar. ¿Qué distancia recorrerá en el último segundo?

5. Desde el suelo lanzamos hacia arriba un cuerpo a 24 m/s. Calcular: a) altura máxima alcanzada y tiempo empleado en alcanzarla; b) el tiempo total de vuelo; c) Una vez en el punto más alto el cuerpo vuelve a caer y se queda encalado a 20 metros del suelo. Halla la velocidad justo antes de encalarse.

Resolución de los problemas

$\boxed{\text{Problema 1}}$ Vamos a hallarlo por partes. Como se trata de una igualdad, calcularemos primero el miembro de la izquierda y luego el de la derecha y comprobaremos que dan lo mismo.

En la parte de la izquierda tenemos $|\vec{a}+\vec{b}|^2$. Empecemos por hallar $\vec{a}+\vec{b}$ y luego su módulo

$$\vec{a}+\vec{b} = (-3,0)+(2,5) = (-1,-5) \text{ y su módulo } |\vec{a}+\vec{b}| = \sqrt{(-1)^2+(-5)^2} = \sqrt{26}$$

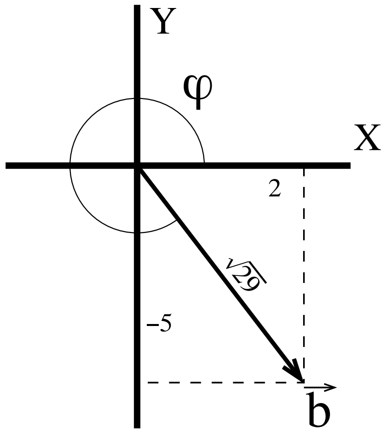
de donde

$$|\vec{a}+\vec{b}|^2 = 26 \tag{1}$$

En la parte de la derecha tenemos $|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi$. Vamos a determinar cada uno de ellos.

$$|\vec{a}| = \sqrt{(-3)^2+0^2} = 3 \quad |\vec{b}| = \sqrt{2^2+(-5)^2} = \sqrt{29} \text{ luego } |\vec{a}|^2 = 9 \quad |\vec{b}|^2 = 29$$

Ahora queda por saber lo que vale $\cos\varphi$, el ángulo que forma el vector $\vec{b}$ con el eje X. La siguiente figura muestra como hallarlo. El coseno de un ángulo es igual al cateto contiguo dividido por la hipotenusa, siendo la hipotenusa por definición $|\vec{b}|$.



Como vemos pues en la figura

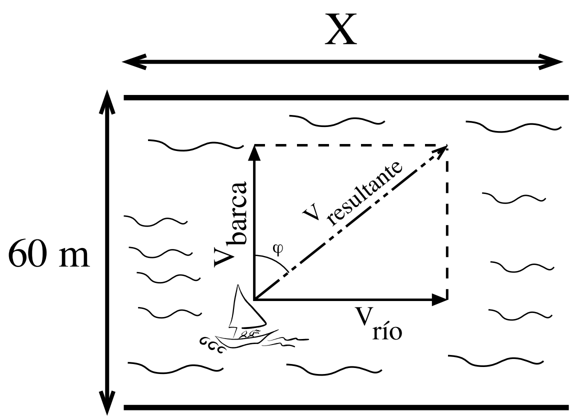
$$\cos\varphi = \frac{2}{\sqrt{29}}$$

Ahora ya estamos en condiciones de sustituir todo en $|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi$, quedando

$$|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi = 9+29-2\cdot 3\cdot\sqrt{29}\cdot\frac{2}{\sqrt{29}} = 9+29-12 = 26$$

resultado que coincide con la ecuación 1.

$\boxed{\text{Problema 2}}$ Conviene hacer un dibujo para aclarar la posición del sistema de referencia o de nuestros ejes coordenados.



El origen del sistema de referencia lo tomamos en la barca. El eje X a lo largo del río y el eje Y perpendicular y según la dirección que lleva la barca. Con esta elección las componentes de los vectores velocidad es muy fácil. El vector velocidad del río forma un ángulo de 0º y el vector velocidad de la barca 90º. Las componentes las hallamos con las expresiones para el paso de componentes polares a cartesianas,

$$\vec{v} = (v_x,\ v_y) = (v_r \cdot \cos\varphi,\ v_r \cdot \sin\varphi)$$

Para el vector velocidad del río tendremos

$$\vec{v_r} = (5 \cdot \cos 0,\ 5 \cdot \sin 0) = (5 \cdot 1,\ 5 \cdot 0) = (5,\ 0)\ \mathrm{m/s}$$

Y para la barca cuya dirección forma 90º

$$\vec{v_b} = (v_b \cdot \cos\varphi,\ v_b \cdot \sin\varphi) = (3 \cdot \cos 90,\ 3 \cdot \sin 90) = (3 \cdot 0,\ 3 \cdot 1) = (0,\ 3)\ \mathrm{m/s}$$

La velocidad resultante será pues la suma vectorial de la velocidad del río y de la barca,

$$\vec{v}_{resultante} = \vec{v}_{rio} + \vec{v}_{barca} = (5,\ 0) + (0,\ 3) = (5,\ 3)\ \mathrm{m/s}$$

Y su módulo $|\vec{v}_{resultante}| = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{25 + 9} = \sqrt{34} = 5,83$ m/s.

Para calcular el ángulo desviado, si nos fijamos en el dibujo anterior, se trata de determinar el ángulo φ. A partir del triángulo que forman los vectores velocidad podemos calcular el valor de $\tan\varphi$.

$$\tan\varphi = \frac{v_{rio}}{v_{barca}} = \frac{5}{3} = 1,66..\ \text{por lo tanto}\ \varphi = \tan^{-1}\left(\frac{5}{3}\right) = 59,03^{\circ}$$

Así pues el ángulo que se desvía la barca de su trayectoria inicial es 59,03º

Para saber la distancia que se desvía la barca respecto de la otra orilla, al ser las velocidades constantes tenemos

$$\vec{v} = \frac{\vec{e}}{t} \quad \text{y entonces} \quad \vec{e} = \vec{v} \cdot t$$

donde $\vec{v}$ es ahora la velocidad resultante. El vector $\vec{e}$ representa a las distancias que recorre la barca a lo largo de los ejes X e Y.

$$\vec{e} = (x,\ y) = \vec{v} \cdot t = (5,\ 3) \cdot t$$

En la ecuación anterior podemos identificar lo que valen las distancias x e y

$$x = 5 \cdot t \qquad y = 3 \cdot t$$

De acuerdo con la figura del principio del problema la distancia y la podemos identificar con la anchura del río y con ella averiguar el tiempo empleado por la barca en cruzar el río,

$$60 = 3 \cdot t \ \text{ y despejando el tiempo } \ t = \frac{60}{3} = 20 \text{ segundos}$$

La distancia desviada respecto de la otra orilla vendrá dada por x, que por lo dicho antes es

$$x = 5 \cdot t = 5 \cdot 20 = 100 \ \text{ metros}$$

Problema 3

a) Para la ecuación de la trayectoria hemos de identificar lo que es la componente X e Y, que a partir de lo que vale $\vec{r}$ son

$$\vec{r} = (x,\ y) = (t^2 + t + 1,\ 1 - 3t)$$

obteniendo el siguiente sistema de ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{l} x = t^2 + t + 1 \\ y = 1 - 3t \end{array} \right.$$

en el que hay que eliminar t. Parece más fácil despejar t de la segunda de ellas y sustituir en la primera. (Recordamos que el procedimiento siempre es igual, se despeja en una de ellas y se sustituye **siempre** en la otra).

$$t = \frac{y-1}{-3} = -\frac{y-1}{3} = \frac{-y+1}{3} = \frac{1-y}{3}$$

y sustiyendo en la primera

$$x = t^2 + t + 1 = \left(\frac{1-y}{3}\right)^2 + \frac{1-y}{3} + 1 = \frac{(1-y)^2}{3^2} + \frac{1-y}{3} + 1$$

operando

$$\frac{1+y^2-2y}{9} + \frac{1-y}{3} + 1 = \frac{1+y^2-2y+3(1-y)+9}{9} = \frac{1+y^2-2y+3-3y+9}{9}$$

llegamos por fin a

$$x = \frac{y^2 - 5y + 13}{9}$$

La ecuación obtenida expresa x en función de y en este caso y corresponde a la ecuación de una parábola.

b) Para la velocidad media partimos de su definición

$$\vec{v_m} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r_2} - \vec{r_1}}{t_2 - t_1}$$

donde $\vec{r_1}$ y $\vec{r_2}$ son los valores del vector de posición en los instantes t_1 =2 s y t_2=4 s que nos dan en el problema. Sustituyéndolos

$$\vec{r_2} = (4^2 + 4 + 1,\ 1 - 3 \cdot 4) = (21,\ -11)$$
$$\vec{r_1} = (2^2 + 2 + 1,\ 1 - 3 \cdot 2) = (7,\ -5)$$

y la velocidad media será

$$\vec{v_m} = \frac{\vec{r_2} - \vec{r_1}}{t_2 - t_1} = \frac{(21,\ -11) - (7,\ -5)}{4 - 2} = \frac{(21 - 7,\ -11 - (-5))}{2} = \frac{(14,\ -6)}{2} = (7,\ -3)$$

siendo sus unidades m/s.

c) La velocidad y aceleraciones instantáneas las hallamos haciendo las derivadas del vector de posición. Para la velocidad

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(t^2 + t + 1,\ 1 - 3t) = (2t + 1,\ -3)$$

y para t=3 s

$$\vec{v} = (2 \cdot 3 + 1,\ -3) = (7,\ -3)\ \ \text{m/s}$$

Por fin para la aceleración

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(2t + 1,\ -3) = (2,\ 0)\ \ \text{m/s}^2$$

La aceleración obtenida es constante e independiente por tanto del tiempo.

Problema 4

Se trata de un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado (MRUA). Las fórmulas son

$$e = e_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2$$
$$v = v_0 + a \cdot t$$
$$v^2 = {v_0}^2 + 2 \cdot a \cdot (e - e_0)$$

De la lectura del problema se decuce que $v_0 = 0$ y v=350 km/h=97,2 m/s, e_0=0 y e=2 km=2000 m. Nos piden el tiempo y lo podemos calcular con la primera o segunda de las ecuaciones anteriores, pero para ello hemos de calcular la aceleración, que la despejamos de la tercera,

$$a = \frac{v^2 - {v_0}^2}{2(e - e_0)} = \frac{(97,2)^2 - 0^2}{2 \cdot (2000 - 0)} = 2,36 \ \ \mathrm{m/s^2}$$

y con la segunda sabemos el tiempo

$$t = \frac{v - v_0}{a} = \frac{97,2 - 0}{2,36} = 41,15 \ \ \mathrm{s}$$

Para hallar la distancia recorrida en el último segundo, sabemos por lo hecho antes que para t=41,15 s el espacio es obviamente, e=2000 m, luego para 1 segundo antes el espacio que llevará recorrido será con el tiempo t'=41.15-1=40,15 s. Con la fórmula del espacio, la primera de las tres

$$e' = e_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2 = 0 + 0 \cdot 40,15 + \frac{1}{2} \cdot 2,36 \cdot (40,15)^2 = 1902,18 \ \ \mathrm{m}$$

y en el último segundo habrá recorrido la diferencia entre e y e'

$$e - e' = 2000 - 1902,18 = 97,82 \ \ \mathrm{m}$$

Los valores numéricos pueden difererir ligeramente según los decimales que se usen en el cálculo.

