Resolución de sistemas de ecuaciones

1. Aplica el teorema de Rouché para discutir si los siguientes sistemas son compatibles o incompatibles. Resuelve los sistemas 1, 7 y 9.

1	$2x+3y-z=4$ $x+2y=5$ $3y+z=1$	2	$x-2y+z=0$ $x-y=-1$ $x-4y+3z=4$	3	$x+y=7$ $2x-3y=4$ $2x+y=0$
4	$3x-2y=5$ $x+3y=-2$ $2x-y=3$	5	$4x+5y=7$ $2x-y=0$ $7x+11y=4$	6	$x+y+2z=7$ $3x-y+4t=1$ $x-3y-4z+4t=6$
7	$x+3y-z=1$ $2x+z=2$ $2y-z=0$	8	$x+3y-z=1$ $2x+z=2$ $2y-z=5$	9	$x+y+2z=7$ $3x-y+4t=1$ $x-3y-4z+4t=-13$

2. Demuestra que los siguientes sistemas son compatibles. Resuélvelos por la regla de Cramer.

10	$x+y+z=3$ $x-y-z=-1$ $3x+y-5z=-1$	11	$5x+2y=8$ $-3x+9y=1$	12	$x+y-4z-3t=-18$ $x+2y+z+5t=9$ $2x+2y-3z+2t=-8$ $6x+3y+z-2t=11$

3. Discute y resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones.

13	$x-y+3z=1$ $3x-y+2z=3$ $-2y+7z=0$	14	$x+y=3$ $y+z=5$ $x+z=4$ $5x-y+z=6$	15	$3x+4y=4$ $2x+6y=23$ $-2x+3y=1$

4. Resuelve los sistemas homogéneos

16	$x+y+z=0$ $2x-y+z=0$ $x-2y-z=0$	17	$x-y-z=0$ $x+y-2z=0$ $2x-4y-z=0$	18	$x-2y+3z=0$ $y+z=0$ $x-3y+2z=0$ $-x+5y=0$

5. Discute y resuelve según los valores de los parámetros a, k o m los sistemas.

19	$ax+y+z=1$ $x+ay+z=1$ $x+y+az=1$	20	$x+y=7$ $kx-y=11$ $x-4y=k$	21	$2x-my+6z=0$ $x+3y-mz=0$

6. Idem que el anterior pero para λ y a.

22	$x+(1-\lambda)y=\lambda$ $(1+\lambda)x-3y=-\lambda$	23	$(a-1)x+y=0$ $(a-1)x+(a+1)y=0$

7. Discute y resuelve según los valores de a y m.

24	$ax+y+z=a+2$ $2x-ay+z=2$ $x-y+az=a$	25	$x-y+mz=m$ $mx+y-z=m$ $(m+1)x+z=m+2$

8. Resuelve los sistemas en forma matricial

26 $$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

27 $$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Soluciones

1. Compatible y determinado. Soluciones: $x = 10$, $y = -\frac{5}{2}$, $z = \frac{17}{2}$.
2. Incompatible
3. Incompatible
4. Compatible y determinado
5. Incompatible
6. Incompatible
7. Compatible indeterminado. Soluciones: $x = \frac{2-\lambda}{2}$, $y = \frac{\lambda}{2}$, $z = \lambda$.
8. Incompatible
9. Compatible e indeterminado. Soluciones: $x = 2 - \frac{\lambda}{2} - \mu$, $y = 5 - \frac{3\lambda}{2} + \mu$, $z = \lambda$, $t = \mu$.
10. $r(A) = r(A') = 3$. $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$,
11. $r(A) = r(A') = 2$. $x = \frac{70}{51}$, $y = \frac{29}{51}$.
12. $r(A) = r(A') = 4$. $x = 2$, $y = -1$, $z = 4$, $t = 1$.
13. Sistema compatible indeterminado. $x = \frac{\lambda+2}{2}$, $y = \frac{7\lambda}{2}$, $z = \lambda$
14. $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$
15. Sistema incompatible
16. Solución trivial. $x = y = z = 0$.
17. $x = \frac{3\lambda}{2}$, $y = \frac{\lambda}{2}$, $z = \lambda$
18. $x = -5\lambda$, $y = -\lambda$, $z = \lambda$
19. Si $a \neq 1$ y $a \neq -2$. Sistema compatible y determinado. $x = \frac{1}{a+2}$, $y = \frac{1}{a+2}$, $z = \frac{1}{a+2}$. Si $a = 1$, sistema compatible indeterminado. $x = 1 - \lambda - \mu$, $y = \mu$, $z = \lambda$. Si $a = -2$, sistema incompatible.

20. Si $k \neq -31$ y $k \neq 2$, $r(A) = 2$ y $r(A') = 3$, sistema incompatible. Si $k = 2$, sistema compatible determinado, $x = 6$, $y = 1$. Si $k = -31$, sistema compatible y determinado y $x = -\frac{3}{5}$, $y = \frac{38}{5}$

21. Al ser sistema homogéneo siempre tendremos la solución trivial, $x = y = z = 0$. Si $m \neq -6$, sistema compatible indeterminado, $x = -\frac{18\lambda - m^2\lambda}{m+6}$, $y = \frac{2\lambda(m+3)}{m+6}$, $z = \lambda$. Si $m = 6$ sistema compatible indeterminado, $x = 3\lambda - 3\mu$, $y = \mu$.

22. (a) Si $\lambda \neq 2$ y $\lambda \neq -2$ sistema compatible determinado. $x = \frac{-\lambda}{\lambda - 2}$, $y = \frac{-\lambda}{\lambda - 2}$.
    (b) Si $\lambda = 2$ sistema incompatible.
    (c) Si $\lambda = -2$ sistema compatible indeterminado. $x = -2 - 3k$, $y = k$.

23. Si $a \neq 0$ y $a \neq 1$, $r(A) = r(A') = 2$. La solución es la trivial, $x = y = 0$. Si $a = 0$ $r(A) = r(A') = 1$. Sistema compatible, $x = \lambda$, $y = \lambda$.

24. Si $a \neq -1$ sistema compatible y determinado. $x = \frac{a^2}{a^2 - a + 1}$, $y = \frac{a}{a^2 - a + 1}$, $z = \frac{a^2 - 2a + 2}{a^2 - a + 1}$. Si $a = -1$ sistema compatible e indeterminado. $x = \frac{1}{3}$, $y = \frac{4 - 3\lambda}{3}$, $z = \lambda$.

25. Si $m \neq 2$ y $m \neq -1$, sistema compatible y determinado, $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$. Si $m = -1$, $x = \lambda$, $y = \lambda$, $z = 1$. Si $m = 2$, $x = \frac{4 - \lambda}{3}$, $y = \frac{5\lambda - 2}{3}$, $z = \lambda$.

26.
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

27.
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$