$\boxed{\text{Problema 5}}$

Las fórmulas son las mismas que antes pero ahora poniendo la aceleración de la gravedad, $g = -9,8$ m/s^2, y el espacio es ahora la altura h. Del problema deducimos h_0=0, v_0=24 m/s.

$$h = h_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} g \cdot t^2$$
$$v = v_0 + g \cdot t$$
$$v^2 = {v_0}^2 + 2 \cdot g \cdot (h - h_0)$$

a) En el punto más alto la velocidad final es nula, v=0, luego de la tercera ecuación podemos despejar la altura final

$$v^2 = {v_0}^2 + 2 \cdot g \cdot (h - h_0), \qquad h - h_0 = \frac{v^2 - {v_0}^2}{2g}, \qquad h = h_0 + \frac{v^2 - {v_0}^2}{2g}$$

sustituyendo

$$h = 0 + \frac{0 - 24^2}{2 \cdot (-9,8)} = \frac{-576}{-19,6} = 29,38 \text{ m}$$

b) Para calcular el tiempo total de vuelo hemos de tener en cuenta que el espacio inicial y final son nulos, ya que sale y vuelve al suelo. Podemos usar la primera ecuación, con lo que nos quedará una ecuación de segundo grado para la t, ecuación fácil de resolver ya que no tiene término independiente y puede factorizarse.

$$h = h_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} g \cdot t^2$$
$$0 = 0 + 24 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot (-9,8) \cdot t^2, \qquad 0 = 24t - 4,9t^2$$
$$0 = t \cdot (24 - 4,9t) \qquad \text{cuyas soluciones son}$$
$$t = 0 \ \text{ y } \ 0 = 24 - 4,9t, \qquad t = \frac{24}{4,9} = 4,89 \text{ s}$$

c) Todo consiste en hallar la velocidad que tendrá el cuerpo a 20 m del suelo. Tomando como condiciones iniciales las del principio y usando la tercera ecuación, ahora tenemos h_0=0, h=20 m y v_0=24 m/s

$$v^2 = 24^2 + 2 \cdot (-9,8) \cdot (20 - 0) = 576 - 392 = 184$$
$$v = \sqrt{184} = \pm 13,56 \text{ m/s}$$

Sólo basta puntualizar que de la velocidad obtenida anteriormente hemos de quedarnos con la negativa ya que el cuerpo baja.

Problemas de Cinemática 1º Bachillerato

Caída libre y tiro horizontal

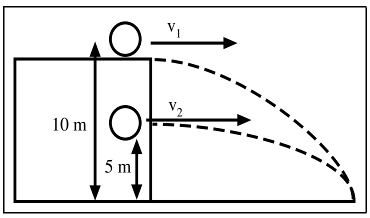
1. Desde un puente se tira hacia arriba una piedra con una velocidad inicial de 6 m/s. Calcula: a) Hasta qué altura se eleva la piedra; b) Cuánto tarda en volver a pasar hacia abajo al nivel del puente desde el que fue lanzada y cuál será entonces su velocidad; c) Si la piedra cae al río 1,94 s después de haber sido lanzada, ¿qué altura hay desde el puente hasta el río; d) Con qué velocidad llega la piedra a la superficie del agua.

2. Desde el suelo lanzamos hacia arriba un objeto a una determinada velocidad, llegando a cierta altura. Calcular por cuánto hemos de multiplicar su velocidad para que llegue al doble de altura.

3. Una pelota se lanza desde el suelo hacia arriba. En un segundo llega hasta una altura de 25 m. ¿Cuál será la máxima altura alcanzada?

4. Un avión vuela horizontalmente a 1200 m de altura, con una velocidad de 500 km/h y deja caer un paquete. Determina: a) El tiempo que le cuesta llegar al suelo el paquete; b) Qué distancia antes de llegar al suelo tiene que soltar la carga el avión para que llegue al punto correcto; c) Calcular la velocidad del paquete en el momento de llegar al suelo.

5. En los tiros horizontales mostrados en la figura, $v_1 = 4\ m/s$ y las alturas de lanzamiento son las que se indican, 10 y 5 m. Hallar cual debe ser la velocidad v_2 para que el alcance de ambos tiros sea el mismo.



6. Un surtidor de agua de una fuente se halla situado a 3 m del suelo. Si el agua sale horizontalmente, hallar qué velocidad debe tener para que alcance una distancia de 2 m. Con la velocidad calculada antes, determinar ahora a qué altura ha de ponerse el surtidor para que el alcance sea de 4 m.

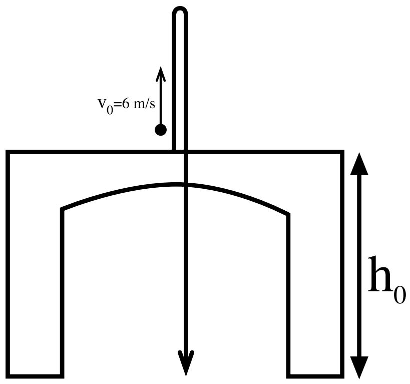
Resolución de los problemas

Problema 1

Se trata de una caída libre por lo tanto vamos a usar las fórmulas del MRUA que en este caso ya sabemos que son

$$h = h_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$
$$v = v_0 + g \cdot t$$
$$v^2 = {v_0}^2 + 2 \cdot g \cdot (h - h_0)$$

a) La siguiente figura esboza la situación de nuestro problema.



Como no sabemos desde qué altura se lanza la piedra sino resolvemos antes el apartado (c), vamos a calcular la altura máxima desde el propio puente. Tomando como origen pues el puente, h_0=0 m, y sabiendo según los datos del problema que v_0=6 m/s y g=−9,8 m/s^2, despejando de la tercera ecuación

$$v^2 = {v_0}^2 + 2 \cdot g \cdot (h - h_0), \qquad h - h_0 = \frac{v^2 - {v_0}^2}{2g}, \qquad h = h_0 + \frac{v^2 - {v_0}^2}{2g}$$

y sustituyendo

$$h = 0 + \frac{0 - 6^2}{2 \cdot (-9,8)} = \frac{-36}{-19,6} = 1,836 \ \ \text{m}$$

b) El tiempo que le cuesta volver al punto de lanzamiento desde el puente lo podemos saber con la primera ecuación. Como el origen de alturas lo hemos tomado sobre él, h_0=0, y como vuelve al mismo punto, la altura final también será cero, luego h=0.

$$h = h_0 + v_0 \cdot t + \tfrac{1}{2} g \cdot t^2$$

$$0 = 0 + 6 \cdot t + \tfrac{1}{2} \cdot (-9,8) \cdot t^2, \qquad 0 = 6t - 4,9t^2$$

$$0 = t \cdot (6 - 4,9t) \qquad \text{cuyas soluciones son}$$

$$t = 0 \ \text{ y } \ 0 = 6 - 4,9t, \qquad t = \frac{6}{4,9} = 1,224 \ \ \text{s}$$

Su velocidad en ese instante vendrá dada por

$$v = v_0 + gt, \quad v = 6 - 9,8 \cdot 1,224 = -6 \ \text{ m/s}$$

(Nótese que esta velocidad es la misma con la que se lanzó pero con el signo cambiado).
c) Para saber la altura a la que se encuentra el puente, la que hemos llamado h_0 en la figura, vamos a tomar como origen de alturas el propio río, con lo que la altura final será nula, h=0, y la altura inicial h_0 será la altura a la que está el puente. El tiempo de vuelo en este caso nos lo dan en el problema, 1,94 s, por lo que de la primera ecuación podremos despejar la altura inicial

$$h = h_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2} g t^2, \qquad h_0 = h - v_0 t - \tfrac{1}{2} g t^2$$

$$h_0 = 0 - 6 \cdot 1,94 + 4,9 \cdot 1,94^2 = 6,8 \ \text{ m}$$

d) Por fin para la velocidad al llegar al agua la obtenemos con la segunda de las ecuaciones, $v = v_0 + gt$. Como sabemos el tiempo total de vuelo, la velocidad final se halla directamente

$$v = v_0 + g \cdot t \qquad v = 6 - 9,8 \cdot 1,94 = -13,01 \ \text{ m/s}$$

Notemos el signo negativo que tiene la velocidad lo cual indica que la piedra se mueve hacia abajo.

Problema 2

En este problema, a diferencia de los demás, no se dan valores numéricos, así que vamos a plantearlo de manera algebraica y lo más general posible. Se trata de dos lanzamientos de un cuerpo desde el suelo. En el primero de ellos vamos a suponer que se lanza a una velocidad inicial v_0 y llega a una altura final h. Al lanzarlo desde el suelo tenemos pues h_0=0, y en el punto más alto v=0 m/s. Despejando de $v^2 = {v_0}^2 + 2 \cdot g \cdot (h - h_0)$ tenemos

$$h = h_0 + \frac{v^2 - {v_0}^2}{2g}, \qquad \text{y sustituyendo} \qquad h = \frac{-{v_0}^2}{2g} \tag{1}$$

Ahora lanzamos el cuerpo con otra velocidad, llamémosla v_1, y llegará a una altura que llamaremos h_1. Igual que antes tendremos ahora

$$h_1 = \frac{-{v_1}^2}{2g} \tag{2}$$

Como la altura en el segundo caso ha de ser doble que la primera h_1=2h, sustituyendo los valores de h y h_1 de las ecuaciones (1) y (2) anteriores se llega a

$$\frac{-{v_1}^2}{2g} = 2 \cdot \frac{-{v_0}^2}{2g}$$

Podemos cancelar los términos $2g$ que aparecen y los signos negativos, quedando

$${v_1}^2 = 2{v_0}^2, \text{y sacando raíces cuadradas en ambos miembros,}$$

$$v_1 = \sqrt{2}\ v_0$$

Notemos pues que al multiplicar la altura por 2, las velocidades no se multiplican por 2, sino por $\sqrt{2}$.

$\boxed{\text{Problema 3}}$

Para obtener la altura máxima alcanzada a partir de $v^2 = {v_0}^2 + 2 \cdot g \cdot (h - h_0)$ hay que saber la velocidad inicial v_0. No nos la da directamente el problema, pero podemos calcularla con lo que nos dice. Como en t=1 s la altura final a la que llega es h=25 m podemos sustituir todo en

$$h = h_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} g \cdot t^2$$

y calcular v_0. Como se lanza desde el suelo, h_0=0, entonces

$$25 = 0 + v_0 \cdot 1 - 4,9 \cdot 1^2 \qquad v_0 = 25 + 4,9 = 29,9 \ \ \text{m/s}$$

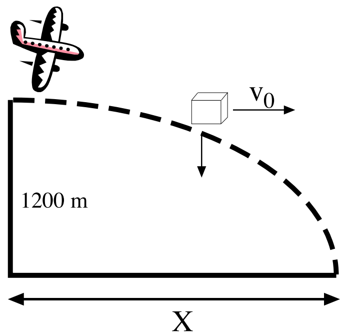
Despejando de $v^2 = {v_0}^2 + 2 \cdot g \cdot (h - h_0)$ tenemos

$$h = h_0 + \frac{v^2 - {v_0}^2}{2g}, \qquad \text{y sustituyendo} \qquad h = 0 + \frac{0 - 29,9^2}{2 \cdot (-9,8)} = 45,61 \ \ \text{m}$$

La altura máxima alcanzada por el cuerpo será entonces de 45,61 m.

$\boxed{\text{Problema 4}}$

Al caer el paquete desde el avión, visto desde tierra el movimiento que realiza es un tiro horizontal, tal como se representa en la figura.



Recordemos las ecuaciones de este movimiento

$$\begin{aligned} \vec{r} &= \vec{r}_0 + \vec{v}_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \vec{g} \cdot t^2 \\ \vec{v} &= \vec{v}_0 + \vec{g} \cdot t \end{aligned} \tag{3}$$

a) Si desglosamos la primera de las ecuaciones en sus componentes

$$(x, y) = (0, h_0) + (v_0, 0) \cdot t + \frac{1}{2} \cdot (0, g) \cdot t^2$$

de donde

$$\begin{aligned} x &= v_0 \cdot t \\ y &= h_0 + \frac{1}{2} g t^2 \end{aligned} \tag{4}$$

La altura es 1200 m y pasando los 500 km/h a m/s tenemos 500/3,6=138,8 m/s y las ecuaciones anteriores pasan a ser

$$\begin{aligned} x &= 138,8t \\ y &= 1200 - 4,9t^2 \end{aligned}$$

igualando la segunda a cero determinamos el tiempo que le cuesta caer al paquete

$$0 = 1200 - 4,9t^2, \quad t = \sqrt{\frac{1200}{4,9}} = 15,64 \ \text{ s}$$

b) La distancia a la que hay que soltar el paquete antes de que el avión llegue a la vertical vendrá dada por el alcance que tendría el tiro horizontal, que lo podemos saber con la primera de las ecuaciones (4) y empleando el tiempo del apartado (a)

$$x = 138,8t = 138,8 \cdot 15,64 = 2170,83 \ \text{ m}$$

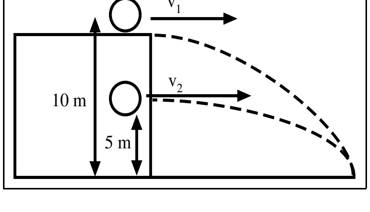
c) Para la velocidad en el suelo usamos la segunda de las ecuaciones (3) y con el tiempo que hemos hallado en el apartado (a)

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{g} \cdot t, \quad \vec{v} = (138,8, 0) + (0, -9,8) \cdot 15,64 = (138,8, -153,27) \text{ m/s}$$

y su módulo será $v = \sqrt{138,8^2 + (-153,27)^2} = 206,77$ m/s.

Problema 5

Se trata ahora de dos tiros horizontales. En el primero de ellos podemos averiguar el alcance. El segundo de ellos se realiza desde una altura de 5 m, con lo que a partir del tiempo de vuelo y el alcance, que ha de ser el mismo que el del primero, hallar su velocidad inicial, véase la figura.



Las ecuaciones desglosadas, obtenidas con las ecuaciones (4), para el cuerpo que se lanza desde los 10 m de altura son

$$\begin{aligned} x &= 4t \\ y &= 10 - 4,9t^2 \end{aligned}$$

igualando la segunda a cero determinamos el tiempo de vuelo del primer cuerpo

$$0 = 10 - 4,9t^2, \qquad t = \sqrt{\frac{10}{4,9}} = 1,428 \ \ \text{s}$$

y su alcance

$$x = 4t = 4 \cdot 1,428 = 5,712 \ \ \text{m}$$

Para el cuerpo que lanzamos desde una altura de 5 m sus ecuaciones son

$$\begin{aligned} x &= v_0 t \\ y &= 5 - 4,9t^2 \end{aligned} \tag{5}$$

El problema consiste en determinar el valor de v_0. De la segunda de las ecuaciones (5) calculamos el tiempo de vuelo para el segundo cuerpo, que resulta ser

$$0 = 5 - 4,9t^2, \qquad t = \sqrt{\frac{5}{4,9}} = 1,01 \ \ \text{s}$$

Como el alcance del segundo tiro ha de ser igual que el del primero, de la primera de las ecuaciones (5) podemos averiguar la velocidad inicial, ya que el alcance es igual al del primer cuerpo

$$x = v_0 t, \qquad 5,712 = v_0 \cdot 1,01, \qquad v_0 = \frac{5,712}{1,01} = 5,65 \ \ \text{m/s}$$

Así pues la velocidad inicial del segundo cuerpo ha de ser 5,65 m/s.

Problema 6

Las ecuaciones de movimiento para este tiro horizontal, teniendo en cuenta que h_0=3 m y que desconocemos la velocidad inicial v_0, son ahora

$$\begin{aligned} x &= v_0 t \\ y &= 3 - 4,9t^2 \end{aligned} \tag{6}$$

De la segunda calculamos, como siempre, el tiempo de vuelo haciendo nula la altura final

$$0 = 3 - 4,9t^2, \qquad t = \sqrt{\frac{3}{4,9}} = 0,782 \ \ \text{s}$$

Como el alcance ha de ser de 2 m, de la primera de las ecuaciones (6) hallamos la velocidad inicial de lanzamiento

$$x = v_0 t, \quad 2 = v_0 \cdot 0,782, \quad v_0 = \frac{2}{0,782} = 2,55 \ \text{m/s}$$

Lo que buscamos es que el alcance sea de 4 m con la velocidad que acabamos de obtener, con lo que podremos hallar el tiempo de vuelo usando una vez más la primera de las ecuaciones (6)

$$x = v_0 t, \quad 4 = 2,55 \cdot t, \quad t = \frac{4}{2,55} = 1,568 \ \text{s}$$

La ecuación de la altura en el tiro horizontal es $y = h_0 + \frac{1}{2} g t^2$. Sabemos ahora que el tiempo de vuelo ha de ser 1,568 s, sustituyendo pues en esta última expresión podemos averiguar cual debe ser la altura inicial

$$y = h_0 + \frac{1}{2} g t^2, \quad 0 = h_0 - 4,9 \cdot 1,568^2, \quad h_0 = 4,9 \cdot 1,568^2 = 12,04 \ \text{m}$$

Por tanto el surtidor de la fuente ha de colocarse ahora a 12,04 m de altura.

FÓRMULAS USADAS EN LOS PROBLEMAS

Caída libre (movimiento rectilíneo uniformemente acelerado).

$$h = h_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

$$v = v_0 + g \cdot t$$

$$v^2 = {v_0}^2 + 2 \cdot g \cdot (h - h_0)$$

Tiro horizontal

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \vec{g} \cdot t^2$$

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{g} \cdot t$$

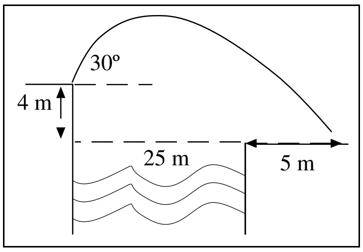
Problemas de Cinemática 1º Bachillerato

Tiro parabólico y movimiento circular

1. Hallar a qué velocidad hay que realizar un tiro parabólico para que llegue a una altura máxima de 100 m si el ángulo de tiro es de 30º.

2. Hallar a qué ángulo hay que realizar un tiro parabólico para que el alcance y la altura máxima sean iguales.

3. Un arquero quiere efectuar un tiro parabólico entre dos acantilados tal y como indica la figura. El acantilado de la izquierda se halla 4 m por arriba con respecto al de la derecha. Si el arquero sólo puede disparar con un ángulo de 30° y quiere lanzar las flechas a 5 m del acantilado de la derecha, calcula con qué velocidad mínima ha de lanzarlas. Calcula el tiempo de vuelo.



4. Un reloj de manecillas marca las 6:00 h. Hallar a qué hora se superponen las dos manecillas.

5. Si un cuerpo recorrre una circunferencia de 5 m de radio con la velocidad constante de 10 vueltas por minuto, ¿cuál es el valor del período, la frecuencia, la velocidad lineal, la velocidad angular y la aceleración normal?

6. ¿Qué velocidad angular, expresada en radianes por segundo, ha de tener una centrifugadora, para que en un punto situado a 10 cm del eje de giro produzca una aceleración normal 100 veces mayor que la de la gravedad?

7. Una rueda, puesta en movimiento por un motor, ha girado 0.5 radianes durante el primer segundo. ¿Cuántas vueltas dará la rueda en los 10 primeros segundos, suponiendo que la aceleración angular es constante durante ese tiempo? ¿Cuál será en ese instante la velocidad lineal de un punto de la llanta, si el radio de la rueda es de 50 cm? ¿Qué valor tendría la aceleración negativa de frenado, si el motor dejase de funcionar cuando la rueda gira a razón de 120 vueltas por segundo y ésta tardase 6 minutos en pararse?

8. Un motor gira a 2000 rpm y disminuye su velocidad pasando a 1000 rpm en 5 segundos. Calcular: a) La aceleración angular del motor; b) El número de revoluciones efectuadas en ese tiempo; c) la aceleración lineal de un punto de la periferia si el radio de giro es de 20 cm.

9. La velocidad angular de un motor que gira a 900 rpm desciende uniformemente hasta 300 rpm efectuando 50 revoluciones. Hallar: a) La aceleración angular; b) El tiempo necesario para realizar las 50 revoluciones.

Resolución de los problemas

Problema 1

Se trata de un tiro parabólico simple en el que el cuerpo se lanza desde el suelo y vuelve de nuevo a él. Las fórmulas en este caso son:

$$X = \frac{{v_0}^2 \ \sin 2\alpha}{-g} \qquad H_{max} = \frac{{v_0}^2 \ \sin^2\alpha}{-2g} \qquad t = \frac{2v_0 \ \sin\alpha}{-g} \tag{1}$$

Nos dicen que la altura máxima ha de ser 100 m y el ángulo de 30º, sustituyendo entonces en la fórmula de la altura máxima y despejando la velocidad inicial

$$100 = \frac{{v_0}^2 \ \sin^2 30}{-2 \cdot -9.8} \qquad {v_0}^2 = \frac{100 \cdot 2 \cdot 9.8}{0.5^2} = 7840 \qquad v_0 = \sqrt{7840} = 88.54 \text{ m/s}$$

Problema 2

La altura máxima y el alcance han de valer exactamente lo mismo. Así pues igualando la fórmula del alcance (X) con la altura máxima (H_{max}) en las ecuaciones 1 se tiene

$$\frac{{v_0}^2 \ \sin 2\alpha}{-g} = \frac{{v_0}^2 \ \sin^2\alpha}{-2g}$$

En la ecuación se cancelan las aceleraciones de la gravedad y las velocidades iniciales, por lo que el resultado al que vamos a llegar es independiente de la velocidad a la que se realiza el lanzamiento. Resulta pues la siguiente ecuación trigonométrica

$$\sin 2\alpha = \frac{\sin^2\alpha}{2}, \text{ y operando} \qquad 2\sin 2\alpha = \sin^2\alpha$$

Haciendo la sustitución trigonométrica del ángulo doble

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \ \cos\alpha$$

nos queda

$$2 \cdot 2 \sin\alpha \ \cos\alpha = \sin^2\alpha \tag{2}$$

Como buscamos ángulos diferentes de cero, $\alpha \neq 0$, tendremos también que $\sin\alpha \neq 0$ por lo tanto podemos cancelar un factor $\sin\alpha$ en cada miembro de la ecuación 2, que nos quedará

$$4\cos\alpha = \sin\alpha$$

$$4 = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha$$

$$\alpha = \tan^{-1} 4 = 75.96^{\mathrm{o}}$$

Problema 3

Se trata de un tiro parabólico, pero a diferencia de los anteriores el punto inicial y final no están a la misma altura con respecto al suelo por lo que las fórmulas 1 ya no son aplicables ahora. Hemos de plantearlo con las más generales que se deducen a partir de

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 \ t + \frac{1}{2} \ \vec{g} \ t^2$$

Especificando para cada una de las componentes tenemos

$$(x, y) = (0, 4) + (v_0 \ \cos 30, \ v_0 \ \sin 30) \ t + \frac{1}{2} \ (0, \ -9.8) \ t^2$$

$$x = v_0 \cos 30 \ t \tag{3}$$

$$y = 4 + v_0 \sin 30 \ t - 4.9 \ t^2 \tag{4}$$

Resulta más fácil resolver el último sistema de ecuaciones despejando v_0 de la ecuación 3 y sustituyendo en la ecuación 4. Calcularemos así el tiempo, pues resulta más fácil de resolver la ecuación que sale. Sustituyendo luego este tiempo en la ecuación 3 determinamos la velocidad. De la figura se ve que el alcance total del tiro parabólico es de 25+5=30 m. De la ecuación 3 tenemos pues según lo dicho

$$v_0 = \frac{30}{\cos 30 \ t}$$

Como la flecha impacta en el suelo la altura final es cero, y la ecuación 4 nos queda

$$0 = 4 + \frac{30}{\cos 30 \ t} \ \sin 30 \ t - 4.9 \ t^2$$

$$0 = 4 + 30 \ \tan 30 - 4.9 \ t^2$$

el valor de t que se obtiene de esta última ecuación es

$$t = \sqrt{\frac{4 + 30\ \tan 30}{4.9}} = 2.085 \text{ s}$$

y con la ecuación 3 calculamos la velocidad inicial

$$v_0 = \frac{30}{\cos 30\ t} = \frac{30}{\cos 30 \cdot 2.085} = 16.61 \text{ m/s}$$

El problema se podría haber resuelto directamente despejando directamente t en función de v_0 lo que ocurre es que la ecuación resultante es algo más tediosa de manipular.

Problema 4

Como las manecillas se mueven a velocidad constante se trata de un movimiento circular uniforme. Cada manecilla tendrá una velocidad angular diferente. La manecilla de las horas tarda una hora en dar una vuelta completa y la de las horas 12, por lo tanto sus velocidades angulares en radianes por segundo, vamos a llamarlas ω_m y ω_h, serán

$$\omega_m = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{3600} = \frac{\pi}{1800} \text{ y } \omega_h = \frac{2\pi}{12 \cdot 3600} = \frac{\pi}{21600}$$

A las 6:00 h las dos manecillas se encuentran separadas un ángulo de 180º o π radianes, así pues en el momento de superponerse las dos, la de los minutos ha de recorrer el mismo ángulo que la de las horas más π radianes. Es decir,

$$\varphi_m = \pi + \varphi_h, \text{ por lo tanto y como } \omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t},\ \omega_m\ t = \pi + \omega_h\ t$$

En esta última fórmula vamos a sustituir los valores de ω_m y ω_h y calcular el valor de t dejándola sola en el miembro de la izquierda

$$\omega_m\ t - \omega_h\ t = \pi,\ (\omega_m - \omega_h)\ t = \pi, \quad \left(\frac{\pi}{1800} - \frac{\pi}{21600}\right)\ t = \pi$$

Podemos sacar factor común a π y cancelarlas en ambos miembros, llegando a

$$\left(\frac{1}{1800} - \frac{1}{21600}\right)\ t = 1, \quad \frac{11}{21600}\ t = 1, \text{ luego, } t = \frac{21600}{11} = 1963.63\ s$$

Ese es el tiempo en segundos que tardan en encontrarse las dos agujas, y dividiendo por 60 para ver los minutos y luego los segundos tenemos que

$$1963.63\ s = 32 \text{ minutos } 43 \text{ segundos, aproximadamente}$$

Así pues las agujas del reloj se superponen a las 6:32:43

Problema 5

Se trata de un movimiento circular uniforme. La velocidad angular nos la dan en vueltas/min y pasándola a radianes/s será

$$\omega = \frac{10 \cdot 2\pi}{60} = \frac{20\pi}{60} = \frac{\pi}{3} \text{ rad/s}$$

El periodo es

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{3}} = \frac{6\pi}{\pi} = 6 \text{ s}$$

La frecuencia

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\frac{\pi}{3}}{2\pi} = \frac{\pi}{6\pi} = \frac{1}{6} = 0.16 \text{ Hz}$$

La velocidad lineal es

$$v = \omega\ R = \frac{\pi}{3} \cdot 5 = \frac{5\pi}{3} = 5.235 \text{ m/s}$$

Y la aceleración normal

$$a_N = \omega^2\ R = \left(\frac{\pi}{3}\right)^2 \cdot 5 = \frac{5\pi^2}{9} = 5.483 \text{ m/s}^2$$

Problema 6

La aceleración normal es 100 veces la de la gravedad por lo tanto

$$a_N = 100\ g = 100 \cdot 9.8 = 980 \text{ m/s}^2$$

De la fórmula de la aceleración normal podemos despejar la velocidad angular, y con R=0.1 m,

$$a_N = \omega^2\ R, \qquad \omega = \sqrt{\frac{a_N}{R}} = \sqrt{\frac{980}{0.1}} = \sqrt{9800} = 98.99 \text{ rad/s}$$

Problema 7

Se trata de un movimiento circular uniformemente acelerado, cuyas fórmulas son

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi_0 + \omega_0\ t + \frac{1}{2}\ \alpha\ t^2 \\ \omega &= \omega_0 + \alpha\ t \\ \omega^2 &= {\omega_0}^2 + 2\ \alpha\ (\varphi - \varphi_0) \\ a &= \alpha\ R \end{aligned} \tag{5}$$

Nos dan el ángulo girado, el tiempo y la velocidad inicial, que de la lectura del problema se deduce que es nula. Hemos de obtener primero el valor de la aceleración angular. De la primera de las ecuaciones 5 tenemos pues

$$\varphi = \frac{1}{2}\,\alpha\, t^2, \qquad \alpha = \frac{2\,\varphi}{t^2} = \frac{2 \cdot 0.5}{1^2} = 1 \text{ rad/s}^2$$

El ángulo girado al cabo de 10 segundos será por tanto

$$\varphi = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 10^2 = 50 \text{ radianes}$$

y como una vuelta equivale a 2π radianes, el número de vueltas se obtendrá dividiendo por este último factor

$$\text{número de vueltas} = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{50}{2\pi} = 7.95$$

Para determinar la velocidad lineal hay que conocer antes la velocidad angular final, que se obtiene con la segunda de las ecuaciones 5, que en nuestro caso al ser nula la velocidad angular inicial

$$\omega = \alpha\, t = 1 \cdot 10 = 10 \text{ rad/s, y así la velocidad lineal es}$$

$$v = \omega\, R = 10 \cdot 0.5 = 5 \text{ m/s}$$

La aceleración angular de frenado se puede sacar con la segunda de las ecuaciones 5

$$\alpha = \frac{\omega - \omega_0}{t} \tag{6}$$

La velocidad angular final es nula ya que se detiene. La inicial es de 120 vueltas por segundo, que pasándolo a rad/s resulta

$$\omega = \frac{120 \cdot 2\pi}{1} = 240\pi \text{ rad/s}$$

Sustituyendo en la ecuación 6 y con el dato de los 6 minutos que tarda en detenerse

$$\alpha = \frac{0 - 240\pi}{6 \cdot 60} = -\frac{240\pi}{360} = -\frac{2\pi}{3} = -2.094 \text{ rad/s}^2$$

Problema 8

Vamos a pasar las velocidades inicial y final a rad/s

$$\omega_0 = \frac{2000 \cdot 2\pi}{60} = \frac{4000\pi}{60} = \frac{200\pi}{3} \qquad \omega = \frac{1000 \cdot 2\pi}{60} = \frac{2000\pi}{60} = \frac{100\pi}{3} \text{ rad/s}$$

a) La aceleración angular será entonces, con el tiempo de 5 segundos que nos dan y usando la ecuación 6

$$\alpha = \frac{\omega - \omega_0}{t} = \frac{\dfrac{100\pi}{3} - \dfrac{200\pi}{3}}{5} = \frac{-\dfrac{100\pi}{3}}{5} = \frac{-100\pi}{15} = -\frac{20\pi}{3} = -20.94 \text{ rad/s}^2$$

b) Para el número de vueltas, a partir de la ecuación del ángulo φ

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0\ t + \frac{1}{2}\ \alpha\ t^2$$

$$\varphi = 0 + \frac{200\pi}{3} \cdot 5 + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{20\pi}{3}\right) \cdot 5^2 = \frac{1000\pi}{3} - \frac{500\pi}{6} = \frac{1000\pi}{3} - \frac{250\pi}{3} = \frac{750\pi}{3}$$

Y finalmente el número de vueltas dividiendo por 2π

$$\text{número de vueltas} = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{\dfrac{750\pi}{3}}{2\pi} = \frac{750\pi}{6\pi} = \frac{750}{6} = 125$$

c) La aceleración lineal la calculamos con la cuarta de las ecuaciones 5 y con R=0.2 m

$$a = \alpha\ R,\ \ a = -20.94 \cdot 0.2 = -4.188 \text{ m/s}^2$$

Problema 9

Primero, al igual que antes, expresamos las velocidades y revoluciones en rad/s y radianes respectivamente

$$\omega_0 = \frac{900 \cdot 2\pi}{60} = 30\pi \quad\ \omega = \frac{300 \cdot 2\pi}{60} = 10\pi \text{ rad/s},\ \ \varphi = 50 \cdot 2\pi = 100\pi \text{ rad}$$

a) De la tercera de las ecuaciones 5 podemos obtener la aceleración angular

$$\omega^2 = {\omega_0}^2 + 2\ \alpha\ (\varphi - \varphi_0),\ \ \alpha = \frac{\omega^2 - {\omega_0}^2}{2\ (\varphi - \varphi_0)}$$

Y sustituyendo

$$\alpha = \frac{(10\pi)^2 - (30\pi)^2}{2 \cdot 100\pi} = \frac{100\pi^2 - 900\pi^2}{200\pi} = -\frac{800\pi^2}{200\pi} = -4\pi = -12.56 \text{ rad/s}^2$$

b) Con la aceleración ya podemos hallar el tiempo empleado en dar esas revoluciones. De la segunda de las ecuaciones 5

$$\omega = \omega_0 + \alpha\ t,\ \ \ t = \frac{\omega - \omega_0}{\alpha}$$

Sustituyendo

$$t = \frac{10\pi - 30\pi}{-4\pi} = \frac{-20\pi}{-4\pi} = 5 \text{ s}$$

FÓRMULAS USADAS EN LOS PROBLEMAS

Tiro parabólico

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0\ t + \frac{1}{2}\ \vec{g}\ t^2$$

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{g}\ t$$

$$X = \frac{{v_0}^2\ \sin 2\alpha}{-g} \qquad H_{max} = \frac{{v_0}^2\ \sin^2\alpha}{-2g} \qquad t = \frac{2v_0\ \sin\alpha}{-g}$$

Movimiento circular uniforme

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}, \qquad T = \frac{2\pi}{\omega}, \qquad f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

$$v = \omega\ R, \qquad a_N = \frac{v^2}{R} = \omega^2\ R$$

Movimiento circular uniformemente acelerado

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0\ t + \frac{1}{2}\ \alpha\ t^2$$

$$\omega = \omega_0 + \alpha\ t$$

$$\omega^2 = {\omega_0}^2 + 2\ \alpha\ (\varphi - \varphi_0)$$

$$a = \alpha\ R$$

Problemas de dinámica

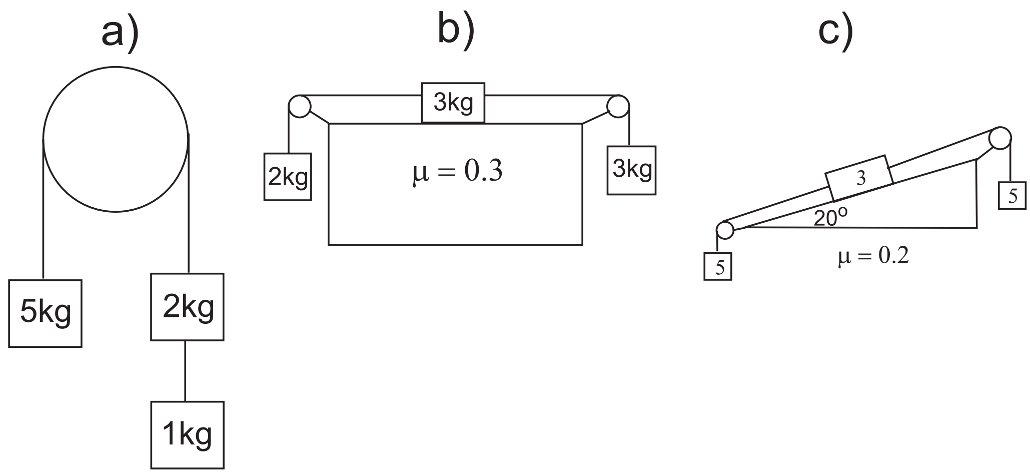
1. Calcula qué fuerza de hay que aplicar sobre un automóvil que se desplaza a 54 km/h para que se detenga tras recorrer 20 m. Masa 800 kg.

2. Sobre un determinado cuerpo actúan dos fuerzas en sentido opuesto. La primera de ellas de 300 N y la segunda de 100 N. Si la aceleración del cuerpo es de 2 m/s^2, ¿cuál es su masa?

3. Un coche de 1000 kg de masa acelera de 0 a 100 km/h en 10 segundos. La fuerza que desarrolla el motor es de 3000 N. Calcula la fuerza de rozamiento y el valor del coeficiente dinámico de rozamiento.

4. Determina la fuerza que hay que aplicar sobre un cuerpo de 2 kg para que ascienda un plano inclinado de 45º a velocidad constante en los siguientes casos: a) no existe rozamiento; b) existe rozamiento y $\mu = 0{,}2$

5. Calcula la aceleración de los siguientes sistemas



6. En el ejercicio anterior calcula el valor de las tensiones de cada uno de los cables en cada caso.

7. En el problema 5b y 5c, calcula qué masa hay que poner y donde para que el sistema permanezca en reposo.

8. Una grúa puede realizar una fuerza elevadora máxima por valor de 10.000 N. Si la aceleración que puede generar el motor es de 2 m/s^2, determina cual es la carga máxima (en kg) que puede elevar la grúa.

Soluciones

1. $F = -4500$ N
2. $m = 100$ kg
3. $F_r = 222{,}2$ N $\quad \mu = 0{,}022$
4. a) $F = 13{,}85$ N $\quad$ b) $F = 16{,}62$ N
5. a) $a = 2{,}45$ m/s^2 $\quad$ b) $a = 0{,}1225$ m/s^2 $\quad$ c) $a = 0{,}348$ m/s^2
6. a) $T_1 = 36{,}75$ N, $T_2 = 12{,}25$ N $\quad$ b) $T_1 = 29{,}0325$ N, $T_2 = 19{,}845$ N $\quad$ c) $T_1 = 47{,}26$ N $T_2 = 50{,}74$ N
7. Se puede hacer de varias maneras. Hay que aplicar la segunda ley de Newton e igualar a 0.
8. $m = 847{,}45$ kg

Fórmulas

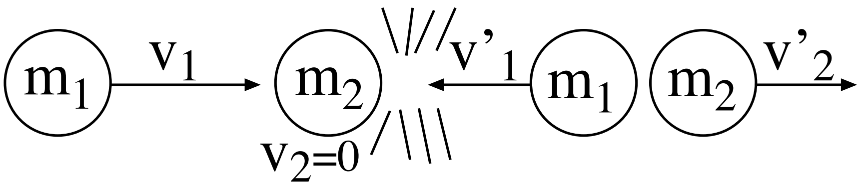
$$\Sigma F = m\,a$$
$$F_T = mg\sin\alpha$$
$$N = mg\cos\alpha$$
$$F_r = \mu\,mg\cos\alpha$$

$$e = e_o + v_o\,t + \tfrac{1}{2}at^2$$
$$v = v_o + at$$
$$v^2 = v_o^2 + 2a(e - e_o)$$

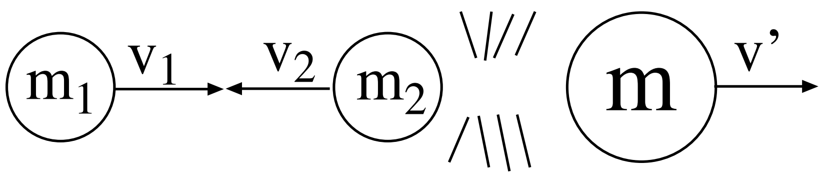
Problemas de Física 1º Bachillerato

Conservación de la cantidad de movimiento

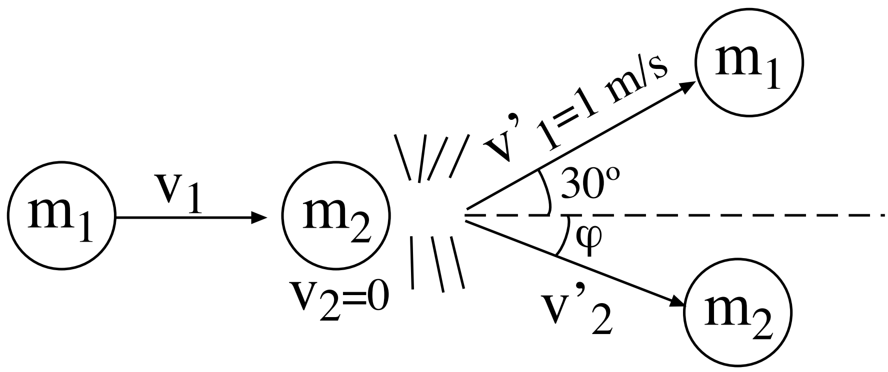
1. Calcular la velocidad de la bola m_2 después de la colisión, v'_2, según se muestra en la siguiente figura. El movimiento tiene lugar en este caso a lo largo del eje X. Todas las masas se dan en kg y las velocidades en m/s. Datos: m_1=4, m_2=6, v_1=5, v_2=0, v'_1=2.



2. El choque de la figura es inelástico y las dos masas después de la colisión se mueven como una sola. Calcular la velocidad después del choque. Datos: m_1=2, m_2=3, v_1=4, v_2=5.



3. Teniendo en cuenta la geometría de la colisión representada en la figura determina la velocidad de la masa m_2 después del choque y el ángulo que se desvía. Datos: m_1=4, m_2=6, v_1=3, v_2=0, v'_1=1.



Movimiento Armónico Simple (MAS)

4. Un cuerpo, animado de un MAS, recorre un segmento de 8 cm. La frecuencia del movimiento es de 10 Hz, y en el tiempo $t = 0$, el cuerpo está en su máxima elongación. Escribe la ecuación del movimiento. Calcula la aceleración en $t = 0$ s.

5. Un punto material se mueve de tal forma que su aceleración varía en función de la distancia al origen de acuerdo a la expresión $a = -16 \cdot y$. En $y = 0$ su velocidad es -5 m/s y en $t = 0$ se halla en el punto de elongación máxima. Calcular: a) la pulsación, periodo y frecuencia; b) la amplitud; c) la ecuación del movimiento; d) la ecuación de la velocidad.

6. La amplitud de un MAS es de 25 cm y su periodo $T = 3$ s. Halla: a) la frecuencia y la pulsación. b) la velocidad máxima y la velocidad correspondiente a una elongación de $y = 15$ cm. c) la aceleración máxima y la correspondiente a una elongación de $y = 20$ cm.

7. ¿En cuanto hemos de aumentar la masa de un cuerpo que pende de un muelle para que el periodo de las oscilaciones se triplique?

8. De un muelle colgamos un cuerpo de 250 g y observamos que se alarga una distancia de 20 cm. ¿Cuánto vale la constante elástica del muelle? Puesto a oscilar, ¿cual sería el periodo de las oscilaciones?

9. La aceleración de la gravedad en la Luna es 1,96 m/s^2 . Hallar el periodo de las oscilaciones de un péndulo de 2 m de longitud. ¿Qué longitud habría de tener ese péndulo en la Tierra para que tuviera el mismo periodo de oscilación que en la Luna?.

10. En el ecuador, donde g = 9.79 m/s^2 , un péndulo oscila con un periodo de 3 s. Ese mismo péndulo nos lo llevamos al Polo Sur, donde g = 9.81 m/s^2 , ¿cual sería ahora el periodo de las oscilaciones? Al cabo de un día ¿cuanto habría adelantado un reloj en el Ecuador respecto de otro en el Polo?

Resolución de los problemas

Problema 1

Al tratarse de un choque y no actuar fuerzas externas sabemos que se conserva la cantidad de movimiento total del sistema y ha de ser igual antes y después de la colisión. Como además el movimiento sólo tiene lugar a lo largo del eje X no hace falta tener en consideración el carácter vectorial de la velocidad, o lo que es lo mismo, los vectores sólo tienen componente X. Como la bola 1 después del choque se mueve hacia la izquierda su velocidad será de -2 m/s, por lo tanto,

$$m_1\ v_1 + m_2\ v_2 = m_1\ v_1' + m_2\ v_2'$$

Sustituyendo los valores

$$4 \cdot 5 + 6 \cdot 0 = 4 \cdot (-2) + 6 \cdot v_2'$$

y despejando

$$20 = -8 + 6 \cdot v_2' \qquad v_2' = \frac{28}{6} = 4,6 \text{ m/s}$$

Notemos que el signo de v'_2 es positivo lo cual significa que m_2 se mueve hacia la derecha.

Problema 2

Se trata ahora de un choque inelástico en el cual la masa no se conserva. Como después del choque las dos masas se unen para formar una tendremos que $m=m_1+m_2$. Aplicando de nuevo el principio de conservación de la cantidad de movimiento,

$$m_1\ v_1 + m_2\ v_2 = (m_1 + m_2)\ v'$$

Teniendo en cuenta que v_2 es negativa, y sustituyendo,

$$2 \cdot 4 + 3 \cdot (-5) = 5 \cdot v'$$

y despejando

$$8 - 15 = 5 \cdot v' \qquad v' = -\frac{7}{5} = -1,4 \text{ m/s}$$

El conjunto se mueve ahora hacia la izquierda.

Problema 3

Esta colisión tiene lugar en dos dimensiones, luego ahora sí hay que tener en cuenta el carácter vectorial de la velocidad. El principio de conservación de la cantidad de movimiento se escribe

$$m_1\ \vec{v}_1 + m_2\ \vec{v}_2 = m_1\ \vec{v'}_1 + m_2\ \vec{v'}_2$$

por lo tanto

$$m_1\ (v_1, 0) + m_2\ (0, 0) = m_1\ (v_1'\ \cos 30,\ v_1'\ \sin 30) + m_2\ (v_2'\ \cos\varphi,\ v_2'\ \sin\varphi)$$

Especificando para cada una de las componentes tenemos

$$m_1\ v_1 = m_1\ v_1'\ \cos 30 + m_2\ v_2'\ \cos\varphi \tag{1}$$

$$0 = m_1\ v_1'\ \sin 30 + m_2\ v_2'\ \sin\varphi \tag{2}$$

Las ecuaciones (1) y (2) forman un sistema cuyas incógnitas son v'_2 y φ. Sustituyendo todos los datos y simplificando se llega a

$$12 - 2\sqrt{3} = 6\ v_2'\ \cos\varphi \tag{3}$$

$$-2 = 6\ v_2'\ \sin\varphi \tag{4}$$

Dividiendo ahora la ecuación (4) entre la (3) se simplifican las v'_2 y nos aparece $\tan\varphi$

$$\frac{6\ v_2'\ \sin\varphi}{6\ v_2'\ \cos\varphi} = \tan\varphi\ \Rightarrow\ \tan\varphi = \frac{-2}{12 - 2\sqrt{3}} = -0,23$$

Así pues el ángulo que se desvía la bola m_2 es

$$\varphi = \tan^{-1}(-0,23) = -13,18^{o}$$

Y con la ecuación (4) calculamos la velocidad de la bola después del choque

$$v_2' = \frac{-2}{6\ \sin\varphi} = \frac{-2}{6\ \sin(-13,18)} = 1,46\ \mathrm{m/s}$$

Problema 4

La ecuación del movimiento armónico simple (MAS) es

$$y = A\ \sin(\omega\ t + \varphi) \tag{5}$$

Con los datos que nos da el problema hemos de calcular A, ω y φ. El segmento total que recorre un cuerpo con un MAS es igual al doble de su amplitud, por lo tanto

$$2A = 0,08 \;\Rightarrow\; A = 0,04 \text{ m}$$

La pulsación ω podemos calcularla a partir de la frecuencia con la fórmula

$$\omega = 2\pi f \;\Rightarrow\; \omega = 2\pi \cdot 10 = 20\pi \text{ rad/s}$$

En el enunciado del problema se nos dice también que en t=0 el cuerpo está en su máxima elongación, es decir en t=0 tenemos que y=A, sustituyendo pues en la ecuación (5) podemos calcular la fase inicial φ.

$$A = A\sin(\omega \cdot 0 + \varphi) \Rightarrow\; A = A\;\sin\varphi,\; \sin\varphi = 1 \;\Rightarrow\; \varphi = \frac{\pi}{2}$$

La ecuación del movimiento queda finalmente

$$y = 0,04\;\sin(20\pi t + \frac{\pi}{2})$$

Para calcular la aceleración hacemos uso de la fórmula

$$a = -\omega^2\; y = -(20\pi)^2 \cdot 0,04 \cdot \sin(20\pi t + \frac{\pi}{2})$$

que en t=0 queda

$$a = -(20\pi)^2 \cdot 0,04 \cdot \sin\frac{\pi}{2} = -16\;\pi^2 = -157,91 \text{ m/s}^2$$

Problema 5

a) En el enunciado se nos dice que $a = -16 \cdot y$, que comparándola con $a = -\omega^2 y$ nos permite deducir que

$$\omega^2 = 16,\; \omega = 4,\; \text{luego } T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2} = 1,57 \text{ s}$$

La frecuencia será

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi} = 0,636 \text{ Hz}$$

b) Para determinar la amplitud, sabiendo que en y=0 la velocidad es de -5 m/s y usando la fórmula

$$v^2 = \omega^2\;(A^2 - y^2) \tag{6}$$

Sustituyendo en (6) los valores

$$(-5)^2 = 4^2 \cdot (A^2 - 0^2) \;\Rightarrow\; A = \sqrt{\frac{25}{16}} = \frac{5}{4} = 1,25 \text{ m}$$

c) Para escribir la ecuación del movimiento nos queda por hallar la fase inicial φ. Como en t=0 la elongación es máxima, es decir, y=A en t=0, de la ecuación general del MAS (5) volvemos a tener

$$A = A\ \sin\varphi,\ \sin\varphi = 1 \;\Rightarrow\; \varphi = \frac{\pi}{2}$$

Y la ecuación del movimiento es ahora

$$y = \frac{5}{4}\ \sin(4\ t + \frac{\pi}{2})$$

d) La ecuación de la velocidad es

$$v = A\ \omega\ \cos(\omega t + \varphi) \tag{7}$$

en la que sustituyendo los valores obtenemos

$$v = \frac{5}{4} \cdot 4\ \cos(4t + \frac{\pi}{2}) = 5\ \cos(4t + \frac{\pi}{2})$$

Problema 6

a) La amplitud es A=0,25 m y T=3 s. La frecuencia y la pulsación se obtienen fácilmente

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{3} = 0,33 \text{ Hz},\ \text{y } \omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{3} \text{ rad/s}$$

b) La velocidad máxima la podemos averiguar con la ecuación (6) y será lógicamente cuando y=0

$$v = \pm\omega\sqrt{A^2 - y^2} = \omega\sqrt{A^2 - 0^2} = \omega A = \frac{2\pi}{3} \cdot 0,25 = 0,523 \text{ m/s}$$

Para y=0,15 m, la velocidad será pues

$$v = \pm\omega\sqrt{A^2 - y^2} = \pm\frac{2\pi}{3}\sqrt{0,25^2 - 0,15^2} = \pm 0,418 \text{ m/s}$$

c) La aceleración, usando la fórmula

$a = -\omega^2\ y$, será máxima cuando y=A, entonces, $a = \omega^2\ A = \left(\frac{2\pi}{3}\right)^2 \cdot 0,25 = 1,096 \text{ m/s}^2$

Y cuando y=20 cm $\Rightarrow$ y=0,2 m y entonces

$$a = -\omega^2\ y = -\left(\frac{2\pi}{3}\right)^2 \cdot 0,2 = -0,877\ \mathrm{m/s^2}$$

Problema 7

El periodo de las oscilaciones de un cuerpo de masa m puesto a oscilar en un muelle de constante elástica k es

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \tag{8}$$

Queremos obtener cual debe ser la masa, llamémosla m', que hemos de colgar del mismo muelle para que su periodo se multiplique por tres. Esa nueva masa m' tendrá un periodo T' dado igualmente por

$$T' = 2\pi\sqrt{\frac{m'}{k}} \tag{9}$$

Dividiendo la ecuación (9) entre la (8) y simplificando

$$\frac{T'}{T} = \frac{2\pi\sqrt{\dfrac{m'}{k}}}{2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}} = \sqrt{\frac{m'}{m}}$$

La relación entre T' y T ha de ser 3 luego

$$\frac{T'}{T} = 3 = \sqrt{\frac{m'}{m}},\ \text{de donde elevando al cuadrado}\quad 9 = \frac{m'}{m}$$

llegando por fin a

$$m' = 9\ m$$

Así pues, si queremos multiplicar por tres el periodo, la masa ha de multiplicarse por nueve.

Problema 8

El muelle se alarga debido al peso que actúa en su extremo. La fuerza y el estiramiento que sufre el muelle son proporcionales según la ley de Hooke

$$F = -k\ \Delta y \tag{10}$$

donde k es la constante elástica del muelle. Como la fuerza que produce el alargamiento es el peso, $F = P$, y Δy=0,2 m, sustituyendo en la ley de Hooke,

$$P = -k\ \Delta y, \quad mg = -k\ \Delta y \ \Rightarrow\ k = -\frac{mg}{\Delta y} = -\frac{0,25 \cdot (-9,8)}{0,2} = 12,25 \text{ N/m}$$

El periodo de las oscilaciones será entonces

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{0,25}{12,25}} = 0,897 \text{ s}$$

Problema 9

El periodo de las oscilaciones de un péndulo matemático de longitud L viene dado, como ya se sabe, por la expresión

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \tag{11}$$

donde g es la aceleración de la gravedad, que la tomaremos en estos problemas con signo positivo. Sustituyendo directamente los datos que nos dan en el problema, el periodo en la Luna será, tomando la aceleración de la gravedad en la Luna (g=1,96 m/s^2)

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{2}{1,96}} = 6,34 \text{ s}$$

Si queremos que ese periodo sea igual en la Tierra, donde la g es 9,8, ahora el péndulo habrá de tener una longitud diferente. Sustituyendo de nuevo en la fórmula (11)

$$6,34 = 2\pi\sqrt{\frac{L}{9,8}}, \ \Rightarrow\ 6,34^2 = 4\pi^2\frac{L}{9,8}, \ \Rightarrow\ L = \frac{9,8 \cdot 6,34^2}{4\pi^2} = 9,97 \text{ m}$$

Problema 10

Como sabemos el periodo y la aceleración de la gravedad podemos calcular la longitud del péndulo. Despejando de la ecuación (11)

$$L = \frac{g\ T^2}{4\pi^2}$$

En el ecuador g=9,79 y T=3, con lo que sustituyendo

$$L = \frac{9,79 \cdot 3^2}{4\pi^2} = 2,23 \text{ m}$$

Sabiendo la longitud, si ese mismo péndulo nos lo llevamos ahora al Polo, donde la gravedad es algo superior por estar más cerca del centro de la Tierra, el nuevo periodo será ahora

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{2,23}{9,81}} = 2,9956 \text{ s}$$

Como vemos el periodo es prácticamente el mismo, pero como el tiempo que marca el reloj viene dado por las oscilaciones que da el péndulo a lo largo del día, al ser los periodos diferentes, las oscilaciones en el Ecuador y en el Polo también serán diferentes. El número de oscilaciones en un día se obtendrá dividiendo los segundos de un día entre los respectivos periodos. En el Ecuador las oscilaciones serán

$$\frac{86400}{3} = 28800 \text{ oscilaciones}$$

y en el Polo

$$\frac{86400}{2,9956} \simeq 28842 \text{ oscilaciones}$$

La diferencia de oscilaciones entre los dos lugares es entonces

$$28842 - 28800 = 42 \text{ oscilaciones}$$

Como para cada oscilación emplea un tiempo de aproximadamente 3 s, el retraso de uno respecto a otro al cabo de un día será

$$42 \times 3 = 126 \text{ s} = 2 \text{ m} \;\; 6 \text{ s}$$

FÓRMULAS USADAS EN LOS PROBLEMAS

Conservación de la cantidad de movimiento

$$m_1\ \vec{v_1} + m_2\ \vec{v_2} = m_1\ \vec{v_1'} + m_2\ \vec{v_2'} \qquad \text{choque elástico}$$

$$m_1\ \vec{v_1} + m_2\ \vec{v_2} = (m_1 + m_2)\ \vec{v'} \qquad \text{choque inelástico}$$

Movimiento Armónico Simple (MAS)

$$\omega = 2\pi f, \quad f = \frac{1}{T}$$

$$y = A\sin(\omega t + \varphi)$$

$$v = A\omega\ \cos(\omega t + \varphi), \qquad v = \pm\omega\sqrt{A^2 - y^2}$$

$$a = -\omega^2\ y, \qquad a = -A\omega^2\ \sin(\omega\ t + \varphi)$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \qquad \text{periodo de oscilación de un muelle}$$

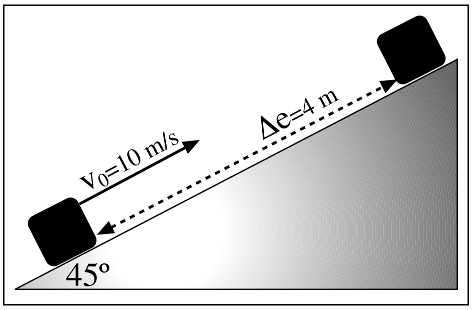
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \qquad \text{periodo de oscilación de un péndulo matemático}$$

Problemas de Física 1º Bachillerato

Principio de conservación de la energía mecánica

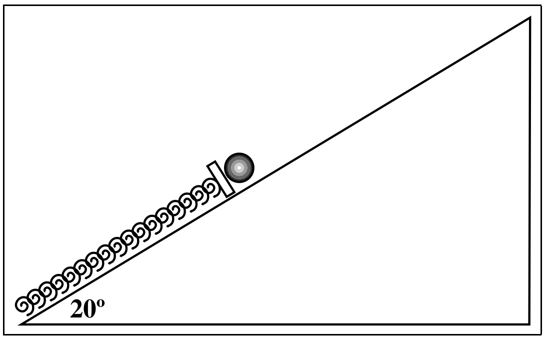
1. Desde una altura h dejamos caer un cuerpo. Hallar en qué punto de su recorrido se cumple
$$E_c = \frac{1}{4}\, E_p$$

2. Desde la parte inferior de un plano inclinado lanzamos hacia arriba un cuerpo con una velocidad inicial de 10 m/s, tal y como indica la figura. El cuerpo recorre una distancia de 4 metros sobre el plano hasta que se detiene. Calcular, aplicando el principio de conservación de la energía mecánica, cual es el valor del coeficiente de rozamiento.



3. Desde el suelo lanzamos hacia arriba un cuerpo con una velocidad inicial de 20 m/s. Vamos a suponer que el rozamiento con el aire es una fuerza constante y de valor 10 N. Hallar a qué altura máxima llega, y que ésta es menor que si no hubiera rozamiento. (Masa del cuerpo 10 kg)

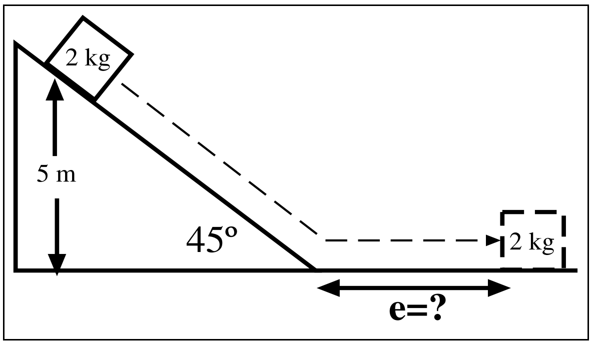
4. Una masa de 30 g comprime un muelle de constante elástica 100 N/m una longitud de 15 cm, ver figura. Cuando se suelta, el muelle empuja la masa hacia arriba de un plano inclinado 20^o. El coeficiente de rozamiento en todo el recorrido es μ=0.2. Calcula la velocidad que tiene la masa en el momento en el que el muelle recupera su longitud natural.



5. Un automóvil de 1200 kg sube una pendiente del 10% a 90 km/h. Si el coeficiente de rozamiento dinámico es μ=0.4, calcular cual es la potencia en caballos desarrollada por el motor.

6. Si dejamos caer un cuerpo desde una altura H llega al suelo con una velocidad v. ¿Si duplicamos la altura se duplicará la velocidad con qué llega al suelo? Justificar usando el principio de conservación de la energía mecánica. (El rozamiento se considera despreciable)

7. Desde un plano inclinado 45°, tal y como muestra la figura se deja caer un cuerpo. Usando el principio de conservación de la energía calcular qué distancia recorre el cuerpo sobre el plano horizontal hasta que se detiene. Hay rozamiento tanto en el plano inclinado como en el tramo horizontal. h=5 m, μ=0.2, m=2 kg.



Resolución de los problemas

Problema 1

Como nos preguntan en que punto de su recorrido ocurre la relación indicada, es decir, que su energía cinética es la cuarta parte de la energía potencial, vamos a suponer que la altura máxima a la que asciende el cuerpo es H. En el punto más alto la velocidad a la que llega es nula, por lo tanto, usando el principio de conservación de la energía mecánica, en ese punto tendremos que

$$E_M = E_c + E_p = \frac{1}{2}\ mv^2 + mgh = \frac{1}{2}\ m\ 0^2 + mgH = mgH \tag{1}$$

Sustituyendo en la fórmula de la energía mecánica la condición del problema

$$E_M = E_c + E_p = \frac{1}{4}\ E_p + E_p = \frac{5}{4}\ E_p = \frac{5}{4}\ mgh \tag{2}$$

Como la energía mecánica según la ecuación (1) es mgH, sustituyendo en la ecuación (2)

$$mgH = \frac{5}{4}\, mgh$$

de donde simplificando m y g calculamos h

$$h = \frac{4}{5}\, H$$

Problema 2

Como ahora existe rozamiento, el principio de conservación de la energía toma ahora la forma

$$E_{M_i} = E_{M_f} + W_R \tag{3}$$

La energía mecánica inicial E_{M_i} será la suma de la energía cinética más la potencial. Como el cuerpo parte desde el suelo su energía potencial es nula, por lo tanto su energía mecánica vendrá dada sólo por la cinética, es decir

$$E_{M_i} = \frac{1}{2}\, mv_0^2$$

De la misma manera, en el instante final el cuerpo se detiene después de subir una altura h, por lo que su energía mecánica final sólo será energía potencial gravitatoria

$$E_{M_f} = mgh$$

La altura h que asciende el cuerpo puede hallarse sabiendo la distancia Δe que recorre sobre el plano. Por trigonometría, la altura a la que sube el cuerpo no es más que el cateto opuesto del triángulo y la hipotenusa la distancia recorrida sobre el plano, luego

$$\sin\alpha = \frac{h}{\Delta e}, \quad \text{de donde despejando,} \quad h = \Delta e\ \sin\alpha \tag{4}$$

El trabajo de rozamiento, W_R, se calcula con la fórmula

$$W_R = F_R\ \Delta e$$

pues el desplazamiento y la fuerza en este caso son paralelos y llevan el mismo sentido ($\cos\varphi = 1$). Sustituyendo en la ecuación (3) todo lo obtenido y teniendo en cuenta que $F_R = \mu mg\cos\alpha$ llegamos a que

$$\frac{1}{2}\, mv_0^2 = mgh + \mu\ mg\cos\alpha\Delta e$$

En esta última ecuación, simplificando las masas de todos los miembros, sustituyendo el valor de h de la ecuación (4) y multiplicando todo por dos, llegamos a

$$v_0^2 = 2\ g \sin\alpha\Delta e + 2\ \mu g \cos\alpha\Delta e$$

Despejando μ de esta última

$$\mu = \frac{v_0^2 - 2\ g \sin\alpha\Delta e}{2\ g \cos\alpha\Delta e} \tag{5}$$

Sustituyendo en la ecuación (5) los datos del problema

$$\mu = \frac{10^2 - 2\cdot 9,8 \cdot \sin 45 \cdot 4}{2\cdot 9,8\cdot \cos 45\cdot 4} = \frac{44,563}{55,437} = 0,803$$

Problema 3

En este problema también interviene la fuerza de rozamiento del aire, así pues, una vez más

$$E_{M_i} = E_{M_f} + W_R$$

La fuerza de rozamiento es constante y su valor nos lo dan. En nuestro caso, la distancia sobre la que actúa el rozamiento es igual a la altura que asciende el cuerpo ($\Delta e = h$). La energía mecánica inicial será sólo energía cinética y la final sólo energía potencial ya que el cuerpo se detiene. Sustituyendo todo esto en la ecuación anterior

$$\frac{1}{2}\ m v_0^2 = mgh + F_R\ h$$

Sacando factor común a h

$$\frac{1}{2}\ m v_0^2 = h\ (mg + F_R)$$

y despejando

$$h = \frac{m v_0^2}{2(mg + F_R)} \tag{6}$$

Sustituyendo los valores del problema en la ecuación (6)

$$h = \frac{10\cdot 20^2}{2\cdot(10\cdot 9,8 + 10)} = \frac{4000}{216} = 18,51 \quad \text{m}$$

Para demostrar el último apartado del problema, al no haber fuerza de rozamiento, si hacemos $F_R = 0$ en la ecuación (6) nos queda

$$h = \frac{m v_0^2}{2mg} = \frac{v_0^2}{2g} = \frac{20^2}{2\cdot 9,8} = \frac{400}{19,6} = 20,4 \quad \text{m}$$

altura que es mayor que cuando considerábamos la fuerza de rozamiento.

Problema 4

A diferencia de los problemas considerados antes, ahora, al tener un muelle hemos de considerar la energía potencial elástica que posee cuando está comprimido. Si un muelle se comprime una distancia y respecto de su posición de equilibrio, la energía potencial que almacena es, como ya sabemos,

$$E_p = \frac{1}{2}\ k\ y^2 \tag{7}$$

donde k es la constante elástica del muelle. Como también tenemos rozamiento una vez más el principio de conservación de la energía se escribe

$$E_{M_i} = E_{M_f} + W_R \tag{8}$$

con la diferencia de que en la energía mecánica hemos de contar esta vez la energía cinética, la energía potencial gravitatoria (pues el cuerpo asciende por el plano) y la energía potencial elástica. Nos piden hallar qué velocidad adquiere el cuerpo cuando el muelle se destensa. Tomando como origen de alturas el punto donde se halla el cuerpo unido al muelle, la energía inicial vendrá dada por la energía potencial elástica, ya que el cuerpo no posee velocidad. Por lo tanto

$$E_{M_i} = \frac{1}{2}\ k\ y^2$$

La energía mecánica final vendrá dada por la potencial gravitatoria y por la cinética, pues al destensarse el muelle, éste no tiene energía elástica, luego

$$E_{M_f} = \frac{1}{2}\ mv^2 + mgh$$

El trabajo de rozamiento será como siempre $W_R = F_R\ \Delta e$. Sustituyendo todo en la ecuación (8)

$$\frac{1}{2}\ ky^2 = \frac{1}{2}\ mv^2 + mgh + F_R\ \Delta e \tag{9}$$

Vamos a hacer ahora algunas consideraciones respecto a la ecuación (9). La distancia y que está comprimido el muelle es igual al espacio Δe que recorre el cuerpo, entonces $y = \Delta e$. Por otra parte la distancia recorrida sobre el plano inclinado y la altura h están relacionadas por el $\sin\alpha$, como ya demostramos en el Problema 2, fórmula (4), de donde por lo dicho se deduce que

$$h = \Delta e\ \sin\alpha \quad \Rightarrow \quad h = y\ \sin\alpha$$

Teniendo en cuenta todo esto, la ecuación (9) se convierte en

$$\frac{1}{2}\ ky^2 = \frac{1}{2}\ mv^2 + mg\ y \sin\alpha + \mu mg \cos\alpha\ y \tag{10}$$

en la que hemos sustituido el valor de de F_R. Multiplicando la ecuación (10) por dos

$$ky^2 = mv^2 + 2mg\ y \sin\alpha + 2\mu mgy \cos\alpha$$

y despejando la velocidad

$$v = \sqrt{\frac{ky^2 - 2mg\ y \sin\alpha - 2\mu mgy \cos\alpha}{m}} \tag{11}$$

Sustituyendo en (11) los datos del problema, expresados en unidades del SI (30 g=0,03 kg y 15 cm =0,15 m)

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{\frac{100 \cdot 0,15^2 - 2 \cdot 0,03 \cdot 9,8 \cdot 0,15 \cdot \sin 20 - 2 \cdot 0,2 \cdot 0,03 \cdot 9,8 \cdot 0,15 \cdot \cos 20}{0,03}} \\ &= \sqrt{\frac{2,20325}{0,03}} = \sqrt{73,441} = 8,57 \quad \text{m/s} \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Problema 5}}$

Como el coche sube con velocidad constante, la potencia $\mathcal{P}$ desarrollada por el motor es

$$\mathcal{P} = F \cdot v \tag{12}$$

Al ascender por la pendiente, la fuerza necesaria para conseguirlo vendrá de sumar la componente tangencial del peso y la fuerza de rozamiento

$$F = F_T + F_R = mg \sin\alpha + \mu mg \cos\alpha \tag{13}$$

La pendiente es de un 10%, lo cual significa que por cada 100 m subidos a lo largo del plano se suben 10 m en altura, o sea, el porcentaje de la pendiente nos da el valor del seno del ángulo de la pendiente,

$$\sin\alpha = \frac{10}{100} = 0,1, \ \Rightarrow\ \cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-0,1^2} = \sqrt{0,99} = 0,9949$$

Sustituyendo los datos en la ecuación (13)

$$F = 1200 \cdot 9,8 \cdot 0,1 + 0,4 \cdot 1200 \cdot 9,8 \cdot 0,9949 = 5856,42 \quad \text{N}$$

Y con la velocidad, 90 km/h $\Rightarrow$ 25 m/s, sustiuyendo en (12)

$$\mathcal{P} = 5856,42 \cdot 25 = 146410,52 \ \ \text{W}$$

Para pasar la potencia a caballos, como 1 CV=735 W, dividiendo el último resultado entre 735

$$\mathcal{P} = \frac{146410,52}{735} = 199,19 \ \ \text{CV}$$

Problema 6

En un punto situado a una altura H, la energía mecánica de un cuerpo en reposo (v=0) será

$$E_{M_i} = E_c + E_p = \frac{1}{2}\,mv^2 + mgH = 0 + mgH = mgH \tag{14}$$

Cuando el cuerpo llega al suelo toda la energía mecánica será ahora energía cinética pues la altura es nula

$$E_{M_f} = E_c + E_p = \frac{1}{2}\,mv^2 + mg \cdot 0 = \frac{1}{2}\,mv^2 \tag{15}$$

Como la energía mecánica se conserva, $E_{M_i} = E_{M_f}$, igualando (14) y (15)

$$\frac{1}{2}\,mv^2 = mgH$$

Eliminando m, podemos determinar con qué velocidad llega el cuerpo al suelo, resultando ser

$$v = \sqrt{2gH} \tag{16}$$

Ahora nos dicen que la altura la multiplicamos por 2, por lo tanto la velocidad, llamémosla v', con que el cuerpo llega ahora al suelo será

$$v' = \sqrt{2g \cdot 2H} = \sqrt{4gH} = 2\sqrt{gH} \tag{17}$$

Dividiendo (17) entre (16) sabremos la relación entre las velocidades

$$\frac{v'}{v} = \frac{2\sqrt{gH}}{\sqrt{2gH}} = \frac{2\sqrt{gH}}{\sqrt{2}\sqrt{gH}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

y entonces

$$v' = \sqrt{2}v$$

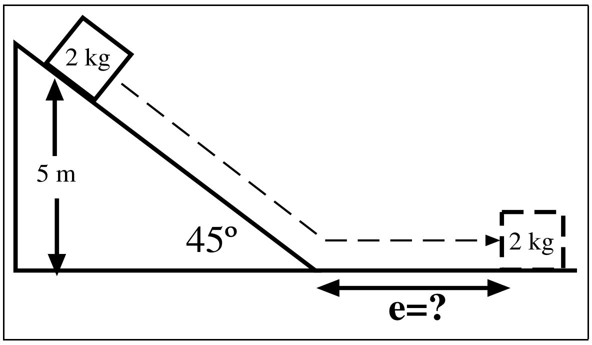
Al multiplicar la altura por 2, la velocidad **no** se multiplica por 2 sino por $\sqrt{2}$

Problema 7

La conservación de la energía mecánica, como tenemos rozamiento, será de nuevo

$$E_{M_i} = E_{M_f} + W_R$$

Vamos a fijarnos en el dibujo para comprender bien cuales son los valores iniciales y finales. Al principio el cuerpo se halla en reposo y a una altura de 5 m por lo que su energía mecánica será sólo potencial gravitatoria.



Al final el cuerpo ha vuelto al suelo y está en reposo por lo que su energía potencial es nula y la cinética también, luego la energía mecánica final será cero.

El trabajo de rozamiento habrá que dividirlo en dos partes ya que la fuerza de rozamiento no vale lo mismo sobre el plano inclinado y sobre el plano horizontal. Por todo ello, el principio de conservación de la energía mecánica se escribe ahora

$$mgh = W_{R_1} + W_{R_2}$$

donde W_{R_1} es el trabajo sobre el plano inclinado y W_{R_2} sobre el plano horizontal. En función de estos trabajos pues

$$mgh = F_{R_1}\Delta e_1 + F_{R_2}\Delta e_2 \tag{18}$$

El espacio que hemos de calcular es Δe_2 y es el que en la figura hemos representado por e. El espacio Δe_1 podemos ponerlo una vez más en función de la altura con la ecuación (4), $h = \Delta e \ \sin\alpha$, de donde

$$\Delta e_1 = \frac{h}{\sin\alpha} \tag{19}$$

Teniendo en cuenta el valor de la fuerza de rozamiento en cada plano y sustituyendo en (18)

$$mgh = \mu mg\cos\alpha\ \frac{h}{\sin\alpha} + \mu mg\Delta e_2 \tag{20}$$

En la ecuación (20) podemos eliminar el factor mg de todos sus miembros, obteniendo

$$h = \mu h \, \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \mu\Delta e_2 = \mu h \cot\alpha + \mu\Delta e_2 \tag{21}$$

Y finalmente el valor del espacio recorrido sobre el plano horizontal es

$$\Delta e_2 = \frac{h - \mu h \cot\alpha}{\mu} \tag{22}$$

Sustituyendo en (22) todos los valores

$$\Delta e_2 = \frac{5 - 0,2 \cdot 5 \cdot \cot 45}{0,2} = \frac{5 - 0,2 \cdot 5 \cdot 1}{0,2} = \frac{4}{0,2} = 20 \ \ \text{m}$$

FÓRMULAS USADAS EN LOS PROBLEMAS

Trabajo

$$W = F\Delta e \cos\varphi$$

Energía cinética

$$E_c = \frac{1}{2}\, mv^2$$

Energía potencial gravitatoria

$$E_p = mgh$$

Energía potencial elástica

$$E_{pe} = \frac{1}{2}\, ky^2$$

Trabajo de rozamiento

$$W_R = F_R\Delta e$$

Energía mecánica

$$E_M = E_c + E_p = \frac{1}{2}\, mv^2 + mgh$$

Conservación de la energía mecánica

$$E_{M_i} = E_{M_f}$$

Conservación de la energía mecánica en presencia de fuerzas de rozamiento no conservativas

$$E_{M_i} = E_{M_f} + W_R$$